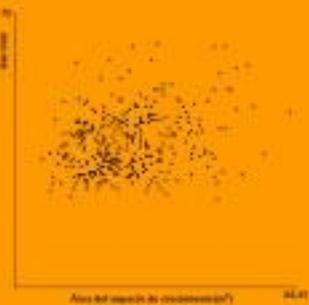
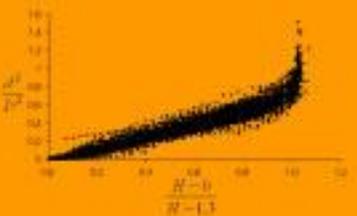
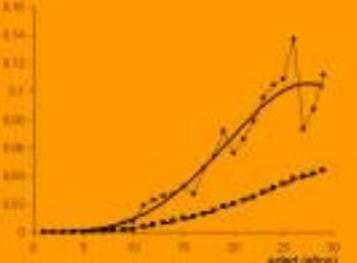
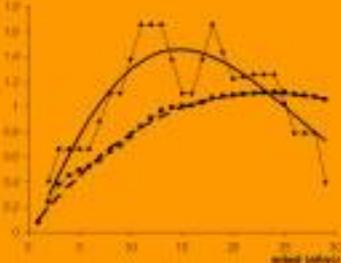
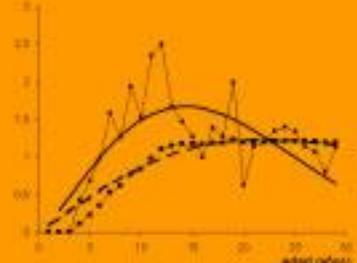
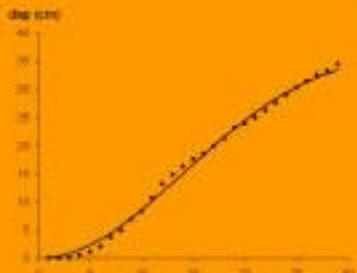
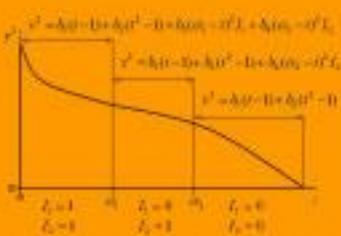
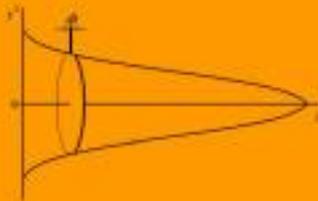


Dendrometría Básica



Jorge Cancino



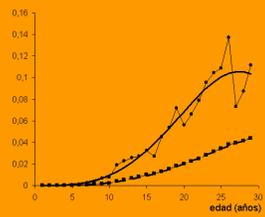
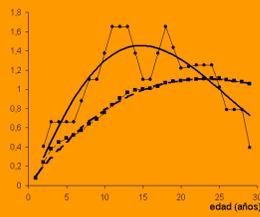
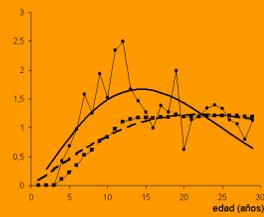
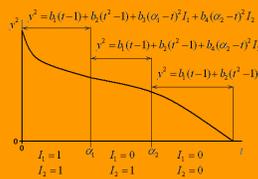
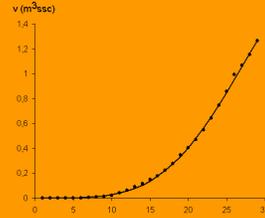
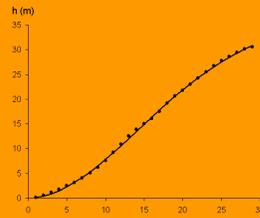
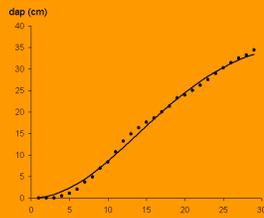
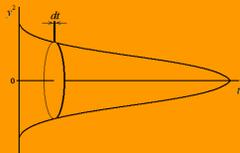
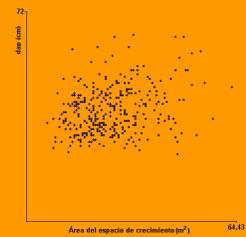
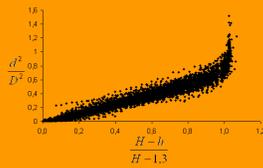
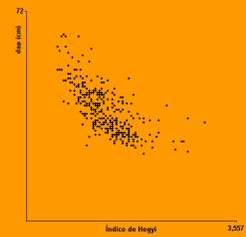
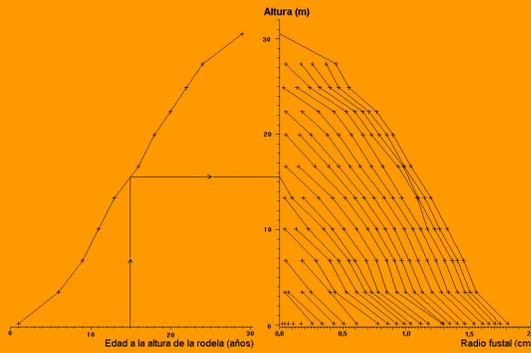
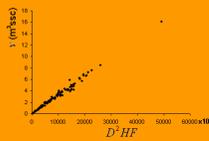
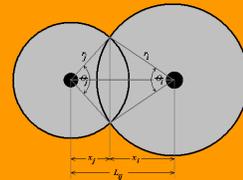
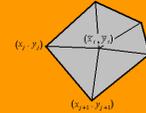
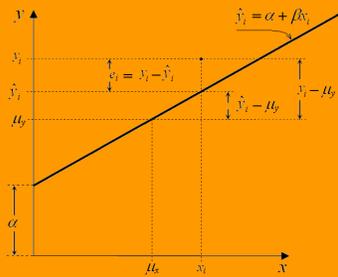
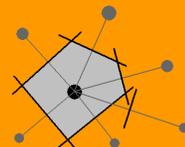
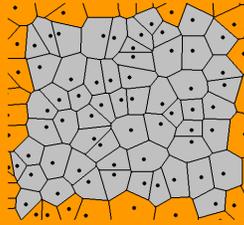
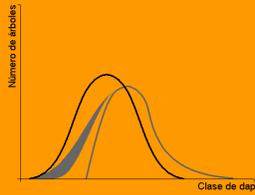
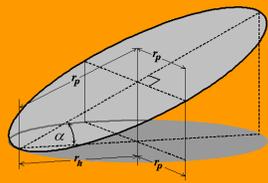


Tabla de Contenidos

<i>Presentación</i>	<i>i</i>
1 Conceptos básicos sobre regresión y correlación	1
1.1 Supuestos básicos de regresión.....	2
1.2 Los supuestos de regresión en Dendrometría.....	6
1.3 Estimación de los parámetros del modelo de regresión lineal simple.....	7
1.3.1 El método de mínimos cuadrados ordinarios.....	7
1.3.2 El método de mínimos cuadrados ponderados.....	9
1.4 Las varianzas en regresión lineal simple.....	10
1.4.1 La varianza en torno a la línea de regresión.....	10
1.4.2 Las varianzas de la distribución muestral de \bar{y} y \bar{x}	12
1.4.2.1 Varianza de la distribución muestral de \bar{y}	12
1.4.2.2 Varianza de la distribución muestral de \bar{x}	12
1.4.2.3 Varianza de la distribución muestral de \bar{y} y \bar{x}	13
1.5 Componentes de la suma de desvíos al cuadrado en regresión y el coeficiente de determinación.....	14
1.5.1 Componentes de la suma de desvíos al cuadrado en regresión.....	14
1.5.2 El coeficiente de determinación.....	15
1.6 Estimadores de regresión.....	16
1.6.1 Distribución en el muestreo.....	17
1.6.2 Estimación de parámetros.....	18
1.6.3 Determinación del tamaño de la muestra.....	21
Referencias.....	21
2 Caracterización de rodales	22
2.1 Recopilación de información en terreno.....	22
2.1.1 Trazado de parcelas de muestreo.....	22
2.1.1.1 Parcela cuadrada en la horizontal.....	23
2.1.1.2 Parcela cuadrada en la pendiente.....	24
2.1.1.3 Parcela circular en la pendiente.....	24
2.1.1.4 Parcelas concéntricas.....	24
2.1.2 Otros tipos de unidades muestrales.....	25
2.1.2.1 Parcelas Bitterlich.....	25
2.1.2.2 Métodos de distancia.....	26
2.2 Medición del diámetro y altura en árboles.....	26
2.2.1 Medición del dap.....	26
2.2.1.1 Altura de medición del dap.....	26
2.2.1.2 Instrumentos para medición del dap.....	27
2.2.1.3 Precauciones en la medición del dap.....	27
2.2.2 Medición de alturas.....	27
2.2.2.1 Precauciones en la medición de alturas.....	30
2.3 Procesamiento de la información muestral.....	31
2.3.1 Variables de estado del rodal.....	31
2.3.1.1 Dap promedio.....	32
2.3.1.2 Altura promedio.....	33
2.3.2 La relación entre la altura y el dap del árbol.....	34
2.3.3 Estimación del volumen.....	36
2.3.3.1 Determinación del volumen sin agrupamiento de diámetros.....	36
2.3.3.2 Determinación del volumen con agrupamiento de diámetros.....	36
2.3.3.3 Tablas de rodal y de existencia.....	37

2.3.3.3.1	Tabulación de la información muestral (dap).....	37
2.3.3.3.2	Obtención de los valores en las Tablas de rodal y de existencia.....	38
2.3.3.3.2.1	Número de árboles por hectárea.....	38
2.3.3.3.2.2	Área basal por hectárea.....	39
2.3.3.3.2.3	Altura.....	39
2.3.3.3.2.4	Volumen.....	40
3	Medición y estimación del volumen.....	42
3.1	<i>Medición y estimación del volumen en árboles individuales y productos.....</i>	<i>42</i>
3.1.1	Métodos para la determinación directa del volumen en árboles individuales.....	42
3.1.1.1	Método analítico.....	42
3.1.1.1.1	Fórmulas de Smalian, Huber y Newton.....	43
3.1.1.1.2	Fórmula general de Grosenbaugh.....	46
3.1.1.1.3	Fórmula del centroide.....	46
3.1.1.1.4	Muestreo por importancia.....	49
3.1.1.2	Método gráfico.....	51
3.1.1.3	Desplazamiento de líquidos.....	52
3.1.1.4	Método de densidad.....	53
3.1.2	Unidades para expresar el volumen.....	53
3.1.3	Relaciones funcionales de volumen.....	54
3.1.3.1	Funciones de volumen individual.....	54
3.1.3.2	Función de volumen individual con dlu variable.....	56
3.1.4	Criterios para seleccionar modelos.....	57
3.1.4.1	El índice de Furnival.....	58
3.1.4.2	El índice de Akaïke.....	59
3.2	<i>Determinación del volumen en rodales.....</i>	<i>59</i>
3.2.1	Funciones de volumen agregado.....	60
3.2.2	Estimación del volumen agregado a partir de funciones de volumen individual.....	60
3.2.2.1	Determinación del volumen sin agrupamiento de diámetros.....	60
3.2.2.2	Determinación del volumen con agrupamiento de diámetros.....	60
	<i>Referencias.....</i>	<i>61</i>
4	Estudio de la forma del fuste.....	62
4.1	<i>Estudio de la forma mediante factores y cuocientes.....</i>	<i>62</i>
4.1.1	Factores de forma.....	62
4.1.1.1	Factor de forma artificial.....	62
4.1.1.2	Factor de forma natural.....	63
4.1.2	Cuocientes de forma.....	63
4.1.2.1	Cuociente de forma normal.....	64
4.1.2.2	Cuociente de forma absoluto.....	64
4.1.2.3	Clase de forma de Girard.....	65
4.1.3	Punto de forma.....	65
4.2	<i>Estudio de la forma mediante funciones de perfil fustal.....</i>	<i>65</i>
4.2.1	Sólidos de revolución.....	65
4.2.2	Funciones de ahusamiento.....	66
4.2.2.1	Modelación del perfil fustal.....	67
4.2.2.1.1	Definición de variables para el ajuste de modelos de ahusamiento.....	67
4.2.2.1.2	Estimación del volumen mediante funciones de ahusamiento.....	69
4.2.2.1.3	Relación entre el ahusamiento fustal y factor de forma cilíndrico.....	69
4.2.2.1.4	Modelos de ahusamiento.....	71

4.2.2.1.4.1 Modelo simples.....	71
Polinomio cuadrático.....	73
Obtención del diámetro y la altura comercial.....	75
Polinomio de grado 5.....	75
Modelo trigonométrico.....	75
Modelo de Real y Moore.....	75
Modelo de Bruce.....	77
4.2.2.1.4.2 Polinomios segmentados.....	78
Modelos compuestos de dos submodelos.....	78
Unión de dos submodelos cuadráticos.....	78
Unión de dos submodelos cúbicos completos.....	79
Unión de dos submodelos cúbicos (uno incompleto).....	79
Unión de un submodelo cúbico incompleto y un cuadrático completo.....	80
Modelos compuestos de tres submodelos.....	80
Modelo cuadrático-lineal-cuadrático.....	80
Modelo cuadrático-cuadrático-cuadrático.....	81
4.2.2.1.4.3 Modelos de ahusamiento de forma variable.....	82
4.2.2.1.4.4 Funciones de ahusamiento compatibles.....	84
4.2.2.1.5 Incorporación de restricciones a la altura de medición del dap y otra altura en el fuste.....	85
4.2.2.2 La muestra para el ajuste de modelos.....	87
4.2.2.3 El ajuste de modelos de ahusamiento.....	88
4.2.2.3.1 Ajuste promedio.....	88
4.2.2.3.2 Ajuste individual simultáneo.....	89
4.2.2.4 Criterios usados para seleccionar modelos.....	90
4.2.2.5 Validación de funciones de ahusamiento.....	94
Referencias.....	94

5 Biomasa.....97

5.1 Componentes de la biomasa.....	97
5.2 Métodos para determinar la biomasa.....	98
5.2.1 Determinación directa de la biomasa.....	98
5.2.1.1 Separación de componentes.....	99
5.2.1.2 Biomasa en árboles individuales.....	100
5.2.1.2.1 Fuste.....	100
5.2.1.2.2 Corteza.....	101
5.2.1.2.3 Copa.....	101
5.2.1.2.3.1 Ramas gruesas.....	101
5.2.1.2.3.2 Biomasa foliar.....	101
5.2.1.2.4 Raíces.....	102
5.2.1.2.4.1 Cuello de raíz y raíces laterales.....	102
5.2.1.2.4.2 Muestreo de raíces pequeñas y/o distales.....	103
5.2.1.3 El muestreo aleatorizado de ramas.....	103
5.2.1.3.1 Descripción de los métodos RBS.....	105
5.2.1.3.1.1 RBS clásico.....	105
5.2.1.3.1.2 RBS con swor en la primera etapa (swor_swor).....	107
5.2.1.4 Determinación de razones de peso seco y otros factores.....	108
5.2.1.4.1 Peso fresco.....	108

5.2.1.4.2	Peso seco.....	109
5.2.1.4.3	Razones de peso seco.....	109
5.2.1.4.4	Fracciones de peso seco.....	109
5.2.1.4.5	Densidad de la madera.....	110
5.2.1.4.6	Factor de expansión de la biomasa.....	111
5.3	<i>Estimación de la densidad de biomasa en formaciones forestales.....</i>	<i>111</i>
5.3.1	Dosel principal.....	111
5.3.2	Sotobosque.....	113
5.3.3	Desechos leñosos y litera.....	113
5.3.4	Raíces.....	113
5.4	<i>Desarrollo de funciones de biomasa individual.....</i>	<i>113</i>
5.4.1	Mediciones de terreno para desarrollar funciones de biomasa.....	114
5.4.1.1	Diámetro de fuste.....	114
5.4.1.2	Altura del árbol.....	114
5.4.1.3	Dimensiones de la copa.....	114
5.4.2	Modelos de regresión.....	115
5.4.3	Aditividad de los componentes de la biomasa.....	117
5.4.3.1	Suma de componentes individuales.....	117
5.4.3.2	Variables explicatorias comunes.....	118
5.4.3.3	Estimación simultánea.....	118
	<i>Referencias.....</i>	<i>119</i>

6 Crecimiento.....121

6.1	<i>Crecimiento en árboles individuales.....</i>	<i>122</i>
6.1.1	El crecimiento en diámetro, altura y volumen de árboles individuales.....	123
6.1.1.1	Crecimiento en diámetro.....	124
6.1.1.2	Crecimiento en altura.....	125
6.1.1.3	Crecimiento en volumen.....	125
6.1.2	Análisis fustal.....	126
6.1.2.1	Graficación de la información obtenida del análisis fustal.....	127
6.1.2.2	Otras opciones para determinar altura.....	128
6.1.2.2.1	Fórmula de Lenhart.....	129
6.1.2.2.2	Fórmula de Carmean.....	129
6.1.3	Formas para expresar el crecimiento.....	130
6.1.3.1	La tasa de crecimiento expresado como interés simple.....	130
6.1.3.2	La tasa de crecimiento expresado como interés compuesto.....	131
6.1.3.3	La tasa de crecimiento expresado como interés continuo.....	131
6.1.4	Modelos de crecimiento.....	131
6.2	<i>El crecimiento de rodales.....</i>	<i>133</i>
6.2.1	Tipos de crecimiento.....	135
6.2.2	Proyección directa del crecimiento.....	136
6.2.2.1	Proyección de la tabla de rodal.....	136
6.2.2.1.1	Distribución discreta.....	137
6.2.2.1.2	Distribución homogénea.....	137
6.2.2.1.3	Distribución individual.....	138
6.2.2.2	Proyección de la tabla de rodal agregada.....	138
6.2.3	Métodos indirectos para estimar el crecimiento.....	139
6.2.3.1	Tablas de rendimiento.....	140
6.2.3.2	Construcción de tablas de rendimiento.....	140
6.2.3.2.1	Funciones de mortalidad.....	140
6.3	<i>Modelos simuladores del crecimiento.....</i>	<i>141</i>

6.3.1 Definiciones.....	142
6.3.2 Construcción de un Modelo Simulador.....	143
<i>Referencias</i>	144
7 Estructura y densidad de rodales.....	146
7.1 <i>Estructura de rodal</i>	146
7.1.1 Modelación de la distribución diamétrica.....	146
7.1.1.1 La distribución Weibull.....	147
7.1.2 Rodales coetáneos.....	148
7.1.3 Rodales heteroetáneos.....	148
7.1.3.1 El concepto de rodal heteroetáneo balanceado.....	148
7.1.3.2 Generación de una distribución balanceada del dap.....	150
7.2 <i>Densidad</i>	153
7.2.1 Densidad de rodal.....	154
7.2.1.1 Índices de densidad de rodal.....	155
7.2.1.1.1 El número de árboles.....	155
7.2.1.1.2 Área basal.....	155
7.2.1.1.3 Índice de Reineke.....	155
7.2.1.1.4 Factor de competencia de copas.....	157
7.2.1.1.5 Índices de espaciamiento.....	158
7.2.1.1.5.1 Cuocientes de espaciamiento.....	158
7.2.1.2 Índices para árboles individuales.....	158
7.2.1.2.1 Índices de densidad puntual.....	159
7.2.1.2.2 Índices de competencia individual.....	159
7.2.1.2.2.1 El índice de Bella.....	161
7.2.1.2.2.2 El índice de Hegyi.....	162
<i>Referencias</i>	162

Presentación

Dendrometría Básica es un documento destinado a los estudiantes forestales que inician su aprendizaje en mensura forestal. El nombre dado al documento deriva del hecho de que está orientado principalmente a la medición de árboles, pero también incorpora elementos relacionados con la determinación del crecimiento (Epidometría), y de medición de rodales (Dasometría).

El texto incluye la descripción de mediciones básicas en árboles y rodales, y del procesamiento de la información recopilada, mostrando con especial énfasis el desarrollo de técnicas de estimación. Aunque éstas incorporan elementos de trigonometría y cálculo, es el método estadístico de regresión el de más amplio uso en mensura forestal. Así, un nivel de conocimiento aceptable en regresión es necesario para facilitar el aprendizaje en esta área del conocimiento. El reconociendo tácito de la importancia de esta herramienta está dado por la inclusión de la técnica de regresión en el Capítulo 1. El Capítulo 2 trata de la recopilación de información en terreno; allí se entrega también una descripción general del procesamiento de la información recopilada para obtener variables a nivel de unidad de superficie de rodal. Los Capítulos restantes están destinados al análisis de tópicos específicos, esto es volumen en el Capítulo 3, forma fustal en el Capítulo 4, biomasa en el Capítulo 5, crecimiento en el Capítulo 6, y estructura y densidad de rodal en el Capítulo 7.

El nivel de detalle en cada Capítulo está pensado para que el aprendiz pueda captar los conceptos detrás de cada técnica y pueda realizar aplicaciones prácticas típicas en esta área del conocimiento. Así, este documento no sólo es una guía útil para quien está iniciando su formación, sino también para el profesional que labora en este campo. Es de esperar que el documento contribuya en forma significativa a todos aquellos que decidan invertir tiempo en su lectura; asimismo, el autor agradecerá a todo aquel que con sus observaciones y comentarios contribuya al mejoramiento permanente del mismo.

1 Conceptos básicos sobre regresión y correlación

El análisis de regresión es un método estadístico para el estudio de la interdependencia entre variables. El análisis se centra en el estudio de la relación matemática entre variables, con el objetivo de predecir valores de una o más variables dependientes a partir de un conjunto de variables predictoras. El análisis asume que la variable predictora o independiente es no aleatoria, esto es que puede ser manipulada por el experimentador. El análisis de correlación, en tanto, se ocupa de la fuerza o intensidad de la asociación entre las variables. Asume que todas las variables son aleatorias.

En el análisis de regresión, la interdependencia entre variables se expresa a través de relaciones matemáticas (funciones). Por su intermedio puede conocerse cuánto cambia la variable dependiente (y) por unidad de cambio en la variable independiente (x), y predecirse el valor de y asociado a un valor específico de x . La utilidad de una función radica en que a partir del conocimiento de una o más variables fáciles de medir puede estimarse otra variable difícil, cara o imposible de medir en condiciones normales de muestreo. Ello permite aumentar la eficiencia y reducir el costo de las estimaciones.

El modelo de regresión lineal básico es

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_i + \varepsilon_i,$$

donde:

y_i es la variable dependiente en el i -ésimo individuo de la población,

x_i es la variable independiente en el mismo individuo,

ε_i es un desvío o error aleatorio,

β_0, β_1 son los parámetros de la regresión.

La variable dependiente también se denomina variable de *interés*, porque es ésta la variable que interesa estimar a partir de la variable independiente. Esta, a su vez, recibe también el nombre de variable auxiliar, ya que a partir de ésta se puede conocer el valor de la variable dependiente en el modelo. En el análisis, cada individuo aporta un par de valores (y_i, x_i) , el que graficado en un sistema de coordenadas cartesianas corresponde a un punto (Fig. 1), y cuya posición es exactamente representada mediante la relación $y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_i + \varepsilon_i$. La línea recta, cuyo modelo matemático es $\hat{y}_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_i$, representa la línea de regresión poblacional.

En el análisis de regresión, el problema básico radica en estimar los parámetros de la función de regresión poblacional, de la manera más exacta posible, a partir de observaciones contenidas en una muestra. Normalmente se acompaña del análisis de correlación, sobre el grado o fuerza de asociación lineal entre esas variables.

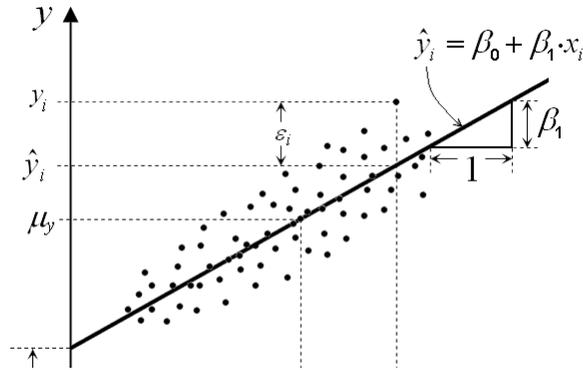


Figura 1. Gráfico de dispersión de puntos y la línea de regresión poblacional lineal simple.

A continuación se describen aspectos generales relacionados con el ajuste de modelos de regresión. Primero se revisan los supuestos básicos de regresión, las consecuencias de su violación y pruebas para la detección de su cumplimiento; más adelante se presenta el ajuste de modelos. En los supuestos que se presentan a continuación, los parámetros de la regresión se expresan en términos generales como β y los estimadores respectivos como b_i .

1.1 Supuestos básicos de regresión

El método más usado en el análisis de regresión es el de cuadrados mínimos ordinarios (CMO). Su nombre deriva del procedimiento utilizado para obtener los estimadores de los parámetros de la regresión, consistente en minimizar la suma de los cuadrados de los desvíos de los valores observados respecto de la línea de estimación (ver Fig. 1). El método CMO es computacionalmente simple y, cuando se cumplen ciertos supuestos, presenta varias propiedades estadísticas que lo hacen eficaz (Gujarati 1981).

Supuesto 1. Valor esperado de los desvíos cero.

$$E(\varepsilon_i | x_i) = 0.$$

El valor esperado de los desvíos de la población de valores y , respecto de su valor promedio, es cero para cualquier valor fijo de x (Fig. 2). Ello implica que las estimaciones de los valores medios de y en cada nivel de x son insesgadas.

La violación de este supuesto sólo afecta el intercepto de la regresión (la constante b_0), cuando el valor esperado de los desvíos es constante para los diferentes valores de x . Por el contrario, si el valor esperado varía entre valores de x , la estimación de los coeficientes de regresión ($b_i; i \geq 1$) puede ser sesgada e inconsistente.

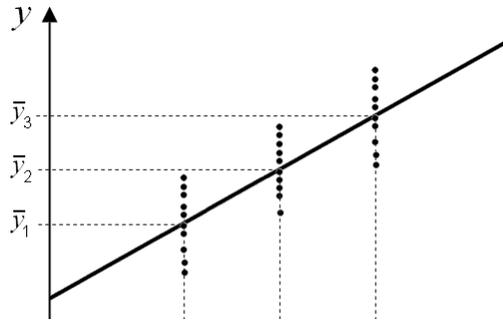


Figura 2. Valor esperado de los desvíos en tres diferentes niveles de la variable explicatoria x .

Supuesto 2. No hay autocorrelación entre los desvíos.

$$\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j) = E\{[\varepsilon_i - E(\varepsilon_i)][\varepsilon_j - E(\varepsilon_j)]\} = E(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j) = 0; \quad i \neq j.$$

El supuesto es que no hay (auto)correlación entre los desvíos ε_i y ε_j . Esto implica que para cualquier valor dado de x , los desvíos de y respecto de su valor promedio no presentan ningún patrón sistemático (Fig. 3). La detección de la autocorrelación se realiza mediante la prueba de Durbin-Watson.

Supuesto 3. Homocedasticidad de varianza.

$$\text{var}(\varepsilon_i | x_i) = E[\varepsilon_i - E(\varepsilon_i)]^2 = E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2.$$

La varianza de los valores de y es una constante igual a σ^2 , independientemente del valor de x (Fig. 4, izquierda). Cuando este supuesto no se cumple (Fig. 4, derecha) los estimadores CMO son insesgados y consistentes, pero ya no son eficientes para ningún tamaño de muestra; es decir, su varianza ya no es mínima. Esto implica que los intervalos de confianza para los parámetros de la regresión (β) serán innecesariamente anchos y las pruebas t y F de significancia tendrán menor potencia.

Al usar CMO cuando hay heterogeneidad de varianza, los estimadores de los coeficientes no tienen varianza mínima y los estimadores de la varianza de los coeficientes estimados son sesgados. Así, se altera el nivel de confianza de las pruebas de hipótesis de los parámetros del modelo y la precisión de las estimaciones realizadas con el modelo, las cuales tendrán una distribución muestral más amplia que la asumida para el modelo. El componente de error en la función es difícil de estimar cuando la varianza tiene un sesgo desconocido (Gregoire y Dyer 1989).

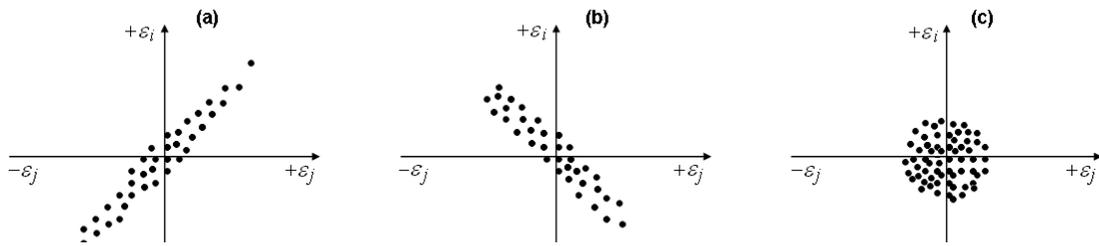


Figura 3. Diferentes patrones de autocorrelación: (a) positiva; (b) negativa; (c) ninguna

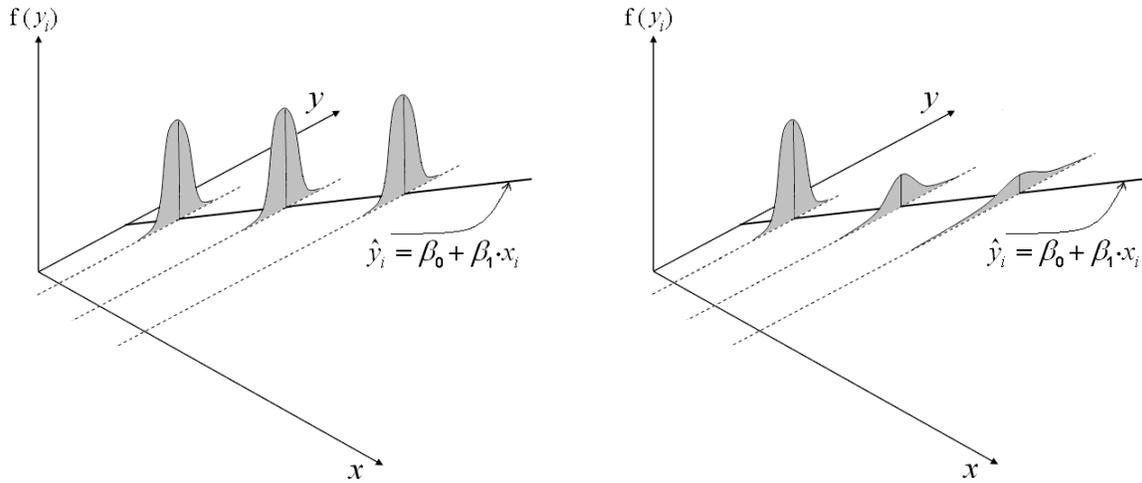


Figura 4. Homogeneidad de varianza (izquierda); heterogeneidad de varianza (derecha).

Hay dos opciones para el ajuste de modelos con errores heterogéneos. La primera es modelar la heterogeneidad de varianza y eliminar su efecto en la estimación de los parámetros del modelo, esto es utilizando regresión ponderada o cuadrados mínimos ponderados. La segunda es ignorar la heterogeneidad, pero usar métodos de ajuste resistentes a esa heterogeneidad.

La modelación de la heterogeneidad requiere datos medidos en cada nivel de x . De lo contrario es necesario dividir la muestra en intervalos arbitrarios uniformes (igual amplitud) y pequeños, y tomar una muestra grande para estimar bien el patrón de varianza (Gregoire y Dyer 1989).

Para la detección de la heteroscedasticidad se puede hacer un análisis de regresión bajo el supuesto de que ésta no existe; posteriormente se hace un análisis gráfico de los residuos, graficando el cuadrado de los desvíos contra el valor estimado de y (Fig. 5) o contra el valor de x . Otra opción es agrupar valores de y y calcular la varianza para diferentes valores de x . Esos datos pueden analizarse mediante regresión o mediante una prueba de Bartlett.

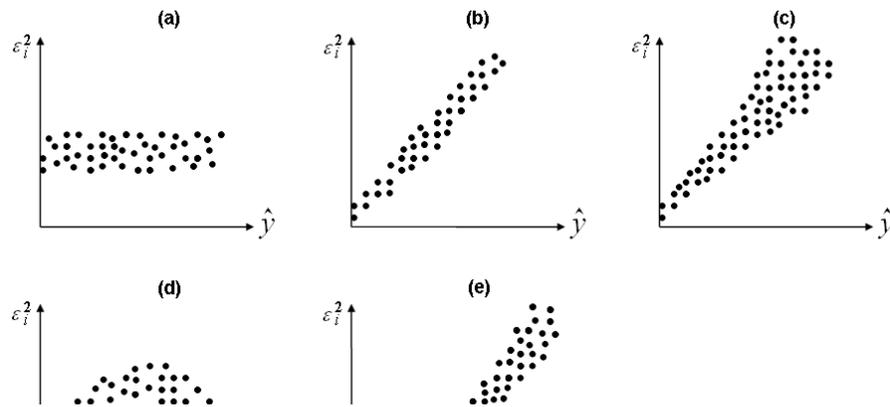


Figura 5. Patrones de los cuadrados de desvíos respecto a y estimado: a) ninguno; b, c) lineal; d, e) cuadrático.

Supuesto 4. Distribución normal de los desvíos.

$$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2).$$

Los desvíos se distribuyen normalmente, con media cero y varianza σ^2 (ver Fig. 4, izquierda). El supuesto involucra los tres supuestos anteriores:

$$E(\varepsilon_i | x_i) = 0,$$

$$E(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j) = 0; \quad i \neq j,$$

$$E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2,$$

Cuando el supuesto de normalidad se cumple, los estimadores CMO de los parámetros de la regresión y de la varianza (β y σ^2) presentan las siguientes características:

- 1) Son insesgados.
- 2) Tienen varianza mínima. Además de ser insesgados, los estimadores son eficientes; esto es exactos, precisos e insesgados.
- 3) Son consistentes. A medida que el tamaño de la muestra aumenta, el valor de los estimadores tiende al valor del parámetro; la distribución muestral se reduce de amplitud.
- 4) $b_i \sim N(\beta_i, \sigma_{b_i}^2)$. Los estimadores de los parámetros de la regresión (β_i) están normalmente distribuidos, con media igual al parámetro y varianza conocida.
- 5) La varianza de los parámetros de la regresión (β_i) es mínima. Esto significa que los estimadores son precisos.

La violación del supuesto de normalidad no es importante si el objetivo es sólo realizar estimaciones, porque los estimadores siguen siendo insesgados. Sí es importante para pruebas de hipótesis y predicción, ya que en éstas se usa el valor de t . Sin embargo, aunque no haya normalidad en los desvíos, los estimadores CMO tienden a distribuirse normalmente a medida que el tamaño de la muestra aumenta.

Supuesto 5. No hay multicolinealidad entre las variables explicatorias.

La multicolinealidad se refiere a la existencia de una relación lineal entre las variables independientes. Cuando existe y es perfecta (exacta) los parámetros de la regresión (β) son indeterminados y su error estándar es infinito; cuando no es tan exacta, la estimación de los parámetros de la regresión (β) es posible, pero sus errores estándar tienden a ser grandes.

La señal más clara de la presencia de multicolinealidad es cuando R^2 es muy alto, pero los coeficientes de regresión no son significativos. Otra forma de detectarla es estimar cada x_i en función de las restantes x del modelo y obtener los coeficientes de determinación correspondientes (R_i^2); un valor alto de éste para una x_i específica señala que esa x_i está altamente correlacionada con el resto de las x , pudiendo ésta ser eliminada del modelo (Gujarati 1981).

1.2 Los supuestos de regresión en Dendrometría

El análisis de regresión es de uso común en Dendrometría, para la modelación de la relación entre variables. En este campo, una variable de gran interés es el volumen de madera contenido en el fuste de los árboles. Así, tradicionalmente, se han realizado importantes esfuerzos para obtener modelos que estimen con precisión el volumen a partir de variables de medición fácil, como el diámetro y la altura total del árbol. Por cierto, parte de estos esfuerzos han estado orientados a determinar el cumplimiento de los supuestos básicos de regresión. En la práctica, es habitual detectar que uno o más de los supuestos no se cumplen.

En el caso específico de estimar el volumen, la muestra de árboles no satisface tres asunciones básicas del método CMO: a) distribución normal respecto al dap; b) homogeneidad de varianza respecto a $dap^2 \cdot altura$; y c) muestreo aleatorio simple. Esta última asunción se aplica en la estimación de intervalos de confianza, pero normalmente se toma una muestra distinta, estratificada o por conglomerados, cuyas varianzas son bastante más grandes que las del muestreo aleatorio simple (Cunia 1964).

La heterogeneidad de varianza parece ser la asunción más importante, ya que tener buenos estimadores de los volúmenes de los árboles (e.g. una función de volumen) a menudo interesa más que estimar los intervalos de confianza. Una solución a la heterogeneidad de varianza es transformar mediante logaritmos el volumen, pero esta transformación introduce sesgos en las estimaciones. En este caso, el modelo estima la media geométrica en vez de la media

aritmética, siendo la primera menor que la segunda; así, se subestima el valor esperado. La solución insesgada es aplicar cuadrados mínimos ponderados (CMP) estudiando el patrón de varianza (Cunia 1964).

Una opción para aplicar CMP es estratificar la población en la mayor extensión posible, esto es con n estratos (siendo n el tamaño de la muestra) basados en la variable dap^2 ; luego se selecciona una unidad (árbol) por estrato, ya sea al azar o con probabilidad proporcional al tamaño. Este procedimiento permite obtener estimadores menos sesgados y muy eficientes (Schreuder y Ouyang 1991).

1.3 Estimación de los parámetros del modelo de regresión lineal simple

1.3.1 El método de mínimos cuadrados ordinarios

El modelo de regresión lineal simple poblacional es $y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_i + \varepsilon_i$, en el que y_i y x_i son, respectivamente, la variable de interés y la variable auxiliar en el i -ésimo individuo de la población; ε_i es un desvío aleatorio; β_0 y β_1 son los parámetros de la regresión (ver Fig. 1). Al operar con una muestra, el modelo de regresión se expresa mediante $y_i = b_0 + b_1 \cdot x_i + \varepsilon_i$, en el que b_0 y b_1 son, respectivamente, los estimadores de la constante β_0 y del coeficiente β_1 de la regresión poblacional. En lo que se describe a continuación se asume que se está operando con una muestra de tamaño n , a partir de la cual se derivan fórmulas para los estimadores. Esas fórmulas son también válidas para el trabajo con todos los individuos de la población; basta cambiar el límite n de las sumatorias por N (el tamaño de la población) y los símbolos de los estimadores por aquellos de los parámetros (b_0 por β_0 y b_1 por β_1). Aunque aquí el trabajo se centra en un modelo lineal simple, la metodología que se describe es aplicable también a regresión lineal múltiple. En este caso, naturalmente, el proceso es más complejo; así, el ajuste es más aconsejable realizarlo mediante matrices.

Existen diferentes métodos para la obtención de los estimadores b_0 y b_1 de los parámetros poblacionales. El más conocido es el de cuadrados mínimos ordinarios (CMO). Mediante este método, los valores de b_0 y b_1 se obtienen de manera que la suma de desvíos al cuadrado $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$ sea mínima. Cuando los supuestos de regresión se cumplen, especialmente el referido a homogeneidad de varianzas, el método es eficiente.

El ajuste del modelo de regresión, cuando el supuesto de homogeneidad de varianzas se cumple, se realiza a partir de la suma simple de los desvíos al cuadrado (relación [1]). La minimización de la función de desvíos implica que las primeras derivadas parciales de la suma de desvíos al cuadrado, respecto de cada estimador de los parámetros de regresión, deben ser iguales a cero.

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2 \quad [1]$$

La primera derivada de la suma de desvíos con respecto a la constante de regresión b_0 es

$$\frac{\partial(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2)}{\partial b_0} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i)(-1) = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i) = 0,$$

de modo que $b_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - b_1 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, esto es

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}, \quad [2]$$

donde:

\bar{y} es el promedio de la variable dependiente,

\bar{x} es el promedio de la variable independiente.

Reemplazando [2] en [1],

$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (\bar{y} - b_1 \bar{x}) - b_1 x_i)^2 = \sum_{i=1}^n ((y_i - \bar{y}) - b_1 (x_i - \bar{x}))^2$; tomando la derivada parcial de esta última expresión respecto a b_1 e igualando a cero, esto es

$$\frac{\partial(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2)}{\partial b_1} = 2 \sum_{i=1}^n \{[(y_i - \bar{y}) - b_1 (x_i - \bar{x})][-(x_i - \bar{x})]\} = 0,$$

realizando el producto y acomodando los términos resultantes se obtiene la relación $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) = b_1 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$. Así, el estimador del coeficiente de regresión poblacional es

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad [3]$$

Al dividir el numerador y el denominador de la relación [3] por $(n-1)$, esto es el número de grados de libertad para el análisis de la variabilidad de cada variable en el modelo, se obtiene $b_1 = s_{yx} / s_x^2$; ésta es una fórmula opcional para estimar el coeficiente de regresión a partir del cociente entre la covarianza ($s_{yx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) / (n-1)$) y la varianza de x (s_x^2). El

coeficiente de regresión también puede estimarse con $b_1 = rs_y / s_x$, relación que se obtiene a partir del coeficiente de correlación ($r = s_{yx} / s_y s_x$; ver más adelante en este Capítulo) y de las desviaciones estándar de y y de x (s_y y s_x , respectivamente).

1.3.2 El método de mínimos cuadrados ponderados

El ajuste del modelo de regresión mediante el método de mínimos cuadrados, cuando el supuesto de homogeneidad de varianzas no se cumple, requiere de la ponderación de los desvíos al cuadrado. Este método recibe el nombre de *cuadrados mínimos ponderados*. Ahora los estimadores de los parámetros de la población deben asegurar que la suma de desvíos al cuadrado ponderados $\sum_{i=1}^n w_i \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n w_i (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2$ sea mínima, siendo w_i un factor de ponderación que corrige la heterogeneidad de la varianza.

El mínimo de la función de desvíos ponderada se logra de nuevo igualando a cero las primeras derivadas parciales de la función con respecto a cada parámetro en el modelo. En el caso de la constante b_0 , la primera derivada es

$$\frac{\partial(\sum_{i=1}^n w_i \varepsilon_i^2)}{\partial b_0} = 2 \sum_{i=1}^n w_i (y_i - b_0 - b_1 x_i)(-1) = -2 \sum_{i=1}^n w_i (y_i - b_0 - b_1 x_i) = 0,$$

de modo que el estimador de la constante de regresión es

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^n w_i y_i - b_1 \sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}. \quad [4]$$

La primera derivada de la función de desvíos ponderados con respecto al coeficiente de regresión b_1 es

$$\frac{\partial(\sum_{i=1}^n w_i \varepsilon_i^2)}{\partial b_1} = 2 \sum_{i=1}^n w_i (y_i - b_0 - b_1 x_i)(-x_i) = -2 \sum_{i=1}^n w_i (y_i x_i - b_0 x_i - b_1 x_i^2) = 0,$$

esto es

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^n w_i y_i x_i - b_0 \sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i x_i^2}.$$

Reemplazando el estimador de la constante b_0 (relación [4]) se obtiene la fórmula para la estimación del coeficiente de regresión

$$b_1 = \left(\sum_{i=1}^n w_i y_i x_i - \frac{\sum_{i=1}^n w_i y_i \sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \right) \left(\sum_{i=1}^n w_i x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n w_i x_i \right)^2}{\sum_{i=1}^n w_i} \right)^{-1} \quad [5]$$

El factor w_i en [4] y [5] debe homogeneizar la varianza de y . Así, su valor dependerá de la varianza de y (que es lo mismo que decir la varianza de los desvíos o errores), en los distintos niveles de la variable x . Específicamente, $w_i = 1/f(s_\varepsilon^2)$, relación en la que $f(s_\varepsilon^2)$ es el modelo de la varianza de y en función de x . Con esa estructura, es evidente que el factor de ponderación homogeniza la varianza de y y la convierte en unitaria.

Existen tres patrones típicos de varianza que pueden fácilmente ser captados y reducidos mediante el factor de ponderación w_i . El primer caso es cuando se cumple el supuesto de que los desvíos se distribuyen normalmente, con media cero y varianza constante, lo que se simboliza mediante $\varepsilon_i \sim N(0, s_\varepsilon^2)$. Aquí, el patrón de varianza queda determinado por $s_\varepsilon^2 = k$, es decir un valor constante. Así, $w_i = 1/k$, valor que reemplazado en las relaciones [4] y [5] permite obtener las fórmulas ya presentadas para la constante ([2]) y el coeficiente de regresión ([3]). El segundo caso corresponde a un patrón de varianza de y proporcional al nivel de la variable x , es decir $s_\varepsilon^2 = k \cdot x_i$ y $w_i = 1/(k \cdot x_i)$; el tercer caso, en tanto, involucra patrones de varianza de y proporcional al cuadrado de la variable x , es decir $s_\varepsilon^2 = k \cdot x_i^2$ y $w_i = 1/(k \cdot x_i^2)$. Esas expresiones, reemplazadas en las relaciones 4 y 5, permiten obtener las fórmulas adecuadas para estimar los parámetros de regresión en cada condición particular. Los tres patrones de varianza analizados son relativamente simples, y con ello es fácil reemplazar la expresión para el factor de ponderación w_i en las fórmulas de estimación de los parámetros de regresión y obtener así fórmulas para la estimación directa de los parámetros. En situaciones más complejas es más aconsejable modelar la varianza de los residuos y modificar todas las variables en el modelo antes de realizar el ajuste (ver Clutter et al. 1983 para aplicaciones a funciones de volumen).

1.4 Las varianzas en regresión lineal simple

1.4.1 La varianza en torno a la línea de regresión

La varianza en torno a la línea de regresión se obtiene a partir de la sumatoria de los desvíos. En ello se utiliza la relación $s_{\hat{y}x}^2 = (1/(n-2)) \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$. Sumando $\bar{y} - \bar{y} = 0$ en esa relación, la suma de desvíos no cambia, pero el desarrollo de la nueva expresión permite visualizar de qué depende el valor de la sumatoria en cuestión. Así,

$$s_{\hat{y}x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i + \bar{y} - \bar{y})^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n [(y_i - \bar{y}) - (\hat{y}_i - \bar{y})]^2}{n-2}.$$

Reemplazando $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i$ y $\bar{y} = b_0 + b_1 \bar{x}$ en el segundo componente del binomio de la última relación,

$$s_{\hat{y}x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n [(y_i - \bar{y}) - (b_0 + b_1 x_i - b_0 - b_1 \bar{x})]^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n [(y_i - \bar{y}) - b_1 (x_i - \bar{x})]^2}{n-2},$$

desarrollando el cuadrado del binomio,

$$s_{\hat{y}x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n [(y_i - \bar{y})^2 - 2b_1 (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) + b_1^2 (x_i - \bar{x})^2]}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 - 2b_1 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) + b_1^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-2}$$

esto es

$$s_{\hat{y}x}^2 = \frac{n-1}{n-2} (s_y^2 - 2b_1 s_{yx} + b_1^2 s_x^2). \quad [6]$$

Combinando el coeficiente de regresión $b_1 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) / \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ y la covarianza $s_{yx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) / (n-1)$, se obtiene $(n-1)s_{yx} = b_1 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, o sea $s_{yx} = b_1 s_x^2$. Reemplazando esa igualdad en [6] se obtiene

$$s_{\hat{y}x}^2 = \frac{n-1}{n-2} (s_y^2 - b_1^2 s_x^2), \quad [7]$$

la cual es equivalente a

$$s_{\hat{y}x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 - b_1^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-2}.$$

Con $b_1 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) / \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, y definiendo el coeficiente de determinación $r^2 = [\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]^2 / [\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2]$ (ver relación 19), es evidente que $b_1^2 = r^2 [\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2] / [\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2]^2$; o sea, $b_1^2 = r^2 s_y^2 / s_x^2$. Luego, [7] se transforma en $s_{\hat{y}x}^2 = [(n-1)/(n-2)] s_y^2 - (r^2 s_y^2 / s_x^2) s_x^2$; es decir

$$s_{yx}^2 = \frac{n-1}{n-2} s_y^2 (1-r^2). \quad [8]$$

1.4.2 Las varianzas de la distribución muestral de b_1 , b_0 y \hat{y}_i

1.4.2.1 Varianza de la distribución muestral de b_1

La fórmula para obtener el coeficiente de regresión (relación [3])

$b_1 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) / \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ es equivalente a

$b_1 = \sum_{i=1}^n y_i (x_i - \bar{x}) / \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$. En esta última relación, si se reconoce que los x_i ($i = 1, \dots, n$) es un conjunto de valores fijos y que $c_i = (x_i - \bar{x}) / \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ es un conjunto

de constantes, entonces la varianza muestral del coeficiente de regresión $b_1 = \sum_{i=1}^n c_i y_i$ se

obtiene a partir de $s_{b_1}^2 = c_1^2 s_{y_1}^2 + c_2^2 s_{y_2}^2 + \dots + c_n^2 s_{y_n}^2$; esto es $s_{b_1}^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2 s_{y_i}^2$. O sea,

$$s_{b_1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n s_{y_i}^2 (x_i - \bar{x})^2}{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^2}. \quad [9]$$

La varianza $s_{y_i}^2$ en [9] corresponde a la variación de y_i en torno a la línea de estimación en el punto en que $x = x_i$, es decir la varianza de los valores de y en el punto en que $x = x_i$. Si se

asume que esa varianza tiene un valor fijo s_{yx}^2 , independiente del valor de x , la relación [9] se reduce a $s_{b_1}^2 = s_{yx}^2 / \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$. La fórmula para estimar la varianza de la distribución

muestral del coeficiente de regresión b_1 ([10]) se obtiene reemplazando en la última relación

la igualdad $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = (n-1)s_x^2$.

$$s_{b_1}^2 = \frac{s_{yx}^2}{(n-1)s_x^2}. \quad [10]$$

1.4.2.2 Varianza de la distribución muestral de b_0

La constante de regresión se obtiene a partir de $b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$ (relación [2]), de modo que,

aplicando la propiedad de la varianza de una diferencia, la varianza de la constante de regresión es

$$s_{b_0}^2 = s_{\bar{y}}^2 + \bar{x}^2 s_{b_1}^2. \quad [11]$$

Con $\bar{y} = \sum_{i=1}^n y_i / n$, siendo n el tamaño de la muestra, un conjunto fijo de datos, la varianza $s_{\bar{y}}^2$ queda expresada por

$$s_{\bar{y}}^2 = \frac{1}{n^2} (s_{y_1}^2 + s_{y_2}^2 + \dots + s_{y_n}^2) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n s_{y_i}^2.$$

En esta relación, como ya se explicó antes, $s_{y_i}^2$ es la variación de y_i en torno a la línea de regresión en el punto en que $x = x_i$, variación que se asume constante e igual a $s_{\hat{y}_i}^2$. Así,

$$s_{\bar{y}}^2 = \frac{1}{n^2} s_{\hat{y}_x}^2 \sum_{i=1}^n 1 = \frac{n}{n^2} s_{\hat{y}_x}^2 = \frac{s_{\hat{y}_x}^2}{n}.$$

Reemplazando esta expresión y la de la varianza del coeficiente de regresión b_1 (relación [10]) en [11] se obtiene la varianza de la distribución muestral de la constante de regresión ([12]).

$$s_{b_0}^2 = \frac{s_{\hat{y}_x}^2}{n} + \frac{\bar{x}^2 s_{\hat{y}_x}^2}{(n-1)s_x^2} = \frac{s_{\hat{y}_x}^2}{n} + \frac{\bar{x}^2 s_{\hat{y}_x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = s_{\hat{y}_x}^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right),$$

$$s_{b_0}^2 = s_{\hat{y}_x}^2 \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n\bar{x}^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right) = s_{\hat{y}_x}^2 \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = s_{\hat{y}_x}^2 \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + 2n\bar{x}^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

esto es

$$s_{b_0}^2 = \frac{s_{\hat{y}_x}^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{n(n-1)s_x^2}. \quad [12]$$

1.4.2.3 Varianza de la distribución muestral de \hat{y}_i

La variable de interés para el valor medio de la variable explicatoria se estima a partir de la relación $\hat{y}_i = \bar{y} + b_1(x_i - \bar{x})$, de manera que su varianza corresponde a $s_{\hat{y}_i}^2 = s_{\bar{y}}^2 + (x_i - \bar{x})^2 s_{b_1}^2$.

En esa relación, $s_{\bar{y}}^2 = (s_{\hat{y}_x}^2 / n)$ (ver arriba) y $s_{b_1}^2 = s_{\hat{y}_x}^2 / [(n-1)s_x^2]$ (relación [10]), con

$s_{\hat{y}_x}^2 = [(n-1)/(n-2)](s_y^2 - b_1^2 s_x^2)$ (relación [7]). Así, la varianza de la distribución muestral de \hat{y}_i queda definida por

$$s_{\hat{y}_{i|t}}^2 = s_{\hat{y}_x}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{(n-1)s_x^2} \right] \left(1 - \frac{n}{N} \right), \quad [13]$$

donde:

$s_{\hat{y}_{i|t}}^2$ es la varianza de la distribución muestral de la variable de interés, calculada a un nivel específico x_i de la variable auxiliar,

$s_{\hat{y}_x}^2$ es la varianza en torno a la línea de regresión,

s_y^2, s_x^2 son las varianzas muestrales de la variable de interés y auxiliar, respectivamente.

Así, si se desea estimar la varianza de la distribución muestral de la variable de interés en el nivel $x_i = \mu_x$, o en el nivel $x_i = X$, las fórmulas corresponden a las relaciones [14] y [15], respectivamente.

$$s_{\hat{y}_{i|t}}^2 = s_{\hat{y}_x}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(\mu_x - \bar{x})^2}{(n-1)s_x^2} \right] \left(1 - \frac{n}{N} \right), \quad [14]$$

$$s_{\hat{Y}_{i|t}}^2 = s_{\hat{y}_x}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(X - \bar{x})^2}{(n-1)s_x^2} \right] \left(1 - \frac{n}{N} \right). \quad [15]$$

1.5 Componentes de la suma de desvíos al cuadrado en regresión y el coeficiente de determinación

1.5.1 Componentes de la suma de desvíos al cuadrado en regresión

En regresión lineal, la suma de desvíos al cuadrado en torno del promedio de y [$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$] se descompone en desvíos debidos a la regresión y residuos. Sumando $\hat{y}_i - \hat{y}_i = 0$, esa suma no cambia, pero después de cierto desarrollo de la expresión

$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n [(\hat{y}_i - \bar{y}) + (y_i - \hat{y}_i)]^2$ se visualiza cómo se descompone la sumatoria de desvíos en cuestión. Así, desarrollando el cuadrado del binomio,

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})(y_i - \hat{y}_i). \quad [16]$$

El último componente de la derecha de la relación [16] es igual a cero. Eso se demuestra reemplazando en ese componente la función para estimar la variable de interés para el nivel medio de la variable independiente [$\hat{y}_i = \bar{y} + b(x_i - \bar{x})$]; esto es

$$\begin{aligned}
2 \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})(y_i - \hat{y}_i) &= 2 \sum_{i=1}^n [\bar{y} + b_1(x_i - \bar{x}) - \bar{y}][y_i - \bar{y} - b_1(x_i - \bar{x})] \\
&= 2b_1 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})[y_i - \bar{y} - b_1(x_i - \bar{x})] \\
&= 2b_1 \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) - b_1 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]
\end{aligned}$$

Reemplazando b_1 por $b_1 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) / \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, dentro del paréntesis cuadrado de la última expresión,

$$2 \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})(y_i - \hat{y}_i) = 2b_1 \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right] = 0.$$

En consecuencia, la variabilidad total en torno al promedio de la variable y (*sct*: suma de cuadrados total) se divide en variabilidad explicada por la regresión (*scr*: suma de cuadrados de la regresión) y variabilidad residual (*sce*: suma de cuadrados del error). Esto es $sct = scr + sce$ (relación [17]).

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2. \quad [17]$$

1.5.2 El coeficiente de determinación

El coeficiente de determinación r^2 señala la proporción de la variabilidad de la variable dependiente (y) que es explicada por la variable independiente (x) en la regresión. Así,

$r^2 = \frac{scr}{sct}$ (ver relación [17]), es decir

$$r^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}. \quad [18]$$

Reemplazando $\hat{y}_i = \bar{y} + b_1(x_i - \bar{x})$ en el numerador de la relación [18],

$$r^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{y} + b_1(x_i - \bar{x}) - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = b_1^2 \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2},$$

siendo $b_1 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) / \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, entonces

$$r^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^2} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2},$$

por consiguiente,

$$r^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}. \quad [19]$$

El coeficiente de determinación también puede representarse mediante $r^2 = s_{yx}^2 / s_y^2 s_x^2$,

relación en la que $s_{yx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) / (n-1)$ es la covarianza, en tanto que s_y^2 y s_x^2 son las varianzas de y y de x , respectivamente.

1.6 Estimadores de regresión

En forestal existen muchas situaciones en las que se presentan relaciones lineales entre variables que posibilitan la aplicación de estimadores de regresión. En árboles individuales se observan relaciones lineales entre el volumen y dap^2 , entre el volumen y el área basal, entre el volumen y dap^2 altura. En parcelas de muestreo se observan relaciones lineales entre el volumen y el área basal, entre el volumen y la cobertura de copas, entre el volumen real en terreno y el volumen estimado en fotoparcelas.

La función obtenida del ajuste del modelo de regresión posibilita la estimación de parámetros poblacionales (por ejemplo, el valor de la variable de interés en un nivel específico de la variable auxiliar). La estimación puede ser puntual, generando un valor único para el valor buscado, o incluir algún indicador de la precisión asociada a la estimación. En este caso se obtienen dos valores que señalan los límites dentro de los cuales debería encontrarse el verdadero parámetro poblacional. Algunos de los conceptos asociados a la estimación por intervalos se discuten a continuación.

1.6.1 Distribución en el muestreo

Al utilizar estimadores de regresión se generan varias distribuciones muestrales, una por cada estimador. Así se genera la distribución de \bar{y} , la de $\hat{y}_{r,i}$ estimado por regresión, la de \bar{x} , la de b_0 (estimador de β_0) y la de b_1 (estimador de β_1). Cada una de esas distribuciones tiene A valores muestrales ($A = N!/[n!(N-n)!]$), cuando de la población se obtienen muestras de tamaño n .

Los parámetros de la población, si pudieran medirse todos los individuos que la componen, podrían calcularse con las relaciones siguientes. La derivación de las fórmulas para β_0 y β_1 que se presentan a continuación se realizó mediante el procedimiento ya descrito de mínimos cuadrados ordinarios; los detalles pueden revisarse más atrás en este Capítulo.

$$\beta_0 = \mu_y - \beta_1 \mu_x,$$

$$\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \mu_y)(x_i - \mu_x)}{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)^2},$$

$$S_{yx}^2 = \frac{N-1}{N-2} (S_y^2 - \beta_1^2 S_x^2),$$

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \mu_y)^2}{N-1},$$

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)^2}{N-1},$$

con

$$\mu_y = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N},$$

$$\mu_x = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N},$$

donde:

β_0 , β_1 son la constante y el coeficiente de regresión poblacional, respectivamente,

$S_{\hat{y}x}^2$ es la varianza poblacional en torno a la línea de regresión,
 S_y^2, S_x^2 son las varianzas poblacionales de la variable de interés y auxiliar, respectivamente,
 μ_y, μ_x son los promedios poblacionales de la variable de interés y la variable auxiliar, respectivamente,
 y_i, x_i son los valores de la variable de interés y la variable auxiliar en el i -ésimo individuo de la población, respectivamente,
 N es el tamaño de la población.

1.6.2 Estimación de parámetros

Los estimadores b_0 y b_1 de la regresión se obtienen a partir de las mediciones realizadas en los individuos muestreados (ver más atrás en este Capítulo la derivación de las fórmulas; método de mínimos cuadrados ordinarios). Los valores de b_0 y b_1 obtenidos del ajuste aseguran que la recta de la relación entre y y x pase por el centro de la nube de puntos y_i, x_i .

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x},$$

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

$$s_{\hat{y}x}^2 = \frac{n-1}{n-2} (s_y^2 - b_1^2 s_x^2),$$

$$s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1},$$

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1},$$

con

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n},$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n},$$

donde:

b_0, b_1 son la constante y el coeficiente de regresión muestral, respectivamente,
 $s_{\hat{y}_x}^2$ es la varianza muestral en torno a la línea de regresión (ver más atrás en este Capítulo),
 s_y^2, s_x^2 son las varianzas muestrales de la variable de interés y auxiliar, respectivamente,
 \bar{y}, \bar{x} son los promedios muestrales de la variable de interés y la variable auxiliar, respectivamente,
 y_i, x_i son los valores de la variable de interés y la variable auxiliar medidas en el i -ésimo individuo de la muestra, respectivamente,
 n es el tamaño de la muestra.

La estimación de la variable de interés, para un valor específico de la variable auxiliar, se realiza mediante el modelo matemático ajustado con la información muestral [$\hat{y}_{ri} = b_0 + b_1 x$], o mediante una modificación que sólo utiliza el coeficiente de regresión. La recta de estimación $\hat{y}_{ri} = b_0 + b_1 x$ pasa por el punto (\bar{y}, \bar{x}) , o sea $\bar{y} = b_0 + b_1 \bar{x}$; por consecuencia $\hat{y}_{ri} = \bar{y} + b_1(x - \bar{x})$, es una relación que permite estimar conociendo sólo el coeficiente de regresión. En esta última relación, el factor $(x - \bar{x})$ corrige la estimación muestral de \bar{y} y posibilita estimar tanto el valor de y en cualquier nivel x de la variable auxiliar, como la varianza correspondiente. Así, cuando interesa estimar y en el nivel promedio μ_x , en la relación correspondiente se reemplaza x por μ_x .

$$\hat{y}_{ri} = \bar{y} + b_1(\mu_x - \bar{x}),$$

$$s_{\hat{y}_{ri}}^2 = s_{\hat{y}_x}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(\mu_x - \bar{x})^2}{(n-1)s_x^2} \right] \left(1 - \frac{n}{N} \right),$$

donde:

\hat{y}_{ri} es el estimador de regresión lineal del promedio de la variable de interés, en el nivel promedio de x ($x = \mu_x$),

$s_{\hat{y}_{ri}}^2$ es la varianza de la distribución muestral de la variable de interés, estimada mediante regresión en el nivel promedio de x ,

\bar{y}, \bar{x} son los promedios muestrales de la variable de interés y auxiliar, respectivamente,

μ_x es el valor promedio poblacional conocido de la variable auxiliar.

La varianza del promedio estimado de la variable de interés, para un nivel específico x de la variable auxiliar, se calcula a partir de los desvíos entre los valores observados y los estimados mediante la regresión ajustada (relación [14]). En aquellas situaciones en que $x = \mu_x = \bar{x}$ se logra la máxima precisión en la estimación.

El intervalo de confianza para la variable de interés, en el nivel $x = \mu_x$ de la variable auxiliar, se establece a partir del estimador \hat{y}_{ri} y su respectivo error de estimación $e_{\hat{y}_{ri}}$.

$$\hat{y}_{ri} \pm e_{\hat{y}_{ri}},$$

$$e_{\hat{y}_{ri}} = t s_{\hat{y}_{ri}},$$

donde:

$e_{\hat{y}_{rl}}$ es el error de estimación en el nivel promedio de x ($x = \mu_x$),

t es el valor del t de Student con $(n-2)$ grados de libertad y una confianza específica,

$S_{\hat{y}_{rl}}$ es el error estándar de estimación en el nivel promedio de x .

Los límites inferior y superior del intervalo de confianza para el promedio de la variable de interés, estimado en el nivel $x = \mu_x$ de la variable auxiliar, están dados por $l_i = \hat{y}_{rl} - e_{\hat{y}_{rl}}$ y $l_s = \hat{y}_{rl} + e_{\hat{y}_{rl}}$, respectivamente. El total poblacional se estima con $\hat{Y}_{rl} = \bar{y} + b_1(X - \bar{x})$, relación en la que X es el total conocido de la variable auxiliar. El total estimado tiene como límites de confianza inferior y superior $L_i = \hat{Y}_{rl} - e_{\hat{Y}_{rl}}$ y $L_s = \hat{Y}_{rl} + e_{\hat{Y}_{rl}}$, respectivamente, en los que $e_{\hat{Y}_{rl}} = t S_{\hat{Y}_{rl}}$ es el error de estimación del total; ese error se obtiene a partir de la varianza

del total estimado en el nivel $x = X$, es decir mediante la relación

$$S_{\hat{Y}_{rl}}^2 = S_{\hat{y}_{rl}}^2 + (X - \bar{x})^2 S_{b_1}^2$$

. Estimaciones para otros niveles de x se realizan reemplazando el nivel de x deseado en la fórmula de estimación ($\hat{y}_{rl} = \bar{y} + b_1(x - \bar{x})$), y en la fórmula para la varianza de la

distribución respectiva ($\hat{y}_{rl} = \bar{y} + b_1(x - \bar{x})$); en este caso, el error de estimación es

$$e_{\hat{y}_{rl}} = t S_{\hat{y}_{rl}}$$

$$e_{\hat{y}_{rl}} = t S_{\hat{y}_{rl}}$$

También pueden obtenerse intervalos de confianza para los parámetros de la regresión, a partir de las varianzas de las respectivas distribuciones muestrales (ver más atrás en detalle el desarrollo de las fórmulas).

$$s_{b_0}^2 = \frac{s_{\hat{y}x}^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{n(n-1)s_x^2} \left(1 - \frac{n}{N}\right),$$

$$s_{b_1}^2 = \frac{s_{\hat{y}x}^2}{(n-1)s_x^2},$$

donde :

$S_{b_0}^2$ es la varianza de la distribución muestral de la constante de regresión,

$S_{b_1}^2$ es la varianza de la distribución muestral del coeficiente de regresión.

1.6.3 Determinación del tamaño de la muestra

El número n de individuos que debe seleccionarse y medirse en la población, para lograr una precisión determinada y con una confianza específica en la estimación del promedio poblacional de la variable de interés, se determina en base al error de estimación deseado y la varianza en torno a la línea de regresión.

$$n = \frac{Nt^2 s_{\hat{y}_x}^2}{Ne^2 + t^2 s_{\hat{y}_x}^2},$$

donde:

N es el tamaño de la población,

t es el valor de t de Student para un nivel de confianza específico y $n-2$ grados de libertad,

$s_{\hat{y}_x}^2$ es la varianza en torno a la línea de regresión,

e es el error de estimación deseado en la variable de interés, expresado en la unidad de medición de la variable.

Referencias

Gujarati, D. 1981. Econometría. McGraw-Hill. 463p.

Gregoire, T.G. and M.E. Dyer. 1989. Model fitting under patterned heterogeneity of variance. For. Sci. 35(1):105-125.

Clutter, J.L., J.C. Fortson, L.V. Pienaar, G.H. Brister, and R.L. Bailey. 1983. Timber management: a quantitative approach. John Wiley & Sons. USA. 333 pp.

Cunia, T. 1964. Weighted least squares method and construction of volume tables. For. Sci. 10(2):180-191.

Schreuder, C.E. and Z. Ouyang. 1991. Optimal sampling strategies for weighted linear regression estimation. Can. J. For. Res. 21:1132-1137.

2 Caracterización de rodales

Un *rodal* es un conjunto espacialmente continuo de árboles y otros vegetales asociados, suficientemente uniforme para constituir una unidad de manejo, la que puede diferenciarse claramente de los rodales adyacentes por su edad, composición de especies, estructura, o por las características fisiográficas o climáticas en que crece. La caracterización del estado del rodal en un momento específico del tiempo se realiza a partir de mediciones en los árboles y observaciones en parcelas u otro tipo de unidad de muestreo. En este Capítulo se describen esas mediciones y el proceso de la información recopilada en el muestreo.

2.1 Recopilación de información en terreno

En la captura de información en rodales es habitual trazar numerosas unidades de muestreo, las que posteriormente deben procesarse en conjunto para obtener valores promedio por unidad de superficie de rodal. La información se recopila en terreno en unidades muestrales cuyo tamaño, forma y distribución se han definido de antemano. Posteriormente, las variables que están relacionadas con la superficie de la unidad muestral se expanden para estimar el valor por unidad de superficie (hectárea) del rodal. Esa expansión se realiza mediante el factor de expansión, cuyo valor es función del tamaño de la unidad de muestreo. Al utilizar parcelas de muestreo tradicionales puede lograrse que el factor de expansión adquiera un valor constante, lo que facilita el procesamiento de la información. Existen a su vez otros tipos de unidades muestrales, en los que el factor de expansión es variable.

El factor de expansión es un multiplicador de las características de rodal que están relacionadas con la superficie de la unidad muestral. Por convención, el tamaño efectivo de la unidad muestral se expresa en el plano de horizontal, que es el plano de referencia para la presentación de información a nivel de rodal.

2.1.1 Trazado de parcelas de muestreo

Al realizar el muestreo mediante parcelas, el factor de expansión queda definido por

$$Fe = \frac{1}{A} = \frac{10000}{a},$$

donde:

Fe es el factor de expansión a hectárea,

A es el área de la unidad muestral expresada en hectáreas (ha),

a es el área de la unidad muestral expresada en metros cuadrados (m²).

El factor de expansión es constante al trazar en terreno parcelas cuyo tamaño resultante en el plano horizontal sea constante. Así, es necesario ajustar el tamaño real de cada parcela según la pendiente del terreno en el punto seleccionado para su trazado (Fig. 1).

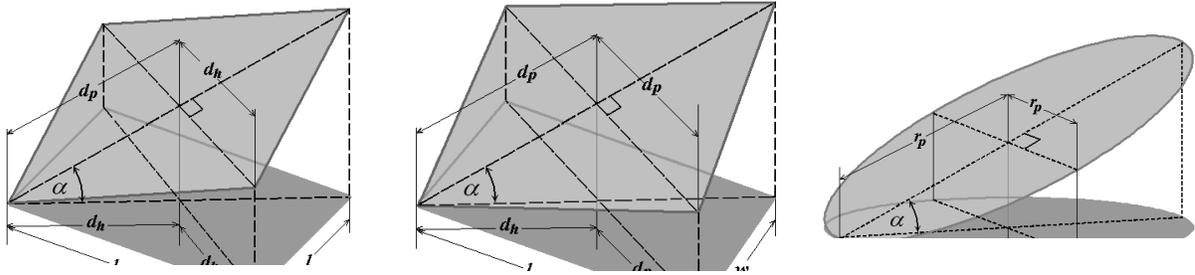


Figura 1. Trazado de parcelas en terreno con pendiente. Izquierda: parcela cuadrada en la horizontal; centro: parcela cuadrada en la pendiente; derecha: parcela circular en la pendiente.

El muestreo con parcelas convencionales otorga libertad para la fijación del tamaño y la forma de la parcela. Cualquier forma (cuadrada, rectangular, circular, hexagonal, etc.) y tamaño de parcela conduce a estimaciones insesgadas de las características de rodal. La selección de una forma particular debe estar guiada por aspectos prácticos de trabajo en terreno.

El trazado de parcelas cuadradas es conveniente realizarlo con la diagonal paralela a la línea de máxima pendiente del terreno. Esta forma de trazado reduce el efecto de desplazamientos respecto de la línea de máxima pendiente; es decir, un desplazamiento de cierta magnitud en la semidiagonal produce menos efecto sobre el tamaño de parcela resultante en la horizontal, que cuando ese desplazamiento ocurre al trazar un lado de la parcela paralelo a esa línea.

2.1.1.1 Parcela cuadrada en la horizontal

En la pendiente, esto es directamente sobre el terreno, se traza una parcela romboidal, siendo la resultante una parcela cuadrada en el plano horizontal. Así, el trazado de la parcela en terreno inclinado requiere conocer la semidiagonal perpendicular a la línea de máxima pendiente (d_h) y la semidiagonal paralela a esta línea (d_p). Una parcela cuadrada en el plano horizontal, con lados de dimensión l y superficie a en ese plano, con $a = l \cdot l = l^2$ y $d_h^2 + d_p^2 = l^2$, según puede verse en la figura 1, requiere una semidiagonal en la horizontal $d_h = (a/2)^{0,5}$. La longitud de la otra semidiagonal es una función de la inclinación del terreno expresada en la función trigonométrica $\cos \alpha = d_h / d_p$; así, $d_p = d_h / \cos \alpha$, es decir

$$d_p = (a/2)^{0,5} / \cos \alpha,$$

donde:

- a es la superficie deseada para la parcela en el plano horizontal (m^2),
- d_p es la longitud de la semidiagonal paralela a la línea de máxima pendiente (m),
- α es la pendiente del terreno (grados).

2.1.1.2 Parcela cuadrada en la pendiente

En este caso se traza una parcela cuadrada en la pendiente, siendo la resultante una parcela romboidal en la horizontal. Así, la semidiagonal perpendicular a la línea de máxima pendiente (d_h) y la semidiagonal paralela a esta línea (d_p) son de la misma longitud, lo que facilita el cálculo de las dimensiones y el trazado de la parcela en terreno. Ahora, la superficie a en la horizontal se obtiene con $a = 4 \cdot d_h \cdot d_p / 2$, esto es $a = 2 \cdot d_h \cdot d_p$. Incorporando la inclinación del terreno expresada en la función $\cos \alpha = d_h / d_p$, es evidente que $d_h = d_p \cdot \cos \alpha$, lo que conduce a $a = 2 \cdot d_p \cos \alpha \cdot d_p$ y, finalmente, a

$$d_p = (a / (2 \cos \alpha))^{0.5},$$

donde:

d_p es la longitud de la semidiagonal trazada ya sea paralela o perpendicular a la línea de máxima pendiente del terreno (m).

2.1.1.3 Parcela circular en la pendiente

La parcela circular minimiza la probabilidad de ocurrencia de árboles en el límite de la parcela, debido a que esta forma es la que tiene el menor perímetro para una superficie determinada. Al trazar una parcela circular en la pendiente se obtiene una parcela elíptica en la horizontal. Para trazarla se corrige el radio según la máxima pendiente del terreno y se utiliza ese radio en torno al punto centro de parcela. En este caso, la superficie de la parcela es $a = \pi \cdot r_h \cdot r_p$, relación en la que r_h es el radio en el plano horizontal y r_p es el radio en el plano inclinado. Así, incorporando $r_h = a / (\pi \cdot r_p)$ en la inclinación del terreno expresada en $r_p = r_h / \cos \alpha$, la que proviene de la función $\cos \alpha = r_h / r_p$, la longitud del radio de parcela en cualquier dirección en el plano inclinado es

$$r_p = (a / (\pi \cdot \cos \alpha))^{0.5}.$$

2.1.1.4 Parcelas concéntricas

En el muestreo con parcelas tradicionales se mide una o más dimensiones de cada árbol incluido en las parcelas. Así, en rodales en los que se presenta una gran variación en el tamaño de los árboles (ver rodales heteroetáneos), una parcela de cierto tamaño intermedio incluirá un gran número de árboles pequeños y un número pequeño de árboles de gran tamaño, resultando en una muestra sobredimensionada de árboles pequeños y en una muestra poco representativa de árboles grandes. El problema se resuelve utilizando parcelas concéntricas en la que cada tamaño de parcela permite obtener una muestra adecuada de cada rango de tamaños de árboles. Al operar con tres tamaños de parcela (Fig. 2), en la parcela menor se miden los árboles pequeños (e.g. regeneración), en la intermedia los árboles de tamaño medio (e.g. aquellos de diámetro menor a 20 cm) y en la grande los árboles de gran dimensión (e.g. aquellos de diámetro mayor o igual a 20 cm).

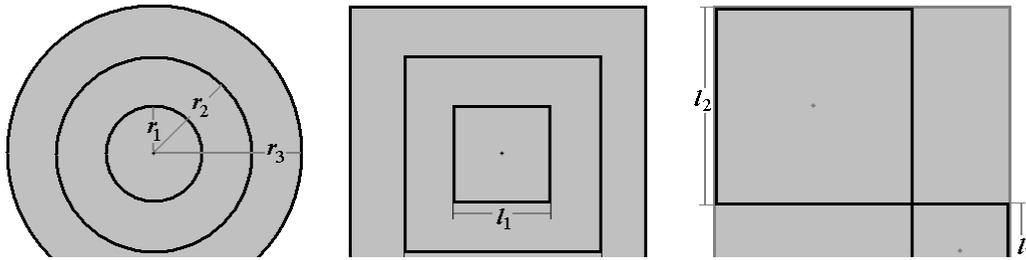


Figura 2. Trazado de parcelas concéntricas. Izquierda: parcelas circulares; centro y derecha: parcelas cuadradas.

El término “concéntrica” es relativo. Incluso, en algunos casos, por ejemplo cuando se desea evaluar la regeneración, es más conveniente trazar la parcela menor en un costado de la parcela grande, ya que esa zona es menos afectada (pisoteo) al realizar la medición de los árboles en las parcelas de mayor tamaño.

2.1.2 Otros tipos de unidades muestrales

Además de las parcelas tradicionales existen otros tipos de unidades muestrales. En general son unidades de muestreo que no requieren dimensionarse o trazarse en terreno; a diferencia de las parcelas tradicionales, el factor de expansión resultante es variable y depende de alguna dimensión de los árboles o del espaciamiento de los mismos.

2.1.2.1 Parcelas Bitterlich

Este tipo de unidad muestral asume que cada árbol posee una parcela en torno a él y cuyo tamaño es una función directa del área basal del árbol. La identificación de los árboles a medir en un determinado punto se realiza con la ayuda de un instrumento que proyecta un ángulo visual horizontal de tamaño conocido (ver Relascope) y que determina el *factor de área basal*, esto es el número de unidades de área basal (m^2) que representa por hectárea cada árbol seleccionado con el instrumento, en un giro de 360° en torno al punto de muestreo. El factor de expansión es inversamente proporcional al área de sección normal (área basal) del árbol

$$Fe = \frac{F}{g_i},$$

donde:

Fe es el factor de expansión a hectárea,

F es el factor de área basal del instrumento (m^2 de área basal/ha),

g_i es el área de sección normal del árbol, con $g_i = \pi \cdot d_i^2 / 40000$ (m^2), siendo d_i el dap del árbol (cm).

A esta técnica también se le denomina *muestreo puntual horizontal*. Otras variantes incorporan el muestreo en línea y la proyección de un ángulo vertical.

2.1.2.2 Métodos de distancia

Existe una gama de variantes consistentes en realizar mediciones de distancias. Algunos se basan en la distancia entre el punto de muestreo y un árbol localizado en cierta posición respecto del punto (e.g. el séptimo árbol); otros consideran mediciones de distancia entre árboles. Permiten realizar estimaciones de la densidad de la población, esto es el número de individuos por unidad de superficie.

2.2 Medición del diámetro y altura en árboles

La medición del *dap* (diámetro a la altura del *pecho*) y de la *altura* en árboles es una actividad que se realiza frecuentemente para caracterizar el estado de los rodales, ya sea en base a estas mismas variables u otras derivadas a partir de ellas. Normalmente, esta medición se realiza en parcelas que cubren cierta superficie y que se trazan en puntos representativos en el rodal de interés. En estas parcelas se mide el *dap* de todos los árboles y la altura de una muestra seleccionada cubriendo todo el rango diamétrico. La altura no se mide en todos los árboles porque su medición es más difícil y costosa que la del *dap*; a su vez, entre estas dos variables existe una relación estrecha, la que se modela en base a la muestra recopilada y se utiliza para estimar la altura a partir del *dap*.

2.2.1 Medición del dap

2.2.1.1 Altura de medición del dap

El *dap* es la variable que más habitualmente miden los forestales. Principalmente porque es la dimensión más fácil de medir en los árboles; es sensitiva a los cambios ambientales y a la densidad del rodal; y está estrechamente relacionada con la altura total, el volumen del fuste, la biomasa del árbol y el tamaño de la copa, variables importantes y de difícil medición en árboles en pie.

La altura de medición del *dap* varía en las diferentes regiones del mundo. Así, por ejemplo, en Europa, Canadá, Reino Unido, Australia y Chile, entre otros, el *dap* se mide a una altura de 1,30 m desde el nivel del suelo. En cambio, en Estados Unidos, la medición se realiza a 4,5 pies, esto es aproximadamente a 1,37 m de altura. Esa variabilidad en la altura debe tenerse presente en el momento de comparar variables que involucren el *dap* en su determinación y que hayan sido obtenidas en regiones que difieren en la altura de medición del *dap*. En lo que sigue, se describe la medición del *dap* a una altura de 1,30 m desde suelo (Fig. 3).

En árboles normales en pie, rectos y en terreno plano, el *dap* se debe medir a 1,30 m del suelo (Fig. 3a). La altura de medición puede variar por la presencia de anomalías, como bifurcaciones, contrafuertes basales u otros defectos en el fuste, o por la inclinación del fuste o la pendiente del terreno. En árboles bifurcados a una altura menor de 1,30 m, cada pie del árbol se mide y considera como un individuo (Fig. 3b); cuando la bifurcación se presenta a una altura mayor a 1,30, se realiza sólo una medición y se asume que el árbol tiene un fuste

único (Fig. 3c). En árboles con defectos a la altura de 1,30 se realizan dos mediciones, cada una a igual distancia bajo y sobre la altura de 1,30 m, esto es a una distancia a , siendo ésta una distancia suficiente para sobrepasar la zona de influencia del defecto (Fig. 3d). En árboles inclinados, la altura de medición debe fijarse por el lado hacia donde se inclina el fuste (Fig. 3e). En terreno con pendiente, la altura de medición debe fijarse por el lado más alto de ésta (Fig. 3f).

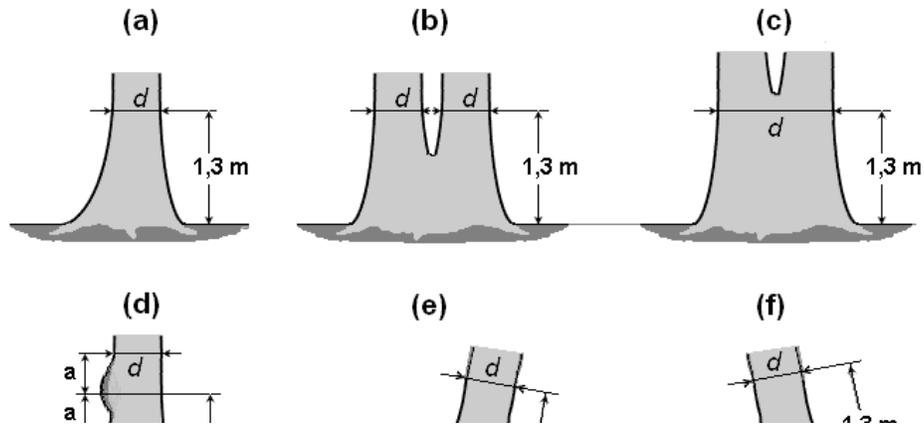


Figura 3. Definición de la altura de medición del dap en: (a) árboles rectos, normales y terreno plano; (b) árboles bifurcados bajo 1,3 m de altura en el fuste; (c) árboles bifurcados sobre 1,3; (d) árboles con defecto a la altura de 1,3 m; (e) árboles inclinados; (f) en terreno con pendiente.

2.2.1.2 Instrumentos para medición del dap

Los instrumentos utilizados para la medición de diámetros reciben el nombre de *dendrómetros*; entre los cuales destacan por su facilidad de uso las *forcípulas* (de brazos paralelos o finlandesas) y las *huinchas o cintas diamétricas*. Otro instrumento útil es el *sector de diámetro de Bitterlich*.

2.2.1.3 Precauciones en la medición del dap

La medición del dap debe realizarse a la altura correcta y en forma perpendicular al eje del fuste. La medición a una altura mayor o menor producirá, respectivamente, una subestimación y sobreestimación del dap del árbol. La medición en un plano diferente al perpendicular al eje entrega un valor mayor al real. Errores en las mediciones producirán errores en cualquier variable que se derive o estime a partir del dap, como por ejemplo la altura total o el volumen fustal del árbol. Además, debe cuidarse que el instrumental utilizado para realizar las mediciones esté en condiciones óptimas; en el caso de usar forcípula, que ésta tenga sus brazos paralelos; y cuando se utiliza una cinta diamétrica, que no esté cortada en algún punto.

2.2.2 Medición de alturas

La altura es la longitud de la línea recta que va desde el suelo (base del fuste) hasta algún punto en el árbol. Según sea la posición de ese punto, se definen cinco alturas diferentes: i) *altura total*, medida entre el suelo y el extremo de la yema terminal del fuste (ápice); ii) *altura*

fustal, medida entre el suelo y el punto donde comienza la copa (viva o muerta) del árbol; iii) *altura comercial*, medida entre el suelo y el punto donde el fuste tiene un diámetro comercial definido; iv) *altura de tocón*, medida entre el suelo y la base del primer trozo; y v) *altura de copa viva*, medida entre el suelo y el inicio de la copa viva.

Después del dap, la altura es la variable más medida en los árboles. Es una variable que se utiliza para caracterizar un rodal, estimar el volumen o determinar la calidad de sitio. También se utiliza para clasificar árboles; por ejemplo, la clasificación de Kraft define cinco categorías de árboles según su altura y posición relativa: dominante, codominante, intermedio, suprimido y muerto; esta clasificación puede tomarse como base para objetivos de manejo silvícola.

En un árbol también pueden definirse varias longitudes. Esta es una variable similar a la altura, pero medida directamente sobre el fuste del árbol. En el fuste del árbol pueden identificarse entre otras: i) *longitud comercial*, esto es la distancia entre el tocón y el extremo del último trozo útil del fuste (o posición del diámetro comercial); ii) *longitud útil*, obtenida de la diferencia entre la longitud comercial y la longitud de defectos; iii) *longitud de defectos*, la suma de las secciones no útiles del fuste; iv) *longitud de copa*, la distancia entre el inicio de la copa y el ápice; v) *longitud de copa viva*, distancia entre el inicio de las ramas vivas y el ápice.

La medición en árboles de altura pequeña (menor a 15 m) puede realizarse directamente, mediante cintas métricas o varas telescópicas. La medición en árboles grandes se realiza indirectamente, mediante instrumentos ópticos denominados *hipsómetros*. Estos miden alturas en base a relaciones entre lados de triángulos semejantes (*hipsómetros Christen y Merritt*) o bien, en base a tangentes de ángulos (*hipsómetros Haga, Blume-Leiss y Suunto*). Para realizar la medición, el operario se posiciona a cierta distancia del árbol, apunta con el instrumento a la base y a otro punto de interés en el árbol, y realiza la lectura en la escala del instrumento en cada oportunidad. Considerando los valores sobre la horizontal como positivos y aquellos bajo la horizontal como negativos, el valor absoluto de la diferencia entre ambas mediciones entrega la altura buscada.

En la medición de la altura total del árbol, con instrumentos basados en tangentes de ángulos, la lectura al ápice del árbol (ver Fig. 4), realizada a una distancia específica D , implica que $\tan \alpha_1 = h_1 / D$. Luego, la fracción de altura sobre la horizontal es $h_1 = D \tan \alpha_1$. Del mismo modo, la fracción de altura bajo la horizontal es $h_2 = D \tan \alpha_2$. Así, la altura del árbol, que corresponde a $h_1 - (-h_2)$, se obtiene de la relación

$$h = D(\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2),$$

donde:

h es la altura del árbol (m),

D es la distancia horizontal hasta el eje fustal del árbol (m),

α es el ángulo al ápice del árbol (grados),

α_2 es el ángulo a la base del árbol (grados).

Los instrumentos ópticos entregan directamente el valor de la altura sobre o bajo la horizontal, según corresponda. Para su utilización, el operario requiere sólo posicionarse a la distancia adecuada. Los instrumentos poseen habitualmente más de una escala de medición, cada cual desarrollada para una distancia específica de medición desde el eje fustal del árbol. También incorporan escalas para la medición de la pendiente del terreno.

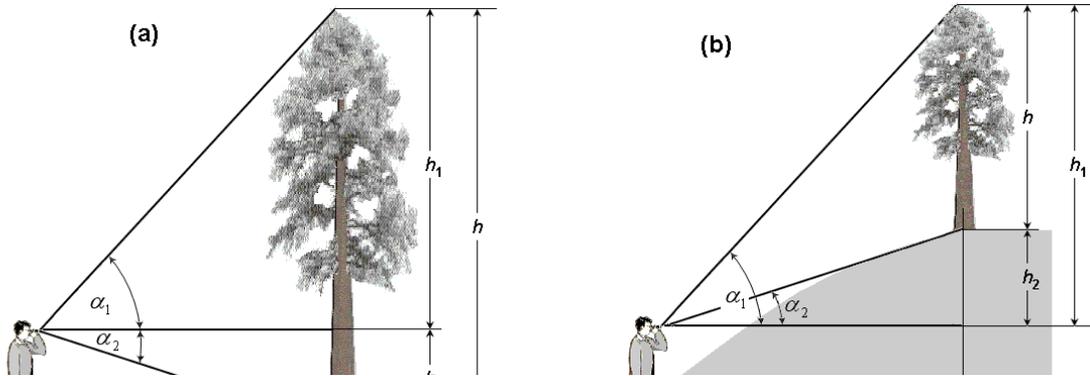


Figura 4. Medición de la altura de un árbol con instrumental óptico. (a) Lectura al ápice positiva (sobre la horizontal), lectura al tocón negativa (bajo la horizontal); (b) Ambas lecturas positivas.

La altura del árbol también puede obtenerse sin realizar la medición de la distancia horizontal. En este caso se requiere un jalón de longitud conocida, el que se apoya en el fuste del árbol, y un instrumento que permita determinar ángulos. La altura del árbol se obtiene de la siguiente relación de ángulos (ver Fig. 5).

$$h = P(\alpha_1 - \alpha_2) / (\alpha_2 - \alpha_3),$$

donde:

h es la altura del árbol (m),

P es la longitud de un elemento de apoyo (jalón) para la medición (m),

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ son ángulos medidos en porcentaje (gradiente).

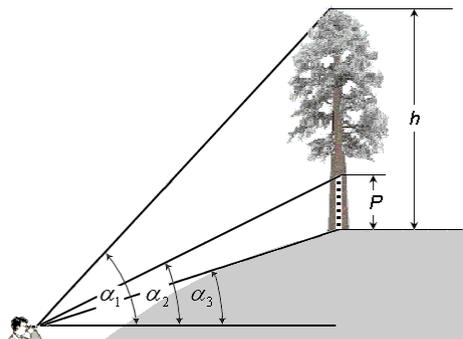


Figura 5. Medición de la altura de un árbol con apoyo en un jalón de altura conocida (P).

2.2.2.1 Precauciones en la medición de alturas

La obtención de la altura mediante instrumentos ópticos requiere la medición correcta de la distancia horizontal entre el operario y el árbol. Si esa distancia se mide con error, la lectura de la altura del árbol será incorrecta, al igual que si se realiza la lectura en una escala graduada para otra distancia distinta a la que se está situado desde el árbol. Si se mide la distancia con la mira de algún instrumento y la visual desde el instrumento no incide perpendicularmente en la mira, la distancia horizontal no es correcta y, por consiguiente, la altura del árbol tampoco será medida correctamente.

La medición de la altura requiere que tanto la base como el ápice del árbol sean claramente visibles. Esto último puede ser difícil en árboles de copa globosa, caso en que tenderá a sobreestimarse la altura total. Otra causa de error en la medición de alturas es la inclinación del árbol en relación al plano vertical (ver Fig. 6 y 7). Estos errores de medición se reducen al aumentar la distancia entre el observador y el árbol.

En la medición de la altura de un árbol inclinado, las lecturas obtenidas del instrumento óptico no entregan la altura real del árbol. Esta lectura, que puede denominarse *altura aparente*, debe corregirse para obtener la altura real. Cuando la medición de la distancia horizontal se realiza hasta la proyección vertical del ápice del árbol, el operario puede posicionarse a esa distancia en cualquier lugar alrededor del punto de proyección del ápice sobre el plano horizontal que pasa por la base del árbol (Fig. 6). En este caso, la altura total del árbol se obtiene de

$$h = \frac{L}{\cos \phi},$$

donde:

L es la altura aparente del árbol (m),

ϕ es el ángulo de inclinación del fuste del árbol (grados).

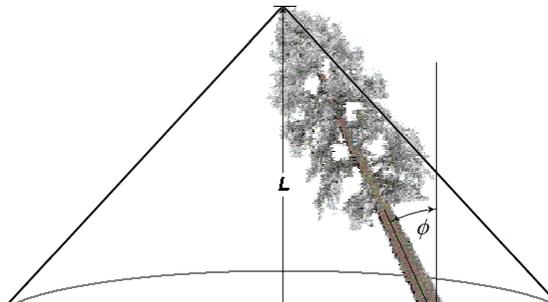


Figura 6. Medición de la altura de un árbol inclinado. Medición de la distancia horizontal hasta la proyección vertical del ápice del árbol.

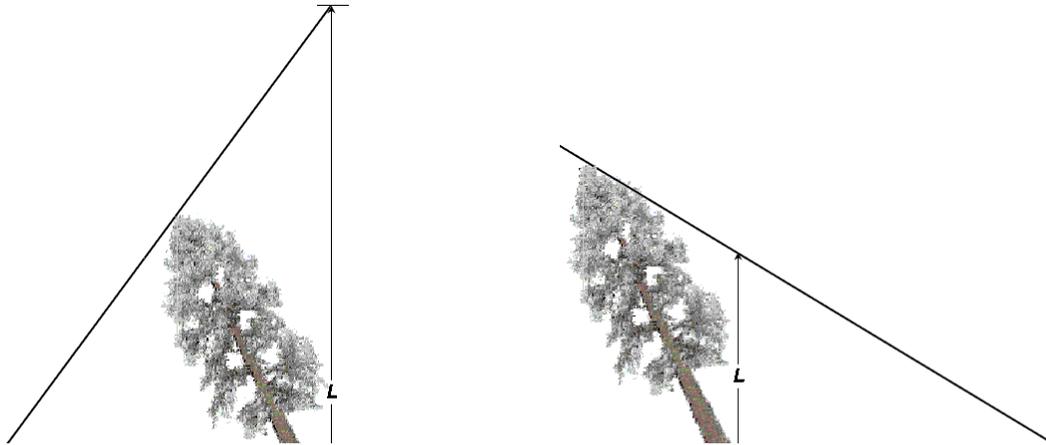


Figura 7. Medición de la altura de un árbol inclinado. Medición de la distancia horizontal hasta la base del árbol y en el plano de inclinación del árbol. Izquierda: distancia horizontal medida en el sentido de inclinación. Derecha: distancia horizontal medida en el sentido contrario a la inclinación.

Cuando la medición de la distancia horizontal se realiza hasta la base del árbol (Fig. 7), la fórmula para la corrección de la altura aparente varía dependiendo de la posición del operario. El posicionamiento en el plano de inclinación del fuste facilita la corrección, la cual se realiza mediante

$$h = D \frac{L}{D \cos \phi \pm L \sin \phi},$$

donde:

L es la altura aparente del árbol (m),

ϕ es el ángulo de inclinación del fuste del árbol (grados),

D es la distancia horizontal hasta la base del árbol (m).

La operación en el denominador de la relación anterior es una suma en el caso de posicionarse en la dirección de la inclinación del árbol (Fig. 7, izquierda), y una resta en el caso de posicionarse en la dirección opuesta a la inclinación del árbol (Fig. 7, derecha). Posicionamientos en otros puntos fuera del plano de inclinación del árbol requieren de correcciones más complejas, que incorporan, además, la inclinación del fuste en relación al plano vertical de observación.

2.3 Procesamiento de la información muestral

2.3.1 Variables de estado del rodal

Los valores más simples que caracterizan el estado de un rodal en un momento específico del tiempo son el *dap medio* y la *altura media*. Otras variables de estado de sumo interés son el *número de árboles* y el *área basal* por unidad de superficie (hectárea). Cuando la caracterización tiene como meta la valoración económica, el *volumen* de madera es la variable más importante.

2.3.1.1 Dap promedio

El dap promedio del rodal puede corresponder al promedio aritmético, cuadrático o geométrico. El cálculo puede realizarse con los datos individuales o tabulados. A continuación se describe el cálculo directo con las mediciones realizadas en los árboles.

$$d_a = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n},$$

$$d_c = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{n}},$$

$$d_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n d_i},$$

donde:

d_a es el dap promedio aritmético (cm),

d_c es el dap promedio cuadrático (cm),

d_g es el dap promedio geométrico (cm),

d_i es el dap medido en el i -ésimo árbol (cm),

n es el número de árboles en los que se midió el dap.

En el cálculo del diámetro promedio con los datos tabulados se utilizan las relaciones siguientes. Más adelante se describe la tabulación.

$$d_a = \frac{\sum_{i=1}^c n_i d_i}{n},$$

$$d_c = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^c n_i d_i^2}{n}},$$

$$d_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^c d_i^{n_i}},$$

$$n = \sum_{i=1}^c n_i,$$

donde:

d_i es la marca de la i -ésima clase de dap (cm),
 c es el número de clases de dap,
 n es el número total de árboles (en la parcela o hectárea),
 n_i es el número de árboles en la i -ésima clase de dap (en la parcela o hectárea).

2.3.1.2 Altura promedio

A partir de las mediciones de altura realizadas en los árboles muestra pueden definirse diferentes promedios aritméticos. Entre otros: i) *altura promedio*, de todos los árboles o de una muestra aleatoria de ellos; ii) *altura dominante*, promedio de los árboles dominantes y codominantes; iii) *altura máxima*, promedio de los 100 árboles de mayor dap por hectárea; iv) *altura mayor*, promedio de los 100 árboles de mayor altura por hectárea; y v) *altura de Lorey*, que es un promedio ponderado por el área basal.

El cálculo del promedio a partir de mediciones sin ordenación (tabulación) es

$$H_a = \frac{\sum_{i=1}^n h_i}{n},$$

$$H_{dc} = \frac{\sum_{i=1}^{n_{dc}} h_{dci}}{n_{dc}},$$

donde:

H_a es la altura promedio aritmético (m),
 H_{dc} es la altura promedio dominante (m),
 h_i es la altura medida en el i -ésimo árbol (m),
 n es el número de árboles en los que se midió la altura,
 n_{dc} es el número de árboles dominantes y codominantes en los que se midió la altura.

En el cálculo del promedio a partir de los datos tabulados se utilizan las relaciones siguientes

$$H_a = \frac{\sum_{i=1}^c n_i h_i}{n},$$

$$H_L = \frac{\sum_{i=1}^c n_i g_i h_i}{\sum_{i=1}^c n_i g_i},$$

con

$$g_i = \pi \cdot d_i^2 / 40000 ,$$

donde:

H_a es la altura promedio aritmético (m),

H_L es la altura promedio de Lorey (m),

h_i es la altura de la i -ésima clase de dap (m),

c es el número de clases de dap,

n_i es el número de árboles en la i -ésima clase de dap (en la parcela o hectárea),

g_i es la sección transversal (normal) de un árbol de la i -ésima clase de dap (m^2),

d_i es la marca de clase de la i -ésima de dap (cm).

2.3.2 La relación entre la altura y el dap del árbol

Entre las diferentes variables medidas en un árbol, normalmente, existe algún tipo de relación, a las que se les denomina en general relaciones alométricas. Una de esas relaciones, bastante usada en el área forestal, es la relación entre la altura total del árbol y el dap. En general, a mayor dap mayor es la altura total del árbol. La relación altura-dap es bien descrita por una curva asintótica. Esa forma se genera por el hecho de que el incremento corriente anual en altura culmina (alcanza su máximo) antes que el dap (Fig. 8).

La medición de la altura es más cara y difícil que la medición del *dap*. Por esta razón, y debido a que existe una estrecha relación entre la altura de un árbol y el diámetro de fuste, es preferible, más práctico y económico tomar una muestra de árboles, medirles la altura y el diámetro de fuste, ajustar una relación entre esas variables y luego estimar la altura de cualquier árbol en el rodal a partir del diámetro fustal. La relación puede ser afectada por la calidad de sitio y otros factores como el manejo, lo que la hace variar de un rodal a otro.

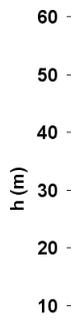


Figura 8. Gráfico de dispersión de puntos altura-dap obtenida de 108 árboles de *Pinus radiata* D. Don. Cada punto corresponde a un árbol.

Existe una gran variedad de modelos que se usan para ajustar la relación entre la altura y el diámetro fustal del árbol. A continuación se presentan algunos de ellos.

$$h_i = 1,3 + b_0 d_i + b_1 d_i^2 + \varepsilon_i ,$$

$$h_i = 1,3 + b_0(1 - e^{-b_1 d_i}) + \varepsilon_i,$$

$$h_i = b_0 + b_1(1 - e^{-b_2 d_i}) + \varepsilon_i,$$

$$h_i = b_0 + b_1 \ln(d_i) + \varepsilon_i,$$

$$\ln(h_i) = b_0 + b_1 \ln(d_i) + \varepsilon_i,$$

$$h_i = b_0 + b_1 / (d_i + 10) + \varepsilon_i,$$

$$h_i = b_0 + b_1 e^{-0,08 d_i} + \varepsilon_i,$$

$$h_i = b_0 d_i^{b_1} + \varepsilon_i,$$

$$h_i = b_0 e^{b_1 / d_i} + \varepsilon_i,$$

$$h_i = e^{b_0} d_i^{b_1} + \varepsilon_i,$$

$$h_i = e^{b_0 + b_1 / d_i} + \varepsilon_i.$$

En esos modelos:

d_i es el dap con corteza del i -ésimo árbol (cm),

h_i es la altura total del i -ésimo árbol (m),

\ln es el logaritmo natural,

b_i son coeficientes de regresión,

e es la base de los logaritmos naturales,

ε_i es un error o desvío aleatorio.

La relación entre la altura total y el dap de los árboles es no lineal en las variables. Ello significa que la relación no puede ser bien representada por una relación en la que se incluya el dap en forma lineal. Así, la modelación de la relación requiere del ajuste de modelos no lineales en las variables. La modelación mediante modelos lineales requiere modificar la variable explicatoria (dap), la variable dependiente (altura) o ambas, con el fin de obtener una relación lineal. En la figura 9 se muestran nubes de puntos obtenidas después de modificar la altura y/o el dap de los árboles. Es evidente que no todas las transformaciones, entre ellas algunas habituales en la modelación de la relación altura-dap, linealizan la relación.

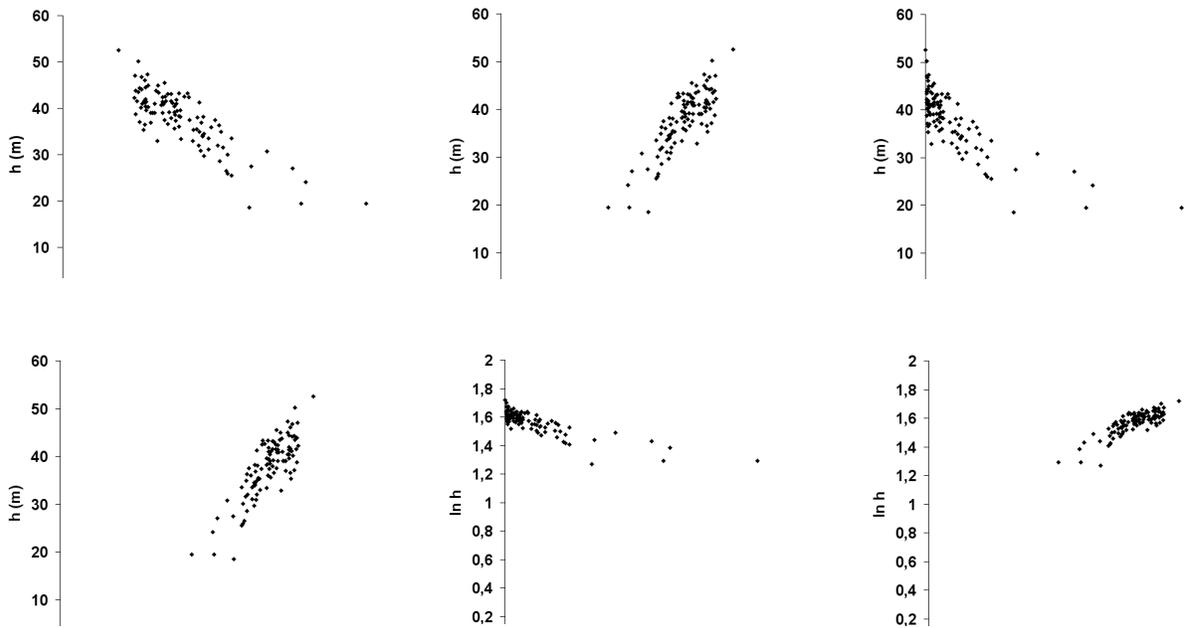


Figura 9. Gráficos de dispersión de puntos altura-dap para la especie *Pinus radiata* D. Don. Los gráficos incluyen transformaciones de la altura y/o del dap de los árboles.

2.3.3 Estimación del volumen

El volumen por unidad muestral se obtiene a partir de los árboles medidos y se expande a la unidad de superficie utilizando el factor de expansión definido por el tamaño de la unidad muestral. La determinación del volumen puede realizarse árbol por árbol ó agrupando los árboles en clases de tamaño basadas en el diámetro (clases de diámetro). Los resultados se presentan en forma de *Tabla de rodal y existencia*.

2.3.3.1 Determinación del volumen sin agrupamiento de diámetros

Cada árbol es cubicado mediante una función de volumen individual según su diámetro y altura, si corresponde. El volumen por parcela se obtiene sumando el volumen estimado para cada árbol presente en la parcela. El volumen por unidad de superficie y el total del rodal se obtienen expandiendo el valor obtenido en la parcela.

2.3.3.2 Determinación del volumen con agrupamiento de diámetros

Los árboles se agrupan en clases de diámetros, generando una tabla de rodal. El método asume que todos los árboles de una clase de dap tienen un diámetro igual a la marca de clase. El volumen para el árbol de tamaño promedio de cada clase se estima mediante una función de volumen individual, a partir de la marca de clase, y la altura estimada para un árbol de ese dap, si corresponde. Cuando la función de volumen incorpora la altura del árbol, ésta es

estimada mediante la relación altura-diámetro. El volumen por parcela aportado por una clase de dap se obtiene multiplicando el volumen del árbol promedio de la clase por el total de árboles perteneciente a la clase. La suma de volúmenes a través de todas las clases de tamaño genera el volumen por parcela. Este se expande para obtener el volumen por unidad de superficie y el volumen para el total del rodal. Los resultados se entregan tabulados por clase de dap, configurando una tabla de rodal y existencia.

La estimación del volumen descrita en los párrafos precedentes corresponde al volumen en pie. Estimaciones del volumen a obtener después de realizado el volteo necesariamente requieren considerar las pérdidas producidas durante el volteo por quebraduras de fustes.

En los métodos para estimar el volumen se ha descrito el tratamiento de la información obtenida de una parcela de muestreo. Normalmente, sin embargo, la estimación del volumen requiere del trazado y medición de más de una parcela. Así, los resultados finales corresponden a un promedio de los valores estimados en las parcelas; ese promedio por hectárea y para el total del rodal se acompaña habitualmente de sus respectivos intervalos de confianza. Estos se derivan de la variabilidad de los datos entre parcelas. El procedimiento de cálculo depende de la metodología utilizada para realizar el muestreo de la población.

Cuando sólo interesa conocer el volumen total acumulado por unidad de superficie, éste puede estimarse directamente mediante funciones de volumen agregado. Detalles sobre funciones de volumen individual y de volumen agregado se entregan en el Capítulo sobre volumen.

2.3.3.3 Tablas de rodal y de existencia

Las mediciones de dap y altura de árboles realizadas en parcelas de cierta superficie (e.g. 250, 400, 500 m²) se ordenan (tabulan) y procesan para generar tablas representativas de la condición o estado actual del rodal, en lo que se refiere básicamente a tamaños de los individuos. Una *tabla de rodal* presenta el número de árboles por clase de dap y unidad de superficie (hectárea); también puede incluir la altura y el área basal; cuando incluye el volumen, medido en alguna unidad, configura una *tabla de rodal y existencia*. La estimación de esas variables se describe más adelante.

2.3.3.3.1 Tabulación de la información muestral (dap)

Un conjunto ordenado de datos entrega mayor cantidad de información y de mejor calidad. Así, la tabulación o generación de tablas es un paso básico en el proceso de datos muestrales. El primer paso es la definición de las *clases de dap*, la *amplitud* (extensión) y la *marca de clase*. Cada clase de dap está conformada por un intervalo de valores diamétricos; ese intervalo es de amplitud constante (e.g. 2, 5, 10 cm). La marca de clase es el valor que se ubica en el punto medio de la clase; cuando la amplitud es un valor par, se acostumbra a definir marcas de clase par. Por ejemplo, en las Tablas 1 y 2 se definió marcas de clase de 2 cm de amplitud, con marcas de clase par; la primera clase incluye valores de dap entre 9,01 y 11,00, la segunda entre 11,01 y 13,00, etc.; para evitar que un valor pueda pertenecer a dos

clases adyacentes conviene definir los límites de éstas con un decimal más que en las mediciones.

Tabla 1. *Tabla de Rodal*

Clase de dap (cm)	Árboles (nº/ha)	Área basal (m²/ha)	Altura (m)
10	N ₁	G ₁	h ₁
12	N ₂	G ₂	h ₂
...
<i>i</i>	N _{<i>i</i>}	G _{<i>i</i>}	h _{<i>i</i>}
...
TOTAL	N	G	

Tabla 2. *Tabla de Rodal y Existencia.*

Clase de dap (cm)	Árboles (nº/ha)	Área basal (m²/ha)	Altura (m)	Volumen (m³ssc/ha)			
				Producto 1	Producto 2	Producto 3	Total
10	N ₁	G ₁	h ₁	V _{p1-1}	V _{p2-1}	V _{p3-1}	V _{t-1}
12	N ₂	G ₂	h ₂	V _{p1-2}	V _{p2-2}	V _{p3-2}	V _{t-2}
...
<i>i</i>	N _{<i>i</i>}	G _{<i>i</i>}	h _{<i>i</i>}	V _{p1-<i>i</i>}	V _{p2-<i>i</i>}	V _{p3-<i>i</i>}	V _{t-<i>i</i>}
...
TOTAL	N	G		V _{p1}	V _{p2}	V _{p3}	V _t

2.3.3.3.2 Obtención de los valores en las Tablas de rodal y de existencia

2.3.3.3.2.1 Número de árboles por hectárea

Una vez definidas las clases de dap se realiza la determinación de la frecuencia por clase y unidad de superficie. Consiste en llevar a hectárea el número de árboles medidos por clase de dap en la parcela.

$$N = \sum_{i=1}^c N_i ,$$

$$N_i = Fe \cdot n_i ,$$

$$Fe = 10000 / a ,$$

donde:

N es el número total de árboles por hectárea,

N_i es el número de árboles por hectárea en la *i*-ésima clase de dap,

c es el número de clases de dap,

n_i es el número de árboles en la parcela en la *i*-ésima clase de dap,

F_e es el factor de expansión (o reducción) a hectárea,
 a es la superficie de la parcela (m^2).

La determinación del número de árboles por clase de dap y unidad de superficie, como se muestra aquí, no sólo es útil para la generación de tablas de rodal y de existencia. Esa información se utiliza también para estudios más elaborados sobre la *estructura de rodal*, específicamente en lo referido a la *modelación de la distribución diamétrica*, tópico que se trata en el Capítulo pertinente. Es habitual que en un rodal en particular se mida más de una parcela. Así, la tabla de rodal y de existencia para el rodal corresponde al promedio de las variables observadas en cada parcela de muestreo.

2.3.3.3.2.2 Área basal por hectárea

El área basal corresponde a la suma de la sección transversal del fuste a la altura del dap de todos los árboles por unidad de superficie. A continuación se describe el cálculo del área basal por clase de dap a partir de datos tabulados; también puede obtenerse individualmente, árbol por árbol en cada clase, y luego acumulando por clase; ese es el procedimiento más preciso.

$$G = \sum_{i=1}^c G_i ,$$

$$G_i = N_i \cdot g_i ,$$

$$g_i = \pi \cdot d_i^2 / 40000 ,$$

donde:

G es el área basal total por hectárea (m^2/ha),

G_i es el área basal por hectárea en la i -ésima clase de dap (m^2/ha),

c es el número de clases de dap,

N_i es el número de árboles por hectárea en la i -ésima clase de dap,

g_i es la sección transversal (m^2) de un árbol de dap d_i (cm),

d_i es el dap del árbol, ó la marca de clase de la i -ésima clase de dap (cm).

2.3.3.3.2.3 Altura

La altura es más difícil y costosa de medir que el dap, razón por la que normalmente sólo se dispone de un número bajo de mediciones de altura en cada parcela de muestreo. A partir de la muestra de alturas medidas en el rodal, y aprovechando la estrecha relación que por lo general existe entre la altura y el dap de los árboles de un rodal, se ajustan funciones de regresión que permiten estimar la altura a partir del dap. Numerosos modelos se encuentran disponibles en literatura para usar con este fin, algunos de los cuales se describen más atrás en este Capítulo (ver relación altura-dap). En términos generales, el modelo es

$$h_i = f(d_i; \theta) ,$$

donde:

h_i es la altura (m) de un árbol que tiene un dap d_i (cm) (o la altura promedio de la i -ésima clase de dap, estimada con la marca de clase d_i),

θ es un vector de parámetros a estimar a partir de la muestra altura-dap,

f es un símbolo utilizado para indicar que la altura puede obtenerse a partir del diámetro y un conjunto adecuado de parámetros, esto es mediante una función de regresión altura-dap.

2.3.3.3.2.4 Volumen

Habitualmente, la información más valiosa la constituye la existencia volumétrica, habiendo dos caminos para obtenerla, según se describe más atrás en este Capítulo (ver estimación del volumen). En la tabla de rodal y existencia

$$V = \sum_{i=1}^c V_i,$$

$$V_i = N_i \cdot v_i,$$

$$v_i = f(d_i, h_i, f_i; \theta),$$

donde:

V es el volumen total de cierto producto por hectárea (m^3/ha),

V_i es el volumen de cierto producto por hectárea en la i -ésima clase de dap (m^3/ha),

c es el número de clases de dap,

N_i es el número de árboles por hectárea en la i -ésima clase de dap,

v_i es el volumen (m^3) de un árbol que tiene un dap d_i (cm) y una altura h_i (m), (o el volumen del árbol promedio de la i -ésima clase de dap, estimada con la marca de clase d_i y la altura promedio de la clase h_i),

d_i es el dap del árbol, ó la marca de clase de la i -ésima clase de dap (cm),

h_i es la altura (m) de un árbol que tiene un dap d_i (cm) (o la altura del árbol promedio de la i -ésima clase de dap, estimada con la marca de clase d_i),

f_i es una medida de la forma del fuste,

θ es un vector de parámetros a estimar a partir de una muestra volumen-dap-altura,

f es un símbolo utilizado aquí para indicar que el volumen por árbol puede obtenerse a partir del diámetro y altura del árbol, y un conjunto adecuado de parámetros, esto es mediante una función de regresión de volumen individual.

En los párrafos precedentes se menciona que cuando sólo interesa estimar el volumen total por unidad de superficie, es posible utilizar una función de volumen agregado con ese fin. La misma estimación se logra mediante una función de volumen individual, en base al promedio de la variable explicatoria. Por ejemplo, si se utiliza el modelo $v_i = b_0 + b_1 \cdot d_i^2 h_i f_i + e_i$, en el que v_i es el volumen de un árbol de dap d_i , altura total h_i y forma fustal f_i , el volumen por unidad de superficie (V) es

$$V = N(b_0 + b_1 \cdot \overline{d^2 h f}),$$

donde:

N es el número de árboles por unidad de superficie,
 $\overline{d^2 hf}$ es el promedio de la variable independiente en la muestra.

3 Medición y estimación del volumen

3.1 Medición y estimación del volumen en árboles individuales y productos

El volumen es la medida de la cantidad de madera sólida más ampliamente utilizada. En el árbol individual pueden identificarse diferentes categorías de volumen. El árbol completo, esto es considerando todos los componentes, constituye el *volumen total*; todos aquellos componentes cuyas dimensiones son aceptables para el mercado constituyen el *volumen comercial*; el *volumen de desechos* está conformado por secciones maderables del árbol que presentan defectos y dimensiones menores o no comerciales; también existe la denominación de *volumen bruto*, cuando se estima el volumen total hasta un diámetro comercial (*dlu*: diámetro límite de utilización) incluyendo defectos; desde este último, descontados los defectos, se obtiene el *volumen neto*. Esos volúmenes pueden expresarse con o sin corteza.

La medición directa de cualquiera de los volúmenes mencionados en el párrafo anterior es difícil de realizar directamente en árboles en pie. Así, la cubicación normalmente se realiza mediante métodos indirectos. Esto consiste en estimar el volumen del árbol a partir de variables de más fácil medición como el dap, la altura y la forma del fuste utilizando una función de volumen. La construcción y validación de una función de volumen requiere determinar directamente el volumen en un número suficiente de árboles, a partir de mediciones intensivas del diámetro y corteza a lo largo del fuste o por medio de metodologías que implican el uso de implementación costosa.

3.1.1 Métodos para la determinación directa del volumen en árboles individuales

La determinación directa del volumen en árboles individuales es una tarea laboriosa que consume habitualmente mucho tiempo. Es una labor necesaria para el desarrollo de relaciones funcionales de volumen. A partir de una muestra de árboles, en los que se ha obtenido directamente el volumen y otras variables auxiliares fáciles de medir, se ajustan relaciones entre el volumen y las variables auxiliares. Esas relaciones se utilizan para estimar el volumen en otros árboles a partir de las variables de fácil medición. La determinación directa del volumen se realiza mediante métodos analíticos, gráficos o por desplazamiento de líquidos.

3.1.1.1 Método analítico

Este método asume que la forma del fuste del árbol, ya sea como un todo o por secciones, es semejante a sólidos geométricos básicos (cilindro, paraboloides, cono o neiloide) o troncos de estos sólidos. El volumen de esos sólidos se obtiene mediante fórmulas específicas, las que a su vez se utilizan para la cubicación de árboles y trozas. El desarrollo de esas fórmulas se describe a continuación.

3.1.1.1.1 Fórmulas de Smalian, Huber y Newton

El perfil longitudinal de los sólidos simples (cilindro, paraboloides, cono o neiloide) puede representarse mediante la relación básica

$$y = k \cdot l^r,$$

donde:

y es el radio del sólido en la posición l ,

k es una constante, que define la tasa de aumento del radio del sólido por cada unidad de aumento en la longitud,

l es la distancia medida desde el extremo menor del sólido,

r es un exponente que define la forma del sólido (cilindro $r = 0$; paraboloides $r = 0,5$; cono $r = 1$; neiloide $r = 1,5$).

Al hacer girar el área definida entre la curva de perfil y el eje longitudinal, en torno al eje longitudinal, se obtiene un *sólido de revolución* (ver Fig. 1).

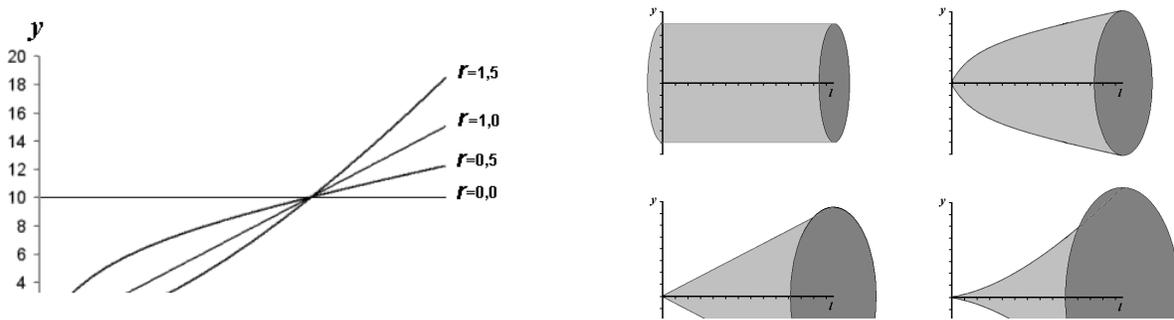


Figura 1. Perfil de sólidos geométricos básicos (izquierda) y los sólidos respectivos obtenidos de la rotación de la curva de perfil en torno al eje longitudinal (derecha).

El volumen del sólido se obtiene de la integración de la función de perfil básica. El área de sección en una posición l corresponde a $\pi \cdot y^2$, y su integración a lo largo del sólido genera el volumen del mismo; esto es,

$$v = \int_0^L \partial v = \int_0^L a \partial l = \pi \int_0^L y^2 \partial l = \pi \int_0^L k^2 l^{2r} \partial l = \pi \cdot k^2 \frac{l^{2r+1}}{2r+1} \Big|_0^L,$$

donde:

a es el área de sección del sólido a una distancia l desde el extremo menor,

L es la altura (longitud total) del sólido.

Así, las fórmulas para estimar el volumen de un cilindro, paraboloides, cono y neiloide, son, respectivamente

$$\pi \cdot Y^2 L, \frac{\pi \cdot Y^2}{2} L, \frac{\pi \cdot Y^2}{3} L, \frac{\pi \cdot Y^2}{4} L,$$

esto es

$$A_b L, \frac{A_b}{2} L, \frac{A_b}{3} L, \frac{A_b}{4} L,$$

donde:

Y es el radio en la base del sólido, esto es a una distancia L del extremo de radio menor,
 A_b es el área en la base del sólido.

El cálculo del volumen requiere conocer la longitud y el radio o diámetro en la base del sólido de revolución. La estimación del volumen en troncos de paraboloides, conos y neiloides, en cambio, requiere de más de una medición de diámetros (Fig. 2). Las fórmulas para el volumen de troncos de sólidos se derivan mediante el procedimiento descrito; en ello se considera que un tronco de sólido se obtiene eliminándole su extremo menor, el cual a su vez tiene la misma forma que el sólido original, pero es de menor tamaño.

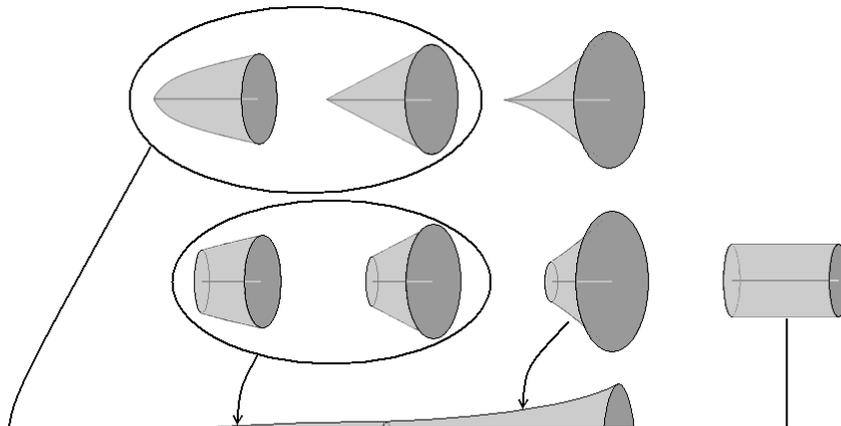


Figura 2. Sólidos y troncos de sólidos geométricos básicos y sectores en el fuste que adquieren esa forma.

La fórmula para el volumen del tronco de sólido se obtiene evaluando la integral de la función de perfil básica entre la base del sólido (L_2) y otro punto cualquiera de su altura (L_1)

$$v = \pi \cdot k^2 \frac{L^{2r+1}}{2r+1} \Big|_{L_1}^{L_2} = \pi \cdot k^2 \left[\frac{L_2^{2r+1}}{2r+1} - \frac{L_1^{2r+1}}{2r+1} \right].$$

Así, en un paraboloides ($r = 0,5$)

$$v = \pi \cdot k^2 \left[\frac{L_2^2}{2} - \frac{L_1^2}{2} \right] = \frac{\pi \cdot k^2}{2} (L_2 + L_1)(L_2 - L_1) = \frac{\pi \cdot k^2}{2} (L_2 + L_1)L,$$

$$v = \left[\frac{A_b + A_s}{2} \right] L,$$

donde:

v es el volumen del tronco de sólido,

A_b es el área de la sección basal (mayor) del tronco de sólido,

A_s es el área de la sección superior (menor) del tronco de sólido,

L es la longitud del tronco de sólido, con $L = L_2 - L_1$.

Esta fórmula se conoce bajo la denominación de *Fórmula de Smalian*. Esta y otras fórmulas para calcular el volumen de troncos de sólidos se entregan en la tabla 1.

Las fórmulas de volumen se utilizan normalmente para la cubicación de secciones de árboles. Para ello se realizan mediciones de diámetro lo largo del fuste. La cubicación se realiza sección tras sección, quedando cada sección definida entre dos mediciones sucesivas en el caso de utilizar la fórmula de Smalian. En la cubicación mediante la fórmula de Huber se utiliza cada medición, tomando como longitud de troza la distancia entre los puntos medios entre mediciones. La fórmula de Newton requiere definir las secciones en base a tres mediciones sucesivas, las cuales deben realizarse a intervalos uniformes. El volumen total o de una fracción del fuste del árbol se obtiene sumando los volúmenes obtenidos de las secciones.

La precisión de las fórmulas obtenidas por el método analítico depende del grado de cercanía entre la forma real de la sección del árbol y la ideal asumida por el sólido de referencia. Así, la precisión depende, por un lado, de la sección del árbol donde se utilice una fórmula determinada y, por otro, de la distancia entre las mediciones de diámetro realizadas en el fuste. Mientras mayor es la distancia, menor es la precisión de las fórmulas.

En cuanto a la porción de fuste adecuada para la cubicación con las diferentes fórmulas, es normal asumir una forma cilíndrica para el tocón del árbol. Este es el único camino posible dado que en la práctica no se dispone de ningún diámetro bajo la altura de tocón. En la porción basal, el fuste de árboles grandes adquiere la forma de un tronco de neiloide; la parte intermedia es bien representada por troncos de paraboloides; en tanto que el extremo superior del fuste puede asumirse posee forma parabólica o cónica.

La unidad resultante del cálculo del volumen del sólido o tronco de sólido depende de las unidades utilizadas para medir la longitud y el área o áreas de sección. Cuando ellas se expresan en metros (m) se obtiene el volumen expresado en metros cúbicos (m³). En la medición de trozas y árboles, lo normal es que se midan longitudes en metros y diámetros (para obtener áreas de sección) en centímetros. Así, la utilización de esas fórmulas requiere de la transformación del diámetro a metros antes de calcular el área de sección; también puede estimarse el área de sección directamente a partir del diámetro de troza medido en centímetros, esto es mediante

$$A = \frac{\pi}{40000} d^2,$$

donde:

A es el área de sección (m^2) de una troza de diámetro de d (cm),

π es una constante (3,14159..).

Tabla 1. Fórmulas de volumen.

Tronco de sólido	Fórmula	Denominación
Paraboloide	$v = \left[\frac{A_b + A_s}{2} \right] L$	Smalian
	$v = A_m L$	Huber
Cono	$v = \left[\frac{A_b + \sqrt{A_b A_s} + A_s}{3} \right] L$	
	$v = \left[\frac{A_b + \sqrt[3]{A_b^2 A_s} + \sqrt[3]{A_b A_s^2} + A_s}{4} \right] L$	
Neiloide	$v = \left[A_s + \frac{A_s - A_b}{\left(\frac{A_s}{A_b} \right)^{1/3} - 1} \right] \frac{L}{4}$	Northway
Paraboloide, cono, neiloide	$v = \left[\frac{A_b + 4A_m + A_s}{6} \right] L$	Newton

A_m es el área de sección en la mitad de la longitud del tronco de sólido.

3.1.1.1.2 Fórmula general de Groesenbaugh

$$v = \frac{\pi}{40000} \left[d_b d_s + \frac{(d_b - d_s)^2}{2r + 1} \right] L,$$

donde:

v es el volumen de la troza (m^3),

d_b es el diámetro basal (mayor) de la troza (cm),

d_s es el diámetro en el extremo menor de la troza (cm),

L es la longitud de la troza (m),

r define la forma de la troza (paraboloide $r = 0,5$; cono $r = 1$; neiloide $r = 1,5$).

3.1.1.1.3 Fórmula del centroide

La fórmula de Newton, la cual es exacta para todos los troncos de sólidos simples, puede derivarse del polinomio de segundo grado siguiente (ver Wiant et al. 1992; Fig. 3)

$$C = b_0 + b_1 l + b_2 l^2, \quad [1]$$

donde:

C es el área de sección del tronco de sólido a una distancia l desde el extremo menor.

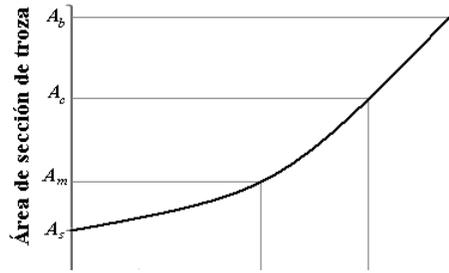


Figura 3. Área de la sección transversal en función de la distancia desde el extremo de menor diámetro de la troza.

La relación [1], aplicada a las áreas en la base (A_b , en $l = L$, siendo L la longitud del tronco de sólido), en la mitad de la longitud (A_m , en $l = L/2$) y en el extremo menor de la troza (A_s , en $l = 0$), permite obtener la fórmula de Newton. Esto es con

$$A_s = b_0,$$

$$A_m = b_0 + b_1(L/2) + b_2(L/2)^2,$$

$$A_b = b_0 + b_1L + b_2L^2.$$

Resolviendo simultáneamente las relaciones para C , A_s y A_b se obtienen las fórmulas para calcular b_1 (combinando A_s y A_b) y b_2 (combinando C , A_s y b_1)

$$b_1 = \frac{A_b - A_s - b_2L^2}{L}, \quad [2]$$

$$b_2 = \frac{A_b - C(L/l) - A_s(1-L/l)}{L^2 - Ll}. \quad [3]$$

Esos coeficientes representan tasas de cambio del área de sección. Así, en un paraboloides, $b_2 = 0$ y $b_1 = (A_b - A_s)/L$.

La integral de C (relación [1]) desde 0 hasta L es

$$v = A_sL + b_1 \frac{L^2}{2} + b_2 \frac{L^3}{3}, \quad [4]$$

relación que permite estimar el volumen a partir del área de sección a cualquier distancia desde el extremo menor del tronco de sólido. Cuando esa distancia es igual a $L/2$, los coeficientes b_2 y b_1 toman los valores $b_2 = (2(A_b + A_s) - 2A_m)/L^2$ y $b_1 = (4A_m - 3A_s - A_b)/L$, respectivamente. El reemplazo de esas relaciones en la fórmula de volumen conduce a la fórmula de Newton.

Así, la fórmula de Newton no es más que una de una gama de fórmulas posibles, que utilizan información adicional (diámetro o sección) en algún punto intermedio de los troncos de sólido. Cuando esa distancia corresponde al punto en que se obtiene la mitad del volumen de la pieza, se obtiene la relación que se denomina *fórmula del centroide*. Esa distancia se determina mediante la relación siguiente, en trozas de forma parabólica.

$$l_c = L \frac{\left[\left(\frac{D}{d} \right)^4 + 1 \right]^{0,5} - 2^{0,5}}{2^{0,5} \left[\left(\frac{D}{d} \right)^2 - 1 \right]}, \quad [5]$$

donde:

l_c es la distancia hasta el centroide de la troza, medida desde el extremo menor (m),

D es el diámetro basal (mayor) de la troza (cm),

d es el diámetro en el extremo menor de la troza (cm),

L es la longitud de la troza (m).

Aunque en general se conoce esa fórmula con el nombre de fórmula del centroide, esa fórmula es válida sólo para trozas de forma parabólica. La fórmula general para cualquier forma básica de troza es

$$l_c = L \frac{\left[\left(\frac{D}{d} \right)^{\frac{2r+1}{r}} + 1 \right]^{\frac{1}{2r+1}} - 2^{\frac{1}{2r+1}}}{2^{\frac{1}{2r+1}} \left[\left(\frac{D}{d} \right)^{\frac{1}{r}} - 1 \right]}. \quad [6]$$

Esta fórmula se obtiene de la fórmula de volumen de troncos de sólidos de revolución. Esto es resolviendo la igualdad

$$\frac{\pi \cdot k^2 \left[\frac{L_2^{2r+1}}{2r+1} - \frac{L_1^{2r+1}}{2r+1} \right]}{2} = \pi \cdot k^2 \left[\frac{L_2^{2r+1}}{2r+1} - \frac{l_c^{2r+1}}{2r+1} \right],$$

y reemplazando las posiciones L_1 y L_2 por los diámetros respectivos obtenidos de la relación de perfil básica $y = k \cdot l^r$.

En la utilización de la fórmula del centroide se opera como sigue. El primer paso es medir las dimensiones de la troza, esto es el diámetro menor (d), el diámetro mayor (D) y la longitud (L); luego se determina la posición del centroide (l_c) mediante la relación [5] ó [6], se mide el diámetro de la troza en ese punto y se calcula el área de sección a partir de ese diámetro; en seguida se reemplaza ese valor en C y el de l_c en l de la relación [3] para obtener b_2 y b_1 mediante la relación [2]. Finalmente, el volumen se obtiene mediante la relación [4].

3.1.1.1.4 Muestreo por importancia

La idea de esta técnica (Importance Sampling), aplicada a la estimación del volumen fustal, es concentrar el muestreo en aquellas partes del fuste que son de mayor importancia para la determinación del volumen en vez de repartir la muestra igualmente en toda la longitud del fuste.

La integral para la obtención del volumen comercial entre las alturas h_1 y h_2 en el fuste

$$v_c = \int_{l_1}^{l_2} A(l) dl, \quad [7]$$

en la que $A(l)$ es el área real de la sección del fuste a una distancia l desde el ápice ($l_1 = H - h_2$, $l_2 = H - h_1$, siendo H la altura total del árbol), puede ser representada mediante la relación

$$v_c = \int_{l_1}^{l_2} \frac{A(l)}{f_L(l)} f_L(l) dl = E \left[\frac{A(L)}{f_L(L)} \right] \quad [8]$$

en la que L es un vector aleatorio que posee una función de distribución de probabilidad (fdp) $f_L(l)$, la que recibe el nombre de distribución de muestreo por importancia. Así, $v = A(L)/f_L(L)$ es un estimador insesgado de v_c con varianza (ver Rubinstein 1981, p.122)

$$\text{var } v = \int_{l_1}^{l_2} \frac{A^2(l)}{f_L(l)} dl - v_c^2. \quad [9]$$

La estimación del volumen se realiza tomando una muestra aleatoria L_1, \dots, L_m desde la fdp $f_L(l)$ y evaluando (ver [8])

$$\tilde{v}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{A(L_i)}{f_L(L_i)}. \quad [10]$$

El mínimo de la varianza [9] ocurre cuando la fdp se define mediante

$$f_L(l) = \frac{|A(l)|}{\int_{l_1}^{l_2} A(l) dl}. \quad [11]$$

Asumiendo que el perfil de fuste es de forma parabólica y partiendo de la relación básica para el área de fuste estimada en la posición l del fuste $S(l) = k \cdot d_l^2 = b \cdot l$, con $k = \pi/40000$ y $l = H - h$, el valor del coeficiente b puede obtenerse a partir de la altura total (H) y el

diámetro de fuste (d_L) en la posición L del fuste ($L = H - H_L$), mediante $b = k \cdot d_L^2 / L = S(L) / L$. Reemplazando esa expresión en la relación básica se obtiene

$$S(l) = \frac{S(L)}{L} l.$$

Así, un estimador para el volumen [7] es

$$v_s = \frac{S(L)}{L} \int_{l_1}^{l_2} l dl = \frac{S(L) \cdot l^2}{2L} \Big|_{l_1}^{l_2} = \frac{S(L) \cdot (l_2^2 - l_1^2)}{2L},$$

$$v_s = \frac{S(L) \cdot K}{2L}. \quad [12]$$

en la que $K = l_2^2 - l_1^2 = (H - h_1)^2 - (H - h_2)^2 = 2 \cdot H(h_2 - h_1) + h_1^2 - h_2^2$. El estimador [12] es, sin embargo, un estimador sesgado de [7], pero a partir de él puede obtenerse el estimador insesgado definiendo la fdp (ver [11]) mediante

$$f_L(l) = \frac{S(L)}{v_s} \quad [11']$$

y reemplazándola en [10]. Así, el estimador insesgado es

$$\tilde{v}_c = v_s \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{A(L_i)}{S(L)}. \quad [10']$$

Note que en [10'], el estimador aproximado del volumen (v_s), obtenido a partir de la función de perfil de fuste asumida, se corrige utilizando la razón entre la sección real del árbol medida en el punto de muestreo y la sección estimada mediante la función de perfil fustal (ver Gregoire et al. 1986, Wiant et al. 1992).

Naturalmente, la fdp en [11'] se reduce con la función de perfil fustal seleccionada a

$$f_L(l) = \frac{2l}{K} \quad [11'']$$

y el estimador del volumen [4'] es

$$\tilde{v}_c = \frac{K}{2m} \sum_{i=1}^m \frac{A(L_i)}{L_i}. \quad [10'']$$

A partir de [10''] es claro que la estimación del volumen puede realizarse a partir de una medición de diámetro en un punto seleccionado aleatoriamente en el fuste del árbol. La selección de dos o más puntos permite evaluar la precisión de las estimaciones. En este caso,

la varianza muestral se estima a partir de la estimaciones individuales $\hat{v}_{ci} = K \cdot A(L_i)/(2L_i)$ mediante

$$\text{var } \tilde{v}_c = \frac{1}{m(m-1)} \sum_{i=1}^m (\hat{v}_{ci} - \tilde{v}_c)^2. \quad [13]$$

La estimación del volumen requiere definir (una o más) posiciones L_i en el fuste, seleccionando números aleatorios u_i desde una distribución uniforme $[0, 1]$, determinar el área $A(L_i)$ y el volumen respectivo mediante [10'']. En esa relación, $K = l_2^2 - l_1^2$ define el rango en el fuste para la selección de los puntos para determinar el volumen. Así, $u_i \cdot K = l_2^2 - L_i^2$ representa una posición aleatoria para medir el diámetro de fuste. Despejando, se obtiene la posición $L_i = (l_2^2 - u_i \cdot K)^{0.5}$, la que expresada en términos de altura en el fuste es

$$h_i = H - ((H - h_1)^2 - u_i \cdot K)^{0.5}. \quad [14]$$

Note que esta relación también permite obtener la altura en el fuste para la medición del diámetro del centroide (h_c). Para ello, u_i en [14] se reemplaza por $u = 0,5$. Note, además, que la función asumida para el área de sección fustal varía en relación a la presentada previamente al derivar la fórmula del centroide. También pueden usarse funciones de perfil fustal más complejas, pero una mayor complejidad no asegura siempre una estimación más precisa (ver Coble y Wiant 2000). Esas funciones reciben el nombre de funciones aproximadas de perfil fustal (proxy function).

3.1.1.2 Método gráfico

El primer paso en la obtención del volumen mediante este método es graficar el diámetro al cuadrado (d^2 en el eje Y) con las alturas en el fuste (h en el eje X). Luego se determina el factor de volumen, esto es la cantidad de m^3 que representa cada cm^2 de gráfico. Ese factor multiplicado por el área bajo la curva, que se genera al unir los puntos del gráfico d^2 - h , entrega el volumen de la troza o árbol, según sea el área tomada desde el gráfico (Fig. 4).

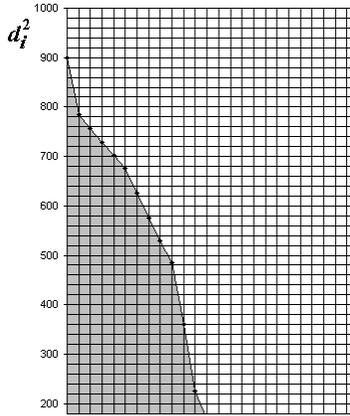


Figura 4. Determinación del volumen fustal por el método gráfico. Al unir los puntos del gráfico mediante líneas rectas, el volumen determinado por este método es equivalente al obtenido con la fórmula de Smalian.

El factor de volumen (f_v), esto es la cantidad de volumen que representa cada cm^2 de gráfico, se obtiene de la relación

$$f_v = \frac{\pi \cdot E_d^2 \cdot E_h}{40000},$$

en la que E_d^2 corresponde a la escala para el diámetro en el eje Y y E_h corresponde a la escala para la altura en el eje X . En la figura 4, en la que $E_d^2 = 20$, esto es 20 cm^2 de diámetro por cada cm lineal en el gráfico, y $E_h = 1$, esto es 1 m de altura por cada cm lineal en el gráfico, el factor de volumen es

$$f_v = \frac{\pi(20)(1)}{40000}.$$

3.1.1.3 Desplazamiento de líquidos

Este método de determinación del volumen se basa en el desplazamiento que provoca la pieza a cubicar al introducirla completamente en el líquido (agua) contenido en un recipiente (Xilómetro). Existen dos opciones para la utilización del método. Una opción es medir el peso del agua desplazada y determinar el volumen con la relación

$$v = \frac{Pa}{da},$$

donde:

Pa es el peso del agua desplazada (kg),

da es la densidad del agua (kg/m^3).

La otra opción es medir el volumen de agua desplazada. Este es el método más exacto, especialmente cuando se cubican piezas de forma irregular. Requiere cortar y trozar el árbol

para su cubicación. Puede ser difícil de implementar cuando los árboles o trozas son de grandes dimensiones.

3.1.1.4 Método de densidad

Este método requiere conocer la densidad en verde de la madera de la especie que se desea cubicar. El volumen se obtiene a partir del peso de las trozas recién cortadas.

$$v = \frac{Pv}{dv},$$

donde:

Pv es el peso fresco (verde) de la troza (kg),
 dv es la densidad verde de la madera (kg/m^3).

3.1.2 Unidades para expresar el volumen

Existe una variedad de unidades que se utilizan para expresar el volumen de un árbol. Algunas de ellas corresponden a unidades para expresar volumen cúbico del árbol completo o parte de él, otras expresan el volumen de productos del árbol (Tabla 2).

Las unidades para expresar el volumen sólido son variadas. En Chile se encuentran en uso unidades del sistema métrico decimal (m^3) y unidades del sistema inglés (pie^3); también se utilizan otras unidades particulares como el m^3JAS (Japanese Agricultural Standards), impuesto para la cubicación de rollizos. Las unidades utilizadas para expresar volumen después del proceso de aserrío provienen del sistema inglés. Éstas se denominan, en general, unidades comerciales.

Tabla 2. Unidades para expresar volumen de madera.

Unidad de volumen	Símbolo	Dimensiones (espesor, ancho, longitud)	Uso habitual
Metro cúbico	m^3	1m x 1m x 1m	volumen sólido
Pie cúbico	pie^3	1' x 1' x 1'	volumen sólido
Metro cúbico JAS	m^3JAS		volumen sólido de rollizos
Pulgada larga (frontera)		1" x 10" x 12'	volumen comercial
Pulgada corta (pinera)		1" x 10" x 10,5'	volumen comercial
Pie maderero (pie cuadrado)	pm, pie^2	1" x 1' x 1'	volumen comercial
Otras:			
pie Hoppus $\frac{\text{pie}^2}{\text{pie}^2}$	$L\left(\frac{C}{4}\right)^2 \approx 10$	ph	
Cunit $\approx 100 \text{ pie}^3$			madera sólida, aserrín, astillas

3.1.3 Relaciones funcionales de volumen

Las funciones de volumen relacionan matemáticamente el *volumen* con otras variables de más fácil medición como el *dap* y *altura* de los árboles. La función de volumen individual se desarrolla y aplica a nivel de árbol individual, permitiendo realizar estimaciones de volumen a nivel de rodal a partir de mediciones realizadas a nivel de árbol individual en unidades muestrales. Existen también funciones de volumen agregado, desarrolladas para estimar directamente el volumen por unidad de superficie de rodal, en base a valores promedio del *dap* y altura de los árboles.

3.1.3.1 Funciones de volumen individual

Una función de volumen individual relaciona el volumen con variables más fáciles de medir, como el *dap* y la altura del árbol. En su construcción se utilizan datos (volumen, diámetro, altura, forma fustal) obtenidos directamente de los árboles.

Hay dos principios básicos involucrados en la construcción de funciones de volumen. El primero asume que el volumen del árbol depende del diámetro, la altura y de la forma fustal. El segundo asume que una función que determine correctamente el volumen de un árbol también es válida para otros árboles de igual diámetro, altura y forma. Existe una variedad de modelos posibles para ajustar funciones de volumen individual; para decidir cuál de ellos usar deben considerarse aspectos de simplicidad, objetividad y precisión.

Dependiendo de la estructura del modelo usado para ajustar la relación entre el volumen del árbol y otras variables de más fácil medición, las funciones obtenidas pueden clasificarse en: i) *funciones de volumen local*, que incorporan el *dap* como única variable independiente; ii) *funciones de volumen general*, cuyas variables independientes son el *dap* y la altura; y iii) *funciones de volumen con clase de forma*, que incorporan el *dap*, la altura y la forma como variables independientes.

La función de volumen local es útil cuando la altura y forma fustal son constantes o presentan una variabilidad baja; en esas circunstancias, la incorporación de esas variables en la función no aporta información adicional sobre la variabilidad del volumen; ello podría ser válido en rodales coetáneos, localizados en sectores de calidad de sitio homogénea y con poca variación en la densidad de rodal; el término *local* proviene de lo reducido que es la extensión para la cual es válida la función, normalmente sólo el rodal de donde se recopilaron datos para su ajuste. Cuando se requiere una función aplicable a variadas condiciones de sitio, manejo y edad debe recurrirse a funciones de tipo general; la variabilidad en la calidad de sitio se refleja en la variabilidad de la altura fustal y la variabilidad en manejo se refleja en la variabilidad diamétrica. Ambas variables son a su vez afectadas por la edad del rodal. El ajuste de una función con esas características requiere información de variadas condiciones de sitio, manejo y edad, siendo a su vez aplicable a una amplia gama de condiciones, siempre en el rango de condiciones que aportan datos para el ajuste. El tercer tipo de función es adecuado cuando

individuos de igual dap y altura tienen diferente forma fustal. A continuación se presentan algunos modelos de volumen individual.

$$v_i = b_1 d_i^{b_2} + \varepsilon_i,$$

$$v_i = b_1 g_i h_i + \varepsilon_i,$$

$$v_i = b_1 d_i^2 h_i + \varepsilon_i,$$

$$v_i = b_0 + b_1 d_i^2 h_i + \varepsilon_i,$$

$$v_i = b_0 + b_1 d_i^2 + b_2 h_i + b_3 d_i^2 h_i + \varepsilon_i,$$

$$v_i = b_0 + d_i^{b_1} h_i^{b_2} + \varepsilon_i,$$

$$v_i = b_0 + b_1 d_i^{b_2} h_i^{b_3} + \varepsilon_i,$$

$$v_i = d_i^2 / (b_0 + b_1 / h_i) + \varepsilon_i,$$

$$v_i = b_0 + b_1 d_i^2 h_i f_i + \varepsilon_i,$$

donde:

v_i es el volumen del i -ésimo árbol (expresado en alguna unidad: m^3 , pulgada, pie maderero, etc.),

d_i es el dap del i -ésimo árbol (cm),

h_i es la altura total o comercial del i -ésimo árbol (m),

f_i es una medida de la forma fustal del i -ésimo árbol (m), e.g. la clase de forma de Girard o el cociente de forma.

Los modelos de volumen individual incluyen modelos lineales y no lineales en los parámetros. Los primeros se ajustan mediante el método de mínimos cuadrados ordinarios o ponderados, dependiendo del comportamiento de la varianza del volumen; el segundo tipo requiere de métodos de ajuste no lineales. Algunos modelos no lineales pueden linealizarse mediante logaritmos para facilitar el ajuste y/o para homogeneizar la varianza. En ese caso, la función resultante puede subestimar el volumen real del árbol.

Los modelos pueden ser utilizados para modelar el volumen del árbol individual independientemente del volumen que se trate o de la unidad utilizada para expresarlo. Así, el volumen puede referirse al volumen total del árbol o al volumen comercial hasta un determinado dlu, y puede ser determinado en cualquier unidad (m^3 ssc, pm, etc.).

La forma de la relación entre el volumen fustal y otras variables en el árbol se puede detectar fácilmente mediante gráficos. En general, la relación entre el volumen y variables simples en el árbol como el dap, la altura total y la clase de forma de Girard es no lineal (ver Fig. 5).

VARIABLES derivadas de esas variables básicas permiten linealizar la relación y reducir la varianza residual del volumen (ver Tabla 3).

Tabla 3. Resultados del ajuste de un modelo de volumen individual con tres diferentes definiciones de variable independiente. Base 108 árboles de *P. radiata*.

Función ajustada	Raíz del cuadrado medio residual	Coefficiente de determinación (R^2)
$v = -0,402024 + 0,001208D^2$	0,64925	0,9202
$v = -0,002109 + 0,000026059D^2H$	0,43697	0,9638
$v = 0,080524 + 0,000000324D^2HF$	0,26919	0,9863

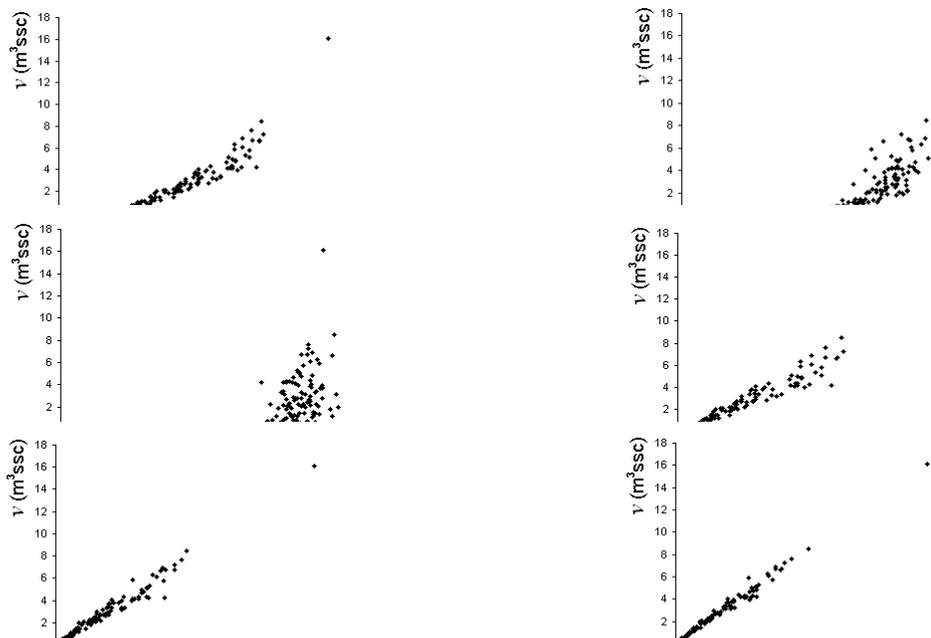


Figura 5. Relación entre el volumen total (v) y el dap (D), la altura total (H) y la clase de forma de Girard (F) del árbol, y otras variables habituales en modelos predictores del volumen individual. Base 108 árboles de *P. radiata*.

3.1.3.2 Función de volumen individual con dlu variable

La función de volumen de árbol individual normalmente se ajusta para estimar el volumen de fuste entre tocón y un diámetro límite de utilización (dlu) específico, lo que obliga a construir una nueva función cuando se requiere estimar el volumen hasta otro dlu. Así, puede requerirse de un gran número de funciones, tantas como dlu's diferentes se hayan definido. Cualquier nueva definición de dlu requiere del ajuste de una nueva función. Una técnica alternativa, que soluciona ese problema, es el ajuste de funciones de volumen con dlu variable. Otra opción es el ajuste de funciones de ahusamiento (ver Capítulo sobre forma fustal).

Burkhardt (1977) propuso el siguiente modelo para la estimación del volumen considerando un dlu variable

$$v_c = V \left(1 + b_1 d^{b_2} / D^{b_3} \right),$$

donde:

v_c es el volumen comercial entre el tocón y el dlu d en fuste,

V es el volumen total entre el tocón y el ápice del árbol,

d es el diámetro límite comercial con o sin corteza,

D es el dap del árbol.

El modelo a ajustar es

$$Y = b_1 d^{b_2} / D^{b_3},$$

con

$$Y = \frac{v_c}{V} - 1.$$

El conjunto de datos para el ajuste de la función debe incluir observaciones de volumen comercial hasta diferentes diámetros límite fijos (e.g. 10, 15, 20, 25 cm). Otros modelos de este tipo están descritos en Cao et al. (1980).

3.1.4 Criterios para seleccionar modelos

En la selección del mejor modelo pueden usarse varios criterios. Entre ellos destacan el índice de Furnival (1961), el índice de Akaike, la diferencia agregada global, la diferencia media, la desviación estándar de los residuos, el coeficiente de variación residual, el error estándar de estimación y el error cuadrático medio residual. Al utilizar estos indicadores debe preferirse aquel modelo que entregue el valor más bajo. Lo contrario sucede cuando se usa el coeficiente de correlación simple, el coeficiente de correlación ajustado o el coeficiente de determinación, criterios que también pueden ser útiles para la selección de modelos. La forma de cálculo de algunos de los criterios mencionados se describe a continuación.

$$da = \frac{\sum_{i=1}^n v_i - \sum_{i=1}^n \hat{v}_i}{\sum_{i=1}^n \hat{v}_i},$$

$$dm = \frac{\sum_{i=1}^n |\varepsilon_i|}{n \sum_{i=1}^n \hat{v}_i},$$

$$s_{\varepsilon} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2}{n-p}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i\right)^2}{n}}{n-p}},$$

$$cv_{\varepsilon} = 100 \frac{s_{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}},$$

con

$$\varepsilon_i = v_i - \hat{v}_i,$$

donde:

da es la diferencia agregada,

dm es la diferencia media,

S_{ε} es la desviación estándar residual,

cv_{ε} es el coeficiente de variación residual,

ε_i es un desvío o residuo,

p es el número de parámetros en el modelo,

n es el tamaño de la muestra.

3.1.4.1 El índice de Furnival

El índice de Furnival (1961) es útil para la comparación de modelos que tienen diferentes variables dependientes. Un modelo cuya variable dependiente es el volumen no puede compararse directamente con otro modelo cuya variable dependiente es una transformación del volumen, como por ejemplo el logaritmo natural del volumen. El índice de Furnival soluciona ese problema.

$$I = \frac{s}{[f'(v)]},$$

donde:

s es la raíz del cuadrado medio residual, $s = \left(\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{n-p}\right)^{0,5}$, con $\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i$,

$[f'(v)]$ es la media geométrica de la primera derivada de la variable dependiente con respecto al volumen,

$[f'(v)] = \exp\left(\frac{\sum_{i=1}^n \ln f'(v_i)}{n}\right)$ (note que aquí el uso de \ln es sólo un medio para la obtención del promedio geométrico).

En modelos con variable dependiente transformada, el índice es una estimación de la desviación estándar en las unidades de medición de la variable original. En el caso de que la variable dependiente sea el volumen, el índice se reduce al cálculo de la desviación estándar alrededor de la curva. Note que en este caso $[f'(v)] = 1$.

3.1.4.2 El índice de Akaike

El índice de Akaike (AIC: Akaike's Information Criterion) es útil para la selección de modelos que varían en el número de parámetros. Si dos o más modelos se ajustan relativamente igual a la información existente, este criterio conducirá a la selección del modelo más simple.

$$AIC = n \ln \left(\frac{sce}{n} \right) + 2p, \quad AIC = \ln \left[\left(\frac{sce}{n} \right)^n e^{2p} \right],$$

donde:

sce es la suma de los cuadrados de los desvíos (error), $sce = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$, con $\varepsilon_i = v_i - \hat{v}_i$ (en este caso volumen),

e es la base de los logaritmos naturales,

p es el número de parámetros en el modelo,

n es el tamaño de la muestra.

Seleccionada la mejor función para la predicción del volumen, su uso debe limitarse a las condiciones de ajuste o representatividad de la muestra de árboles. Así, es conveniente que la función de volumen al reportarse se acompañe de antecedentes sobre: i) especie o grupo de especies a las que es aplicable y la localidad, si corresponde; ii) definición de la variable dependiente (volumen) y las unidades de medición; iii) definición de las variables independientes, altura de tocón y diámetro límite de utilización; iv) autor y fecha de preparación; vi) tamaño de la muestra y rango de la información básica; vii) método de determinación del volumen; viii) método de ajuste; ix) medida apropiada de la precisión.

3.2 Determinación del volumen en rodales

El volumen agregado de rodal se obtiene de la suma de los volúmenes de los árboles individuales por unidad de superficie del rodal (ha). Puede expresarse en cualquier unidad de cubicación tales como m³/ha, m³JAS/ha, pulgadas/ha, pie maderero/ha, etc.

La agregación de los volúmenes de los árboles individuales puede obtenerse directamente de una función de volumen agregado, la cual permite obtener el volumen por unidad de superficie a partir de mediciones de variables de rodal; también pueden utilizarse funciones de volumen de árbol individual, caso en que el volumen agregado se obtiene de la suma de los volúmenes individuales estimados.

3.2.1 Funciones de volumen agregado

Las funciones de volumen agregado estiman el volumen por unidad de superficie. Normalmente incluyen el área basal por unidad de superficie (G , en m^2/ha) y la altura promedio de los árboles (H , en m) como variables predictoras. Algunos modelos agregados se entregan a continuación.

$$V = a_0 + a_1GH ,$$

$$V = a_0 + a_1G + a_2GH ,$$

$$V = a_0 + a_1G + a_2H + a_3GH + a_4GH^2 ,$$

$$V = a_0G^{a_1}H^{a_2} .$$

3.2.2 Estimación del volumen agregado a partir de funciones de volumen individual

Consiste en la medición de árboles en unidades maestras, estimar el volumen en la unidad muestral y luego expandirlo a la unidad de superficie. La determinación del volumen puede realizarse árbol por árbol, ó agrupando los árboles en clases de tamaño basadas en el diámetro (clases de diámetro).

3.2.2.1 Determinación del volumen sin agrupamiento de diámetros

Cada individuo es cubicado mediante una función individual según su diámetro y altura, si corresponde. El volumen por parcela se obtiene sumando el volumen estimado para cada árbol presente en la parcela. El volumen por unidad de superficie y el total del rodal se obtiene expandiendo el valor obtenido en la parcela.

3.2.2.2 Determinación del volumen con agrupamiento de diámetros

Los árboles se agrupan en clases de diámetro, generando una tabla de rodal. El método asume que todos los árboles de una clase de dap tienen un diámetro igual a la marca de clase. El volumen del árbol de tamaño promedio de cada clase se estima mediante una función de volumen individual, a partir de la marca de clase y la altura estimada para un árbol de ese dap, si corresponde. Si la función de volumen incorpora la altura del árbol, ésta es obtenida mediante la relación altura-diámetro. El volumen por parcela aportado por una clase de dap se obtiene multiplicando el volumen del árbol promedio de la clase por el número total de árboles de la clase. La suma de volúmenes a través de todas las clases de tamaño genera el volumen por parcela. Este se expande para obtener el volumen por unidad de superficie y el volumen para el total del rodal. Los resultados se entregan tabulados por clase de dap, configurando una tabla de rodal y existencia.

En los métodos para estimar el volumen agregado se ha descrito el tratamiento de la información obtenida de una parcela de muestreo. Normalmente, sin embargo, la estimación del volumen requiere del trazado y medición de más de una parcela. Así, los resultados finales corresponden a un promedio de los valores estimados en las parcelas; ese promedio por hectárea y para el total del rodal se acompaña habitualmente de sus respectivos intervalos de confianza. Estos se derivan de la variabilidad de los datos entre parcelas. El procedimiento de cálculo depende de la metodología utilizada para realizar el muestreo de la población.

Referencias

- Burkhart, H.E. 1977. Cubic-foot volume of loblolly pine to any merchantable top limit. *Southern J. Appl. For.* 1:7-9.
- Cao, Q.V., H.E. Burkhart, and T.A. Max, 1980. Evaluation of two methods for cubic-volume prediction of loblolly pine to any merchantable limit. *For. Sci.* 26(1):71-80.
- Coble, D.W., and H.V. Wiant, Jr. 2000. Centroid method: Comparison of simple and complex proxy tree taper functions. *For. Sci.* 46(4):473 - 477.
- Furnival, G.M. 1961. An index for comparing equations used in constructing volume tables. *For. Sci.* 7: 337-341.
- Gregoire, T.G., H.T. Valentine, and G.M. Furnival. 1986. Estimation of bole volume by importance sampling. *Can. J. For. Res.* 16:554-557.
- Rubinstein, R.Y. 1981. *Simulation and the montecarlo method*, John Wiley. New York. 278p.
- Wiant, Jr., H.V., G.B. Wood and G.M. Furnival. 1992. Estimating log volume using the centroid position. *For Sci.* 38(1):187-191.

4 Estudio de la forma del fuste

La forma del fuste de los árboles varía ampliamente. La tasa de disminución del diámetro fustal entre la base y el ápice del árbol, conocida como *ahusamiento*, varía dependiendo de la especie, edad y tamaño de los árboles, y factores asociados al manejo del rodal y a las condiciones de sitio.

El estudio de la forma fustal está destinado básicamente a aportar información para la estimación del volumen del árbol. Tradicionalmente se reconocen cuatro líneas en el estudio de la forma. Tres de ellas se basan en relaciones simples: i) *factores de forma*, que se derivan del cociente entre volúmenes; ii) *cuocientes de forma*, obtenidos del cociente entre diámetros; y iii) *puntos de forma*, que corresponden al cociente entre alturas; otra línea se basa en funciones más complejas: iv) curvas, fórmulas y tablas de ahusamiento.

4.1 Estudio de la forma mediante factores y cuocientes

En esta línea, la forma del fuste se expresa numéricamente mediante un valor único por árbol.

4.1.1 Factores de forma

El factor de forma se obtiene del cociente entre el volumen real del árbol y el volumen de un cuerpo geométrico de referencia, cuyas dimensiones corresponden a las dimensiones generales del árbol (dap, altura). Al volumen del sólido de referencia también se le denomina volumen aparente.

$$f = \frac{v_r}{v_s},$$

donde:

v_r es el volumen real del fuste,

v_s es el volumen del sólido de referencia.

Dependiendo de la forma asumida para el sólido de referencia se obtienen factores de forma cilíndricos, parabólicos, cónicos o neiloidicos, siendo el factor de forma cilíndrico el de uso más habitual. La utilidad del factor de forma es evidente. Conocido su valor, es fácil derivar el volumen de un árbol mediante $v_r = f \cdot v_s$, siendo el volumen del sólido de referencia (v_s) obtenido a partir de la altura y el dap del árbol (ver Capítulo sobre volumen).

4.1.1.1 Factor de forma artificial

La utilidad del factor de forma como expresión de la forma del fuste depende de cómo se defina el sólido de referencia. Cuando el sólido de referencia adquiere las dimensiones definidas por la altura total y el dap del árbol, el factor de forma es afectado por el tamaño del

árbol. Esto porque la medición del dap se realiza siempre a una altura constante, independientemente de la altura total del árbol. Así, aunque dos árboles tengan exactamente la misma forma, pero diferente tamaño, el factor de forma adquirirá valores diferentes. También puede ocurrir que dos árboles con igual factor de forma, no posean igual forma. Este factor de forma recibe el nombre de *factor de forma artificial*, quedando definido de la siguiente manera cuando el sólido de referencia es un cilindro (note que el volumen del cilindro en este caso es $v_s = g \cdot h$)

$$f_{1,3} = \frac{v_r}{g \cdot h},$$

donde:

g es el área de sección normal del fuste ($g = \pi \cdot d^2 / 40000$, siendo d el dap del árbol (cm)),
 h es la altura total del árbol (m).

4.1.1.2 Factor de forma natural

La influencia del tamaño del árbol sobre el factor de forma se elimina midiendo el diámetro para el sólido de referencia a un porcentaje de la altura total del árbol. Así, el diámetro se obtiene a la misma altura relativa en árboles de diferente altura. Este factor de forma recibe el nombre de *factor de forma natural* o de Hohenadl en honor a quien propuso la forma para su obtención.

El factor de forma natural cilíndrico se obtiene de la relación siguiente (note que el volumen del cilindro en este caso es $v_s = g_{0,1h} \cdot h$)

$$f_{0,1h} = \frac{v_r}{g_{0,1h} \cdot h},$$

donde:

$g_{0,1h}$ es el área de sección fustal a un décimo de la altura total,
 h es la altura total del árbol.

El factor de forma natural toma valores que oscilan entre 0,3 y 0,6. Los sólidos geométricos básicos presentan valores de factor de forma natural entre 0,34 y 0,56 (paraboloide: 0,56; cono: 0,41; niloide: 0,34).

4.1.2 Cuocientes de forma

El cuociente de forma se obtiene a partir del diámetro del fuste medido a una cierta altura superior en el fuste y otro diámetro medido a una altura inferior estándar en el fuste del árbol

$$C = \frac{d_s}{d_i},$$

donde:

d_s es el diámetro de fuste superior,

d_i es el diámetro de fuste inferior.

En los casos más frecuentes, debido al ahusamiento fustal, el diámetro superior es menor que el diámetro inferior resultando, por lo tanto, el cociente de forma en valores inferiores a uno.

Existen varios cocientes de forma; todos ellos utilizan el dap del árbol como diámetro de referencia, variando la altura de medición del diámetro fustal superior.

4.1.2.1 Cuociente de forma normal

Es el cociente entre el diámetro (superior) medido a la mitad de la altura total del árbol y el dap

$$C_{0,5h} = \frac{d_{0,5h}}{dap},$$

donde:

$d_{0,5h}$ es el diámetro de fuste medido a la mitad de la altura total del árbol,

dap es el diámetro con corteza medido a 1,3 metros de altura en el fuste del árbol.

A medida que la altura del árbol decrece, la altura de medición del diámetro fustal superior se acerca a la altura de medición del dap y el cociente de forma normal se aproxima a 1. En árboles pequeños (altura menor a 2,6 m), el cociente adquiere valores mayores a 1. Así, el cociente de forma normal no tiene un límite superior máximo.

4.1.2.2 Cuociente de forma absoluto

En este cociente, el diámetro superior se mide a la mitad de la altura comprendida entre la altura de medición del dap (1,3 m) y la altura total del árbol. Con ello se impide que el cociente tome valores mayores que 1.

$$C_{0,5(h+1,3)} = \frac{d_{0,5(h+1,3)}}{dap},$$

donde:

$d_{0,5(h+1,3)}$ es el diámetro fustal medido a la mitad de la altura comprendida entre la altura de medición del dap (1,3 m) y la altura total del árbol.

La mejor manera de obtener los indicadores de la forma es midiendo los diámetros de fuste sin corteza. Ello elimina la variabilidad adicional introducida por la variación del espesor de

corteza entre árboles. El problema aquí, sin embargo, es medir el diámetro superior sin corteza con exactitud en árboles en pie.

4.1.2.3 Clase de forma de Girard

Es el cociente (expresado en porcentaje) entre el diámetro fustal sin corteza medido en el extremo de la primera troza de 16,3 pies de largo (aproximadamente 5,27 m sobre el nivel del suelo, considerando 1 pie de altura de tocón) y el dap con corteza. Así, esta medida de la forma fustal corrige parcialmente el efecto de la variabilidad de la corteza sobre el perfil fustal.

$$F_{17,3'} = 100 \frac{dsc_{17,3'}}{dap},$$

donde:

$dsc_{17,3'}$ es el diámetro de fuste sin corteza medido a 17,3 pies de altura en el árbol en pie.

4.1.3 Punto de forma

El punto de forma relaciona la altura a la cual se encuentra el centro de gravedad de la copa y la altura total del árbol. El centro de gravedad de la copa es el punto en el cual el árbol es más resistente a la acción del viento. Así, este indicador reconoce la importancia de la copa del árbol como factor determinante de la forma fustal. La ubicación exacta de ese punto es difícil de definir; en la práctica se asume que se ubica en la zona donde se presenta la mayor ramificación de la copa. El punto de forma se expresa en porcentaje.

$$P = 100 \frac{h_{cg}}{h},$$

donde:

h_{cg} es la altura del centro de gravedad de la copa,
 h es la altura total del árbol.

4.2 Estudio de la forma mediante funciones de perfil fustal

En esta línea se utilizan relaciones matemáticas que representan el perfil fustal tomando el fuste como un todo o por secciones.

4.2.1 Sólidos de revolución

El estudio de la forma fustal se basa en cuatro sólidos básicos conocidos (cilindro, paraboloides, cono y neiloide). El perfil de esos sólidos puede representarse mediante la relación básica siguiente, la que rotada en torno al eje del sólido produce el sólido respectivo (ver Fig.1 en Capítulo sobre volumen).

$$y = k \cdot l^r,$$

donde:

y es el radio del sólido en la posición l , es decir la distancia medida desde el extremo menor del sólido,

k es una constante,

r es un exponente que define la forma del sólido (cilindro $r = 0$; paraboloides $r = 0,5$; cono $r = 1$; neiloide $r = 1,5$).

En cuanto a representatividad, el perfil de los sólidos puede identificarse en forma aproximada en los fustes de los árboles; el cilindro en porciones de poca longitud del fuste de latifoliadas; el paraboloides y el cono en fustes de coníferas creciendo en rodales densos; el neiloide en árboles que crecen aislados y árboles tropicales. Esas formas se identifican más fácilmente en el fuste de árboles individuales tomados por secciones. La integración de la relación que describe el perfil fustal genera el volumen del sólido (ver Capítulo sobre volumen).

4.2.2 Funciones de ahusamiento

El término *ahusamiento* se usa para describir la disminución en diámetro que experimenta el fuste de un árbol desde la base hasta el ápice. El ahusamiento fustal varía ampliamente, dependiendo de la especie, la ubicación regional y el sitio, posición relativa del fuste y la copa dentro del dosel, como también de los tratamientos silviculturales aplicados en el rodal (fertilización, poda, raleo, etc.).

Una función de ahusamiento es una expresión matemática que describe el perfil del fuste. Relaciona el diámetro de fuste con la altura a la cual el fuste adquiere ese diámetro, y variables de estado del árbol (dap, altura). A partir de la función se puede estimar el diámetro con o sin corteza en cualquier punto del fuste, el volumen total o comercial para cualquier diámetro límite de utilización y desde cualquier altura de tocón, y la altura comercial (Clutter et al. 1983).

Aunque la función de ahusamiento permite realizar estimaciones de variables sencillas como el diámetro de fuste a cualquier altura del fuste, o la altura en el fuste en la que el diámetro adquiere un determinado diámetro, su mayor utilidad radica en que permite realizar estimaciones de volumen entre dos alturas cualquiera en el fuste del árbol. Así, se transforma en una herramienta esencial en modelos de simulación y optimización del trozado, permitiendo la clasificación de productos en pie. Puede utilizarse en algoritmos para determinar el patrón de trozado óptimo, buscando maximizar el volumen o valor de los productos; en ello es necesario considerar tanto los diámetros mínimos y máximos como las características que definan la calidad aceptable para cada producto. También puede ser útil para determinar el momento oportuno para realizar intervenciones en un programa de podas, para obtener un cilindro nudoso de determinado tamaño. En resumen, dada la gama de aplicaciones, una función de ahusamiento es una alternativa más adecuada que las funciones de volumen para la cubicación de árboles, especialmente cuando se tienen estándares cambiantes para los productos (Reed y Green 1984).

Dependiendo del modelo de ahusamiento ajustado y de la variable que se desee estimar, puede ser necesario modificar algebraicamente la función de ahusamiento. Habitualmente, la modificación más simple de realizar es la requerida para estimar el diámetro fustal. En cambio, la estimación de la altura en la que el fuste adquiere un diámetro específico requiere una modificación más compleja; en algunos casos, incluso, es imposible obtener una función explícita para esa estimación, siendo necesario obtener el diámetro buscado mediante iteración. La estimación del volumen requiere la integración de la función de ahusamiento. Por cierto, las funciones derivadas serán válidas sólo para la zona o rodal muestreado para generar la función de ahusamiento.

4.2.2.1 Modelación del perfil fustal

La tasa de disminución del diámetro es variable a través de toda la longitud del fuste (Kozak 1988), de manera que la forma que el fuste adquiere en cada sección se asemeja a diferentes sólidos geométricos (ver Fig. 2 en Capítulo sobre volumen). La forma de la sección basal es similar a un tronco de neiloide, la sección intermedia a un cilindro o tronco de paraboloides y el extremo a un cono o paraboloides (Newnham 1992).

En el desarrollo de algunos modelos usados para describir el perfil del fuste se ha considerado la existencia de esas formas básicas en el fuste; otros modelos, en cambio, son empíricos, pero no por ello menos efectivos. En general, las mayores dificultades de ajuste para los modelos se presentan en la base y en la parte superior del fuste.

Existe una amplia gama de modelos de ahusamiento. Ellos varían tanto en el número de parámetros como en la definición de las variables dependiente e independiente. En general, los modelos tienen estructura polinómica y pueden ser simples, esto es basados en sólo un polinomio (modelos unificionales), o pueden resultar de la unión de dos o más polinomios (modelos segmentados). La introducción de restricciones en los modelos para mejorar las estimaciones es habitual.

4.2.2.1.1 Definición de variables para el ajuste de modelos de ahusamiento

El ajuste de modelos de ahusamiento requiere de la medición de diámetros a diferentes alturas en el fuste del árbol. Así, tanto el diámetro como la altura pueden constituirse directamente en la variable dependiente e independiente, respectivamente, en el modelo. Sin embargo, normalmente es más útil definir las en términos relativos (Tabla 1), ya que así disminuye la variabilidad de la variable dependiente y es más fácil visualizar la relación entre las variables, lo cual ayuda en la selección de un modelo para el ajuste de una función promedio. La definición de la variable independiente importa en cuanto a la posición del ápice del árbol al graficar el perfil fustal en un sistema de coordenadas cartesianas, lo que en términos algebraicos determina si el modelo de regresión debe o no incorporar una constante (intercepto).

El uso de valores relativos para expresar las variables incorporadas en un modelo de ahusamiento puede también ayudar a estabilizar la varianza de la variable dependiente. Éste es un requisito básico cuando se usan técnicas de regresión tradicionales (mínimos cuadrados ordinarios) (Czaplewski et al. 1989). En todo caso, la definición de la variable dependiente debe estar guiada por el uso final de la función de ahusamiento. Esto porque al transformar la variable dependiente de la función ajustada, cuando se desea estimar algunas variables específicas, como diámetro de fuste a alguna altura de fuste, o volumen entre dos puntos cualesquiera del fuste, puede introducirse sesgos en las estimaciones.

Tabla 1. Definición de variables en modelos de ahusamiento.

Variable dependiente			Variable independiente		
Variable	Significado	Símbolo en el modelo de ahusamiento	Variable	Significado	Símbolo en el modelo de ahusamiento
d	diámetro absoluto	d	h	altura absoluta	h
d^2	cuadrado del diámetro absoluto	d^2	$\frac{h}{H}$	altura relativa	t
s	área de sección absoluta	s	$H - h$	distancia al ápice	l
$\frac{d}{D}$	diámetro relativo	y	$\frac{H - h}{H}$	distancia al ápice relativa a altura total	z
$\frac{d^2}{D^2}$	área de sección relativa	y^2	$\frac{H - h}{H - 1,3}$	distancia al ápice relativa a altura sobre el dap	x

d es el diámetro de fuste medido a una altura variable h ; D es el diámetro del fuste medido a una altura fija en el fuste (dap, en 1,3 m de altura); H es la altura total del árbol.

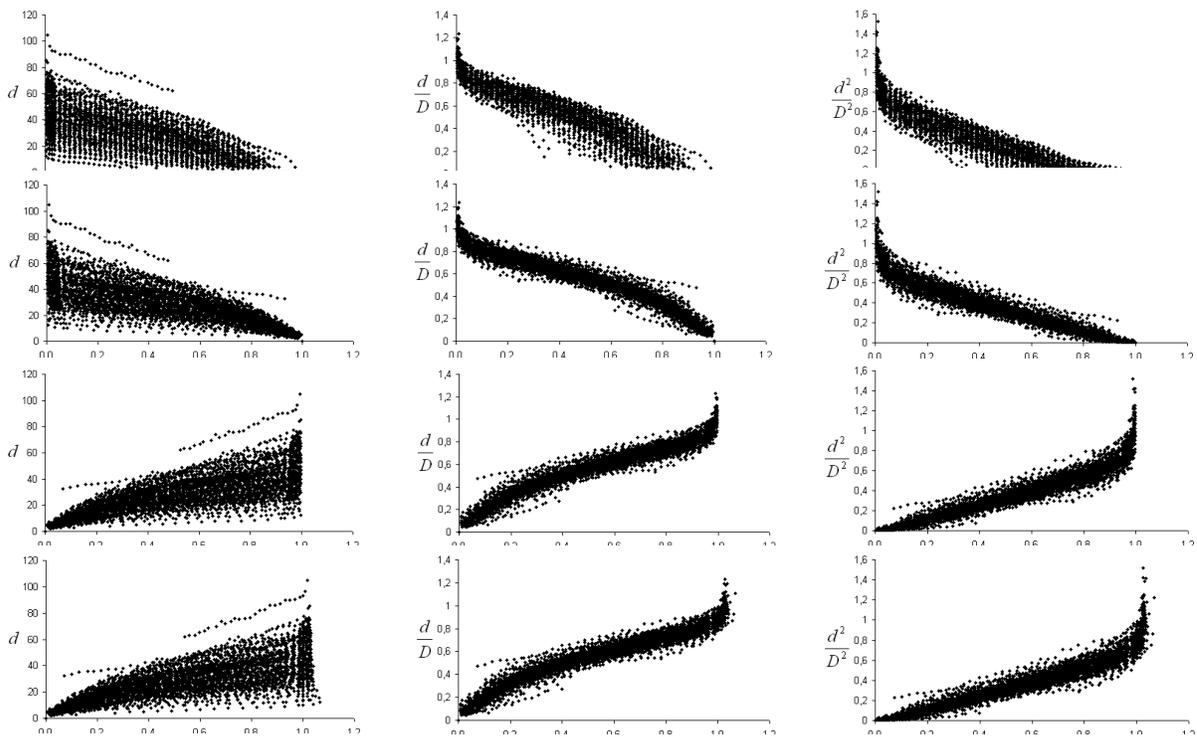


Figura 1. Nubes de puntos obtenidas de la graficación de diferentes combinaciones de definiciones de variables comúnmente utilizadas en modelos de ahusamiento.

Las graficación de diferentes combinaciones de definiciones de variables comúnmente utilizadas en modelos de ahusamiento ayuda en la selección de modelos. Así, cuando se busca ajustar un modelo promedio de perfil fustal (ver más adelante), tales gráficos son de gran utilidad en la selección de uno o más modelos potenciales y en la identificación de puntos para la introducción de restricciones (ver Fig. 1).

4.2.2.1.2 Estimación del volumen mediante funciones de ahusamiento

El volumen de un árbol se determina a partir del volumen del sólido de referencia (e.g. cilindro) y el factor de forma respectivo mediante

$$v = v_s \cdot f_{1,3},$$

es decir

$$v = KD^2 H \cdot f_{1,3},$$

donde:

v es el volumen total del árbol (m^3),

D es el dap del árbol (cm),

H es la altura total del árbol (m),

K es una constante igual a $\pi / 40000$, cuando D es expresado en centímetros y H en metros,

$f_{1,3}$ es el factor de forma artificial.

El valor del factor de forma artificial depende del perfil fustal. Así, la fórmula de cálculo varía de acuerdo al modelo utilizado para el perfil fustal.

4.2.2.1.3 Relación entre el ahusamiento fustal y factor de forma cilíndrico

El volumen del fuste se obtiene integrando la función de perfil fustal y evaluando la relación resultante en el rango deseado de la variable independiente. En ese cálculo está involucrado el factor de forma cilíndrico.

La integral de la función

$$\int_0^H \frac{d^2}{D^2} dh,$$

equivale a $\int_0^H \frac{\pi \cdot d^2 / 40000}{\pi \cdot D^2 / 40000} dh$, esto es $\frac{1}{g} \int_0^H (\text{área de fuste}) dh$, relación en la que g es el

área de sección normal del árbol ($g = \pi \cdot D^2 / 40000$). La integral, evaluada en toda la longitud del fuste, resulta en v/g , esto es el cuociente entre el volumen total (v) y el área de sección

normal (g). El factor de forma artificial cilíndrico se obtiene del producto entre ese cociente y H^{-1} , i.e.

$$\frac{v}{g} \cdot \frac{1}{H} = \frac{v}{v_s} = f_{1,3}.$$

Así, el factor de forma cilíndrico se obtiene de la integral

$$f_{1,3} = \frac{1}{H} \int_0^H \frac{d^2}{D^2} \delta h. \quad [1]$$

Dependiendo de cómo se defina la variable independiente en el modelo de ahusamiento, puede ser más sencillo obtener la integral de la relación [1] operando con la variable independiente en vez de la altura. Tres casos típicos se explican a continuación.

Al definir la variable explicatoria mediante $t = \frac{h}{H}$, es claro que $H \cdot \delta t = \delta h$; así, el factor de forma cilíndrico es

$$\begin{aligned} f_{1,3} &= \frac{1}{H} \int_0^H \frac{d^2}{D^2} \delta h = \frac{1}{H} \int_0^T \frac{d^2}{D^2} H \delta t, \\ f_{1,3} &= \int_0^T \frac{d^2}{D^2} \delta t. \end{aligned} \quad [1']$$

Al definir la variable explicatoria mediante $x = \frac{H-h}{H-1,3}$, es claro que $(H-1,3) \cdot \delta x = -\delta h$ y el factor es

$$\begin{aligned} f_{1,3} &= \frac{1}{H} \int_0^H \frac{d^2}{D^2} \delta h = -\frac{1}{H} \int_0^x \frac{d^2}{D^2} (H-1,3) \delta x, \\ f_{1,3} &= -\frac{(H-1,3)}{H} \int_0^x \frac{d^2}{D^2} \delta x. \end{aligned} \quad [1'']$$

Al definir la variable explicatoria mediante $z = \frac{H-h}{H}$, es evidente que $H \cdot \delta z = -\delta h$ y el factor es

$$f_{1,3} = \frac{1}{H} \int_0^H \frac{d^2}{D^2} \delta h = -\frac{1}{H} \int_0^z \frac{d^2}{D^2} H \cdot \delta z,$$

$$f_{1,3} = -\int_0^z \frac{d^2}{D^2} \mathcal{E}. \quad [1''']$$

4.2.2.1.4 Modelos de ahusamiento

La literatura sobre modelación del perfil fustal registra una gran variedad de modelos. A continuación se presenta una propuesta de ordenación en cuatro líneas basada en la complejidad de los modelos desarrollados. Con algunos de los modelos se entregan además las funciones derivadas para estimar el diámetro a cualquier altura en el fuste del árbol, el volumen entre dos puntos del fuste y la altura comercial para un diámetro específico.

Una función de ahusamiento relaciona diámetros de fuste con la altura de medición de esos diámetros, mediante modelos cuya forma general es

$$Y = f(X),$$

en el que Y es el diámetro de fuste a una altura dada, o una variable derivada de éste; X es la altura de medición del diámetro, o una variable derivada de ésta; f es una expresión algebraica que toma variadas formas, preferentemente de polinomio ya sea simple o segmentado, o exponencial.

4.2.2.1.4.1 Modelo simples

En teoría, el modelo polinomial

$$s_h = b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + b_3 h^3,$$

en el que s_h es el área de sección transversal a la altura h en el fuste, es adecuado para modelar el perfil fustal de una árbol. Ello porque la relación involucra varios sólidos geométricos simples, cuya forma general es $y = k \cdot l^r$ (ver método analítico para determinar volumen), donde y es el radio del sólido en la posición (altura) l , y r define la forma del sólido (cilindro: $r = 0$; paraboloide: $r = 0,5$; cono: $r = 1$; neiloide: $r = 1,5$). Así, $s_h = \pi \cdot y^2 = \pi \cdot k^2 \cdot l^{2r}$; esto es $s_h = \pi \cdot k^2$, en el caso de un cilindro, $s_h = \pi \cdot k^2 \cdot l$ para un paraboloide, $s_h = \pi \cdot k^2 \cdot l^2$ en un cono y $s_h = \pi \cdot k^2 \cdot l^3$ en un neiloide. Así, si el fuste presenta forma cilíndrica, el área de sección transversal de fuste es una constante ($\pi \cdot k^2$), lo que está representado por el parámetro b_0 , con $b_0 = \pi \cdot k^2$; la forma parabólica está expresada en el componente $b_1 h$, con l representado en la altura h y $b_1 = \pi \cdot k^2$; las formas cónica y neiloidica están representadas en los componentes $b_2 h^2$ y $b_3 h^3$, respectivamente. Así, si la forma fustal corresponde a cualquiera de los sólidos básicos, el modelo tendrá al menos un parámetro significativo en el ajuste. Ahora, si diferentes sólidos básicos contribuyen a la forma fustal, dos o más parámetros del modelo deberían resultar significativos en el ajuste.

Otro modelo que incorpora la definición de perfil fustal implícita en los sólidos básicos es el de Ormerod (1973). Aceptando que existen sólidos con formas intermedias entre los sólidos básicos típicos, el radio fustal puede definirse mediante

$$\frac{d}{2} = b(H - h)^a .$$

De acuerdo con esa relación, el diámetro a una altura h del fuste está definido por

$$d = 2b(H - h)^a ,$$

relación que evaluada a la altura de 1,3 m debe generar el dap del árbol (D), esto es

$$D = 2b(H - 1,3)^a .$$

El cociente entre el diámetro de fuste d y el dap del árbol es

$$\frac{d}{D} = \frac{2b(H - h)^a}{2b(H - 1,3)^a} ,$$

de modo que

$$d = D \left(\frac{H - h}{H - 1,3} \right)^a ,$$

donde:

d es diámetro de fuste a la altura h ,

D es el dap del árbol,

H es la altura total del árbol.

Esa relación se conoce como función de ahusamiento de Ormerod. Obviamente requiere que ambos diámetros (d, D) sean expresados en la misma condición, ya sea con o sin corteza

Note que el modelo de Ormerod es equivalente al modelo básico $y = k \cdot l^r$, en el que $y = d/2$,

$$l = (H - h), r = a \text{ y } k = \frac{D/2}{(H - 1,3)^a} .$$

El modelo de Ormerod también es representado mediante la relación $\frac{d}{D} = \left(\frac{H - h}{H - 1,3} \right)^a$.

Tomando $x = \frac{H - h}{H - 1,3}$ y $f_{1,3} = -\frac{(H - 1,3)}{H} \int_0^x \frac{d^2}{D^2} dx$ (ver relación [1'']), la fórmula de

volumen ($v = KD^2 H \cdot f_{1,3}$) para el modelo de Ormerod es

$$v = -KD^2 H \cdot \frac{(H-1,3)}{H} \int_0^X x^{2a} dx,$$

$$v = -KD^2 H \cdot \frac{(H-1,3)}{H} \cdot \frac{x^{2a+1}}{2a+1} \Big|_0^X,$$

$$v = -KD^2 H \cdot \frac{(H-1,3)}{H} \frac{X^{2a+1}}{2a+1},$$

o bien, evaluando entre dos puntos del fuste,

$$v = -KD^2 H \cdot \frac{(H-1,3)}{H} \left(\frac{x_2^{2a+1} - x_1^{2a+1}}{2a+1} \right),$$

$$v = -KD^2 \cdot (H-1,3) \left(\frac{x_2^{2a+1} - x_1^{2a+1}}{2a+1} \right),$$

donde:

v es el volumen (m^3) entre las posiciones relativas x_1 y x_2 en el fuste,

$x_1 = \frac{H-h_1}{H-1,3}$, $x_2 = \frac{H-h_2}{H-1,3}$ son los límites relativos de integración inferior y superior, respectivamente.

Operando con alturas absolutas

$$v = -\frac{KD^2}{(H-1,3)^{2a}} \left(\frac{(H-h_2)^{2a+1} - (H-h_1)^{2a+1}}{2a+1} \right),$$

donde:

h_1 y h_2 son las alturas de integración en el fuste (e.g. altura de tocón y altura comercial).

Polinomio cuadrático

$$y^2 = b_0 + b_1 t + b_2 t^2,$$

donde:

$y = \frac{d}{D}$ es el diámetro relativo estimado a la altura relativa $t = \frac{h}{H}$,

b_i son coeficientes de regresión.

Con esa definición de variables es fácil restringir el modelo para que el diámetro estimado en la altura total del árbol ($t=1$) sea cero ($y^2=0$). Esto es $0 = b_0 + b_1 + b_2$; así $b_0 = -b_1 - b_2$,

con lo cual el modelo se transforma en el modelo lineal simple sin intercepto siguiente (Kozak et al. 1969)

$$y^2 = b_1(t-1) + b_2(t^2 - 1).$$

El efecto directo de la introducción de una restricción en el modelo es la “pérdida” de uno de sus parámetros. En la práctica se requiere estimar sólo dos parámetros en el proceso de ajuste del modelo, siendo el tercero una función lineal de estos dos. La incorporación de la restricción puede ocasionar estimaciones sesgadas. La ventaja del modelo restringido es que satisface el principio biológico de diámetro cero en el ápice del árbol. En términos prácticos, en el modelo analizado, esa restricción no es de mucha utilidad, dado que afecta una porción del fuste que no tiene uso comercial.

En este caso, la determinación del volumen ($v = KD^2 H \cdot f_{1,3}$), con $f_{1,3} = \int_0^T \frac{d^2}{D^2} \delta$ (ver relación [1']) y $t = \frac{h}{H}$, se realiza mediante

$$v = KD^2 H \cdot \int_0^T \frac{d^2}{D^2} \delta,$$

$$v = KD^2 H \cdot \int_0^T (b_0 + b_1 t + b_2 t^2) \delta,$$

$$v = KD^2 H \cdot \left(b_0 t + \frac{b_1 t^2}{2} + \frac{b_2 t^3}{3} \right)_0^T,$$

$$v = KD^2 H \cdot \left(b_0 T + \frac{b_1 T^2}{2} + \frac{b_2 T^3}{3} \right)$$

o bien, evaluando entre dos puntos cualquiera del fuste,

$$v = KD^2 H \left[b_0(t_2 - t_1) + \frac{b_1(t_2^2 - t_1^2)}{2} + \frac{b_2(t_2^3 - t_1^3)}{3} \right],$$

donde:

v es el volumen (m^3) entre las posiciones relativas t_1 y t_2 en el fuste,

$t_1 = \frac{h_1}{H}$, $t_2 = \frac{h_2}{H}$ son los límites relativos de integración inferior y superior, respectivamente.

Obtención del diámetro y la altura comercial

El diámetro d a una altura específica h del fuste (en $t = h / H$) se obtiene de la transformación de la función de ahusamiento

$$d = D[b_0 + b_1t + b_2t^2]^{0,5}.$$

La altura comercial h para un diámetro límite determinado d requiere una transformación más compleja

$$h = \frac{-b_1H - \left[(b_1H)^2 - 4b_2 \left(b_0H^2 - \frac{d^2H^2}{D^2} \right) \right]^{0,5}}{2b_2}.$$

Polinomio de grado 5

Lowell (1986) proporciona un ejemplo del uso de un polinomio incompleto de grado 5. Otros autores han usado polinomios incompletos de grado 40 (ver Bruce et al. 1968).

$$y^2 = b_1z + b_2z^2 + b_3z^3 + b_4z^4 + b_5z^5.$$

Modelo trigonométrico

Thomas y Parresol (1991) describen la forma fustal mediante la relación

$$y^2 = b_1(t-1) + b_2 \sin(2\pi \cdot t) + b_3 \cot\left(\frac{\pi \cdot t}{2}\right),$$

en la que sin y cot son funciones trigonométricas con argumento expresado en radianes.

La estimación del volumen se realiza mediante

$$v = KD^2H \left(b_1 \left(\frac{(t_2^2 - t_1^2)}{2} - (t_2 - t_1) \right) - \frac{b_2}{2\pi} [\cos(2\pi \cdot t_2) - \cos(2\pi \cdot t_1)] + \frac{2b_3}{\pi} \ln \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot t_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi \cdot t_1}{2}\right)} \right] \right) \text{relació}$$

n en la que ln es el logaritmo natural.

Modelo de Real y Moore

$$y_i^2 - x_i^2 = b_1(x_i^3 - x_i^2) + b_2(x_i^8 - x_i^2) + b_3(x_i^{40} - x_i^2)$$

Real y Moore (1988) modelan la diferencia entre la sección relativa del fuste (y^2) y la sección relativa de un cono (x^2) cuyas dimensiones corresponden a las dimensiones del árbol (dap, altura), como se demuestra a continuación.

Definiendo la variable dependiente como $y_i = d_i / D$, y la variable independiente como $x_i = (H - h_i) / (H - 1,3)$, el modelo de ahusamiento no requiere una constante (intercepto). Representando la distancia desde el ápice mediante $l_i = H - h_i$, el diámetro de cono a una distancia l_i desde el ápice es definida por $dc_i = k \cdot l_i$, donde k es la tasa de incremento de dc

por unidad de distancia desde el ápice. Esa tasa es $k = \frac{dc_i}{l_i}$ y depende de las dimensiones del árbol. Su valor puede obtenerse desde algún punto en el fuste del árbol donde l_i y dc_i sean conocidos, e.g. en el punto de medición del dap (D) del árbol; luego $k = \frac{D}{H - 1,3}$, de modo

que $dc_i = k \cdot l_i = \frac{D}{H - 1,3} l_i = D \frac{H - h_i}{H - 1,3}$. Así $dc_i = D \cdot x$.

El área de sección de cono es $Sc = \frac{\pi}{40000} dc^2$, esto es $Sc = \frac{\pi}{40000} D^2 \cdot x^2$, y la del fuste es

$Sf = \frac{\pi}{40000} d_i^2$; ambas áreas, expresadas en términos relativos al área de sección a la altura

del dap, son $\frac{\frac{\pi}{40000} D^2 x^2}{\frac{\pi}{40000} D^2} = x^2$ para el cono, y $\frac{\frac{\pi}{40000} d_i^2}{\frac{\pi}{40000} D^2} = y^2$ para el fuste.

Así, la modelación del cociente entre el área relativa del fuste y el área relativa del cono, esto es $\frac{y^2}{x^2}$, puede realizarse mediante el modelo

$$\frac{y_i^2}{x_i^2} = b_0 + b_1 x_i + b_2 x_i^6 + b_3 x_i^{38} . \quad [2]$$

Introduciendo la restricción $\frac{y^2}{x^2} = 1$ en $x = 1$,

$$1 = b_0 + b_1 + b_2 + b_3,$$

Despejando,

$$b_0 = 1 - b_1 - b_2 - b_3,$$

y reemplazando en [2] se obtiene el modelo en cuestión

$$\frac{y_i^2}{x_i^2} = 1 - b_1 - b_2 - b_3 + b_1 x_i + b_2 x_i^6 + b_3 x_i^{38},$$

$$y_i^2 = x_i^2 - b_1 x_i^2 - b_2 x_i^2 - b_3 x_i^2 + b_1 x_i^3 + b_2 x_i^8 + b_3 x_i^{40},$$

$$y_i^2 - x_i^2 = b_1 (x_i^3 - x_i^2) + b_2 (x_i^8 - x_i^2) + b_3 (x_i^{40} - x_i^2).$$

Modelo de Bruce

Bruce et al. (1968) proponen el modelo de ahusamiento siguiente

$$y_i^2 = b_1 x_i^{1,5} + b_2 (x_i^{1,5} - x_i^3) D + b_3 (x_i^{1,5} - x_i^3) H + b_4 (x_i^{1,5} - x_i^{32}) DH + b_5 (x_i^{1,5} - x_i^{32}) H^{0,5} + b_6 (x_i^{1,5} - x_i^{40}) H^2$$

La altura comercial se obtiene en forma iterativa, ya que la complejidad del modelo impide derivar una función para obtener directamente esta variable. El volumen se obtiene con la fórmula siguiente

$$v = -KD^2 (H - 1,3) \left(\frac{A}{2,5} (x_2^{2,5} - x_1^{2,5}) + \frac{B}{4} (x_2^4 - x_1^4) + \frac{C}{33} (x_2^{33} - x_1^{33}) + \frac{E}{41} (x_2^{41} - x_1^{41}) \right),$$

con

$$A = b_1 + b_2 D + b_3 H + b_4 DH + b_5 H^{0,5} + b_6 H^2,$$

$$B = -(b_2 D + b_3 H),$$

$$C = -(b_4 DH + b_5 H^{0,5}),$$

$$E = -b_6 H^2,$$

donde:

v es el volumen (m^3) entre las posiciones relativas x_1 y x_2 en el fuste,

$x_1 = \frac{H - h_1}{H - 1,3}$, $x_2 = \frac{H - h_2}{H - 1,3}$ son los límites relativos de integración inferior y superior, respectivamente.

El modelo de Bruce et al. (1968) es el resultado final del análisis de la forma fustal en una especie particular (*Alnus rubra* Bong.) y por ello esa forma final pudiera no ser completamente satisfactoria para otras especies. Esos autores también sugieren que para efectos de ajustar un modelo de perfil promedio, bastaría con una función simple que incluya un conjunto de tres variables explicatorias, y proponen para ello dos conjuntos, i.e. ($x^{1,5}$, x^2 , x^{40}) y ($x^{1,5}$, x^3 , x^{30}).

4.2.2.1.4.2 Polinomios segmentados

Estos son modelos compuestos por submodelos que describen secciones del fuste (ver e.g. Max y Burkhart 1976, Bennett et al. 1978, Cao et al. 1980, Farrar y Murphy 1987-1988, Farrar 1987; Czaplewski y McClure 1988; Czaplewski et al. 1989). La ventaja de estos modelos es un menor sesgo en las estimaciones de diámetro que los modelos simples, pero la estimación de los parámetros es más complicada y la derivación de las fórmulas de volumen y de altura comercial es engorrosa o no existen (Kozak 1988). A continuación se describe, a grandes rasgos, la unión de modelos. Mayores detalles sobre este punto se encuentran en Cancino (1993).

Los modelos segmentados se componen de dos o más submodelos. Esto es

$$Y_i = f_i(X),$$

con

$$\begin{aligned} f_i(X) = & f_1(X, \theta_1); & a \leq X \leq \alpha_1, \\ & f_2(X, \theta_2); & \alpha_1 \leq X \leq \alpha_2, \\ & \vdots & \vdots \\ & f_r(X, \theta_r); & \alpha_{r-1} \leq X \leq b. \end{aligned}$$

El modelo segmentado está compuesto por r submodelos unidos en $r-1$ puntos ($\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}$). La unión se realiza considerando restricciones de continuidad y pendiente común en los puntos de unión. También es factible incorporar restricciones adicionales para que la variable dependiente adquiera valores específicos en determinados puntos del fuste.

El modelo resultante reparametrizado puede ajustarse mediante la técnica de regresión lineal múltiple cuando los puntos de unión α_i son conocidos; de lo contrario, es necesario hacer uso de técnicas de ajuste no lineal (Gallant y Fuller 1973, Max y Burkhart 1976).

Modelos compuestos de dos submodelos

Unión de dos submodelos cuadráticos

Max y Burkhart (1976) proporcionan un ejemplo de la unión de dos submodelos cuadráticos. En este caso, el modelo segmentado es definido por

$$y^2 = f_i(T, \theta_i),$$

$$\begin{aligned} f_1(T, \theta_1) &= a_0 + a_1t + a_2t^2; & 0 \leq t \leq \alpha_1, \\ f_2(T, \theta_2) &= b_0 + b_1t + b_2t^2; & \alpha_1 \leq t \leq 1, \end{aligned}$$

relaciones en las que a_i y b_i son coeficientes de regresión.

En la unión de los submodelos se incorporan las restricciones de continuidad y de igualdad de pendiente en los puntos de unión. A partir de esas dos restricciones se despejan a_0 y a_1 y se reemplazan las expresiones resultantes en f_i . También es posible incorporar la restricción de área relativa cero ($y^2 = 0$) en el ápice del árbol ($t = 1$). Así se obtiene el modelo

$$f_1(T, \theta_1, \theta_2) = b_1(t-1) + b_2(t^2 - 1) + (a_2 - b_2)(\alpha_1 - t)^2,$$

en el cual, el componente $b_1(t-1) + b_2(t^2 - 1)$ corresponde al modelo f_2 restringido ($y^2 = 0$ en $t = 1$), de modo que el modelo para todo el rango de valores de t es

$$y^2 = b_1(t-1) + b_2(t^2 - 1) + (a_2 - b_2)(\alpha_1 - t)^2 I,$$

$$\text{con } I = 1; \quad t \leq \alpha_1,$$

$$I = 0; \quad t > \alpha_1.$$

Unión de dos submodelos cúbicos completos

$$y^2 = f_i(T, \theta_i),$$

$$f_1(T, \theta_1) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3; \quad 0 \leq t \leq \alpha_1,$$

$$f_2(T, \theta_2) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3; \quad \alpha_1 \leq t \leq 1.$$

La unión de los submodelos por el proceso ya descrito genera el modelo para todo el rango de valores de t .

$$y^2 = b_1(t-1) + b_2(t^2 - 1) + b_3(t^3 - 1) + [b_4 + b_5(t + 2\alpha_1)](t - \alpha_1)^2 I,$$

$$\text{con } I = 1; \quad t \leq \alpha_1,$$

$$I = 0; \quad t > \alpha_1.$$

Unión de dos submodelos cúbicos (uno incompleto)

$$y^2 = f_i(Z, \theta_i),$$

$$f_1(Z, \theta_1) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3; \quad 0 \leq z \leq \alpha_1,$$

$$f_2(Z, \theta_2) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3; \quad \alpha_1 \leq z \leq 1.$$

En este caso, a partir de las restricciones de continuidad y de igualdad de pendiente en los puntos de unión se despejan b_0 , y b_1 , y se reemplazan las expresiones resultantes en f_2 . Así se obtiene el modelo para todo el rango de valores de z .

$$y^2 = b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + [b_4 + b_5(z + 2\alpha_1)](z - \alpha_1)^2 I,$$

$$\begin{aligned} \text{con } I = 0; \quad z \leq \alpha_1, \\ I = 1; \quad z > \alpha_1. \end{aligned}$$

Otra variante de la unión de dos submodelos cúbicos (uno incompleto) es

$$y^2 = f_i(Z, \theta_i),$$

$$\begin{aligned} f_1(Z, \theta_1) &= a_2 z^2 + a_3 z^3; \quad 0 \leq z \leq \alpha_1, \\ f_2(Z, \theta_2) &= b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3; \quad \alpha_1 \leq z \leq 1. \end{aligned}$$

Despejando b_0 , y b_1 y reemplazándolos en f_2 se obtiene (ver Parresol et al. 1987)

$$y^2 = b_1 z^2 + b_2 z^3 + [b_3 + b_4(z + 2\alpha_1)](z - \alpha_1)^2 I$$

$$\begin{aligned} \text{con } I = 0; \quad z \leq \alpha_1, \\ I = 1; \quad z > \alpha_1. \end{aligned}$$

Unión de un submodelo cúbico incompleto y un cuadrático completo

$$y^2 = f_i(Z, \theta_i),$$

$$\begin{aligned} f_1(Z, \theta_1) &= a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3; \quad 0 \leq z \leq \alpha_1, \\ f_2(Z, \theta_2) &= b_0 + b_1 z + b_2 z^2; \quad \alpha_1 \leq z \leq 1. \end{aligned}$$

El modelo final se obtiene despejando b_0 , y b_1 y reemplazándolos en f_2

$$y^2 = b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + [b_4 - b_3(z + 2\alpha_1)](z - \alpha_1)^2 I,$$

$$\begin{aligned} \text{con } I = 0; \quad z \leq \alpha_1, \\ I = 1; \quad z > \alpha_1. \end{aligned}$$

Modelos compuestos de tres submodelos

Max y Burkhart (1976) presentan dos ejemplos del ajuste de tres submodelos, uno cuadrático-lineal-cuadrático, en tanto que el otro combina tres submodelos cuadráticos.

Modelo cuadrático-lineal-cuadrático

$$y^2 = f_i(T, \theta_i),$$

$$\begin{aligned}
f_1(T, \theta_1) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2; & 0 \leq t \leq \alpha_1, \\
f_2(T, \theta_2) &= b_0 + b_1 t & ; \quad \alpha_1 < t \leq \alpha_2, \\
f_3(T, \theta_3) &= c_0 + c_1 t + c_2 t^2; & \alpha_2 < t \leq 1.
\end{aligned}$$

La unión de los submodelos considera las restricciones de continuidad y de igualdad de pendiente en los dos puntos de unión (α_1, α_2), a partir de las cuales se despejan a_0 y a_1 y se reemplazan en f_1 (ver Max y Burkhart 1976). El modelo resultante incorpora, además, la restricción de área relativa cero ($y^2 = 0$) en el ápice del árbol ($t = 1$).

$$y^2 = b_1(t-1) + b_2(t^2 - 1) + b_3(\alpha_1 - t)^2 I_1 - b_2(\alpha_2 - t)^2 I_2,$$

$$\begin{aligned}
\text{con } I_i &= 1; & t \leq \alpha_i, \\
I_i &= 0; & t > \alpha_i.
\end{aligned}$$

Modelo cuadrático-cuadrático-cuadrático

$$y^2 = f_i(T, \theta_i),$$

$$\begin{aligned}
f_1(T, \theta_1) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2; & 0 \leq t \leq \alpha_1, \\
f_2(T, \theta_2) &= b_0 + b_1 t + b_2 t^2; & \alpha_1 < t \leq \alpha_2, \\
f_3(T, \theta_3) &= c_0 + c_1 t + c_2 t^2; & \alpha_2 < t \leq 1.
\end{aligned}$$

La unión de los submodelos sigue el procedimiento ya descrito (ver Max y Burkhart 1976)

$$y^2 = b_1(t-1) + b_2(t^2 - 1) + b_3(\alpha_1 - t)^2 I_1 + b_4(\alpha_2 - t)^2 I_2,$$

$$\begin{aligned}
\text{con } I_i &= 1; & t \leq \alpha_i, \\
I_i &= 0; & t > \alpha_i.
\end{aligned}$$

La segmentación del modelo debe considerarse al realizar estimaciones de la variable dependiente (ver Fig. 2) o de cualquier otra variable derivada.

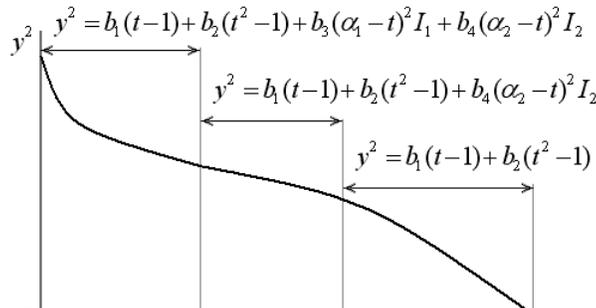


Figura 2. Representación gráfica de la estimación de la variable dependiente mediante un polinomio segmentado

compuesto de tres submodelos. En el segmento de la izquierda, la variable dependiente es estimada utilizando un modelo completo, esto es $y = b_1(t-1) + b_2(t^2-1) + b_3(\alpha_1-t)^2 I_1 + b_4(\alpha_2-t)^2 I_2$; en el segmento central $I_1 = 0$, de modo que la variable dependiente es estimada utilizando un modelo reducido ($y = b_1(t-1) + b_2(t^2-1) + b_4(\alpha_2-t)^2 I_2$); en el segmento de la derecha $I_1 = 0$ e $I_2 = 0$, de modo que la variable dependiente es estimada utilizando un modelo más simple, equivalente a operar con un modelo cuadrático con restricción de sección relativa cero en el ápice del árbol ($y = b_1(t-1) + b_2(t^2-1)$).

La relación para estimar d es

$$d = D[b_1(t-1) + b_2(t^2-1) + b_3(\alpha_1-t)^2 I_1 + b_4(\alpha_2-t)^2 I_2]^{0.5},$$

en tanto que la altura comercial h se obtiene de

$$h = \frac{H}{2A} [-B - (B^2 - 4AC)^{0.5}],$$

con

$$A = b_2 + b_3 L_1 + b_4 L_2,$$

$$B = b_1 - 2b_3 \alpha_1 L_1 - 2b_4 \alpha_2 L_2,$$

$$C = -b_1 - b_2 - d^2 / D^2 + b_3 \alpha_1^2 L_1 + b_4 \alpha_2^2 L_2,$$

$$L_1 = 1; d \geq d_1; \quad L_1 = 0; d < d_1,$$

$$L_2 = 1; d \geq d_2; \quad L_2 = 0; d < d_2,$$

donde d_1 y d_2 son diámetros estimados en los puntos de unión

$$d_1 = D[b_1(\alpha_1-1) + b_2(\alpha_1^2-1)]^{0.5},$$

$$d_2 = D[b_1(\alpha_2-1) + b_2(\alpha_2^2-1) + b_3(\alpha_1-\alpha_2)^2]^{0.5}.$$

El volumen se estima mediante la relación siguiente (ver Martin 1981)

$$v = KD^2 H \left[\frac{b_1(t_2^2 - t_1^2)}{2} + \frac{b_2(t_2^3 - t_1^3)}{3} - (b_1 + b_2)(t_2 - t_1) - \frac{b_3[(\alpha_1 - t_2)I_1 - (\alpha_1 - t_1)^3 J_1]}{3} - \frac{b_4[(\alpha_2 - t_2)^3 I_2 - (\alpha_2 - t_1)^3 J_2]}{3} \right],$$

con $I_1 = 1; t_2 \leq \alpha_1; \quad I_1 = 0; t_2 > \alpha_1; \quad I_2 = 1; t_2 \leq \alpha_2; \quad I_2 = 0; t_2 > \alpha_2;$

$J_1 = 1; t_1 \leq \alpha_1; \quad J_1 = 0; t_1 > \alpha_1; \quad J_2 = 1; t_1 \leq \alpha_2; \quad J_2 = 0; t_1 > \alpha_2.$

4.2.2.1.4.3 Modelos de ahusamiento de forma variable

Esta línea consiste en la utilización de un modelo exponencial simple, con un exponente cambiante desde la base al ápice del fuste para compensar las formas de neiloide, paraboloide

y cono (Ormerod 1973, Kozak 1988, Reed y Byrne 1985, Perez et al. 1990). Un modelo de este tipo es fácil de desarrollar, reduce el tiempo de cálculo y las estimaciones de diámetro son menos sesgadas. Sin embargo, algunos de ellos tienen dos desventajas: i) no pueden ser integrados para calcular el volumen, el cual debe ser calculado a partir de los diámetros estimados y la longitud de los trozos; ii) no permiten calcular directamente la altura comercial para un diámetro límite de utilización determinado, valor que debe obtenerse por iteración. Aunque algunas de las funciones pueden ser integradas, las relaciones resultantes son complicadas (Kozak 1988).

En esta línea el modelo básico es una función exponencial simple (Kozak 1988)

$$y = u^c,$$

con

$$\begin{aligned} y &= \frac{d}{D_I}, \\ D_I &= b_0 D^{b_1} b_2^D, \\ u &= \frac{1-t^{0.5}}{1-I^{0.5}}, \quad t = \frac{h}{H}, \\ c &= b_3 t^2 + b_4 \ln(t+0,001) + b_5 t^{0.5} + b_6 e^t + b_7 \frac{D}{H}, \end{aligned} \quad [3]$$

donde:

I es la posición del punto de inflexión,

D_I es el diámetro de fuste en el punto de inflexión.

Análisis de datos de diferentes especies demuestran que las relaciones presentadas son adecuadas para estimar el exponente c y el diámetro D_I en el punto de inflexión (Kozak 1988). Reemplazando y acomodando la expresión resultante se obtiene el modelo a ajustar

$$d = b_0 D^{b_1} b_2^D u^{b_3 t^2 + b_4 \ln(t+0,001) + b_5 t^{0.5} + b_6 e^t + b_7 \frac{D}{H}}.$$

Es fácil verificar que este modelo cumple con la restricción de diámetro cero ($d = 0$) cuando $t = 1$; esto porque en ese punto $u = 0$. Otra característica del modelo es que $d = D_I$ cuando $t = I$, punto donde la función cambia de dirección. Esa relación puede linealizarse usando transformación logarítmica, lo cual genera un modelo cuyos coeficientes pueden ser estimados mediante regresión lineal múltiple (Kozak 1988).

$$\ln d = \ln b_0 + b_1 \ln D + D \ln b_2 + b_3 t^2 \ln u + b_4 \ln(t + 0,001) \ln u + b_5 t^{0,5} \ln u + b_6 e^t \ln u + b_7 \frac{D}{H} \ln u$$

La determinación de la altura comercial se realiza iterativamente. El proceso consiste en ingresar el valor de d en la relación [4], siendo el valor de c calculado mediante [3] para un valor deseado de t_0 (e.g. 0,9); así se obtiene un valor t_1 . El siguiente valor de t usado para calcular c se puede obtener de la relación [5], procedimiento que se repite hasta lograr una precisión preestablecida (e.g. 0,01 (relación [6])). Lograda la precisión deseada, la altura comercial se estima mediante la relación [7].

$$t_i = \left[1 - (1 - I^{0,5}) \left(\frac{d}{b_0 D^{b_1} b_2^D} \right)^{\frac{1}{c}} \right]^2, \quad [4]$$

$$t_2 = t_0 + \frac{t_1 - t_0}{2}, \quad [5]$$

$$|t_i - t_{i+1}| < 0,01, \quad [6]$$

$$h_c = t_i H. \quad [7]$$

La función de ahusamiento descrita no se puede integrar. Así, el volumen se estima mediante una fórmula como la de Newton u otra (Kozak 1988).

4.2.2.1.4.4 Funciones de ahusamiento compatibles

Esta línea consiste en derivar la función de ahusamiento a partir de una función de volumen total o comercial (Demaerschalk 1971-1972, Goulding y Murray 1976, Clutter 1980, Gordon 1983, Reed y Green 1984, Byrne y Reed 1986, Lenhart et al. 1987, Candy 1989). De la derivación se obtiene una función de ahusamiento compatible, denominación que recibe por el hecho de que el volumen estimado mediante la integración de ésta es igual al obtenido mediante la función de volumen original. Esta es una característica deseable cuando las estimaciones realizadas con la última función son precisas.

Algunas de las funciones de volumen actualmente en uso permiten derivar funciones de ahusamiento, sujetas a la restricción de que el volumen estimado mediante ésta sea idéntico al generado por la función de volumen original. La derivación necesita cierta información sobre ahusamiento (Demaerschalk 1972). Por ejemplo, una función de volumen total como la de Schumacher $v = a_1 D^{a_2} H^{a_3}$ puede convertirse a una función de ahusamiento, que en este caso particular corresponde al modelo siguiente (ver Reed y Green 1984), cuya integración sobre la altura total del árbol genera la función de volumen total de Schumacher.

$$d = b_1 D^{b_2} \frac{(H-h)^{b_3}}{H^{b_4}}.$$

La fórmula resultante de la integración de esta función entre las alturas 0 y h en el fuste permite obtener el volumen fustal entre esa alturas.

$$v = K \int_0^h d^2 dh = K \int_0^h \left(\frac{b_1^2 D^{2b_2} (H-h)^{2b_3}}{H^{2b_4}} \right) dh = K \left[\frac{b_1^2 D^{2b_2} H^{2b_3+1-2b_4} \left(1 - \left(\frac{H-h}{H} \right)^{2b_3+1} \right)}{2b_3+1} \right]$$

Al estimar el volumen total, esto es hasta el punto en que $h = H$, esta relación se transforma en la función de Schumacher, en la cual

$$a_1 = K \frac{b_1^2}{2b_3+1},$$

$$a_2 = 2b_2,$$

$$a_3 = 2b_3+1-2b_4.$$

4.2.2.1.5 Incorporación de restricciones a la altura de medición del dap y otra altura en el fuste

La incorporación de restricciones obliga al modelo a estimar con exactitud el diámetro en algún punto de interés del fuste. Este puede ser un punto del fuste cuya medición de diámetro sea habitual, como por ejemplo a la altura de 1,3 m (dap), o en otra altura donde el diámetro de fuste sea factible de medir. Así, el modelo restringido estimará con exactitud esos diámetros conocidos en el fuste y con alta precisión los diámetros de fuste en los sectores cercanos a esos puntos. A continuación se describe algebraicamente la introducción de restricciones para el diámetro fustal, una para el dap y otra para el diámetro fustal medido a otra altura.

Definiendo la variable dependiente como $y_i = (d_i / D)^2$, en la que ambos diámetros son medidos sin corteza, y la variable independiente como $x_i = (H - h_i) / (H - 1,3)$, el modelo de ahusamiento no requiere una constante (intercepto). Así, el perfil fustal puede ser representado por un modelo como el siguiente

$$y_i = b_1 x_i + b_2 x_i^2 + b_3 x_i^3 + b_4 x_i^4. \quad [8]$$

Incorporación de la primera restricción. Estimación exacta del dap del árbol, cuando la altura de medición del diámetro es $h_i = 1,3$. De acuerdo con la definición de variables, la restricción en términos algebraicos implica que $y_i = 1$ en $x_i = 1$.

Evaluando en [8],

$$1 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4,$$

despejando,

$$b_1 = 1 - b_2 - b_3 - b_4,$$

y reemplazando en [8]

$$y_i = (1 - b_2 - b_3 - b_4)x_i + b_2x_i^2 + b_3x_i^3 + b_4x_i^4,$$

$$y_i = x_i + b_2(x_i^2 - x_i) + b_3(x_i^3 - x_i) + b_4(x_i^4 - x_i). \quad [9]$$

Incorporación de la segunda restricción. Estimación exacta del diámetro de fuste medido a la altura $h_i = h_m$. Esta restricción, en términos algebraicos, implica que $y_i = y_m$ en $x_i = x_m$, esto es que la variable dependiente tome un valor conocido (y_m : y medido) a una altura conocida del fuste (x_m : x medido).

Evaluando en [9],

$$y_m = x_m + b_2(x_m^2 - x_m) + b_3(x_m^3 - x_m) + b_4(x_m^4 - x_m),$$

despejando,

$$b_2 = \frac{(y_m - x_m) - b_3(x_m^3 - x_m) - b_4(x_m^4 - x_m)}{(x_m^2 - x_m)},$$

y reemplazando en [9]

$$y_i = x_i + \frac{(y_m - x_m) - b_3(x_m^3 - x_m) - b_4(x_m^4 - x_m)}{(x_m^2 - x_m)}(x_i^2 - x_i) + b_3(x_i^3 - x_i) + b_4(x_i^4 - x_i).$$

Acomodando términos,

$$y_i - x_i - \frac{(y_m - x_m)(x_i^2 - x_i)}{x_m^2 - x_m} = b_3 \left[x_i^3 - x_i - \frac{(x_m^3 - x_m)(x_i^2 - x_i)}{x_m^2 - x_m} \right] + b_4 \left[x_i^4 - x_i - \frac{(x_m^4 - x_m)(x_i^2 - x_i)}{x_m^2 - x_m} \right]$$

:Así, el modelo a ajustar se reduce a

$$t_i = b_3 z_{1i} + b_4 z_{2i},$$

con

$$t_i = y_i - x_i - \frac{(y_m - x_m)(x_i^2 - x_m)}{x_m^2 - x_m},$$

$$z_{1i} = x_i^3 - x_i - \frac{(x_m^3 - x_m)(x_i^2 - x_m)}{x_m^2 - x_m},$$

$$z_{2i} = x_i^4 - x_i - \frac{(x_m^4 - x_m)(x_i^2 - x_m)}{x_m^2 - x_m}.$$

4.2.2.2 La muestra para el ajuste de modelos

Los datos que se necesitan para obtener una función de ahusamiento para una especie son diámetros de fuste sin corteza, medidos a diferentes alturas en el fuste, el diámetro con corteza medido a 1,3 m de la superficie del suelo (dap) y la altura total de cada árbol en la muestra. Hay varias opciones para constituir una muestra para la especie de interés. Entre las opciones que se pueden considerar están: a) una muestra general; b) una muestra por localidad; c) una muestra por tamaño de árbol; y d) una muestra por tipo de manejo.

Es ideal contar con una función única por especie, obtenida a partir de la muestra general. En ello es conveniente tener presente que el ahusamiento fustal es determinado por una serie de factores (ver e.g. Lowell 1987, Amateis y Burkhart 1987). Cualquiera sea el caso, la obtención de una función general es un paso necesario para probar otras posibles ordenaciones de los datos de la muestra (ver criterios para seleccionar modelos).

El tamaño de la muestra es difícil de definir antes de realizar el proceso de ajuste. Estadísticamente se puede derivar una expresión para determinar el tamaño de muestra que se debe tomar para lograr una precisión específica en las estimaciones, pero para ello es necesario definir el modelo a utilizar en el ajuste y tener una idea de la variabilidad de la variable dependiente, de la(s) variable(s) independiente(s) y de su(s) covarianza(s); normalmente estos aspectos se desconocen, especialmente si se trata del primer intento de ajuste de modelos de ahusamiento. El camino habitual es tomar una muestra de cierto tamaño, ajustar los diferentes modelos en análisis y seleccionar entre éstos el que se considere más adecuado.

La muestra debe tener un tamaño suficiente y ser representativa de la población. Lo de tamaño suficiente o tamaño "grande" es un término relativo, pero puede tomarse como base un valor mínimo de 30 árboles por condición para el ajuste de modelos, recordando que los grados de libertad se obtienen a partir del número de mediciones de diámetros realizadas.

Lo de la representatividad debe entenderse principalmente por el lado del rango de tamaños de árboles para los que se desea estimar el ahusamiento y, finalmente, el volumen; pero también es necesario considerarla en relación a la distribución de la muestra de árboles y, especialmente, de las alturas de medición de los diámetros de fuste. Además, es necesario tener presente que, si se requiere modelar la heterogeneidad de varianza, es necesario tener

datos medidos a cada nivel de la variable independiente; de lo contrario hay que dividir la muestra en intervalos pequeños y tomar una muestra grande para estimar bien el patrón de varianza (Gregoire y Dyer 1989). Una muestra grande también protege contra la violación del supuesto de normalidad, supuesto importante si el objetivo es realizar pruebas de hipótesis y predicción; aunque no haya normalidad en los desvíos, los estimadores obtenidos mediante el método de cuadrados mínimos ordinarios tienden a distribuirse normalmente a medida que el tamaño de la muestra aumenta.

4.2.2.3 El ajuste de modelos de ahusamiento

El ajuste promedio es la opción más simple en la construcción de una función de ahusamiento. Se ajusta el modelo, con o sin restricciones, con el conjunto de datos de todos los árboles, obteniéndose un valor único de los estimadores de los parámetros del modelo. Otra opción es el ajuste individual simultáneo. Consiste en ajustar el modelo, con o sin restricciones, con el conjunto de datos de todos los árboles, obteniéndose simultáneamente una función para estimar cada parámetro del modelo en función de las dimensiones generales de cada árbol. Esto requiere cierta elaboración como se explica en lo que sigue.

Un ejemplo de modelo básico es el siguiente

$$y = b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3,$$

en el cual $y = \frac{d^2}{D^2}$, $t = \frac{h}{H}$

donde:

d es el diámetro sin corteza (cm) medido a la altura h (m),

D es el dap con corteza (cm),

H es la altura total del árbol (m).

Al restringir el modelo de modo que $y = 0$ cuando $t = 1$, implica que $b_0 = -b_1 - b_2 - b_3$, lo que reemplazado en el modelo original genera el modelo restringido

$$y = b_1(t - 1) + b_2(t^2 - 1) + b_3(t^3 - 1).$$

4.2.2.3.1 Ajuste promedio

Al ajustar ese modelo al conjunto total de datos se obtiene la función de perfil fustal promedio

$$y = \hat{b}_1(t - 1) + \hat{b}_2(t^2 - 1) + \hat{b}_3(t^3 - 1),$$

en la que los \hat{b}_i son los estimadores de los parámetros. En el ajuste promedio, cada uno de esos estimadores tiene un valor fijo independientemente del tamaño del árbol.

4.2.2.3.2 Ajuste individual simultáneo

Este ajuste requiere una elaboración mayor del modelo como se muestra a continuación. Tomando el modelo básico $y = b_1(t-1) + b_2(t^2-1) + b_3(t^3-1)$ y las posibles variables predictoras de los parámetros del modelo de ahusamiento $(1 \ D \ H \ D^2 \ H^2 \ DH)$, el modelo básico se transforma en

$$\begin{aligned}
 y &= b_1(t-1) + b_2(t^2-1) + b_3(t^3-1) \\
 &+ b_1(t-1)D + b_2(t^2-1)D + b_3(t^3-1)D \\
 &+ b_1(t-1)H + b_2(t^2-1)H + b_3(t^3-1)H \\
 &+ b_1(t-1)D^2 + b_2(t^2-1)D^2 + b_3(t^3-1)D^2 \\
 &+ b_1(t-1)H^2 + b_2(t^2-1)H^2 + b_3(t^3-1)H^2 \\
 &+ b_1(t-1)DH + b_2(t^2-1)DH + b_3(t^3-1)DH .
 \end{aligned}$$

Esta estructura de modelo es para cada árbol. La obtención de los estimadores a partir de un conjunto de árboles requiere una reparametrización del modelo, esto es un cambio en el nombre de los parámetros.

$$\begin{aligned}
 y &= b_1(t-1) + b_2(t^2-1) + b_3(t^3-1) \\
 &+ b_4(t-1)D + b_5(t^2-1)D + b_6(t^3-1)D \\
 &+ b_7(t-1)H + b_8(t^2-1)H + b_9(t^3-1)H \\
 &+ b_{10}(t-1)D^2 + b_{11}(t^2-1)D^2 + b_{12}(t^3-1)D^2 \\
 &+ b_{13}(t-1)H^2 + b_{14}(t^2-1)H^2 + b_{15}(t^3-1)H^2 \\
 &+ b_{16}(t-1)DH + b_{17}(t^2-1)DH + b_{18}(t^3-1)DH .
 \end{aligned}$$

Factorizando

$$\begin{aligned}
 y &= (b_1 + b_4D + b_7H + b_{10}D^2 + b_{13}H^2 + b_{16}DH)(t-1) \\
 &+ (b_2 + b_5D + b_8H + b_{11}D^2 + b_{14}H^2 + b_{17}DH)(t^2-1) \\
 &+ (b_3 + b_6D + b_9H + b_{12}D^2 + b_{15}H^2 + b_{18}DH)(t^3-1),
 \end{aligned}$$

se obtiene

$$y = B_1(t-1) + B_2(t^2-1) + B_3(t^3-1),$$

con

$$B_1 = b_1 + b_4D + b_7H + b_{10}D^2 + b_{13}H^2 + b_{16}DH,$$

$$B_2 = b_2 + b_5D + b_8H + b_{11}D^2 + b_{14}H^2 + b_{17}DH,$$

$$B_3 = b_3 + b_6D + b_9H + b_{12}D^2 + b_{15}H^2 + b_{18}DH.$$

Así, el ajuste promedio se reduce a ajustar el modelo $y = b_1t_1 + b_2t_2 + b_3t_3$ en el cual $t_1 = t-1$, $t_2 = t^2-1$, $t_3 = t^3-1$. En el caso del ajuste individual simultáneo, el modelo a ajustar incorpora varios parámetros adicionales

$$y = b_1t_1 + b_2t_2 + b_3t_3 + b_4t_4 + b_5t_5 + b_6t_6 + \dots + b_{18}t_{18},$$

con $t_1 = t-1$, $t_2 = t^2-1$, $t_3 = t^3-1$, $t_4 = t^4-1$, $t_5 = t^5-1$, $t_6 = t^6-1, \dots, t_{18} = t^{18}-1$.

Al utilizar el modelo individual, el primer paso es estimar los parámetros B_1 , B_2 y B_3 con la función obtenida y las dimensiones generales del árbol (D , H).

4.2.2.4 Criterios usados para seleccionar modelos

Siempre es recomendable realizar una inspección de los residuos para evaluar la aptitud del modelo. Gráficos de los residuos contra los valores ajustados de la variable dependiente y contra la(s) variable(s) independiente(s) permiten visualizar si el efecto de ésta(s) es diferente del supuesto en el modelo.

La determinación de la relación entre la variable dependiente y la(s) independiente(s) en el modelo completo se realiza mediante una prueba F , la cual, al resultar significativa, indica que al menos uno de los p parámetros en el modelo es diferente de cero.

$$F = \frac{cmr}{cme}, \text{ valor que se compara con } F_{(1-\alpha, p-1, n-p)}.$$

La determinación de la significancia de cada coeficiente de regresión se realiza mediante la prueba t

$$t = \left| \frac{b_i}{s_{\bar{b}_i}} \right|, \text{ valor que se compara con } t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-p)}.$$

El software estadístico actualmente disponible habitualmente entrega directamente la probabilidad asociada a cada parámetro, esto es la probabilidad de obtener ese valor por azar. Así, es suficiente comparar esa probabilidad con el nivel de significancia deseado ($\alpha=0,05; \alpha=0,01$) en la prueba de hipótesis ($H_0 : b_i = 0$) para determinar la significancia del estimador de cada parámetro (b_i).

El proceso de selección entre diferentes modelos puede realizarse con criterios basados en los residuos. A continuación algunos criterios para modelos lineales (ver Hocking 1976).

$$cme = \frac{sce}{n-p},$$

$$R^2 = 1 - \frac{sce}{sct} = \frac{scr}{sct},$$

$$R_a = 1 - \frac{n-1}{n-p}(1-R^2),$$

$$PRESS = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{i1})^2,$$

$$eee = \left(\frac{sce}{n-p} \right)^{0.5},$$

con

$$sct = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2,$$

$$scr = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2,$$

$$sce = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2,$$

$$cmr = \frac{scr}{p-1},$$

donde:

cme es el cuadrado medio del error (varianza en torno a la línea de estimación),

R^2 es el coeficiente de determinación (simple, múltiple),

R_a^2 es el coeficiente de determinación (simple, múltiple) ajustado,

$PRESS$ es la suma de cuadrados de la predicción,

eee es el error estándar de estimación,

sct es la suma de cuadrados total corregida,

scr es la suma de cuadrados de la regresión,

sce es la suma de cuadrados del error,

cmr es el cuadrado medio de la regresión,

p es el número de parámetros en el modelo,

n es el tamaño de la muestra,

b_i es el valor del coeficiente i ,

$S_{\bar{b}_i}$ es el error estándar del coeficiente i ,

\mathcal{Y}_i es un valor observado,

$\hat{\mathcal{Y}}_i$ es un valor estimado mediante el modelo,

$\hat{\mathcal{Y}}_{i1}$ es el valor estimado para la observación i mediante el modelo ajustado sin considerar esta observación en el proceso,

$\bar{\mathcal{Y}}$ es el promedio de las observaciones y_i .

Específicamente aplicadas a modelos de ahusamiento, las pruebas de t y F son habituales. Otros indicadores tradicionales como R^2 tienen un valor limitado para evaluar modelos de ahusamiento, porque no indican la habilidad del modelo para ser integrado y estimar el volumen (Lowell 1986). Los criterios más utilizados se basan en los desvíos o residuos (ver e.g. Kozak et al. 1969, Cao et al. 1980, Gordon 1983, Reed y Byrne 1985, Byrne y Reed 1986, Lowell 1986, Farrar y Murphy 1987, Farrar 1987, Kozak 1988, Czaplewski y McClure 1988, Perez et al. 1990), entre ellos los que se indican más abajo. En las estimaciones pueden surgir sesgos debido a la introducción de restricciones en los modelos; eso justifica el uso de esta medida como indicador.

$$eee = \left(\frac{sce}{n - p + C - 1} \right)^{0,5},$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{n},$$

$$\bar{D}_a = \frac{\sum_{i=1}^n |\varepsilon_i|}{n},$$

$$s_e = \left[\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \right)^2}{n} \right) \right]^{0,5},$$

$$pve = 100 \frac{(sct - sce)}{sct}.$$

donde:

eee es el error estándar de estimación,
 C es el número de restricciones introducidas en el modelo,
 B es el sesgo (media del cuadrado de los desvíos),
 \overline{D}_a es el desvío absoluto promedio,
 S_e es la desviación estándar de los desvíos,
 pve es el porcentaje de variación explicada.

En las relaciones anteriores, el desvío $\varepsilon_i = m_i - \hat{m}_i$, esto es la diferencia entre el valor observado (m_i) y el valor estimado (\hat{m}_i), se obtiene para la variable que se desee analizar. Esta variable puede ser el diámetro a una altura específica, la altura comercial, o el volumen total o comercial hasta un diámetro o altura límite.

En aquellos casos en que se dispone de muestras de árboles obtenidas de diferentes condiciones de sitio, de manejo o de otro factor, puede ser interesante determinar el efecto de esos factores en el ahusamiento. El análisis requiere que la varianza entre los niveles del factor en análisis sea homogénea. Para detectar el cumplimiento de esta condición se realiza una prueba de homogeneidad de varianzas (Bartlett). Si la varianza es homogénea, el efecto del factor se analiza a través de una prueba F ; ésta permite determinar si la agrupación de niveles, esto es obtener una función general por especie, tiene más sentido que obtener funciones individuales por nivel. La prueba F se establece de la siguiente forma, comparando el valor calculado con el valor esperado $F_{1-\alpha, n-1, gl_j - gl_s}$.

$$F = \left(\frac{sce_j - sce_s}{sce_s} \right) \left(\frac{gl_j}{gl_j - gl_s} \right),$$

$$sce_s = \sum_{i=1}^n sce_i .$$

donde:

sce_j es la suma de cuadrados del error del conjunto de datos,
 sce_s es la suma de cuadrados del error de los niveles del factor en análisis,
 n es el número de niveles del factor,
 gl_j es el número de grados de libertad del conjunto de datos,
 gl_s es la suma de grados de libertad de los niveles del factor,
 s_i es el número de grados de libertad del nivel o grupo i .

Aquí, la prueba F evalúa la posibilidad de obtener una función para cada nivel del factor considerado para dividir la información disponible (ver *dummy variables* en textos de regresión). Esta prueba, con una implementación cuidadosa, permite el análisis de cada parámetro del modelo para determinar semejanzas y diferencias por conjuntos de niveles.

4.2.2.5 Validación de funciones de ahusamiento

Existen varias opciones para la validación de una función de ahusamiento. Por ejemplo, la función de ahusamiento, obtenida para cada condición descrita, puede ser validada para la variable dependiente definida en el ajuste y para las variables derivadas, como el diámetro a cualquier altura, alturas para diámetros específicos, y volumen parcial o total. A su vez, la validación puede ser realizada con los datos usados para ajustar el modelo (validación interna) o con una submuestra independiente destinada exclusivamente para la validación (validación externa). La validación se basa en los criterios ya definidos; entre ellos, el error estándar de estimación, el sesgo (media de los desvíos) y el porcentaje de variación explicada son especialmente útiles.

Especial interés reviste la validación de la función de ahusamiento para aquellas variables derivadas que implican una transformación de la variable dependiente (ver Czaplewski y Bruce 1990). Por ejemplo, cuando se define $y = \frac{d}{D}$, la obtención del volumen requiere transformar esa variable elevándola al cuadrado, esto es $v = f(y^2)$; en el modelo original se cumple que $\hat{y} = y_i - \varepsilon_i$, donde \hat{y} es el valor estimado, y_i es el valor observado y ε_i es un error aleatorio. Con la transformación de la variable se obtiene $\hat{y}^2 = y_i^2 - 2y_i\varepsilon_i + \varepsilon_i^2$, relación en la cual el valor esperado es afectado por el sesgo introducido en la transformación, esto es $E[\hat{y}^2] = E[y_i^2] + E[\varepsilon_i^2]$, en donde $E[\varepsilon_i^2]$ es un valor diferente de cero y corresponde al sesgo en cuestión, el cual depende de la varianza de los errores aleatorios; en símbolos: $E[\varepsilon_i^2] = f(\text{var}(\varepsilon_i))$.

Más compleja es la estructura del sesgo introducida cuando se utiliza una transformación raíz cuadrada. En este caso $\hat{y}^2 = y_i^2 - \varepsilon_i$, $E[\hat{y}^2]^{0,5} = y - \frac{E[\varepsilon_i^2]y^{-3}}{8} + \frac{3E[\varepsilon_i^3]y^{-5}}{8} + \dots$, en donde el sesgo está representado por $\frac{E[\varepsilon_i^2]y^{-3}}{8} + \frac{3E[\varepsilon_i^3]y^{-5}}{8} + \dots$. Esta situación puede surgir al ajustar un modelo en el que la variable dependiente es $y^2 = (d/D)^2$ y se modifica para obtener el diámetro fustal a una altura específica.

Referencias

- Amateis, R.L. and H.E Burkhardt. 1987. Tree volume and taper of Loblolly pine varies by stand origin. South. J. Appl. For. 11(4):185-189.
- Bennett, F.A., F.T. Lloyd, B.F. Swindel and E.W. Whitehorne. 1978. Yields of veneer and associated products from unthinned, old-field plantations of slash pine in the North Florida and South Georgia Flatwoods. USDA SE176.
- Bruce, D., R.O. Curtis and C. Vancoevering. 1968. Development of a system of taper and volume tables for red alder. For. Sci 14(3):339-350.

- Byrne, C. J. and D.D. Reed. 1986. Complex compatible taper and volume estimation systems for Red and Loblolly pine. *For. Sci.* 32(2):423-443.
- Cancino, J. 1993. Modelo optimizador de trozado de árboles basado en funciones de ahusamiento y programación dinámica. Tesis de Maestría. CATIE, Costa Rica. 230p.
- Candy, S.G. 1989. Compatible tree volume and variable-form stem taper models for *Pinus radiata* in Tasmania. *N. Z. J. For. Sci.* 5(3):313-322
- Cao, Q.V., H.E. Burkhart, and T.A. Max 1980. Evaluation of two methods for cubic-volume prediction of loblolly pine to any merchantable limit. *For. Sci.* 26(1):71-80.
- Clutter, J. L. 1980. Development of taper functions from variable-top merchantable volume equations. *For. Sci.* 26(1):117-120.
- Clutter, J.L., J.C. Fortson, L.V. Pienaar, G.H. Brister, and R.L. Bailey. 1983. *Timber Management: A Quantitative Approach*. John Wiley & Sons N.Y. 333p.
- Czaplewski, R.L. and J.P. McClure. 1988. Conditioning a segmented stem profile model for two diameter measurement. *For. Sci.* 24(2):512-522.
- Czaplewski, R.L., A.S. Brown and D.G. Guenther. 1989. Estimating merchantable tree volume in Oregon and Washington using stem profile models. USDA Research Paper RM-286. 17 p.
- Czaplewski, R.L. and D. Bruce. 1990. Retransformation bias in a stem profile model. *Can. J. For. Res.* 20:1623-1630.
- Demaerschalk, J.P. 1971. Taper functions can be converted to volume equations and point sampling factors. *For. Chron.* 47(6):352-354.
- Demaerschalk, J.P. 1972. Converting volume equations to compatible taper equations. *For. Sci.* 18(3):241-245.
- Farrar, R.M. 1987. Stem-profile functions for predicting multiple product volumes in natural longleaf pines. *South. J. Appl. For.* 11(3):161-167.
- Farrar, R.M., and P.A. Murphy. 1987. Taper function's for predicting product volumes in natural shortleaf pines. USDA SO-234.
- Farrar, R. and P.A. Murphy. 1988. A versatile volume-defining function for natural loblolly pine trees. USDA 50-243.
- Gallant, A.R. W.A. and Fuller. 1973. Fitting segmented polynomial regression models whose joint point have to be estimated. *Jour. Am. Stat. Assoc.* 68(341):144-147.
- Gordon, A. 1983. Comparison of compatible polynomial taper equations. *N. Z. J. For. Sci.* 13(2):146-155
- Goulding, C.J. and J.C. Murray. 1976. Polynomial taper equations that are compatible with tree volume equations. *N. Z. J. For. Sci.* 5(3):313-322.
- Gregoire, T.G. and M.E. Dyer. 1989. Model fitting under patterned heterogeneity of variance. *For. Sci.* 35: 105-125.
- Hocking, R.R. 1976. The analysis and selection of variables in linear regression. *Biometrics* 32:1-49.
- Kozak, A., D.D. Munro, and J.H.G. Smith. 1969. Taper functions and their application in forest inventory. *For. Chron.* 45:278-283
- Kozak, A. 1988. A variable-exponent taper equation. *Can. J. For. Res.* 18:1363-1368.
- Lenhart, J.D., T.L. Hackett, and Ch.J. Laman 1987. Tree content and taper functions for loblolly and slash pine trees planted on non-old-fields in East Texas. *South. J. Appl. For.* 11(3):147-151.
- Lowell, K.E. 1986. A flexible polynomial taper equation and its suitability for estimating stem profiles and volumes of fertilized and unfertilized radiata pine trees. *Aust. For. Res.* 16:165-174.
- Lowell, K.E. 1987. A distributional taper-based volume system for fertilized and unfertilized radiata pine plantations in Pigeon Valley, New Zealand. *Aust. For. Res.* 17:251-262.

- Martin, A.J. 1981. Taper and volume equations for selected Appalachian Hardwood Species. USDA Research Paper NE-490.
- Max, T.A. H.E. and Burkhart. 1976. Segmented polynomial regression applied to taper equations. *For. Sci.* 22(3):283-289.
- Newnham, R.M. 1992. Variable-form taper functions for four Alberta tree species. *Can. J. For. Res.* 22: 210-223.
- Ormerod, D.W. 1973. A simple bole model. *For. Chron.* 49:136-138.
- Parresol, B.R. J.E. Hotvedt, and Q.V. Cao. 1987. A volume and taper prediction system for bald cypress. *Can. J. For. Res.* 17: 250-259.
- Perez, D.N., H.E. Burkhart, and C.T. Stiff. 1990. A variable-form taper function for *Pinus oocarpa* chiende in Central Honduras. *For. Sci.* 36(1):186-191.
- Real, P.L. and J.A. Moore. 1988. An individual tree taper system for douglas-fir in the Inland-Northwest. In *Forest Growth Modeling and Predictions. Proceedings of IUFRO Conference, August 24-28, 1987, Minneapolis, MN.* Ed. by Ek, A.R., Shifley, S.R y Burk, T. E. USDA For. Serv. Gen Tech. Rep. NC-120.
- Reed, D.D., and C.J. Byrne. 1985. A simple, variable form volume estimation system. *For. Chron.* 61: 87-90.
- Reed, D.D., and E.J. Green. 1984. Compatible stem taper and volume ratio equations. *For. Sci.* 30(4):977-990.
- Thomas, C.E., and B.R. Parresol. 1991. Simple, flexible, trigonometric taper equations. *Can. J. For. Res.* 21:1132-1137.

5 Biomasa

La *biomasa* forestal es la cantidad total de materia viva existente en un ecosistema forestal. Incluye todos los componentes que forman el ecosistema, como árboles, arbustos y otros vegetales. Normalmente es expresada en toneladas de materia seca por hectárea, razón por la cual también se suele usar el concepto de *densidad de biomasa* para referirse a esta variable (ver e.g. Brown 1997). El uso del peso seco no sólo permite eliminar la variabilidad de la humedad en los diferentes componentes de la biomasa, sino que la cantidad de materia seca está más estrechamente relacionada con el rendimiento en diferentes procesos.

Desde el punto de vista de la productividad de sitio, la biomasa es una medida más completa que el volumen, pero su determinación es considerablemente más compleja. Aún así, es de gran interés, especialmente en aquellos rodales manejados para la producción de pulpa o cuando la corteza es un producto importante (e.g. producción de taninos). También es relevante cuando se manejan bosques para la producción energética, dado que la masa se relaciona mejor que el volumen con la producción de energía. Naturalmente, es de gran relevancia por la participación vegetal en el ciclo del carbono, en que la captura de CO₂ atmosférico y su almacenamiento en la biomasa representa un efecto claramente benéfico para el ambiente; por otro lado, también incorpora nutrientes del suelo lo que puede conducir al empobrecimiento del suelo y a la disminución de la productividad de sitio, tópico estrechamente relacionado con la conservación de suelos. También juega un rol importante en protección forestal, ya sea relacionado con plagas o con incendios forestales.

5.1 Componentes de la biomasa

La biomasa forestal está conformada por componentes de variada complejidad y accesibilidad. Por ello, su estimación requiere la identificación inicial de estos componentes y el diseño de la estrategia adecuada de medición o estimación. Desde el punto de vista de una comunidad forestal, y dependiendo de los objetivos específicos del estudio, la biomasa puede dividirse espacialmente en biomasa aérea, la que incluye toda la biomasa viva sobre el suelo (biomasa de dosel principal, biomasa de sotobosque) y desechos leñosos (biomasa de residuos en pie, colgantes y sobre la superficie del suelo), y biomasa subterránea, incluyendo los componentes leñosos vivos y muertos de los sistemas radiculares. En el caso específico de árboles, los componentes habituales para la separación de biomasa son raíces, ramas, follaje, madera de fuste y corteza. Naturalmente, otras subdivisiones como e.g. fuste, corteza de fuste y copa también son posibles. Un exhaustivo análisis de la determinación de la biomasa y ejemplos a través del tiempo son presentadas por van Laar y Akça 1997.

La determinación de la biomasa de una formación vegetal, constituida por la suma de la biomasa de todos los componentes (árboles, arbustos, etc.), necesariamente requiere de la determinación de la biomasa en esos componentes. Las metodologías que se describen a continuación se basan fundamentalmente en el documento de Brown (1997), en el protocolo de Snowdon et al. (2001), y en los artículos de Parresol (1999, 2001). Brown (1997) se

concentra en métodos para estimar biomasa sobre el suelo; Snowdon et al. (2001) abarcan componentes aéreos y subterráneos; Parresol (1999, 2001) realiza una revisión crítica de los métodos de estimación de la biomasa, enfatizando en los aspectos estadísticos.

5.2 Métodos para determinar la biomasa

La determinación de la biomasa puede realizarse de varias maneras alternativas dependiendo del componente involucrado y de la cantidad de información disponible. En aquellos casos en que no se dispone de información, el único camino disponible es el de la determinación directa de la biomasa, a partir del peso fresco y razones de peso seco o a partir del volumen y densidad del material. La estimación basada en el volumen es apta para componentes leñosos (fuste, ramas gruesas); el volumen puede determinarse mediante fórmulas a partir de mediciones de diámetros o estimarse mediante funciones. La estimación de la biomasa también puede realizarse mediante funciones de biomasa. Dependiendo de la biomasa estimada por los métodos anteriores, puede requerirse de un factor de expansión de biomasa.

La obtención de información para la estimación directa de la biomasa, especialmente para la construcción de funciones de biomasa, requiere muestrear árboles en un rango amplio de tamaños, edades, sitios y manejo. Los árboles son seleccionados mediante algún procedimiento para muestreo destructivo; el peso fresco (o volumen) de los diferentes componentes de la biomasa se determina en terreno; de cada componente se seleccionan pequeñas muestras mediante algún procedimiento normalmente aleatorio para la determinación de razones de peso seco o densidad. En la práctica, este submuestreo con posterior uso de estimadores de razón, puede introducir sesgos. Una opción práctica es el uso del muestreo aleatorizado de ramas, método que genera estimadores insesgados de la biomasa ya sea total o por componente del árbol (ver más adelante); es especialmente adecuado para la determinación de biomasa de ramas, ramillas, frutos y follaje. Otro método útil es el muestreo por importancia (ver Capítulo sobre volumen), el cual puede incorporarse en al estimar biomasa de fuste y ramas gruesas.

5.2.1 Determinación directa de la biomasa

La determinación directa de la biomasa es una labor lenta y costosa que se utiliza sólo en ocasiones muy específicas. Es el único camino para obtener la biomasa de componentes cuya determinación es difícil mediante regresión u otro método de estimación (e.g. litera). También se utiliza en la construcción de funciones, razones, cuocientes o fracciones de biomasa, y en la corrección de estimaciones realizadas mediante regresión u otro método.

La determinación de la biomasa puede involucrar cosecha completa, o parcial dependiendo del componente y tamaño de los individuos. En el caso de la biomasa sobre el suelo y en árboles de pequeño tamaño, puede utilizarse el método de cosecha completa, que involucra el pesaje de todos los componentes en terreno. Sin embargo, por razones de costo, tiempo y operatividad, en la mayoría de las aplicaciones se utiliza sólo cosecha parcial. En ambos casos

se requiere la determinación del peso seco; para ello se seleccionan submuestras, las que posteriormente se secan en laboratorio. La estrategia de muestreo o medición de submuestras debe definirse en función del contenido de humedad.

La cosecha completa involucra muestreo destructivo, colecta y pesaje de todo el material en la parcela, o en el árbol, según corresponda. Naturalmente, es el método más exacto y, en algunas circunstancias, puede ser incluso más rápido que el muestreo; por ello es el preferido en algunos casos. En variadas situaciones es imposible de aplicar; e.g. en árboles grandes, o cuando el acceso es difícil, o cuando no se permite cortar; o cuando el componente se presenta como una variable continua o de límites difusos en el espacio.

La cosecha completa normalmente se complementa con el método de cosecha parcial. Esto es necesario, por ejemplo, cuando la obtención de la biomasa total de un componente involucra demasiado trabajo, como es el caso de la biomasa de hojas, cuya la remoción en toda la copa, aún en árboles pequeños o arbustos es complicada. Así, la combinación de métodos no sólo es posible sino necesaria; e.g., obtener la biomasa total de copa (cosecha completa) y usar cosecha parcial para estimar proporciones de rama leñosa, ramillas y follaje.

La determinación directa de la biomasa del árbol completo es una labor lenta y costosa. Por ello, la determinación directa de la biomasa, a pesar de proveer determinaciones exentas de error, sólo puede aplicarse en árboles de tamaño pequeño. Así, surge la necesidad de métodos de muestreo para la determinación y de funciones para la estimación de la biomasa seca del árbol completo o por componente, en función de variables de fácil medición, como el diámetro (dap) y la altura (total o comercial) del árbol.

La cosecha parcial se aconseja cuando no se puede cosechar completamente el árbol o coleccionar todo el material sobre el suelo. En el caso de aplicarse a la determinación de la biomasa del árbol, en general se ejecuta en dos pasos. El primer paso involucra la estimación de la biomasa del fuste y ramas grandes a partir de (mediciones) estimaciones del volumen, combinado con la estimación de la densidad a partir de rodajas o muestras de incremento radial. El paso siguiente es estimar la biomasa foliar y otros componentes pequeños mediante regresión o submuestras. Independientemente de la estrategia específica de determinación de la biomasa, esta siempre involucrará uno o más de los pasos que se describen a continuación.

5.2.1.1 Separación de componentes

La determinación de la biomasa requiere de la identificación y separación clara de los distintos componentes para la obtención de los pesos fresco y seco respectivos. Aunque en el caso de la densidad de biomasa, en general, la identificación es relativamente sencilla y los límites están claramente establecidos (dosel principal, sotobosque, desechos y litera, y sistemas radiculares), la determinación de la biomasa en componentes discretos requiere definir límites (dimensiones), de acuerdo a los objetivos específicos del estudio. En el árbol, la biomasa fustal, de copas y radicular requieren definir límites específicos; e.g., hasta qué *dhu* considerar biomasa de fuste; diámetro mínimo de rama y de ramillas y las especificaciones

respectivas para el follaje. También es necesario para la determinación de razones de peso seco; aquí la estratificación por tamaño y/o contenido de humedad es útil, atendiendo a razones de precisión, operabilidad e interés (estimadores separados por subcomponente).

En cuanto a la definición de límites en el árbol, el límite inferior del fuste se define a ras del suelo mineral y alcanza hasta determinado diámetro mínimo (diámetro comercial). Si se requiere determinar biomasa de madera y corteza de fuste por separado, una muestra de rodela facilita la división. La copa incluye, además de ramas, ramillas y hojas, las flores y frutos; incluso podría considerar otras plantas como enredaderas y epifitas, dependiendo del interés del estudio. Obviamente, la separación en componentes es opcional; en tal caso, el corte de las ramas debe realizarse a ras del fuste.

5.2.1.2 Biomasa en árboles individuales

5.2.1.2.1 Fuste

El fuste¹ es el componente principal del árbol y como tal proporciona la mayor proporción de la biomasa total, especialmente en árboles de edades avanzadas. La biomasa de fuste puede obtenerse en forma directa o mediante funciones de biomasa a partir de dimensiones simples del árbol (dap, altura, etc.; ver más adelante).

La biomasa del fuste puede determinarse a partir del peso fresco del fuste y razones de peso seco o a partir del volumen y densidad del fuste. La determinación en base a peso seco ofrece al menos dos opciones dependiendo del contenido de humedad del fuste. Si no existen evidencias de gradiente de humedad, se sugiere dividir el fuste en pocas secciones (2 ó 3) de aproximadamente el mismo volumen, obtener una rodela en la mitad del volumen acumulado o de la masa de cada sección; el peso seco de cada sección se obtiene del producto entre el peso fresco y la razón de peso seco. En árboles con fuste múltiple a la altura de muestreo, tomar a esa altura una rodela de espesor constante en cada fuste y pesarlas juntas. En la presencia de un gradiente de humedad, el fuste se divide en varias secciones, las que se pesan frescas, se obtiene una rodela entre secciones sucesivas, incluyendo una rodela en la base y otra en el extremo del fuste; el peso seco de cada sección se obtiene del producto entre el peso fresco y la razón de peso seco promedio de las rodela en los extremos de la sección.

La determinación de la biomasa fustal a partir del volumen y densidad requiere estimar estas dos variables en el árbol. El volumen fustal puede obtenerse de mediciones del diámetro en diferentes puntos del fuste mediante fórmulas de volumen (Huber, Smalian, Newton, etc.) o mediante funciones de volumen individual. La determinación de la densidad requiere obtener rodela; valores de densidad determinados en otros estudios pueden usarse con precaución, ya que además de variar a lo largo del fuste y con la edad del árbol, la densidad puede variar con el ambiente.

¹ Note que la biomasa del fuste puede ser obtenida aplicando el muestreo por importancia

5.2.1.2.2 Corteza

La corteza habitualmente se refiere a la corteza del fuste del árbol. La determinación de la biomasa de corteza se realiza simultáneamente con la determinación de la biomasa del fuste. En cada una de las rodelas mencionadas puede separarse la corteza y determinar su peso. La proporción de peso de la corteza y el peso total de la madera del fuste permite obtener el peso total de corteza en el fuste del árbol.

5.2.1.2.3 Copa

La copa engloba parte del fuste, ramas, ramillas y follaje². El muestreo se realiza en función de la humedad en la copa. Sin gradiente de humedad entre ramas dentro de la copa, se aconseja dividir la copa en al menos tres secciones de biomasa aproximadamente igual, seleccionar una rama representativa de cada sección, o varias si son muchas y pequeñas de modo que la muestra corresponda aproximadamente al 5% de la biomasa de la sección. Si no se requiere separar la copa en componentes y la rama es muy grande para secar, tomar una muestra balanceada incluyendo todos los componentes menores. Si se desea particionar la copa en componentes, la muestra debe dividirse en subcomponentes, tomando submuestras para obtener razones de peso seco del material leñoso. Los componentes menores se pesan y submuestrean para determinar razones de peso seco.

En presencia de gradiente de humedad, o cuando se requiere una estimación separada de la biomasa foliar, se sugiere estratificar las ramas en grupos homogéneos en proporción de follaje y/o contenido de humedad. Luego se determina el peso fresco de cada estrato y se obtienen muestras de ramas para determinar razones de peso seco por estrato; también se pueden determinar proporciones de material leñoso a follaje, si es necesario.

5.2.1.2.3.1 Ramas gruesas

La biomasa leñosa de ramas gruesas puede obtenerse a partir del volumen y densidad. El volumen se determina mediante fórmulas de volumen en base a mediciones de diámetro y longitud. Requiere medición de todas las ramas gruesas. El conjunto de ramas menores se sugiere pesarlo en verde y determinar la razón de peso seco de una muestra.

5.2.1.2.3.2 Biomasa foliar

El follaje es de gran interés para la determinación de la capacidad fotosintética del árbol. Su determinación incluye todas las hojas o acículas. En árboles pequeños puede realizarse secando y pesando todo el conjunto; en árboles adultos se procesa sólo una fracción (e.g. 25%).

El follaje puede obtenerse como una proporción de la biomasa total de la copa. Parte con la obtención de la biomasa total de la copa y sigue con una de dos opciones. Una es muestreo de

² Note que la selección de ramas y otros componentes menores puede realizarse aplicando el muestreo aleatorizado de ramas, el cual conduce a estimadores insesgados de cualquier característica de interés, ya sea total o por componente de la copa.

ramas (3 o más) de la copa, o del material menor, separar hojas y determinar peso seco de hojas y peso seco total de cada rama muestra sumando los componentes antes separados (todo, incluido frutos, epífitas, etc.). Obtener la proporción de biomasa foliar promedio (biomasa de hojas/biomasa total de rama) y obtener la biomasa foliar de la copa a partir del producto entre esta proporción y la biomasa de copa.

La otra opción es estimar la biomasa de hojas como una proporción de la biomasa de la copa mediante regresión, técnica que se usa sólo para estimar la biomasa foliar y la biomasa total de cada rama en el árbol en función del diámetro de rama u otra variable. Luego obtener la proporción de biomasa foliar promedio y obtener la biomasa foliar de la copa a partir del producto entre ésta y la biomasa de copa, como antes.

5.2.1.2.4 Raíces

La biomasa radicular es el componente más difícil de medir, muestrear y estimar. La determinación directa de la biomasa radicular requiere de la excavación del sistema radicular completo, lo cual es impracticable en árboles grandes. Así, el muestreo es el único camino para la estimación de la biomasa radicular, el cual es caro, lento y poco preciso al existir traslape con sistemas radiculares de árboles vecinos. Otro camino es la estimación mediante regresión, a partir de variables fáciles de medir (e.g. diámetro de tocón).

La obtención de información directa sobre biomasa radicular implica muestreo y cernido de suelo para recuperar raíces de diámetro pequeño. Así, Snowdon et al. (2001) definen biomasa radicular restringiéndola a aquellas raíces que son retenidas en un cedazo de 2 mm, cerniendo suelo húmedo. En esto se acepta que las raíces menores no aportan a la biomasa leñosa de raíces. El muestreo se realiza en un volumen de suelo en torno a árbol, delimitado por la proyección vertical de la copa o mediante polígonos de Voronoi, y hasta una profundidad definida. El muestreo en general se realiza en dos etapas. En la primera se evalúan las raíces próximas al tocón; en la segunda, otras raíces más pequeñas y más distantes.

Normalmente, las raíces se clasifican por diámetro en gruesas, medianas y finas (<2; 2-5; 5-50;>50 mm). El secado se realiza a 70°C hasta peso constante; se sugiere cepillar el material mayor antes de pesar para eliminar arcillas; el material menor se combustiona, determinado el peso de raíces por diferencia.

5.2.1.2.4.1 Cuello de raíz y raíces laterales

Los árboles grandes requieren el uso de retroexcavadoras para recuperar el cuello radicular y ramas laterales grandes. La excavación es lenta y laboriosa, pero se facilita en suelo húmedo y mediante el uso de sistemas de aire o hidráulicos a presión, brochas y otros implementos pequeños.

Al material excavado y separado por componente, es necesario agregar la estimación de raíces perdidas durante la excavación. Una opción es contar y medir diámetros de raíces rotas, y

utilizar sistemas radiculares intactos para corregir la biomasa perdida a partir de cada raíz. Otra opción es realizar muestreo y cernido de volúmenes de suelo para recuperar raíces rotas, tomando cinco o más unidades muestrales por árbol.

En aquellos casos en que la raíz se ha excavado con cuidado para estudios de crecimiento y estructura radicular es conveniente documentar la raíz excavada (fotografías, mediciones en ambos planos vertical y horizontal; ángulos, dimensiones de los segmentos, puntos de bifurcación). Esa es información de interés para estudios más acabados (e.g. exploración de las dimensiones fractales de la raíz; interpretar distribución y variabilidad espacial para muestreo).

5.2.1.2.4.2 Muestreo de raíces pequeñas y/o distales

En estas raíces se desconoce el árbol de origen. El muestreo puede concentrarse en torno al árbol, esto es bajo el área proyectada de copa o dentro del polígono de Voronoi, obteniendo submuestras de suelo o recuperando todo el suelo en cubos o bloques. Otra opción es utilizar parcelas multiárbol, las que incorporan la posición de varios tocones; así, incluye raíces de sotobosque y dosel principal. En estas parcelas también puede realizarse submuestreo, utilizando cilindros de 5, 10 o más cm de diámetro; se sugiere tomar 10 o más submuestras, localizadas aleatoriamente en cada parcela. Una desventaja evidente de la parcela multiárbol y de la obtención de cubos de suelo es la remoción extensiva de suelo.

La recuperación de las raíces requiere del cernido para eliminar rocas y otros materiales extraños. También puede incorporar lavado para eliminar restos de tierra. El remojo durante cierto periodo facilita el lavado en suelos arcillosos.

5.2.1.3 El muestreo aleatorizado de ramas

El muestreo aleatorizado de ramas (Randomized Branch Sampling: RBS) es útil para la estimación de parámetros tales como biomasa foliar, biomasa de raíces o cantidad de frutos en árboles. El RBS utiliza la ramificación natural dentro de la copa para configurar la muestra. Su uso requiere definir *nodos* (un punto donde una rama o parte de una rama se divide en dos o más ramas), *segmentos* (una parte de una rama entre dos nodos consecutivos; ver Fig. 1a), y *paths* (una serie de segmentos sucesivos entre el segmento basal y un segmento terminal, esto es un segmento sin nodo en su extremo final).

La estimación de la variable de interés para el árbol completo se realiza a partir de los valores de la variable colectados a lo largo de uno o más paths. En la selección de los segmentos de un path puede usarse una variable auxiliar. La selección de un path se inicia en el primer nodo definido con la selección de uno de los segmentos que de allí emanan, continúa a lo largo del segmento seleccionado y repite la selección, si es que al final del segmento existe otro nodo. El path finaliza al seleccionar un segmento terminal (Fig. 1a).

El RBS es un método flexible. Existe libertad para definir tanto el primer nodo de un path y su último segmento, como también la variable auxiliar. El punto de inicio de cada path determina la parte del árbol para la cual es válida la estimación que el path provee. La elección de la variable auxiliar debe estar guiada por el objetivo de la estimación. Ejemplos de variable auxiliar son el área de sección transversal en la base de la rama (Jessen 1955, Valentine et al. 1994), la biomasa de hojas estimada visualmente (Valentine y Hilton 1977), y el producto entre el diámetro al cuadrado y la longitud del segmento (Valentine et al. 1984, Williams 1989).

La selección de los segmentos se realiza con probabilidad proporcional al tamaño de la variable auxiliar. Este aspecto está estrechamente relacionado con la precisión del estimador. Aunque en principio cualquier característica del segmento puede utilizarse como variable auxiliar, es recomendable seleccionar una variable auxiliar estrechamente relacionada con la variable objetivo, con el fin de obtener la mayor precisión posible. La precisión de las estimaciones aumenta al estratificar la copa del árbol y al eliminar los segmentos gruesos.

En la actualidad existen tres variantes del RBS. La primera, que corresponde al RBS tradicional desarrollado por Jessen (1955), aplica selección con reposición (swr: selection with replacement) en todos los nodos; las otras dos variantes del método, desarrolladas por Saborowski y Gaffrey (1999), aplican selección sin reposición (swor: selection without replacement) en el primer ó segundo nodo.

El uso de swr que el RBS clásico hace en cada nodo puede causar una pérdida de eficiencia. Por esa razón Saborowski y Gaffrey (1999) sugirieron el uso de swor en el primer o segundo nodo. Ello se basa en el hecho bien conocido que con muestreo aleatorio simple swor es más eficiente que swr (ver Cochran 1977). Los autores seleccionaron el método de Sampford (1967) para la selección con probabilidad variable y sin reposición y lo incorporaron en el estimador multietápico de Saborowski (1990). El estimador combina swor y selección con probabilidad variable con el estimador Horvitz-Thompson (Horvitz y Thompson 1952). Esta variante y el RBS clásico se describen a continuación.

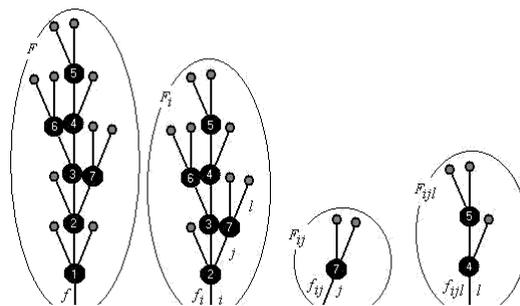


Figura 1: (a) Esquema idealizado de un árbol con 7 nodos y 17 segmentos. Los nodos 1 a 5 forman el fuste. (b), (c) y (d) representan 3 niveles de compartimentos de la copa, los que se inician en un segmento (i) primario, (ij) secundario y (ijl) terciario, con la correspondiente variable objetivo en los segmentos (F_i , F_{ij} , F_{ijl}), y los valores acumulados (F_i , F_{ij} , F_{ijl}).

5.2.1.3.1 Descripción de los métodos RBS

Todas las variantes del RBS usan probabilidades de selección proporcional a una variable auxiliar, la que puede ser medida o estimada en los segmentos de un nodo. Así, la probabilidad *condicional* de selección del i -ésimo segmento en un nodo con N segmentos es dado por $q_i = x_i / \sum_{i=1}^N x_i$, donde x_i es la variable auxiliar del i -ésimo segmento.

5.2.1.3.1.1 RBS clásico

En el RBS clásico, cada path seleccionado genera un estimador de la variable objetivo, la que se obtiene en base a los valores de la variable en cada segmento del path y la probabilidad (*incondicional*) del segmento respectivo. Si se mide e.g. un valor de la variable de interés f_r en el r -ésimo segmento del path, f_r / Q_r es la contribución de ese segmento al estimador de la variable de interés para la parte del árbol sobre el punto de inicio del path, con $Q_r = \prod_{s=1}^r q_s$, donde q_s es la probabilidad de selección condicional del s -ésimo segmento del path. Así, el estimador de la variable objetivo total en el árbol, obtenido a partir de un path con R_0 segmentos que se inicia en el segmento basal del árbol, es

$$\hat{F}_0 = \sum_{s=1}^{R_0} \frac{f_s}{Q_s}. \quad [1]$$

Si se seleccionan n paths mediante el RBS clásico, se obtiene el estimador insesgado \bar{F}

$$\bar{F} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{F}_{0i}, \quad \text{con } \hat{F}_{0i} = \sum_{s=1}^{R_{0i}} \frac{f_s}{Q_s}, \quad \text{y } Q_s = \prod_{u=1}^s q_u,$$

en donde el subíndice “0” se ha incorporado para resaltar que el estimador se obtiene desde un path que se inicia en el segmento basal del árbol, el único segmento perteneciente a un hipotético nodo cero. La varianza y el estimador insesgado de la varianza, respectivamente, son

$$Var\bar{F} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N_{Paths}} Q_{R_i} (\hat{F}_{0i} - F)^2, \quad \text{con } Q_{R_i} = \prod_{s=1}^{R_{0i}} q_s, \quad [2]$$

y

$$V = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\hat{F}_{0i} - \bar{F})^2, \quad [3]$$

donde R_{0i} es el número de segmentos del i -ésimo path y N_{Paths} es el número total de paths posibles en el árbol.

En la práctica, el RBS tradicional no presenta ninguna limitación. Puede ser aplicado con cualquier tamaño de muestra en árboles enteros o en partes del árbol, considerando o no los segmentos del fuste principal como unidades elegibles. Al menos dos paths deben elegirse para estimar la varianza del estimador.

El RBS clásico es obviamente un muestreo aleatorio multietápico (Saborowski y Gaffrey 1999). A excepción del segmento basal, cada segmento del path puede ser asignado a cierta etapa. La primera selección corresponde a la primera etapa, y los segmentos que ramifican desde el primer nodo corresponden a unidades primarias; la segunda selección corresponde a la segunda etapa, y los segmentos pertinentes a las unidades secundarias, etc. Así, un nodo es un punto de transición desde un segmento a los segmentos de la etapa siguiente y el path es una secuencia de segmentos de diferentes etapas (Fig. 1).

En el muestreo aleatorio multietápico usual, la población está constituida de N unidades primarias, M_i unidades secundarias en la i -ésima unidad primaria, K_{ij} unidades terciarias en la unidad secundaria j de la unidad primaria i , etc. Las probabilidades condicionales de selección son q_i, q_{ij}, q_{ijl} , etc. Los tamaños muestrales en las diferentes etapas son n, m_i, k_{ij} , etc. Concordantemente, los valores de la variable de interés de los segmentos sucesivos de un path f, f_1, f_2, f_3, \dots , pueden ser representados por $f, f_i, f_{ij}, f_{ijl}, \dots$, y por $F, F_i, F_{ij}, F_{ijl}, \dots$, los valores acumulados de la variable (ver Fig. 1b-d), donde F es el total de la variable de interés en el árbol, F_i es el total acumulado en la unidad primaria i , F_{ij} el de la unidad secundaria j en la unidad primaria i , F_{ijl} el de la unidad terciaria l de la unidad secundaria j en la unidad primaria i , etc. Así

$$F = f + \sum_{i=1}^N F_i, \quad F_i = f_i + \sum_{j=1}^{M_i} F_{ij}, \quad F_{ij} = f_{ij} + \sum_{l=1}^{K_{ij}} F_{ijl}, \quad \text{etc.}$$

El RBS clásico selecciona n unidades con reposición (wr: with replacement) en la primera etapa, y $m_i = k_{ij} = 1$, es decir por cada segmento primario de rama (unidad primaria) en todas las etapas siguientes se selecciona sólo un segmento de rama. Otra diferencia con los métodos multietápicos de selección aleatoria tradicionales yace en la composición de la variable de interés, como ya se vio antes. Aquí no sólo las unidades en la última etapa sino también las unidades de todas las etapas anteriores pueden contribuir a la variable (ver relación [1]).

Un estimador insesgado de F es, por lo tanto,

$$\hat{F} = f + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\hat{F}_i}{q_i}, \quad \text{con,} \quad \hat{F}_i = f_i + \frac{Y_{ij}}{q_{ij}}, \quad [4]$$

con varianza

$$Var\hat{F} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N q_i \left(\frac{F_i}{q_i} - \sum_{i=1}^N F_i \right)^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \frac{Var_2 \hat{F}_i}{q_i}, \quad [2']$$

donde $Var_2 \hat{F}_i$ es la varianza condicional de \hat{F}_i (estimador insesgado de F_i), dada la selección muestral en la primera etapa.

El estimador de la varianza [2'] es

$$V = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\hat{F}_i}{q_i} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\hat{F}_i}{q_i} \right)^2. \quad [3']$$

Aunque la estructura de la fórmula para la determinación de la varianza del estimador de la característica de interés en el árbol ([2']) es más compleja con la nueva nomenclatura (compare con [2]), el estimador de la varianza ([3']), sin embargo, es equivalente a [3]. Note

que $\hat{F}_{0i} = f + \frac{\hat{F}_i}{q_i}$ y $\bar{\hat{F}} = f + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\hat{F}_i}{q_i}$, de modo que $\hat{F}_{0i} - \bar{\hat{F}} = \frac{\hat{F}_i}{q_i} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\hat{F}_i}{q_i}$, lo que evidencia que el RBS es un tipo particular de muestreo aleatorio multietápico.

Aunque la nueva nomenclatura es más compleja y requiere mantener estimadores por unidad primaria, la introducción del RBS clásico en la nomenclatura de muestreo multietápico es necesaria para la incorporación de la selección sin reposición de unidades muestrales en alguna etapa de selección. En ese sentido es también útil notar que \hat{F}_i , un estimador del total de la variable de interés en la i -ésima unidad primaria, puede obtenerse a partir del RBS clásico con un path que se inicie en la i -ésima unidad primaria, esto es mediante

$$\hat{F}_{1i} = \sum_{s=1}^{R_{1i}} \frac{f_s}{Q_s},$$

en el cual el subíndice "1" se ha incorporado para resaltar que el estimador se obtiene desde un path que se inicia en una unidad primaria, con $q_i = 1$. Así, [2'] se transforma en

$$Var \hat{F} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N q_i \left(\frac{F_i}{q_i} - \sum_{i=1}^N F_i \right)^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \frac{1}{q_i} \sum_{j=1}^{M_{Path,i}} Q_{R_{1ij}} (\hat{F}_{1ij} - F_i)^2 \quad [2'']$$

en la que $M_{Path,i}$ es el número total de paths que empiezan en la i -ésima unidad primaria.

5.2.1.3.1.2 RBS con swor en la primera etapa (swor_swor)

Esta variante selecciona n unidades sin reposición en la etapa 1 (wor: without replacement), $m_i \geq 1$ unidades wr en la etapa 2 en la unidad primaria i , y $k_{ij} = \dots = 1$ unidades wr en todas las etapas siguientes. Así, reemplazando \hat{F}_i por $\bar{\hat{F}}_{1i}$ (ver [6]) se obtiene el estimador formalmente idéntico a [4], cuya varianza y estimador de la varianza, ahora, respectivamente, son

$$VarY = \sum_{i=1}^N \sum_{i'>i}^N (\pi_i \pi_{i'} - \pi_{ii'}) \left(\frac{F_i}{\pi_i} - \frac{F_{i'}}{\pi_{i'}} \right)^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\pi_i} \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{M_{Path,i}} Q_{R_{ij}} \left(\hat{F}_{1ij} - F_i \right)^2, \quad [5]$$

y

$$V = \sum_{i=1}^n \sum_{i'>i}^n \frac{\pi_i \pi_{i'} - \pi_{ii'}}{\pi_{ii'}} \left(\frac{\bar{F}_{1i}}{\pi_i} - \frac{\bar{F}_{1i'}}{\pi_{i'}} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\pi_i} \frac{1}{m_i(m_i-1)} \sum_{j=1}^{m_i} \left(\hat{F}_{1ij} - \bar{F}_{1i} \right)^2, \quad [6]$$

$$\text{con } \bar{F}_{1i} = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} \hat{F}_{1ij},$$

en donde es evidente que el método requiere seleccionar al menos dos unidades primarias ($n \geq 2$) y al menos dos paths ($m_i \geq 2$) por unidad primaria para estimar la varianza del estimador.

La selección de las unidades, el cálculo de la probabilidad que la i -ésima unidad sea incluida en la muestra (π_i), y la probabilidad que tanto las unidades i y i' estén en la muestra ($\pi_{ii'}$) se realizan con el método de Sampford (1967). Con este método

$$\pi_i = n \cdot q_i, \quad [7]$$

y

$$\pi_{ii'} = K_n \lambda_i \lambda_{i'} \sum_{t=2}^n \frac{[t - n(q_i + q_{i'})] L_{n-t}(\bar{i}\bar{i}')}{n^{t-2}}, \quad [8]$$

$$\text{con } K_n = \left(\sum_{t=1}^n \frac{t L_{n-t}}{n^t} \right)^{-1} \text{ y } \lambda_i = \frac{q_i}{1 - nq_i}.$$

Sampford define como $S(m)$ a un conjunto de $m \leq N$ unidades i_1, i_2, \dots, i_m y define L_m como $L_0=1$, $L_m = \sum_{S(m)} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_m}$ ($1 \leq m \leq N$), donde la suma incluye a todos los subconjuntos posibles de m unidades de la población; $L_m(\bar{i}\bar{i}')$ se define de manera similar, pero se obtiene de un población en la que se han eliminado las unidades i y i' .

5.2.1.4 Determinación de razones de peso seco y otros factores

5.2.1.4.1 Peso fresco

La determinación del peso fresco se realiza directamente en terreno, tan pronto como requiera la aplicación. Cuando se busca determinar razones de peso seco, la operación completa debe realizarse en poco tiempo; así se minimiza la pérdida de peso y el aumento de variabilidad de la razón determinada. La operación puede requerir el uso de balanzas de diferentes

precisiones. El pesaje del fuste y ramas de grandes dimensiones puede requerir trozar y obtener piezas más pequeñas; en ese caso, debe estimarse la pérdida de biomasa por efecto del corte.

5.2.1.4.2 **Peso seco**

La determinación del peso seco se realiza en base a muestras (300-1000 g) de cada componente, las cuales se han pesado frescas. Las muestras se secan a horno hasta peso constante. El peso seco total de un componente (W_s) se obtiene del producto entre el peso fresco total del componente (W_v) y la razón de peso seco de la muestra (r_{sv}).

$$W_s = r_{sv} \cdot W_v .$$

5.2.1.4.3 **Razones de peso seco**

La razón de peso seco es la relación entre el peso seco y el peso fresco de una muestra de un componente específico. Requiere prontitud en la medición del peso fresco (ver más arriba). También es necesario tener presente que la razón puede variar durante el año, punto importante cuando el muestreo se extiende por mucho tiempo o se realiza en diferentes épocas del año.

$$r_{sv} = \frac{\sum_{i=1}^n W_{s_i}}{\sum_{i=1}^n W_{v_i}} ,$$

donde:

W_{s_i} es el peso seco de la i -ésima unidad muestral,

W_{v_i} es el peso fresco de la i -ésima unidad muestral,

n es el tamaño de la muestra seleccionada para la determinación de la razón de peso seco ($n \geq 1$).

5.2.1.4.4 **Fracciones de peso seco**

La fracción (proporción) de peso seco es la relación entre el peso seco de un subcomponente y el peso seco total del componente del que aquel forma parte (e.g. peso de follaje / peso de rama; peso de corteza / peso de fuste).

$$f'_{ss} = \frac{\sum_{i=1}^n W_{s_sc_i}}{\sum_{i=1}^n W_{s_c_i}},$$

donde:

$W_{s_sc_i}$ es el peso seco del subcomponente en la i -ésima unidad muestral,

$W_{s_c_i}$ es el peso seco del componente en la i -ésima unidad muestral.

Entre otros, la fracción de carbono, que permite convertir la biomasa a carbono, puede determinarse en laboratorio por componente de la biomasa. También es aceptable el uso de un valor promedio; en el caso del carbono, el promedio generalmente usado es 0,5.

5.2.1.4.5 Densidad de la madera

La determinación de la densidad del material leñoso requiere seleccionar adecuadamente uno o más puntos de muestreo en el fuste o rama. Una muestra aleatoria es suficiente si la densidad no varía sistemáticamente a lo largo del fuste (o rama). Lo normal, sin embargo, es que la densidad varíe con la altura y edad del árbol; así, es mejor una muestra sistemática o por importancia, en este caso, con probabilidad proporcional al tamaño estimado. La densidad se determina mediante rodela o muestras de incremento obtenidas con taladro de incremento. La obtención de la rodela implica muestreo destructivo, pero proporciona una muestra representativa de la densidad en el punto de obtención de la rodela; la muestra de incremento, sin embargo, muestrea más fuertemente la parte central del fuste, siendo necesario subdividir radialmente el tarugo de incremento y ponderar por superficie de sección de fuste o rama.

La densidad se obtiene en términos de peso seco por unidad de volumen verde. Para ello es necesario cubicar la rodela o el tarugo de incremento en verde, a partir de mediciones de radio y espesor u otro método. Al usar rodela, la determinación del volumen se realiza a partir del área de sección de la rodela y del espesor medido en varios puntos o por el método del desplazamiento de líquidos, midiendo o pesando el volumen desplazado. Determinado el volumen, la rodela se seca en horno a 105°C hasta peso constante.

$$\delta = \frac{w_s}{v_v},$$

donde:

δ es la densidad de la madera (t/m^3 , g/cm^3),

w_s es el peso seco de la muestra,

V_v es el volumen fresco de la muestra.

La densidad puede determinarse con o sin corteza, dependiendo de los objetivos y de la determinación de volumen. Si se requieren estimaciones separadas de volumen, de densidad y de biomasa de madera y de corteza, es necesario medir con y sin corteza para obtener el volumen, y pesar por separado madera y corteza para determinar la densidad respectiva. El secado de las muestras a horno debe realizarse a 70-80°C para evitar pérdida de biomasa (ver Snowdon et al. 2001, p.36).

Si se requiere determinar la densidad del fuste, es necesario obtener el peso fresco del fuste y el volumen mediante alguna técnica. La razón de peso seco se determina en base a muestras, cuya posición puede definirse mediante muestreo por importancia en base al volumen acumulado del fuste. La densidad del fuste se obtiene dividiendo la biomasa seca fustal por el volumen fustal fresco.

5.2.1.4.6 Factor de expansión de la biomasa

Es la relación entre la biomasa total y la biomasa correspondiente a algún componente comercial que se cuantifica para volumen (e.g. fuste comercial). Se utiliza para estimar la biomasa total, incluyendo los componentes no inventariados. Aquí es necesario tener presente que el volumen se determina hasta un dlu definido (e.g. $dlu = 10$ cm); así, el factor de expansión debiera incluir la biomasa del fuste no comercial, así como otros componentes (ramas, etc).

5.3 Estimación de la densidad de biomasa en formaciones forestales

La biomasa por unidad de superficie (densidad de biomasa) involucra tanto compartimentos continuos (litera) como discretos (árboles, arbustos). Así, la estimación de la biomasa requiere combinar métodos; en general, involucra el trazado de parcelas de muestreo de superficie determinada, en las cuales se mide toda o parte de la biomasa de aquellos componentes de distribución continua y se estima o mide la biomasa de todos los componentes discretos en esa superficie (árboles, arbustos, etc.). También puede involucrar unidades de muestreo de tamaño variable según el componente a evaluar, e.g. parcelas de 250 m² para evaluar árboles, (sub)parcelas de 100 m² para evaluar arbustos, (sub)parcelas de 1 m² para evaluar litera, (sub)muestras de 500 g para determinar razones de peso seco, etc.

5.3.1 Dosel principal

El dosel principal está compuesto por árboles cuya distribución espacial es discreta. Así, la determinación de su biomasa requiere establecer parcelas u otro tipo de unidades de muestreo. La biomasa puede obtenerse a partir del volumen del árbol o directamente a partir de funciones de biomasa. Al operar con el volumen, éste puede obtenerse mediante fórmulas de volumen a partir de mediciones de diámetro de fuste, o puede estimarse mediante funciones de volumen individual (m³/árbol) a partir de mediciones simples en el árbol (dap, altura); también

puede obtenerse el volumen agregado mediante funciones de rendimiento (m^3/ha), en base a las dimensiones promedio de los árboles (dap, altura, área basal, etc.).

En la determinación del volumen mediante funciones de volumen individual, los árboles se organizan por clase de tamaño (dap). El volumen se determina multiplicando el número total de árboles de la clase por el volumen del árbol promedio de la clase. La suma a través de todas las clases genera el volumen por parcela, valor que se expande a hectárea mediante el factor de expansión. El uso de funciones de volumen individual y de rendimiento implica la medición de árboles sobre un diámetro mínimo (e.g. $\text{dap} \geq 10$ cm); en ese caso, los árboles de dap menor pueden incluirse como sotobosque, o ser considerados en el cálculo del factor de expansión de la biomasa.

El volumen por hectárea (en estado verde) se convierte a densidad de biomasa (t/ha) usando la densidad de la madera y un factor de expansión de biomasa

$$W = V \cdot \mathcal{D} \cdot F_E,$$

donde:

W es la biomasa (t/ha),

V es el volumen ($\text{m}^3\text{sc}/\text{ha}$),

\mathcal{D} es la densidad de la madera (t/m^3 , g/cm^3),

F_E es un factor de expansión de la biomasa.

La densidad corresponde aquí a un valor promedio. En ello es necesario tener presente que la densidad de la madera varía entre especies y entre individuos de una especie, y dentro del individuo mismo tanto en sentido radial (edad) como longitudinal. De aplicarse a un conjunto de especies, se requiere de un promedio de las densidades de las especies presentes ponderado por el volumen de las especies. La determinación de la densidad requiere obtener rodela tomada de cada sección del fuste.

Cuando se requiere una estimación de la biomasa total, incluyendo aquellos componentes no cubicados, debe tenerse presente que las estimaciones del volumen normalmente se realizan para árboles sobre un determinado diámetro (e.g. $\text{dap} \geq 10$ cm) y contemplan a su vez sólo una porción del fuste (e.g. $\text{dlu} = 10$ cm); tanto la densidad de la madera, como el factor de expansión deben considerar esa situación para estimar correctamente por unidad de superficie. Así, el factor de expansión corresponde aquí a la razón entre la biomasa seca total de los árboles y la biomasa seca del volumen estimado.

La biomasa también puede estimarse mediante funciones de regresión de biomasa, las que se aplican a tablas de rodal o a mediciones de árboles individuales en rodales u otra formación (e.g. cortinas cortaviento u otra; ver e.g. Brown 1997). Aquí no se requiere determinar volumen, ni aplicar factores de expansión para obtener componentes no inventariados. Las funciones de biomasa pueden ser genéricas (varias especies) o específicas (una especie). Entre las variables predictoras, además del dap y altura total, están el diámetro de fuste en la base de

la copa viva, el diámetro de copa, el espesor de corteza, la longitud del fuste y la longitud de copa.

5.3.2 Sotobosque

La biomasa de arbustos del sotobosque se estima a partir de los pesos de muestras directas de subparcelas de área conocida. También se puede obtener mediante regresión en base a medidas simples, como altura y diámetro de copa.

5.3.3 Desechos leñosos y litera

Dependiendo de la aplicación, quizás sólo se requiere la estimación de la biomasa potencialmente aprovechable. Cuando corresponden a residuos de cosecha, involucra ramas y restos de fuste quebrados y partes de fuste no comercial. De requerirse la biomasa de tocones, puede estimarse a partir del volumen (según diámetro y altura) y la densidad de la madera, ajustando según el grado de deterioro. El mismo ajuste es necesario en residuos no recientes, cuando corresponda.

5.3.4 Raíces

La biomasa radicular es el componente más difícil de medir, muestrear y estimar. Requiere la excavación del sistema radicular completo, lo cual es impracticable en árboles grandes. Es caro, lento y poco preciso. Normalmente la estimación se realiza mediante regresión, a partir de variables fáciles de medir como el diámetro de tocón, ya sea sola o como complemento del muestreo.

5.4 Desarrollo de funciones de biomasa individual

Las funciones de biomasa individual relacionan la biomasa con variables de fácil medición en el árbol (dap, altura), o en componentes del árbol (diámetro de copa, longitud de copa; diámetro basal de rama, longitud de rama; etc). El uso de funciones preexistentes debe realizarse con cuidado. En especial deben considerarse aspectos relacionados con la estación de crecimiento y el sitio.

La mejor combinación de variables explicatorias depende del componente a estimar. En el caso de ramas, la biomasa leñosa de rama se relaciona bien con el diámetro basal de rama. El follaje es más complejo y difícil de modelar; entre otros, los cambios estacionales y la competencia por luz afectan la retención de follaje en la rama. Así, la modelación del follaje puede requerir incluir otras variables, como e.g. posición en la copa, longitud o edad de la rama.

La construcción de funciones de biomasa de ramas requiere muestreo destructivo de una muestra de ramas. Snowdon et al. (2001, p.41-43) sugieren estratificar las ramas (según diámetro y posición en la copa), seleccionar una muestra aleatoria por estrato, determinar el

peso fresco en terreno, separar biomasa por componente y realizar submuestreo en componentes menores, entre otros. Además del diámetro y la longitud de rama, la posición en la copa, el tamaño del árbol (dap, altura, área de copa proyectada) son variables auxiliares potenciales.

5.4.1 Mediciones de terreno para desarrollar funciones de biomasa

5.4.1.1 Diámetro de fuste

El diámetro a la altura del pecho (dap, a 1,3 m del suelo) debe medirse en cada árbol muestra. En algunos casos pueden requerirse diámetros a otras alturas (e.g. diámetro de tocón a 0,3 m del suelo, en arbustos y árboles pequeños y/o bifurcados a poca altura). El diámetro de fuste al inicio de la copa también es útil para predecir la biomasa de la copa. En caso de multiplicidad de fustes en un árbol, se utiliza el diámetro equivalente (d_e), que corresponde al diámetro de un árbol con área de sección de fuste equivalente a la suma de las secciones individuales

$$d_e = \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i^2},$$

donde:

d_i es el diámetro del i -ésimo fuste.

La medición de diámetros se realiza con y sin corteza. El espesor de corteza se obtiene con calibrador de corteza; en muestreo destructivo se mide directamente el diámetro sin corteza después de eliminar la corteza. Las mediciones sin corteza permiten obtener biomasa seca de árboles muertos que no tienen corteza; también posibilitan estimar la biomasa de corteza.

5.4.1.2 Altura del árbol

En cada árbol muestra se registra la altura total o fustal antes de cortar el árbol. Ello porque en inventarios, la altura siempre se determina en árboles en pie. También deben medirse esas dimensiones en el árbol después de cortado.

5.4.1.3 Dimensiones de la copa

El diámetro, área y longitud de copa son útiles como variables independientes al estimar la biomasa de copa, especialmente en áreas abiertas. El diámetro de copa se obtiene de dos mediciones en ángulo recto, utilizando algún aparato para proyectar la copa al suelo y facilitar la medición. Un mayor número de mediciones aseguran mayor precisión, e.g. usando una red de puntos bajo la copa. El área de copa se puede obtener de forma simple a partir de los diámetros asumiendo forma circular o elíptica. Otra opción para obtener el área de copa es mediante sensores remotos.

Los árboles muestra se cortan tan cerca del suelo como sea posible y se dividen en sus componentes (e.g. fuste principal, ramas, hojas y frutos). Las ramas delgadas (diámetro basal <10 cm), las hojas y frutos deberían pesarse en fresco en terreno. Luego se colectan submuestras (5 o más) de cada componente, la que se pesan frescas y después de secar a horno (a 105 °C hasta peso constante). El pesaje se realiza con celeridad después de sacar del horno. Para cada submuestra se calcula la razón de peso seco.

Las ramas gruesas (diámetro basal >10 cm) y el fuste principal no son prácticas de medir en fresco en terreno. Es más fácil cortarlas en secciones y calcular el volumen de cada sección. El peso seco de la sección se obtiene del producto entre el volumen y la densidad. El peso total del fuste y ramas se obtiene de la suma de las secciones respectivas. La suma de todos los componentes genera la biomasa total del árbol.

Reunida toda la información de los árboles seleccionados, puede procederse al ajuste de la función de biomasa (ver modelos de volumen individual). El desarrollo de funciones de biomasa de raíces, utilizando variables aéreas como predictores, requiere al menos de 20 árboles (Snowdon et al. 2001).

5.4.2 Modelos de regresión

Existe una amplia variedad de modelos lineales y no lineales utilizados por diferentes autores para la estimación de la biomasa por componente y total del árbol. Las variables explicatorias habituales, entre otras, son el dap (d), la altura total (h), modificaciones de éstas (d^2 , d^2h), edad, longitud de copa viva (L_{cv}), diámetro en la base de la copa y área de albura a diferentes alturas del fuste (Parresol 2001). Qué variable usar depende del componente a estimar; e.g. el diámetro en la base de la copa viva es una de las mejores variables predictoras del peso de la copa. También se destaca el uso del área de tejido conductor para predecir peso y área foliar ó el uso del área de proyección de copa para la estimación de biomasa en plántulas.

En el ajuste, el método de mínimos cuadrados ordinarios no es totalmente satisfactorio debido a que la biomasa es heterocedástica. Ello requiere algún método de ponderación adecuada o transformación de la información para lograr estimaciones de los parámetros con mínima varianza. Otro punto importante en el ajuste de funciones para estimar la biomasa de los componentes es la aditividad de las funciones.

Parresol (2001) reconoce tres estructuras generales de modelos para estimar biomasa (Tabla 1).

Tabla 1. Estructuras generales de modelos de biomasa individual, según Parresol (2001).

Modelo	Estructura*	Características
1	$y = b_0 + b_1 x_1 + \dots + b_j x_j + \varepsilon$	(modelo lineal en los parámetros, error aditivo)
2	$y = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_j^{b_j} + \varepsilon$	(modelo no lineal en los parámetros, con error aditivo)
3	$y = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_j^{b_j} \varepsilon$	(modelo no lineal en los parámetros, con error multiplicativo)

*y es la biomasa total del árbol o de uno de sus componentes, x_j es una dimensión del árbol o componente, b_j es un parámetro del modelo y ε es el error.

El modelo 3 es habitualmente linealizado mediante logaritmos. Ello facilita el ajuste y a su vez permite homogenizar la varianza a lo largo del dominio de uno o más x_j 's. La estimación de la variable expresada en la unidad de medición (no transformada) se realiza de forma indirecta. El antilogaritmo de $\ln y$ genera la mediana de la distribución más que la media. Si se define $\hat{u} = \ln y$, y $\hat{\sigma}^2$ es la varianza de la función logarítmica, la biomasa estimada del componente, expresada en las unidades de medición, es

$$\hat{y} = e^{\hat{u} + 0.5 \cdot \hat{\sigma}^2},$$

y su varianza estimada es

$$\hat{\sigma}_a^2 = e^{(2 \cdot \hat{\sigma}^2 + 2 \cdot \hat{u})} - e^{(\hat{\sigma}^2 + 2 \cdot \hat{u})}.$$

Note que $\hat{\sigma}_a^2$ es un estimador de la varianza que incorpora correcciones para eliminar el sesgo introducido al transformar la variable dependiente. Esa corrección es a veces excesiva (ver Parresol 1999). Obviamente, no es el único modelo para corregir el sesgo en la estimación de la varianza (ver Baskerville 1972). Por ejemplo, si se utiliza el modelo siguiente, cuya forma general es típica en la determinación de la biomasa sobre el suelo,

$$y = k \cdot x^{b_1},$$

en el que y es la biomasa y x es el diámetro de rama o el dap del árbol, y cuya linealización conduce a

$$\ln y = b_0 + b_1 \ln x,$$

modelo en que $b_0 = \ln k$, el cual normalmente se ajusta satisfactoriamente, pero sus estimaciones son sesgadas. De acuerdo a lo expuesto en los párrafos precedentes, la estimación corregida y en la unidad de medición de la variable dependiente es

$$y_c = e^{b_0 + b_1 \ln x + 0.5 \cdot \hat{\sigma}^2},$$

siendo la respectiva varianza corregida estimada mediante (ver Mackensen et al. 2000)

$$s_y^2 = \left(e^{\hat{\sigma}^2} - 1 \right) e^{2(b_0 + b_1 \cdot \ln x) + \hat{\sigma}^2},$$

relaciones en las que $\hat{\sigma}^2$ es la varianza de la función logarítmica, esto es es el cuadrado medio del error (*cme*).

Un modelo algo más complejo en esta línea es (Ruark et al. 1987)

$$y = k \cdot x^{b_1} e^{b_2 x},$$

el que linealizado se transforma en

$$\ln y = b_0 + b_1 \ln x + b_2 x.$$

Payandeh (1981) presenta modelos que incluyen al dap (*d*) y/o la altura total o comercial del árbol (*h*) como variables explicatorias

$$y = e^{b_0 + b_1 \ln d},$$

$$y = b_0 + b_1 d^2 + b_2 h + b_3 d^2 h,$$

$$y = k \cdot d^{b_1} h^{b_2}.$$

Es conveniente tener presente que al operar con modelos linealizados mediante logaritmos, la suma de la biomasa de los componentes estimados es diferente de la biomasa total estimada mediante la regresión respectiva. Así las funciones de los componentes y de la biomasa total no se pueden armonizar; en este caso particular, no es admisible el concepto de aditividad.

5.4.3 Aditividad de los componentes de la biomasa

Un aspecto deseable de las funciones de biomasa por componente es que los valores estimados por componente deben sumar el total estimado mediante la función de biomasa total. Esto es válido en estudios de biomasa vegetal o animal. También es aplicable a otras variables como tiempo (costo), energía, volumen, distancia, los que separados en sus componentes, mantienen la característica de aditividad (ver Parresol 2001). Esto requiere forzar el conjunto de funciones de biomasa. Existen tres procedimientos diferentes los que dependen de cómo se agregan los componentes individuales.

5.4.3.1 Suma de componentes individuales

La función de biomasa total es definida como la suma de las mejores funciones de regresión de los componentes. Esto es $\hat{y}_1 = f_1(x_1)$, $\hat{y}_2 = f_2(x_2)$, ..., $\hat{y}_k = f_k(x_k)$;

$\hat{y}_{total} = \hat{y}_1 + \hat{y}_2 + \dots + \hat{y}_k$, estimándose la varianza de ese estimador a partir de la varianza de la suma de los componentes, $\text{var}(\hat{y}_{total}) = \sum_{i=1}^k \text{var}(\hat{y}_i) + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(\hat{y}_i, \hat{y}_j)$, donde $\text{cov}(\hat{y}_i, \hat{y}_j) = \rho_{y_i, y_j} \sqrt{\text{var}(\hat{y}_i) \text{var}(\hat{y}_j)}$, siendo ρ_{y_i, y_j} la correlación entre y_i y y_j .

5.4.3.2 Variables explicatorias comunes

La aditividad se logra usando las mismas variables explicatorias (x_j) y, si corresponde, la misma función de ponderación en el modelo de regresión lineal de la biomasa de cada componente y aquel del total. Así, los coeficientes de regresión de la función de biomasa total pueden obtenerse sumando los coeficientes de los componentes. Esto es $\hat{y}_1 = b_{01} + b_{11}x_1 + \dots + b_{j1}x_j$, $\hat{y}_2 = b_{02} + b_{12}x_1 + \dots + b_{j2}x_j, \dots, \hat{y}_k = b_{0k} + b_{1k}x_1 + \dots + b_{jk}x_j$; $\hat{y}_{total} = (b_{01} + \dots + b_{0k}) + (b_{11} + \dots + b_{1k})x_1 + \dots + (b_{j1} + \dots + b_{jk})x_j$, en el que b_{jk} son los parámetros de los modelos ajustados al componente i . Básicamente este modelo asume que los k componentes son independientes. Bajo este supuesto, la varianza de \hat{y}_{total} es simplemente la suma de las varianzas de estimación de cada componente (covarianza igual a cero). El mayor problema es que el supuesto no es cierto en la mayoría de los casos. Lo otro es que no permite usar diferentes formas funcionales para diferentes componentes (ver excepción en Chiyenda y Kozak 1984).

5.4.3.3 Estimación simultánea

Este es el método más flexible y general y el más difícil de emplear. Utiliza el método de “mínimos cuadrados generalizados conjuntos”. Permite que cada componente tenga un modelo, variables explicatorias e incluso función de ponderación propias (diferentes). Las variables predictoras de la biomasa total son todas las variables explicativas que aparecen en los modelos de los componentes. Esto es $\hat{y}_1 = f_1(x_1) + \varepsilon_1$, $\hat{y}_2 = f_2(x_2) + \varepsilon_2, \dots, \hat{y}_k = f_k(x_k) + \varepsilon_k$; $\hat{y}_{total} = f_{total}(x_1, x_2, \dots, x_k) + \varepsilon_{total}$. La aditividad se asegura introduciendo restricciones al modelo de biomasa total, como se ejemplifica a continuación.

Asuma que la biomasa del árbol se dividió en tres componentes, cada uno de los cuales puede estimarse mediante los modelos siguientes

$$M_f = b_{01} + b_{11}D^2H,$$

$$C_f = b_{02} + b_{12}D^2,$$

$$B_c = b_{03} + b_{13}D^2 \cdot lc,$$

donde:

M_f es la biomasa de madera del fuste,

C_f es la biomasa de corteza del fuste,

B_c es la biomasa de la copa,

D es el dap del árbol,
 H es la altura total del árbol,
 l_c es la longitud de la copa.

Así, la biomasa total del árbol (B_T), que corresponde a la suma de los componentes, se estima mediante el modelo

$$B_T = b_{04} + b_{14}D^2H + b_{24}D^2 + b_{34}D^2 \cdot l_c,$$

cuyos parámetros deben estar relacionados con aquellos de los componentes para asegurar la aditividad. Esto es, $b_{01} + b_{02} + b_{03} = b_{04}$, $b_{11} = b_{14}$, $b_{12} = b_{24}$ y $b_{13} = b_{34}$.

Este sistema de funciones (M_f , C_f , B_c , B_T), sujeto a las restricciones expuestas, puede ser ajustado utilizando Proc Model de SAS (SAS Institute Inc.1999).

Referencias

- Baskerville, G.L. 1972 Use of logarithmic regression in the estimation of plant biomass. Can. J. For. Res. 2: 49-53.
- Brown, S. 1997. Estimating biomass and biomass change of tropical forests: A primer, Rep. N° 134. FAO, Rome. 55p.
- Cochran, W.G., 1977. Sampling techniques. Wiley, New York. 428p.
- Chiyenda, S.S. and A. Kozak. 1984. Additivity of component biomass regression equations when the underlying model is lineal. Can. J. For. Res. 14: 441-446.
- Horvitz, D.G., Thompson, D.J., 1952. A generalisation of sampling without replacement from a finite universe. Journal of the American Statistical Association 47, 663-685.
- Jessen, R.J., 1955. Determining the fruit count on a tree by randomized branch sampling. Biometrics 11, 99-109.
- Laar, A. van and A. Akça. 1997. Forest mensuration. Cuvillier, Göttingen. 418p.
- Mackensen, J., M. Tillery-Stevens, R. Klinge, and H. Fölster. 2000. Site parameters, species composition, phytomass structure and element stores of a terra-firme forest in East-Amazonia, Brazil. Plant Ecology 151:101-119.
- Parresol, B.R. 1999. Assessing tree and stand biomass: A review with examples and critical comparisons. For. Sci. 45(4):573-593.
- Parresol, B.R. 2001. Additivity of nonlinear biomass equations. Can. J. For. Res 31: 865-878.
- Payandeh, B. 1981. Choosing regression models for biomass prediction equations. For. Chron. 57(4): 229-232.
- Ruak, G.A., G.L. Martin, and J.G. Bockheim. 1987. Comparison of constant and variable allometric ratios estimating *Populus tremuloides* biomass. For. Sci. 33:294-300.
- SAS Institute Inc. 1999. Chapter 14. The Model Procedure, pp 671-911. In SAS/ETS User's Guide, Version 8, Cary, NC: SAS Institute Inc.1546 pp.
- Saborowski, J., 1990. Schätzung von Varianzen und Konfidenzintervallen aus mehrstufigen Stichproben. Schriften aus der Forstlichen Fakultät der Universität Göttingen und der Niedersächsischen Forstlichen Versuchsanstalt, Bd. 99.
- Saborowski, J., Gaffrey, D., 1999. RBS, ein mehrstufiges Inventurverfahren zur Schätzung von Baummerkmalen. II. Modifizierte RBS-Verfahren. AFJZ 170, 223-227.
- Sampford, M. R., 1967. On sampling without replacement with unequal probabilities of selection. Biometrika 54, 499-513.

- Snowdon, P., J. Raison, H. Keith, K. Montagu, H. Bi, P. Ritson, P. Grierson, M. Adams, W. Burrows, and D. Eamus. 2001. Protocol for sampling tree and stand biomass. National Carbon Accounting System Technical Report No. 31. 114p.
- Valentine, H.T. and Hilton, S.J., 1977. Sampling oak foliage by the randomized-branch method. *Can. J. For. Res.* 7: 295-298.
- Valentine, H.T., Baldwin, Jr. V.C. Gregoire, T.G., Burkhart, H.E., 1994. Surrogates for foliar dry matter in loblolly pine. *For. Sci.* 40, 576-585.
- Valentine, H.T., Tritton, L.M., Furnival, G.M., 1984. Subsampling trees for biomass, volume, or mineral content. *For. Sci.* 30, 673-681.
- Williams, R.A., 1989. Use of randomized branch and importance sampling to estimate loblolly pine biomass. *South. J. Appl. For.* 13, 181-184.

6 Crecimiento

El término *crecimiento* tiene una variedad de acepciones en biología. En lo relativo a mediciones forestales, se le utiliza para señalar el aumento de tamaño ya sea a nivel de árbol individual o a nivel de rodal. En este último caso, puede referirse a un valor promedio por árbol o a valores acumulados por unidad de superficie. La determinación del crecimiento de árboles es la base para evaluar el crecimiento de rodales.

El crecimiento se expresa en un cambio en el tamaño de los individuos con el transcurso del tiempo. Normalmente, *crecimiento* o *incremento* se utilizan indistintamente para indicar un aumento de tamaño ocurrido en alguna variable durante un determinado lapso de tiempo, en tanto que la dimensión alcanzada hasta una edad específica se refiere como *crecimiento acumulado*.

El crecimiento se evalúa dentro de un período de tiempo determinado (día, mes, año, u otro período más largo). La unidad de tiempo habitual para el estudio del crecimiento de un árbol o de un rodal es el año. De aquí surge la definición del *incremento corriente anual (ica)*, que corresponde a la diferencia entre el tamaño al inicio y al final de un año de crecimiento. Si se considera un lapso de tiempo mayor a un año se habla de un período de crecimiento, y al incremento obtenido en ese lapso se le denomina *incremento periódico (ip)*, esto es la diferencia entre el tamaño al final del período y el tamaño al inicio del período; ese tamaño, dividido por el número de años en el período, genera el *incremento periódico anual (ipa)*. Al dividir el tamaño total acumulado entre el número de años (edad) se obtiene el *incremento medio anual (ima)*.

El crecimiento en el árbol individual puede obtenerse a partir de mediciones realizadas en dos o más oportunidades y a partir de muestras de incremento tomadas directamente en los árboles. En los rodales, el número de individuos varía con el transcurso del tiempo, como un resultado de la incorporación de nuevos individuos y la eliminación de individuos por mortalidad natural o raleos planificados. Así, la mejor forma de evaluar el crecimiento en rodales es mediante mediciones repetidas a lo largo del tiempo, esto es estableciendo parcelas de muestreo temporales o permanentes. Aunque las primeras permiten obtener valores de crecimiento acumulado por unidad de superficie y valores promedio por árbol, en tanto que las segundas permiten obtener incluso crecimiento de árboles individuales, la mayor ventaja que proporcionan ambos tipos de parcela es que permiten obtener estimaciones de la incorporación y mortalidad de individuos con el transcurso del tiempo.

El crecimiento es determinado por las características genéticas del individuo en interacción con el ambiente. La suma de las variables climáticas (temperatura del aire, precipitación, viento, insolación), topográficas (pendiente, elevación y exposición del terreno), edáficas (características químicas y físicas, humedad y microorganismos) y la competencia (intra e ínter específica con otros árboles, con vegetación menor; efecto de animales) se expresa como *calidad de sitio*, esto es la capacidad de un sitio o localidad para producir madera.

Al graficar los datos de tamaño acumulado en relación al tiempo se obtiene una curva de crecimiento de forma sigmoidea (una “s” alargada). Esa forma típica es observable al considerar la vida completa del individuo, dentro de una estación de crecimiento, en células individuales, en tejidos y órganos, y por unidad de superficie de rodal.

La curva de crecimiento acumulado muestra el tamaño alcanzado en cada edad por el individuo. Las curvas de *ica*, *ipa* e *ima* presentan aproximadamente una forma parabólica convexa, con un valor máximo a alguna edad específica. A ese punto se le denomina *edad de culminación del crecimiento*. En el caso de rodales y referido al volumen, a la edad de máximo *ima* se le denomina edad de rotación biológica.

6.1 Crecimiento en árboles individuales

En los árboles, el crecimiento consiste en elongación y engrosamiento del fuste, ramas y raíces. Implica cambios en el tamaño (e.g. peso, volumen) y en la forma del fuste y de otros componentes. A nivel de árbol, el crecimiento se evalúa en la altura total o comercial, y en el diámetro a la altura del pecho (dap) y en otros puntos del fuste. A partir de esas variables simples se deriva el crecimiento en otras variables más complejas, como el volumen o peso total o de secciones del fuste.

La determinación del crecimiento puede realizarse mediante remediciones, esto es estableciendo parcelas de muestreo temporales o permanentes. El crecimiento también puede obtenerse a partir de muestras de incremento tomadas directamente en los árboles (tarugos de incremento) y a partir de análisis fustal, que consiste en el conteo y medición de anillos de crecimiento en rodela obtenidas en varios puntos a lo largo del fuste de árboles muestra.

Al graficar los datos de tamaño acumulado en alguna variable específica como altura, diámetro, área basal, volumen o peso de un árbol en relación al tiempo, se obtiene una curva de crecimiento. Si se dispone de datos de crecimiento hasta edades avanzadas del árbol puede observarse que la curva de crecimiento acumulado es de forma sigmoidea.

Las curvas de *ica*, *ipa* e *ima* pueden derivarse a partir de mediciones y también a partir de la curva de crecimiento total acumulado. El *ima* culmina cuando se iguala con el *ica*, esto es cuando $ima = ica$. La edad de culminación del *ima* puede obtenerse a partir de un gráfico; también puede obtenerse en forma analítica mediante la igualdad $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{y}{t}$, siendo y el crecimiento acumulado y t el tiempo (edad del árbol), o igualando la primera derivada de la función de incremento medio anual a cero, esto es con $\frac{\partial(y/t)}{\partial t} = 0$. El desarrollo de esta relación permite demostrar analíticamente que el *ima* y el *ica* se igualan cuando el *ima* es máximo, esto es

$$\frac{\partial(y/t)}{\partial t} = \frac{y' \cdot t - y}{t^2} = 0, \text{ i.e. } \frac{y}{t} = y'.$$

A cualquier edad menor a la de máximo *ima*, la pendiente de la curva de *ima* es mayor a cero, esto es $\frac{\partial(y/t)}{\partial t} > 0$. Desarrollando se obtiene

$$\frac{y' \cdot t - y}{t^2} > 0, \text{ i.e. } \frac{y}{t} < y',$$

así es evidente que antes de alcanzarse la edad de máximo *ima*, el *ima* es menor que el *ica*.

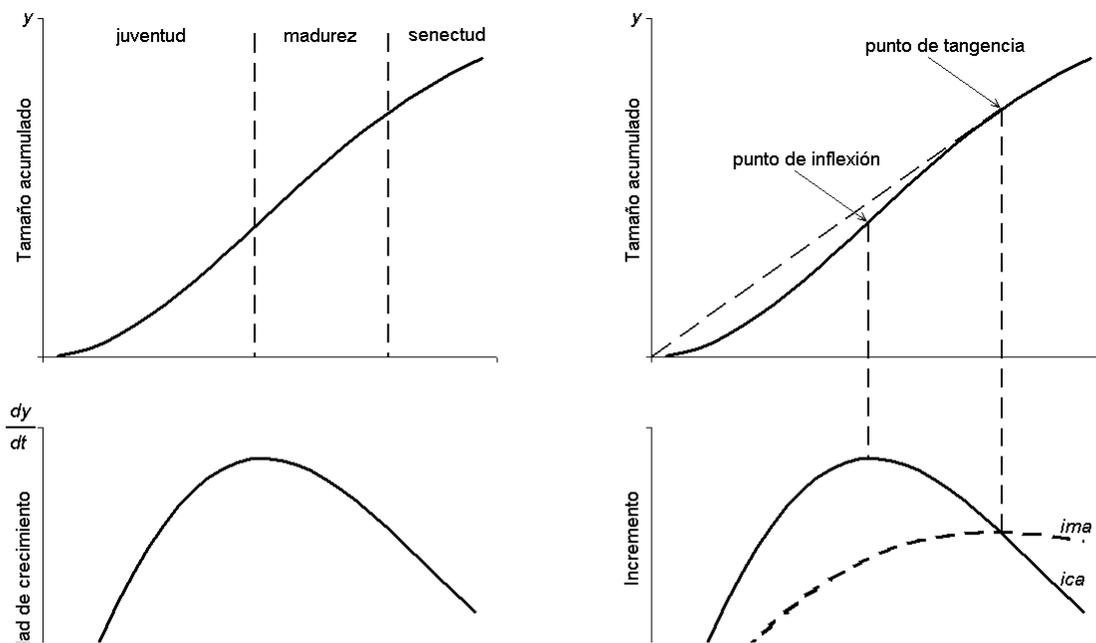


Figura 1. La curva de tamaño acumulado sigmoidea típica (arriba) y las curvas de incrementos (abajo). El máximo crecimiento corriente anual (*ica*) coincide con el punto de inflexión de la curva de crecimiento acumulado; el máximo incremento medio anual (*ima*) se obtiene en el punto en que este se iguala con el *ica*; también corresponde al máximo ángulo que puede trazarse en la curva de tamaño acumulado, con vértice en el origen del sistema de coordenadas.

La edad de culminación del *ica* también puede obtenerse de un gráfico, o en forma analítica igualando la primera derivada de la función de incremento corriente anual a cero, esto es con

$$\frac{\partial^2(y)}{\partial t^2} = 0.$$

6.1.1 El crecimiento en diámetro, altura y volumen de árboles individuales

En regiones de clima templado se presenta una marcada diferencia climática en las diferentes estaciones del año, la que repercute en el crecimiento de los árboles. Los árboles crecen sólo durante aquellas épocas del año en que el clima les es favorable (período vegetativo), esto es cuando especialmente la temperatura y la humedad ambiental son adecuadas para su

desarrollo. El crecimiento se activa en primavera y verano, y se detiene en invierno. El crecimiento es en general más rápido en primavera que en otras épocas del año. En primavera se genera una capa de madera de color claro, denominada madera temprana; la capa de madera de verano, denominada madera tardía, es más estrecha y oscura. Así, la capa de madera que se genera cada año es relativamente fácil de identificar. En un corte transversal del fuste, las capas de crecimiento anual se observan como anillos concéntricos a los que se les denomina anillos de crecimiento. De esa manera, el crecimiento pasado de un árbol se puede reconstruir a partir de muestras de madera, identificando, contando y midiendo anillos de crecimiento (ver análisis fustal). En zonas tropicales puede existir crecimiento continuo, o también más de una fase de crecimiento en cada año, lo que imposibilita o al menos dificulta el reconocimiento del crecimiento anual en muestras de madera.

El crecimiento puede obtenerse también mediante mediciones repetidas de las características de interés en los árboles, esto es comparando inventarios. Cuando se requiere conocer el crecimiento individual, es necesario identificar cada árbol medido en las parcelas de muestreo. En este método, el crecimiento se obtiene de la diferencia en el tamaño entre dos mediciones sucesivas. Así, es aplicable a cualquier variable que pueda medirse directamente (e.g. dap, altura) y es útil en cualquier región de la tierra.

6.1.1.1 Crecimiento en diámetro

El crecimiento en diámetro es producto de la actividad del cambium durante el período vegetativo. Este tejido meristemático genera cada año una capa de madera hacia el interior del fuste y una capa de corteza hacia el exterior, capas que son fáciles de reconocer en especies creciendo en zonas templadas.

El ambiente es determinante del crecimiento en diámetro. Así, la calidad de sitio y el manejo influyen fuertemente en el incremento diamétrico. En general, a mejor calidad de sitio mayor es la tasa de incremento diametral y más rápido se alcanza la edad de culminación del crecimiento en esta variable. La densidad de rodal, que se regula mediante raleos, está estrechamente relacionada con el incremento en diámetro; en general, a menor densidad mayor es el crecimiento de los árboles.

El crecimiento en diámetro es fuertemente afectado por la competencia entre árboles. Así, la etapa de crecimiento juvenil en especies heliófilas se caracteriza por presentar tasas altas de crecimiento, debido a la inexistencia de competencia entre los árboles; esa etapa dura hasta el momento del cierre de las copas. En la etapa siguiente (madurez), la tasa de crecimiento se reduce, pero los árboles pueden responder rápidamente, cuando se les alivia de la competencia mediante raleos y/o fertilizaciones. En la etapa de senectud, el crecimiento en diámetro es reducido y los árboles no reaccionan a los tratamientos mencionados. En especies de sombra (umbrófilas), por el contrario, la fase juvenil presenta tasas de incremento pequeñas hasta la eliminación del dosel superior; a partir de ese momento el crecimiento se acelera, reduciéndose de nuevo con el inicio de la competencia entre vecinos.

El incremento diametral varía a lo largo del fuste. Normalmente interesa conocer la evolución del dap dado que es este el diámetro que usualmente se mide en los inventarios. En esta variable es imposible observar el crecimiento en toda la fase juvenil, porque el dap empieza a medirse cuando el árbol supera 1,3 m de altura; a pesar de ello, la curva de crecimiento en dap presenta la forma sigmoideal típica.

El incremento en diámetro puede obtenerse mediante remediciones, esto es comparando inventarios sucesivos, mediante muestras de incrementos obtenidas con el taladro de incremento y mediante análisis fustal. En el caso de las remediciones, debe cuidarse de realizar las mediciones en los mismos árboles, a la misma altura y posición en el fuste y con el mismo instrumento. También es posible instalar bandas dendrométricas sobre los fustes. La medición debe realizarse en la misma época del año (período de receso vegetativo). En el caso de obtener muestras con el taladro de incremento, debe cuidarse de obtener las muestras en sentido radial; cualquier inclinación generará datos irreales de crecimiento radial.

6.1.1.2 Crecimiento en altura

El crecimiento en altura es el resultado de la actividad de los tejidos meristemáticos primarios. La longitud de las fases de crecimiento juvenil, madurez y senectud como también el tamaño acumulado varía ampliamente tanto entre especies como dentro de una especie. En especies de sombra creciendo bajo el dosel, el período juvenil es bastante más prolongado que en especies de luz, las que crecen a tasas mayores por estar expuestas a la luz directa desde sus primeros años de vida. En las especies de sombra, el crecimiento se acelera desde el momento en que son liberadas de la sombra.

En especies heliófilas, y especies de sombra una vez liberadas del dosel superior, el crecimiento en altura varía dependiendo de la calidad del sitio. Otros factores, como la competencia con otros vegetales, no alteran mayormente el crecimiento en altura, a menos que la densidad de rodal sea extremadamente baja o alta.

El crecimiento en altura puede determinarse comparando inventarios, a través del conteo y medición de longitud fustal entre verticilos (coníferas) y mediante análisis fustal.

6.1.1.3 Crecimiento en volumen

El crecimiento en volumen es la resultante del incremento en diámetro y en altura del fuste del árbol. Es la variable más útil y más empleada en estudios de crecimiento. Es la variable con las fases de crecimiento de mayor longitud, con culminación del *ica* y del *ima* a edades más avanzadas que el dap y la altura. Al ser una variable dependiente del dap y la altura de los árboles, es afectada por los mismos factores que afectan a aquellas; así, la calidad de sitio y el manejo del rodal están estrechamente asociados al incremento en volumen.

A diferencia del diámetro y la altura, el volumen es muy difícil de medir directamente. Lo normal es derivarlo a partir de mediciones de diámetro a diferentes alturas en el fuste. Así,

sólo es posible obtenerlo en forma “directa” en árboles de tamaño pequeño, que sean posibles de escalar para realizar la medición de diámetros; a medida que transcurre el tiempo y los árboles crecen, la medición de diámetros a lo largo del fuste se hace cada vez más difícil, llegando a ser impracticable en un determinado momento. A partir de ese momento sólo son útiles métodos indirectos para su estimación como las funciones de volumen y funciones de crecimiento. También puede recurrirse al análisis fustal, pero éste, por su naturaleza destructiva, sólo es aplicable cuando los árboles a analizar no son imprescindibles para etapas o estudios posteriores.

6.1.2 Análisis fustal

El análisis fustal es una técnica para la determinación del crecimiento que puede implementarse en especies creciendo en regiones de clima templado, en las que es relativamente fácil la identificación de los anillos de crecimiento. Consiste en el conteo y medición de anillos de crecimiento en secciones transversales del fuste a diferentes alturas sobre el suelo. Este análisis entrega un registro completo del crecimiento pasado del árbol. Muestra cómo creció el árbol en altura y diámetro y cómo cambia de forma a medida que incrementa en tamaño. Aunque el método puede implementarse en árboles en pie, obteniendo muestras con taladro de incremento a diferentes alturas en el fuste escalando el árbol, el muestreo no podría extenderse a todo el largo del fuste. Así, el método se realiza normalmente tomando rodela en árboles volteados; de esta forma se logra mayor precisión y antecedentes de crecimiento más completos que con la muestra de tarugos de incremento.

En el análisis fustal, el desplazamiento de la médula del árbol, la excentricidad y deformidad del fuste causan inconvenientes al realizar las mediciones de los anillos de crecimiento (ver Biging y Wensel 1988). Los dos primeros problemas son imposibles de corregir al tomar una muestra de incrementos mediante el taladro. Al seccionar el árbol se observan claramente esos defectos y puede implementarse algún procedimiento para corregir sus efectos.

En la toma de datos para implementar un análisis fustal, el primer paso es registrar la especie y el dap y marcar la altura de medición del dap en el árbol en pie. A continuación se procede a voltear el árbol, se determina la edad contabilizando el número de anillos a la altura del tocón y se registra la longitud total del fuste. También pueden registrarse otras variables de interés, como la longitud de fuste libre de ramas y el inicio de la copa viva, si fuera necesario.

Luego se procede a marcar y seccionar el árbol según la longitud deseada. En algunos casos, el seccionamiento del fuste se realiza en base a la longitud de trozas comerciales con el fin de aprovechar la madera del árbol. En otros casos, el volteo y seccionamiento del fuste tiene como único objeto el realizar el estudio de crecimiento. En tal caso, la longitud de las secciones está definida por los objetivos del análisis fustal. En cualquiera de esas situaciones, en el extremo de cada sección se obtiene una rodela y se registra la altura de obtención en el fuste. Cuando el seccionamiento del fuste lo permite, también se obtiene una rodela en la altura correspondiente al dap; en este caso, la muestra puede incluir una rodela a la altura del

vertical común representando la altura en que se obtuvieron las rodelas en el fuste. Por ejemplo, en la parte izquierda de la figura 2 se ha representado la altura de la rodela contra la edad que requirió el árbol para lograr esa altura. Esa edad se obtiene de la diferencia entre la edad actual (ea) y en número de anillos en la rodela (n_i), i.e. $edad = ea - n_i + 1$. Los radios de fuste obtenidos para cada edad a la altura de obtención de cada rodela están representados en la parte derecha del gráfico.

Las curvas de ahusamiento de edades específicas se obtienen conectando los radios que representan la misma edad. La posición terminal de cada curva de ahusamiento es estimada desde la curva de altura-edad. En la figura se grafica la obtención de la altura total del árbol a los 15 años de edad; a la edad requerida se traza una vertical hasta el punto en que ésta toca la curva de altura acumulada; desde allí se proyecta una línea horizontal, la que al interceptar el eje de altura determina la altura buscada. En la determinación de la altura mediante el gráfico para una edad específica debe asociársele la mayor altura posible. Si la distancia entre rodelas es muy pequeña, el incremento de un año (u otro periodo) será mayor que la distancia entre rodelas. Así, en el gráfico se generará una línea vertical representando un rango de alturas para un año específico; el valor correcto es el máximo valor de altura en ese rango.

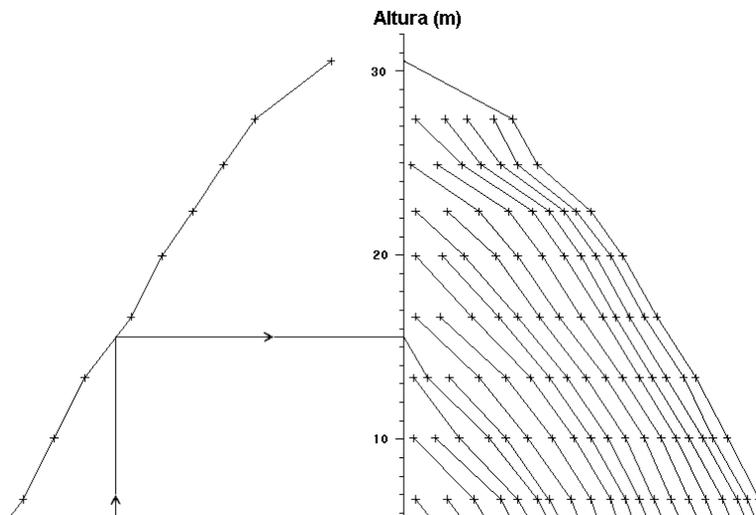


Figura 2. Reconstrucción del perfil fustal a partir de análisis fustal en un árbol de 29 años de edad. En la parte derecha se grafican radios de fuste, esto es, la distancia entre la médula y el anillo de crecimiento de cada edad (cruz); la unión mediante rectas de todos los puntos correspondientes al anillo de crecimiento de cada edad generará el perfil fustal del año en cuestión. La altura total alcanzada en cada año se deriva del gráfico de la izquierda (e.g. a la edad de 15 años)

A partir de los antecedentes y gráficos puede determinarse el crecimiento en diámetro fustal a cualquier altura del fuste; también puede determinarse el crecimiento en altura ya sea comercial o total. El incremento en volumen comercial o total se deriva a partir de esas variables.

6.1.2.2 Otras opciones para determinar altura

El método gráfico claramente sobrestima la altura del árbol. Otra opción es estimar la altura mediante fórmulas basadas en el conteo de anillos y en las alturas de obtención de las rodelas.

Cuando dos rodela sucesivas difieren en el número de anillos, entre esas dos alturas existe una cantidad definida de ápices “escondidos”; esa cantidad corresponde al número de anillos que desaparecen en esa distancia entre rodela, esto es la diferencia del número de anillos entre rodela (Fig. 3). Las fórmulas proponen diferentes formas para distribuir esos ápices en la sección fustal entre rodela sucesivas (e.g. Dyer y Bailey 1987, Rayner 1991, Fabbio et al. 1994).

6.1.2.2.1 Fórmula de Lenhart

Esta fórmula distribuye homogéneamente los ápices perdidos entre las alturas de obtención de las rodela, pero produce una distribución heterogénea entre secciones sucesivas.

$$H_{ij} = h_i + j \left(\frac{h_{i+1} - h_i}{n_i - n_{i+1} + 1} \right),$$

donde:

H_{ij} es la altura total del árbol en la edad t_{ij} ,

t_{ij} es la edad del árbol asociada al j -ésimo anillo interno en la i -ésima rodela; $t_{ij} = n - n_i + j$,

n es la edad total del árbol,

j es el número del anillo interno, esto es un anillo que no aparece en la rodela siguiente, empezando el conteo por el más interno en esta condición,

n_i es el número de anillos en la i -ésima rodela,

h_i es la altura de obtención de la i -ésima rodela.

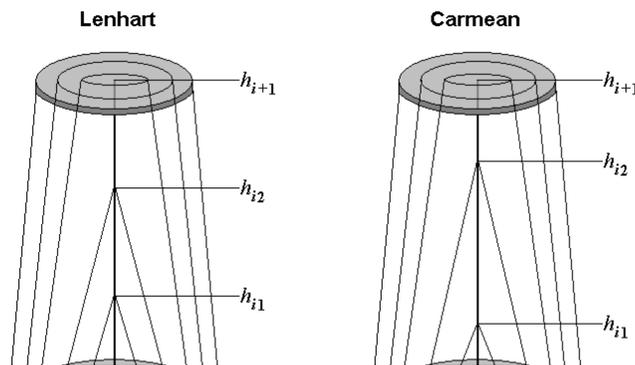


Figura 3. Estimación de la altura total en base a dos fórmulas alternativas (izquierda, Lenhart; derecha, Carmean).

6.1.2.2.2 Fórmula de Carmean

Esta fórmula asume que las rodela se obtuvieron en la mitad del incremento anual o periódico en altura. Distribuye heterogéneamente los ápices perdidos entre las alturas de obtención de las rodela, pero produce una distribución homogénea en secciones sucesivas.

$$H_{ij} = h_i + \frac{h_{i+1} - h_i}{2(n_i - n_{i+1})} + (j - 1) \left(\frac{h_{i+1} - h_i}{n_i - n_{i+1}} \right), \text{ i.e.}$$

$$H_{ij} = h_i + (j - 0,5) \left(\frac{h_{i+1} - h_i}{n_i - n_{i+1}} \right).$$

6.1.3 Formas para expresar el crecimiento

El crecimiento puede expresarse en términos absolutos, esto es en las unidades usadas habitualmente para expresar las variables, o en términos relativos. El crecimiento relativo, ya sea en proporción o en porcentaje, es la relación entre el crecimiento de cualquier variable y el valor de la variable en algún punto del período de crecimiento. Aunque es aplicable a cualquier variable, es más habitual para el volumen y el área basal. Son útiles para calcular la rentabilidad y realizar comparaciones. Esta manera de expresar crecimiento tiene su base en la teoría económica del interés, lo que posibilita su cálculo en términos de interés simple, interés compuesto o de interés continuo, siendo válidos sólo para períodos cortos de tiempo.

6.1.3.1 La tasa de crecimiento expresado como interés simple

En esta línea, la tasa de interés se aplica en un período de un año. Una cantidad de dinero d_0 , depositada a una tasa de interés anual i , al final de un año genera un monto total equivalente a $d_1 = d_0 + d_0 \cdot i = d_0(1+i)$. Así, teniendo los valores al inicio (d_0) y al final del período (d_1),

la tasa de interés corresponde a $i = \frac{d_1 - d_0}{d_0}$. Esto, aplicado al crecimiento de un árbol, permite

obtener la tasa de crecimiento relativo p (porcentaje) mediante

$$p = 100 \frac{ipa_y}{y}$$

donde:

ipa_y es el incremento periódico anual en la variable y , esto es el crecimiento promedio obtenido en un período de n años, el cual es determinado mediante $ipa_y = \frac{y_n - y_0}{n}$.

Es un medio para expresar el incremento de cualquier variable del árbol en relación al tamaño total de la variable al inicio del período de crecimiento

$$p = 100 \frac{ipa_y}{y_0}$$

También puede tomarse el valor medio de la variable como valor de referencia (fórmula de Pressler)

$$p = 200 \frac{ipa_y}{y_0 + y_n}$$

o el valor final de la variable (fórmula de Breymann)

$$p = 100 \frac{ipa_y}{y_n}.$$

6.1.3.2 La tasa de crecimiento expresado como interés compuesto

En este caso, la tasa de interés se aplica por más de un lapso de tiempo. Así, el valor final depende del valor inicial, incrementado en la tasa de interés por varios lapsos de tiempo consecutivos, i.e.

$$d_n = d_0(1+i)^n,$$

y la tasa de crecimiento relativo p (porcentaje) equivalente de un árbol es

$$p = 100 \left[\left(\frac{y_n}{y_0} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right].$$

6.1.3.3 La tasa de crecimiento expresado como interés continuo

En este caso se asume que el crecimiento es proporcional al tamaño alcanzado. Así

$$d_n = d_0 e^{n \cdot i},$$

y la tasa de crecimiento relativo p se obtiene con

$$p = 100 \frac{\ln \left(\frac{y_n}{y_0} \right)}{n}.$$

La tasa de crecimiento relativo p puede ser un indicador del momento oportuno para cosechar un árbol. Cuando está referido al volumen, puede compararse con la tasa de interés del mercado. Si p es más alto que la tasa de interés del mercado, es más conveniente mantener el capital creciendo que liquidarlo, sin considerar que, además, el incremento en tamaño puede permitir generar productos de más alto valor.

6.1.4 Modelos de crecimiento

Existe una amplia gama de modelos matemáticos que pueden ser utilizados para ajustar a datos de crecimiento (e.g. Pienaar y Turnbull 1973, Nokoe 1978, Shifley y Brand 1984, Zeide 1993). En su mayoría son modelos no lineales en los parámetros (Tabla 2) y deben ajustarse mediante métodos numéricos. En el ajuste se utilizan métodos iterativos, los que requieren como punto de inicio un valor aproximado de los parámetros a estimar. De todos los

parámetros de los modelos, el más fácilmente comprensible es la asíntota, esto es el valor al cual debiera tender la variable dependiente cuando la edad del individuo tiende a infinito. Ese valor puede aproximarse con facilidad al graficar la variable de interés en función de la edad.

Tabla 2. Modelos de crecimiento.

Denominación	Modelo	Primera derivada $y' = dy/dt$
Logístico	$y = \frac{k}{1 + b \cdot e^{-at}}$	$y' = \frac{kbae^{-at}}{(1 + b \cdot e^{-at})^2}$
Gompertz	$y = k \cdot b^{-a \cdot c^{-t}}$	$y' = kcb^{-cb^{-t}} (\ln b)^2 b^{-t}$
Weibull	$y = k(1 - e^{-a \cdot t^b})$	$y' = kabt^{b-1} e^{-a \cdot t^b}$
Richards	$y = k(1 - be^{-at})^n$	$y' = kanbe^{-at} (1 - b \cdot e^{-at})^{n-1}$

En esos modelos, y es el tamaño acumulado alcanzado a la edad t ; k es la asíntota, esto es el tamaño máximo posible.

Los modelos presentados en la tabla 2, así como también otros en literatura, reproducen relativamente bien la curva de crecimiento sigmoideo. Algunos de ellos, como el modelo Weibull, por ejemplo, presentan gran flexibilidad; esto permite utilizarlos para modelar el crecimiento aún en situaciones donde no es posible observar la forma típica de la curva de crecimiento (ver Fig. 4). El modelo de Weibull, debido a su gran flexibilidad, también es utilizado habitualmente para modelar distribuciones de frecuencia (ver modelación de la frecuencia diamétrica en el Capítulo sobre estructura de rodal).

Un ejemplo del ajuste del modelo Weibull a datos de crecimiento en dap, altura y volumen de un árbol se presenta en la tabla 3. Los datos básicos y las funciones ajustadas se presentan en la figura 4. Se observa que el máximo incremento corriente (*ica*) en dap y altura se alcanzó alrededor de los 15 años de edad; el incremento medio anual (*ima*) máximo se logra alrededor de los 22 años para el dap y alrededor de los 24 años para la altura. El máximo *ica* en volumen se produjo alrededor de los 27 años; el máximo *ima* en volumen se producirá pasado los 30 años de edad.

Tabla 3. Resultados del ajuste del modelo Weibull a datos de dap, altura y volumen de un árbol (*P. radiata*).

Variable	Parámetros* estimados para el modelo** $y = k(1 - e^{-(a \cdot t)^b})$			<i>recm</i>
	<i>k</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	
dap (cm)	37,3444 (1,5917)	0,0517 (0,00222)	2,0282 (0,0918)	0,8140
altura (m)	36,4436 (0,6761)	0,0478 (0,000884)	1,9217 (0,0294)	0,2356
volumen (m ³ ssc)	2,0036 (0,1283)	0,0345 (0,000880)	4,0196 (0,0892)	0,0105

*Entre paréntesis el error estándar de estimación de cada parámetro; *recm*: raíz del error cuadrático medio.

**Esta estructura del modelo Weibull permite obtener valores mayores para el parámetro *a*: note que en esta aplicación la constante toma valores pequeños; con la estructura de modelo que aparece en la tabla 2 serían aún menores, lo que complica la asignación de valores iniciales para el ajuste.

Las curvas ajustadas describen bien el comportamiento del tamaño acumulado en dap, altura y volumen. El *ica* y el *ima* presentan gran variabilidad a través del tiempo y es difícil observar una tendencia clara a partir de los datos básicos. Sin embargo, al obtener esos valores a partir

de las funciones que describen el tamaño acumulado, la tendencia de esos incrementos es evidente y es fácil detectar a partir de ellos puntos de interés, como la edad de máximo *ica* o máximo *ima*.

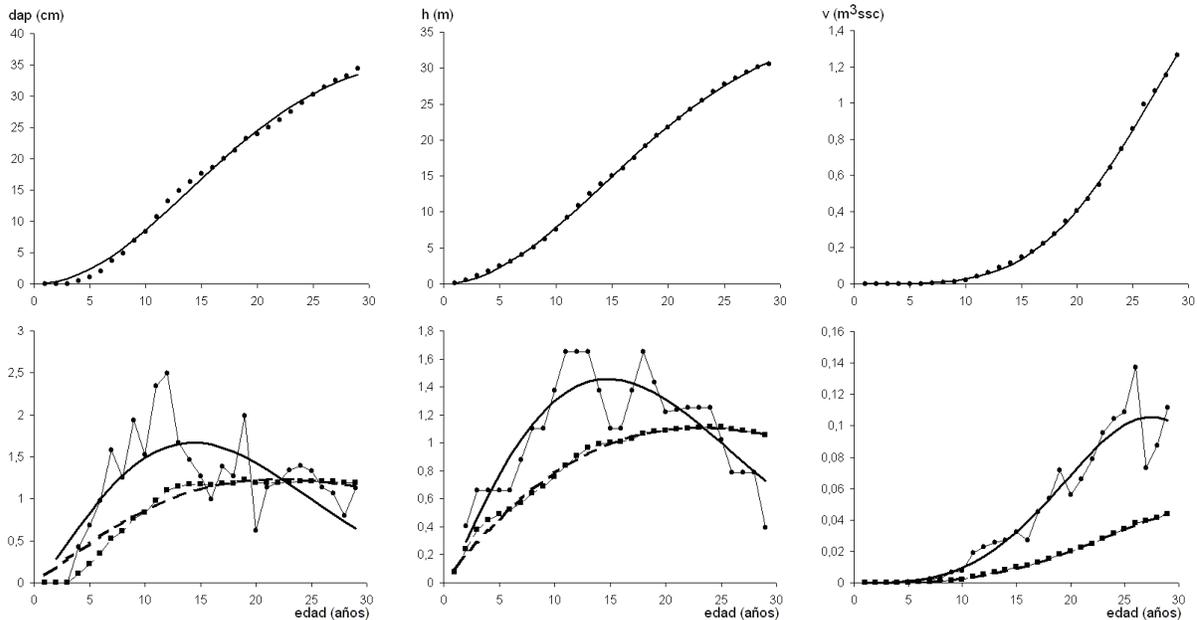


Figura 4. Parte superior: ajuste del modelo Weibull (línea continua) a datos (puntos) de dap, altura (h) y volumen (v) obtenidos mediante análisis fustal en un árbol (ver tabla 1). Parte inferior: incremento corriente anual (línea continua) e incremento medio anual (línea segmentada) para cada variable obtenidos a partir de los datos (puntos y línea delgada) y a partir de la función de tamaño acumulado respectiva (línea gruesa).

6.2 El crecimiento de rodales

El crecimiento de un rodal se define como el aumento de tamaño, peso, volumen o valor por unidad de superficie (hectárea) a través del tiempo; a partir de ésta es fácil extrapolar el crecimiento a la superficie total del rodal, si fuera necesario. Aunque el crecimiento de rodal es la resultante del crecimiento experimentado por los árboles individuales, incorpora elementos adicionales que es necesario definir. Así, se habla de *rendimiento* para señalar la cantidad (volumen, peso) de producto total o comercial cosechado por unidad de superficie; en tanto que *corta* es el volumen o número de árboles cortados periódicamente, sean estos removidos o no desde el interior del bosque; el término *mortalidad*, en cambio, se utiliza para referirse al volumen o número de árboles que se vuelven inútiles por causas naturales tales como competencia, enfermedades, catástrofes, vientos, nieve, sobremadurez, u otro; al volumen o número de árboles que alcanzan un tamaño mensurable entre dos mediciones sucesivas se le denomina *masa incorporada*.

La estructura de los rodales, expresada por ejemplo en el número de árboles por clase de dap por hectárea, cambia año tras año debido al crecimiento, la mortalidad, y la corta o aprovechamiento de los individuos. Así, la estructura de rodal se constituye en un elemento clave para el estudio del crecimiento y rendimiento de rodales y su uso en la planificación del

proceso de producción. El desarrollo de herramientas para la toma de decisiones respecto de la intensidad y frecuencia de las intervenciones silvícolas es clave para determinar, por ejemplo, el conjunto de intervenciones que produce un incremento en valor económico mayor que el interés acumulado del costo de su ejecución. Esas herramientas surgen de estudios sistemáticos del crecimiento en árboles y rodales.

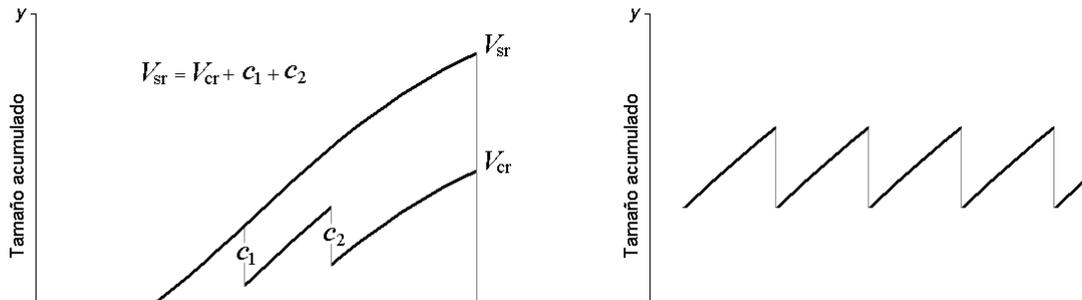


Figura 5. Crecimiento por unidad de superficie en rodales coetáneos (izquierda) y heteroetáneos (derecha). Se asume que el volumen por hectárea en un rodal no raleado (V_{sr}) podría ser igual a la suma del volumen final en el rodal raleado (V_{cr}) y lo obtenido en los raleos.



Figura 6. Distribución de frecuencia hipotética (número de árboles por hectárea) en rodales coetáneos (izquierda) y multietáneos (derecha), al inicio (línea negra) y al final de un periodo de crecimiento (línea gris oscuro), incluyendo mortalidad (área gris oscuro), corta (área gris claro) y masa incorporada (área achurada). En el rodal coetáneo se asume un tajeo por lo bajo; en el rodal heteroetáneo, la corta involucra individuos de todas las clases de dap.

Un elemento clave relacionado con el crecimiento es la densidad de rodal. Aunque en general el efecto de la densidad de rodal sobre el crecimiento en área basal o volumen es confuso dependiendo de la edad y dlu, se acepta que el rendimiento bruto total en un rodal no raleado es aproximadamente igual a la suma de lo obtenido en los raleos y el volumen remanente en el rodal raleado (ver Fig. 5). El raleo aumenta el volumen comercial de los rodales, pero su efecto sobre el incremento en volumen total no es claro; algunos autores reportan efectos positivos, esto es informan sobre aumentos en el volumen total, en tanto que otros han detectado disminuciones (ver Zeide 2001).

La determinación de la mortalidad y de la masa incorporada (ver Fig. 6) requiere de observaciones sucesivas del rodal a través del tiempo, ya sea mediante parcelas temporales o permanentes. A esa técnica se le denomina *método de remediciones*, en el cual, operando con parcelas permanentes, se reconocen dos líneas; una de ellas es el *Método de Control*,

originado en Francia hacia 1878; la otra se denomina *Inventario Forestal Continuo* y se origina alrededor de 1938 en América del Norte. La primera agrupa los datos en terreno por clase de tamaño, en tanto que la segunda mantiene registros por árbol, demandando así más recursos, pero otorgando más precisión en la determinación del crecimiento, la densidad y la mortalidad (ver Husch et al. 2003).

6.2.1 Tipos de crecimiento

El crecimiento, definido como el aumento de tamaño, peso, volumen o valor de un rodal a través del tiempo, puede definirse de varias formas alternativas, considerando los términos ya definidos. A continuación se entrega la definición de incrementos periódicos en volumen. Si se dispone del número suficiente de mediciones puede obtenerse *ipa*, *ica* e *ima*. (Note que el incremento periódico representado por I , corresponde a la integral del incremento corriente anual, el cual se representa por i).

Incremento neto (I). Este se obtiene de la diferencia entre los volúmenes al final y al inicio del período de crecimiento.

$$I = v_1 - v_0,$$

donde:

v_0 es el volumen al inicio del periodo de crecimiento,

v_1 es el volumen al final del periodo de crecimiento.

Crecimiento bruto del volumen inicial (I_b). Este se obtiene de la diferencia entre los volúmenes al final y al inicio del período de crecimiento, incluyendo la mortalidad y el volumen cortado, y descontando el volumen de la masa incorporada.

$$I_b = I + v_m + v_c - v_i,$$

donde:

v_m es el volumen de la mortalidad en el periodo,

v_c es el volumen cortado en el periodo,

v_i es el volumen de la masa incorporada en el periodo.

Crecimiento bruto del volumen inicial, incluida la masa incorporada (I_{b+i}).

Corresponde al total del incremento periódico, incluyendo la diferencia entre los volúmenes al final y al inicio del período, la mortalidad, el volumen cortado y el volumen de la masa incorporada.

$$I_{b+i} = I + v_m + v_c.$$

Crecimiento neto del volumen inicial (I_n). Es el incremento periódico neto, incluyendo el volumen cortado y deduciendo el volumen de la masa incorporada.

$$I_n = I + v_c - v_I .$$

Crecimiento neto del volumen inicial, incluida la masa incorporada (I_{n+I}). Es el incremento periódico neto, incluyendo el volumen cortado y el volumen de la masa incorporada

$$I_{n+I} = I + v_c .$$

La medición, estimación y proyección del crecimiento de un rodal es comparativamente más compleja que en un árbol individual. Para determinar el crecimiento de un rodal existen variados métodos, los que pueden agruparse en términos generales en directos e indirectos. Los métodos directos estiman el crecimiento en base a variables medidas en el mismo rodal; los indirectos, en cambio, son básicamente comparativos, esto es utilizan tablas o funciones de crecimiento o producción construidas con información recopilada en otros rodales. Específicamente aplicado al volumen, una *función de crecimiento* es un predictor del crecimiento en volumen para períodos cortos, en tanto que una *función de producción* es un predictor del volumen por unidad de superficie de rodal a una edad específica.

6.2.2 Proyección directa del crecimiento

Consiste en proyectar la tabla de rodal actual ya sea por clase de dap o agregada, en base a estimaciones del crecimiento periódico en dap. También puede incluir estimaciones de mortalidad y masa incorporada. Los resultados pueden utilizarse en la actualización de inventarios, en la planificación de prácticas de manejo y en la evaluación económica del rodal futuro.

6.2.2.1 Proyección de la tabla de rodal

El volumen futuro se estima a partir de la tabla de rodal futura, la cual se obtiene a partir de la tabla de rodal actual y datos de crecimiento en diámetro (dap) y estimaciones de la mortalidad. La información sobre crecimiento en diámetro puede obtenerse de remediciones en parcelas permanentes o temporales, a partir de muestras de incremento obtenidas con taladro de incremento o a partir de rodela (ver análisis fustal). Además de la tabla de rodal actual, requiere una función de volumen individual y medios para determinar la masa incorporada y la mortalidad. Existen tres variantes para estimar el crecimiento del rodal, las que se derivan de la forma asumida para la distribución de los árboles en cada clase de dap. En cualquiera de ellas, la deducción del volumen correspondiente a la mortalidad esperada en el período puede realizarse descontando el número de árboles moribundos de cada clase de dap de la tabla rodal actual, antes de proyectarla a futuro, o también puede realizarse en la tabla de rodal futura, pero antes de estimar la existencia (ver Husch et al. 2003).

6.2.2.1.1 Distribución discreta

Asume que todos los árboles en cada clase dap se ubican en el punto medio de la clase y que todos crecen a una tasa igual al promedio de la clase. El volumen futuro se obtiene con la frecuencia actual por clase de dap y el tamaño futuro de los árboles, esto es la marca de clase más el incremento en el período.

6.2.2.1.2 Distribución homogénea

Al igual que el método anterior, asume que todos los árboles de una clase crecen a una velocidad igual a la tasa promedio de la clase, pero considera una distribución homogénea de los árboles en cada clase de dap. Así, la distribución diamétrica futura requiere calcular una razón de movimiento para cada clase de dap actual (m_{0_i}).

$$m_{0_i} = \frac{ip_{dap_i}}{h},$$

donde:

m_{0_i} es la razón de movimiento de la i -ésima clase de dap,

ip_{dap_i} es el incremento periódico en dap en la i -ésima clase de dap,

h es la amplitud de clase.

La razón de movimiento (m_{0_i}) permite determinar el número de árboles que se mueven desde la clase i a otras clases en un periodo de crecimiento. Por ejemplo, si en la clase de dap 25 hay actualmente 14 árboles, y el incremento de la clase es 6,2 cm, considerando una amplitud de clase de 5 cm, $m_{0_{25}} = 6,2/5$, esto es $m_{0_{25}} = 1,24$; ello significa que 24% de los árboles de la clase 25 se mueven dos clases ($14 \cdot 0,24 = 3,36$) formando en el futuro parte de la clase 35; el resto de árboles de la clase 25 se mueve una clase menos, esto es $(1 - 0,24) \cdot 14 = 10,64$ árboles pertenecerán a la clase de dap 30 al final del periodo. En este caso, al ser el incremento mayor que la amplitud de clase, todos los árboles de la clase abandonarán la clase de dap en el período de crecimiento; por el contrario, si el crecimiento en el período fuese menor que la amplitud de clase, la razón de movimiento sería menor de uno y una parte de los árboles permanecería en la misma clase de dap; e.g. si el crecimiento fuera de 4 cm, $m_{0_{25}} = 4/5 = 0,8$ y la cantidad de árboles que avanza una clase de dap es $(0,8) \cdot 14 = 11,2$; la diferencia $(14 - 11,2) = 2,8$ permanece en la clase.

La fracción decimal de la razón de movimiento señala la porción de los árboles que se desplazan una clase de dap más que el entero de la razón de movimiento; el resto de los árboles de la clase original se asigna a la clase inmediatamente anterior. La frecuencia de árboles por clase de dap en la tabla de rodal futura queda constituida por los árboles que permanecen en la clase más los árboles que por efecto del crecimiento se desplazan y llegan a la clase.

6.2.2.1.3 Distribución individual

Esta opción reconoce la posición real de los árboles en cada clase de dap y utiliza el incremento en dap de cada árbol para proyectar el crecimiento. Así, cada clase de dap resume el crecimiento individual de los árboles de la clase.

6.2.2.2 Proyección de la tabla de rodal agregada

Consiste en proyectar valores por unidad de superficie del rodal. Se basa en el principio que el volumen por unidad de superficie (V) puede obtenerse directamente del producto entre el área basal (m^2/ha), la altura promedio (H) y el factor de forma promedio de los árboles (F). Así, relacionando el volumen en dos puntos en el tiempo

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{G_2 H_2 F_2}{G_1 H_1 F_1},$$

se obtiene

$$V_2 = V_1 \frac{G_2 H_2 F_2}{G_1 H_1 F_1},$$

relación en la cual el subíndice 1 se refiere al rodal actual y el 2 al rodal futuro.

Si se asume que el factor de forma se mantiene constante a través del tiempo, la proyección requiere sólo de estimaciones del incremento en altura y en área basal. En rodales coetáneos, H_2 se obtiene a partir de curvas de índice de sitio, en tanto que en rodales heteroetáneos la altura promedio se mantiene relativamente constante ($H_1 \approx H_2$). Así, el único elemento faltante para la proyección es el área basal futura; esta puede obtenerse, por ejemplo, a partir de muestras de incremento en diámetro mediante $G_2 = G_1 + I_{G_b}$, siendo el crecimiento bruto el área basal (I_{G_b}) determinado mediante

$$I_{G_b} = Fe \cdot \frac{\sum_{i=1}^n d_{2cc_i}^2 \left(\sum_{j=1}^m d_{2sc_j}^2 - \sum_{i=1}^m d_{1sc_j}^2 \right)}{12732,395 \sum_{j=1}^m d_{2sc_j}^2},$$

donde:

$d_{2cc_i}^2$ es el dap actual con corteza (cm) del i -ésimo árbol medido en la parcela de superficie a (m^2),

$d_{2sc_i}^2$ es el dap actual sin corteza (cm) del j -ésimo árbol medido en la muestra de incremento,

$d_{1sc_i}^2$ es el dap inicial sin corteza (cm) del j -ésimo árbol medido en la muestra de incremento,

n es el número total de árboles medidos en la parcela,

m es el número de árboles medidos en la parcela en la muestra de incremento,
 Fe es el factor de expansión a hectárea ($Fe = 10000 / a$).

6.2.3 Métodos indirectos para estimar el crecimiento

Esta línea de estimación asume que el crecimiento del rodal seguirá un patrón predecible a partir de una función de rendimiento, la que ha sido desarrollada con información proveniente de otros rodales. El método consiste en obtener información básica del rodal a proyectar y utilizar la función para estimar el crecimiento o rendimiento del rodal.

Existen numerosos modelos predictores del rendimiento, que varían en cuanto a la población objeto y en la complejidad matemática. Así, existen modelos para bosques naturales coetáneos y heteroetáneos, y para plantaciones. En relación a la complejidad matemática, el modelo más simple puede estar constituido por una función; otros más complejos incorporan sistemas de ecuaciones. Algunos modelos entregan predicciones agregadas por unidad de área, en tanto que otros llegan a estos valores a partir de funciones según clases de tamaño, incorporan una función de distribución de dap (e.g. la distribución Weibull) o a partir de árboles individuales e índices de competencia. La evolución del rendimiento también puede ser resumida en tablas, generando lo que se denominan *modelos tabulares* o *tablas de rendimiento*.

Dependiendo del modelo a utilizar, la predicción del crecimiento puede realizarse en forma implícita o explícita. La primera involucra la predicción de la tabla de rodal mediante alguna función de distribución de probabilidad (e.g. Weibull), en la que los parámetros respectivos son estimados a partir de las dimensiones promedio de los árboles y la densidad de rodal (e.g. $\alpha, \beta, \gamma = f(H, N)$); el volumen por ha se obtiene mediante una función de volumen individual, a partir de la altura promedio por clase de dap ($\bar{h} = f(N, t, dap_{m\acute{a}x})$) y la frecuencia por clase de dap obtenida con la función de distribución de probabilidad. La segunda predice el crecimiento agregado, en función de la calidad de sitio, edad, y densidad ($V = f(S, t, G)$).

En el caso de utilizar una tabla de rendimiento, las estimaciones realizadas a partir de la tabla se corrigen de acuerdo a la densidad relativa del rodal actual. Por ejemplo, el incremento en volumen de un rodal particular se obtiene de

$$I_V = P(V_{2T} - V_{1T}),$$

relación en la V_{2T} es el volumen que entrega la tabla para la edad futura del rodal y P es la densidad relativa del rodal en análisis, la cual puede obtenerse directamente de la relación entre el volumen actual del rodal (V_{1R}) y el volumen que entrega la tabla para la edad actual del rodal (V_{1T}), esto es $P = V_{1R} / V_{1T}$.

6.2.3.1 Tablas de rendimiento

Una tabla de rendimiento entrega el volumen y otras características de rodal por clase de edad, clase de sitio, especie y densidad. Con información de rodales coetáneos se han desarrollado tablas de rendimiento normal, empíricas y de densidad variable, las que varían en la densidad de los rodales tomados como base para su construcción.

Una tabla de rendimiento normal se construye en base a muestras de rodales con densidad completa. A ese nivel de densidad se le denomina *normal*. El concepto asume que en esas condiciones de densidad, los árboles están aprovechando en un cien por ciento los recursos del sitio. La tabla entrega valores de altura y dap promedio, número de árboles, área basal y volumen por unidad de superficie, en función del índice de sitio y la edad del rodal. Su utilización requiere conocer el índice de sitio, la densidad relativa y la edad del rodal a proyectar.

Los otros dos tipos de tablas eliminan la subjetividad en la determinación de la *normalidad* de los rodales. Así, la tabla de rendimiento empírica está basada en muestras de rodales con densidad promedio creciendo en el área de interés. En las tablas de rendimiento de densidad variable, la densidad es usada como variable independiente. En su construcción se utiliza información de rodales con diferentes niveles de densidad. En este caso, cada tabla se desarrolla para un tipo particular de manejo.

6.2.3.2 Construcción de tablas de rendimiento

El crecimiento es una función de muchos factores de sitio y de rodal en interacción. En rodales coetáneos, la especie, edad y densidad de rodal, y la calidad de sitio determinan el crecimiento. La densidad se expresa en base al área basal, al número de árboles por hectárea o mediante algún índice de densidad de rodal (*Idr*). En rodales heteroetáneos, esto es aquellos que presentan entremezclados individuos de todas las edades, el crecimiento es determinado por la especie, la densidad de rodal y la calidad de sitio.

La base ideal de datos para la construcción de tablas de rendimiento son registros completos de rodales desde el establecimiento hasta la cosecha, lo que constituye una serie de crecimiento real. En la práctica, a menudo se usa información de parcelas temporales, de un rango amplio de sitios y edades, constituyendo una serie de crecimiento abstracta. Las parcelas permanentes son el punto medio entre esos extremos. Al medirse a intervalos de tiempo fijos, la información que generan se acerca a la serie real, denominándosele por ello como serie de crecimiento aproximada.

6.2.3.2.1 Funciones de mortalidad

Las funciones de mortalidad requieren observaciones secuenciales del número de árboles por unidad de superficie. Para estimar el número de árboles vivos, lo normal es ajustar funciones en diferencia, en las que el número de árboles por unidad de superficie a una edad específica

se expresa en función del número de árboles en el período anterior, esto es $N_2 = f(N_1, t_1, t_2)$. No está claro si la mortalidad depende de la calidad de sitio.

El número de árboles vivos es una función decreciente de la edad del rodal y puede ser representado mediante funciones de variada complejidad. Tomando el modelo $N_i = e^{k \cdot t_i}$, y evaluándolo en dos puntos en el tiempo $N_1 = e^{k \cdot t_1}$, $N_2 = e^{k \cdot t_2}$, dividiendo N_1 por N_2 y reacomodando términos se obtiene la función en diferencia siguiente

$$N_2 = N_1 e^{k(t_2 - t_1)},$$

donde:

N_1 es el número de árboles vivos por unidad de superficie a la edad t_1 ,

N_2 es el número de árboles vivos por unidad de superficie a la edad t_2 .

Un modelo algo más complejo es $N_i^{b_1} = b_2 t_i^{b_3}$. Evaluándolo en las edades t_1 y t_2 se obtiene $N_1^{b_1} = b_2 t_1^{b_3}$ y $N_2^{b_1} = b_2 t_2^{b_3}$, respectivamente; luego, restando N_1 de N_2 y reacomodando términos, se obtiene la ecuación en diferencia

$$N_2 = \left[N_1^{b_1} + b_2 (t_2^{b_3} - t_1^{b_3}) \right]^{1/b_1}.$$

6.3 Modelos simuladores del crecimiento

La simulación es una técnica usada para tomar decisiones. En general, implica reproducir el comportamiento de un sistema mediante un modelo que emula el sistema real, y operar el modelo para obtener soluciones alternativas; así, permiten identificar los niveles óptimos de las variables para un determinado propósito. En el área forestal, el objetivo de los modelos simuladores es predecir el crecimiento y producción de rodales en diversas condiciones de sitio y sujetos a diferentes intervenciones silviculturales. De esta manera, entre otras aplicaciones, permiten determinar la disponibilidad futura de madera, evaluar tratamientos silviculturales alternativos y valorar bosques en pie.

El crecimiento y rendimiento por unidad de superficie de rodal depende de una serie de factores ambientales bióticos y abióticos. El rodal también puede ser sometido a intervenciones silvícolas como control de malezas, fertilización, poda y raleo, las que pueden variar en oportunidad, intensidad y frecuencia. Así, la combinación de esos factores genera infinitas alternativa de manejo, las que sumadas al largo ciclo de producción forestal, limitan severamente las posibilidades de aprender por experimentación directa. Así, surge la necesidad de modelos matemáticos capaces de predecir el efecto de las intervenciones silvícolas en rodales establecidos en sitios característicos.

En lo relativo al crecimiento y rendimiento de rodales se distinguen tres enfoques de simulación definidos según los parámetros primarios y unidades básicas de simulación. El primero asume que la unidad básica de simulación es el rodal, no requiriendo ninguna información del árbol individual. Las dos opciones restante consideran que la unidad básica de simulación es el árbol individual; se diferencian en si consideran o no la distancia entre árboles y otras variables como parámetros necesarios para determinar el nivel de competencia. El resultado de estos enfoques son modelos agregados de rodal, por clase dap y modelos para árboles individuales. Los últimos analizan el estado del árbol particular en el rodal, y asumen que el crecimiento depende, entre otros, de factores genéticos, del microclima y de la competencia ejercida por los árboles vecinos.

6.3.1 Definiciones

Un *sistema* es un conjunto de elementos unidos por algún grado de interacción que les confiere cualidades superiores a las de los elementos individuales. En el caso forestal, el rodal es el sistema a modelar. El *estado del sistema* es la condición en que se encuentran los elementos que conforman el sistema en un punto del tiempo, e.g. área basal, número de árboles por hectárea, dap promedio, altura dominante, etc. Todos aquellos elementos y sistemas que residen fuera del sistema de interés y que interactúan con éste, e.g. las condiciones de mercado (tasas de interés, valores de los productos, valores de insumos, restricciones legales, etc.) constituyen el *entorno del sistema*.

Un *modelo* es una representación de un sistema. Los modelos matemáticos son los más usados en forestal para relacionar cuantitativamente variables de rodal o árboles individuales. Todo modelo es menos complejo que la realidad, atendiendo a razones de simplicidad, o porque algunas variables del sistema se relacionan con otras variables en el modelo, son difíciles de medir, o porque no se pueden identificar.

Los modelos matemáticos están constituidos por variables y relaciones funcionales. Entre las primeras están las *variables de estado*, que caracterizan a elementos del sistema en un punto del tiempo, e.g. el área basal (m^2/ha), el número de árboles (n/ha) y la altura promedio. La variable de estado puede ser *endógena*, o *exógena*; el primer tipo es generada por el modelo (e.g. volumen (m^3/ha), dap promedio), puede ser *dinámica* o *predictora*, esto es se obtiene en función del tiempo, o *derivada*, siendo en este caso independientemente del tiempo; las del segundo tipo son variables que ingresan como dato básico al modelo (edad, altura dominante). Los modelos también incorporan *variables de control*, las que reciben esa denominación porque permiten decidir el momento para efectuar intervenciones (e.g. raleo); este grupo incluye todas las variables que pueden ser usadas como indicadores de la densidad de rodal (e.g. área basal y número de árboles por unidad de superficie). Las variables que caracterizan los resultados de una decisión implementada sobre el sistema se denominan *variables de respuesta* (e.g. volumen, área basal por unidad de superficie). En cuanto a las relaciones, las hay de transición y de transformación. Las primeras describen el comportamiento del sistema a través del tiempo, determinando, por ejemplo, el número de árboles, la altura promedio y el

área basal por unidad de superficie en cualquier edad del rodal; las segundas, en cambio, son independientes del tiempo y permiten sólo modificar las unidades de las variables de respuesta. Por ejemplo, el dap promedio de rodal a una edad específica puede obtenerse a partir del área basal y del número de árboles por hectárea; el volumen obtenido en m³sc puede transformarse a pulgadas, pies madereros u otra unidad.

Los modelos matemáticos pueden ser determinísticos o estocásticos. Los primeros contemplan relaciones entre variables sin incorporar elementos de azar. Así, a partir del estado inicial se puede conocer el estado en cualquier punto futuro y este estado es único. Todo el sistema depende del estado inicial; definido éste se conocen todos los estados posteriores del sistema en el tiempo. Los segundos, también conocidos como probabilísticos o estadísticos, relacionan variables en términos de distribuciones de probabilidad. El estado en un momento del tiempo depende del estado anterior sin importar lo ocurrido antes. Cada estado depende del estado inmediatamente anterior y sólo hay probabilidades de ocurrencia.

6.3.2 Construcción de un Modelo Simulador

La construcción de un modelo simulador del crecimiento requiere información histórica abundante proveniente de parcelas permanentes (ver e.g. CONAF 1979, 1981).

La primera etapa en la construcción de un modelo es la identificación del problema. Luego se pasa a definir el sistema, identificando variables y relaciones funcionales. En la etapa siguiente se formula el modelo, dándole la estructura adecuada según las variables y funciones a considerar. Luego se preparan los datos disponibles, planificando la recopilación de información adicional si fuera necesario. Con una base adecuada, puede procederse a la construcción del modelo, realizando el ajuste de todas las funciones requeridas e implementando el sistema con ellas. Luego se procede a realizar pruebas para comprobar la validez del modelo construido, identificando las causas de problemas si los hubiera; en este caso, quizás sea necesario reformular el modelo y ejecutar nuevamente todas las fases ya descritas. Una vez que el modelo es aceptado como válido se procede al diseño de experimentos de simulación, se realizan las simulaciones y se interpretan los resultados.

En la modelación se utilizan normalmente tasas de crecimiento. Así, el cambio por unidad de tiempo de un rodal puede representarse mediante

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(X, u),$$

donde:

$\frac{\partial x}{\partial t}$ es el cambio ocurrido en el rodal por unidad de tiempo,

X es el estado del rodal en la edad t ,

u son las intervenciones silviculturales realizadas durante el periodo.

Integrando la función de tasas de cambio se obtiene la función de transición global, la que señala el estado del rodal al final de un periodo

$$\int_{t_0}^t \frac{\partial x}{\partial t} = X(t) = F[X(t_0), u, t - t_0],$$

donde:

$X(t)$ es el estado del rodal en la edad t ,

$X(t_0)$ es el estado del rodal en la edad t_0 ,

$t - t_0$ es la longitud del periodo de tiempo.

Así, es evidente la necesidad de representar adecuadamente el estado inicial del rodal porque de éste depende el estado en el periodo inmediatamente posterior. En modelos agregados de rodal, el vector de estado adecuado puede estar representado mediante la altura dominante (H), el área basal (G) y el número de árboles por unidad de superficie (N).

$$\frac{\partial H}{\partial t} = f_1(H), \quad \frac{\partial G}{\partial t} = f_2(H, G), \quad \frac{\partial N}{\partial t} = f_3(H, G, N).$$

Cualquier otra variable de interés (e.g. dap promedio (\bar{d}), volumen (V)) se obtiene a partir de esas variables de estado

$$\bar{d} = g_1(G, N), \quad V = g_2(H, G, \bar{d}).$$

Referencias

- Biging, G.S. and L.C. Wensel. 1988. The effect of eccentricity on the estimation of basal area and basal area increment of coniferous trees. *For. Sci.* 34(3):621-633.
- CONAF. 1979. Documento de trabajo N° 30.
- CONAF. 1981. Documento de trabajo N° 36.
- Dyer, M.E. and R.L. Bailey. 1987. A test of six methods for estimating true heights from stem analysis data. *For. Sci.* 33(1):3-13.
- Fabbio, G., M. Frattegiani, and M. Manetti. 1994. Height estimation in stem analysis using second differences. *For. Sci.* 40(2):329-340.
- Husch, B., T.W. Beers, and J. A. Kershaw, Jr. 2003. *Forest mensuration*, 4th edition, John Wiley & Sons, USA. 443p.
- Nokoe, S. 1978. Demonstrating the flexibility of the Gompertz function as a yield model using mature species data. *Commonw. For. Rev.* 51(1):35-42.
- Pienaar, L.V. and K.J. Turnbull. 1973. The Chapman-Richards generalization of Von Bertalanffy's growth model for basal area growth and yield in even-aged stands. *For. Sci.* 19(1):2-22.
- Rayner, M.E. 1991. Estimation of true height from karri (*Eucalyptus diversicolor*) stem analysis data. *Aust. For.* 54(1-2):105-108.
- Shifley, S.R., and G.J. Brand. 1984. Chapman-Richards growth function constrained for maximum tree size. *For. Sci.* 30(4):1066-1070.
- Zeide, B. 1993. Analysis of growth equations. *For. Sci.* 39(3):594-616.

Zeide, B. 2001. Thinning and growth: A full turnaround. *J. For.* 99(1):20-25.

7 Estructura y densidad de rodales

Los conceptos de *estructura* y de *densidad* de rodal están estrechamente relacionados. El primero se refiere a la distribución de especies y tamaños de los árboles en un área forestal, en tanto que el segundo se relaciona con el grado en que un sitio está siendo utilizado por los árboles. Ese grado de ocupación depende, naturalmente, del número, tamaño y arreglo de los árboles en terreno.

7.1 Estructura de rodal

La *estructura de rodal* se refiere a la distribución de especies y tamaño de los árboles en un área forestal. Habitualmente se evalúa a partir de la distribución de frecuencia por clase de tamaño. Al observar la distribución de frecuencia por clase de diámetro a la altura del pecho (dap) se reconocen dos estructuras típicas. En un extremo están los rodales coetáneos, conformados por árboles de aproximadamente la misma edad; en estos rodales, la distribución diamétrica es aproximadamente normal (Fig. 1). En el otro extremo están los rodales heteroetáneos, conformados por árboles que varían ampliamente en edad y tamaño. La forma típica de la distribución diamétrica de un rodal multietáneo, esto es un rodal en que se entremezclan todas las edades posibles, es la exponencial negativa, la que también suele mencionársele como *J-invertida*.

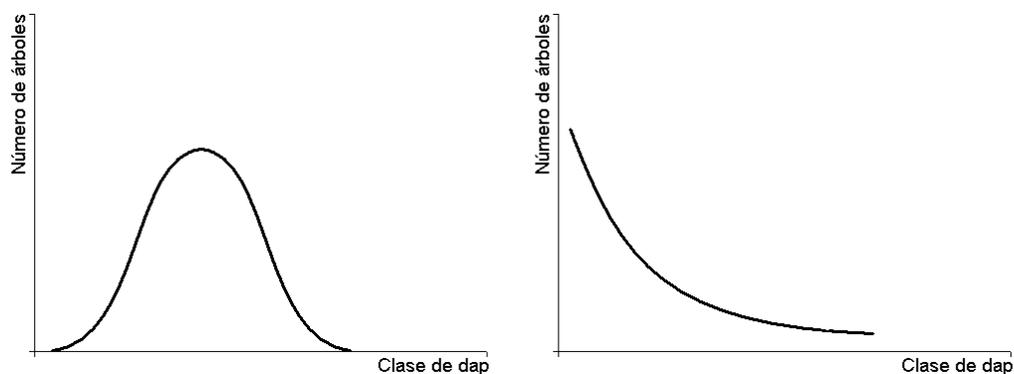


Figura 1. Distribuciones diamétricas típicas de rodales coetáneos (izquierda) y heteroetáneos (derecha).

7.1.1 Modelación de la distribución diamétrica

Existe una gama de funciones útiles para representar la distribución de frecuencias por clase de tamaño. La dimensión más común para representar el tamaño de los árboles es el dap, siendo la función de distribución de probabilidad de Weibull la más utilizada para modelar esta distribución.

7.1.1.1 La distribución Weibull

La Weibull es una función muy flexible, permitiendo modelar una gran variedad de formas de distribuciones suaves unimodales, desde la exponencial negativa hasta normales con o sin sesgo (ver Fig. 2). De la función Weibull se conocen expresiones con dos y tres parámetros, las que a su vez tienen dos formas generales, esto es la función de densidad de probabilidad (fdp) y la función de distribución de probabilidad acumulada (fda).

La fdp define la cantidad de densidad de probabilidad asociada con cada valor específico de la variable aleatoria continua x . La fda de x da la probabilidad de ocurrencia de un valor menor o igual a x .

La fdp Weibull de tres parámetros es

$$f(x) = \left(\frac{c}{b} \right) \left(\frac{x-a}{b} \right)^{c-1} e^{-\left(\frac{x-a}{b} \right)^c},$$

donde:

$f(x)$ es la densidad de probabilidad correspondiente al valor x de la variable aleatoria,
 $a, b, y c$, respectivamente, son los parámetros de ubicación, escala y forma de la función ($x \geq a, b > 0, c > 0$),
 e es la base de los logaritmos naturales.

Los parámetros a y b deben ser siempre positivos, en tanto que la variable x puede tomar cualquier valor. Al modelar la distribución diamétrica, el valor mínimo posible para x , y por consiguiente para el parámetro a , es 0 (cero).

La integral de la fdp genera la frecuencia relativa acumulada y otorga la probabilidad de ocurrencia de un valor menor o igual a x . La fda para la distribución Weibull de tres parámetros es

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-a}{b} \right)^c}.$$

En la distribución Weibull de dos parámetros, el parámetro de ubicación a es igual a cero ($a = 0$). Así, la fdp es

$$f(x) = \left(\frac{c}{b} \right) \left(\frac{x}{b} \right)^{c-1} e^{-\left(\frac{x}{b} \right)^c},$$

y la fda respectiva es

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{b} \right)^c}.$$

En la modelación de la distribución diamétrica mediante la función Weibull es habitual ajustar la función de distribución acumulada, cuya estructura es más simple que la función de densidad de probabilidad. El ajuste mediante el método de mínimos cuadrados no lineales requiere obtener la frecuencia diamétrica acumulada por unidad de superficie (ha) en clases de amplitud 1 (uno). El ajuste también puede realizarse mediante el método de máxima verosimilitud; en este caso no se requiere tabular la información.

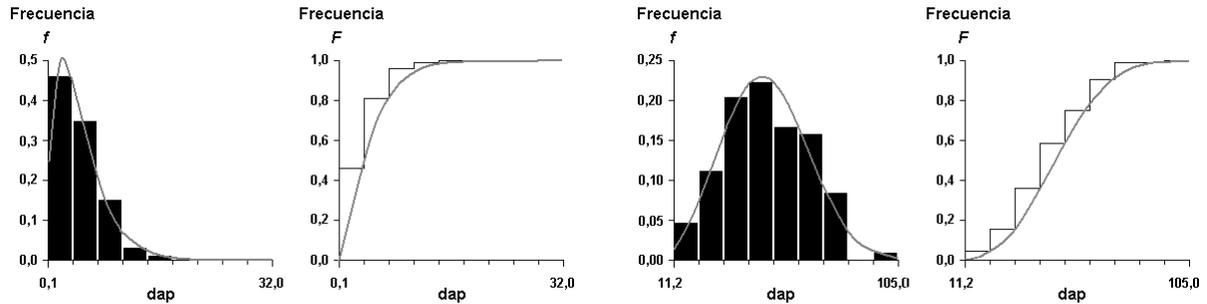


Figura 2. La función de distribución de probabilidad Weibull de tres parámetros ajustada a distribuciones diamétricas. Izquierda, monte bajo de *Eucalyptus globulus* ($a=0,090$; $b=4,715$; $c=1,293$); derecha rodal coetáneo de *Pinus radiata*; $a=5,176$; $b=50,028$; $c=2,825$). Los parámetros fueron estimados mediante el método de máxima verosimilitud. Se observan las curvas fdp y fda obtenidas y los datos originales respectivos (histogramas y ojivas).

Una vez estimados los parámetros de la función, la frecuencia absoluta por unidad de superficie en la clase de dap x , considerando una amplitud de clase h , se obtiene mediante la relación siguiente, la cual es válida para la función Weibull de dos y tres parámetros

$$N_x = N \cdot [F(x + 0,5h) - F(x - 0,5h)] = N \cdot \left[e^{-\left(\frac{x-0,5h}{b}\right)^c} - e^{-\left(\frac{x+0,5h}{b}\right)^c} \right]$$

donde:

N_x es la frecuencia absoluta por unidad de superficie (n/ha) en la clase de dap x ,

N es la frecuencia absoluta total acumulada por unidad de superficie (n/ha).

7.1.2 Rodales coetáneos

Un rodal coetáneo se origina en un período relativamente corto, por lo que está conformado por árboles relativamente similares en edad y tamaño. Así, la distribución de frecuencias diamétricas es aproximadamente normal, y es fácil de modelar mediante la función de distribución de probabilidad de Weibull (ver Fig. 2).

7.1.3 Rodales heteroetáneos

7.1.3.1 El concepto de rodal heteroetáneo balanceado

Un rodal heteroetáneo, debido a su origen continuo, contiene entremezclados árboles de variadas edades y tamaños. La distribución diamétrica es irregular en áreas pequeñas, en tanto

que en áreas grandes se observa, en una forma más o menos definida, la distribución exponencial negativa (*J-invertida*). Cuando la distribución de frecuencias es exactamente representada mediante la *J-invertida* se habla de rodal (bosque) *heteroetáneo balanceado*.

La silvicultura heteroetánea tiene una tradición larga en diversas regiones del mundo. En varias regiones de Europa es una práctica generalizada desde fines del siglo XIX. En América su origen se remonta a inicios del vigésimo siglo. Antecedentes específicos sobre silvicultura heteroetánea se encuentran en Baker et al. (1996) y Johnson et al. (2002).

La meta de la silvicultura heteroetánea es generar y mantener rodales heteroetáneos para un flujo sostenido y constante de productos del bosque. Mantener la condición heteroetánea requiere intervenciones silviculturales periódicas para cosechar la producción de madera y controlar la estructura y composición de especies de los rodales. Las intervenciones promueven la regeneración y facilitan su integración en el dosel superior, la que debe ser suficiente para sustituir los árboles que mueren o que se cosechan regularmente, y mantener niveles deseados de densidad, rendimiento y calidad de árboles en el rodal. Las intervenciones deben ocurrir por lo menos tres veces en el intervalo de tiempo que corresponde a la edad de los árboles más viejos conservados en el rodal. Así, un rodal también se define como heteroetáneo cuando contiene por lo menos árboles de tres clases de edad, entremezclado en la misma área. Los rodales heteroetáneos se pueden también formar por grupos coetáneos de árboles, pero los grupos son tan pequeños que es obviamente difícil determinar sus límites en terreno.

La selección de árboles individuales y la selección de árboles en grupo son los dos métodos silviculturales que se utilizan en silvicultura heteroetánea. En la selección de árboles individuales, los árboles se seleccionan para la cosecha en base a sus características individuales, como la forma, calidad, tasa de crecimiento, madurez financiera, competencia con árboles más jóvenes y más vigorosos, y riesgo de mortalidad. Por el contrario, la selección de grupos se concentra en la condición agregada de grupos pequeños de árboles. La regulación de los bosques es alcanzada por el control periódico de la estructura y de la densidad del rodal, donde el dosel superior nunca se remueve totalmente. El intervalo de tiempo entre las intervenciones se llama *ciclo de corta*.

El volumen de madera cosechado al final de cada ciclo de corta varía en función de la estructura del rodal. El rodal heteroetáneo puede adquirir una amplia gama de distribuciones diamétricas (véase e.g. Mitscherlich 1952), desde *balanceadas* hasta *desbalanceadas*. Las distribuciones diamétricas balanceadas presentan una declinación continua y suave en el número de árboles en las clases de diámetro mayor; las distribuciones desequilibradas, por el contrario, pueden asumir variadas formas, con variación irregular de la frecuencia entre clases de dap sucesivas.

La distribución ideal del dap en rodales heteroetáneos se asume es balanceada, porque ésta podría generar un volumen constante de productos, cuando después de cada ciclo de corta se

restaura la distribución ideal del dap. Esta distribución ideal del dap es definida matemáticamente por la función exponencial negativa. Esta es la función más frecuentemente utilizada para la descripción de una distribución equilibrada del dap.

La meta de modelar la distribución ideal del dap mediante la función exponencial negativa es guiar la cosecha en rodales heteroetáneos. La cosecha periódica remueve solamente los árboles excedentes del número ideal en cada clase de dap. El déficit, que podría aparecer en algunas clases de dap, puede ser compensado conservando más árboles que el número ideal en las clases de dap con excedentes. En principio se asume que dentro de cada rodal la función exponencial negativa en una cierta forma es silviculturalmente estable y sostenible. Esto no necesariamente significa que la distribución se presentaría naturalmente y seguiría siendo estable en ausencia de intervenciones silviculturales, sino que la distribución es sostenible bajo del sistema silvícola impuesto.

Los bosques heteroetáneos con distribución diamétrica exponencial negativa son comunes (véase e.g. Mitscherlich 1952; Johnson et al. 2002, p.338-340). Cuando esta distribución es equilibrada, entre sucesivas clase de dap existe un cuociente constante (q) (véase e.g. Buongiorno y Mitchie 1980; Virgilietti y Buongiorno 1997; Knoke 1998; Rautiainen 1998). Este cuociente, también llamado *tasa de agotamiento*, define la forma de la curva (su "inclinación" o "aplanamiento") y posibilita el cómputo del número ideal de árboles en cada clase de dap para producir un nivel requerido de densidad de rodal. El resultado es una estructura diamétrica heteroetánea balanceada.

La generación de una curva ideal requiere definir no solamente un gradiente o forma (q), sino también la densidad residual del rodal (D_R) y el rango de dap a través del cual calcular la densidad residual del rodal. Tradicionalmente, se determina el árbol más grande que permanece en pie después de la cosecha. Este diámetro (D) depende de la especie, de la calidad de sitio, de los objetivos de manejo y de otros factores (Johnson et al. 2002, p.342).

Debido a que la generación de la curva ideal requiere definir el nivel residual de densidad de rodal (D_R), el diámetro remanente máximo (D) y la tasa de agotamiento (q), se puede hablar del desarrollo de una curva ideal restringida. Pero la puesta en práctica de la curva necesita flexibilidad. Así, el orden siguiente de prioridades se puede definir para la aplicación de la curva ideal: (1) mantener la densidad residual objetivo; (2) los árboles más grandes que el diámetro remanente máximo se cortan, a menos que sean necesarios para lograr la densidad objetivo; y (3) la distribución de dap residual debe acercarse tanto como sea posible al q definido. Al final se realizan ajustes para las clases de dap con déficit, manteniendo árboles adicionales en las clases con excedentes.

7.1.3.2 Generación de una distribución balanceada del dap

La distribución del dap de un rodal heteroetáneo balanceado puede ser representada mediante la relación

$$N_i = k_0 e^{-k_1 d_i}, \quad [1]$$

donde N_i es el número de árboles en la i -ésima clase de dap, d_i (cm) es el punto medio de la i -ésima clase de dap, k_0 es el intercepto y k_1 representa la tasa a la cual el número de árboles disminuye entre clases de dap sucesivas.

La ecuación [1] se puede también representar como una serie geométrica con un cociente q entre clases de dap³ sucesivas, el cual se calcula mediante

$$q = N_{i+1} / N_i, \quad [2]$$

donde N_i es el número de árboles en la i -ésima clase de dap y N_{i+1} es el número de árboles en la clase de dap más pequeña siguiente.

Substituyendo N_{i+1} y N_i de la ecuación [1] en la ecuación [2] y con las marcas de clase d_i y $d_i - h$ de la clase de dap i e $i + 1$, respectivamente, se obtiene

$$q = e^{k_1 h}. \quad [3]$$

Así, q depende de h (cm), la amplitud de la clase de dap. De la ecuación [3] es obvio que el valor $q^{1/h}$ es constante para una curva dada, es decir $q^{1/h} = e^{k_1}$, de modo que el valor q para una curva con un h dado, puede servir para computar el valor q' para otra curva con un h' específico mediante $q' = q^{h'/h}$. De la ecuación [3] es también obvio que el parámetro k_1 de la ecuación [1] se puede computar mediante

$$k_1 = \ln(q) / h. \quad [4]$$

Con $N_{i+1} = qN_i$ (según la ecuación [2]) y un valor específico de q , puede calcularse el número de árboles en cada clase de dap, es decir $N_1, N_1q, N_1q^2, N_1q^3$, y así sucesivamente. En general, es válido

$$N_i = N_1 \cdot q^{i-1}, \quad [5]$$

donde N_1 es el número de árboles en la primera clase de dap (la más grande). Eso significa que la distribución entera del dap depende de q y de N_1 . Además, con D_1 , el punto medio de la clase más grande de dap, el parámetro k_0 de la ecuación [1] es dado por

³ Aquí se asume que $i=1$ es la clase de dap mayor.

$$k_0 = N_1 e^{k_1 D_1} . \quad [6]$$

Así, con D , el dap del árbol más grande⁴ de la distribución ideal del dap, y un valor específico de q , falta solamente el cómputo del N_1 para lograr un nivel definido de densidad residual de rodal (D_R), y la distribución ideal del dap sería ya alcanzable mediante las ecuaciones [5] o [1]. Hay actualmente por lo menos tres caminos para desarrollar una curva de distribución de dap ideal. Brender (1973) asume el valor de q y calcula el número de árboles en la clase de dap más grande (N_1), para obtener una distribución del dap con un área basal específica. La distribución restante se computa en base a q y N_1 mediante la ecuación [5]. Moser (1976) calcula el parámetro k_0 de la ecuación [1], que es conveniente para cierta densidad de rodal residual. La distribución de frecuencia es computada mediante la ecuación [1], donde k_1 es calculado mediante la ecuación [4]. Otros autores (e.g. Guldin 1991) asumen $N'_1 = 1$, calculan la distribución del dap mediante la ecuación [5], y computan el área basal B' que esa distribución produce. Los valores de la distribución son multiplicados por el factor B/B' para alcanzar el área basal objetivo B y la distribución de frecuencia ideal. En los párrafos siguientes se describe el desarrollo de una curva ideal en base al cómputo de N_1 para un nivel definido de densidad de rodal residual.

Las medidas de la densidad que son aplicables a los rodales heteroetáneos se pueden representar mediante la fórmula

$$D_R = b_1 \sum_{i=1}^c N_i + b_2 \sum_{i=1}^c N_i d_i + b_3 \sum_{i=1}^c N_i d_i^2 , \quad [8]$$

donde d_i y N_i se han definido previamente, c es el número de clases de dap, y los coeficientes b_1 , b_2 , y b_3 , con valores convenientemente especificados, generan el área basal, la razón de área por árbol, ó el factor de competencia de copas (véase Moser 1976; Johnson et al. 2002, p.343). Los coeficientes b_i para la razón de área por árbol y el factor de competencia de copas se especifican normalmente para especies individuales o grupos de especies, mientras que la expresión para el área basal es independiente de la especie (Moser 1976).

Insertando la ecuación [5] en la ecuación [8] se obtiene

$$D_R = N_1 \left(b_1 \sum_{i=1}^c q^{i-1} + b_2 \sum_{i=1}^c q^{i-1} \cdot d_i + b_3 \sum_{i=1}^c q^{i-1} \cdot d_i^2 \right) , \quad [9]$$

de modo que N_1 se determina con

⁴ $D = D_1 + \frac{1}{2}h$.

$$N_1 = \frac{D_R}{b_1 \sum_{i=1}^c q^{i-1} + b_2 \sum_{i=1}^c q^{i-1} \cdot d_i + b_3 \sum_{i=1}^c q^{i-1} \cdot d_i^2},$$

y puede ser definido como

$$N_1 = \frac{D_R}{k_D}, \quad [10]$$

con

$$k_D = b_1 \sum_{i=1}^c q^{i-1} + b_2 \sum_{i=1}^c q^{i-1} \cdot d_i + b_3 \sum_{i=1}^c q^{i-1} \cdot d_i^2. \quad [11]$$

Así, k_D es el parámetro clave para el cómputo de N_1 y de la distribución diamétrica que genera un nivel definido de densidad de rodal. Cuando se fija el área basal residual objetivo B (m^2/ha), los parámetros b_i toman los valores $b_1=0$, $b_2=0$, y $b_3=\pi/40000$, y la ecuación [11] se reduce a

$$k_D = \frac{\pi}{40000} \sum_{i=1}^c q^{i-1} \cdot d_i^2. \quad [11a]$$

7.2 Densidad

Los organismos son afectados por las condiciones en que viven y por los recursos que obtienen del ambiente circundante. Los individuos de una misma especie tienen requerimientos similares para sobrevivir, crecer y reproducirse. La *competencia* entre los individuos se inicia cuando la demanda total de estos por un recurso excede el suplemento disponible en el espacio de uso común; en esa competencia, algunos individuos no satisfarán completamente sus necesidades. Así, la competencia se define como la interacción entre individuos que es generada por un recurso de uso compartido cuyo suplemento es limitado, la que conduce a una reducción en la sobrevivencia, crecimiento y/o reproducción de los individuos. A mayor número de individuos por unidad de superficie, mayor es el efecto de la competencia sobre un individuo en particular. Así, densidad, competencia y crecimiento son temas afines.

Con el transcurso del tiempo, los individuos crecen y aumentan sus requerimientos y, por lo tanto, compiten con mayor intensidad, aumentando el riesgo de muerte. Después de algún tiempo, los árboles más débiles mueren por efecto de la competencia, quedando un número menor de árboles vivos por unidad de superficie. A esta reducción del número de árboles vivos por unidad de superficie por efecto directo de la competencia se le denomina *auto-raleo*. Así, tanto el número de sobrevivientes como su tasa de crecimiento son influenciados por la

densidad. Esto no sólo evidencia que los efectos de la competencia son dependientes de la densidad, sino que el tamaño del árbol es un indicador de la densidad de rodal.

El fenómeno del auto-raleo se produce no sólo en árboles forestales sino que también ha sido observado en un sinnúmero de especies (ver Begon et al. 1986). Ese fenómeno puede representarse matemáticamente mediante

$$\bar{w} = c \cdot N^{-\frac{3}{2}},$$

relación en la que \bar{w} es el peso promedio de los individuos, N es el número de árboles por unidad de superficie y c es una constante. Esta relación describe la dependencia entre el tamaño promedio de las plantas y el número de plantas por unidad de superficie, en rodales coetáneos monoespecíficos con cobertura completa de copas (ver Zeide 2002).

El hecho de que en muchas especies aparezca el exponente “ $-\frac{3}{2}$ ”, en la relación entre el peso promedio de los individuos (\bar{w}) y el número de árboles por unidad de superficie N , ha dado surgimiento al concepto de *ley de la potencia* $-\frac{3}{2}$. Al linealizar la relación, esto es

$\ln \bar{w} = \ln c - \frac{3}{2} \ln N$, es claro que la tasa de aumento del tamaño es mayor que la tasa de disminución en N . La posición de la curva varía entre especies, pero la pendiente se mantiene aproximadamente constante.

En cuanto al valor $-\frac{3}{2}$, se piensa que es un reflejo de que la población de plantas representa pesos o volúmenes (dimensiones de potencia 3) agrupadas bajo una superficie (dimensión potencia 2) de dosel que captura luz, o simplemente el área disponible para cada árbol (ver e.g. Prodan et al. 1997, p.398). Así, si el peso promedio es proporcional al cubo de alguna dimensión l de la planta, esto es $\bar{w} \propto l^3$, y el área disponible es proporcional al cuadrado de la misma dimensión, esto es $A \propto l^2$, e inversamente proporcional al número de árboles por unidad de superficie, esto es $A \propto N^{-1}$, es decir $l \propto N^{-1/2}$, la relación para el peso promedio se reduce a $\bar{w} = c \cdot N^{-3/2}$, en la cual se ha reemplazado el símbolo de proporcionalidad \propto por la constante de proporcionalidad c . Despejando, $N = (\bar{w}/c)^{-2/3}$ es el número máximo de plantas por unidad de superficie en rodales con cobertura completa. Este valor puede servir de base para evaluar la densidad de otros rodales en términos relativos.

7.2.1 Densidad de rodal

El concepto de *densidad* en forestal se relaciona con el grado en que un sitio está siendo utilizado por los árboles. Existen en literatura dos términos generales para expresar densidad. Por un lado está la expresión absoluta de densidad (density), que señala la cantidad de madera o el grado de amontonamiento de los árboles en un área. Así se utilizan indicadores como área basal (m²/ha), número de árboles (n/ha) y cobertura de copas por unidad de superficie, entre

otros. Por otro lado está la densidad relativa (stocking), que describe lo adecuado de una densidad de rodal en relación a un objetivo de manejo; se expresa en porcentaje de la densidad deseable para un objetivo de manejo. Así, por ejemplo, un rodal con una densidad absoluta determinada puede ser considerado como demasiado denso si el rodal es manejado para silvopastoreo, pero ese mismo rodal puede ser considerado como demasiado ralo para producir madera de uso pulpable. Un indicador relativo debiera expresar esa condición.

Una buena medida de la densidad debería ser independiente de la edad y de la calidad de sitio (Spurr 1962, Zeide 2002). Además, es deseable que sea fácil de aplicar y de relacionar con el incremento en volumen, que es el objetivo tradicional de la silvicultura productiva.

El estudio de la densidad de rodal y su relación con el rendimiento se ha realizado mediante dos líneas que difieren sólo en el nivel de análisis. Por un lado están los índices de densidad de rodal, que caracterizan el rodal como unidad; en el otro extremo están los índices para árboles individuales, que caracterizan el estado del árbol particular dentro del rodal.

7.2.1.1 Índices de densidad de rodal

En general, son medidas relativamente sencillas y de fácil obtención. Entre ellas están el número de árboles, el área basal, el índice de Reineke y el factor de competencia de copas.

7.2.1.1.1 El número de árboles

El número de árboles por unidad de superficie (hectárea) es la medida más sencilla de densidad de rodal. Como un indicador de densidad es una medida insatisfactoria, porque no se relaciona directamente con la utilización del sitio ni con el grado de competencia entre árboles. La ocupación del sitio depende también del tamaño de los individuos. Así, un número constante de árboles por unidad de superficie, representará diversos grados de ocupación del sitio y de densidad dependiendo del tamaño de los árboles. A su vez, un número variable de árboles pueden representar el mismo nivel de densidad de rodal o de ocupación del sitio.

7.2.1.1.2 Área basal

El área basal por unidad de superficie es la medida más simple y de uso habitual para expresar densidad de rodal. Es un indicador deficiente porque un valor determinado puede lograrse con un número grande de árboles pequeños o con una cantidad pequeña de árboles grandes; ambas situaciones pueden representar niveles muy diferentes de ocupación del sitio. Aún así, es más útil que el número de árboles como indicador simple.

7.2.1.1.3 Índice de Reineke

El índice de Reineke relaciona el número de árboles con el diámetro promedio de los árboles creciendo en rodales normales coetáneos. En un rodal *normal* se asume que la densidad es completa, esto es que los árboles están utilizando la totalidad de los recursos del sitio. En esas

circunstancias, existe una estrecha relación entre el número de árboles por unidad de superficie y el tamaño promedio de los mismos. Esa relación se representa mediante

$$N = b_0 \cdot d_c^{b_1},$$

la que en literatura es habitual encontrarla en su forma linealizada

$$\ln N = \ln b_0 + b_1 \ln d_c, \quad [12]$$

función en la que N es el número de árboles por unidad de superficie y d_c es el dap promedio cuadrático de los individuos.

Reineke (1933) determinó que la pendiente (b_1) de la curva [12] se aproximaba a $-1,6$ en varias especies forestales, en tanto que la constante variaba entre especies. Ese descubrimiento lo realizó Reineke al graficar el logaritmo del número de árboles por unidad de superficie contra el logaritmo del dap promedio cuadrático, y trazando una recta por arriba (no a través) de la nube de puntos (Zeide 2002). Aparentemente no hay correlación entre edad y calidad de sitio y el número de árboles por unidad de superficie para un diámetro medio determinado. Así, es seguro utilizar la curva como un estándar para comparar rodales de características similares (e.g. rodales coetáneos de diferente edad) y determinar su densidad.

La curva puede utilizarse para obtener una medida de densidad absoluta o relativa. En términos absolutos, el índice de densidad de rodal (Idr) de Reineke de un rodal corresponde al número de árboles por unidad de superficie en el momento de alcanzar un determinado diámetro promedio; este diámetro estándar (d_{0c}) es fijado por Reineke en 10 pulgadas. Así,

$$\ln Idr = \ln b_0 + b_1 \ln d_{0c}. \quad [13]$$

Combinando [12] y [13] (restando una de otra, o despejando $\ln b_0$ de una y reemplazándola en la otra) se obtiene

$$\ln Idr = \ln N + b_1 \ln \frac{d_{0c}}{d_c}, \text{ i.e.}$$

$$Idr = N \left(\frac{d_{0c}}{d_c} \right)^{b_1}.$$

La expresión relativa del índice combina directamente el número de árboles por unidad de superficie (N) con el número de árboles de un rodal normal para el diámetro actual del rodal (N_d)

$$Idrr = \frac{N}{N_d},$$

o, en términos porcentuales,

$$Idrr(\%) = 100 \frac{N}{N_d}.$$

7.2.1.1.4 Factor de competencia de copas

El factor de competencia de copas (Fcc) es una medida de la tensión de la densidad en un rodal que se basa en el área cubierta por la copa de los árboles. Al contrario del índice de Reineke, toma como referencia el desarrollo de la copa de árboles que crecen en condiciones de densidad mínima, libres de competencia. El factor estima la proporción de área disponible para el árbol promedio del rodal en relación al área máxima que podría usar si creciera libre de competencia (ver Krajicek et al. 1961).

La base de desarrollo del Fcc es la relación existente entre el diámetro de copa (w , en m) y el dap (d , en cm) de árboles de crecimiento libre

$$w = a + b \cdot d.$$

Así, el área de copa (A_c , en m²) de un árbol de diámetro d es

$$A_c = \frac{\pi}{4} w^2 = 0,785(a^2 + 2abd + b^2 d^2).$$

La proporción de superficie ocupada por la proyección vertical de la copa de un árbol en una hectárea, expresada en porcentaje, se denomina *área máxima de copa* (A_{mc}). En términos algebraicos, $A_{mc} = 100A_c / 10000$, es decir

$$A_{mc} = 7,85 \cdot 10^{-3} \cdot (a^2 + 2abd + b^2 d^2).$$

El Fcc corresponde a la suma de las áreas máximas de copa de todos los árboles en una hectárea. Así, el factor expresa en términos relativos la cobertura de copas de un rodal real en comparación a un rodal con la misma cantidad y tamaño de árboles, pero creciendo en condiciones de densidad mínima. El factor, calculado a partir de una tabla de rodal, es

$$Fcc = 7,85 \cdot 10^{-3} \cdot \left(a^2 \sum_{i=1}^c n_i + 2ab \sum_{i=1}^c n_i \cdot d_i + b^2 \sum_{i=1}^c n_i \cdot d_i^2 \right),$$

donde:

c es el número de clases de dap,

n_i es el número de árboles por hectárea en la i -ésima clase de dap,

d_i es la marca de clase de la i -ésima clase de dap.

El vuelo completo de un rodal se produce cuando el Fcc es igual a 100. En teoría, y asumiendo que las copas están suficientemente deformadas para llenar todos los huecos del rodal, a partir de ese nivel de densidad empezaría la competencia entre los árboles. Niveles mayores de densidad reducirían el crecimiento promedio por árbol, pero mejoraría la forma fustal e incrementaría el rendimiento por unidad de superficie. Naturalmente, el rango de valores de Fcc adecuado para un rodal y una especie en particular depende de los objetivos de manejo.

7.2.1.1.5 Índices de espaciamiento

7.2.1.1.5.1 Cuocientes de espaciamiento

Los cuocientes o factores de espaciamiento se obtienen relacionando el tamaño de los árboles dominantes y codominantes con la distancia promedio entre los árboles en el rodal. Utilizan el dap o altura de los árboles dominantes y codominantes como dimensión representativa del tamaño, siendo el distanciamiento medio (D_m) obtenido mediante la relación siguiente, la cual es válida para una distribución cuadrada de árboles en el rodal.

$$D_m = \sqrt{\frac{a}{N}},$$

en la que a es la superficie (m^2) del área evaluada del rodal y N es el número de árboles en esa superficie.

El cuociente de espaciamiento obtenido a partir de la altura, también conocido como *factor de espaciamiento relativo (RS) de Hart-Becking* cuando se expresa en porcentaje, es

$$RS_H = \left(\frac{D_m}{\bar{H}_D} \right),$$

en tanto que el basado en el dap, también conocido como *factor de Wilson*, es

$$RS_D = \left(\frac{D_m}{\bar{d}_D} \right),$$

relaciones en las que \bar{H}_D y \bar{d}_D son, respectivamente, los promedios de la altura y del dap de los árboles dominantes y codominantes.

7.2.1.2 Índices para árboles individuales

Son modelos matemáticos que buscan establecer la forma en que los vecinos inmediatos modifican la disponibilidad de recursos ambientales para un árbol individual. Incorporan

índices de densidad puntual e índices de competencia individual. El árbol al cual se le determina la densidad o competencia se le denomina *sujeto*; los vecinos inmediatos reciben el nombre de *competidores*.

7.2.1.2.1 Índices de densidad puntual

Son indicadores que se obtienen a partir del área basal (ver Opie 1968). El supuesto es que, en rodales densos, a igualdad de otras condiciones, a mayor área basal mayor es la competencia y menor el crecimiento de los árboles. Así, una opción es sumar el área basal de todos los árboles incluidos en una parcela circular de radio constante establecida con el árbol sujeto como centro. Este método requiere aumentar el radio de la parcela con el transcurso del tiempo, para incluir individuos que están a mayor distancia y que pueden iniciar la competencia con el árbol sujeto a medida que crecen. Ese inconveniente se soluciona al utilizar el conteo angular o la sumatoria angular.

7.2.1.2.2 Índices de competencia individual

Son indicadores que buscan establecer el estado competitivo del árbol individual dentro del rodal y su relación con el crecimiento. Por un lado se puede asumir que el árbol realiza utilización exclusiva del sitio dentro de un espacio definido, el que se denomina *espacio de crecimiento*. Este es un polígono alrededor del árbol sujeto (e.g. Brown 1965, Adlar 1974), cuyo tamaño y forma son definidos por la posición de los competidores (Fig. 3). La otra opción es asumir que los árboles realizan un uso compartido del sitio, siendo el espacio total de cada individuo denominado *zona de influencia*, esto es un área de competencia circular en torno a cada árbol (e.g. Bella 1971). Otros índices se basan sólo en la distancia entre árboles y en el tamaño relativo de estos (e.g. Hegyi 1974).

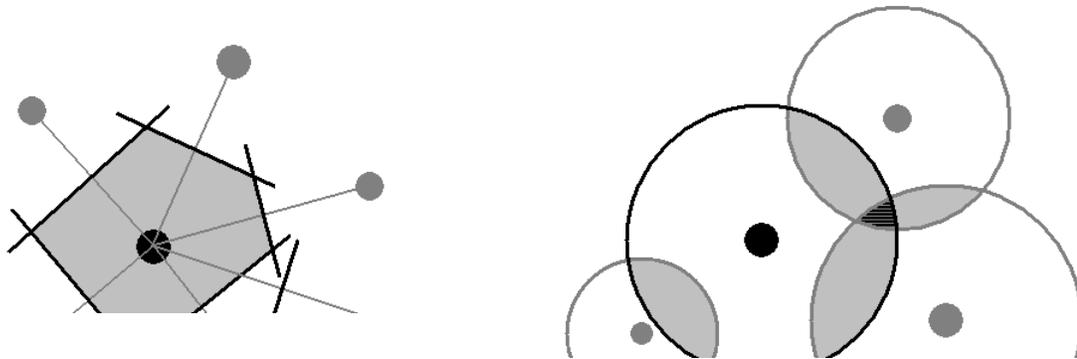


Figura 3. Definición del espacio de crecimiento de un árbol (izquierda) y el concepto de zonas de influencia (derecha).

En la configuración del polígono que delimita el espacio de crecimiento puede o no considerarse el tamaño relativo de los competidores. En el caso graficado en la figura 3, el polígono se obtuvo trazando perpendiculares en los puntos medios de las líneas de unión entre el sujeto y los vecinos inmediatos; es decir, sin considerar el tamaño de los árboles. La

distancia para trazar las perpendiculares también puede definirse en función del tamaño, ya sea expresado mediante el diámetro, o el área basal como sigue

$$I_{ij} = \frac{d_i^2}{d_i^2 + d_j^2} L_{ij},$$

donde:

I_{ij} es la distancia, tomada a partir del eje fustal del árbol sujeto i en dirección al competidor j , a la cual se traza la perpendicular para obtener el polígono del árbol i ,

L_{ij} es la distancia entre el árbol sujeto i y el árbol competidor j ,

d_i es el diámetro del árbol sujeto i

d_j es el diámetro del árbol competidor j .

Los índices basados en el espacio de crecimiento asumen que a mayor superficie del espacio de crecimiento mayor es el crecimiento del árbol (ver Fig. 4). El área puede determinarse descomponiendo el polígono en triángulos, fijando un punto en el interior del polígono (Fig. 5). La fórmula siguiente está basada en el centro de gravedad del polígono, cuyas coordenadas corresponden al promedio aritmético de las coordenadas de los puntos que forman el polígono. Obviamente, el cálculo también puede basarse en las coordenadas del árbol sujeto en lugar del centro de gravedad del polígono.

$$A_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_i} \left| \bar{x}_i (y_j - y_{j+1}) + x_j (y_{j+1} - \bar{y}_i) + x_{j+1} (\bar{y}_i - y_j) \right|,$$

donde:

A_i es la superficie del polígono en torno al árbol i ,

\bar{x}_i, \bar{y}_i son los promedios aritméticos de las abscisas y ordenadas, respectivamente, de los puntos que forman el polígono,

n_i es el número de puntos que conforman el polígono \bar{y}_i .

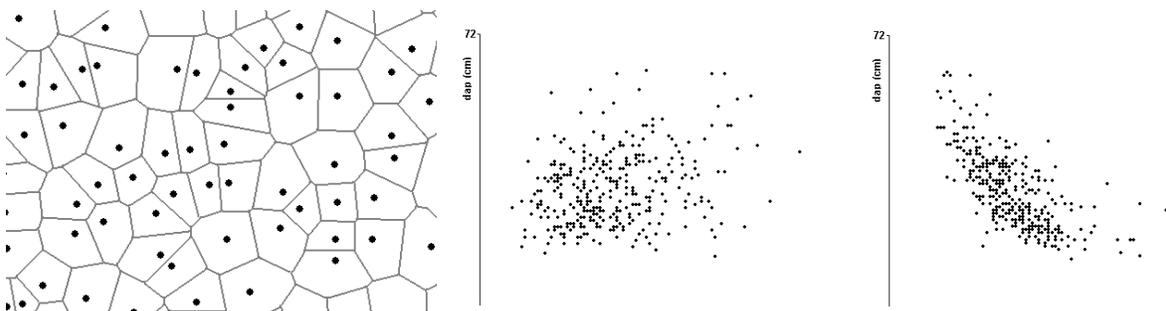


Figura 4. Espacios de crecimiento de un conjunto de árboles (izquierda). Relación entre el dap y la superficie del espacio de crecimiento (centro), y entre el dap y el índice de competencia de Hegyi (derecha), considerando, en este caso, como competidores a los árboles que contribuyen a delimitar el polígono del árbol sujeto.

7.2.1.2.2.1 El índice de Bella

El índice de Bella (1971) está basado en el concepto de zonas de influencia. Asume que cada árbol utiliza un área circular cuyo tamaño es una función directa del tamaño del árbol. La competencia se inicia cuando las zonas de influencia entran en contacto. La tensión competitiva en un árbol sujeto es evaluada en base al traslape de su zona de influencia con la de los competidores, ponderada por el tamaño relativo de los árboles (Fig. 5).

$$IC_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{A_{ij}}{A_i} \right) \left(\frac{d_j}{d_i} \right)^E,$$

donde:

A_i es la superficie del área de la zona de influencia del árbol sujeto i ,

A_{ij} es la superficie del área de intersección entre las zonas de influencia del árbol sujeto i y del árbol competidor j ,

d_i, d_j son los diámetros del árbol sujeto i y del árbol competidor j , respectivamente,

n es el número de árboles que compiten con el sujeto i .

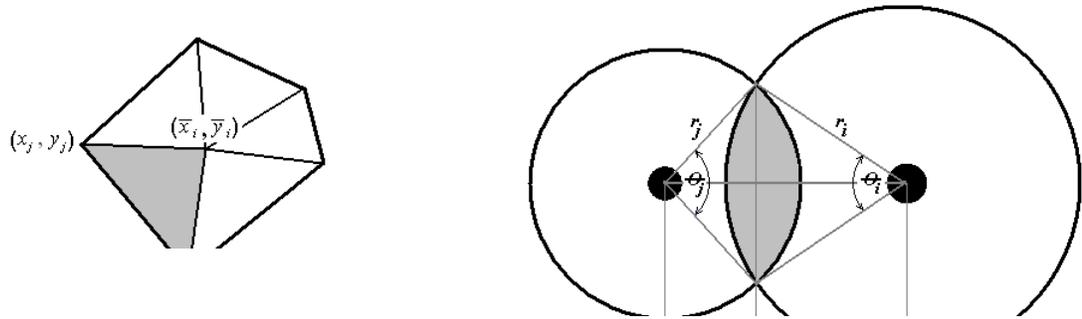


Figura 5. Cálculo de áreas. Izquierda: descomposición del polígono en triángulos. Derecha: área de intersección de zonas de influencia.

El área de intersección se obtiene mediante la relación siguiente (área gris, Fig. 5, derecha)

$$A_{ij} = 0,5(r_i^2\theta_i + r_j^2\theta_j) - y \cdot L_{ij},$$

con

$$\theta_i = \frac{\pi}{180} \arccos \frac{x_i}{r_i},$$

$$\theta_j = \frac{\pi}{180} \arccos \frac{x_j}{r_j},$$

$$x_i = \frac{L_{ij}^2 + r_i^2 - r_j^2}{2L_{ij}},$$

$$x_j = L_{ij} - x_i,$$

$$y = r_i \sin \frac{\theta_i}{2},$$

donde:

L_{ij} es la distancia entre el árbol sujeto i y el árbol competidor j ,

r_i es el radio de la zona de competencia del árbol sujeto i ; $r_i = k \cdot d_i$,

r_j es el radio de la zona de competencia del árbol competidor j ; $r_j = k \cdot d_j$,

θ_i, θ_j son ángulos medidos en radianes.

7.2.1.2.2.2 El índice de Hegyi

El índice de Hegyi (1974) está basado en los tamaños relativos de los árboles y la distancia que los separa. Es un índice simple, pero requiere definir de alguna manera los árboles competidores efectivos. A mayor valor del índice de Hegyi, menor es el tamaño del árbol (Fig. 4).

$$C_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{d_j / d_i}{L_{ij}} \right),$$

donde:

C_i es el índice de competencia para el árbol sujeto i ,

d_i es el diámetro del árbol sujeto i ,

d_j es el diámetro del árbol competidor j ,

L_{ij} es la distancia entre el árbol sujeto i y el árbol competidor j ,

n es el número de árboles que compiten con el sujeto i .

Referencias

- Adlard, P.G. 1974. Development of an empirical competition model for individual trees within a stand. *In*: Fries, J. (ed.) *Growth Models for Tree and Stand Simulation*, Res. Notes 30. Department of Forest Yield Research, Royal College of Forestry, Stockholm, 22-37.
- Baker, J.B., M.D. Cain, J.M. Guldin, P.A. Murphy, and M.G. Shelton. 1996. Uneven-aged Silviculture for the loblolly and shortleaf pine forest cover types. Gen. Tech. Rep. SO-1 18. Asheville, NC. U.S. Department of Agriculture, Forest Service, Southern Station. 65 p.
- Begon, M., J.L. Harper, and C.R. Townsend. 1986. Ecology. Sinauer Associates inc. Massachusetts. 876 p.
- Bella, I.E. 1971. A new competition model for individual trees. *For. Sci.* 17(3):364-372.
- Brown, G.S. 1965. Point density in stems per acre. New Zealand Forestry Service Research Notes 38: 1-11.
- Buongiorno, J. and B.R. Mitchie. 1980. A matrix model of uneven-aged forest management. *For. Sci.* 26: 609-625.
- Brender, E.V. 1973. Silviculture of loblolly pine in the Georgia Piedmont. Georgia Forest Research Council. Report No. 33, 74 p.
- Cancino, J. and K. v. Gadow. 2002. Stem guide curves for uneven-aged forests. Development and limitations. In Gadow, K. v., Nagel, J., Saborowski, J. (eds), *Continuous Cover Forestry*, 163-174. Kluwer Academic Publishers.
- Guldin, J.M. 1991. Uneven-aged BDq regulation of Sierra Nevada mixed conifers. *West. J. Appl. For.* 6: 27-32.

- Hegy, F. 1974. A simulation model for managing jack pine stands. In: Fries, J. (ed.) Growth Models for Tree and Stand Simulation, Res. Notes 30. Department of Forest Yield Research, Royal College of Forestry, Stockholm, 74–90.
- Johnson, P.S., S.R. Shifley, and R. Rogers. 2002. The ecology and silviculture of Oaks. CABI Publishing. 528 p.
- Knoke, T. 1998. Analyse und Optimierung der Holzproduktion in einem Plenterwald – zur Forstbetriebsplanung in ungleichaltrigen Wäldern. Forschungsberichte München Nr. 170, 182 S.
- Krajicek, J.E., K.A. Brinkman, and S.F. Gingrich. 1961. Crown Competition-A measure of density. For. Sci. 7(1):35-42.
- Mitscherlich, G. 1952. Der Tannen-Fichten-(Buchen)-Plenterwald. Heft 8 d. Schriftenreihe d. Bad. Forstl. Vers. Anst., Freiburg. 42 p.
- Moser Jr., J. W. 1976. Specification of density for the Inverse J-shaped diameter distribution. For. Sci. 22, 177-180.
- Opie, J.E. 1968. Predictability of individual tree growth using various definitions of competing basal area. For. Sci. 14: 314–323.
- Prodan, M., R. Peters, F. Cox, y P. Real. 1997. Mensura forestal. IICA/GTZ. 586 p.
- Rautiainen, O. 1998. Modelling the yield and growth of uneven-aged *Shorea robusta* stands. Ph.D thesis, University of Joensuu.
- Reineke, L.H. 1933. Perfecting a stand-density index for even-aged forests. Jour. Agric. Res. 46:627-638.
- Spurr, S. 1962. A measure of point density. For. Sci. 8(1): 85-96.
- Virgilietti, P. and J. Buongiorno. 1997. Modeling forest growth with management data. A matrix approach for the Italian Alps. *Silva Fennica* 31, 27-42.
- Zeide, B. 2002. Analysis of a concept: Stand density. *Journal of Sustainable Forestry* 14(4):51-62.