Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Ciencias Físicas

Soluciones Rotantes en Gravedad Cuasi-Topológica

Tesis para optar al grado de Magíster en Ciencias con mención en Física

por

Nicolás Alberto Mora Alarcón

Director de Tesis : Dr. Julio Eduardo Oliva Zapata

Comisión : Dr. Fernando Esteban Izaurieta Aranda
Dr. Octavio Ariel Fierro Mondaca
Dr. Adolfo René Cisterna Roa

CONCEPCIÓN • CHILE
ENERO 2021

Tabla de Contenido

A mi abuela.

All we have to decide is what to do with the time that is given us.

J. R. R. Tolkien

Agradecimientos

Es un poco difícil escribir estas líneas, porque no se que orden deberían tener y tal vez se me escapen los nombres de algunas personas que merecen ser nombradas.

En primer lugar no tengo más que agradecer al Dr. Julio Oliva por aceptarme como estudiante y ayudarme en todo el desarrollo de esta pequeña tesis, en todo este tiempo nunca dejó de motivar a sus estudiantes a ser mejores y la gratitud mencionada aquí no alcanza a hacer justicia de todo su trabajo y entrega.

Por supuesto le agradezco al Dr. Octavio Fierro por su colaboración y disposición en ayudarme en este trabajo. También un especial agradecimiento al Dr. Adolfo Cisterna por sugerir el análisis del régimen de rotaciones bajas. Sin duda no puedo dejar de mencionar a los profesores que me motivaron a cambiar de área y me mostraron el interesante y desafiante mundo de la física: Dr. Juan Crisóstomo, Dr. Guillermo Rubilar, Dr. Patricio Salgado y Dr. Fernando Izaurieta.

Gracias a quienes me ayudaron a soportar de mejor manera esta cuarentena, gracias Jota, Pescador, Ricardo y Marcelo, también gracias a otros que me da pereza nombrar.

Una especial mención a Camila por su incondicional apoyo y cariño, es muy probable que no estaría escribiendo esto si ella no hubiese estado ahí. Estoy profundamente agradecido con mis padres y mi tío Rodrigo que siempre me permitieron e incentivaron a seguir lo que más me interesaba. Gracias a mis gatos Apolo, Canela y Maní por hacer mis días más placenteros.

Finalmente, este trabajo fue parcialmente financiado por los proyectos FONDECYT 1181047 y FONDECYT 11191175, además por Dirección de Postgrado por otorgarme la beca de estipendio.

Resumen

Las teorías de gravedad Cuasi-topológica (GCT) son construidas de forma tal que conducen a una ecuación de primer orden para espaciotiempos esféricamente simétricos, imitando la estructura de teorías de Lovelock en dimensiones superiores y son libres de fantasmas alrededor de AdS. En esta tesis se construyen soluciones a rotaciones bajas en el caso cúbico y cuártico de GCT en cinco dimensiones. Estas soluciones reflejan que la teoría cúbica es una teoría única, mientras que el caso cuártico nos lleva a una familia de teorías con soluciones a rotaciones bajas diferentes en dimensión cinco. Se muestra que las ecuaciones para los términos fuera de la diagonal son de segundo orden en el caso cúbico, sin embargo, en el caso cuártico es necesario imponer una restricción extra, entre los acoplamientos de los términos $Riem^4$, para remover términos con derivadas superiores y por lo tanto imitar el comportamiento del caso cúbico, removiendo parcialmente la degeneración de estas teorías, y llevando a una familia triparamétrica de Lagrangianos cuárticos en el tensor de Riemann. En este trabajo se presenta también una extensión del principio de acción reducida para el régimen de rotaciones bajas y se propone un ansatz para la métrica que depende de nuevas funciones auxiliares que están presentes en los términos fuera de la diagonal. Se compara este principio en el régimen de rotaciones bajas con las ecuaciones de campo en teorías de Lovelock y GCT Cúbica y se muestra que esto lleva a las ecuaciones correctas, entonces se encuentra la solución en GCT cuártica aplicando este nuevo método. Las funciones métricas fuera de la diagonal admiten una integración simple en términos de cuadratura. Finalmente se muestra que, para parámetros de rotación más allá del caso lineal, usando el ansatz de Kerr-Schild, es imposible construir una solución asintóticamente AdS_5 para valores genéricos de las constantes de acoplamiento en GCT Cúbica.

Abstract

Quasi-topological gravity (QTG) theories are constructed such that they lead to a first order equation for spherically symmetric spacetimes, mimicking the structure of Lovelock theories in higher dimensions and they are free of ghosts around AdS. In this thesis, slowly rotating solutions in the Cubic and Quartic QTG in five dimensions are constructed. These solutions reflect that the cubic theory is unique, while the quartic case leads to family of theories with different slowly rotating solutions in five dimensions. It is shown that the equations for the off-diagonal terms are of second order in the cubic case, however, in the quartic case it is necessary to impose an extra constraint, between the couplings of the $Riem^4$ terms, to remove higher derivatives and therefore to mimic the behavior of the cubic case, partially removing the degeneracy of these theories and leading to a three-parameter family of quartic Lagrangians in the Riemann tensor. In this thesis we also present an extension of the reduced action principle on the slowly rotating regime and an ansatz is proposed for the metric that depends of new auxiliary functions that are present in the off diagonal terms. We compare this principle in the slowly rotating regime with the field equations in Lovelock gravity and cubic QTG and show that it leads to the correct equations, then we found the solution in quartic QTG applying this new method. The off-diagonal metric functions admit a simple integration in terms of quadratures. Finally it is shown that for rotation parameters beyond the linear case, using the Kerr-Schild ansatz, it is impossible to construct an asymptotically AdS_5 solution for generic values of the coupling constants in Cubic QTG.

Capítulo 1

Introducción

Actualmente se reconoce a la teoría de la Relatividad General (RG) como la teoría que mejor representa la interacción gravitacional, pasando numerosos test experimentales [1], sin embargo, no se ha realizado hasta la fecha un test que pruebe la validez de esta teoría en escenarios extremos de mayor curvatura o energía. Por otro lado, la única teoría que nos permite estudiar el scattering de gravitones es Teoría de Cuerdas, además en el límite a bajas energías predice que en el límite de bajas energías la acción de Einstein-Hilbert es suplementada por infinitos escalares de curvatura en un esquema perturbativo. Esto motiva y vuelve tremendamente interesante estudiar correcciones a RG que consideren términos de mayor curvatura y que puedan ser embebidas como el límite a bajas energías de Teoría de Cuerdas como teoría efectiva. Como se mostró en [2], se mapeó la acción efectiva de la teoría de cuerdas Tipo-IIB en AdS_5 a orden $\mathcal{O}(\alpha'^3)$ con la teoría Cuasi-topológica generalizada [3]. La densidad de Einstein-Gauss-Bonnet es el primer término que va más allá de RG y puede ser embebida como una teoría efectiva en Teoría de Cuerdas y forma parte del primer término de las teorías de Lovelock [4] (más alla de RG), pero genera ecuaciones no triviales para la métrica en dimensión $n \geq 5$. Escalando al siguiente término en teorías de Lovelock, nos encontramos con una combinación cúbica en los escalares de curvatura que es no trivial en dimensión siete o superior. Al trabajar con una teoría no trivial en dimensión cinco con contribuciones de hasta orden cúbico, en general, se propagan grados de libertad extras alrededor de un espaciotiempo máximamente simétrico, lo que dificulta enormemente construir soluciones analíticas de agujeros negros. Sin embargo, existe una combinación cúbica que es no trivial en dimensión cinco llamada gravedad Cuasi-topológica cúbica [5, 6] y es un caso particular de gravedad Cuasi-topológica generalizada. Esta teoría lleva a ecuaciones de primer orden en una métrica esféricamente simétrica; admite Teorema de Birkhoff, es decir, simetría esférica implica soluciones estáticas y estas soluciones son asintóticamente planas y (A)dS, gobernadas por una ecuación algebraica cúbica, al igual como ocurre en teorías de Lovelock. Otra propiedad interesante de esta teoría, es que las ecuaciones de campo son de segundo orden alrededor de una solución máximamente simétrica, compartiendo el mismo espectro linealizado que en RG con una constante de Newton efectiva. En el contexto de AdS/CFT, encontrar soluciones rotantes en dimensión cinco adquieren relevancia [7], permitiendo estudiar teorías de campos conformes a temperatura finita. No obstante, en el contexto de soluciones exactas en teorías con términos superiores en la curvatura, existe un gran vacío en lo que respecta a soluciones rotantes debido a la complejidad de las ecuaciones de movimiento, reduciendo la búsqueda a soluciones numéricas o perturbativas.

En esta tesis se construyen soluciones a rotaciones bajas [8, 9] en GCT cúbica y cuártica en dimensión cinco y se muestra que al exigir ecuaciones de segundo orden para las funciones que gobiernan la rotación, emerge una restricción para las constantes relativas entre los escalares de curvatura cuárticos. Más allá del esquema perturbativo en la rotación y basados en que el ansatz de Kerr-Schild [10] fue usado para encontrar una solución exacta en Einstein-Gauss-Bonnet [11], se proporciona un resultado que muestra la inconsistencia de este ansatz al ser implementado en la teoría de GCT cúbica. Esta tesis proporciona en el Capítulo 2 una pequeña introducción a RG desde el punto de vista de teoría de campos, mostrando dos familias de soluciones exactas a sus ecuaciones de movimiento y se estudian algunas propiedades termodinámicas. En el Capítulo 3 se estudian soluciones de agujeros negros exactas en teorías $\mathcal{L}(g^{ab}, R_{abcd})$, en particular en teorías de Lovelock y GCT cúbica se presentan soluciones esféricamente simétricas, a rotaciones bajas y una solución "a la Kerr-Schild" específicamente en Einstein-Gauss-Bonnet. En el Capítulo 4 se reproducen los resultados del Capítulo 3 haciendo uso del principio de acción reducida, mostrando como implementar este principio en soluciones a rotaciones bajas en teorías de Lovelock y se muestra que GCT cúbica posee teorema de Birkhoff.

Finalmente, en el Capítulo 5 se construye la solución a rotaciones bajas en gravedad GCT cúbica y cuártica de la misma forma que se hizo en gravedad de Lovelock y se explora el ansatz de Kerr-Schild en GCT cúbica.

Capítulo 2

Relatividad General

2.1. Ecuaciones de campo

Las ecuaciones de campo de RG fueron propuestas por Einstein en 1915 y un par de meses después Hilbert propuso un principio de acción del cuál se pueden derivar dichas ecuaciones. En esta sección se muestra como, a partir de la variación de la acción de Einstein-Hilbert (con constante cosmológica) en una variedad $n-$dimensional $\mathcal{M}$, se derivan las ecuaciones de campo de RG. También se estudia el término de borde a partir de la curvatura extrínseca, esto es, el término de Gibbons-Hawking-York. Consideremos la acción de Einstein-Hilbert con constante cosmológica Λ,

$$I[g] = \frac{1}{16\pi G_n} \int_{\mathcal{M}} d^n x \sqrt{-g}(R - 2\Lambda) \ , \tag{2.1.1}$$

donde R es el escalar de Ricci y g representa el determinante del métrica g_{ab} y hemos considerado unidades tal que $c = 1$.

Para derivar las ecuaciones de Einstein (con constante cosmológica), vía el principio de mínima acción, impondremos la condición de contorno $\delta g_{ab}\big|_{\partial\mathcal{M}} = \delta g^{ab}\big|_{\partial\mathcal{M}} = 0$. Las variaciones de la acción toman la siguiente forma

$$\begin{aligned} \delta I[g] &= \frac{1}{16\pi G_n} \int_{\mathcal{M}} d^n x \delta \left\{ \sqrt{-g}(R - 2\Lambda) \right\} \ , \\ &= \frac{1}{16\pi G_n} \int_{\mathcal{M}} d^n x \left\{ (R - 2\Lambda)\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\delta R \right\} \ , \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

examinemos el primer término del lado derecho de (2.1.2),

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta g \ , \tag{2.1.3}$$

para escribir la variación del determinante de la métrica en términos de la variación de la métrica necesitamos usar $\ln g = \mathrm{Tr}\ln \boldsymbol{g}$, con $\boldsymbol{g}$ la métrica en notación matricial, así se sigue que $\frac{1}{g}\delta g = \mathrm{Tr}\left[\boldsymbol{g}^{-1}\delta\boldsymbol{g}\right]$. En notación indicial

$$\delta g = g g^{de}\delta g_{de} \ , \tag{2.1.4}$$

y como la métrica con su inversa se relacionan de la siguiente forma $g_{de}g^{ce} = \delta^c_d$, podemos variar esta expresión para deducir que la relación entre la variación de la métrica y su inversa es

$$\delta g_{de} = -\, g_{da}g_{eb}\delta g^{ab} \ , \tag{2.1.5}$$

entonces (2.1.4) se puede reescribir como sigue

$$\delta g = -g g_{ab}\delta g^{ab} \ , \tag{2.1.6}$$

con esto, la variación de la raíz de menos el determinante de la métrica es

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ab}\delta g^{ab} \ . \tag{2.1.7}$$

Por otro lado, la variación del escalar de Ricci se separa como

$$\begin{aligned} \delta R &= \delta(g^{cd}R_{cd}) \ , \\ &= R_{ab}\delta g^{ab} + g^{ab}\delta R_{ab} \ , \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

para construir la variación del tensor de Ricci tenemos que construir la variación del tensor de Riemann, con un índice arriba, la variación toma la forma

$$\delta R^b{}_{dac} = \delta\left(\partial_a\Gamma^b{}_{cd} - \partial_c\Gamma^b{}_{ad} + \Gamma^b{}_{ae}\Gamma^e{}_{cd} - \Gamma^b{}_{ce}\Gamma^e{}_{ad}\right) \ , \tag{2.1.9}$$

expandiendo esta expresión, obtenemos

$$\begin{aligned}\delta R^{b}{}_{dac} &= \partial_a \delta\Gamma^{b}{}_{cd} + \Gamma^{b}{}_{ae}\delta\Gamma^{e}{}_{cd} - \Gamma^{e}{}_{ac}\delta\Gamma^{b}{}_{ed} - \Gamma^{e}{}_{ad}\delta\Gamma^{b}{}_{ce} && (2.1.10)\\ &\quad - \partial_c \delta\Gamma^{b}{}_{ad} - \Gamma^{b}{}_{ce}\delta\Gamma^{e}{}_{ad} + \Gamma^{e}{}_{ca}\delta\Gamma^{b}{}_{ed} + \Gamma^{e}{}_{cd}\delta\Gamma^{b}{}_{ae} \ , \\ &= \nabla_a \delta\Gamma^{b}{}_{cd} - \nabla_c \delta\Gamma^{b}{}_{ad} \ , && (2.1.11)\end{aligned}$$

contrayendo apropiadamente dos índices en (2.1.11) podemos ver que

$$\begin{aligned} g^{ab}\delta R_{ab} &= g^{ab}\delta R^{c}{}_{acb} \ , \\ &= g^{ab}\delta\left(\nabla_c \delta\Gamma^{c}{}_{ba} - \nabla_b \delta\Gamma^{c}{}_{ca}\right) \ , \\ &= \nabla_a \left(g^{bc}\delta\Gamma^{a}{}_{bc} - g^{ab}\delta\Gamma^{c}{}_{cb}\right) \ . && (2.1.12)\end{aligned}$$

Ahora hay que construir una expresión para la variación del símbolo de Christoffel, para ello usaremos la siguiente expresión

$$\delta\left(\nabla_a g_{bc}\right) = \partial_a \delta g_{bc} - \Gamma^{d}{}_{ab}\delta g_{dc} - \Gamma^{d}{}_{ac}\delta g_{bd} - g_{dc}\delta\Gamma^{d}{}_{ab} - g_{bd}\delta\Gamma^{d}{}_{ac} \ , \qquad (2.1.13)$$

y como $\nabla_a g_{bc} = 0$, despejamos la derivada covariante de la variación de la métrica,

$$\nabla_a \delta g_{bc} = g_{dc}\delta\Gamma^{d}{}_{ab} + g_{bd}\delta\Gamma^{d}{}_{ac} \ , \qquad (2.1.14)$$

sumando una combinación apropiada es fácil ver que

$$\nabla_a \delta g_{bc} + \nabla_b \delta g_{ca} - \nabla_c \delta g_{ba} = 2 g_{cd}\delta\Gamma^{d}{}_{ab} \ , \qquad (2.1.15)$$

por lo tanto, la variación del símbolo de Christoffel es

$$\delta\Gamma^{e}{}_{ab} = \frac{1}{2} g^{ec}\left(\nabla_a \delta g_{bc} + \nabla_b \delta g_{ac} - \nabla_c \delta g_{ab}\right) \ . \qquad (2.1.16)$$

Evaluando la expresión (2.1.16) en (2.1.12),

$$\begin{aligned} g^{ab}\delta R_{ab} &= \frac{1}{2}\nabla_a \left(\left(g^{bc}g^{ad} - g^{ab}g^{cd}\right)\left(\nabla_b \delta g_{cd} + \nabla_c \delta g_{bd} - \nabla_d \delta g_{bc}\right)\right) \ , \\ &= \nabla_a \delta A^{a}, \qquad \delta A^{a} = g^{ab}g^{cd}\left(\nabla_c \delta g_{bd} - \nabla_b \delta g_{cd}\right) \ . && (2.1.17)\end{aligned}$$

De esta forma, reemplazando (2.1.7), (2.1.8) y (2.1.17) en (2.1.2), obtenemos

$$\begin{aligned}\delta I[g] &= \frac{c^4}{16\pi G_n}\int_{\mathcal{M}} d^n x\left\{(R-2\Lambda)\left(-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ab}\delta g^{ab}\right)\right. && (2.1.18)\\ &\qquad\left.+\sqrt{-g}\left(R_{ab}\delta g^{ab}+\nabla_a\delta A^a\right)\right\} \ ,\\ &= \frac{c^4}{16\pi G_n}\int_{\mathcal{M}} d^n x\left\{\left(G_{ab}+\Lambda g_{ab}\right)\sqrt{-g}\delta g^{ab}+\sqrt{-g}\nabla_a\delta A^a\right\} \ , && (2.1.19)\end{aligned}$$

donde G_{ab} es el tensor de Einstein, definido por

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R \ . \qquad (2.1.20)$$

Estudiemos el segundo término del lado derecho de (2.1.19). En general,

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\nabla_a\delta A^a &= \nabla_a\left(\sqrt{-g}\delta A^a\right) - \left(\partial_a\sqrt{-g}\right)\delta A^a \ ,\\ &= \partial_a\left(\sqrt{-g}\delta A^a\right) + \sqrt{-g}\Gamma^a{}_{ab}\delta A^b - \left(\partial_a\sqrt{-g}\right)\delta A^a \ ,\\ &= \partial_a\left(\sqrt{-g}\delta A^a\right) + \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{ac}(\partial_b g_{ac})\delta A^b - \frac{-1}{2\sqrt{-g}}\left(\partial_a g\right)\delta A^a \ ,\\ &= \partial_a\left(\sqrt{-g}\delta A^a\right) + \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{ac}(\partial_b g_{ac})\delta A^b - \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{ac}\left(\partial_b g_{ac}\right)\delta A^b \ ,\\ &= \partial_a\left(\sqrt{-g}\delta A^a\right) \ , && (2.1.21)\end{aligned}$$

con esto podemos reescribir (2.1.19) y aplicando el Teorema de Stokes se tiene que

$$\begin{aligned}\delta I[g] &= \frac{c^4}{16\pi G_n}\int_{\mathcal{M}} d^n x\sqrt{-g}\delta g^{ab}\left(R_{ab}-\frac{1}{2}g_{ab}R+\Lambda g_{ab}\right) && (2.1.22)\\ &\quad + \frac{c^4}{16\pi G_n}\oint_{\partial\mathcal{M}} d^{n-1}y\sqrt{h}n_a\delta A^a \ , && (2.1.23)\end{aligned}$$

donde n^a es un vector normal a la hiper-superficie $\partial\mathcal{M}$ de dimensión $n-1$ y h es el determinante de la métrica inducida h_{ij} en la hiper-superficie[1]. Tengamos en cuenta

[1] Es necesario especificar que en este apartado los índices $a, b, \ldots, h = 0, \ldots, n-1$ son usados para los objetos definidos sobre $\mathcal{M}$, mientras que los índices $i, j, k = 0, \ldots, n-2$ son usados para los objetos definidos sobre $\partial\mathcal{M}$.

que, si x^a son las coordenadas de $\mathcal{M}$ y $\tilde{x}^i$ las coordenadas de $\partial\mathcal{M}$, podemos definir,

$$e_i^a \equiv \frac{\partial x^a}{\partial y^i} \ , \tag{2.1.24}$$

los cuales son tangentes a las curvas contenidas en $\partial\mathcal{M}$, es fácil ver que por esta razón $e_i^a n_a = 0$. Podemos construir un proyector sobre $\mathcal{M}$ de modo que

$$\begin{aligned} h_{ab}v^b &= v_a - n_b v^b n_a \ , \\ &= \left(g_{ab} - n_b n_a\right) v^b \ , \quad (2.1.25) \\ \Rightarrow h_{ab} &= g_{ab} - n_a n_b \ , \quad (2.1.26) \end{aligned}$$

contrayendo esta expresión con los proyectores,

$$\begin{aligned} h_{ab}e_i^a e_j^b &= g_{ab}e_i^a e_j^b \equiv h_{ij} \ , \quad (2.1.27) \\ \Rightarrow h_{ab} &= h_{ij}e_a^i e_b^j \ , \quad (2.1.28) \end{aligned}$$

por otro lado, en (2.1.19), el término $n_a \delta A^a$ está evaluado en $\partial\mathcal{M}$, por lo que, al exigir las condiciones de contorno $\delta g^{ab}\big|_{\partial\mathcal{M}} = \delta g_{ab}\big|_{\partial\mathcal{M}} = 0$, podemos decir que

$$\begin{aligned} n_a \delta A^a &= n_a g^{ab} g^{cd} \left(\nabla_c \delta g_{bd} - \nabla_b \delta g_{cd}\right) \ , \\ &= n^a \left(n^b n^c + h^{bc}\right) \left(\nabla_b \delta g_{ac} - \nabla_a \delta g_{bc}\right) \ , \\ &= n^a n^b n^c \left(\nabla_b \delta g_{ac} - \nabla_a \delta g_{bc}\right) + n^a h^{bc} \left(\nabla_b \delta g_{ac} - \nabla_a \delta g_{bc}\right) \ , \\ &= n^a h^{bc} \left(\partial_b \delta g_{ac} - \Gamma^d{}_{ba} \delta g_{dc} - \Gamma^d{}_{bc} \delta g_{ad} - \partial_a \delta g_{bc} + \Gamma^d{}_{ab} \delta g_{dc} + \Gamma^d{}_{ac} \delta g_{bd}\right) \ , \\ &= n^a h^{ij} e_i^b e_j^c \partial_b \delta g_{ac} - n^a h^{bc} \partial_a \delta g_{bc} \ , \\ &= n^a h^{ij} e_j^c \partial_i \delta g_{ac} - n^a h^{bc} \partial_a \delta g_{bc} \ , \\ &= -n^a h^{bc} \partial_a \delta g_{bc} \ , \quad (2.1.29) \end{aligned}$$

de forma que la variación de la acción (2.1.1) se reduce a

$$\begin{aligned} \delta I[g] = \frac{1}{16\pi G_n} \int_{\mathcal{M}} d^n x \sqrt{-g}\, \delta g^{ab} \left(R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R + \Lambda g_{ab}\right) \quad (2.1.30) \\ - \frac{1}{16\pi G_n} \oint_{\partial\mathcal{M}} d^{n-1} y \sqrt{-h}\, n^a h^{bc} \partial_a \delta g_{bc} \ . \quad (2.1.31) \end{aligned}$$

Notamos que una variación arbitraria de la acción respecto del tensor métrico, con las condiciones de contorno $\delta g^{ab}\big|_{\partial\mathcal{M}} = \delta g_{ab}\big|_{\partial\mathcal{M}} = 0$, no nos entrega ecuaciones de campo bien definidas sobre todo $\mathcal{M}$, incluido su borde, debido a la aparición de contribuciones superficiales. Para resolver este problema debemos incluir a la acción un término de borde adicional.

2.2. Término de Gibbons-Hawking-York

Tengamos en cuenta el siguiente término de borde [12, 13]

$$I_{GHY}[g] = \frac{1}{8\pi G_n}\oint_{\partial\mathcal{M}} d^{n-1}y\sqrt{h}K \ , \tag{2.2.1}$$

donde hemos introducido $K = h^{ab}K_{ab}$ como la traza de la curvatura extrínseca $K_{ab} = \nabla_a n_b$, la cual satisface lo siguiente

$$\begin{aligned} K &= h^{ab}K_{ab} \ , \\ &= h^{ij}e^a_i e^b_j K_{ab} \ , \\ &= h^{ij}K_{ij} \ . \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Incorporando este término a la acción seremos capaces de eliminar las contribuciones superficiales de la segunda línea de (2.1.31) y de ese modo tener ecuaciones de campo bien definidas en la región interior. Estudiemos su variación respecto de la métrica,

$$\delta I_{GHY}[g] = \frac{1}{8\pi G_n}\oint_{\partial\mathcal{M}} d^{n-1}y\left\{K\delta\sqrt{h} + \sqrt{h}\left(K_{ab}\delta h^{ab} + h^{ab}\delta K_{ab}\right)\right\} \ , \tag{2.2.3}$$

la variación de h^{ab} (y por consecuencia de $\sqrt{h}$) es nula, ya que, hemos fijado δg^{ab} en el borde, explícitamente

$$\delta\sqrt{h} = \frac{1}{2}\sqrt{h}h^{ab}\delta h_{ab} \ , \tag{2.2.4}$$

mientras que,

$$\delta h_{ab} = \delta g_{ab}\big|_{\partial\mathcal{M}} - \cancel{\delta(n_a n_b)} = 0 \ , \tag{2.2.5}$$

entonces la contribución que es relevante proviene de δK_{ab},

$$\begin{aligned} h^{ab}\delta K_{ab} &= h^{ab}\delta\left(\partial_b n_a - \Gamma^c{}_{ba} n_c\right) \ , \\ &= -h^{ab} n_c \delta\Gamma^c{}_{ba} \ , \\ &= -\frac{1}{2} h^{ij} e^a_i e^b_j n_c g^{cd}\left(\nabla_b \delta g_{ad} + \nabla_a \delta g_{bd} - \nabla_d \delta g_{ab}\right) \ , \\ &= -\frac{1}{2} h^{ij} n^d \left(e^a_i \partial_j \delta g_{ad} + e^b_j \partial_i \delta g_{bd} - e^a_i e^b_j \partial_d \delta g_{ab}\right) \ , \\ &= h^{ab} n^d \partial_d \delta g_{ab} \ , \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

de esta forma, la variación del término de Gibbons-Hawking-York se puede escribir como

$$\delta I_{GHY} = \frac{1}{16\pi G_n} \oint_{\partial\mathcal{M}} d^{n-1}y\sqrt{h} h^{ab} n^d \partial_d \delta g_{ab} \ , \tag{2.2.7}$$

por lo tanto, un principio de acción que resuelve el problema variacional, está dado por,

$$I[g] = \frac{1}{16\pi G_n}\left[\int\limits_{\mathcal{M}} d^n x\sqrt{-g}\left(R - 2\Lambda\right) + 2\oint\limits_{\partial\mathcal{M}} d^{n-1}y\sqrt{h}K\right] \ . \tag{2.2.8}$$

Es claro entonces que para variaciones arbitrarias de (2.2.8) respecto de la métrica, la variación se reduce a

$$\delta I[g] = \frac{1}{16\pi G_n}\int_{\mathcal{M}} d^n x\sqrt{-g}\,\delta g^{ab}\left(R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R + \Lambda g_{ab}\right) \ , \tag{2.2.9}$$

de esta forma, las ecuaciones de movimiento en el vacío son

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R + \Lambda g_{ab} = 0 \ , \tag{2.2.10}$$

estas ecuaciones son ecuaciones diferenciales parciales no lineales de hasta segundo orden en la métrica.

En adelante consideraremos la siguiente acción[2]

$$\tilde{I}[g] = I[g] - I_0 \ , \tag{2.2.11}$$

donde I_0 es la acción evaluada en una métrica máximamente simétrica g_0^{ab},

$$I_0 = \frac{1}{16\pi G_n}\left[\int\limits_{\mathcal{M}_0} d^n x\sqrt{-g_0}\,(R_0 - 2\Lambda) + 2\oint\limits_{\partial\mathcal{M}_0} d^{n-1}y\sqrt{h_0}K_0\right] \ , \tag{2.2.12}$$

donde R_0 es el escalar de Ricci de esta métrica y K_0 es la curvatura extrínseca de est métrica máximamente simétrica embebida en la sub-variedad $\partial\mathcal{M}_0$ con métrica inducida $(h_0)_{ij}$. I_0 no es un término dinámico, solo cambiará el valor numérico de la acción sin modificar las ecuaciones de campo, será de relevancia al calcular propiedades termodinámicas de los agujeros negros.

2.3. Solución de Schwarzschild y Teorema de Birkhoff

En 1916, Schwarzschild publicó la primera solución exacta de las ecuaciones de Einstein (sin constante cosmológica), su solución describe la geometría exterior de un espaciotiempo de cuatro dimensiones estático y esféricamente simétrico. Para entender dicha solución es razonable hacer un breve repaso de una métrica con simetría esférica.

El siguiente elemento de línea representa un espacio con simetría esférica,

$$ds^2 = -A(t,\rho)dt^2 + B(t,\rho)d\rho^2 + C(t,\rho)dtd\rho + D(t,\rho)d\Omega_{n-2}^2 \ , \tag{2.3.1}$$

[2]La inclusión del término $-I_0$ es vital para remover divergencias en el cálculo de la acción Euclídea en un espaciotiempo asintóticamente plano.

considerando un cambio de variables $\rho \to r^2$, tal que,

$$D(t,\rho) = r^2 \ , \tag{2.3.2}$$

y diferenciando esta relación se obtiene que

$$2rdr = \dot{D}dt + D\text{'}d\rho \ , \tag{2.3.3}$$

donde $\dot{()}$ representa derivada respecto del tiempo y ()' representa la derivada respecto de ρ, asumiendo que $D\text{'} \neq 0$, tenemos que

$$d\rho = \frac{2r}{D\text{'}} - \frac{\dot{D}}{D\text{'}}dt \ , \tag{2.3.4}$$

de esta forma, el elemento de línea se reescribe como

$$ds^2 = -\tilde{A}(t,r)dt^2 + \tilde{B}(t,r)dr^2 + \tilde{C}(t,r)dtdr + r^2 d\Omega_{n-2}^2 \ , \tag{2.3.5}$$

donde $\tilde{A}(t,r)$, $\tilde{B}(t,r)$ y $\tilde{C}(t,r)$ son nuevas funciones que dependen de t, r y las funciones anteriores. Podemos eliminar el término fuera de la diagonal bajo un correcto cambio de coordenadas. Sea

$$dt = \tilde{D}(\tilde{t})d\tilde{t} - \frac{r\tilde{C}(t,r)}{2\tilde{A}(t,r)}dr \ , \tag{2.3.6}$$

entonces $g_{\tilde{t}r} = 0$. Bajo redefinición de funciones y renombrando la coordenada temporal, el elemento de línea se puede escribir como[3]

$$ds^2 = -f(t,r)dt^2 + \frac{dr^2}{g(t,r)} + r^2 d\Omega_{n-2}^2 \ . \tag{2.3.7}$$

Evaluamos la métrica (2.3.7) en las ecuaciones de campo (2.2.10) con $\Lambda = 0$ y de la componente tt obtenemos

$$G_t^{\ t} = \frac{1}{r^2}\left(g'(t,r) + g(t,r) - 1\right) = 0 \ , \tag{2.3.8}$$

[3] Las ecuaciones de Einstein implican $f(t,r) = g(t,r) = f(r)$.

esta ecuación tiene como solución

$$g(t,r) = 1 + \frac{K_1(t)}{r} \ . \tag{2.3.9}$$

Evaluando esta expresión en la componente rr, vemos que

$$\frac{1}{r^3 f(t,r)} \left[r f'(t,r)(K_1(t)+r) + f(t,r)K_1(t) \right] = 0 \ , \tag{2.3.10}$$

resolviendo esta última ecuación,

$$f(t,r) = K_2(t)\left(1 + \frac{K_1(t)}{r}\right) \ . \tag{2.3.11}$$

Usando (2.3.9) y (2.3.11) en la componente $\theta\theta$ de las ecuaciones de campo, se tiene

$$-\frac{1}{4}\frac{r\left(\dot{K}_2(t)(K_1(t)+r) - 2K_2(t)(K_1(t)+1)\frac{\partial}{\partial t} + 4K_2(t)\dot{K}_1(t)\right)}{(r+K_1(t))^3 K_2^2(t)}\dot{K}_1(t) = 0 \ , \tag{2.3.12}$$

como las funciones K_1 y K_2 son funciones auxiliares que, a lo más, dependen del tiempo, se sigue que $\dot{K}_1(t) = 0$, por lo que

$$K_1(t) = -2m \ , \tag{2.3.13}$$

donde m es una constante de integración vinculada con la masa gravitacional. Por otro lado, la función $K_2(t)$ se puede absorber bajo una redefinición de la coordenada temporal, entonces la expresión que resuelve todas las ecuaciones de campo es

$$f(t,r) = g(t,r) = f(r) = 1 - \frac{2m}{r} \ . \tag{2.3.14}$$

Esto quiere decir que un espaciotiempo esféricamente simétrico es entonces estático, en otras palabras, las ecuaciones de RG implican el Teorema de Birkhoff. Finalmente la métrica de Schwarzschild en cuatro dimensiones se escribe como

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \ . \tag{2.3.15}$$

2.4. Solución de Schwarzschild-Tangherlini

En 1963, Tangherlini [14] extendió la solución de Schwarzschild para dimensión arbitraria $n \geq 4$. Considerando como ansatz la métrica (2.3.7), cambiando $d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \rightarrow d\Omega_{n-2}^2$, donde $d\Omega_{n-2}^2$ representa el elemento de línea de la $(n-2)$-esfera y escogiendo por simplicidad $f(t,r) = g(t,r) = f(r)$, entonces la métrica a considerar es

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{n-2}^2 \ , \tag{2.4.1}$$

puede mostrarse que, al evaluar (2.4.1) en (2.2.10) con la constante cosmológica encendida, $f(r)$ obedece la siguiente ecuación

$$r^{n-3}f'(r) + (n-3)r^{n-4}(f(r)-1) + \frac{2}{n-2}\Lambda r^{n-4} = 0 \ , \tag{2.4.2}$$

donde $\Lambda = -\frac{(n-1)(n-2)}{2\ell^2}$ y ℓ^2 es el radio de anti-de Sitter e integrando una vez respecto de r, se tiene la siguiente ecuación algebraica

$$r^{n-3}(f(r)-1) - \frac{r^{n-1}}{\ell^2} = -\mu \ , \tag{2.4.3}$$

que tiene la solución de Tangherlini con constante cosmológica

$$f(r) = 1 - \frac{\mu}{r^{n-3}} + \frac{r^2}{\ell^2} \ , \tag{2.4.4}$$

donde μ es una constante de integración que se relaciona con la masa gravitacional.

2.4.1. Termodinámica

Hawking demostró que los agujeros negros poseen una termodinámica no trivial [15, 16]. A continuación derivaremos las propiedades termodinámicas más importantes para agujeros negros asintóticamente planos y asintóticamente AdS.

Espacio asintóticamente plano

Estudiaremos las propiedades termodinámicas de la solución de Schwarzschild-Tangherlini asintóticamente plana, es decir, calcularemos la temperatura, entropía y energía interna (masa) con la formulación Euclídea [17]. Substituyendo $t = -i\tau$ podemos construir la métrica y evaluar la acción en su forma Euclídea.

Temperatura

El elemento de línea (2.4.1) en su forma Euclídea se escribe como:

$$ds^2 = f(r)d\tau^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{n-2}^2 \ , \tag{2.4.5}$$

Cerca del horizonte, podemos expandir $f(r)$ en serie de Taylor, tal que

$$f(r) \approx \cancel{f(r_+)} + (r - r_+)f'(r_+) + \dots \ , \tag{2.4.6}$$

de esta forma, el elemento de línea cerca del horizonte,

$$ds_H^2 = (r - r_+)f'(r_+)d\tau^2 + \frac{dr^2}{(r - r_+)f'(r_+)} + r_+^2 d\Omega_{n-2}^2 \ , \tag{2.4.7}$$

describe un espacio $\mathbb{R}^2 \times S^{n-2}$, en efecto, con el cambio de variable $d\rho = \frac{dr}{\sqrt{(r-r_+)f'(r_+)}}$

$$ds^2 = \rho^2 d\left(\frac{f'(r_+)}{2}\tau\right)^2 + d\rho^2 + r_+^2 d\Omega_{n-2}^2 \ , \tag{2.4.8}$$

donde es requerido, para evitar singularidad cónica por déficit angular, que la coordenada τ tenga periodicidad β, de modo que

$$\int_0^\beta \frac{f'(r_+)}{2} d\tau = \int_0^{2\pi} d\varphi \ , \tag{2.4.9}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \beta &= \frac{4\pi}{f'(r_+)} \ , \\ &= \frac{4\pi r_+}{n-3} \ , \end{aligned} \tag{2.4.10}$$

equivalentemente, $\mu = \left(\frac{\beta(n-3)}{4\pi}\right)^{n-3}$. Dado que en presencia de una coordenada temporal Euclídea, podemos reconocer una temperatura que se identifica con el inverso del período del tiempo Euclídeo [13]. Luego la temperatura del agujero negro es

$$\begin{aligned} T &= \frac{\hbar}{k_B} \frac{(n-3)}{4\pi\mu^{1/(n-3)}} \ , \\ &= \frac{\hbar}{k_B} \frac{(n-3)}{4\pi r_+} \ . \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

Notemos que el resultado (2.4.10) es válido para cualquier solución esféricamente simétrica que satisface $g_{tt}g_{rr} = -1$.

Masa y Entropía

Escogiendo las coordenadas hiper-esféricas, $(t, r, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n-2})$, la solución de Schwarzschild-Tangherlini se escribe como sigue

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(1 - \frac{\mu}{r^{n-3}}\right) d\tau^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{\mu}{r^{n-3}}} + r^2 \left(d\phi_1^2 + \sin^2\phi_1 d\phi_2^2 + \ldots \right. \\ &\left. + \sin^2\phi_1 \cdots \sin^2\phi_{n-3} d\phi_{n-2}^2\right) \ . \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

Como $\Lambda = 0$ y como las métricas (2.4.12) y de Minkowski[4] son soluciones exactas a las ecuaciones de campo, entonces, en ambos casos $R = 0$, luego la acción Euclídea se reduce a

$$I_E[g] = \frac{1}{8\pi G_n} \left(\oint_{\partial\mathcal{M}} d^{n-1}y\sqrt{h}K - \oint_{\partial\mathcal{M}_0} d^{n-1}y\sqrt{h_0}K_0 \right) \ . \tag{2.4.13}$$

Consideraremos la superficie

$$\Phi = r - r_c = 0 \ , \tag{2.4.14}$$

con $r_c \to \infty$ un parámetro fijo pero arbitrario y sea n_a un vector normal y unitario a esta superficie, tal que,

$$n_a = \frac{\delta_a^r}{\sqrt{g^{rr}}} \ , \quad n^a = \delta_r^a \sqrt{g^{rr}} \ . \tag{2.4.15}$$

[4]Que define en este caso a la contribución de I_0 de (2.2.11).

Recordando que los términos de borde están evaluados en $\partial\mathcal{M}$, que en este caso corresponde a la superficie definida por $\lim_{r_c\to\infty} r - r_c = 0$, la curvatura extrínseca K toma la forma,

$$\begin{aligned}\lim_{r_c\to\infty} K\Big|_{r_c} &= -\lim_{r_c\to\infty}\left(g^{ab} - g^{rr}\delta^a_r\delta^b_r\right)\frac{\Gamma^r{}_{ab}}{\sqrt{g^{rr}}}\Bigg|_{r=r_c} ,\\ &= -\lim_{r_c\to\infty}\frac{1}{\sqrt{g^{rr}}}\Big(g^{tt}\Gamma^r{}_{tt} + g^{\phi_1\phi_1}\Gamma^r{}_{\phi_1\phi_1} + g^{\phi_2\phi_2}\Gamma^r{}_{\phi_2\phi_2} + \dots \\ &\quad + g^{\phi_{n-2}\phi_{n-2}}\Gamma^r{}_{\phi_{n-2}\phi_{n-2}}\Big)\Bigg|_{r=r_c} ,\end{aligned} \tag{2.4.16}$$

donde,

$$g^{tt}\Gamma^r{}_{tt} = -\frac{1}{2}f'(r) , \tag{2.4.17}$$

$$g^{\phi_i\phi_i}\Gamma^r{}_{\phi_i\phi_i} = -\frac{1}{2}f(r)g^{\phi_i\phi_i}\partial_r g_{\phi_i\phi_i} , \tag{2.4.18}$$

notemos que podemos simplificar[5] este calculo identificando lo siguiente

$$g_{\phi_i\phi_i} = r^2 F_i(\phi_1,\dots,\phi_i) , \tag{2.4.19}$$

$$g^{\phi_i\phi_i} = \frac{1}{r^2 F_i(\phi_1,\dots,\phi_i)} , \tag{2.4.20}$$

así, reescribimos (2.4.18) como,

$$g^{\phi_i\phi_i}\partial_r g_{\phi_i\phi_i} = \frac{2}{r} , \tag{2.4.21}$$

de modo que,

$$\lim_{r_c\to\infty} K\Big|_{r_c} = \lim_{r_c\to\infty}\frac{\sqrt{f(r)}}{2}\left[\frac{f'(r)}{f(r)} + \frac{2(n-2)}{r}\right]\Bigg|_{r_c} , \tag{2.4.22}$$

$$\lim_{r_c\to\infty} K_0\Big|_{r_c} = \lim_{r_c\to\infty}\frac{n-2}{r_c} . \tag{2.4.23}$$

[5]Dado que la métrica de la $(n-2)$-esfera es diagonal.

En estas coordenadas el determinante de la métrica inducida en $r = r_c$ es

$$\sqrt{h} = \sqrt{f(r_c)} r_c^{n-2} \sin^{n-3}\phi_1 \sin^{n-4}\phi_2 \ldots \sin\phi_{n-3} \ , \tag{2.4.24}$$

luego la acción Euclídea toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} I_E[g] =& \frac{1}{8\pi G_n} \lim_{r_c\to\infty} \int_{\Omega_{n-2}} d\Omega_{n-2} \left[\int_0^{\beta} d\tau r^{n-2} \frac{f(r)}{2} \left(\frac{f'(r)}{f(r)} + \frac{2(n-2)}{r} \right) \right. \\ & \left. - \int_0^{\beta_0} d\tau r^{n-2} \frac{(n-2)}{r} \right] \Bigg|_{r_c} , \\ =& \frac{\Omega_{n-2}}{8\pi G_n} \beta \lim_{r_c\to\infty} r^{n-2} \left[\frac{f'(r)}{2} + \frac{f(r)(n-2)}{r} - \frac{\beta_0}{\beta} \frac{(n-2)}{r} \right] \Bigg|_{r_c} , \end{aligned} \tag{2.4.25}$$

donde, Ω_{n-2} es el área de la $(n-2)-$esfera unitaria y β_0 es el periodo del tiempo Euclídeo de la métrica de Minkowski, sin embargo, en este espaciotiempo no hay horizonte de eventos, por lo que β_0 es arbitrario. Si exigimos que, asintóticamente, las componentes temporales de ambas métricas coincidan, entonces

$$\lim_{r_c\to\infty} \int_0^{\beta} \sqrt{f(r_c)} d\tau = \int_0^{\beta_0} d\tau \Rightarrow \frac{\beta_0}{\beta} = \lim_{r_c\to\infty} \sqrt{f(r_c)} \ , \tag{2.4.26}$$

posteriormente,

$$\begin{aligned} I_E[g] =& \frac{\Omega_{n-2}}{8\pi G_n} \beta \lim_{r_c\to\infty} r^{n-2} \left[\frac{f'(r)}{2} + \frac{(n-2)}{r} \left(f(r) - \sqrt{f(r)} \right) \right] \Bigg|_{r_c} , \\ \approx& \frac{\Omega_{n-2}}{8\pi G_n} \beta \lim_{r_c\to\infty} \left(-\frac{\mu}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{n-2}} \right) \right) \Bigg|_{r_c} , \\ =& -\frac{\Omega_{n-2}}{16\pi G_n} \left(\frac{n-3}{4\pi} \right)^{n-3} \beta^{n-2} \ . \end{aligned} \tag{2.4.27}$$

Los métodos euclídeos en teoría de campos permiten relacionar el valor de la acción Euclídea con la energía libre del sistema [13], luego podemos calcular la masa usando

$M = -\frac{\partial I_E}{\partial \beta}$, esto es,

$$\begin{aligned} M &= \frac{\Omega_{n-2}}{16\pi G_n}(n-2)\left[\frac{\beta(n-3)}{4\pi}\right]^{n-3} , \\ &= \frac{\Omega_{n-2}}{16\pi G_n}(n-2)\mu , \\ &= \frac{\Omega_{n-2}}{16\pi G_n}(n-2)r_+^{n-3} , \end{aligned} \tag{2.4.28}$$

mientras que la entropía,

$$\begin{aligned} S &= \left(1-\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\frac{k_B I_E}{\hbar} , \\ &= -\frac{k_B}{\hbar}\frac{\Omega_{n-2}}{16\pi G_n}\left(\frac{n-3}{4\pi}\right)^{n-3}\beta^{n-2} + \frac{\Omega_{n-2}}{16\pi G_n}(n-2)\left(\frac{n-3}{4\pi}\right)^{n-3}\beta^{n-2} , \\ &= \frac{k_B\Omega_{n-2}}{16\pi\hbar G_n}(n-3)\left(\frac{n-3}{4\pi}\right)^{n-3}\beta^{n-2} , \end{aligned} \tag{2.4.29}$$

luego, reemplazando la periodicidad β en términos de r_+, se tiene que

$$\begin{aligned} S &= \frac{k_B\Omega_{n-2}}{16\pi\hbar G_n}(n-3)\left(\frac{n-3}{4\pi}\right)^{n-3}\left(\frac{4\pi r_+}{n-3}\right)^{n-2} , \\ &= \frac{k_B}{\hbar G_n}\frac{r_+^{n-2}\Omega_{n-2}}{4} , \\ &= \frac{k_B}{\hbar G_n}\frac{A_{n-2}^+}{4} , \end{aligned} \tag{2.4.30}$$

donde A_{n-2}^+ es el área del horizonte de eventos. Es interesante notar que se satisface [18]

$$dM = TdS , \tag{2.4.31}$$

en efecto, podemos considerar que $M = M(r_+)$ y $S = S(r_+)$, luego diferenciando ambas funciones respecto de r_+ encontramos que

$$\begin{aligned} dM &= \frac{\partial M}{\partial r_+} dr_+ \ , \\ &= \frac{\Omega_{n-2}}{16\pi G_n}(n-2)(n-3)r_+^{n-4} dr_+ \ , \end{aligned} \tag{2.4.32}$$

mientras que el lado derecho de (2.4.31) se reescribe como sigue

$$\begin{aligned} TdS &= \frac{\hbar(n-3)}{k_B 4\pi r_+} \frac{\partial S}{\partial r_+} dr_+ \ , \\ &= \frac{\hbar(n-3)}{k_B 4\pi r_+} \frac{k_B \Omega_{n-2}}{\hbar G_n 4}(n-2) r_+^{n-3} dr_+ \ , \\ &= \frac{\Omega_{n-2}}{16\pi G_n}(n-2)(n-3)r_+^{n-4} dr_+ \ , \\ &\equiv dM \ . \end{aligned} \tag{2.4.33}$$

Espacio asintóticamente AdS

El cálculo de la acción Euclídea en espacios asintóticamente anti-De Sitter es diferente al que se realizó en la sección anterior, ya que, ahora las ecuaciones de campo no implican que $R = 0$. Esta diferencia produce otro tipo de divergencias al momento de integrar en todo el dominio de r cuando se calcula la acción Euclídea. A continuación se muestra el detalle del cálculo de la temperatura, masa y entropía.

Temperatura

Con la expresión (2.4.10) obtenemos el periodo del tiempo Euclídeo $t = -i\tau$ de cualquier solución esféricamente simétrica, en particular de (2.4.4) es,

$$\beta = \frac{4\pi \ell^2 r_+}{(n-3)\ell^2 + (n-1)r_+^2} \ , \tag{2.4.34}$$

luego, la temperatura del agujero negro Schwarzschild-Tangherlini AdS es

$$T = \frac{\hbar}{k_B} \frac{\left((n-3)\ell^2 + (n-1)r_+^2\right)}{4\pi \ell^2 r_+} \ . \tag{2.4.35}$$

Masa y entropía

Cuando $\Lambda \neq 0$, tomando la traza de las ecuaciones es fácil mostrar que

$$R = \frac{2n\Lambda}{n-2} = -\frac{n(n-1)}{\ell^2} \ , \tag{2.4.36}$$

luego la acción Euclídea, se puede expresar como

$$\begin{aligned} I_E[g] =& \frac{1}{16\pi G_n} \left(\int_{\mathcal{M}} d^n x \sqrt{g} \left(\frac{-2(n-1)}{\ell^2} \right) + \int_{\mathcal{M}_0} d^n x \sqrt{g} \left(\frac{-2(n-1)}{\ell^2} \right) \right. \\ & \left. +2 \oint_{\partial\mathcal{M}} d^{n-1} y \sqrt{h} K - 2 \oint_{\partial\mathcal{M}_0} d^{n-1} y \sqrt{h_0} K_0 \right) \ . \end{aligned} \tag{2.4.37}$$

Los términos de borde, al menos en esta solución que es asintóticamente anti-de Sitter, no contribuyen [17], en efecto,

$$\oint_{\partial\mathcal{M}} d^{n-1} y \sqrt{h} K - \oint_{\partial\mathcal{M}_0} d^{n-1} y \sqrt{h_0} K_0$$

$$= \Omega_{n-2} \lim_{r_c \to \infty} \left(\int_0^{\beta} d\tau r^{n-2} \sqrt{f(r)} K - \int_0^{\beta_0} d\tau \sqrt{f_0(r)} r^{n-2} K_0 \right) \Bigg|_{r_c} \ , \tag{2.4.38}$$

$$= \Omega_{n-2} \beta \lim_{r_c \to \infty} r^{n-2} \left(\sqrt{f(r)} K - \frac{\beta_0}{\beta} \sqrt{f_0(r)} K_0 \right) \Bigg|_{r_c} \ , \tag{2.4.39}$$

como β_0 es arbitrario, pues en la continuación Euclídea de AdS no debemos remover ninguna singularidad cónica, podemos fijarlo de forma que:

$$\int_0^{\beta} \sqrt{f(r)} d\tau = \int_0^{\beta_0} \sqrt{f_0(r)} d\tau \Rightarrow \frac{\beta_0}{\beta} = \sqrt{\frac{f(r)}{f_0(r)}} \ , \tag{2.4.40}$$

entonces,

$$\oint_{\partial\mathcal{M}} d^{n-1} y \sqrt{h} K - \oint_{\partial\mathcal{M}_0} d^{n-1} y \sqrt{h_0} K_0 = \Omega_{n-2} \beta \lim_{r_c \to \infty} r^{n-2} \sqrt{f(r)} \left(K - K_0 \right) \Bigg|_{r_c} \ , \tag{2.4.41}$$

donde K y K_0 son las curvaturas extrínsecas dadas por,

$$K = \frac{\sqrt{f(r)}}{2}\left[\frac{f'(r)}{f(r)} + \frac{2(n-2)}{r}\right]\Bigg|_{r_c} , \tag{2.4.42}$$

$$K_0 = \frac{\sqrt{f_0(r)}}{2}\left[\frac{f_0'(r)}{f_0(r)} + \frac{2(n-2)}{r}\right]\Bigg|_{r_c} , \tag{2.4.43}$$

vemos que tomando el límite $r_c \to \infty$ de $r^{n-2}\sqrt{f(r)}(K - K_0)$, la contribución de los términos superficiales van a cero,

$$\oint\limits_{\partial\mathcal{M}} d^{n-1}y\sqrt{h}K - \oint\limits_{\partial\mathcal{M}_0} d^{n-1}y\sqrt{h_0}K_0 \approx \Omega_{n-2}\beta \lim_{r_c\to\infty} \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)\Bigg|_{r_c} = 0 , \tag{2.4.44}$$

entonces, en la acción (2.4.37) solo hay contribuciones de los términos que están definidos sobre toda la variedad $\mathcal{M}$, es decir,

$$\begin{aligned}
I_E[g] &= -\frac{1}{8\pi G_n}\left(\int\limits_{\mathcal{M}} d^n x\sqrt{g}\frac{n-1}{\ell^2} - \int\limits_{\mathcal{M}_0} d^n x\sqrt{g_0}\frac{n-1}{\ell^2}\right) , \\
&= -\frac{\Omega_{n-2}}{8\pi G_n}\frac{(n-1)}{\ell^2}\left(\int_0^{\beta}\int_{r_+}^{\infty} d\tau dr r^{n-2} - \int_0^{\beta_0}\int_0^{\infty} d\tau dr r^{n-2}\right) , \\
&= -\frac{\Omega_{n-2}}{8\pi G_n}\frac{1}{\ell^2}\lim_{r_c\to\infty}\left(\beta(r_c^{n-1} - r_+^{n-1}) - \beta_0 r_c^{n-1}\right) , \\
&= -\frac{\Omega_{n-2}}{8\pi G_n}\frac{\beta}{\ell^2}\lim_{r_c\to\infty}\left(r_c^{n-1} - r_+^{n-1} - \sqrt{1 - \frac{\mu\ell^2}{r^{n-3}(\ell^2 + r^2)}}r_c^{n-1}\right) , \\
&= -\frac{\Omega_{n-2}}{8\pi G_n}\frac{\beta}{\ell^2}\lim_{r_c\to\infty}\left(\frac{\mu\ell^2}{2} - r_+^{n-1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r_c^2}\right)\right) , \\
&\approx -\frac{\Omega_{n-2}}{8\pi G_n}\frac{\beta}{\ell^2}\left(\frac{\mu\ell^2}{2} - r_+^{n-1}\right) , \\
&= -\frac{\Omega_{n-2}}{4G_n}\frac{\ell^2 r_+^{n-2} - r_+^n}{((n-3)\ell^2 + (n-1)r_+^2)} ,
\end{aligned} \tag{2.4.45}$$

se sigue que la masa M está dada por,

$$M = -\frac{\partial r_+}{\partial\beta}\frac{\partial I_E}{\partial r_+} , \tag{2.4.46}$$

derivando respecto de β en la ecuación (2.4.34), tenemos,

$$\frac{\partial r_+}{\partial \beta} = \frac{\left((n-3)\ell^2 + (n-1)r_+^2\right)^2}{4\pi\ell^2((n-3)\ell^2 - (n-1)r_+^2)} \ , \tag{2.4.47}$$

mientras que,

$$\frac{\partial I_E}{\partial r_+} = -\frac{\Omega_{n-2}}{4G_n} \frac{(n-2)r_+^{n-3}\left(\ell^4(n-3) - 2\ell^2 r_+^2 - (n-1)r_+^4\right)}{\left((n-3)\ell^2 + (n-1)r_+^2\right)^2} \ , \tag{2.4.48}$$

entonces, la masa queda como,

$$M = \frac{\Omega_{n-2}}{16\pi G_n}(n-2)r_+^{n-3}\left(1 + \frac{r_+^2}{\ell^2}\right) \ . \tag{2.4.49}$$

La entropía de esta geometría está dada por

$$\begin{aligned} S &= \left(1 - \beta\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\frac{k_B I_E}{\hbar} \ , \\ &= \frac{k_B\Omega_{n-2}}{4G_n\hbar}\left(-\frac{r_+^{n-2}(\ell^2 - r_+^2)}{(n-3)\ell^2 + (n-1)r_+^2} + \frac{r_+^{n-2}\ell^2(n-2)}{(n-3)\ell^2 + (n-1)r_+^2}\left(1 + \frac{r_+^2}{\ell^2}\right)\right) \ , \\ &= \frac{k_B\Omega_{n-2}r_+^{n-2}}{4G_n\hbar}\left(\frac{r_+^2 - \ell^2 + (n-2)\ell^2 + (n-2)r_+^2}{(n-3)\ell^2 + (n-1)r_+^2}\right) \ , \\ &= \frac{k_B A_{n-2}^+}{4G_n\hbar} \ . \end{aligned} \tag{2.4.50}$$

Al igual que en la sección anterior, se satisface $dM = TdS$, ya que,

$$dM = \frac{\Omega_{n-2}}{16\pi G_n}(n-2)\left[(n-3)r_+^{n-4} + (n-1)\frac{r_+^{n-2}}{\ell^2}\right] \ , \tag{2.4.51}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned} TdS &= \frac{\hbar}{4\pi k_B}\left(\frac{n-3}{r_+} + \frac{(n-1)r_+}{\ell^2}\right)\frac{k_B\Omega_{n-2}}{4\hbar G_n}(n-2)r_+^{n-3} \ , \\ &= \frac{\Omega_{n-2}}{16\pi G_n}(n-2)\left[(n-3)r_+^{n-4} + (n-1)\frac{r_+^{n-2}}{\ell^2}\right] \ , \\ &\equiv dM \ . \end{aligned} \tag{2.4.52}$$

2.5. Solución de Kerr y ansatz de Kerr-Schild

En 1963 Kerr [19] publicó su solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein sin constante cosmológica que describen un agujero negro con rotación. El procedimiento que usó Kerr para derivar su solución no es abarcado aquí, el método a usar para obtener la métrica de Kerr será mediante el ansatz de Kerr-Schild [10], que fue descubierto un año después de la publicación original. A continuación se integrará la solución de Kerr en RG usando el ansatz de Kerr-Schild, el cual ha tenido éxito al generalizar la solución de Kerr en dimensiones altas [20, 21] y para encontrar la solución rotante en Einstein-Gauss-Bonnet [11].

El ansatz de Kerr-Schild consiste en separar la métrica de la siguiente forma

$$g_{ab} = \bar{g}_{ab} + F(x)\ell_a\ell_b \ , \tag{2.5.1}$$

donde $\bar{g}_{ab}$ representa una métrica que llamaremos semilla, $F(x)$ es una función de las coordenadas y ℓ_a es un vector nulo y geodésico respecto de $\bar{g}_{ab}$ y como consecuencia también lo es de g_{ab}, esto es,

$$\bar{g}^{ab}\ell_a\ell_b = g^{ab}\ell_a\ell_b = 0 \ , \tag{2.5.2}$$

$$\ell^b\bar{\nabla}_b\ell_a = \ell^b\nabla_b\ell_a = 0 \ . \tag{2.5.3}$$

Consideremos el siguiente elemento de línea,

$$ds^2 = d\bar{s}^2 + F(u, r, \theta, \phi')(du + a\sin^2\theta d\phi')^2 \ , \tag{2.5.4}$$

donde $d\bar{s}^2$ es el espaciotiempo de Minkowski en coordenadas oblatas

$$\begin{aligned} d\bar{s}^2 = &-du^2 + 2dudr + (r^2 + a^2\cos^2\theta)d\theta^2 + (r^2 + a^2)\sin^2\theta d\phi'^2 \\ &+ 2a\sin^2\theta d\phi' dr \ , \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

y donde el vector nulo y geodésico es $\ell_a = (1, 0, 0, a\sin^2\theta)$.

Como consecuencia de las ecuaciones de campo, se tiene que,

$$G^r_r = \frac{(a^2\cos^2\theta - r^2)}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^2}F - \frac{r}{(r^2+a^2\cos^2\theta)}\frac{\partial F}{\partial r} = 0 \ , \tag{2.5.6}$$

$$G^\phi_\theta = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2+a^2\cos^2\theta}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{2a^2\cos^2\theta}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^2}F = 0 \ , \tag{2.5.7}$$

este sistema de ecuaciones diferenciales tiene como solución,

$$F(r,\theta) = \frac{2mr}{r^2+a^2\cos^2\theta} \ , \tag{2.5.8}$$

donde m es una constante de integración que se relaciona con la masa del sistema gravitacional. Es posible mostrar que las restantes ecuaciones de Einstein quedan satisfechas por esta expresión. (2.5.4) con (2.5.8) definen el espaciotiempo de Kerr.

Siguiendo el camino del ansatz de Kerr-Schild, es posible encontrar otras soluciones rotantes en teorías alternativas a RG [22], no obstante, a pesar de que este ansatz posee buenas propiedades, las ecuaciones aumentan su complejidad rápidamente al tener en cuenta contribuciones de orden superior en la curvatura.

2.5.1. Gravedad superficial y temperatura

Una forma de calcular la temperatura en agujeros negros estacionarios es mediante la gravedad superficial κ [23], ya que, estos poseen una horizonte de Killing que se relaciona directamente con la temperatura del agujero negro. En efecto el horizonte de eventos es un horizonte de Killing y un espaciotiempo estacionario posee un campo de Killing, el cual es normal al horizonte del agujero negro. En efecto, en el horizonte la gravedad superficial satisface

$$\nabla_a\left(\xi_b\xi^b\right) = -2\kappa\xi_a \ , \tag{2.5.9}$$

donde ξ es un vector de Killing normal al horizonte. Usando el Teorema de Frobenius y la ecuación de Killing, se puede derivar el siguiente resultado

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}\left(\nabla_a\xi_b\right)\left(\nabla^a\xi^b\right)\bigg|_{r_+} \ , \tag{2.5.10}$$

y como se mostró en [24], la temperatura se relaciona con la gravedad supercial de la siguiente forma

$$T = \frac{\kappa}{2\pi}\frac{\hbar}{k_B} \ . \tag{2.5.11}$$

Consideremos el espaciotiempo de Kerr en las coordenadas de Boyer-Lindquist, usando el cambio

$$u = t' + r \ , \ t' = t + 2m\int \frac{rdr}{r^2 - 2mr + a^2} \ , \ \phi' = \phi - a\int \frac{dr}{r^2 - 2mr + a^2} \ , \tag{2.5.12}$$

el elemento de línea adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right)dt^2 - \frac{4amr\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}dtd\phi + \left(\frac{r^2 + a^2\cos^2\theta}{r^2 - 2mr + a^2}\right)dr^2 \\ &+ (r^2 + a^2\cos^2\theta)d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2mr\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right)\sin^2\theta d\phi^2 \ . \end{aligned} \tag{2.5.13}$$

Esta métrica tiene como vector Killing

$$\xi^a = [1, 0, 0, \Omega] \ , \tag{2.5.14}$$

donde Ω es la velocidad angular del agujero negro que se calcula como

$$\begin{aligned} \Omega &= -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\bigg|_{r_+} \ , \\ &= \frac{2amr_+\sin^2\theta}{\sin^2\theta((r_+^2 + a^2)\rho^2 + 2mr_+a^2\sin^2\theta)} \ , \\ &= \frac{a}{2mr_+} \ . \end{aligned} \tag{2.5.15}$$

Sin embargo, en estas coordenadas κ diverge, como podría haberse anticipado, porque estas coordenadas no están bien definidas en el horizonte. Para obtener un resultado finito es posible usar el siguiente cambio coordenado

$$v = t + r' \ , \qquad dr' = \frac{r^2 + a^2}{r^2 - 2mr + a^2}dr \ , \qquad d\chi = d\phi + \frac{adr}{r^2 - 2mr + a^2} \ , \tag{2.5.16}$$

luego redefiniendo $r' \to r$, la métrica de Kerr toma la forma

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\frac{r^2 - 2mr + a^2}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\left(dv - a\sin^2\theta d\chi\right)^2 + (r^2 + a^2\cos^2\theta)d\theta^2 \\ &+ \frac{\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\left(adv - (r^2 + a^2)d\chi\right)^2 + (dv - a\sin^2\theta d\chi)dr \ . \end{aligned} \tag{2.5.17}$$

El vector de Killing ξ^a transforma como

$$\bar{\xi}^a = \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^b}\xi^b \ , \tag{2.5.18}$$

y por lo tanto sus componentes en el nuevo sistema coordenado están dadas por

$$\bar{\xi}^v = \frac{\partial v}{\partial t}\xi^t + \frac{\partial v}{\partial r}\xi^r + \frac{\partial v}{\partial \theta}\xi^\theta + \frac{\partial v}{\partial \phi}\xi^\phi = 1 \ , \tag{2.5.19}$$

$$\bar{\xi}^{r'} = \frac{\partial r'}{\partial t}\xi^t + \frac{\partial r'}{\partial r}\xi^r + \frac{\partial r'}{\partial \theta}\xi^\theta + \frac{\partial r'}{\partial \phi}\xi^\phi = 0 \ , \tag{2.5.20}$$

$$\bar{\xi}^\theta = \frac{\partial \theta}{\partial t}\xi^t + \frac{\partial \theta}{\partial r}\xi^r + \frac{\partial \theta}{\partial \theta}\xi^\theta + \frac{\partial \theta}{\partial \phi}\xi^\phi = 0 \ , \tag{2.5.21}$$

$$\bar{\xi}^\chi = \frac{\partial \chi}{\partial t}\xi^t + \frac{\partial \chi}{\partial r}\xi^r + \frac{\partial \chi}{\partial \theta}\xi^\theta + \frac{\partial \chi}{\partial \phi}\xi^\phi = \Omega \ . \tag{2.5.22}$$

Entonces,

$$\kappa^2 = \frac{(r_+^2 - a^2)^2}{4r_+^2(a^2 + r_+^2)^2} \ , \tag{2.5.23}$$

$$\kappa = \frac{r_+^2 - a^2}{2r_+(a^2 + r_+^2)} \ , \tag{2.5.24}$$

luego, la temperatura del agujero negro de Kerr es

$$T = \frac{\hbar}{k_B}\frac{(r_+^2 - a^2)}{4\pi r_+(a^2 + r_+^2)} \ , \tag{2.5.25}$$

observemos que, cuando $a = 0$ se recupera el resultado para el agujero negro de Schwarzschild.

Capítulo 3

Agujeros negros en Teorías $\mathcal{L}(R_{abcd})$

La acción de Einstein-Hilbert provee las ecuaciones de campo de la RG, la cual es la teoría más simple que se puede construir a partir de escalares de curvatura. La acción de Einstein-Hilbert forma parte de diferentes familias de teorías, en particular, es miembro de una familia conocida como teorías $\mathcal{L}(R_{abcd})$ o $\mathcal{L}(g^{ab}, R_{abcd})$. Estas teorías están caracterizadas por contener contracciones de la métrica y del tensor de Riemann, sin incluir derivadas del Riemann. Dentro de este conjunto hay una subclase de teorías llamadas *tipo Einstein* [25], las cuales poseen las mismas ecuaciones de campo linealizadas de RG, con una constante de Newton efectiva. Miembros de esta clase de teorías son por ejemplo las teorías de Lovelock [4], y más recientemente, las teorías de GCT [5, 6], entre otras [25].

En este capítulo se estudian las ecuaciones de movimiento para una teoría genérica, luego se caracterizan las ecuaciones de campo derivadas de la acción de Einstein-Hilbert, Einstein-Gauss-Bonnet, Lovelock a orden cúbico y de la teoría de GCT cúbica, para luego examinar soluciones analíticas en estas teorías, en particular soluciones con simetría esférica y soluciones en el régimen de rotaciones bajas.

A continuación, se muestra la deducción de las ecuaciones de campo para una teoría genérica $\mathcal{L}(g^{ab}, R_{abcd})$.

3.1. Ecuaciones de campo para $\mathcal{L}(R_{abcd})$

Consideremos el siguiente principio de acción,

$$I[g] = \int d^n x \sqrt{-g}\mathcal{L}(g^{ab}, R_{cdef}) \ , \tag{3.1.1}$$

donde g es el determinante de la métrica y $\mathcal{L}(g^{ab}, R_{abcd})$ representa una densidad Lagrangiana que depende de contracciones de la métrica y del tensor de Riemann [1].

Variando la acción respecto de δg^{ab} se tiene

$$\delta I[g] = \int d^n x \left\{ \delta(\sqrt{-g})\mathcal{L}(g^{ab}, R_{cdef}) + \sqrt{-g}\delta\mathcal{L}(g^{ab}, R_{cdef}) \right\} \ . \tag{3.1.2}$$

Notemos que $\delta\mathcal{L}$ se expande como sigue,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial R_{abcd}}\delta R_{abcd} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{ab}}\delta g^{ab} \ , \\ &= P^{abcd}\delta R_{abcd} + P_{ab}\delta g^{ab} \ , \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

donde se define $P^{abcd} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial R_{abcd}}$ y $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{ab}} \equiv P^{ab}$ [26]. Es posible relacionar P^{abcd} y P^{ab}, para ello es necesario calcular la derivada de Lie de $\mathcal{L}$ a lo largo de un difeomorfismo infinitesimal $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$, esto es

$$\begin{aligned} \pounds_\xi\mathcal{L} &= \xi^c\nabla_c\mathcal{L} \ , \\ &= \xi^c\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{ab}}\nabla_c g^{ab} + \xi^e\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial R_{abcd}}\nabla_e R_{abcd} \ , \\ &= \xi^e P^{abcd}\nabla_e R_{abcd} \ . \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Por otro lado, si pensamos que pequeños cambios en $\mathcal{L}$ están dados por la derivada de Lie, entonces,

$$\pounds_\xi\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{ab}}\pounds_\xi g^{ab} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial R_{abcd}}\pounds_\xi R_{abcd} \ , \tag{3.1.5}$$

[1]Para estudiar apropiadamente las ecuaciones de campo de este tipo de teorías es importante tener en cuenta que en la acción no se considerarán escalares de curvatura construidos con derivadas del tensor de Riemann.

expandindo la derivada de Lie del tensor de Riemann, vemos que

$$\begin{aligned}\pounds_\xi \mathcal{L} &= -2P_{ab}\nabla^a\xi^b + P^{abcd}\left(\xi^e\nabla_e R_{abcd} + (\nabla_{[a|}\xi^e)R_{e|b]cd} + (\nabla_{[c|}\xi^e)R_{abe|d]}\right) \ , \\ &= -2P_{ab}\nabla^a\xi^b + P^{abcd}\xi^e\nabla_e R_{abcd} + 4P_a{}^{cde}(\nabla^a\xi^b)R_{bcde} \ , \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

comparando con (3.1.4), concluimos que

$$P_{ab} = 2P_a{}^{cde}R_{bcde}. \ , \tag{3.1.7}$$

Por otro lado, expandiendo la variación del tensor de Riemann:

$$\begin{aligned}\delta R_{abcd} &= \delta(g_{ae}R^e{}_{bcd}) \ , \\ &= \delta(g_{ae})R^e{}_{bcd} + g_{ae}\delta R^e{}_{bcd}, \ , \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

y luego reemplazando (2.1.11)

$$\begin{aligned}P^{abcd}\delta R_{abcd} &= P^{abcd}R^e{}_{bcd}\delta g_{ae} + P^{abcd}g_{ae}\left(\nabla_c\delta\Gamma^e{}_{db} - \nabla_d\delta\Gamma^e{}_{cb}\right) \ , \\ &= P^{abcd}R^e{}_{bcd}\delta g_{ae} + P^{abcd}g_{ae}\nabla_c\delta\Gamma^e{}_{db} - P^{abcd}g_{ae}\nabla_d\delta\Gamma^e{}_{cb} \ , \\ &= P^{abcd}R^e{}_{bcd}\delta g_{ae} + 2P^{abcd}g_{ae}\nabla_c\delta\Gamma^e{}_{db}, \ , \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

para luego incluir (2.1.16), el segundo término del lado derecho de (3.1.9) queda como

$$\begin{aligned}2P^{abcd}g_{ae}\nabla_c\delta\Gamma^e{}_{db} =& \ P^{abcd}g_{ae}g^{ef}\left(\nabla_c\nabla_d\delta g_{bf} + \nabla_c\nabla_b\delta g_{df} - \nabla_c\nabla_f\delta g_{db}\right) \ , \\ =& \ P^{abcd}\left(\nabla_c\nabla_d\delta g_{ba} + \nabla_c\nabla_b\delta g_{da} - \nabla_c\nabla_a\delta g_{db}\right) \ , \\ =& \ 2P^{abcd}\nabla_c\nabla_b\delta g_{da} \ , \\ =& \ 2\nabla_c\left(P^{abcd}\nabla_b\delta g_{da}\right) - 2\nabla_b\left(\nabla_c\left(P^{abcd}\right)\delta g_{da}\right) \\ & + 2\left(\nabla_b\nabla_c P^{abcd}\right)\delta g_{da} \ , \\ =& \ 2\left(\nabla_b\nabla_c P^{abcd}\right)\delta g_{da} + \nabla_a A^a \ , \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

donde $A^a := 2\left(P^{abcd}\nabla_b\delta g_{da} - \delta g_{da}\nabla_b P^{acbd}\right)$.

De esta forma e ignorando términos de borde,

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= P^{abcd}R^{e}{}_{bcd}\delta g_{ae} - 2\left(\nabla^d\nabla^c P_{adcb}\right)\delta g^{ab} + 2P_a{}^{cde}R_{bcde}\delta g^{ab} \ , \\ &= \left(P_a{}^{cde}R_{bcde} + 2\nabla^c\nabla^d P_{acbd}\right)\delta g^{ab} \ . \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

Finalmente, reemplazando (2.1.7) y (3.1.11) en (3.1.2), encontramos

$$\delta S = \int d^n x \left\{ P_a{}^{cde}R_{bcde} + 2\nabla^c\nabla^d P_{acbd} - \frac{1}{2}g_{ab}\mathcal{L} \right\}\sqrt{-g}\delta g^{ab} \ . \tag{3.1.12}$$

Entonces la acción tomará un valor extremo ($\delta S = 0$) si se satisfacen las siguientes ecuaciones de campo

$$\mathcal{E}_{ab} = 2\nabla^c\nabla^d P_{acbd} + P_{acde}R_b{}^{cde} - \frac{1}{2}g_{ab}\mathcal{L} = 0 \ . \tag{3.1.13}$$

Esta expresión nos permite derivar cualquier ecuación de campo dado un Lagrangiano construido a partir de combinaciones algebraicas del tensor de Riemann y la métrica, excluyendo derivadas del tensor de Riemann. Puesto que el tensor P^{abcd} se define como la derivada del Lagrangiano respecto del tensor de Riemann es útil conocer la siguiente identidad,

$$\frac{\partial R_{abcd}}{\partial R_{ijkl}} = \frac{1}{2}\left(\delta_a^{[i}\delta_b^{j]}\delta_c^{[k}\delta_d^{l]} + \delta_a^{[k}\delta_b^{l]}\delta_c^{[i}\delta_d^{j]}\right) \ , \tag{3.1.14}$$

donde hemos usado la antisimetrización de peso uno

$$A_{[ab]} = \frac{1}{2}\left(A_{ab} - A_{ba}\right) \ . \tag{3.1.15}$$

3.1.1. Einstein-Hilbert

Podemos recuperar las ecuaciones de Einstein mediante la ecuación (3.1.13). Consideremos el Lagrangiano de Einstein-Hilbert con constante cosmológica, $\mathcal{L} =$

$R-2\Lambda$ y derivando respecto al tensor de Riemann obtenemos

$$\begin{aligned} P^{abcd} &= \frac{\partial R_{likj} g^{ij} g^{kl}}{\partial R_{abcd}} \ , \\ &= g^{c[a} g^{b]d} \ , \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

luego, encontramos que las ecuaciones de campo de Einstein son

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{ab} &= 2\nabla^c \nabla^d (g_{b[a} g_{c]d}) + g_{d[a} g_{c]e} R_b{}^{cde} - \frac{1}{2} g_{ab}(R-2\Lambda) \ , \\ &= R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R + g_{ab}\Lambda = 0 \ . \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

3.1.2. Teorías de Lovelock

La densidad Lagrangiana de Lovelock [4] es una generalización del término de Einstein-Hilbert. Sobre una variedad $2n$-dimensional, la densidad Lagrangiana se puede expresar como

$$\mathcal{L} = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \alpha_m \chi_{2m} \ , \tag{3.1.18}$$

donde χ_{2m} es la densidad de Euler, dada por,

$$\chi_{2m} = \frac{1}{2^m (2m)!} \delta^{[a_1}_{b_1} \ldots \delta^{a_{2m}]}_{b_{2m}} R^{b_1 b_2}_{a_1 a_2} \cdots R^{b_{2m-1} b_{2m}}_{a_{2m-1} a_{2m}} \ . \tag{3.1.19}$$

Con los primeros dos términos se recupera la acción de Einstein-Hilbert con constante cosmológica[2],

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \alpha_0 + \alpha_1 \frac{1}{2} \delta^{[a_1}_{b_1} \delta^{a_2]}_{b_2} R^{b_1 b_2}_{a_1 a_2} \ , \\ &= R - 2\Lambda \ . \end{aligned} \tag{3.1.20}$$

El principio de acción de la gravedad de Lovelock conduce a ecuaciones de movimiento de hasta segundo orden en la métrica, al igual que en el caso de Einstein-Hilbert,

[2]Fijando a $\alpha_0 = -2\Lambda$ y a $\alpha_1 = 2$.

pues para todas estas teorías, se satisface que

$$\nabla_c \nabla_d P_{a\ b}^{\ c\ d} \equiv 0 \ . \tag{3.1.21}$$

Eintein-Gauss-Bonnet

Consideremos la acción de Einstein-Hilbert con constante cosmológica complementada con la densidad de Euler cuatro, de modo que

$$\mathcal{L} = R - 2\Lambda + \alpha \chi_4 \ , \tag{3.1.22}$$

donde $\chi_4 = R^2 - 4R_{ab}R^{ab} + R_{abcd}R^{abcd}$ es la densidad Lagrangiana de Gauss-Bonnet y α es una constante de acoplamiento nueva con $[\alpha] = [M]^{-2}$. Estudiaremos las ecuaciones de campo que provienen solo de esta combinación cuadrática. Las ecuaciones de campo estarán caracterizadas por

$$\begin{aligned} P^{abcd} &= 2\left(R\frac{\partial R}{\partial R_{abcd}} - 4R^{ij}\frac{\partial R_{ij}}{\partial R_{abcd}} + R^{ijkl}\frac{\partial R_{ijkl}}{\partial R_{abcd}} \right) \ , \\ &= 2\left(Rg^{c[a}g^{b]d} - 4R^{e[b}g^{a][c}\delta^{d]}_{\ e} + R^{abcd} \right) \ , \end{aligned} \tag{3.1.23}$$

para calcular la divergencia covariante de P_{abcd} es necesario usar un par de propiedades, $\nabla_a R^a{}_b = \frac{1}{2}\nabla_b R$ y $\nabla_d R_{abc}{}^d = 2\nabla_{[b}R_{a]c}$, que son consecuencias de las identidades de Bianchi, así

$$\begin{aligned} \nabla_d P_{abc}{}^d &= 2\left(g_{c[a}\delta^d_{b]}\nabla_d R - 4\nabla_d R^e{}_{[b}g_{a][c}\delta^d_{e]} + \nabla_d R_{abc}{}^d \right) \ , \\ &= 2\left(g_{b[a}\nabla_{e]}R - 2(\nabla_d R^d{}_{[e}g_{a]b} + \nabla_{[a}R_{e]b}) + 2\nabla_{[e}R_{a]b} \right) \ , \\ &= 0 \ . \end{aligned} \tag{3.1.24}$$

Luego las ecuaciones de campo son

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_{ab} &= 2\left(R g_{d[a|} R_b{}^{cd}{}_{|c]} - 4R^e{}_{[c} g_{a]d} R_b{}^{cd}{}_e + R_{acde} R_b{}^{cde}\right) \\
&\quad - \frac{1}{2} g_{ab}\left(R^2 - 4R_{cd}R^{cd} + R_{cdef}R^{cdef}\right) \ , \\
&= \left(2RR_{ab} - 4R_{acbd}R^{cd} - 4R_{ac}R_b{}^c + 2R_{acde}R_b{}^{cde}\right) \\
&\quad - \frac{1}{2} g_{ab}\left(R^2 - 4R_{cd}R^{cd} + R_{cdef}R^{cdef}\right) \ . \qquad (3.1.25)
\end{aligned}
$$

Como la densidad de Gauss-Bonnet está dada por la densidad de Euler χ_4, su contribución a las ecuaciones de campo es no nula en dimensión $n \geq 5$, podemos visualizar esto con la traza de las ecuaciones de campo. En efecto,

$$
g^{ab}\mathcal{H}_{ab} = \frac{(4-n)}{2}\left(R^2 - 4R_{ab}R^{ab} + R_{abcd}R^{abcd}\right) \qquad (3.1.26)
$$

entonces, cuando $n = 4$ no hay contribución de los términos cuadráticos. Más aún,

$$
\mathcal{H}_a{}^b = -\frac{1}{8}\delta^{bc_1\ldots c_4}_{ad_1\ldots d_4} R_{c_1c_2}{}^{d_1d_2} R_{c_3c_4}{}^{d_3d_4} \ , \qquad (3.1.27)
$$

por lo tanto, para dimensión $n < 5$, $\mathcal{H}_a{}^b$ se anula idénticamente.

Lovelock tercer orden

La densidad χ_6 es una combinación lineal de los siguientes escalares,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 &= R_{acbd}R^{cedf}R_e{}^a{}_f{}^b \ , & \mathcal{L}_2 &= R_{abcd}R^{cdef}R_{ef}{}^{ab} \ , \\
\mathcal{L}_3 &= R_{abcd}R^{abc}{}_e R^{de} \ , & \mathcal{L}_4 &= R_{abcd}R^{abcd}R \ , \\
\mathcal{L}_5 &= R_{abcd}R^{ac}R^{bd} \ , & \mathcal{L}_6 &= R_{ab}R^{bc}R_c{}^a \ , \\
\mathcal{L}_7 &= R_{ab}R^{ab}R \ , & \mathcal{L}_8 &= R^3 \ ,
\end{aligned}
$$

de modo que, para tener ecuaciones de segundo orden en $n \geq 7$ proveniente de los términos cúbicos se tiene que

$$
\chi_6 = 4\mathcal{L}_2 - 8\mathcal{L}_1 - 24\mathcal{L}_3 + 3\mathcal{L}_4 + 24\mathcal{L}_5 + 16\mathcal{L}_6 - 12\mathcal{L}_7 + \mathcal{L}_8 \ . \qquad (3.1.28)
$$

Así podemos considerar la siguiente densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = R - 2\Lambda + \alpha_2\chi_4 + \alpha_3\chi_6 \ , \tag{3.1.29}$$

donde α_3 es una constante de acoplamiento, tal que, $[\alpha_3] = [M]^{-4}$.

Para construir la derivada de χ_6 respecto del Riemann es necesario considerar las siguiente relaciones

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial R_{abcd}} = 3\delta_{[i}^{\ [a}\delta_{k]}^{\ b]}\delta_{[j}^{\ [c}\delta_{l]}^{\ d]}R^{kmln}R_{m\ n}^{\ i\ j} = 3R^{ecf[a}R^{b]\ \ d}_{\ \ f\ e} \ , \tag{3.1.30}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial R_{abcd}} = 3\delta_{[i}^{\ [a}\delta_{j]}^{\ b]}\delta_{[k}^{\ [c}\delta_{l]}^{\ d]}g^{ko}g^{lp}R^{klmn}R_{mn}^{\ \ \ ij} = 3R^{abef}R^{cd}_{\ \ \ ef} \ , \tag{3.1.31}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial R_{abcd}} = R^{ab[c}_{\ \ \ \ m}R^{d]m} + R^{cd[a}_{\ \ \ \ m}R^{b]m} + R_{ijk}^{\ \ \ \ [b}g^{a][c}R^{d]kji} \tag{3.1.32}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_4}{\partial R_{abcd}} = 2R^{abcd}R + g^{c[a}g^{b]d}R_{ijkl}R^{ijkl} \ , \tag{3.1.33}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_5}{\partial R_{abcd}} = R^{c[a}R^{b]d} + 2\delta_i^{\ [a}\delta_j^{\ b]}g^{i[c}R^{d]ljk}R_{kl} \ , \tag{3.1.34}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_6}{\partial R_{abcd}} = \delta_{[n}^{\ [a}\delta_{i]}^{\ b]}\delta_{[m}^{\ [c}\delta_{l]}^{\ d]}g^{jl}g^{mn}R_j^{\ k}R_k^{\ i} = 3R_e^{\ [b}g^{a][c}R^{d]e} \ , \tag{3.1.35}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_7}{\partial R_{abcd}} = 2\delta_i^{[c}\delta_j^{d]}g^{i[a}R^{b]j}R + R_{ij}R^{ij}g^{c[a}g^{b]d} \ , \tag{3.1.36}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_8}{\partial R_{abcd}} = 3R^2g^{c[a}g^{b]d} \ , \tag{3.1.37}$$

entonces, las ecuaciones de campo para Lovelock a tercer orden en los escalares de curvatura quedan determinadas por

$$\begin{aligned} P^{abcd} = {} & 12R^{abef}R^{cd}_{\ \ \ ef} - 24R^{ecf[a}R^{b]\ \ d}_{\ \ f\ e} - 24R^{ab[c}_{\ \ \ \ m}R^{d]m} - 24R^{cd[a}_{\ \ \ \ m}R^{b]m} \\ & - 24R_{ijk}^{\ \ \ \ [b}g^{a][c}R^{d]kji} + 6R^{abcd}R + 3g^{c[a}g^{b]d}R_{ijkl}R^{ijkl} + 24R^{c[a}R^{b]d} \\ & + 48\delta_i^{\ [a}\delta_j^{\ b]}g^{i[c}R^{d]ljk}R_{kl} + 48R_e^{\ [b}g^{a][c}R^{d]e} - 24\delta_i^{[c}\delta_j^{d]}g^{i[a}R^{b]j}R \\ & - 12R_{ij}R^{ij}g^{c[a}g^{b]d} + 3R^2g^{c[a}g^{b]d} \ . \end{aligned} \tag{3.1.38}$$

Bajo un extenso cálculo, análogo al caso de Gauss-Bonnet, las ecuaciones de campo están dadas por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}_{ab} = {} & 3R_{ab}R^2 - 12R_a^cR_{cb} - 12R_{ab}R_{cd}R^{cd} + 24R_a^cR_c^dR_{db} - 24R_a^cR^{de}R_{cdeb} \\
& + 3R_{ab}R_{cdef}R^{cdef} - 12R_{ac}R_{bdef}R^{cdef} - 12RR_{acbd}R^{cd} + 6RR_{acde}R_b^{\ cde} \\
& + 24R_{acbd}R_e^cR^{ed} + 24R_{acde}R_b^dR^{ce} + 24R_{acbd}R_{ef}R^{cedf} - 12R_{acde}R^{fcde}R_{fb} \\
& - 12R_{acde}R^{cf}R_{bf}^{\ \ \ de} + 24R_a^{\ cde}R_d^fR_{efbc} - 12R_{acbd}R^c_{\ efg}R^{defg} \\
& - 6R_a^{\ cde}R_{de}^{\ \ \ fg}R_{fgcb} - 24R_{ac}^{\ \ \ de}R_{dfbg}R_e^{\ gcf} - \frac{1}{2}g_{ab}\chi_6 \ ,
\end{aligned} \tag{3.1.39}
$$

puede probarse además que se satisfacen las siguientes propiedades

$$
\nabla_d P_{abc}^{\ \ \ \ d} = 0 \qquad , \qquad g^{ab}\mathcal{K}_{ab} \propto (n-6)\chi_6 \ , \tag{3.1.40}
$$

y como en el caso de Gauss-Bonnet,

$$
\mathcal{K}_a^{\ b} = -\frac{1}{16}\delta^{bc_1\ldots c_6}_{ad_1\ldots d_6} R_{c_1c_2}^{\ \ \ \ \ d_1d_2} R_{c_3c_4}^{\ \ \ \ \ d_3d_4} R_{c_5c_5}^{\ \ \ \ \ d_5d_6} \ , \tag{3.1.41}
$$

por lo que, para dimensión $n < 7$, $\mathcal{K}_a^{\ b}$ se anula idénticamente.

3.1.3. Gravedad Cuasi-topológica cúbica

Para estudiar gravedad con contribuciones cúbicas en los escalares de curvatura en teorías de Lovelock es necesario escalar a dimensiones superiores, ya que, solo para $n \geq 7$ las ecuaciones que vienen de la contribución cúbica son no triviales. A pesar de esto, es posible estudiar teorías de gravedad con términos cúbicos en dimensión $n = 5$. De hecho, existe una combinación cúbica [5, 6] con ecuaciones de campo no triviales para $n \geq 5$, las cuales son de primer orden en un ansatz esféricamente simétrico, esto es, considerar la siguiente densidad Lagrangiana

$$
\mathcal{L} = R - 2\Lambda + \alpha_2\chi_4 + \alpha_3\mathcal{Z} \ , \tag{3.1.42}
$$

donde se define $\mathcal{Z}$ bajo la siguiente combinación cúbica en dimensión $n = 5$,

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} = c_1\mathcal{L}_1 + c_2\mathcal{L}_2 - \left(\frac{9c_1}{7} + \frac{60c_2}{7}\right)\mathcal{L}_3 + \left(\frac{3c_1}{8} + \frac{3c_2}{2}\right)\mathcal{L}_4 + \left(\frac{15c_1}{7} + \frac{72c_2}{7}\right)\mathcal{L}_5 \\ + \left(\frac{18c_1}{7} + \frac{64c_2}{7}\right)\mathcal{L}_6 - \left(\frac{33c_1}{14} + \frac{54c_2}{7}\right)\mathcal{L}_7 + \left(\frac{15c_1}{56} + \frac{11c_2}{14}\right)\mathcal{L}_8 \ . \end{aligned} \tag{3.1.43}$$

La doble libertad en los coeficientes c_1 y c_2 se debe a que en dimensión $n \leq 6$ cualquier interacción dada por una combinación cúbica puede ser reescrita adicionando χ_6 sin afectar las ecuaciones de movimiento. Por simplicidad y sin pérdida de generalidad fijaremos $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$, obteniendo

$$\mathcal{Z}' = \mathcal{L}_1 - \frac{9}{7}\mathcal{L}_3 + \frac{3}{8}\mathcal{L}_4 + \frac{15}{7}\mathcal{L}_5 + \frac{18}{7}\mathcal{L}_6 - \frac{33}{14}\mathcal{L}_7 + \frac{15}{56}\mathcal{L}_8 \ . \tag{3.1.44}$$

Las ecuaciones de movimiento en este caso estarán caracterizadas por el tensor

$$\begin{aligned}P^{abcd} = {}& 3R^{ecf[a}R^{b]}{}_{f}{}^{d}{}_{e} - \frac{9}{7}\left(R^{ab[c}{}_{m}R^{d]m} + R^{cd[a}{}_{m}R^{b]m} + R_{ijk}{}^{[b}g^{a][c}R^{d]kji}\right) \\ & + \frac{3}{4}R^{abcd}R + \frac{3}{8}g^{c[a}g^{b]d}R_{ijkl}R^{ijkl} + \frac{15}{7}R^{c[a}R^{b]d} + \frac{30}{7}\delta_i^{[a}\delta_j^{b]}g^{i[c}R^{d]ljk}R_{kl} \\ & + \frac{54}{7}R_e^{[b}g^{a][c}R^{d]e} - \frac{33}{7}\delta_i^{[c}\delta_j^{d]}g^{i[a}R^{b]j}R - \frac{33}{14}R_{ij}R^{ij}g^{c[a}g^{b]d} \\ & + \frac{45}{56}R^2g^{c[a}g^{b]d} \ , \end{aligned} \tag{3.1.45}$$

y con esto podemos definir las ecuaciones de campo provenientes de esta combinación cúbica como

$$\mathcal{Q}_{ab} = 2\nabla^c\nabla^d P_{acbd} + P_{acde}R_b{}^{cde} - \frac{1}{2}g_{ab}\mathcal{Z}' = 0 \ . \tag{3.1.46}$$

Una propiedad interesante es que las ecuaciones de movimiento de esta teoría para una métrica arbitraria son de hasta cuarto orden, sin embargo, la traza de las ecuaciones es de hasta segundo orden, en efecto, se satisface que,

$$\nabla_d P_a{}^{cad} = 0 \ . \tag{3.1.47}$$

3.2. Soluciones esféricamente simétricas

En esta sección revisaremos algunas soluciones estáticas y esféricamente simétricas. Consideraremos por simplicidad la métrica

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{n-2}^2 \ , \tag{3.2.1}$$

y evaluaremos en las ecuaciones de campo de las teorías vistas en la sección anterior, esto para el caso $\Lambda < 0$. Es importante notar que, tal como en RG, algunas de estas teorías satisfacen el Teorema de Birkhoff [5, 27–29].

3.2.1. Solución de Boulware-Deser

En esta sección se revisa brevemente la solución en Einstein-Gauss-Bonnet en dimensión $n = 5$ para luego mostrar su generalización a dimensión $n \geq 5$. Consideremos el principio de acción

$$I[g] = \int d^5x\sqrt{-g}\left(R + \frac{12}{\ell^2} + \alpha\chi_4\right) \ . \tag{3.2.2}$$

Al evaluar la métrica (2.4.1) en las ecuaciones de campo, $\mathcal{E}_{ab}$, donde

$$\mathcal{E}_{ab} = G_{ab} - \frac{6}{\ell^2}g_{ab} + \alpha\mathcal{H}_{ab} \ , \tag{3.2.3}$$

se tiene que

$$\mathcal{E}_t^t = \left(r^2 - 2\alpha r(f(r) - 1)\right) f'(r) + 2r(f(r) - 1) - \frac{4r^3}{\ell^2} = 0 \ , \tag{3.2.4}$$

cuya solución exacta fue encontrada originalmente en [30]

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{4\alpha}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{8\alpha\mu}{r^4} - \frac{8\alpha}{\ell^2}}\right) \ , \tag{3.2.5}$$

donde $\mu = \frac{16\pi GM}{3\Omega_3}$ y M es la masa del agujero negro.

Esta solución fue extendida a dimensión arbitraria $n \geq 5$ en [31], en efecto, el principio de acción a considerar es

$$I[g] = \int d^n x \sqrt{-g} \left(R + \frac{(n-1)(n-2)}{\ell^2} + \alpha \chi_4 \right) \ , \tag{3.2.6}$$

luego de la componente rr de las ecuaciones de movimiento se obtiene

$$\begin{aligned} &\left(r^{n-3} - 2(n-3)(n-4)r^{n-5}\alpha(f(r)-1)\right) f'(r) + (n-3)r^{n-4}(f(r)-1) \\ &- \alpha(n-3)(n-4)(n-5)r^{n-6}(f(r)-1)^2 - \frac{(n-1)r^{n-2}}{\ell^2} = 0 \ , \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

donde al integrar respecto de r se llega a la siguiente ecuación

$$(f(r)-1)\left(r^{n-3} - \alpha(n-3)(n-4)r^{n-5}(f(r)-1)\right) - \frac{r^{n-1}}{\ell^2} = -\mu \ , \tag{3.2.8}$$

siendo μ una constante de integración. Esta ecuación tiene como solución [32]

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{2\bar{\alpha}} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4\bar{\alpha}\mu}{r^{n-1}} - \frac{4\bar{\alpha}}{\ell^2}} \right) \ , \tag{3.2.9}$$

donde $\bar{\alpha} = (n-3)(n-4)\alpha$ y μ se relaciona con la masa gravitacional M, tal que,

$$M = \frac{(n-2)\Omega_{n-2}}{16\pi G}\mu \ . \tag{3.2.10}$$

Frente a la raíz cuadrada en (3.2.9) uno encuentra dos ramas, ya que f es solución de una ecuación cuadrática. La rama con signo $+$ no lleva a la solución de RG cuando $\bar{\alpha} = 0$, por lo tanto la descartamos.

3.2.2. Solución esférica en Lovelock hasta tercer orden

Al considerar la teoría de Lovelock hasta tercer orden para dimensión $n \geq 7$,

$$I[g] = \int d^n x \sqrt{-g} \left(R - 2\Lambda + \alpha_2 \chi_4 + \alpha_3 \chi_6 \right) \ . \tag{3.2.11}$$

las ecuaciones de campo están definidas por

$$\mathcal{E}_{ab} = G_{ab} - \frac{(n-1)(n-2)}{2\ell^2} g_{ab} + \alpha_2 \mathcal{H}_{ab} + \alpha_3 \mathcal{K}_{ab} = 0 \ . \tag{3.2.12}$$

Al evaluar la métrica (2.4.1) en (3.2.12), se verifica que la ecuación para $f(r)$ vista en [9] es una generalización de la expresión (3.2.7), la cual se puede escribir como

$$\begin{aligned}
&\big[r^{n-3} + 3\alpha_3(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)r^{n-7}(f(r)-1) \\
&-2\alpha_2(n-3)(n-4)r^{n-5}(f(r)-1)\big] f'(r) + (n-3)r^{n-4}(f(r)-1) \\
&- \alpha_2(n-3)(n-4)(n-5)r^{n-6}(f(r)-1)^2 \\
&+ \alpha_3(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)r^{n-8}(f(r)-1)^3 \\
&- \frac{(n-1)r^{n-2}}{\ell^2} = 0 \ .
\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

Está ecuación también posee una primera integral trivial, lo que conduce a

$$\begin{aligned}
&\alpha_3(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)r^{n-7}(f(r)-1)^3 + r^{n-3}(f(r)-1) \\
&- \alpha_2(n-3)(n-4)r^{n-5}(f(r)-1)^2 - \frac{r^{n-1}}{\ell^2} = -\mu \ ,
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

donde μ es una constante de integración que va a definir la masa del sistema. Tomando la solución real de esta ecuación cúbica, se tiene [33, 34]

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{3\bar{\alpha}_3}\left(\bar{\alpha}_2 + \sqrt[3]{\sqrt{\gamma + \beta^2(r)} + \beta(r)} - \sqrt[3]{\sqrt{\gamma + \beta^2(r)} - \beta(r)}\right) \ , \tag{3.2.15}$$

con

$$\gamma = \left(3\bar{\alpha}_3 - \bar{\alpha}_2^2\right)^3 , \quad \beta(r) = \bar{\alpha}_2^3 - \frac{9\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_3}{2} - \frac{27\bar{\alpha}_3^2}{2}\left(-\frac{1}{\ell^2} + \frac{\mu}{r^{n-1}}\right) \ , \tag{3.2.16}$$

donde $\bar{\alpha}_2$ y μ se siguen del caso de EGB y $\bar{\alpha}_3 = (n-3)(n-4)(n-5)(n-6)\alpha_3$.

3.2.3. Solución esférica en gravedad Cuasi-topológica cúbica

A diferencia de las teorías de Lovelock que poseen constantes relativas independientes de la dimensión, en GCT las constantes relativas entre los escalares de curvatura son sensibles a la dimensión. En este apartado revisaremos en particular la solución en dimensión $n = 5$ y su generalización a dimensiones superiores. Consideremos el siguiente principio de acción

$$I[g] = \int dx^5 \sqrt{-g}\left(R - 2\Lambda + \alpha_2\chi_4 + \alpha_3\mathcal{Z}'\right) \ , \tag{3.2.17}$$

donde $\mathcal{Z}'$ está definido en (3.1.44).

Evaluando la métrica (2.4.1) en las ecuaciones de campo caracterizadas por (3.1.45), se observa que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_t^t = \frac{3}{2r^3}\Bigg[&\left(r^2 - \frac{12\alpha_3}{7r^2}(f(r)-1)^2 - 4\alpha_2(f(r)-1)\right)f'(r) + 2r(f(r)-1)\\ &+\frac{8\alpha_3}{7r^3}(f(r)-1)^3 - \frac{4r^3}{\ell^2}\Bigg] = 0 \ .\end{aligned} \tag{3.2.18}$$

Al igual que en las teorías de Lovelock, la ecuación diferencial en simetría esférica permite una integral trivial, de modo que,

$$\frac{4\alpha_3}{7r^2}\left(f(r)-1\right)^3 + 2\alpha_2\left(f(r)-1\right)^2 - r^2(f(r)-1) + \frac{r^4}{\ell^2} = \mu \ . \tag{3.2.19}$$

Los detalles de la forma explícita de esta ecuación fueron discutidos de forma extensa en [6] y no serán abordados en este trabajo.

Para encontrar una expresión que sea solución en dimensiones superiores, la densidad Lagrangiana $\mathcal{Z}'$ se extiende a $\mathcal{Z}_n$, donde

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_n = \mathcal{L}_1 + \frac{1}{(2n-3)(n-4)}\Bigg(&\frac{3(3n-8)}{8}\mathcal{L}_3 - 3(n-2)\mathcal{L}_4 + 3n\mathcal{L}_5\\ &+6(n-2)\mathcal{L}_6 - \frac{3(3n-4)}{2}\mathcal{L}_7 + \frac{3n}{8}\mathcal{L}_8\Bigg) \ ,\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

del mismo modo, consideraremos la siguiente acción [6]

$$I[g] = \int d^n x\sqrt{-g}\left(R - \frac{(n-1)(n-2)}{\ell^2} + \alpha_2\chi_4 + \alpha_3\mathcal{Z}_n\right) \ , \tag{3.2.21}$$

con

$$\alpha_2 = \frac{\bar{\alpha}_2}{(n-3)(n-4)} \quad \text{y} \quad \alpha_3 = \frac{8(2n-3)\bar{\alpha}_3}{(n-6)(n-3)(3n^2-15n+16)} \ . \tag{3.2.22}$$

Como resultado de evaluar una métrica esféricamente simétrica en las ecuaciones de campo, se obtiene la ecuación

$$\bar{\alpha}_3\varphi^3(r) + \bar{\alpha}_2\varphi^2(r) + \varphi(r) + \frac{1}{\ell^2} = \frac{\mu}{r^{n-1}} \ . \tag{3.2.23}$$

Debemos notar que gracias al correcto reescalamiento de las constantes de acoplamiento, la dependencia en la dimensión n se redujo únicamente a la potencia de r.

3.3. Ansatz de rotación lenta

Cuando se estudian teorías de orden superior en la curvatura, un primer acercamiento a geometrías con rotación puede realizarse cuando pensamos en rotaciones bajas, es decir, estudiar la existencia de soluciones donde las funciones métricas son de hasta primer orden en el parámetro de rotación. Para motivar un ansatz de este tipo que sirva como guía en otras teorías nos apoyaremos en la solución aproximada en RG.

Recordemos la solución de Kerr en las coordenadas de Boyer-Lindquist (2.5.13),

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(1 - \frac{2mr}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right)dt^2 - \frac{4amr\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}dtd\phi + \left(\frac{r^2+a^2\cos^2\theta}{r^2-2mr+a^2}\right)dr^2 \\ &+ (r^2+a^2\cos^2\theta)d\theta^2 + \left(r^2+a^2+\frac{2a^2mr\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right)\sin^2\theta d\phi^2 \ . \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Cuando tomamos el límite $a \to 0$ y nos quedamos con los términos de hasta primer orden en a, la métrica de Kerr a bajas rotaciones queda como

$$ds^2 \approx -\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - \frac{2am}{r}\sin^2\theta dtd\phi \ , \tag{3.3.2}$$

que puede re-escribirse como el siguiente ansatz

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - 2ar^2h(r)\sin^2\theta dt d\phi \ , \qquad (3.3.3)$$

con $f(r) = 1 - \frac{2m}{r}$ y $h(r) = \frac{m}{r^3}$. Cabe destacar que las componentes g_{tt} y g_{rr} de (3.3.2) corresponden a las componentes de (2.3.15). La estructura de (3.3.3) puede ser usada para derivar soluciones a rotaciones bajas en otras teorías al calcular las ecuaciones de movimiento perturbativamente en el parámetro de rotación a hasta primer orden. El ansatz a considerar para dimensión n con un momento angular es

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Sigma^2 - 2ar^2h_1(r)\sin^2\theta dt d\phi_1 \ , \qquad (3.3.4)$$

donde $d\Sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi_1^2 + \cos^2\theta d\Omega_{n-4}^2$.

Un hecho consistente del ansatz de rotaciones bajas en las teorías estudiadas aquí, es que las ecuaciones de movimiento para $f(r)$ a primer orden en el/los parámetro/s de rotación no se ven alteradas y por lo tanto la función $f(r)$, que es solución en simetría esférica, no se ve modificada en el régimen de rotaciones bajas.

3.4. Soluciones con rotación lenta

En esta sección se muestran soluciones analíticas a rotaciones bajas asintóticamente AdS usando el ansatz (3.3.4) en las ecuaciones de campo de teorías de Lovelock, en particular, en Einstein-Gauss-Bonnet y Lovelock a orden cúbico. En ambos casos se encuentra una solución general para dimensión arbitraria con un momento angular.

3.4.1. Rotación lenta en Einstein-Gauss-Bonnet

Consideremos nuevamente el principio de acción de Einstein-Gauss-Bonnet en dimensión n,

$$I[g] = \int d^n x\sqrt{-g}\left(R + \frac{(n-1)(n-2)}{\ell^2} + \alpha\chi_4\right) \ . \qquad (3.4.1)$$

Al evaluar el ansatz (3.3.4) en las ecuaciones de movimiento que se derivan de este principio de acción, a orden lineal en a, se tiene que $f(r)$ obedece la ecuación (3.2.7), es decir, no se modifica en el régimen de bajas rotaciones. Reescribamos esa ecuación empleando el cambio $f(r) = 1 - r^2\varphi(r)$,

$$r^{n-1}(2\bar{\alpha}\varphi(r)+1)\varphi'(r) + (n-1)r^{n-2}\left(\varphi(r)(\bar{\alpha}\varphi(r)+1) + \frac{1}{\ell^2}\right) = 0 \ . \tag{3.4.2}$$

Integrando se obtiene

$$\varphi(r)(\bar{\alpha}\varphi(r)+1) + \frac{1}{\ell^2} = \frac{\mu}{r^{n-1}} \ . \tag{3.4.3}$$

Por otro lado, de la componente $t\phi$ encontramos lo siguiente

$$r^{n-2}\left(2\bar{\alpha}\varphi(r)+1\right)h_1''(r) + r^{n-3}\left(2r\bar{\alpha}\varphi'(r) + n(2\bar{\alpha}\varphi(r)+1)\right)h_1'(r) = 0 \ . \tag{3.4.4}$$

Combinando las expresiones (3.4.2), (3.4.3) y (3.4.4), obtenemos que

$$(\log h_1'(r))' = -\left(\frac{n}{r} + \frac{2\bar{\alpha}\varphi'(r)}{2\bar{\alpha}_2\varphi(r)+1}\right) \ , \tag{3.4.5}$$

$$= -\left(\log(r^n(2\bar{\alpha}\varphi(r)+1))\right)' \ , \tag{3.4.6}$$

y de esta forma, se deduce que

$$h_1(r) = \int \frac{C_1\varphi'(r)}{(n-1)\mu}dr + C_2 \ , \tag{3.4.7}$$

$$= \frac{C_1\varphi(r)}{(n-1)\mu} + C_2 \ . \tag{3.4.8}$$

Podemos determinar las constantes C_1 y C_2 comparando con el comportamiento asintótico encontrado en [7] y en efecto se encuentra que

$$C_1 = (n-1)\mu, \quad C_2 = 0 \ . \tag{3.4.9}$$

Como era de esperar, en la región asintótica, los efectos de los términos con potencias altas en la curvatura son despreciables (módulo la definición de una constante cosmológica efectiva).

De esta forma, finalmente obtenemos

$$h_1(r) = \varphi(r) = \frac{1}{2\bar{\alpha}}\sqrt{1 - \frac{4\bar{\alpha}\mu}{r^{n-1}} - \frac{4\bar{\alpha}}{\ell^2}}\ . \tag{3.4.10}$$

3.4.2. Rotación lenta en Lovelock hasta tercer orden

Al igual que en la sección anterior, tendremos en consideración solo un momento angular como fue reportado en [9], siendo así el principio de acción para dimensión $n \geq 7$

$$I[g] = \int d^n x\sqrt{-g}\left(R + \frac{(n-1)(n-2)}{\ell^2} + \alpha_2\chi_4 + \alpha_3\chi_6\right)\ . \tag{3.4.11}$$

Redefiniendo las constantes de acoplamiento tal que $\bar{\alpha_2} = (n-3)(n-4)\alpha_2$ y $\bar{\alpha}_3 = (n-3)(n-4)(n-5)(n-6)\alpha_3$ y haciendo el cambio $f(r) = 1 - r^2\varphi(r)$, el sistema de ecuaciones lleva a

$$\varphi(r) + \bar{\alpha}_2\varphi^2(r) + \bar{\alpha}_3\varphi^3(r) = \frac{m}{r^{n-1}} - \frac{1}{\ell^2}\ , \tag{3.4.12}$$

$$\mathcal{E}_{t\phi} = -r^{n-2}F(r)h''(r) + H(r)h'(r) = 0\ , \tag{3.4.13}$$

donde $F(r) = 1 + 2\bar{\alpha}_2\varphi(r) + 3\bar{\alpha}_3\varphi(r)$ y $H(r) = nF(r) + 2r\varphi'(r)(\bar{\alpha}_2 + 3\bar{\alpha}_3\varphi(r))$. Al igual que en el caso cuadrático, es posible reescribir la ecuación que determina a $h(r)$ en una expresión notablemente simple,

$$\begin{aligned}(\log(h'(r)))' &= -\left(\frac{n}{r} + \frac{(1 + 2\bar{\alpha}_2\varphi(r) + 3\bar{\alpha}_3\varphi(r))'}{1 + 2\bar{\alpha}_2\varphi(r) + 3\bar{\alpha}_3\varphi(r)}\right)\ ,\\ &= -\left(\log\left[r^n(1 + 2\bar{\alpha}_2\varphi(r) + 3\bar{\alpha}_3\varphi^2(r))\right]\right)'\ ,\\ &= \int\frac{C_2 dr}{r^n(1 + 2\bar{\alpha}_2\varphi(r) + 3\bar{\alpha}_3\varphi^2(r))} + C_1\ .\end{aligned} \tag{3.4.14}$$

Derivando la expresión (3.4.12) se tiene

$$1 + 2\bar{\alpha}_2\varphi(r) + 3\bar{\alpha}_3\varphi^2(r) = -\frac{(n-1)m}{r^n\varphi'(r)}\ , \tag{3.4.15}$$

y por lo tanto, escogiendo $C_2 = (n-1)m$ y $C_1 = 0$, recuperamos la solución vista en la sección anterior modificada con la contribución cúbica,

$$\begin{aligned} h(r) &= -\varphi(r) \ , \\ &= \frac{1}{3\bar{\alpha}_3}\left(\bar{\alpha}_2 + \sqrt[3]{\sqrt{\gamma+\beta^2(r)}+\beta(r)} - \sqrt[3]{\sqrt{\gamma+\beta^2(r)}-\beta(r)}\right) \ , \end{aligned} \tag{3.4.16}$$

donde γ y $\beta(r)$ están definidas de la misma forma que en la sección 3.2.2.

3.5. Kerr-Schild en Einstein-Gauss-Bonnet

En esta sección se revisará el trabajo publicado en [11], en el cual se encontró una solución exacta en la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet vía el ansatz de Kerr-Schild en cinco dimensiones.

Recordemos que las ecuaciones de movimiento derivadas de la acción de Einstein-Gauss-Bonnet toman la forma

$$\mathcal{E}_{ab} = G_{ab} + \Lambda g_{ab} + \alpha \mathcal{H}_{ab} = 0 \ . \tag{3.5.1}$$

De la traza de las ecuaciones de campo, podemos reescribir la constante cosmológica como

$$\Lambda = -\frac{(n-1)(n-2)}{2\ell^2}\left(1 - \frac{\alpha(n-3)(n-4)}{\ell^2}\right) \ . \tag{3.5.2}$$

Se destaca que bajo una combinación precisa de las constantes de acoplamiento entonces ℓ^{-2} tiene dos raíces iguales. Esto es cuando

$$\Lambda = -\frac{1}{8}\frac{(n-1)(n-2)}{(n-3)(n-4)\alpha} \ . \tag{3.5.3}$$

Recordemos que una métrica tipo Kerr-Schild tiene la siguiente forma

$$ds^2 = d\bar{s}^2 + F(x)(k_a dx^a)^2 \ , \tag{3.5.4}$$

y consideramos que la métrica semilla es la métrica de AdS en cinco dimensiones en coordenadas oblatas [35], esto es,

$$
\begin{aligned}
d\bar{s}^2 = &-\frac{\left(1+\frac{r^2}{l^2}\right)\Delta_\theta}{\Xi_a\Xi_b}dt^2 + \frac{r^2\rho^2}{\left(1+\frac{r^2}{l^2}\right)(r^+a^2)(r^2+b^2)}dr^2 + \frac{\rho^2}{\Delta_\theta}d\theta^2 \\
&+\frac{r^2+a^2}{\Xi_a}\sin^2\theta d\phi^2 + \frac{r^2+b^2}{\Xi_b}\cos^2\theta d\psi^2 \ , \qquad (3.5.5)
\end{aligned}
$$

con $\Delta_\theta = \Xi_a\cos^2\theta + \Xi_b\sin^2\theta$, $\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$, $\Xi_a = 1 - \frac{a^2}{l^2}$ y $\Xi_b = 1 - \frac{b^2}{l^2}$. Impondremos que $F = F(r,\theta)$, mientras que el vector nulo y geodésico [21] es

$$
k_a dx^a = \frac{\Delta_\theta dt}{\Xi_a\Xi_b} + \frac{r^2\rho^2 dr}{\left(1+\frac{r^2}{l^2}\right)(r^2+a^2)(r^2+b^2)} - \frac{a\sin^2\theta d\phi}{\Xi_a} - \frac{a\cos^2\theta d\psi}{\Xi_b} \ . \qquad (3.5.6)
$$

Observemos que la métrica semilla posee radio anti-de Sitter l^2 y no impondremos que sea el mismo radio anti-de Sitter de la teoría, a priori $\ell^2 \neq l^2$. Se define Λ_0 en términos de la semilla como

$$
\Lambda_0 = -\frac{(n-1)(n-2)}{2l^2}\left(1 - \frac{\alpha(n-3)(n-4)}{l^2}\right) \ . \qquad (3.5.7)
$$

Evaluando esta métrica en la traza de las ecuaciones en dimensión $n = 5$ tendremos la siguiente estructura

$$
g^{ab}\mathcal{E}_{ab} = 5(\Lambda - \Lambda_0) - \frac{(rH_1)''}{2r\rho^2} = 0 \ , \qquad (3.5.8)
$$

donde

$$
H_1 = \left(1 - \frac{4\alpha}{l^2}\right)H_2 + \alpha H_3, \quad H_2 = 3\rho^2 F(r,\theta), \quad H_3 = 2(4r^2 - \rho^2)\frac{F^2(r,\theta)}{\rho^2} \ . \qquad (3.5.9)
$$

Como solución a la ecuación (3.5.8), vemos que,

$$
H_1 = 6C_1(\theta) + \frac{C_2(\theta)}{r} + \frac{\Lambda - \Lambda_0}{6}r^2(10\rho^2 - 7r^2) \ . \qquad (3.5.10)
$$

Luego, se sigue que la ecuación para F es

$$2\alpha(4r^2-\rho^2)\frac{F^2}{\rho^2}+3\left(1-\frac{4\alpha}{l^2}\right)\rho^2F=6C_1(\theta)+\frac{C_2(\theta)}{r}+\frac{\Lambda-\Lambda_0}{6}r^2(10\rho^2-7r^2)\ , \tag{3.5.11}$$

y esta ecuación tiene como solución

$$F(r,\theta)=A(-1\pm\sqrt{1+B})\ , \tag{3.5.12}$$

con

$$A=\frac{3(1-4\alpha/l^2)\rho^2}{4\alpha(4r^2-\rho^2)},\quad B=\frac{8\alpha(4r^2-\rho^2)}{9\rho^6(1-4\alpha/l^2)^2}H_1\ . \tag{3.5.13}$$

Sin embargo, (3.5.12) no es solución de las ecuaciones de campo para valores arbitrarios de las constantes de acoplamiento, excepto en el caso en que

$$\Lambda\neq\Lambda_0\quad \text{y}\quad \Lambda=-\frac{3}{4\alpha}\Rightarrow\frac{4\alpha}{\ell^2}=1\ , \tag{3.5.14}$$

luego, la función F se reduce a la simple expresión

$$F(r,\theta)=-\left(\frac{1}{\ell^2}-\frac{1}{l^2}\right)\rho^2\ . \tag{3.5.15}$$

Capítulo 4

Principio de Acción Reducida

Un camino seguro para encontrar las ecuaciones de movimiento correctas es valuar una métrica dada en las ecuaciones de campo, sin embargo, cuando se consideran teorías con derivadas altas de la métrica, no es tarea fácil calcular las ecuaciones de campo cuando el principio de acción es lo suficientemente intrincado, como por ejemplo en [4–6,28,29,36]. Más aún, evaluar una métrica con funciones desconocidas que dependen de más de una coordenada puede significar una tarea excesivamente larga, aún usando softwares de cálculo simbólico.

Es bien sabido que al evaluar un ansatz esféricamente simétrico en la acción gravitacional que se esté considerando y a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange, es posible reproducir las mismas ecuaciones que se obtienen de evaluar la métrica en las ecuaciones de campo [37,38], sin embargo, esto no es siempre válido para métricas rotantes. En este capítulo se prueba un ansatz a rotaciones bajas para el método de la acción reducida y se muestra su consistencia comparando con los resultados de la sección 3.4.

4.1. Teorema de Birkhoff en gravedad Cuasi-topológica cúbica

Recordemos que el Teorema de Birkhoff en RG muestra que toda solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de campo es independiente del tiempo, es decir, estática y además la solución es única.

En teorías con potencias superiores en la curvatura también existen familias de teorías que admiten soluciones que satisfacen el Teorema de Birkhoff [27, 39, 40]. Es interesante notar que podemos probar si una teoría admite este teorema, al menos, de dos formas posibles. La primera sería considerar un ansatz esféricamente simétrico de la forma (2.3.7) y evaluando directamente en las ecuaciones de campo de la teoría.

Consideremos en particular una teoría puramente cúbica [5,6] en dimensión $n = 5$,

$$I[g] = \int d^5x\sqrt{-g}\mathcal{Z}' \ , \tag{4.1.1}$$

las ecuaciones de movimiento de esta teoría están dadas por

$$\mathcal{E}_{ab} = 2\nabla^c\nabla^d P_{acbd} + P_{acde}R_b{}^{cde} - \frac{1}{2}g_{ab}\mathcal{Z}' = 0 \ , \tag{4.1.2}$$

donde P^{abcd} es el calculado en (3.1.45), mientras que la métrica estará dada por

$$ds^2 = -f(t,r)dt^2 + \frac{dr^2}{g(t,r)} + r^2 d\Omega_3^2. \tag{4.1.3}$$

Denotaremos las derivadas respecto de r por $()'$ y respecto de t por $\dot{()}$. De las ecuaciones de campo tenemos que,

$$\mathcal{E}_{tt} = -\frac{6(g(t,r)-1)^2(2g(t,r)-3g'(t,r)-2)f(t,r)}{7r^6} = 0 \ , \tag{4.1.4}$$

$$\mathcal{E}_{rr} = -\frac{18(g(t,r)-1)^2 g(t,r) r f'(r) + 12 f(t,r)(g(t,r)-1)^3}{7r^6} = 0 \ , \tag{4.1.5}$$

$$\mathcal{E}_{tr} = \frac{18\dot{g}(t,r)(g(t,r)-1)^2}{7g(t,r)r^5} = 0 \ , \tag{4.1.6}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\theta\theta} = \frac{6(g(t,r)-1)}{r^4 f^2(t,r) g^2(t,r)} \Big(& r^2 f(t,r) g^3(t,r)(g(t,r)-1) f''(t,r) \\
& + r^2 f(t,r) g(t,r)(g(t,r)-1)\ddot{g}(t,r) - \frac{1}{2} r^2 g^3(t,r)(g(t,r)-1) f''(t,r) \\
& + \frac{1}{2} r f(t,r) g^2(t,r) \left(r(5g(t,r)-1) g'(t,r) - 4g^2(t,r) + 4g(t,r) \right) f'(t,r) \\
& - 2r g^2(t,r) f^2(t,r)(g(t,r)-1)\dot{g}(t,r) + \frac{1}{2} r^2 f(t,r)(g(t,r)+3)\dot{g}^2(t,r) \\
& - \frac{1}{2} r^2 g(t,r)(g(t,r)-1)\dot{f}(t,r)\dot{g}(t,r) + 2f^2(t,r) g^2(t,r)(g(t,r)-1)^2 \Big) = 0 \ ,
\end{aligned}
\tag{4.1.7}
$$

Consecuencia de la ecuación (4.1.4) es que

$$g(t,r) = H_1(t) r^{\frac{2}{3}} + 1 \ , \tag{4.1.8}$$

luego, evaluando en la ecuación (4.1.4) obtenemos

$$f(t,r) = H_2(t)(H_1(t) r^{\frac{2}{3}} + 1) \ . \tag{4.1.9}$$

Notemos que podemos reescalar la cordenada temporal de modo que la función $H_2(t) \equiv 1$, es decir,

$$f(t,r) = g(t,r) \ . \tag{4.1.10}$$

Ahora, si evaluamos (4.1.8) en la ecuación (4.1.6), podemos concluir rápidamente que $H_1(t) = C$ es una constante de integración. Finalmente podemos decir que, como consecuencia de las ecuaciones de campo y bajo reescalamiento de la coordenada temporal, se tiene

$$g(t,r) = g(r) = C r^{\frac{2}{3}} + 1 \ , \tag{4.1.11}$$

$$f(t,r) = f(r) = C r^{\frac{2}{3}} + 1 \ , \tag{4.1.12}$$

verificandose la consistencia de la solución, ya que, al evaluar en la componente $\theta\theta$

y $\phi\phi$ de las ecuaciones de campo se obtiene

$$\mathcal{E}_{\theta\theta} = \mathcal{E}_{\phi\phi} \equiv 0 \ . \tag{4.1.13}$$

Por lo tanto,

$$ds^2 = -\left(Cr^{\frac{2}{3}} + 1\right) dt^2 + \frac{dr^2}{Cr^{\frac{2}{3}} + 1} + r^2 d\Omega_3^2 \ . \tag{4.1.14}$$

De esta forma se verifica el teorema de Birkhoff para la acción puramente Cuasi-topológica cúbica. También es posible verificar el teorema a través de la acción reducida haciendo uso de la siguiente métrica [38],

$$ds^2 = -f(t,r)g^2(t,r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(t,r)} + h(t,r)dtdr + r^2 d\Omega_3^2 \ . \tag{4.1.15}$$

Luego, evaluando en la acción (4.1.1) y calculando las ecuaciones de Euler-Lagrange respecto de estas tres funciones,

$$\begin{aligned}\frac{\delta I}{\delta f} &= g(t,r)\Bigg(h(t,r)\dot{g}(t,r) - 2f(t,r)g^2(t,r)g'(t,r) \\ &\quad - \frac{1}{2}g(t,r)\left(h(t,r)f(t,r)h'(t,r) + 2\dot{h}(t,r)\right)\Bigg)\Bigg((f(t,r)-1)g^2(t,r) \\ &\quad - \frac{1}{4}h^2(t,r)\Bigg)^2 , \end{aligned} \tag{4.1.16}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta I}{\delta g} &= g(t,r)\Bigg[rh'(t,r)f^2(t,r)h(t,r) + rh(t,r)\dot{f}(t,r) \\ &\quad - 2f(t,r)\Bigg(rf'(t,r)g^2(t,r) - \frac{g^2(t,r)}{3}(f(t,r)-1) + \frac{1}{6}h^2(t,r)\Bigg)\Bigg]\Bigg[\\ &\quad g^2(t,r)(f(t,r)-1) - \frac{1}{4}h^2(t,r)\Bigg]^2 , \end{aligned} \tag{4.1.17}$$

$$\frac{\delta I}{\delta h} = \Bigg[rg^2(t,r)\left(\frac{1}{2}f(t,r)h(t,r)f'(t,r) + \dot{f}(t,r)\right) + h(t,r)f(t,r)\Bigg(rf(t,r)g(t,r)g'(t,r) - \frac{1}{3}(f(t,r)-1)g^2(t,r) + \frac{1}{12}h^2(t,r)\Bigg)\Bigg(g^2(t,r)(f(t,r)-1) - \frac{1}{4}h^2(t,r)\Bigg)^2 . \tag{4.1.18}$$

Para que este sistema de ecuaciones tenga una solución compatible con (4.1.14) debemos evaluar $h(t,r)=0$, tal que

$$\left.\frac{\delta I}{\delta f}\right|_{h=0} = (f(t,r)-1)^2 g^7(t,r)f(t,r)g'(t,r) = 0 \Rightarrow g(t,r) = g(t) \tag{4.1.19}$$

$$\left.\frac{\delta I}{\delta g}\right|_{h=0} = g^7(t,r)\left(3rf'(t,r) - 2f(t,r) + 2\right) = 0 \Rightarrow f(t,r) = H(t)r^{\frac{2}{3}} + 1 \tag{4.1.20}$$

$$\left.\frac{\delta I}{\delta g}\right|_{h=0} = r(f(t,r)-1)^2 g^6(t,r)\dot{f}(t,r) = 0 \Rightarrow H(t) = C, \tag{4.1.21}$$

al igual que antes, podemos reescalar la coordenada temporal quitando la dependencia temporal de $g(t)$ y de esa forma se muestra, a través de la acción reducida, que la acción (4.1.1) satisface el Teorema de Birkhoff.

4.2. Soluciones esféricamente simétricas

El resultado de la sección anterior también nos indica que podemos resolver satisfactoriamente las ecuaciones para una métrica esféricamente simétrica sin necesidad de calcular las ecuaciones de campo en forma covariante. En efecto, como se mostró en [41], para cualquier Lagrangiano del tipo $\mathcal{L}(g^{ab}, R_{abcd}, \nabla_a R_{bcde}, \dots)$ construido como una combinación lineal de escalares de curvatura, considerando la siguiente métrica

$$ds^2 = -N^2(r)f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2_{n-2} \ , \tag{4.2.1}$$

donde se define $L_{N,f} = \sqrt{-g}\mathcal{L}\big|_{g_{ab}}$ y $L_f = L_{N,f}\big|_{N=1}$, si la siguiente ecuación de Euler-Lagrange se anula idénticamente

$$\frac{\delta L_f}{\delta f} \equiv \frac{\partial L_f}{\partial f} - \frac{d}{dr}\frac{\partial L_f}{\partial f'} + \frac{d^2}{dr^2}\frac{\partial L_f}{\partial f''} - \cdots = 0 \quad \forall f(r) \ , \tag{4.2.2}$$

entonces, la teoría admite soluciones en el vacío donde la ecuación para $f(r)$ tiene una primera integral trivial y su constante de integración es la masa ADM [42].

A continuación se muestra como a través del método de la acción reducida se reproducen las ecuaciones de movimiento de la sección 3.2.

4.2.1. Acción reducida en simetría esférica para Einstein-Hilbert

Sea el principio de acción

$$I[g] = \int d^n x \sqrt{-g}\left(R + \frac{(n-1)(n-2)}{\ell^2}\right) \ . \tag{4.2.3}$$

Evaluando la métrica (4.2.1), tenemos

$$I[N,f] = \Omega_{n-2} \iint dtdr L_{N,f} \ , \tag{4.2.4}$$

y se obtienen de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\delta L_{N,f}}{\delta f} = (n-2) r^{n-3} N'(r) = 0 \ , \tag{4.2.5}$$

$$\frac{\delta L_{N,f}}{\delta N} = (n-2)\left[r^{n-3}(f(r)-1) - \frac{r^{n-1}}{\ell^2}\right]' = 0 \ . \tag{4.2.6}$$

De la ecuación (4.2.5) se puede escoger $N \equiv 1$, mientras que de la ecuación (4.2.6) recuperamos la solución de Schwarzschild-Tangherlini [14] con constante cosmológica

$$f(r) = 1 - \frac{2m}{r^{n-3}} + \frac{r^2}{\ell^2} \ . \tag{4.2.7}$$

4.2.2. Acción reducida en simetría esférica para Einstein-Gauss-Bonnet

En dimensión arbitraria, el principio de acción a considerar es

$$I[g] = \int d^n x \sqrt{-g} \left(R + \frac{(n-1)(n-2)}{\ell^2} + \alpha \chi_4 \right) \ , \tag{4.2.8}$$

cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange tienen la siguiente estructura

$$\frac{\delta L_{N,f}}{\delta f} = (n-2) r^{n-4} N'(r) \left(r^2 - 2\bar{\alpha}(f(r)-1) \right) = 0 \ , \tag{4.2.9}$$

$$\frac{\delta L_{N,f}}{\delta N} = (n-2) \left[r^{n-3}(f(r)-1) - \bar{\alpha} r^{n-5}(f(r)-1)^2 - \frac{r^{n-1}}{\ell^2} \right]' = 0 \ , \tag{4.2.10}$$

donde $\bar{\alpha} = (n-3)(n-4)\alpha$. Como solución de estas ecuaciones recuperamos lo encontrado en [31],

$$N \equiv 1, \quad f(r) = 1 + \frac{r^2}{2\bar{\alpha}} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4\bar{\alpha}\mu}{r^{n-1}} - \frac{4\bar{\alpha}}{\ell^2}} \right) \ . \tag{4.2.11}$$

4.2.3. Acción reducida en simetría esférica para Lovelock tercer orden

En dimensión $n \geq 7$ podemos considerar el principio de acción

$$I[g] = \int d^n x \sqrt{-g} \left(R + \frac{(n-1)(n-2)}{\ell^2} + \alpha_2 \chi_4 + \alpha_3 \chi_6 \right) \ , \tag{4.2.12}$$

y repetimos el proceso calculando las ecuaciones de Euler-Lagrange para esta acción evaluada en (4.2.1), encontrando que

$$\frac{\delta L_{N,f}}{\delta N} = (n-2) r^{n-4} N'(r) \left[r^2 - 2\bar{\alpha}_2(f(r)-1) + 3\bar{\alpha}_3(f(r)-1)^2 \right] = 0 \ , \tag{4.2.13}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta L_{N,f}}{\delta f} = (n-2) \Big[& r^{n-3}(f(r)-1) - \bar{\alpha}_2 r^{n-5}(f(r)-1)^2 \\ & + \bar{\alpha}_3 r^{n-7}(f(r)-1)^3 - \frac{r^{n-1}}{\ell^2} \Big]' = 0 \ , \end{aligned} \tag{4.2.14}$$

donde se define $\bar{\alpha}_3 = (n-3)(n-4)(n-5)(n-6)\alpha_3$. Resolver estas ecuaciones nos lleva a lo encontrado en [9],

$$
\begin{aligned}
&N \equiv 1 \ , \\
&f(r) = 1 + \frac{r^2}{3\bar{\alpha}_3}\left[\bar{\alpha}_2 + \sqrt[3]{\sqrt{\gamma + \beta^2(r)} + \beta(r)} - \sqrt[3]{\sqrt{\gamma + \beta^2(r)} - \beta(r)}\right] \ , \quad (4.2.15)
\end{aligned}
$$

con

$$
\beta(r) = \bar{\alpha}_2^3 - \frac{9}{2}\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_3 - \frac{27}{2}\bar{\alpha}_3^2\left(\frac{m}{r^{n-1}} - \frac{1}{\ell^2}\right) \ , \quad (4.2.16)
$$

$$
\gamma = (3\bar{\alpha}_3 - \bar{\alpha}_2^2)^3 \ . \quad (4.2.17)
$$

4.2.4. Acción reducida para Gravedad Cuasi-topológica

La teoría cúbica encontrada en [5, 6] en dimensión arbitraria puede escribirse como

$$
I[g] = \int d^n x\sqrt{-g}\left(R - \frac{(n-1)(n-2)}{\ell^2} + \alpha_2\chi_4 + \alpha_3\mathcal{Z}_n\right) \ , \quad (4.2.18)
$$

donde,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}_n = \mathcal{L}_1 - \frac{3}{(2n-3)(n-4)}\Bigg(&(n-2)\mathcal{L}_3 - \frac{3n-8}{8}\mathcal{L}_4 - n\mathcal{L}_5 - 2(n-2)\mathcal{L}_6 \\
&+\frac{3n-4}{2}\mathcal{L}_7 - \frac{n}{8}\mathcal{L}_8\Bigg) \ . \quad (4.2.19)
\end{aligned}
$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange provenientes de la acción reducida en la métrica (4.2.1) toman la forma,

$$
\frac{\delta L_{N,f}}{\delta N} = (n-2)r^{n-4}N'(r)\left[r^2 - 2\bar{\alpha}_2(f(r)-1) + \frac{3\tilde{\alpha}_3}{r^2}(f(r)-1)^2\right] \ , \quad (4.2.20)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta L_{N,f}}{\delta f} = (n-2)\Bigg[&r^{n-3}(f(r)-1) - \bar{\alpha}_2 r^{n-5}(f(r)-1)^2 \\
&+ \tilde{\alpha}_3 r^{n-7}(f(r)-1)^3 - \frac{r^{n-1}}{\ell^2}\Bigg]' \ , \quad (4.2.21)
\end{aligned}
$$

donde se define $\tilde{\alpha}_3 = \frac{(n-3)(n-6)(3n^2-15n+16)}{8(2n-3)}\alpha_3$.

4.3. Rotación lenta

El método de acción reducida ciertamente permite obtener ecuaciones de movimiento, para simetría esférica, sin necesidad de pasar por el cálculo de las ecuaciones de campo, que para una teoría de curvatura superior, puede ser un trabajo muy tedioso, incluso usando algún software de cálculo simbólico. Este método permite disminuir drásticamente los tiempos de cálculo, no obstante, reproducir las ecuaciones de movimiento de una métrica rotante arbitraria, por ejemplo, usando el ansatz de Kerr-Schild no es posible bajo este método.

En esta sección mostraremos como bajo una modificación del ansatz de rotación lenta (3.3.4) sí es posible encontrar soluciones exactas en teorías de curvatura superior usando las ecuaciones de Euler-Lagrange de la acción reducida.

Esta construcción representa el primer resultado original presentado en esta tesis, que fue reportado en arXiv:2012.06618.

4.3.1. El método

Recordemos el ansatz de rotación lenta con un momento angular,

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Sigma^2 - 2ar^2 \sin^2\theta h(r) dt d\phi \ , \tag{4.3.1}$$

con $d\Sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 + \cos^2\theta d\Omega^2_{n-4}$.

Al igual que en el ansatz esféricamente simétrico, es necesario modificar algunas componentes de la métrica. Anteriormente se vio que la métrica que permitía calcular las ecuaciones de Euler-Lagrange hacía uso del siguiente cambio

$$g_{tt} = -f(r) \to g_{tt} = -N^2(r) f(r) \ . \tag{4.3.2}$$

Para poder replicar con éxito las ecuaciones de campo, debemos modificar el término fuera de la diagonal como sigue

$$g_{t\phi} = -ar^2 \sin^2 \theta h(r) \to g_{t\phi} = -a\tilde{h}(r,\theta) \ , \tag{4.3.3}$$

de esta forma, la métrica a considerar con un parámetro de rotación es

$$ds^2 = -N^2(r)f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Sigma^2_{n-2} - 2a\tilde{h}(r,\theta)dtd\phi_1 \ , \tag{4.3.4}$$

donde $d\Sigma^2_{n-2} = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi_1^2 + \cos^2\theta d\Omega^2_{n-4}$. En el caso de GCT en dimensión cinco se usará el siguiente ansatz con dos momentos angulares

$$ds^2 = -N^2(r)f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Sigma^2 - 2dt\left(a_1\tilde{h}_1(r,\theta)d\phi_1 + a_2\tilde{h}_2(r,\theta)d\phi_2\right) \ . \tag{4.3.5}$$

El procedimiento para obtener ecuaciones de campo compatibles es el siguiente:

- Evaluar el ansatz (4.3.5) en la densidad Lagrangiana $\sqrt{-g}\mathcal{L}$ hasta orden cuadrático en el parámetro de rotación, esto es

$$\sqrt{-g}\mathcal{L}\Big|_g \equiv L_{N,f,h} \approx F(r,\theta) + \sum_{i=1}^{2}\left(\tilde{G}_i(r,\theta)a_i + \tilde{H}_i(r,\theta)a_i^2\right) + \mathcal{O}(a^3) \ , \tag{4.3.6}$$

  donde $F(r,\theta)$, $\tilde{G}_i(r,\theta)$ y $\tilde{H}_i(r,\theta)$ son funciones de $N(r)$, $f(r)$ y $\tilde{h}_i(r,\theta)$ y sus derivadas.

- Luego calcular las ecuaciones de Euler-Lagrange, de forma que, para las ecuaciones que provienen de variar respecto de N y f despreciamos los términos proporcionales a los parámetros de rotación, mientras que de la ecuación que surge al variar respecto de h_i nos quedaremos con los términos de hasta segundo orden en a_i, de modo que

$$\frac{\delta L_{N,f,h}}{\delta N} = \Theta_n F_1(r) + \mathcal{O}(a_i) \propto \mathcal{E}_t^t \ , \tag{4.3.7}$$

$$\frac{\delta L_{N,f,h}}{\delta f} = \Theta_n F_2(r) + \mathcal{O}(a_i) \propto N'(r) \ , \tag{4.3.8}$$

$$\frac{\delta L_{N,f,h}}{\delta \tilde{h}_i} = \tilde{G}_1(r,\theta) + \tilde{G}_2(r,\theta)a_i + \tilde{G}_3(r,\theta)a_i^2 + \mathcal{O}(a^3) \ , \tag{4.3.9}$$

donde $F_1(r)$, $F_2(r)$ son funciones de $N(r)$, $f(r)$ y sus derivadas, $\tilde{G}_1(r,\theta)$, $\tilde{G}_2(r,\theta)$ y $\tilde{G}_3(r,\theta)$ son funciones de $N(r)$, $f(r)$ y $\tilde{h}_i(r,\theta)$ y sus derivadas y $\Theta_n(\theta,\phi_1,\ldots,\phi_{n-3})$ es una función que proviene de la contribución de $\sqrt{-g}$, tal que

$$\Theta_n = \sqrt{\sin\theta}\cos^{n-5}\theta\sin^{n-5}\phi_1\ldots\sin\phi_{n-4} \ . \tag{4.3.10}$$

- Finalmente asumimos separabilidad de las funciones $\tilde{h}$ las funciones $\tilde{h}_i(r,\theta)$, tal que, nos permita recuperar un ansatz de la forma (3.3.4)

$$\tilde{h}_1(r,\theta) = r^2\sin^2\theta h_1(r), \quad \tilde{h}_2(r,\theta) = r^2\cos^2\theta h_1(r) \ . \tag{4.3.11}$$

Como consecuencia de esta substitución se consiguen las expresiones para $h_i(r)$ compatibles con las ecuaciones de campo,

$$\frac{\delta L_{N,f,h}}{\delta \tilde{h}_i} = \Theta_n\left(G_1(r) + G_2(r)a + G_3(r)a^2\right) \propto \mathcal{E}_t^{\phi_i}. \tag{4.3.12}$$

A continuación se presenta el uso del ansatz (4.3.4) para el método de acción reducida, derivando las ecuaciones Euler-Lagrange con un momento angular, las cuales son compatibles con los resultados mostrados en la sección 3.4.

4.3.2. Acción reducida para rotaciones bajas en Einstein-Gauss-Bonnet

Evaluando el ansatz (4.3.4) en la densidad Lagrangiana de (4.2.8) y calculando las ecuaciones de Euler-Lagrange, se tiene lo siguiente

$$\frac{\delta L_{N,f,h}}{\delta f} = \Theta_n(n-2)r^{n-4}N'(r)\left(r^2 - 2\bar{\alpha}(f(r)-1)\right), \tag{4.3.13}$$

$$\frac{\delta L_{N,f,h}}{\delta N} = \Theta_n(n-2)\left[r^{n-3}(f(r)-1) - \bar{\alpha}r^{n-5}(f(r)-1)^2 - \frac{r^{n-1}}{\ell^2}\right]', \tag{4.3.14}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta L_{N,f,h}}{\delta h_1} &= a^2\Theta_n\left[\frac{h_1''(r)}{r^2}\frac{(r^n - 2\bar{\alpha}r^{n-2}(f(r)-1))}{N(r)} + \frac{h_1'(r)}{r^2N^2(r)}(nN(r)r^{n-1}\right.\\ &\quad - r^nN'(r) + 2\bar{\alpha}(N'(r)(f(r)-1)r^{n-2} - N(r)r^{n-3}(rf'(r)\\ &\quad \left. -(n-2)(f(r)-1))) + \frac{h_1(r)}{N(r)f(r)}\frac{\delta L_{N,f,h}}{\delta N}\right], \end{aligned}\tag{4.3.15}$$

$$\begin{aligned}&= a^2\Theta_n\left[\frac{h_1''(r)}{r^2}\left(\frac{r^n - 2\bar{\alpha}r^{n-2}(f(r)-1)}{N(r)}\right)\right.\\ &\quad \left. + \frac{h_1'(r)}{r^2}\left(\frac{r^n - 2\bar{\alpha}r^{n-2}(f(r)-1)}{N(r)}\right)'\right], \end{aligned}\tag{4.3.16}$$

donde $\bar{\alpha} = (n-3)(n-4)\alpha$ y dado que podemos escoger con libertad $N \equiv 1$, tenemos que,

$$\frac{h_1''(r)}{h_1'} = -\frac{[r^n - 2\bar{\alpha}r^{n-2}(f(r)-1)]'}{r^n - 2\bar{\alpha}r^{n-2}(f(r)-1)}, \tag{4.3.17}$$

$$[\log(h_1'(r))]' = -\frac{[r^n(1+2\bar{\alpha}\varphi(r))]'}{r^n(1+2\bar{\alpha}\varphi(r))}, \tag{4.3.18}$$

$$= -\left[\log(r^n[1-2\bar{\alpha}\varphi(r)])\right]', \tag{4.3.19}$$

$$h_1(r) = \int \frac{C_1 dr}{r^n(1+2\bar{\alpha}\varphi(r))} + C_2, \tag{4.3.20}$$

donde $\varphi(r) = r^{-2}(f(r)-1)$. Notemos que la ecuación (4.3.14), bajo este cambio se reescribe como

$$-\left[r^{n-1}\varphi(r) + \bar{\alpha}r^{n-1}\varphi^2(r) + \frac{r^{n-1}}{\ell^2}\right]' = 0, \tag{4.3.21}$$

Si derivamos lo anterior, encontramos lo siguiente

$$1 + 2\bar{\alpha}\varphi(r) = -\frac{(n-1)}{r\varphi'(r)}\left(\varphi(r)(1+\bar{\alpha}\varphi(r)) + \frac{1}{\ell^2}\right) . \tag{4.3.22}$$

Pero, por otra parte, integrando (4.3.21), se encuentra que

$$\varphi(r)(1+\bar{\alpha}\varphi(r)) + \frac{1}{\ell^2} = \frac{m}{r^{n-1}} , \tag{4.3.23}$$

y por lo tanto,

$$h_1(r) = -\int \frac{C_1\varphi'(r)dr}{m(n-1)} + C_2 . \tag{4.3.24}$$

Escogiendo $C_1 = m(n-1)$ y $C_2 = 0$ como en [9], encontramos la solución publicada en [8],

$$h_1(r) = -\varphi(r) = \frac{1}{2\bar{\alpha}}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4\bar{\alpha}\mu}{r^{n-1}} - \frac{4\bar{\alpha}}{\ell^2}}\right) . \tag{4.3.25}$$

4.3.3. Acción reducida para rotaciones bajas en Lovelock tercer orden

Considerando nuevamente el ansatz (4.3.4), luego de evaluar en la densidad Lagrangiana de Lovelock hasta tercer orden $\sqrt{-g}(R + \frac{(n-1)(n-2)}{\ell^2} + \alpha_2\chi_4 + \alpha_3\chi_6)$ para dimensión $n \geq 7$, se calculan las ecuaciones de Euler-Lagrange a primer orden en a_1,

$$\frac{\delta L_{N,f,h}}{\delta f} = \Theta_n(n-2)r^{n-4}N'(r)\left(r^2 - 2\bar{\alpha}_2(f(r)-1) + 3\bar{\alpha}_3 r^{n-7}(f(r)-1)^2\right) , \tag{4.3.26}$$

$$\frac{\delta L_{N,f,h}}{\delta N} = \Theta_n(n-2)\Big[r^{n-3}(f(r)-1) - \frac{r^{n-1}}{\ell^2} + \bar{\alpha}_3 r^{n-7}(f(r)-1)^3 - \bar{\alpha}_2 r^{n-5}(f(r)-1)^2\Big]' , \tag{4.3.27}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta L_{N,f,h}}{\delta h_1} &= \Theta_n \left[\frac{h_1''(r)}{r^2} \frac{(r^n - 2\bar{\alpha}_2 r^{n-2}(f(r)-1) + 3\bar{\alpha}_3 r^{n-4}(f(r)-1)^2)}{N(r)} \right.\\
&+ \frac{h_1'(r)}{r^2 N^2(r)} (nN(r)r^{n-1} - r^n N'(r) + 2\bar{\alpha}_2 (N'(r)(f(r)-1)r^{n-2} \\
&- N(r) r^{n-3}(rf'(r) + (n-2)(f(r)-1))) - 3\bar{\alpha}_3 \big(N'(r) r^{n-4}(f(r)-1)^2 \\
&- r^{n-5} N(r)(f(r)-1)(2rf'(r) + (n-4)r^{n-5}(f(r)-1)^2\big) \\
&+ \left. \frac{h_1(r)}{N(r)f(r)} \frac{\delta L_{N,f,h}}{\delta N} \right] , \qquad (4.3.28)\\
&= \Theta_n \left[\frac{h_1''(r)}{r^2} \left(\frac{r^n - 2\bar{\alpha}_2 r^{n-2}(f(r)-1) + 3\bar{\alpha}_3 r^{n-4}(f(r)-1)^2)}{N(r)} \right) \right. \\
&+ \left. \frac{h_1'(r)}{r^2} \left(\frac{r^n - 2\bar{\alpha}_2 r^{n-2}(f(r)-1) + 3\bar{\alpha}_3 r^{n-4}(f(r)-1)^2)}{N(r)} \right)' \right] , \qquad (4.3.29)
\end{aligned}
$$

donde $\bar{\alpha}_3 = (n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$. Es claro que podemos fijar $N \equiv 1$, de manera que la ecuación para la función del término cruzado queda como

$$
\begin{aligned}
\frac{h_1''(r)}{h_1'(r)} &= -\frac{[r^n - 2\bar{\alpha}_2 r^{n-2}(f(r)-1) + 3\bar{\alpha}_3 r^{n-4}(f(r)-1)^2)]'}{r^n - 2\bar{\alpha}_2 r^{n-2}(f(r)-1) + 3\bar{\alpha}_3 r^{n-4}(f(r)-1)^2)} , \qquad (4.3.30)\\
[\log(h_1'(r))]' &= -\frac{[r^n(1 + 2\bar{\alpha}_2 \varphi(r) + 3\bar{\alpha}_3 \varphi^2(r))]'}{r^n(1 + 2\bar{\alpha}_2 \varphi(r) + 3\bar{\alpha}_3 \varphi^2(r))} , \qquad (4.3.31)\\
&= -\left[\log(r^n[1 + 2\bar{\alpha}_2 \varphi(r) + 3\bar{\alpha}_3 \varphi^2(r)]) \right]' , \qquad (4.3.32)\\
h_1(r) &= \int \frac{C_1 dr}{r^n(1 + 2\bar{\alpha}_2 \varphi(r) + 3\bar{\alpha}_3 \varphi^2(r))} + C_2 . \qquad (4.3.33)
\end{aligned}
$$

Por otro lado, (4.3.14) expresada en términos de $\varphi(r)$ se escribe como

$$
-\left[r^{n-1}\varphi(r) + \bar{\alpha}_2 r^{n-1} \varphi^2(r) + \bar{\alpha}_3 r^{n-1} \varphi^3(r) + \frac{r^{n-1}}{\ell^2} \right]' = 0 . \qquad (4.3.34)
$$

Expandiendo la derivada en (4.3.34) tenemos que

$$
1 + 2\bar{\alpha}_2 \varphi(r) + 3\bar{\alpha}_3 \varphi^2(r) = -\frac{(n-1)}{r\varphi'(r)} \left(\varphi(r)(1 + \bar{\alpha}_2 \varphi(r) + \bar{\alpha}_3 \varphi^2(r)) - \frac{1}{\ell^2} \right), \qquad (4.3.35)
$$

pero si integramos (4.3.21), se encuentra que

$$\varphi(r)(1+\bar{\alpha}_2\varphi(r)+\bar{\alpha}_3\varphi^2(r))-\frac{1}{\ell^2}=\frac{m}{r^{n-1}}\ , \tag{4.3.36}$$

por lo tanto, la expresión (4.3.33) puede ser integrada directamente, verificándose que

$$h_1(r)=-\frac{C_1\varphi(r)}{m(n-1)}+C_2\ . \tag{4.3.37}$$

De esta manera, con las constantes de integración $C_1 = m(n-1)$ y $C_2 = 0$, la solución encontrada en [9] es

$$h_1(r)=-\varphi(r)=\frac{1}{3\bar{\alpha}_3}\left(\bar{\alpha}_2+\sqrt[3]{\sqrt{\gamma+\beta^2(r)}+\beta(r)}-\sqrt[3]{\sqrt{\gamma+\beta^2(r)}-\beta(r)}\right) \tag{4.3.38}$$

donde γ y $\beta(r)$ están definidas de la misma forma que en la sección (3.2.2).

Algo que merece ser destacado es que el método de la acción reducida reprodujo los resultados obtenidos de evaluar en las ecuaciones de campo el ansatz de rotaciones bajas. En simetría esférica es sabido [37, 38] que es equivalente evaluar las ecuaciones de campo o usar las ecuaciones de Euler-Lagrange de la acción reducida, sin embargo, esta equivalencia no existe en una métrica tipo Kerr, por lo que es interesante que para rotaciones bajas las ecuaciones de Euler-Lagrange en teorías de Lovelock fueran consistentes. Este hecho fue verificado también para las tres combinaciones cuadráticas del tensor de Riemann y para las ocho combinaciones cúbicas.

Capítulo 5

Espaciotiempo rotante en Gravedad Cuasi-topológica

5.1. Caso cúbico

En esta sección se muestran nuevos resultados en GCT, se resuelve por cuadratura la solución a rotaciones bajas con dos momentos angulares en dimensión cinco. Se muestra que, a partir de las ecuaciones de campo y del principio de acción reducida se consiguen los mismos resultados.

5.1.1. Solución a rotaciones bajas

Consideremos la teoría gravitacional dada por

$$I[g] = \int d^5x\sqrt{-g}\left(R + \frac{12}{\ell^2} + \alpha_2\chi_4 + \alpha_3\mathcal{Z}'\right) \ . \tag{5.1.1}$$

Las ecuaciones de campo de esta teoría están dadas por,

$$\mathcal{E}_{ab} = G_{ab} - \frac{6}{\ell^2}g_{ab} + \alpha_2\mathcal{H}_{ab} + \alpha_3\mathcal{Q}_{ab} = 0 \ . \tag{5.1.2}$$

La métrica a considerar tiene la siguente forma

$$
\begin{aligned}
ds^2 = & -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 + \cos^2\theta d\psi^2) \\
& - 2r^2(a_1 \sin^2\theta h_1(r) dt d\phi + a_2 \cos^2\theta h_2(r) dt d\psi) \ .
\end{aligned} \tag{5.1.3}
$$

Evaluando esta métrica en las ecuaciones de campo a primer orden en a_1 y a_2, encontramos que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_t^t = & \frac{3}{2r^3}\left[\left(r^2 - \frac{12\alpha_3}{7}(f(r)-1)^2 - 4\alpha_2(f(r)-1)\right)f'(r) + \right. \\
& \left. \frac{8\alpha_3}{7}(f(r)-1)^3 + 2r(f(r)-1) - \frac{4r^3}{\ell^2}\right] , \\
= & \frac{3}{2r^3}\left[\frac{4\alpha_3}{7r^2}(f(r)-1)^3 + 2\alpha_2 f(r)(f(r)-2) - r^2(f(r)-1) + \frac{r^4}{\ell^2}\right]' ,
\end{aligned} \tag{5.1.4}
$$

$$
\mathcal{E}_r^r = \frac{2r^3}{3}\mathcal{E}_t^t , \tag{5.1.5}
$$

$$
\mathcal{E}_\theta^\theta = \mathcal{E}_\phi^\phi = \mathcal{E}_\psi^\psi = \frac{1}{2r^2}\frac{\partial \mathcal{E}_r^r}{\partial r} , \tag{5.1.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_t^\phi = & a_1 \left\{ f(r)\left[\frac{\alpha_3}{7r^2}\left(5r^2 f''(r) - 12 + 14f(r) - 10rf'(r) - 2f^2(r)\right)\right.\right. \\
& \left. - \frac{2\alpha_2(f(r)-1)}{3} + \frac{r^2}{6}\right] h_1''(r) + \left[\frac{\alpha_3}{7r^3}\left(5r^3 f'''(r) - 4f(r)f'(r) + 5r^2 f''(r)\right.\right. \\
& \left.\left. -2f^2(r) - 6rf'(r) + 14f(r) + 12\right) - \frac{2\alpha_2}{3r}(f'(r) + 3(f(r)-1))\right] h_1'(r) \\
& \left. + \left(\frac{\mathcal{E}_t^t}{2} - \frac{r^2 \mathcal{E}_\theta^\theta}{3}\right) h_1(r) \right\} ,
\end{aligned} \tag{5.1.7}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_t^\psi = & a_2 \left\{ f(r)\left[\frac{\alpha_3}{7r^2}\left(5r^2 f''(r) - 12 + 14f(r) - 10rf'(r) - 2f^2(r)\right)\right.\right. \\
& \left. - \frac{2\alpha_2(f(r)-1)}{3} + \frac{r^2}{6}\right] h_1''(r) + \left[\frac{\alpha_3}{7r^3}\left(5r^3 f'''(r) - 4f(r)f'(r) + 5r^2 f''(r)\right.\right. \\
& \left.\left. -2f^2(r) - 6rf'(r) + 14f(r) + 12\right) - \frac{2\alpha_2}{3r}(f'(r) + 3(f(r)-1))\right] h_1'(r) \\
& \left. + \left(\frac{\mathcal{E}_t^t}{2} - \frac{r^2 \mathcal{E}_\theta^\theta}{3}\right) h_2(r) \right\} .
\end{aligned} \tag{5.1.8}
$$

Como se esperaba la ecuación para f no cambió respecto de (3.2.19), mientras que h_1 y h_2 obedecen la misma ecuación con $a_1 \to a_2$. Usando el cambio de variable

$$f(r) = 1 - r^2\varphi(r), \tag{5.1.9}$$

podemos re-escribir las ecuaciones de la siguiente forma

$$0 = \left(\frac{4\alpha_3 r^4\varphi^3(r)}{7} - 2\alpha_2 r^4\varphi^2(r) - r^4\varphi(r) - \frac{r^4}{\ell^2}\right)' , \tag{5.1.10}$$

$$\begin{aligned}(\ln[h_i'(r)])' &= -\left(\frac{3}{r} + \frac{[30\alpha_3(r^2\varphi'(r))' + r^2(12\alpha_3\varphi^2(r) - 28\alpha_2\varphi(r) - 7)]'}{30\alpha_3(r^2\varphi'(r))' + r^2(12\alpha_3\varphi^2(r) - 28\alpha_2\varphi(r) - 7)}\right) , \\ &= -\left(\log\left[30\alpha_3 r^3(r^2\varphi'(r))' + r^5(12\alpha_3\varphi^2(r) - 28\alpha_2\varphi(r) - 7)\right]\right)' ,\end{aligned} \tag{5.1.11}$$

donde h_i representa a h_1 y h_2. Notemos que de (5.1.10), análogo al caso de Lovelock, obtenemos las siguientes expresiones

$$r^5(12\alpha_3\varphi^2(r) - 28\alpha_2\varphi(r) - 7) = -\frac{28r^4}{\varphi'(r)}\left(\frac{4\alpha_3\varphi^3(r)}{7} - 2\alpha_2\varphi^2(r) - \varphi(r) - \frac{1}{\ell^2}\right) , \tag{5.1.12}$$

$$\frac{4\alpha_3\varphi^3(r)}{7} - 2\alpha_2\varphi^2(r) - \varphi(r) - \frac{1}{\ell^2} = \frac{m}{r^4} . \tag{5.1.13}$$

De esta forma, se tiene que

$$h_i(r) = \int \frac{C_1 dr}{30\alpha_3 r^3(r^2\varphi'(r))' - \frac{28m}{\varphi'(r)}} + C_2 , \tag{5.1.14}$$

$$= \int \frac{C_1\varphi'(r)dr}{30\alpha_3 r^3\varphi'(r)(r^2\varphi'(r))' - 28m} + C_2 . \tag{5.1.15}$$

A pesar de que las ecuaciones para h_i respetan una estructura similar al caso de Lovelock, no es posible integrar directamente la ecuación para h_i, sin embargo, el problema está resuelto por cuadratura, ya que, la integral está en función de $\varphi(r)$ y dicha función sí es conocida, porque es solución de una ecuación cúbica.

Usemos la siguiente métrica para estudiar las ecuaciones mediante la acción reducida y ver su validez frente a las ecuaciones de campo,

$$
\begin{aligned}
ds^2 = -N^2(r)f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 + \cos^2\theta d\psi^2) \\
- 2a_1h_1(r,\theta)dtd\phi - 2a_2h_2(r,\theta)dtd\psi \ . \qquad (5.1.16)
\end{aligned}
$$

Evaluando en la densidad Lagrangiana dada por (5.1.1) y derivando las ecuaciones de Euler-Lagrange respecto de N y f se tiene

$$
\frac{\delta L_{N,f,h}}{\delta f} = 3N'(r)\left[r^2 - 4\alpha_2(f(r)-1) - \frac{12\alpha_3}{r^2}(f(r)-1)^2\right] \Rightarrow N \equiv 1 \ , \qquad (5.1.17)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta L_{N,f,h}}{\delta N} &= 3\left[r^2(f(r)-1) - 2\alpha_2(f(r)-1)^2 + \frac{4\alpha_3}{7r^2}(f(r)-1)^3 - \frac{r^4}{\ell^2}\right]' \ , \\
&= \frac{2r^3}{3}\mathcal{E}_t^t \ . \qquad (5.1.18)
\end{aligned}
$$

Variando respecto de h_1 y h_2, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta L_{N,f,h}}{\delta h_i} &= a_i\Bigg\{6r\left[\frac{\alpha_3}{7r^2}\left(5r^2f''(r) - 12 + 14f(r) - 10rf'(r) - 2f^2(r)\right)\right. \\
&\left. -\frac{2\alpha_2(f(r)-1)}{3} + \frac{r^2}{6}\right]h_i''(r) + \frac{6r}{f(r)}\left[\frac{\alpha_3}{7r^3}\left(5r^3f'''(r) - 4f(r)f'(r)\right.\right. \\
&\left. +5r^2f''(r) - 2f^2(r) - 6rf'(r) + 14f(r) + 12\right) - \frac{2\alpha_2}{3r}(f'(r) \\
&\left. + 3(f(r)-1))\right]h_1'(r) + \left(\frac{9\mathcal{E}_r^{\ r}}{r^2f(r)} - \frac{r}{f(r)}\frac{\partial\mathcal{E}_r^{\ r}}{\partial r}\right)h_1(r)\Bigg\} \ , \\
&= \frac{6r}{f(r)}\mathcal{E}_t^{\phi_i} \ . \qquad (5.1.19)
\end{aligned}
$$

En la próxima sección, aún en el contexto de la teoría cúbica, mostraremos un resultado “no-go” acerca de la extensión a rotación finita de esta solución en el contexto del ansatz de Kerr-Schild [10].

5.1.2. Ansatz de Kerr-Schild

Recordemos que el ansatz de Kerr-Schild usado en [11] y que fue visto en la sección 3.5, considera que la métrica semilla es AdS_5, tal que,

$$
\begin{aligned}
d\bar{s}^2 = &-\frac{\left(1+\frac{r^2}{l^2}\right)\Delta_\theta}{\Xi_a \Xi_b} dt^2 + \frac{r^2\rho^2}{\left(1+\frac{r^2}{l^2}\right)(r^{+}a^2)(r^2+b^2)} dr^2 + \frac{\rho^2}{\Delta_\theta} d\theta^2 \\
&+ \frac{r^2+a^2}{\Xi_a}\sin^2\theta d\phi^2 + \frac{r^2+b^2}{\Xi_b}\cos^2\theta d\psi^2 \ ,
\end{aligned}
\tag{5.1.20}
$$

con $\Delta_\theta = \Xi_a \cos^2\theta + \Xi_b \sin^2\theta$, $\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$, $\Xi_a = 1 - \frac{a^2}{l^2}$ y $\Xi_b = 1 - \frac{b^2}{l^2}$. Impondremos que $F = F(r,\theta)$, mientras que el vector nulo y geodésico [21] es

$$
k_a dx^a = \frac{\Delta_\theta dt}{\Xi_a \Xi_b} + \frac{r^2\rho^2 dr}{\left(1+\frac{r^2}{l^2}\right)(r^2+a^2)(r^2+b^2)} - \frac{a\sin^2\theta d\phi}{\Xi_a} - \frac{a\cos^2\theta d\psi}{\Xi_b} \ . \tag{5.1.21}
$$

En RG la función F depende de r y θ y está dada por

$$
F_{RG}(r,\theta) = \frac{2M}{r^2 + a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} \ . \tag{5.1.22}
$$

Notamos que cuando $a = b$ entonces la función F solo depende de r, esta elección permite pasar del grupo de isometrías $\mathbb{R}_t \times U(1)^2$ a $\mathbb{R}_t \times SU(2)$. En este caso, el comportamiento asintótico es de la forma

$$
F_{RG}(r) = \frac{2M}{r^2} - \frac{Ma^2}{r^4} + \mathcal{O}(r^{-6}) \ . \tag{5.1.23}
$$

Como ocurre en agujeros negros esféricamente simétricos, se requiere que el comportamiento asintótico coincida con RG con constante cosmológica efectiva. Podemos asumir la siguiente expansión para la función F en infinito,

$$
F(r) = \frac{1}{r^2}\left(A_2 + \frac{A_3}{r} + \frac{A_4}{r^2} + \frac{A_5}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^5}\right)\right) \ . \tag{5.1.24}
$$

La traza de las ecuaciones de campo es un vínculo de segundo orden para una métrica arbitraria. En el caso del ansatz de Kerr-Schild con $a = b$ y $F = F(r)$, la ecuación de la traza se reduce a

$$
\begin{aligned}
0 = &-30l^2(r^2+a^2)^2\left[\frac{l^4a^2}{30}\alpha_3\left(a^2-5r^2\right)\left(a^2+r^2\right)^2F'^2+\frac{2l^4a^2r\alpha_3}{3}\left(r^4-1\right)FF'\right.\\
&+r^2\left(\frac{8\alpha_3 l^4}{15}\left(a^2-\frac{3}{4}r^2\right)\left(a^2-r^2\right)F^2-\frac{4l^2}{3}\left(l^2\alpha_2-\frac{\alpha_3}{5}\right)\left(a^2+r^2\right)^2\left(a^2-3r^2\right)F\right.\\
&\left.\left.+\left(a^2+r^2\right)^4\left(l^4-4l^2\alpha_2+\frac{2}{5}\alpha_3\right)\right)\right]F''+14\alpha_3\left(a^2-\frac{5r^2}{7}\right)rl^6\left(a^2+r^2\right)^3a^2F'^3\\
&+40l^4\left(a^2+r^2\right)^2\left[\frac{\alpha_3 l^2}{4}\left(a^6-\frac{46}{5}a^4r^2+\frac{33}{5}a^2r^4-\frac{12}{5}r^6\right)F\right.\\
&\left.+r^2l^2\left(\alpha_2-\frac{\alpha_3}{5l^2}\right)\left(a^2+r^2\right)^2\left(a^2-3r^2\right)\right]F'^2\\
&-60rl^2\left(a^2+r^2\right)^5\left[\left(a^2+3r^2\right)\left(l^4-4l^2\alpha_2+\frac{2\alpha_3}{5}\right)+\frac{8\alpha_3 l^4\left(a^2-3r^2\right)}{15\left(a^2+r^2\right)^4}\left(a^4\right.\right.\\
&\left.\left.-\frac{5}{2}a^2r^2+\frac{r^4}{4}\right)F^2-\frac{4l^2\left(l^2\alpha_2-\frac{\alpha_3}{5}\right)}{3\left(a^2+r^2\right)^2}\left(a^4-10a^2r^2-3r^4\right)F\right]F'\\
&+20r^2\left(a^2+r^2\right)^6\left[\left(5l^6\Lambda_0+30l^4-60l^2\alpha_2+4\alpha_3\right)\right.\\
&-\frac{2\alpha_3 r^2l^6\left(25a^4-22a^2r^2+r^4\right)}{5\left(a^2+r^2\right)^6}F^3-\frac{24l^4(5l^2\alpha_2-\alpha_3)(3a^2-r^2)a^2}{15(a^2+r^2)^4}F^2\\
&\left.-\frac{9l^2\left(5l^4-20l^2\alpha_2+2\alpha_3\right)}{5(a^2+r^2)}F\right].
\end{aligned}
\tag{5.1.25}
$$

Por otro lado, de las ecuaciones de campo derivadas de la acción (5.1.1) con $\Lambda=-\frac{6}{\ell^2}$, en particular de $\mathcal{E}_\theta^\theta$, se llega a una ecuación de cuarto orden y su expresión explícita, la cual por ahora no es demasiado iluminadora, si será útil para el siguiente análisis.

Evaluando la expansión (5.1.24) en $\mathcal{E}_\theta^\theta$, vemos que el término dominante de la expansión en $r\to\infty$ lleva a un polinomio $\Upsilon[\Lambda]$ de la forma

$$\Upsilon[\Lambda]=\Lambda^3\alpha_3+90\Lambda^2\alpha_2+270\Lambda-270\Lambda_0=0 \quad \text{y} \quad A_3\frac{d\Upsilon[\Lambda]}{d\Lambda}=0\ . \tag{5.1.26}$$

Notamos que de la primera ecuación, Λ_0 es un cero del polinomio $\Upsilon[\Lambda]$, es decir, el radio de curvatura de la métrica semilla es una combinación de las constantes de acoplamiento y además, para valores arbitrarios entre las constantes de acoplamiento de la teoría se sostiene que

$$\frac{d\Upsilon[\Lambda]}{d\Lambda} \neq 0 \quad \text{y} \quad A_3 = 0 \; . \tag{5.1.27}$$

Implementando esta información en la traza (5.1.25), orden por orden en r se concluye que

$$A_{2i+1} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.1.28}$$

Otra consecuencia de las ecuaciones es que

$$\frac{d\Upsilon[\Lambda]}{d\Lambda}(a^2 A_2 + A_4) = 0 \Rightarrow A_4 = -a^2 A_2 \; . \tag{5.1.29}$$

Avanzando en el siguiente orden en $r \to \infty$ se obtiene

$$\Upsilon'[\Lambda]\, A_6 - \left(a^4 \Upsilon'[\Lambda] - 3\Upsilon''[\Lambda]\right) A_2 = 0 \; . \tag{5.1.30}$$

Usando esto, en el siguiente orden se llega a la siguiente inconsistencia

$$\Upsilon'[\Lambda]\, A_8 = -a^6 \Upsilon'[\Lambda]\, A_2 + 13 a^2 \Upsilon''[\Lambda]\, A_2^2 \; , \tag{5.1.31}$$

$$= -a^6 \Upsilon'[\Lambda]\, A_2 + \frac{A_2^2}{7}(7644 \Lambda \alpha_3 - 8280 \alpha_2 + 109 \Upsilon''[\Lambda]) a^2 \; . \tag{5.1.32}$$

Se espera del comportamiento asintótico en RG que A_2 sea una constante independiente, la cual puede ser identificada con la masa del agujero negro, entonces exigiendo que A_2 no dependa de otras constantes de la expansión (5.1.24) se imponen relaciones entre las constantes de acoplamiento, sin embargo, inicialmente se había requerido que la solución fuera válida para valores arbitrarios de las constantes de acoplamiento, lo cual hace que (5.1.31) y (5.1.32) sean incompatibles.

Esto prueba que no es posible construir, en el caso más simple con dos parámetros de rotación iguales, una solución rotante en GCT cúbica que sea asintóticamente Kerr-AdS$_5$ en el ansatz de Kerr-Schild para valores genéricos de las constantes de acoplamiento.

A continuación, volviendo al régimen de rotaciones bajas, consideraremos soluciones rotantes en la teoría de GCT cuártica [28].

5.2. Caso cuártico

Existen 26 escalares de curvatura independientes en dimensión $d \geq 8$ construidos con contracciones del tensor de Riemann en la familia $\mathcal{R}^0_{8,4}$ según [43]. En dimensiones bajas aparecen diferentes identidades entre los escalares de curvatura que reducen el número de términos independientes [43], en particular, en dimensión cinco hay 20 escalares independientes a cuarto orden. La teoría de GCT cuártica fue reportada por primera vez en [28], sin embargo, construiremos la teoría a partir de los 26 escalares de curvatura, pues esto permitirá conectar resultados entre combinaciones cuárticas en dimensiones diferentes de forma directa.

Consideremos una densidad Lagrangiana de la forma

$$\mathcal{L}^{(4)} = \sum_{i=1}^{26} d_i L_i \ , \tag{5.2.1}$$

donde la totalidad de los 26 escalares son

$$\begin{aligned}
&L_1 = R^{pqbs} R_{p\ b}^{\ a\ u} R_{a\ q}^{\ v\ w} R_{uvsw}, \ L_2 = R^{pqbs} R_{p\ b}^{\ a\ u} R_{a\ u}^{\ v\ w} R_{qvsw} \ , \\
&L_3 = R^{pqbs} R_{pq}^{\ \ au} R_{b\ a}^{\ v\ w} R_{svuw} \ , \ L_4 = R^{pqbs} R_{pq}^{\ \ au} R_{ba}^{\ \ vw} R_{suvw}, \\
&L_5 = R^{pqbs} R_{pq}^{\ \ au} R_{au}^{\ \ vw} R_{bsvw}, \ L_6 = R^{pqbs} R_{pqb}^{\ \ \ a} R^{uvw}_{\ \ \ \ s} R_{uvwa} L_7 = \left(R^{pqbs} R_{pqbs}\right)^2 , \\
&L_8 = R^{pq} R^{bsau} R_{b\ ap}^{\ v} R_{svuq}, \ L_9 = R^{pq} R^{bsau} R_{bs\ p}^{\ \ v} R_{auvq}, L_{10} = R^{pq} R_{p\ q}^{\ b\ s} R^{auv}_{\ \ \ \ b} R_{auvs}, \\
&L_{11} = R R^{pqbs} R_{p\ b}^{\ a\ \ u} R_{qasu}, \ L_{12} = R R^{pqbs} R_{pq}^{\ \ au} R_{bsau}, L_{13} = R^{pq} R^{bs} R^{a\ u}_{\ p\ b} R_{aqus}, \\
&L_{14} = R^{pq} R^{bs} R^{a\ u}_{\ p\ q} R_{abus}, \ L_{15} = R^{pq} R^{bs} R^{au}_{\ \ \ pb} R_{auqs}, L_{16} = R^{pq} R_p^{\ b} R^{sau}_{\ \ \ \ q} R_{saub}, \\
&L_{17} = R^{pq} R_{pq} R^{bsau} R_{bsau}, \ L_{18} = R R^{pq} R^{bsa}_{\ \ \ \ p} R_{bsaq}, L_{19} = R^2 R^{pqbs} R_{pqbs}, \\
&L_{20} = R^{pq} R^{bs} R_b^{\ a} R_{psqa}, \ L_{21} = R R^{pq} R^{bs} R_{pbqs}, L_{22} = R^{pq} R_p^{\ b} R_q^{\ s} R_{bs}, \\
&L_{23} = \left(R^{pq} R_{pq}\right)^2 , \ L_{24} = R R^{pq} R_p^{\ b} R_{qb}, \ L_{25} = R^2 R^{pq} R_{pq}, \ L_{26} = R^4.
\end{aligned} \tag{5.2.2}$$

Las teorías de GCTs están caracterizadas por poseer ecuaciones diferenciales de primer orden en simetría esférica para la función f, como también ocurre en las teorías de Lovelock. Imponer está condición conduce a 11 restricciones para las constantes relativas d_i. En el caso cúbico, las ecuaciones de campo linealizadas comparten el mismo espectro que RG [25]. Considerando una métrica perturbada de la forma

$$g_{ab} = \bar{g}_{ab} + h_{ab} \ . \tag{5.2.3}$$

Las ecuaciones linealizadas para una teoría genérica $\mathcal{L}(g^{ab}, R_{abcd)}$ son de la forma

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathcal{E}^L_{ab} = &+[e - 2\Lambda_{eff}(a(n-1)+c) + (2a+c)\bar{\Box}]G^L_{ab} + [a+2b+c][\bar{g}_{ab}\bar{\Box} \\ &- \bar{\nabla}_a\bar{\nabla}_b]R^L - \Lambda_{eff}[a(n-3) - 2b(n-1) - c]\bar{g}_{ab}R^L \ ,\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

donde $\bar{()}$ indica un elemento definido por la métrica de fondo $\bar{g}_{ab}$ y $()^L$ indica elementos definidos por la perturbación, donde G^L_{ab} es el tensor de Einstein linealizado y R^L es el escalar de Ricci linealizado. Las cantidades a, b, c y e se deducen del siguiente procedimiento propuesto en [25],

1. Consideramos un tensor simétrico auxiliar que satisface

$$k^a_a = \chi, \quad k^a{}_c k^c{}_b = k^a_b \ , \tag{5.2.5}$$

con χ una constante.

2. Definimos el siguiente tensor de Riemann deformado,

$$\tilde{R}_{abcd}(\Lambda_{eff}, \alpha) \equiv 2\Lambda_{eff} g_{a[c}g_{d]b} + 2\alpha k_{a[c}k_{d]b} \ , \tag{5.2.6}$$

con Λ_{eff} y α parámetros.

3. Luego, evaluamos la densidad Lagrangiana usando este tensor de Riemann deformado obteniendo una función de Λ_{eff} y α, es decir, $\mathcal{L}(g^{ab}, R_{abcd}) \to \mathcal{L}(\Lambda_{eff}, \alpha)$.

4. Finalmente definimos las cantidades a, b, c y e mediante las siguientes fórmulas

$$a = \lim_{\chi\to 1}\left[\frac{1}{4\chi(\chi-1)}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0}\right] , \tag{5.2.7}$$

$$b = \frac{1}{\chi(\chi-1)}\left[\frac{1}{4\chi(\chi-1)}\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial^2\alpha}\bigg|_{\alpha=0} - a - c(\chi-1)\right] , \tag{5.2.8}$$

$$c = \lim_{\chi\to 0}\left[\frac{1}{(\chi-1)}\left[\frac{1}{4\chi(\chi-1)}\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial^2\alpha}\bigg|_{\alpha=0} - a\right]\right] , \tag{5.2.9}$$

$$e = \frac{1}{2\chi(\chi-1)}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0} . \tag{5.2.10}$$

Podemos ver de la ecuación (5.2.4) que para que una teoría comparta el espectro linealizado de las ecuaciones de Einstein es necesario imponer

$$2a + c = a + 2b + c = 0 , \tag{5.2.11}$$

lo que en la teoría cuártica lleva a dos restricciones extras a las 11 anteriores. Con estas condiciones aún estamos frente a una teoría no trivial en cinco dimensiones y es posible implementar una condición extra. Usando el principio de acción reducida descrito arriba y usando el ansatz (5.1.16) en la teoría

$$I = \int d^5x\sqrt{-g}\left(R - 2\Lambda_0 + \alpha_2\chi_4 + \alpha 3\mathcal{Z}' + \alpha_4\mathcal{L}^{(4)}\right) , \tag{5.2.12}$$

y además considerando las 13 restricciones previas se obtiene una ecuación para las funciones fuera de la diagonal de la métrica

$$\xi_1\frac{d^4h_i}{dr^4} + \xi_2\frac{d^3h_i}{dr^3} + \xi_3\frac{d^2h_i}{dr^2} + \xi_4\frac{dh_i}{dr} = 0 , \ i = 1, 2 , \tag{5.2.13}$$

donde ξ_i son funciones de r y $f(r)$ y las constantes de acoplamiento. Requiriendo que $\xi_1 = 0$, automáticamente se obtiene $\xi_2 = 0$, lo que introduce una nueva restricción para las constantes d_i, teniendo en resumen las siguientes 14 restricciones:

11 provenientes de las restricciones en simetría esférica:

$$
\begin{aligned}
0 &= 4d_4 + 4d_6 + d_{20} + 2d_{15} + 4d_{18} + 2d_{23} + 2d_{10} + 8d_{19} + 2d_{16} + 4d_9 + 4d_{25} + 2d_2 \\
&\quad + 8d_5 + 8d_7 + 2d_{21} + 2d_{13} + d_{14} + 4d_{17} + 8d_{26} + d_{22} + d_1 + 2d_{24} + 8d_{12} \ ,
\end{aligned} \tag{5.2.14}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= 2d_{10} + 16d_{12} + 4d_{13} + 2d_{14} + 4d_{15} + 4d_{16} + 8d_{17} + 12d_{18} + 32d_{19} + 3d_{20} \\
&\quad + 8d_{21} + 4d_{22} + 8d_{23} + 10d_{24} + 24d_{25} + 64d_{26} + 4d_9 \ ,
\end{aligned} \tag{5.2.15}
$$

$$
0 = 4d_{12} + 2d_{18} + 8d_{19} + d_{21} + d_{24} + 4d_{25} + 16d_{26} \ , \tag{5.2.16}
$$

$$
\begin{align}
0 &= 4d_2 + 28d_{18} + 54d_{24} + 38d_{21} + 2d_3 + 32d_7 + 576d_{26} + 112d_{19} + 7d_{13} \nonumber \\
&\quad + 9d_{14} + 4d_1 + 8d_6 + 164d_{25} + 2d_8 + 6d_{11} + 18d_{22} + 28d_{17} + 44d_{23} \tag{5.2.17} \\
&\quad + 8d_{16} + 11d_{20} + 6d_{10} + 6d_{15} \ , \tag{5.2.18} \\
0 &= 2d_{10} + 2d_{14} + 8d_{17} + 6d_{18} + 48d_{19} + d_{20} + 10d_{21} + 8d_{23} + 9d_{24} \tag{5.2.19} \\
&\quad + 56d_{25} + 288d_{26} \ , \tag{5.2.20} \\
0 &= 3d_{17} + 8d_{19} + 2d_{23} + 5d_{25} + 36d_{26} + 4d_7 \ , \tag{5.2.21} \\
0 &= 25d_1 + 4d_{10} - 36d_{11} + 47d_{13} + 32d_{15} + 62d_{16} - 148d_{17} + 66d_{18} \nonumber \\
&\quad - 768d_{19} + 30d_2 + 30d_{20} - 78d_{21} + 135d_{22} - 82d_{23} + 123d_{24} - 916d_{25} \tag{5.2.22} \\
&\quad - 7488d_{26} + 8d_3 + 68d_6 \ , \tag{5.2.23} \\
0 &= d_1 + 12d_{11} + 11d_{13} + 8d_{15} + 14d_{16} + 12d_{17} + 62d_{18} + 288d_{19} - 2d_2 \nonumber \\
&\quad + 12d_{20} + 54d_{21} + 39d_{22} + 30d_{23} + 117d_{24} + 300d_{25} + 1152d_{26} + 4d_6 \ , \tag{5.2.24} \\
0 &= 6d_1 - 14d_{10} + 24d_{13} + 12d_{15} + 36d_{16} - 76d_{17} + 22d_{18} - 384d_{19} + 12d_2 \nonumber \\
&\quad + 21d_{20} + 6d_{21} + 102d_{22} + 44d_{23} + 153d_{24} - 4d_{25} - 960d_{26} + 24d_6 \ , \tag{5.2.25} \\
0 &= 14d_{10} + 18d_{13} - 12d_{15} + 48d_{16} + 148d_{17} + 134d_{18} + 768d_{19} - 24d_2 \nonumber \\
&\quad + 15d_{20} + 30d_{21} + 180d_{22} + 136d_{23} + 393d_{24} + 556d_{25} + 576d_{26} \ , \tag{5.2.26} \\
0 &= d_{10} + 2d_{17} + 4d_{18} + 24d_{19} - 4d_{23} + 3d_{24} - 10d_{25} - 144d_{26} \ . \tag{5.2.27}
\end{align}
$$

Dos provenientes de la condición de linealización aldedor de AdS:

$$\begin{aligned}0 &= -8d_{13} - 6d_{15} - 10d_{16} - 22d_{17} - 46d_{18} - 248d_{19} - 7d_{20} - 16d_{21} - 28d_{22} \\ &\quad - 16d_{23} - 71d_{24} - 74d_{25} + 272d_{26} \ , \qquad (5.2.28)\\ 0 &= -4d_{13} - 4d_{15} - 4d_{16} - 8d_{17} - 22d_{18} - 112d_{19} - 5d_{20} - 14d_{21} - 12d_{22} \\ &\quad - 12d_{23} - 39d_{24} - 72d_{25} + 96d_{26} \ . \qquad (5.2.29)\end{aligned}$$

Una restricción que lleva a ecuaciones de segundo orden para las funciones h_i es

$$\begin{aligned}0 &= d_{20} + 4d_{22} - 4d_{23} + 3d_{24} - 22d_{25} - 144d_{26} + 4d_6 + 3d_{16} - 10d_{17} \\ &\quad - 2d_{18} - 72d_{19} \ . \qquad (5.2.30)\end{aligned}$$

Considerando el éxito del principio de acción reducida en encontrar las ecuaciones adecuadas para el ansatz (3.3.4) en teorías de Lovelock y del ansatz (5.1.16) en la teoría de GCT cúbica, asumiremos que en el caso cuártico el principio de acción reducida también nos conducirá a las ecuaciones correctas. Luego tenemos que

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial L_{N,f,h}}{\partial f}\right|_{N=1} &= \mathcal{F}\left(r, f, f', f'', N', N'', N''', N^{(4)}\right)\big|_{N=1} = 0 \ , \qquad (5.2.31)\\ \left.\frac{\partial L_{N,f,h}}{\partial N}\right|_{N=1} &= \left(-\frac{3\bar{\alpha}_4}{2r^4}(f-1)^4 + \frac{12\alpha_3}{7r^2}(f-1)^3 + 6\alpha_2(f-1)^2\right. \\ &\qquad \left. -3r^2(f-1) - \frac{\Lambda_0 r^4}{2}\right)' \qquad (5.2.32)\\ &= \left(-\frac{3\bar{\alpha}_4 r^4}{2}\varphi^4 - \frac{12\alpha_3 r^4}{7}\varphi^3 + 6\alpha_2 r^4\varphi^2 + 3r^4\varphi - \frac{\Lambda_0 r^4}{2}\right)' , \qquad (5.2.33)\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_4 &= \alpha_4\left(d_{13} + 2d_{16} + 4d_{17} + 8d_{18} + 48d_{19} + d_{20} + 4d_{21} + 8d_{22} + 6d_{23}\right. \\ &\qquad \left. +22d_{24} + 44d_{25} + 128d_{26}\right) \ . \qquad (5.2.34)\end{aligned}$$

Mientras que de la ecuación $\frac{\partial L_{N,f,h}}{\partial N}\big|_{N=1} = 0$ y definiendo $\mathcal{G}(r, \varphi', \varphi'') = 7r^2(r^2\beta_1\varphi''^2 +$

$r\beta_2\varphi'\varphi'' + \beta_3\varphi'^2)$ encontramos

$$\frac{g_i''}{g_i'} = -\left(\frac{3}{r} + \frac{\left(\mathcal{G}(r,\varphi',\varphi'') + (70\bar{\alpha}_4\varphi + 60\alpha_3)(r^2\varphi')' - \frac{28m}{r^3\varphi'}\right)'}{\mathcal{G}(r,\varphi',\varphi'') + (70\bar{\alpha}_4\varphi + 60\alpha_3)(r^2\varphi')' - \frac{28m}{r^3\varphi'}}\right) , \tag{5.2.35}$$

$$= -\left(\ln\left[r^3\mathcal{G}(r,\varphi',\varphi'') + r^3(70\bar{\alpha}_4\varphi + 60\alpha_3)(r^2\varphi')' - \frac{28m}{\varphi'}\right]\right)' , \tag{5.2.36}$$

$$g_i = B_i \int \frac{\varphi' dr}{r^3\mathcal{G}(r,\varphi',\varphi'') + r^3\varphi'(70\bar{\alpha}_4\varphi + 60\alpha_3)(r^2\varphi')' - 28m} + C_i , \tag{5.2.37}$$

donde B_i y C_i son constantes de integración y

$$\beta_1 = \alpha_4 \left(14d_{20} - 30d_{21} + 168d_{22} + 30d_{23} + 303d_{24} - 90d_{25} - 3504d_{26} \right.$$
$$\left. +18d_{17} + 98d_{18} + 216d_{19} + 30d_{13} + 44d_{16} - 16d_4\right) , \tag{5.2.38}$$

$$\beta_2 = \alpha_4 \left(156d_{13} + 248d_{16} + 128d_{17} + 604d_{18} + 1632d_{19} + 83d_{20} - 88d_{21} \right.$$
$$\left. +956d_{22} + 208d_{23} + 1828d_{24} + 48d_{25} - 16960d_{26} - 64d_4\right) , \tag{5.2.39}$$

$$\beta_3 = \alpha_4 \left(231d_{13} + 398d_{16} + 268d_{17} + 1034d_{18} + 3232d_{19} + 138d_{20} - 38d_{21} \right.$$
$$\left. +1566d_{22} + 428d_{23} + 3123d_{24} + 908d_{25} - 23040d_{26} - 64d_4\right) \tag{5.2.40}$$

La expresión (5.2.37) es notablemente simple para una teoría con potencias superiores en la curvatura. Es destacable además que en el denominador del lado derecho haya cuatro tipos de contribuciones de la teoría de GCT cuártica, el primero proviene de $\bar{\alpha}_4$ que controla la contribución cuártica en la solución simétricamente esférica y en este caso se añade al término de la contribución cúbica. Hay otros tres términos linealmente independientes β_1, β_2 y β_3 que pueden llevar a una familia triparamétrica de teorías.

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis se mostró que en Relatividad General, para tener un principio de acción que sea consistente bajo el punto de vista del problema variacional, es necesario añadir un término de borde que anule contribuciones superficiales que emergen al variar la acción de Einstein-Hilbert, este término adicional es conocido como el término de Gibbons-Hawking-York. También se presentó, a través del método Euclídeo, una expresión que permite obtener la temperatura de cualquier solución esféricamente simétrica caracterizada por una sola función $f(r)$, de forma que la temperatura del agujer negro depende exclusivamente del valor que toma $f'(r)$ en el horizonte de eventos. En el contexto de Relatividad General, se demosotró que las ecuaciones de campo en simetría esférica implican el Teorema de Birkhoff y se construyó la solución de Schwarzschild-Tangherlini con el objetivo de estudiar sus propiedades termodinámicas a través de la acción Euclídea, donde se mostró que es necesario incluir en la acción un término no dinámico evaluado en una métrica de fondo correspondiente a la solución de Schwarzschild-Tangherlini con $M = 0$. En ausencia de constante cosmológica el término de Gibbons-Hawking-York juega un rol fundamental para determinar la entropía y energía interna. Por otro lado, al estudiar geometrías con rotación, se observó que el ansatz de Kerr-Schild representa una herramienta eficaz para encontrar soluciones de este tipo, en este contexto, se integró la solución de Kerr, mostrando además, que la temperatura del agujero negro, a través del cálculo de la gravedad superficial, representa una generalización al caso de Schwarzschild.

Posteriormente se demostró que las ecuaciones de campo para una teoría genérica $\mathcal{L}(g^{ab}, R_{abcd})$quedan completamente caracterizadas por el tensor $P_{abcd} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R^{abcd}}$. En el estudio de soluciones exactas en algunas teorías que son parte de las teorías tipo-Einstein, caracterizadas por, entre otras propiedades, solo contener contracciones de la métrica y el tensor de Riemann y compartir el espectro linealizado de las ecuaciones de Einstein, es decir, propagan un gravitón sin masa en espacio-tiempos de curvatura constante. En particular, para teorías de Lovelock Lovelock y Cuasi-topológica cúbica se mostró que bajo una métrica con simetría esférica, las ecuaciones de campo llevan a una ecuación diferencial de primer orden que posee una integral trivial, lo que conduce a una ecuación algebraica para $f(r)$ de orden k, siendo k la potencia de los términos de curvatura superior en la acción. En el estudio de soluciones en el régimen de rotaciones bajas en teorías de Lovelock hasta orden cúbico se observó que la contribución a orden lineal en el parámetro de rotación no modifica la función $f(r)$ que se obtiene de la solución esféricamente simétrica. Fuera del régimen de rotaciones bajas, se mostró que el ansatz de Kerr-Schild permitió encontrar una solución exacta en la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet, requiriendo dos condiciones: que la métrica semilla del ansatz no fuera solución de las ecuaciones de campo y además que las constantes de acoplamiento se relacionaran de tal forma que solo hubiesen dos raíces iguales para el radio de curvatura de la solución máximamente simétrica.

Mediante el principio de acción reducida fue posible encontrar soluciones exactas en teorías con potencias superiores en la curvatura, mostrando su validez al encontrar las mismas soluciones expuestas en el Capítulo 3. En simetría esférica se obtuvieron las soluciones mostradas previamente para teorías de Lovelock, mostrando además que la teoría puramente Cuasi-topológica cúbica admite teorema de Birkhoff. Luego, se probó que este principio puede extenderse a soluciones de rotación lenta en teoría de Lovelock, para ello, las ecuaciones que gobiernan las funciones métricas fuera de la diagonal son no triviales a orden cuadrático en el parámetro de rotación, mientras que en la ecuación correspondiente a la función $f(r)$ se desprecian los términos de orden $\mathcal{O}(a)$ o superiores.

En el Capítulo 5 se muestran resultados nuevos en gravedad Cuasi-topológica cúbica en dimensión cinco, encontrando una solución por cuadratura a rotaciones bajas con dos momentos angulares, con una expresión semejante a la encontrada en teorías de Lovelock, además la función $f(r)$ correspondiente al caso esféricamente simétrico no se ve alterada en la solución a rotaciones bajas. Se verificó la validez del principio de acción reducida mediante comparación directa con las ecuaciones de campo, siendo estas ecuaciones consistentes entre sí. En esta teoría las contribuciones lineales del parámetro de rotación no afectan la dinámica de la función $f(r)$ al igual que en el caso de teorías de Lovelock. Por otro lado se investigó el uso del ansatz de Kerr-Schild para encontrar una solución exacta a las ecuaciones de campo, sin embargo, al requerir que la solución fuese asintóticamente AdS_5 para constantes de acoplamiento genéricas, en la región asintótica se llegaba a la condición de imponer una relación entra las constantes de acoplamiento, lo que contradecía completamente la hipótesis inicial de constantes de acoplamiento arbitrarias.

Posteriormente se construye la teoría Cuasi-topológica cuártica en dimensión cinco a partir de los 26 escalares de curvatura de la familia $\mathcal{R}^0_{8,4}$ (ver [43]), encontrando 11 restricciones para tener ecuaciones de primer orden en simetría esférica y otras dos restricciones para tener una teoría tipo-Einstein. Se aplicó una nueva restricción al exigir ecuaciones de hasta segundo orden para las funciones métricas fuera de la diagonal y se construyó la solución esféricamente simétrica mostrando que obedece una ecuación algebraica para $f(r)$ de cuarto orden. Por otro lado, se logró resolver por cuadratura la solución a rotaciones bajas con dos momentos angulares, mostrando que contribuciones lineales del parámetro de rotación no modifican la ecuación para g^{rr}. De la solución a rotaciones bajas se identifican cuatro contribuciones diferentes provenientes de la teoría cuártica, una de ellas añade una contribución a la solución hasta orden cúbico, mientras que existen otras 3 contribuciones que pueden ser vistas como una familia triparamétrica de teorías, esto podría indicar subfamilias de teorías Cuasi-topológicas que podrían estudiarse en escenarios con contribuciones superiores en los escalares de curvatura y/o en dimensiones superiores. Estos resultados fueron reportados en arXiv:2012.06618.

A futuro será interesante estudiar si las teorías de GCT cúbica y cuártica pueden ser embebidas en Teoría de Cuerdas, ya que, fue probado que la teoría GCT generalizada si puede se mapear en la teoría Tipo-IIB en AdS_5. Además, sería interesante extender el estudio de soluciones rotantes en estas teorías en un regimen arbitrario de rotación, siendo necesario estudiar alternativas al ansatz de Kerr-Schild [44] y estudiar como se relacionan estas soluciones en el contexto de AdS/CFT. Por otro lado, es posible extender la clasificación de teorías Cuasi-topológicas a través de las soluciones a rotaciones bajas, para ello, sería necesario explorar estas soluciones a los siguientes ordenes en los escalares de curvatura, siendo el caso quíntico el primero de ellos y de esa forma estudiar como se conectan estas teorías. Otra opción posible es estudiar el comportamiento de las soluciones encontradas en esta tesis a dimensiones superiores, donde la degeneración de la teoría cuártica se ve reducida.

Referencias

[1] C. M. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Cambridge University Press, 9 2018.

[2] P. Bueno, P. A. Cano, J. Moreno, and A. Murcia, "All higher-curvature gravities as Generalized quasi-topological gravities," *JHEP*, vol. 11, p. 062, 2019.

[3] R. A. Hennigar, D. Kubizňák, and R. B. Mann, "Generalized quasitopological gravity," *Phys. Rev. D*, vol. 95, no. 10, p. 104042, 2017.

[4] D. Lovelock, "The Einstein tensor and its generalizations," *J. Math. Phys.*, vol. 12, pp. 498–501, 1971.

[5] J. Oliva and S. Ray, "A new cubic theory of gravity in five dimensions: Black hole, Birkhoff's theorem and C-function," *Class. Quant. Grav.*, vol. 27, p. 225002, 2010.

[6] R. C. Myers and B. Robinson, "Black Holes in Quasi-topological Gravity," *JHEP*, vol. 08, p. 067, 2010.

[7] S. W. Hawking, C. J. Hunter, and M. M. Taylor-Robinson, "Rotation and the ads-cft correspondence," *Phys. Rev. D*, vol. 59, p. 064005, 1999.

[8] H.-C. Kim and R.-G. Cai, "Slowly Rotating Charged Gauss-Bonnet Black holes in AdS Spaces," *Phys. Rev. D*, vol. 77, p. 024045, 2008.

[9] R. Yue, D. Zou, T. Yu, P. Li, and Z. Yang, "Slowly rotating charged black holes in anti-de Sitter third order Lovelock gravity," *Gen. Rel. Grav.*, vol. 43, pp. 2103–2114, 2011.

[10] G. Debney, R. P. Kerr, and A. Schild, "Solutions of the Einstein and Einstein-Maxwell Equations," *J. Math. Phys.*, vol. 10, p. 1842, 1969.

[11] A. Anabalon, N. Deruelle, Y. Morisawa, J. Oliva, M. Sasaki, D. Tempo, and R. Troncoso, "Kerr-Schild ansatz in Einstein-Gauss-Bonnet gravity: An exact vacuum solution in five dimensions," *Class. Quant. Grav.*, vol. 26, p. 065002, 2009.

[12] J. W. York, "Role of conformal three-geometry in the dynamics of gravitation," *Physical Review Letters.*, vol. 28 (16), 1972.

[13] G. Gibbons and S. Hawking, "Action Integrals and Partition Functions in Quantum Gravity," *Phys. Rev. D*, vol. 15, pp. 2752–2756, 1977.

[14] F. R. Tangherlini, "Schwarzschild field in n dimensions and the dimensionality of space problem," *Nuovo Cim.*, vol. 27, pp. 636–651, 1963.

[15] S. Hawking, "Black hole explosions," *Nature*, vol. 248, pp. 30–31, 1974.

[16] S. Hawking, "Particle Creation by Black Holes," *Commun. Math. Phys.*, vol. 43, pp. 199–220, 1975. [Erratum: Commun.Math.Phys. 46, 206 (1976)].

[17] S. Hawking and D. N. Page, "Thermodynamics of Black Holes in anti-De Sitter Space," *Commun. Math. Phys.*, vol. 87, p. 577, 1983.

[18] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. Hawking, "The Four laws of black hole mechanics," *Commun. Math. Phys.*, vol. 31, pp. 161–170, 1973.

[19] R. P. Kerr, "Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 11, pp. 237–238, 1963.

[20] G. Gibbons, H. Lu, D. N. Page, and C. Pope, "Rotating black holes in higher dimensions with a cosmological constant," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 93, p. 171102, 2004.

[21] G. Gibbons, H. Lu, D. N. Page, and C. Pope, "The General Kerr-de Sitter metrics in all dimensions," *J. Geom. Phys.*, vol. 53, pp. 49–73, 2005.

[22] E. Babichev, C. Charmousis, A. Cisterna, and M. Hassaine, “Regular black holes via the Kerr-Schild construction in DHOST theories,” *JCAP*, vol. 06, p. 049, 2020.

[23] R. M. Wald, *General Relativity.* Chicago, USA: Chicago Univ. Pr., 1984.

[24] S. Hawking, “Particle Creation by Black Holes,” in *1st Oxford Conference on Quantum Gravity*, pp. 219–267, 8 1975.

[25] P. Bueno, P. A. Cano, V. S. Min, and M. R. Visser, “Aspects of general higher-order gravities,” *Phys. Rev. D*, vol. 95, no. 4, p. 044010, 2017.

[26] T. Padmanabhan, “Some aspects of field equations in generalised theories of gravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 84, p. 124041, 2011.

[27] R. Zegers, “Birkhoff’s theorem in Lovelock gravity,” *J. Math. Phys.*, vol. 46, p. 072502, 2005.

[28] M. Dehghani, A. Bazrafshan, R. Mann, M. Mehdizadeh, M. Ghanaatian, and M. Vahidinia, “Black Holes in Quartic Quasitopological Gravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 85, p. 104009, 2012.

[29] A. Cisterna, L. Guajardo, M. Hassaine, and J. Oliva, “Quintic quasi-topological gravity,” *JHEP*, vol. 04, p. 066, 2017.

[30] D. G. Boulware and S. Deser, “String Generated Gravity Models,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 55, p. 2656, 1985.

[31] R.-G. Cai, “Gauss-Bonnet black holes in AdS spaces,” *Phys. Rev. D*, vol. 65, p. 084014, 2002.

[32] J. T. Wheeler, “Symmetric Solutions to the Gauss-Bonnet Extended Einstein Equations,” *Nucl. Phys. B*, vol. 268, pp. 737–746, 1986.

[33] J. T. Wheeler, “Symmetric Solutions to the Maximally {Gauss-Bonnet} Extended Einstein Equations,” *Nucl. Phys. B*, vol. 273, pp. 732–748, 1986.

[34] X. O. Camanho and J. D. Edelstein, “A Lovelock black hole bestiary,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 30, p. 035009, 2013.

[35] R. C. Myers and M. Perry, “Black Holes in Higher Dimensional Space-Times,” *Annals Phys.*, vol. 172, p. 304, 1986.

[36] P. Bueno and P. A. Cano, “Einsteinian cubic gravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 94, no. 10, p. 104005, 2016.

[37] R. S. Palais, “The principle of symmetric criticality,” *Commun. Math. Phys.*, vol. 69, no. 1, pp. 19–30, 1979.

[38] S. Deser and J. Franklin, “Schwarzschild and Birkhoff a la Weyl,” *Am. J. Phys.*, vol. 73, pp. 261–264, 2005.

[39] S. Deser and J. Franklin, “Birkhoff for Lovelock redux,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 22, pp. L103–L106, 2005.

[40] J. Oliva and S. Ray, “Birkhoff’s Theorem in Higher Derivative Theories of Gravity,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 28, p. 175007, 2011.

[41] P. A. Cano Molina-Niñirola, *Higher-Curvature Gravity, Black Holes and Holography.* PhD thesis, U. Autonoma, Madrid (main), 2019.

[42] R. L. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner, “Dynamical Structure and Definition of Energy in General Relativity,” *Phys. Rev.*, vol. 116, pp. 1322–1330, 1959.

[43] S. Fulling, R. C. King, B. Wybourne, and C. Cummins, “Normal forms for tensor polynomials. 1: The Riemann tensor,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 9, pp. 1151–1197, 1992.

[44] B. Ett and D. Kastor, “An Extended Kerr-Schild Ansatz,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 27, p. 185024, 2010.