

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN

Facultad de ingeniería

Departamento de Ingeniería Metalúrgica

Profesor Patrocinante

Sr. Roberto Fustos Toribio

**DISEÑO DE MALLAS DE MUESTREO EN PRESENCIA DE
ANISOTROPÍAS**



HÉCTOR DANIEL VEGA ULLOA

Informe de Memoria de Título

para optar al Título de

Ingeniero Civil de Minas

JUNIO 2021

Resumen

En este trabajo se estudia el impacto de la presencia de anisotropías en el comportamiento espacial de la variable regionalizada de interés en una primera etapa de prospección sin información previa. Para lograr esto se crea un pseudocódigo para crear mallas de muestreo complementarias diseñadas.

Estas mallas de muestreo diseñadas se aplican a una base de datos simulados y a una base de datos reales. En la base de datos simulados se estudian diferentes tipos de anisotropías, donde para cada una se crean 100 bases de datos. A cada una de las bases de datos se le aplica el pseudocódigo para crear mallas complementarias diseñadas con las cuales se realiza la estimación de recursos y posterior cálculo de beneficios. Para cada caso de anisotropía se toma como valor representativo el promedio de los resultados de las 100 bases de datos y se presenta la diferencia producida por mallas complementarias de distinto tamaño. Para evaluar la eficiencia de las mallas complementarias diseñadas se comparan sus resultados con mallas de muestreo complementarias aleatorias del mismo tamaño, donde para el caso simulados se presentan resultados similares debido a la gran extensión del área de estudio.

En la base de datos reales se estudian datos irregulares de superficie con los cuales se crean mallas complementarias diseñadas. En este caso se detallan el mejor, el peor y el más probable caso respecto a los beneficios generados por las mallas complementarias diseñadas.

Debido a que la densidad de muestras en el área de estudio es mayor en el caso de datos reales, se observan mayores diferencias entre mallas complementarias diseñadas y mallas complementarias aleatorias, donde las mallas complementarias diseñadas presentan un beneficio máximo de 433.478 [MUSD], mientras que el beneficio máximo de mallas complementarias aleatorias es de 397.137 [MUSD].

Abstract

In this work is studied the impact of the presence of anisotropies on the spatial behavior of the regionalized variable of interest in a first stage of prospecting without previous information. To achieve this, a pseudocode is created to create designed complementary sampling schemes.

These designed sampling grids are applied to a simulated database and to a real database. In the simulated database, different types of anisotropies are studied, where 100 databases are created for each one. Pseudocode is applied to each of the databases to create designed complementary sampling grids for resource estimation and subsequent calculation of benefits. For each case of anisotropy, the average of the results of the 100 databases is taken as a representative value and the difference produced by designed complementary sampling grids of different sizes is presented. To evaluate the efficiency of the designed sampling grids, their results are compared with random complementary sampling grids of the same size, where for the simulated case similar results are presented due to the large extension of the study area.

In the real database are studied irregular surface data with which designed complementary sampling grids are created. In this case the best, worst and most probable cases are detailed with respect to the benefits generated by the designed sampling grids.

Due to the higher sample density in the study area in the case of real data, greater differences are observed between designed complementary grids and random complementary grids, where the designed complementary grids present a maximum benefit of 433,478 [MUSD], while the maximum benefit of random complementary meshes is 397,137 [MUSD].

Tabla de contenidos

1. Introducción.....	1
2. Descripción del problema	2
3. Hipótesis	3
4. Objetivos: Generales y Específicos	3
5. Metodología	4
6. Marco teórico.....	8
6.1 Mallas de muestreo.....	8
6.1.1 Definiciones previas	8
6.1.2 Consideraciones para realizar el muestreo.....	11
6.1.3 Planes de muestreo espacial.....	12
6.1.4 Criterios u objetivos aplicados para el diseño de mallas de muestreo	14
6.1.5 Optimización de mallas de muestreo	16
6.2 Estimación de recursos minerales	18
6.2.1 Definiciones previas	18
6.2.2 Variografía.....	20
6.2.3 Estimación por kriging	24
6.2.4 Validación.....	28
6.2.5 Categorización de recursos	30
6.3 Simulación	33
6.3.1 Definiciones, objetivos de simular.....	33
6.3.2 Métodos de simulación	34
7. Caso simulado.....	43
7.1 Metodología de simulación	43
7.2 Aplicación	44
7.2.1 Caso de alta continuidad	46
7.2.2 Caso baja continuidad	49
7.2.3 Caso efecto pepita grande.....	52
7.3.4 Caso omnidireccional	55
7.3 Análisis de resultados	58
8. Caso Real	61
8.1 Descripción de la base de datos	61
8.2 Análisis descriptivo preliminar	62
8.3 Aplicación	65

8.4 Análisis de resultados	70
9. Discusiones y conclusiones.....	72
10. Referencias	76
ANEXO A. Distintas mallas complementarias distribuidas de forma aleatoria.	79
ANEXO B. Categorización de recursos caso simulado.....	80
ANEXO C. Parámetros necesario para un análisis económico de los datos.....	83
ANEXO D. Tasa de positividad de las estimaciones para los casos de estudio.....	84
ANEXO E. Error cuadrático medio para distintos tamaños de mallas complementarias para los casos de estudio.	86
ANEXO F. Visualización de las variables en la base de datos real.....	88
ANEXO G. Análisis estadístico de la base de datos.	89
ANEXO H. Distribución de las 80 muestras iniciales.	90
ANEXO I. Variografía y validación cruzada.	91
ANEXO J. Modelos de bloques estimados.	93
ANEXO K. Categorización de recursos del caso real.	96
ANEXO L. Utilidades para distintos tamaños de mallas complementarias diseñadas.....	98
ANEXO M. Mejor, peor y más probable casos económicos.....	98



Lista de tablas

Tabla 1. Clasificación de recursos en base a la varianza relativa del kriging	33
Tabla 2. Parámetros modelos de variograma para casos de estudio.....	45
Tabla 3. Estadísticos de posición del promedio de las 100 estimaciones de las bases de datos para distintos tamaños de mallas complementarias.	47
Tabla 4. Categorización de la estimación de las 100 simulaciones realizadas para distintos tamaños de mallas complementarias.	48
Tabla 5. Beneficios para distintos tamaños de mallas complementarias diseñadas y mallas complementarias aleatorias.....	48
Tabla 6. Estadísticos de posición del promedio de las 100 estimaciones de las bases de datos para distintos tamaños de mallas complementarias.	50
Tabla 7. Categorización de la estimación de las 100 simulaciones realizadas para distintos tamaños de mallas complementarias.	51
Tabla 8. Beneficios para distintos tamaños de mallas complementarias diseñadas y mallas complementarias aleatorias.....	51
Tabla 9. Estadísticos de posición del promedio de las 100 estimaciones de las bases de datos para distintos tamaños de mallas complementarias.	53
Tabla 10. Categorización de la estimación de las 100 simulaciones realizadas para distintos tamaños de mallas complementarias.	54
Tabla 11. Beneficios para distintos tamaños de mallas complementarias diseñadas y mallas complementarias aleatorias.....	54
Tabla 12. Estadísticos de posición del promedio de las 100 estimaciones de las bases de datos para distintos tamaños de mallas complementarias.	56
Tabla 13. Categorización de la estimación de las 100 simulaciones realizadas para distintos tamaños de mallas complementarias.	57
Tabla 14. Beneficios para distintos tamaños de mallas complementarias diseñadas y mallas complementarias aleatorias.....	57
Tabla 15. Reducción de la varianza media de las estimaciones (en porcentaje [%]) para mallas complementarias compuestas de 30 puntos adicionales respecto a la situación inicial.	58
Tabla 16. Tasa de positividad en la clasificación de estéril-mineral y tasa de positividad global para las estimaciones realizadas a partir de mallas complementarias compuestas de 30 puntos adicionales.	59
Tabla 17. Error cuadrático medio de las 100 estimaciones de las bases de datos para distintos tamaños de mallas complementarias.	60
Tabla 18. Estadísticas descriptivas de variables continuas en la base de datos.....	62
Tabla 19. Frecuencia de datos en los distintos dominios.....	62
Tabla 20. Matriz de correlación entre variables continuas.	63
Tabla 21. Estadísticas básicas de las variables continuas en la superficie.....	63
Tabla 22. Frecuencia de datos por dominio en los datos superficiales.	64
Tabla 23. Correlación de variables continuas en la superficie.	64
Tabla 24. Estadísticas descriptivas de las 80 muestras iniciales.	65
Tabla 25. Utilidades presentadas por el mejor, peor y caso más probable para las distintas mallas complementarias para los recursos medidos e indicados por sobre la ley de corte.	69
Tabla 26. Error cuadrático medio de los distintos casos económicos para mallas creadas con el algoritmo de búsqueda.	71
Tabla 27. Parámetros físicos y económicos considerados.	83

Tabla 28. Estadísticos para la variable Cu [%] para los distintos dominios.	89
Tabla 29. Estadísticos para la variable Au [ppm] para los distintos dominios.	89
Tabla 30. Correlación entre variables continuas de las muestras iniciales.	91
Tabla 31. Parámetros de modelos de variogramas direccionales ajustados.	92
Tabla 32. Error cuadrático medio de los errores de validación cruzada.	93
Tabla 33. Error cuadrático medio adimensional de los errores de validación cruzada.	93
Tabla 34. Media estandarizada de los errores de predicción.	93
Tabla 35. Estadísticos de posición de las estimaciones realizadas a partir de distintas mallas complementarias diseñadas con el algoritmo de búsqueda.	94
Tabla 36. Estadísticos de posición de las estimaciones realizadas a partir de distintas mallas complementarias aleatorias.	94
Tabla 37. Categorización de recursos para distintas mallas complementarias.	97
Tabla 38. Utilidades para las distintas mallas complementarias diseñadas con el algoritmo de búsqueda.	98
Tabla 39. Clasificación de recursos de las estimaciones realizadas con las distintas mallas complementarias.	98



Lista de figuras

Figura 1. Aplicación de pseudocódigo.	8
Figura 2. Ejemplo de muestreo estratificado.....	10
Figura 3. Variograma de 250 muestras de mineral de cobre con valores entre 0% y 1% a la izquierda y con un dato extremo de 3% de cobre a la derecha.....	21
Figura 4. Mapa variográfico a la izquierda, donde se observan direcciones preferenciales, con esta información se observa a la derecha variogramas en las direcciones principales de anisotropía. .	22
Figura 5. Ejemplo de variograma con meseta.	23
Figura 6. Histograma de las varianzas del kriging con presencia de 3 poblaciones, 0-0.0075 - Reservas probables, 2) 0.0075-0.0135 - Reservas posibles 3)>0.0135 - Reservas inferidas.	32
Figura 7. Mapa de varianzas generadas a partir de las 80 primeras muestras, con las muestras iniciales en círculos y las 30 muestras complementarias en triángulos.....	46
Figura 8. Varianza media de las distintas mallas complementarias para las 100 simulaciones de la base de datos.....	47
Figura 9. Mapa de varianzas generadas a partir de las 80 primeras muestras, con las muestras iniciales en círculos y las 30 muestras complementarias en triángulos.....	49
Figura 10. Varianza media de las distintas mallas complementarias para las 100 simulaciones de la base de datos.....	50
Figura 11. Mapa de varianzas generadas a partir de las 80 primeras muestras, con las muestras iniciales en círculos y las 30 muestras complementarias en triángulos.....	52
Figura 12. Varianza media de las distintas mallas complementarias para las 100 simulaciones de la base de datos.....	53
Figura 13. Mapa de varianzas generadas a partir de las 80 primeras muestras, con las muestras iniciales en círculos y las 30 muestras complementarias en triángulos.....	55
Figura 14. Varianza media de las distintas mallas complementarias para las 100 simulaciones de la base de datos.....	56
Figura 15. Vista tridimensional para leyes de cobre	61
Figura 16. Histogramas y boxplot de leyes de la base de datos, cobre a la izquierda y oro a la derecha.	62
Figura 17. Histogramas y boxplot de leyes de la superficie, cobre a la izquierda y oro a la derecha.	64
Figura 18. Variograma experimental direccional y modelo esférico ajustado.....	66
Figura 19. Malla complementaria diseñada compuesta por 30 muestras encontradas con el algoritmo de búsqueda.	66
Figura 20. Malla complementaria aleatoria compuesta de 30 muestras.	67
Figura 21. Estadísticos de posición de leyes de cobre estimadas para distintos tamaño de mallas complementarias.	68
Figura 22. Clasificación de recursos para estimaciones generadas a partir de mallas complementarias diseñadas y mallas complementarias aleatorias.....	68
Figura 23. Curva tonelaje - ley las estimaciones realizadas a partir de las mallas complementarias que producen el mejor, peor y más probable ingresos económicos, tanto para mallas complementarias diseñadas y aleatorias.	70
Figura 24. Mapa de varianzas generadas a partir de las 80 primeras muestras, con las muestras iniciales en círculos y las 30 muestras complementarias en triángulos, caso alta continuidad.....	79
Figura 25. Mapa de varianzas generadas a partir de las 80 primeras muestras, con las muestras iniciales en círculos y las 30 muestras complementarias en triángulos, caso baja continuidad.....	79

Figura 26. Mapa de varianzas generadas a partir de las 80 primeras muestras, con las muestras iniciales en círculos y las 30 muestras complementarias en triángulos, caso efecto pepita grande.	80
Figura 27. Mapa de varianzas generadas a partir de las 80 primeras muestras, con las muestras iniciales en círculos y las 30 muestras complementarias en triángulos, caso omnidireccional.	80
Figura 28. Categorización de recursos para mallas complementarias diseñadas con el algoritmo de búsqueda y para mallas complementarias aleatorias, alta continuidad.	81
Figura 29. Categorización de recursos para mallas complementarias diseñadas con el algoritmo de búsqueda y para mallas complementarias aleatorias, baja continuidad.	82
Figura 30. Categorización de recursos para mallas complementarias diseñadas con el algoritmo de búsqueda y para mallas complementarias aleatorias, efecto pepita grande.	82
Figura 31. Categorización de recursos para mallas complementarias diseñadas con el algoritmo de búsqueda y para mallas complementarias aleatorias, omnidireccional.	83
Figura 32. Tasa de positividad de las estimaciones de estéril y mineral y la exactitud caso alta continuidad.	84
Figura 33. Tasa de positividad de las estimaciones de estéril y mineral y la exactitud caso baja continuidad.	85
Figura 34. Tasa de positividad de las estimaciones de estéril y mineral y la exactitud, caso pepita grande.	85
Figura 35. Tasa de positividad de las estimaciones de estéril y mineral y la exactitud, caso omnidireccional.	86
Figura 36. Error cuadrático medio del promedio de las 100 simulaciones para distintos tamaños de mallas complementarias diseñadas, alta continuidad.	86
Figura 37. Error cuadrático medio promedio de 100 simulaciones para los distintos tamaños de mallas complementarias diseñadas, baja continuidad.	87
Figura 38. Error cuadrático medio promedio de 100 simulaciones para los distintos tamaños de mallas complementarias diseñadas, pepita grande.	87
Figura 39. Error cuadrático medio promedio de 100 simulaciones para los distintos tamaños de mallas complementarias diseñadas, omnidireccional.	87
Figura 40. Vista tridimensional leyes de oro a la izquierda y sus proyecciones en planta y perfiles a la derecha.	88
Figura 41. Vista tridimensional de dominios a la izquierda y sus proyecciones en planta y perfiles a la derecha.	88
Figura 42. Leyes de cobre vs leyes de oro.	89
Figura 43. Gráfico de cajas leyes por dominios, cobre a la izquierda y oro a la derecha.	89
Figura 44. Histograma leyes por dominios, cobre a la izquierda y oro a la derecha.	90
Figura 45. Distribución espacial de las muestras iniciales.	90
Figura 46. Histogramas y boxplot de las muestras iniciales, cobre izquierda y oro derecha.	90
Figura 47. Variograma experimental omnidireccional de las muestras iniciales para leyes de cobre transformadas.	91
Figura 48. Varianza media de las estimaciones para distintas mallas complementarias.	93
Figura 49. Boxplot para leyes de cobre de las estimaciones realizadas a partir de distintos tamaños de mallas complementarias creadas con el algoritmo de búsqueda.	95
Figura 50. Boxplot para leyes de oro de las estimaciones realizadas a partir de distintos tamaños de mallas complementarias creadas con el algoritmo de búsqueda.	95
Figura 51. Boxplot para leyes de cobre de las estimaciones realizadas a partir de distintos tamaños de mallas complementarias aleatorias.	96

Figura 52. Boxplot para leyes de oro de las estimaciones realizadas a partir de distintos tamaños de mallas complementarias aleatorias..... 96

Figura 53. Categorización de recursos con 80 muestras iniciales, categorización con malla complementaria diseñada para 30 muestras adicionales, categorización con malla complementaria aleatoria para 30 muestras adicionales. 97

Figura 54. Histogramas mejor casos, peor caso y caso más probable de las mallas complementarias diseñadas con el algoritmo de búsqueda..... 99



1. Introducción

Los minerales son recursos no renovables indispensables para el crecimiento de la industria moderna. La gran demanda mundial produce el constante agotamiento de los depósitos superficiales de altas leyes. Por esta razón, los procesos mineros han evolucionado con el fin de explotar depósitos de menores leyes y difícil acceso que en el pasado se consideraban como estéril. Tal es el caso de la minería del cobre en Chile, donde a partir del siglo XX comenzó la explotación de los grandes yacimientos de pórfidos, necesitando un desarrollo considerable de las tecnologías de explotación y procesamiento de minerales disponibles hasta el momento, como la incorporación del proceso de flotación.

Este continuo proceso entre el agotamiento de las reservas y el avance de nuevas tecnologías, busca mejorar cada aspecto de la cadena de valor de la industria minera, con el propósito de utilizar leyes de corte progresivamente más bajas. Por este motivo, tomar de decisiones adecuadas es cada vez más difícil y requiere una gran cantidad de información, debido a las bajas leyes con las que se trabaja. Por lo que un error en la etapa de prospección o exploración puede costar la puesta en marcha de las operaciones y en el peor de los casos, ser detectados en la etapa de procesamiento de minerales, lo que significa la pérdida de millones de dólares [22].

Se recolectan muestras durante todo del ciclo de operaciones mineras para verificar los modelos de predicción de la variable de interés y localizar posibles sesgos de forma prematura. Los errores se pueden producir en cualquiera de las fases de desarrollo en la vida de una mina y su magnitud aumenta con cada etapa que transcurre, ya que la minería es un ciclo en el que cada proceso es dependiente del éxito de las etapas previas. Los errores más graves son causados en la estimación de recursos minerales [30]. La estimación de recursos permite definir el diseño, plan de operación, nivel de producción y los requisitos de la planta de procesamientos de minerales. Con esta información se estima el posible beneficio económico obtenido por la explotación de un yacimiento potencial y se decide si se llevará a cabo la inversión o se dejará el proyecto en espera.

Con el propósito de realizar la estimación de recursos, se requiere de una etapa de exploración con sondajes, que entrega información detallada de las zonas de interés en la propiedad minera, como la continuidad y leyes del mineral de interés, así como las dimensiones del yacimiento. La exploración con sondajes es una etapa de alto riesgo, debido a que tiene costos y tiempos de ejecución considerablemente altos y no se cuenta con la certeza de demarcar un depósito que posibilite una operación rentable. Como consecuencia, el tiempo y presupuesto asignados a la exploración para demostrar resultados son limitados, de modo que se intenta obtener la mayor

cantidad de información útil y representativa de la variable de interés empleando el menor número de sondajes.

Para determinar la ubicación de los sondajes de exploración en los lugares adecuados es necesaria una idea preliminar de la composición del terreno. Esto se logra con una etapa de prospección que permite un reconocimiento general de la propiedad minera con el fin de identificar anomalías geológicas con el potencial de convertirse en yacimientos y acotar la zona de interés con el fin de establecer las ubicaciones tentativas de los sondajes de exploración. Estas dos etapas generalmente se solapan y son las bases de los procesos posteriores de desarrollo y explotación de la mina.

A medida que avanzan las exigencias en la minería, también lo hacen sobre las etapas de prospección y exploración, por lo que la prospección es un proceso lento, que puede tardar entre 1 y 3 años, el cual debe ser desarrollado de forma rigurosa. Para esto se realiza una investigación de toda la información disponible de la propiedad minera. Seguido, se emplean técnicas de prospección indirectos como métodos de teledetección, fotografías satelitales, entre otros. Y métodos directos que consisten en la recolección de muestras en la superficie [30].

En la actualidad se cuenta con el apoyo de las técnicas geoestadísticas, como el semivariograma, con el cual es posible diseñar mallas de muestreo para un determinado nivel de incertidumbre sin la necesidad de recolectar las muestras de manera física. Además de herramientas complementarias como la simulación estocástica, que permite generar modelos espaciales de los atributos de interés con el fin de estudiar la eficiencia de distintas metodologías de prospección y exploración sobre depósitos ficticios. Y el desarrollo de software capaces de emplear algoritmos de optimización para la búsqueda de soluciones. Gracias a estas herramientas es posible evaluar la eficiencia de distintos patrones de búsqueda y crear mallas que permitan obtener la mayor cantidad de información al menor costo dados los objetivos buscados en cada situación con la cantidad de información disponible y las restricciones que presenta el problema.

2. Descripción del problema

El problema abordado en esta memoria de título está relacionado con la definición de mallas de muestreo en presencia de comportamientos anisótropos de depósitos minerales.

El desconocimiento de los comportamientos anisótropos de una variable regionalizada afecta de sobremanera el cálculo de la varianza de estimación del modelo de bloques, pues ésta se obtiene ponderando estos comportamientos y distribuyéndolos en base a su relevancia.

En la actualidad, el estudio preliminar se realiza basado en conocimientos previos, criterios establecidos en base a experiencia en depósitos similares y descripciones geológicas, las que no incorporan los detalles de continuidad espacial ni comportamientos direccionales.

Esto último, conlleva un alto riesgo en las etapas posteriores de estimación y categorización de recursos, pues cada decisión tomada está basada en el plan de estimación, generando un impacto económico significativo en el proyecto, porque al no estar clara en su totalidad la posible varianza de estimación en el modelo de bloques se cometen errores que se trasladan a las siguientes etapas en el desarrollo de la mina, siendo cada vez mayores en magnitud.

3. Hipótesis

El problema de la definición y construcción de mallas de muestreo óptimas puede ser resuelto realizando estudios previos de variografía e identificando comportamientos preferenciales de la continuidad espacial de una variable regionalizada. Estas mallas de muestreo pueden ser utilizadas en las etapas de estimación y categorización de recursos, minimizando el riesgo económico y aumentando los recursos y reservas mineras.

4. Objetivos: Generales y Específicos

El objetivo general de esta memoria de título busca definir una metodología que permita la construcción de mallas de muestreo óptimas en presencia de comportamientos anisótropos de variables regionalizadas de un depósito mineral, disminuyendo la varianza de estimación en la construcción del modelo de bloques.

Objetivos específicos:

1. Estudiar la distribución de la varianza de estimación en escenarios anisótropos.
2. Definir una metodología para la construcción de las mallas de muestreo óptimas.
3. Realizar un análisis económico de diferentes escenarios de riesgo.

5. Metodología

La metodología usada para abordar el problema planteado consiste en la aplicación de dos casos, uno con un conjunto de datos simulados y otro de datos reales.

El procedimiento de trabajo con el primer caso (conjunto de datos simulados) será el siguiente:

- Se generará una base de datos simulados con atributos continuos distribuidos en 2D, correspondientes a un muestreo parcial de una zona de estudio.
- Con esta base de datos se cuantificarán los comportamientos anisótropos, para luego comparar diferentes mallas de muestreo con diferentes números de muestras.
- Se realizará un estudio comparativo con las medidas estadísticas principales asociadas a las mallas y sus varianzas de estimación.
- En cada una de las simulaciones se generará un plan de estimación y categorización de recursos, reportando las medidas estadísticas principales.
- Realizar un análisis económico de diferentes escenarios de riesgo asociados a los datos simulados.

El procedimiento de trabajo con el conjunto de datos reales será el siguiente:

- Se realizará una descripción detallada de la base de datos.
- Se realizará un análisis descriptivo completo de cada una de las variables presentes.
- Se aplicarán diferentes mallas de muestreo.
- Se realizará el plan de estimación y categorización de recursos en cada escenario.
- Se realizará una evaluación económica en cada escenario y se entregará el peor, el mejor y el caso más probable de beneficio económico.

En cada uno de los conjuntos de datos, se realizará un análisis crítico de los resultados y se elaborarán conclusiones y discusiones parciales.

A continuación se anexa el pseudocódigo creado para el diseño de mallas de muestreo complementarias:

```

# Diseño de la red complementaria de muestreo

# crear las coordenadas
xcoord=seq(0,2000,by=10)
ycoord=seq(0,1000,by=10)
coordenadas<-expand.grid(Easting=xcoord,Northing=ycoord)
loc<-coordenadas
coordinates(coordenadas)<-~Easting+Northing

# parametros
muestras<-80
muestras_nuevas<-30
radio_influencia<-280 #~20% diagonal de 45°

distancia<-function(x1,y1,x2,y2){
  sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2)
}
# rango de distancias
minima_distancia<-0
intervalos_ponderacion<-seq(from=minima_distancia,to=radio_influencia,
                             length=(radio_influencia/5+1))
intervalos_ponderacion[length(intervalos_ponderacion)]<-
  intervalos_ponderacion[length(intervalos_ponderacion)]+1
# PONDERACION EXPONENCIAL
x<-seq(from=0, to=10, length=radio_influencia/5)
exp1<-expression(exp(1*x-4.5))
valores_poderacion<-rev(eval(exp1))
# PONDERACION EXPONENCIAL
y<-seq(from=0, to=6.75, length=50)
exp2<-expression(exp(1*y-4.5))
valores_poderacion_varianza<-rev(eval(exp2))

muestras_iniciales<-base_trabajo[sample(nrow(base_trabajo),muestras,
                                       replace=FALSE),]
dat<-muestras_iniciales[,1:2]
muestras_transformadas<-muestras_iniciales
muestras_transformadas$sim<-log(muestras_transformadas$sim)

#variograma experimental
vario_exp_direccional<-expvar_dir(
  drillhole=muestras_transformadas,
  coordinates=c("Easting","Northing"),
  variable="Cu",
  azimuth=c(45,135),
  lags=c(15,15),
  maxdist=c(730,730),
  tol.lag=c(0.5,0.5),
  tol.dir = c(45,45))
for(i in 1:2){
  for(j in 1:15){
    if(ve$pares[j,i]==0){
      ve$pares[j,i]<-1
      ve$variograma[j,i]<-0
    }
  }
}
# Ajustar el variograma experimental direccional
modelo_direccional<-fitvar_dir(
  variograma = vario_exp_direccional$variograma,
  lags = vario_exp_direccional$lags,
  pares = vario_exp_direccional$pares,
  # "Pepa", "Exponencial", "Esferico" y "Gaussiano".
  modelos = c("Esferico", "Esferico" ),
  nug = TRUE)

#calculo varianzas iniciales
kriging_gmin<-kri_dir(
  sondajes=muestras_transformadas,
  coordenadas. sondajes = c("Easting","Northing"),
  variable="sim",
  localidades=loc,
  coordenadas.localidades = c("Easting","Northing"),
  kriging="Ordinario",
  azimuth = c(45,135),
  variogramas=c("Esferico", "Esferico"),
  pepa=modelo_direccional[[1]]$pepa,
  mesetas=c(modelo_direccional[[1]]$meseta,
            modelo_direccional[[2]]$meseta),
  alcances=c(modelo_direccional[[1]]$rango,
            modelo_direccional[[2]]$rango),
  max.num.pares=10)
vv<-kriging_gmin$varianza
plotear=data.frame(loc,varianza=vv)
scale.range <- range(plotear$varianza)

```



```

muestras_iniciales_varianza<-c()
for(jj in 1:nrow(muestras_iniciales)){
  mm<-subset(plotear,plotear$Easting==muestras_iniciales$Easting[jj] &
    plotear$Northing==muestras_iniciales$Northing[jj])
  muestras_iniciales_varianza<-rbind(muestras_iniciales_varianza,mm)
}
# quitar las muestras iniciales
for(yy in 1:nrow(dat)){
  plotear<-subset(plotear,plotear$Easting!=dat$Easting[yy] |
    plotear$Northing!=dat$Northing[yy])
}
# elegir imagen inicial para optimizar
imagen_inicial<-plotear[sample(nrow(plotear),muestras_nuevas),]
# filtro por proximidad
radio_filtro<-20
for(yy in 1:nrow(dat)){
  plotear<-subset(plotear,distancia(muestras_iniciales$Easting[yy],
    muestras_iniciales$Northing[yy],plotear$Easting,
    plotear$Northing)|>=radio_filtro)
}

minima_varianza<-min(summary(vv))
maxima_varianza<-max(summary(vv))
intervalos_ponderacion_varianza<-seq(from=minima_varianza,to=maxima_varianza
  ,length=51)
intervalos_ponderacion_varianza[length(intervalos_ponderacion_varianza)]<-
  intervalos_ponderacion_varianza[length(intervalos_ponderacion_varianza)]+1

repeticiones<-0
convergencia<-0
while(convergencia<150){
  repeticiones<-repeticiones+1
  for(gg in 1:muestras_nuevas){
    muestra_evaluada<-imagen_inicial[gg,]
    probar<-muestra_evaluada
    probar<-subset(probar,probar$varianza<(-99))
    while(nrow(probar)==0){
      muestra_aleatoria<-plotear[sample(nrow(plotear),1),]
      if(nrow(subset(imagen_inicial,imagen_inicial$Easting==
        muestra_aleatoria$Easting & imagen_inicial$Northing==
        muestra_aleatoria$Northing))==0){
        muestras_candidatas<-imagen_inicial
        muestras_candidatas[gg,]<-muestra_aleatoria
        probar<-muestra_aleatoria
      }
    }
  }
  # VALORES MUESTRAS INICIALES
  informacion_total_inicial<-rbind(imagen_inicial,
    muestras_iniciales_varianza)
  puntos_influyentes<-subset(informacion_total_inicial,distancia(
    muestra_evaluada$Easting,muestra_evaluada$Northing,
    informacion_total_inicial$Easting,informacion_total_inicial$Northing)
    <=radio_influencia & distancia(muestra_evaluada$Easting,
    muestra_evaluada$Northing,informacion_total_inicial$Easting,
    informacion_total_inicial$Northing)!=0)
  if(nrow(puntos_influyentes)==0){nota_posicion_inicial<-0}else{
    distancia_entre_puntos_influyentes<-c()
    for(kk in 1:nrow(puntos_influyentes)){
      distancia_entre_puntos_influyentes[kk]<-distancia(
        muestra_evaluada$Easting,muestra_evaluada$Northing,
        puntos_influyentes$Easting[kk],puntos_influyentes$Northing[kk])
    }
  }
}

```




```

penalizacion<-c()
for(h in 1:length(distancia_entre_puntos_influyentes)){
  b<-c()
  ii<-1
  while(length(b)==0){
    if(distancia_entre_puntos_influyentes[h]>=
      intervalos_ponderacion[ii] &
      distancia_entre_puntos_influyentes[h]<
      (intervalos_ponderacion[ii+1])){
      b<-valores_poderacion[ii]
    }
    ii<-ii+1
  }
  penalizacion[h]<-b
}
nota_posicion_inicial<-mean(penalizacion)
}
b<-c()
ii<-1
while(length(b)==0){
  if(muestra_evaluada$varianza>=intervalos_ponderacion_varianza[ii] &
    muestra_evaluada$varianza<intervalos_ponderacion_varianza[ii+1]){
    b<-valores_poderacion_varianza[ii]
  }
  ii<-ii+1
}
nota_varianza_inicial<-b
nota_inicial<-(nota_posicion_inicial+nota_varianza_inicial)

# VALORES MUESTRAS FINALES
informacion_total_final<-rbind(muestras_candidatas,
                               muestras_iniciales_varianza)
puntos_influyentes<-subset(informacion_total_final,distancia
  (muestra_aleatoria$Easting,muestra_aleatoria$Northing,
   informacion_total_final$Easting,informacion_total_final$Northing)<=
  radio_influencia & distancia(muestra_aleatoria$Easting,
  muestra_aleatoria$Northing,informacion_total_final$Easting,
  informacion_total_final$Northing) !=0)
if(nrow(puntos_influyentes)==0){nota_posicion_final<-0}else{
  distancia_entre_puntos_influyentes<-c()
  for(kk in 1:nrow(puntos_influyentes)){
    distancia_entre_puntos_influyentes[kk]<-distancia
    (muestra_aleatoria$Easting,muestra_aleatoria$Northing,
     puntos_influyentes$Easting[kk],puntos_influyentes$Northing[kk])
  }

  penalizacion<-c()
  for(h in 1:length(distancia_entre_puntos_influyentes)){
    b<-c()
    ii<-1
    while(length(b)==0){
      if(distancia_entre_puntos_influyentes[h]>=
        intervalos_ponderacion[ii] &
        distancia_entre_puntos_influyentes[h]<
        (intervalos_ponderacion[ii+1])){
        b<-valores_poderacion[ii]
      }
      ii<-ii+1
    }
    penalizacion[h]<-b
  }
  nota_posicion_final<-mean(penalizacion)
}
b<-c()
ii<-1
while(length(b)==0){
  if(muestra_aleatoria$varianza>=intervalos_ponderacion_varianza[ii] &
    muestra_aleatoria$varianza<intervalos_ponderacion_varianza[ii+1]){
    b<-valores_poderacion_varianza[ii]
  }
  ii<-ii+1
}
nota_varianza_final<-b
nota_final<-(nota_posicion_final+nota_varianza_final)

```

```

if(nota_final<=nota_inicial){
  imagen_inicial<-muestras_candidatas
  convergencia<-0
}
}
# fin para 30 muestras
convergencia<-convergencia+1
}
# fin para una simulacion

```

Se impone como restricción para el diseño de una malla de muestreo complementaria mantener la distancia de las muestras nuevas con las preexistentes y se adiciona una ponderación reducida de la varianza de estimación. Esto permite alejar las muestras de sitios que tienen una alta confianza de estimación, figura 1.

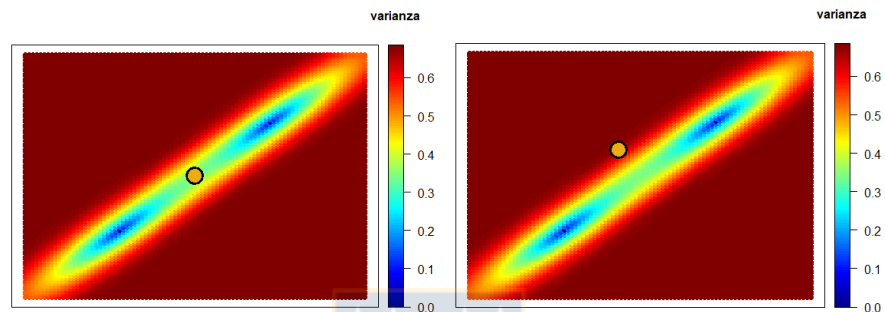


Figura 1. Aplicación de pseudocódigo.

6. Marco teórico

6.1 Mallas de muestreo

6.1.1 Definiciones previas

Muestreo: acción de recoger individuos estadísticamente representativos a partir de un conjunto mayor de información, con la finalidad de inferir alguna característica particular del atributo de interés extrapolable al conjunto mayor.

Población: conjunto total de individuos que representan un determinado atributo de interés desde el cual se desean extraer muestras [22].

Muestras: se define como una parte representativa de un conjunto mayor de información. Las muestras se obtienen a través de varios métodos. Por ejemplo, mediante la extracción del material fragmentado dejado por los pozos de tronadura, el muestreo de superficies en afloramiento o mediante la perforación con corona de diamante [21].

Malla de muestreo: mapa que establece de forma predeterminada las ubicaciones espaciales de las muestras que serán recolectadas para un estudio específico. El diseño de la malla de muestreo

puede ir desde un patrón regular hasta una configuración totalmente aleatoria de las muestras, lo que depende de los objetivos del estudio, así como de los recursos y tiempos disponibles, entre otras restricciones.

Sesgo: alteración o error que afecta la calidad de los resultados logrados usando las muestras. Los sesgos pueden ser causados por errores humanos, herramientas mal calibradas, el tipo de mineralización en las muestras, etc.

Exactitud y precisión: la exactitud corresponde a la media de las muestras, la cual debe ser insesgada. Mientras que la precisión es la variación que presentan los datos respecto a su media, la cual se debe mantener al mínimo [22].

Tamaño de muestra: mientras mayor es la cantidad de muestras, de mejor forma se puede caracterizar la variable de interés, sin embargo, aumentan los costos asociados. En la mayoría de los casos, la cantidad de muestras a recolectar viene determinada por el presupuesto asignado a la etapa de muestreo. Una vez recolectadas las muestras, durante su análisis estadístico, la ubicación de estos datos es tratada de manera puntual.

Existen distintas estrategias para determinar la posición de las muestras en la superficie. De manera general, las mallas de muestreo más empleadas se pueden clasificar dentro de los siguientes grupos:

Muestreo aleatorio: las muestras siguen un patrón aleatorio e independiente en la determinación de sus ubicaciones [27]. En el caso de cintas transportadoras, las muestras se extraen en intervalos de tiempo irregulares. De esta forma, cada individuo tiene la misma probabilidad de ser escogido.

Muestreo sistemático aleatorio: en una malla compuesta por n puntos, el primer punto se escoge al azar. Luego, las $(n - 1)$ locaciones restantes se distribuyen de forma equidistante con un patrón regular. Por ejemplo, el muestreo se puede organizar a través del diseño de una cuadrícula y tomar las muestras en el vértice o en el centro de cada rectángulo. Si el primer punto no es escogido al azar, el muestreo recibe el nombre de muestreo regular o determinístico [27]. En el caso de cintas transportadoras, las muestras se extraen en intervalos de tiempo iguales con el fin de lograr una separación similar entre muestras [22].

Muestreo estratificado: la superficie se divide en subregiones no sobrepuestas a través de una malla regular. Posteriormente, dentro de cada subregión se toma una muestra de forma aleatoria. Mientras menor es el perímetro de la figura utilizada para estratificar el área, menor es la varianza de estimación del modelo de bloque estimado a partir del conjunto de observaciones recolectadas [27].

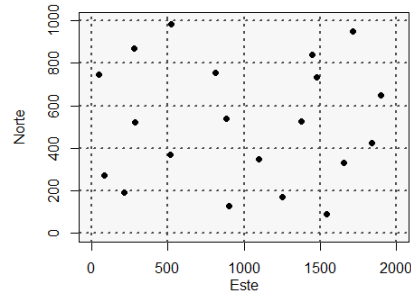


Figura 2. Ejemplo de muestreo estratificado.

Muestreo compuesto: consiste en la representación de un área de interés con una única muestra obtenida a partir de la combinación de varias submuestras. El principal objetivo del muestreo compuesto es estimar la media del atributo de interés cuando se puede afirmar con suficiente seguridad que tiene un comportamiento homogéneo. Al abarcar una mayor superficie sin la necesidad de aumentar en número de análisis de laboratorio empleados, disminuyen tanto el tiempo como los costos de la exploración, mientras se mantiene la precisión del estadístico estimado [28].

Antes de iniciar un muestreo con métodos de prospección físicos, se lleva a cabo una investigación con el propósito de reunir toda la información disponible relacionada al área de interés. Por ejemplo, mapas de estratificación de suelos o el uso histórico que ha tenido el terreno en ese lugar, así como estudios de variables relacionadas. Con esta información se podrán focalizar de mejor forma los recursos destinados a la exploración y así tomar decisiones más acertadas con la información antes no considerada [32].

Durante las primeras etapas de la prospección, antes de la exploración, se pueden aplicar técnicas de teledetección satelital (usando información de imágenes tomadas desde satélites) y fotogrametría (con información de fotos conseguidas desde aviones o drones), con el fin de complementar la información disponible. Una vez analizados estos datos se comienza con la exploración en terreno para elaborar estudios químicos y geológicos de la zona. El paso final es la exploración con sondajes de perforación. Todos los estudios y etapas de prospección previas son realizados con el fin de precisar la ubicación de los sondajes con tal de que entreguen la información necesaria para identificar un proyecto factible o viable de la mejor forma posible, dado que la ejecución de un sondaje es un proceso lento y costoso [36].

Para la recolección de muestras en terreno existen distintos métodos dirigidos a la exploración minera. Entre los cuales se encuentran [29]:

- Muestreos de canales: corte perpendicular al plano de la veta expuesta en la superficie, de tal forma que abarque la totalidad la sección transversal del afloramiento e indique una potencia aproximada de la veta.
- Muestreo de chips: versión menos rigurosa del muestreo de canales. En este muestreo el mineral es extraído directamente desde el afloramiento con un martillo. Es una forma más rápida y económica de extraer muestras, pero estas son menos representativas.
- Muestreo de catas o pozos: excavación relativamente profunda, realizada de forma manual con el fin de tomar muestras a una mayor profundidad de la superficie.
- Muestreo de caminos y trincheras: las muestras se extraen desde la zanja colindante dejada por la construcción de un camino. Se toman muestras a medida que se advierten cambios en el tipo de mineralización.
- Muestreo de perforación: método de muestreo aplicado en la etapa final de la prospección. Si se emplea perforación por corona de diamante, las muestras se recuperan en forma de testigos. Y si se utiliza perforación por percusión, las muestras se extraen en forma de detritos. La perforación de sondajes es uno de los procesos más lentos y costosos en la exploración minera.

6.1.2 Consideraciones para realizar el muestreo

En el caso de que la variable regionalizada, el atributo de interés, exhiba un comportamiento isotrópico, el patrón de muestreo más eficiente es la aplicación de una malla regular con una distancia de separación entre muestras equivalente al alcance del modelo de variograma que describe a la variable estudiada. Si se presenta una anisotropía se busca el espaciamiento que permite cumplir con la máxima varianza de estimación permitida en la dirección de mayor continuidad geológica, luego esta distancia es multiplicada por el coeficiente de anisotropía para hallar la distancia de separación en el eje de menor continuidad [37]. Esta malla de muestreo óptima es la adecuada si las consideraciones efectuadas para obtener el modelo de variograma son correctas. Por este motivo, el plan de muestreo está en constante revisión y corrección [36].

Los investigadores deben prestar atención a los cambios abruptos en la continuidad de la variable regionalizada, ya que podrían estar en presencia de una anisotropía zonal. En cuyo caso, deben crear estrategias de muestreo para los distintos comportamientos de la variable en los sectores que presentan estas diferencias [37].

Sin embargo, para llegar a conocer el modelo de variograma de la variable y, por ende, tener la posibilidad de producir redes de muestreo óptimas, primero es necesario tomar datos del terreno. Si

no se cuenta con información de muestras previa, la malla de muestreo se diseña en base a la información reunida y las inferencias realizadas por los geólogos hasta el momento [21]. También se dispone de diseños de mallas óptimas aplicadas a depósitos similares. Por ejemplo, los depósitos estratiformes y sedimentarios permiten un espaciamiento amplio entre muestreos, mientras que los filones requieren de una gran densidad de muestreo [30].

La distribución de las muestras depende de la etapa de evaluación en la que se encuentra el depósito en estudio. En primera instancia, los patrones de muestreo seleccionados tienen la finalidad de delimitar la continuidad geológica y la distribución de las leyes minerales a gran escala. A medida que avanza la investigación, esta información es complementada con muestras adicionales para lograr una descripción apropiada del comportamiento de la variable regionalizada. De esta forma, en caso de existir anisotropías, se logra una mejor identificación y descripción de ellas, así como de la variabilidad presente a pequeña escala. Sin embargo, en la mayoría de los planes de exploración minera el estudio preliminar es acotado y no se logra reducir la incertidumbre por debajo de un umbral de riesgo adecuado [36]. Esto se debe a la gran presión que reciben los investigadores para definir, en el menor tiempo posible, recursos minerales con el potencial económico de ser extraídos y avanzar hacia las etapas de prospección más definitivas, como las campañas de sondajes [21].

6.1.3 Planes de muestreo espacial

Para el diseño de mallas de muestreo existen varias configuraciones que pueden ayudar a los investigadores a lograr sus objetivos. Entre las configuraciones más conocidas se encuentran el muestreo aleatorio y el muestreo regular. Los cuales cuentan tanto con ventajas como desventajas.

Una estrategia común consiste en la aplicación de una malla de muestreo regular que permite distribuir las muestras con el fin de abarcar todo el terreno en estudio, lo que es esencial para tomar futuras decisiones, ya que entrega una idea global del área en la que se trabaja. Además, su implementación resulta mucho más simple si se compara con otros tipos de muestreo. Sin embargo, debido a que las muestras son recolectadas con un espaciamiento regular, los resultados pueden estar sesgados por las periodicidades existentes en el comportamiento de la variable regionalizada [36]. Un patrón regular no permite un muestreo selectivo en determinadas zonas de interés. Y finalmente, si la distancia de separación entre muestras es demasiado amplia, no se consigue información del comportamiento de la variable regionalizada a pequeña escala y tampoco del efecto pepita, lo que conlleva problemas en la determinación del modelo de variograma necesario para las futuras predicciones de valores [23].

Las mallas de muestreo regulares se clasifican según el patrón que siguen las muestras al ser distribuidas en el espacio. Entre estas se encuentran las mallas rectangulares, cuadradas, triangulares y hexagonales. La aplicación en terreno de mallas hexagonales resulta complicada, dado que se necesita una gran cantidad de viajes para extraer las muestras en las locaciones establecidas por la malla, razón por la cual este es el patrón de muestreo menos utilizado. Entre los patrones triangular y cuadrado, el patrón de muestreo triangular equilátero entrega una menor varianza máxima de las estimaciones que un patrón cuadrado con tamaño de lado similar. Esto es así porque con un patrón triangular disminuye en mayor medida la distancia entre el centro de la figura y los vértices, la cual es la distancia máxima entre un punto no muestreado y una observación conocida [37]. Pero, nuevamente, por un tema de simplicidad y considerando que la reducción adicional de la varianza máxima de estimación proporcionada por un patrón triangular no es muy superior a la de una malla cuadrada, se considera que un patrón cuadrado es de mayor utilidad en la práctica [23,27].

Por otro lado, el muestreo aleatorio posibilita tener pares de puntos conocidos en todas las escalas de separación de la variable regionalizada, y gracias a su naturaleza permite capturar de mejor forma la aleatoriedad inherente en las variables regionalizadas. Con los pares de puntos separados por distancias pequeñas se modelan el efecto pepita y el comportamiento en el origen del modelo de variograma. Información que en el caso de un muestreo regular tiene que ser obtenida con la ayuda de una etapa de muestreo adicional. Además, el muestreo aleatorio tiene una mayor flexibilidad frente a situaciones o problemas que pueden surgir en la práctica, como la presencia de barreras u obstáculos naturales que impiden tomar las muestras en algunas locaciones. Y en caso de contar con información relacionada a la variable de interés se puede focalizar el muestreo de determinadas zonas [31].

Como desventajas se cuenta con la posibilidad de que amplios sectores de la propiedad en estudio queden sin una toma de muestras. Esta desventaja es más notoria si se cuenta con un presupuesto limitado en la etapa de prospección, ya que un patrón aleatorio no es el óptimo para lograr una distribución equitativa de las muestras sobre la superficie [23].

6.1.4 Criterios u objetivos aplicados para el diseño de mallas de muestreo

Al momento de diseñar una nueva malla de muestreo deben estar definidos los objetivos que se plantean cumplir con el estudio, ya que estos determinan la distribución de las muestras en la elaboración del plan de muestreo [27].

Existe una gran cantidad de criterios para el diseño de redes. Los más conocidos son los basados en la disminución de la varianza del kriging. Entre estos se encuentran la disminución de la varianza media de las estimaciones y la disminución de la varianza máxima de las estimaciones [27]. La disminución de la varianza media de las estimaciones permite lograr una distribución óptima con el propósito de una futura categorización de recursos. De esta forma, las muestras se distribuyen en la zona central del dominio. Mientras que al disminuir la varianza máxima de las estimaciones, las muestras se sitúan próximas a los extremos, debido a que en los extremos se cuenta con una menor cantidad de observaciones y, por lo tanto, con una mayor incertidumbre.

Al comparar estos dos criterios, el primer criterio produce una mayor disminución en la varianza media de las estimaciones, pero esta reducción en la varianza media no es considerablemente mayor a la que se obtiene con el segundo criterio. En contraste, el segundo criterio mencionado para el diseño de redes produce una gran reducción en la varianza máxima de las estimaciones [31].

El muestreo puede tener por objetivo mejorar la estimación del modelo de variograma, para lograr esto se incorporan nuevos pares de puntos para las distancias del variograma experimental calculadas con pocos datos, lo que permite dar un mayor énfasis al comportamiento del variograma cerca del origen y al efecto pepita. Este último aspecto es de gran importancia al momento de realizar la estimación de recursos, ya que el efecto pepita tiene un gran impacto en la varianza del kriging de los resultados [36]. Pero si se cuenta con un número limitado de muestras, estas estarán aglomeradas en una zona reducida con el fin de lograr la cantidad de pares de puntos requeridos para las distancias más pequeñas del modelo de variograma. Esto puede producir una falsa sensación de seguridad, debido al hecho de tener un modelo de variograma robusto, pese a contar con amplias zonas de la propiedad minera pobremente muestreadas, lo que puede conducir a errores. Por lo tanto, este criterio debe ser aplicado en combinación con otro para solventar este problema [32].

También se puede enfocar el muestreo en la búsqueda de valores extremos de la variable de interés, como sucede en el caso de pepitas de oro. En este caso, el muestreo debe estar dirigido a zonas pobremente muestreadas con una baja varianza de estimación. Además, si dentro de las

observaciones conocidas se encuentran valores altos de la variable de interés, también se deben ubicar muestras nuevas cerca de estos valores, ya que existe una mayor probabilidad de encontrar valores inusuales [24].

Finalmente, se encuentran los criterios puramente geométricos que están basados en la distancia de separación entre muestras. Este tipo de mallas es óptimo para abarcar la totalidad de la propiedad minera que se estudia y para el caso en el que la variable de interés exhibe un comportamiento isótropo. Aunque si se está en presencia de una anisotropía o se encuentran grandes áreas pobremente muestreadas, de igual modo se debe tomar este criterio en consideración, ya que es necesario recolectar muestras de todas las zonas con el fin de corroborar los supuestos realizados sobre la variable regionalizada y darles validez. Al igual que un patrón de muestreo regular, este criterio no toma en cuenta el estudio de la variable regionalizada para distancias pequeñas. Por lo tanto se debe encontrar un equilibrio entre los distintos criterios existentes al momento de diseñar una malla de muestreo [32].

Una vez terminada la toma de muestras es posible calcular el variograma experimental para diferentes intervalos de distancia y ajustar a este variograma experimental un modelo teórico. Entre los modelos de variograma menos utilizados se encuentran los modelos lineales y gaussianos. El modelo gaussiano es poco realista para ciencias de la tierra y produce resultados y matrices de kriging irregulares, debido al comportamiento parabólico del variograma gaussiano cerca del origen. Estos problemas se acrecientan a medida que el efecto pepita se torna más pequeño [31,37].

Con el modelo de variograma ajustado al variograma experimental es posible determinar el valor de la varianza del kriging que se desea para una determinada malla en función de la distancia de separación entre los puntos que la componen. De este modo, es posible evaluar el rendimiento de un esquema de muestreo de manera teórica y encontrar el espaciamiento óptimo entre muestras [31]. Esta propiedad del kriging resulta útil para el diseño de mallas de muestreo complementarias y para las mallas de sondajes de perforación. Los sondajes de perforación tienen la dificultad adicional de la dimensión vertical, en la que se debe intentar, en la medida de lo posible, que la dirección y ángulo de perforación sea perpendiculares al plano de mayor continuidad geológica [36].

Cuando los resultados recopilados en la etapa de muestreo no son satisfactorios o se observa la presencia de zonas submuestreadas y lugares con una varianza de estimación demasiado elevada, es necesario incorporar nuevas muestras para complementar esta malla. Esta nueva etapa de muestreo recibe el nombre de muestreo de segunda fase. De esta forma, se utiliza uno de los criterios para el diseño de mallas previamente descritos con el fin de determinar la ubicación de las

nuevas muestras con la restricción adicional de que los puntos de la malla original permanecen fijos [31].

6.1.5 Optimización de mallas de muestreo

El diseño de una malla de muestreo óptima está sujeto a una serie de restricciones, como un número limitado de muestras, locaciones inaccesibles, disponibilidad de tiempos y posibles limitaciones adicionales que surgen en la práctica [23].

Debido a problemas técnicos o económicos, puede ser necesario eliminar un punto de esta malla. En este tipo de situaciones se descarta el punto que causa la menor alteración en los resultados esperados. En caso contrario, al momento de incorporar nuevos puntos a la malla de muestreo se busca el punto que al ser incluido en la malla produce la mayor mejora en los resultados. También es posible añadir puntos a la malla por la necesidad de modificar el diseño original o debido al descubrimiento de nuevas zonas de interés en la propiedad minera, entre otros factores [27].

Añadir un nuevo punto a la malla preexistente disminuye la varianza del kriging de las estimaciones, pero si se cuenta con una gran cantidad puntos candidatos, es necesario aplicar herramientas computacionales con el fin de encontrar un conjunto de localizaciones óptimas donde sus atributos aporten a la disminución de la varianza, ya que no es posible determinar la distribución de las muestras de forma manual. De esta manera, se evita el desperdicio de recursos como resultado de emplear una malla con ubicaciones redundantes. Otra consecuencia del elevado número de posibles soluciones es la gran cantidad de tiempo que requiere encontrar una “mejor” solución al problema, lo cual toma cientos de horas, de modo que esta no es una opción viable en la práctica. Por este motivo se aplican algoritmos de convergencia u optimización que permiten encontrar una solución adecuada en una cantidad de tiempo razonable [27].

El comportamiento de la variable aleatoria es otro factor determinante a la hora de buscar una optimización de las muestras. Si la variable aleatoria exhibe un comportamiento isótropo, un patrón regular ofrece un rendimiento ligeramente inferior a una malla de muestreo optimizada. Por ende, si el encargado del estudio lo estima conveniente, no es necesaria una gran optimización para definir la distribución de las muestras. En caso de existir una anisotropía, a medida que esta se torna más pronunciada, el uso de patrones regulares resulta menos eficiente. Por lo tanto, se requiere del uso de técnicas de optimización para encontrar una distribución ideal de las muestras [32].

De forma general, la optimización de una malla de muestreo procede como [32]:

- Determinar el modelo de variograma de la variable estudiada con las muestras obtenidas en la primera etapa de muestreo. Si no se cuenta con muestras previas se recurre a la información auxiliar.
- La cantidad de muestras que compondrá la malla de muestreo se distribuye de forma aleatoria en el terreno para crear una malla inicial que será optimizada con un algoritmo numérico.
- Realizar localizaciones aleatorias a la malla inicial. La nueva configuración es aceptada si se logra una mejora de los resultados esperados de la malla de muestreo.
- Repetir el paso previo hasta lograr la convergencia a una solución óptima o la cantidad de veces que el encargado del estudio estime conveniente.

Este proceso de optimización de mallas de muestreo es general y se puede aplicar a los distintos criterios de diseño descritos en la sección 6.1.4. Diversos autores han adaptado esta metodología para la optimización de mallas de muestreo a diferentes tipos de atributos físicos y restricciones. La mayoría de ellas se basan en la disminución de la varianza de estimación, debido a las ventajas que ofrece en el diseño de mallas de muestreo [25].

Para el diseño de mallas de muestreo los puntos pueden ser incorporados uno a la vez o añadiendo varios puntos al mismo tiempo. Estos algoritmos son conocidos como el “método del punto ficticio” y el “método de varios puntos adicionales”, respectivamente [23].

Dada la malla compuesta por n observaciones en las locaciones $\{x_1, \dots, x_n\}$. El método del punto ficticio permite añadir un punto x_{n+1} al conjunto de muestras de manera óptima. La posición de este nuevo punto x_{n+1} se escoge aleatoriamente de entre alguna de las ubicaciones disponibles y se evalúa el criterio para el diseño de mallas de muestreo a ser optimizado, aceptando su nueva posición si produce una mejora del criterio evaluado. Este proceso se repite hasta lograr la convergencia a una solución óptima o el número de veces que los examinadores estimen conveniente. Para la incorporación de un segundo punto x_{n+2} se considera la malla previa compuesta de por los $(n + 1)$ puntos. Si se requiere añadir m puntos a la malla de muestreo inicial el método del punto ficticio es repetido m veces hasta completar la malla $(n + m)$. Con el fin de incorporar los m puntos existen distintos algoritmos que aplican el método de punto ficticio, como el método de las inclusiones sucesivas o el método de intercambios sucesivos óptimos [26].

El método de varios puntos adicionales consiste en determinar la posición de los m puntos que compondrán la nueva malla de forma simultánea mediante alguna herramienta de optimización. Luego, si se considera necesario añadir una nueva muestra en la malla $(n + m)$, se buscan las

ubicaciones para los puntos de esta nueva malla sin tomar en consideración las locaciones establecidas previamente [23].

El método del punto ficticio entrega un resultado óptimo cuando solo se plantea añadir un punto adicional a la malla de muestreo previa. Si se desea incorporar más de un punto lo mejor es optar por el método de varios puntos adicionales. El contraste entre estos métodos es mayor a medida que aumenta la cantidad de locaciones que son incluidos en el diseño de la malla [23].

Estos métodos también son aplicables para el diseño de mallas de muestreo sin puntos previos. Simplemente es necesario considerar el conjunto inicial como un conjunto vacío.

6.2 Estimación de recursos minerales

6.2.1 Definiciones previas

La geoestadística es una herramienta utilizada para la descripción y predicción de los atributos físicos que se distribuyen en el espacio, denominados como variables regionalizadas. Por ejemplo, las leyes minerales, el pH del suelo, la permeabilidad del terreno, etc. La geoestadística se ha aplicado tradicionalmente en ciencias de la tierra, pero su eficiencia ha hecho que sea empleada con gran éxito en otros campos, como las ciencias forestales o el estudio meteorológico [11].

Una variable regionalizada se representa por $z = \{z(x), x \in D\}$, donde x es el vector de las coordenadas espaciales de z y D es el campo que contiene a estas variables, el cual corresponde al terreno que se estudia. Estas variables están influenciadas por una compleja combinación de fenómenos físicos que imposibilitan encontrar una solución determinística a los problemas planteados por la geoestadística, de modo que se trabaja con una simplificación de esta variable.

Sea la variable regionalizada $z(x)$, se considera que su valor es la realización de una variable aleatoria denotada por $Z(x)$, la cual describe sus valores en términos de probabilidad. El conjunto de las N variables aleatorias en el dominio de estudio recibe el nombre de función aleatoria o campo aleatorio, la cual está representada por sus funciones de distribución finito dimensionales

$$F_{x_1, \dots, x_N}(z_1, \dots, z_N) = P\{Z(X_1) \leq z_1, \dots, Z(X_N) \leq z_N\}$$

Para describir la distribución univariable de $Z(x)$ se utiliza la esperanza (E) que representa el valor esperado de la variable

$$E[Z(x)] = m(x)$$

Para distribuciones bivariantes, los estadísticos más empleados en ciencias de la tierra son la covarianza (C) que representa la semejanza entre dos valores y el semivariograma (γ) que cuantifica lo disímiles que son. Sean $Z(x_1), Z(x_2) \in D$

$$C(x_1, x_2) = E[Z(x_1)Z(x_2)] - m(x_1)m(x_2)$$

$$\gamma(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \text{var}[Z(x_1) - Z(x_2)]$$

Dado el conjunto n de muestras $\{Z(x_1), \dots, Z(x_n)\}$, recolectadas en la etapa de prospección. Estas observaciones corresponden a una única realización de la función aleatoria $\{Z(x_1), \dots, Z(x_n)\}$. Al tener conocimiento de solo una realización de esta función aleatoria, no es posible realizar inferencias sobre la continuidad espacial de la variable. Para superar este problema se aplica la noción de estacionaridad, la cual asume que todos los valores dentro del dominio de estudio provienen de la misma función aleatoria $Z(x)$, y comparten las mismas características de variabilidad. De esta forma, se considera que la relación entre los puntos de una variable aleatoria depende de la distancia relativa entre sus valores en lugar de sus coordenadas espaciales [5].

La variable aleatoria se puede escribir como

$$Z(x) = \mu + \varepsilon(x)$$

donde μ es la media de la variable en estudio y $\varepsilon(x)$ es un valor aleatorio de media 0 que representa la variación a pequeña escala. Esta expresión tiene una covarianza dada por

$$C(h) = E[\varepsilon(x)\varepsilon(x+h)]$$

$$C(h) = E[\{Z(x) - \mu\}\{Z(x+h) - \mu\}]$$

donde h es el vector de separación entre dos puntos cualesquiera. Lo que permite cuantificar la correlación espacial entre dos puntos dentro del dominio en estudio [6].

A partir de las observaciones conocidas, el estimador de la covarianza viene dado por

$$\hat{C}(h) = \frac{1}{|N(h)|} \sum_{N(h)} [Z(x_\alpha) - \bar{Z}][Z(x_\beta) - \bar{Z}]$$

donde $N(h)$ es el conjunto de pares de puntos separados por el vector h , $|N(h)|$ es el número de pares en el conjunto $N(h)$ y \bar{Z} es el estimador de la media a partir de los datos disponibles [5]. Este último aspecto hace que la covarianza experimental esté sesgada respecto a la media de la variable regionalizada, razón por la cual se prefiere utilizar el variograma como medida de la correlación espacial de los datos. El variograma posee un estimador insesgado gracias al principio de

estacionaridad débil, el cual anuncia que el valor esperado de la diferencia entre dos puntos es igual a 0, tal que $E[Z(x) - Z(x + h)] = 0$. Lo que le otorga al variograma un estimador insesgado.

La expresión del semivariograma se puede escribir como [6]

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \text{var}[Z(x) - Z(x + h)] = \frac{1}{2} E\{[Z(x) - Z(x + h)]^2\}$$

El variograma cumple con las siguientes propiedades [5]:

- Para un vector de separación $h = 0$, $\sigma^2 = C(0)$.
- El variograma y covarianza se relacionan mediante la expresión $\gamma(h) = C(0) - C(h)$.
- El correlograma es igual al cociente entre la covarianza y la varianza.

6.2.2 Variografía

La función de variograma del proceso aleatorio $Z(x)$ se puede calcular para unos pocos pares de puntos provenientes de n muestras conocidas $\{Z(x_1), \dots, Z(x_n)\}$. Esta estimación es llamada variograma experimental, el cual viene dado por [5]

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2|N(h)|} \sum_{N(h)} [Z(x_\alpha) - Z(x_\beta)]^2$$

donde $N(h)$ es el conjunto de pares de puntos separados por el vector h , $|N(h)|$ es el número de pares en el conjunto $N(h)$. El vector de separación h es un múltiplo de una distancia llamada paso o lag. Si el lag es demasiado pequeño, una gran cantidad de valores se calculan con un número reducido de puntos, lo que resulta en un variograma experimental demasiado errático y poco confiable. Mientras que un lag excesivamente amplio, produce una curva monótona que no captura el comportamiento espacial de la variable en estudio [5].

Si la malla de muestreo es regular, los incrementos del variograma experimental son múltiplos de la distancia de separación de la malla. Pero si es irregular, al considerar solo las observaciones separadas por el vector h , la cantidad de pares de puntos dentro de cada intervalo no es suficiente para un cálculo confiable de $\hat{\gamma}(h)$. Para solucionar este problema se permiten un determinado margen de tolerancia en h , de esta forma, se agrupa una mayor cantidad de puntos en cada lag. Así, $\hat{\gamma}(h)$ se redefine como [5]

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2|N^+(h)|} \sum_{N^+(h)} [Z(x_\alpha) - Z(x_\beta)]^2$$

donde $N^+(h)$ es el conjunto de pares de puntos dentro del área de tolerancia de h y $|N^+(h)|$ es el número de pares de puntos incluidos en el conjunto $N^+(h)$.

Al definir las tolerancias se debe tener la precaución de no suavizar excesivamente el variograma experimental. Por ejemplo, si se escoge una tolerancia angular de 90° , un variograma direccional se transforma en uno omnidireccional [5]. Un factor directamente relacionado con la magnitud de las tolerancias a emplear y el tamaño de los incrementos de h es la cantidad de observaciones disponibles en el cálculo del variograma experimental, que es mayor o menor de acuerdo al tipo de muestreo utilizado y la cantidad de muestras recolectadas [6].

Los valores extremos pueden afectar los resultados del variograma experimental (figura 3). Una forma de analizar esto es mediante los gráficos de caja o la nube variográfica de las varianzas pertenecientes a cada incremento. La nube variográfica corresponde al gráfico de todas las varianzas entre pares de datos para los cuales se calcula el variograma experimental [6]. Si los valores extremos provienen de errores en las mediciones, entonces estos deben ser removidos o reemplazados por valores adecuados. Pero si se trata de datos reales, es mejor conservar esta información para las siguientes etapas del estudio. Una alternativa es truncar los valores extremos a un límite arbitrario impuesto por el experto a cargo [4].

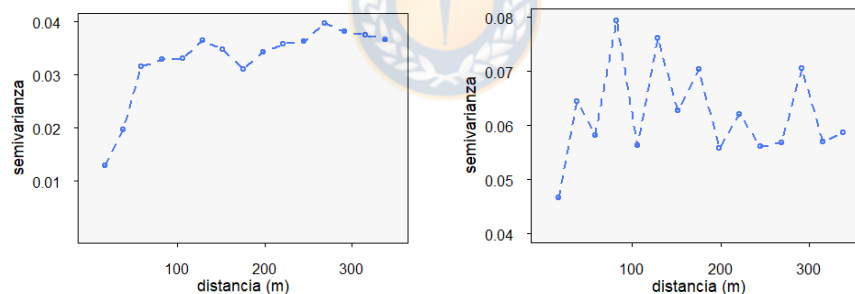


Figura 3. Variograma de 250 muestras de mineral de cobre con valores entre 0% y 1% a la izquierda y con un dato extremo de 3% de cobre a la derecha.

El análisis espacial comienza con el cálculo del variograma omnidireccional y variogramas direccionales en las direcciones en las que se infiere la existencia de una posible anisotropía. La variable tiene un comportamiento isótropo, si al mantener $|h|$ constante el valor de la varianza es el mismo sin importar la dirección en la cual se calcula el variograma experimental, en caso contrario se trata de una anisotropía [5]. Una práctica común para detectar anisotropías es calcular el variograma experimental en varias direcciones, por ejemplo, en las direcciones de 0° , 45° , 90° y 135° . Si se dispone de una cantidad suficientemente grande de puntos, es útil visualizar el mapa variográfico de los pares de datos (figura 4), el cual corresponde a un gráfico del variograma experimental en todas direcciones y para todo vector de separación. Cuando la variable tiene un

comportamiento isotrópico se observan círculos en el mapa variográfico, de otro modo se está en presencia de una anisotropía. Los tipos de anisotropía más conocidos son la anisotropía geométrica y la anisotropía zonal [4].

La anisotropía geométrica presenta cambios en la continuidad de la variable en función de la dirección de cálculo. Se caracteriza por el dibujo de una elipse en el mapa variográfico, cuyo eje mayor es la dirección de mayor continuidad espacial y su eje menor es la dirección de menor continuidad espacial (figura 4). En el caso de una anisotropía zonal se observan diferentes mesetas según de la dirección en la cual se calcula el variograma experimental. Para variables geológicas esto es común en el plano vertical, el cual presenta una variabilidad mucho mayor a la del plano horizontal [5].

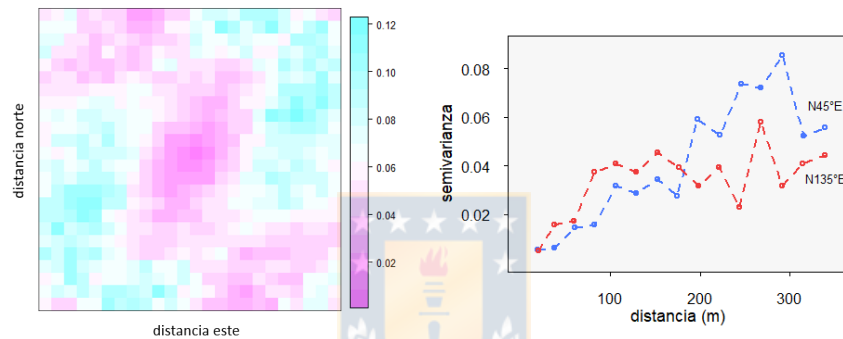


Figura 4. Mapa variográfico a la izquierda, donde se observan direcciones preferenciales, con esta información se observa a la derecha variogramas en las direcciones principales de anisotropía.

La tendencia espacial es una variación gradual en los valores de la variable regionalizada a medida que cambian las coordenadas espaciales del punto a medir. Cuando se detecta la existencia de una tendencia espacial $m(x)$, esta debe ser modelada y restada de los datos originales $Z(x)$ para trabajar con los valores residuales $R(x)$. Al finalizar la predicción de los valores residuales $R^*(x)$, la tendencia se suma a los resultados mediante la relación $Z(x) = R(x) + m(x)$ para obtener los valores predichos de $Z^*(x)$ [26].

Debido a que se requiere de los valores predichos en todos los puntos del dominio y el variograma experimental solo presenta información para determinadas distancias de separación, es necesario inferir una función matemática que describa el comportamiento de la variable aleatoria y provea de los valores de varianza necesarios en los cálculos. Esta función de variograma recibe el nombre de variograma teórico [4]. Entre los modelos de variograma teórico más empleados en ciencias de la tierra se encuentran los modelos esféricos y exponenciales [6].

La función de variograma teórico debe cumplir con una serie de propiedades [5]:

- Paridad $\gamma(h) = \gamma(-h)$.
- Positividad $\gamma(h) \geq 0$.
- Nulidad en el origen $\gamma(0) = 0$.
- Función de tipo negativo condicional.
- Comportamiento en el infinito $\lim_{|h| \rightarrow \infty} \frac{\gamma(h)}{|h|^2} = 0$.

El variograma de una variable regionalizada con varianza finita es una función monótona creciente, cuyo valor aumenta hasta alcanzar un valor estable llamado “meseta”. El valor de h , para el cual un variograma alcanza su meseta se denomina rango o alcance (figura 5). Cuando la distancia de separación entre dos puntos es mayor al alcance del variograma, estas variables no presentan correlación espacial entre sus valores. Existen casos en los que el variograma no alcanza una meseta estable y tiene un alcance infinito [5].

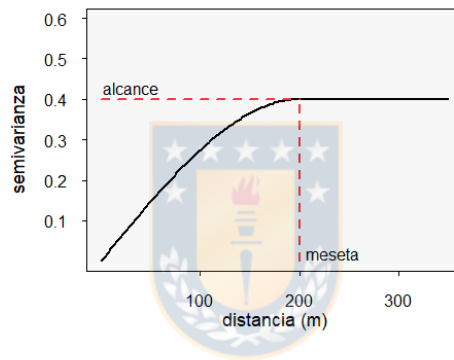


Figura 5. Ejemplo de variograma con meseta.

Una particularidad frecuente en los modelos de variograma es una discontinuidad en el origen denominada efecto pepita. El efecto pepita se produce cuando la escala de medición no es lo suficientemente pequeña para describir el comportamiento de la variable a pequeña escala de observación. En teoría, esta discontinuidad puede ser explicada con un modelo de variograma con un alcance ínfimo, del que solo su meseta es perceptible en la escala de trabajo (de observación). Otra posible causa del efecto pepita son los errores cometidos en la medición de los datos [5].

El ajuste de los datos experimentales a un modelo de variograma teórico es la etapa crítica del análisis variográfico. La cual se compone de los siguientes pasos básicos [6]:

- Calcular y graficar el variograma experimental.
- Calcular el error cuadrático medio, u otro estadístico de prueba, de los modelos candidatos para el ajuste variográfico.
- Graficar los modelos de variograma teóricos junto con el variograma experimental y elegir los modelos que se ajustan de la mejor forma.

- Realizar el proceso de validación cruzada de los modelos de variograma escogidos y seleccionar el que entregue los mejores resultados del estadístico de prueba.

La utilización de criterios estadísticos para buscar el variograma teórico permiten reducir el ajuste variográfico a una simple resolución matemática, lo cual puede conducir a errores al no considerar factores externos. Puesto que el objetivo del modelamiento variográfico es capturar la mayor cantidad de información de la variable, se debe considerar toda la información auxiliar al momento de escoger el mejor modelo de variograma [16].

6.2.3 Estimación por kriging

Con el modelo de variograma escogido se procede a definir los parámetros para la correcta aplicación del kriging. El kriging es una herramienta de interpolación geoestadística que depende de la distancia de separación existente entre el sitio a estimar y las observaciones conocidas y de la distribución geométrica de las observaciones conocidas. De forma adicional, incorpora la continuidad espacial de los valores gracias a la función de variograma de la variable aleatoria [5].

El kriging permite resolver el problema de estimar el valor de una función aleatoria $Z(x)$ en una ubicación no muestreada x_0 a partir de las observaciones conocidas $\{Z(x_\alpha), \alpha = 1, \dots, n\}$. Y entrega como resultado el mejor estimador lineal insesgado de mínimos cuadrados del error de estimación [6]. Todos los métodos lineales de kriging son variantes de la fórmula general para la estimación de $Z^*(x_0)$ [16]

$$Z^*(x_0) - m(x_0) = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha [Z(x_\alpha) - m(x_\alpha)] \quad (1)$$

donde λ_α es el ponderador asignado a la observación $Z(x_\alpha)$, $m(x_0)$ es el valor esperado de la variable en el sitio a estimar y $m(x_\alpha)$ es la media esperada de cada variable aleatoria observada. Los pesos del sistema de kriging se calculan de tal modo que minimizan la varianza del error de estimación $var[Z^*(x_0) - Z(x_0)]$ bajo una restricción de insesgo del error cometido en la predicción de la variable $E[Z^*(x_0) - Z(x_0)] = 0$.

Como el kriging se basa en la disminución del error cuadrático medio presenta un efecto de suavizamiento en sus estimaciones, lo que produce una sobreestimación de los valores pequeño y una subestimación de los valores altos [16]. El efecto de suavizamiento elimina el efecto proporcional que puede encontrarse en los valores reales, el cual dice que mientras mayores son las leyes minerales, mayor será la variabilidad presente en sus valores [7]. Mientras que la restricción de

insesgo permite al kriging ser un interpolador exacto al entregar el mismo valor de las observaciones en los sitios con datos.

Las variantes del kriging se diferencian por su forma de considerar la media m de la variable aleatoria de interés [16]:

- Kriging simple, la media se considera constante y conocida en todo el dominio D en estudio, tal que $m(x) = m, \forall x \in D$.
- Kriging ordinario, la media se considera constante y desconocida dentro de la vecindad de kriging, por lo que si se toma en cuenta la posible variación de la media dentro del dominio, tal que $m(x)$ es constante, pero desconocida $\forall x \in \text{al vecindario de kriging}$.
- Kriging universal, se considera que la media de la variable regionalizada presenta una variación a medida que cambian las coordenadas del punto a estimar, de modo que no se sostiene el postulado de estacionaridad. Esta media es modelada como una combinación lineal de funciones $f_k(x)$ dependientes de las coordenadas espaciales

$$m(x) = \sum_{k=0}^K a_k(x) f_k(x) \quad (2)$$

con $a_k(x)$ una constante desconocida $\forall x \in \text{al vecindario de kriging}$. Un caso particular de kriging universal es el kriging ordinario, donde $f_k(x) = 1$.

Si no se dispone de suficiente información para determinar un modelo adecuado para la tendencia espacial, el kriging universal puede producir peores resultados que la simple aplicación de kriging ordinario [16].

Previo a la realización del kriging es necesario definir la vecindad de los datos, que es el espacio que contiene al sitio a estimar y a los valores utilizados en su estimación. Esta vecindad puede abarcar la totalidad del área en estudio y usar todos los datos, caso en el cual recibe el nombre de vecindad única. En la práctica una vecindad única no es útil, ya que los datos situados a grandes distancias reciben un ponderador demasiado pequeño, de tal forma que aumentan en gran medida los tiempos de cálculo y, sin embargo, la mejora que proporcionan es marginal. Los valores lejanos reciben ponderadores pequeños, casi nulos en algunos casos, debido al efecto pantalla de los datos, con el cual los valores cercanos al sitio a estimar tienen pesos muy grandes [5].

Emplear un número reducido de puntos en la estimación de la variable recibe el nombre de vecindad móvil. Si esta vecindad tiene el tamaño adecuado, la pérdida de precisión por no utilizar una vecindad única es mínima y los tiempos de cálculo salvados son considerables [5]. Un factor que permite

reducir en gran medida el tamaño de la vecindad de kriging es el conocimiento de la media del fenómeno que se estudia. Ya que, en ausencia de observaciones, la ponderación que recibe la media es mayor para compensar la falta de información [14].

Además del tamaño de la vecindad, los parámetros seleccionados para el modelo de variograma tienen una influencia en los resultados de la estimación [5]:

- Al aumentar el efecto pepita disminuye la continuidad espacial de la variable aleatoria y la distribución de los ponderadores se vuelve homogénea.
- Si la variable presenta una anisotropía, los ponderadores del kriging calculados en las direcciones preferenciales son mayores que los ponderadores calculados en la dirección de menor continuidad espacial.
- Los cambios presentes en la meseta se relacionan con la varianza de estimación. Si la meseta del modelo de variograma se duplica, también lo hace la varianza de estimación.
- Al aumentar el alcance aumenta la correlación espacial entre los datos y, por lo tanto, aumenta la confianza en las estimaciones.
- La elección del modelo de variograma puede influenciar los resultados. Por ejemplo, el comportamiento parabólico en el origen de un modelo gaussiano puede generar valores negativos de varianza.

Determinado el tipo de kriging y los parámetros de la vecindad se procede a la interpolación mediante kriging. Como ejemplo se presenta la fórmula de kriging simple, la cual es la variante más sencilla de entre los métodos lineales de kriging.

El kriging simple se desarrolla bajo la hipótesis de que la variable regionalizada $z(x)$ es la realización de una función aleatoria estacionaria $Z(x)$. De modo que su media m es una constante y es conocida en todo el dominio de estudio. Además, la covarianza entre dos puntos solo depende de la magnitud y sentido de su vector de separación, y no de sus ubicaciones espaciales. Bajo estas hipótesis, la ecuación (1) se transforma en

$$Z^*(x_0) = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} Z(x_{\alpha}) + m \left[1 - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \right] \quad (3)$$

De esta ecuación se observa que el kriging simple cumple con la restricción de insesgo de los estimadores, al comprobar que $E[Z^*(x_0) - Z(x_0)] = 0$.

Para encontrar el valor de los ponderadores es necesario minimizar la varianza del error de estimación $var[Z^*(x_0) - Z(x_0)]$, la cual se puede expresar de la forma

$$\min\{var[Z^*(x_0) - Z(x_0)]\} = \min\left\{\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \lambda_{\alpha} C(x_{\alpha} - x_{\beta}) + C(0) - 2 \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} C(x_{\alpha} - x_0)\right\} \quad (4)$$

Al derivar (4) con respecto a las λ_n incógnitas, se obtiene el sistema de kriging simple

$$\sum_{\beta=1}^n \lambda_{\alpha} C(x_{\alpha} - x_{\beta}) = C(x_{\alpha} - x_0) \quad (5)$$

que en notación matricial viene dado por $\Sigma \lambda = \sigma_0$, donde $\Sigma = [\sigma_{\alpha\beta}]$ corresponde a la matriz de las $n * n$ covarianzas entre las observaciones, $\sigma_0 = [\sigma_{\alpha 0}]$ es el vector de n covarianzas entre las muestras y el punto a estimar y $\lambda = [\lambda_{\alpha}]$ es el vector de n soluciones del sistema matricial.

Para encontrar la solución de un sistema de kriging se necesita el modelo de variograma de la variable y la ubicación espacial de las observaciones. Esta propiedad es útil para el diseño de redes de muestreo. La desventaja del kriging es que no toma en cuenta el efecto proporcional de los datos, en el que valores elevados presentan una mayor variabilidad que valores más bajos.

La varianza del error de estimación en x_0 viene dada por

$$\sigma_{KS}^2(x_0) = \sigma^2 - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} C(x_{\alpha} - x_0) \quad (6)$$

También se cuenta con otros métodos de kriging. Entre algunos ejemplos se encuentran [5]:

- Kriging con deriva, esta variante de kriging no considera el postulado de la hipótesis de estacionaridad. De este modo, la variable aleatoria presenta una tendencia de sus valores con respecto a las coordenadas espaciales. Existen distintas versiones de kriging con deriva que se diferencian por la forma de modelar la tendencia espacial como el kriging universal o el kriging trigonométrico.
- Kriging de bloques, que es similar al kriging puntual, pero las estimaciones son realizadas en un soporte de mayores dimensiones. Este tipo de kriging es útil para la estimación de recursos al utilizar como soporte el tamaño de las unidades de extracción [5].
- Cokriging, permite emplear múltiples variables para la estimación de valores gracias a los variogramas cruzados entre ellas. El variograma cruzado es la representación de la covarianza entre dos variables aleatorias de distintos atributos físicos [5].

Si se cuenta con poca información de la variable de interés y muestras pobremente correlacionadas, es posible mejorar el plan de estimación con la ayuda de información secundaria proveniente de variables relacionadas, como pueden ser mapas de elevación topográfica o mapas de tipos suelos.

De esta forma, se estratifica el terreno para aplicar modelos de variograma y datos específicos a cada estrato, lo que permite producir distintos planes de kriging. Otra forma de utilizar esta información secundaria es en combinación con la variable principal con la ayuda de cokriging [16].

6.2.4 Validación

La selección del modelo de variograma, vecindad del kriging y parámetros adicionales para la descripción y predicción de la variable aleatoria son escogidos por el experto a cargo, lo que conlleva cierto grado de subjetividad. Para corroborar que estos modelos escogidos representan de forma adecuada a la variable regionalizada en estudio se emplean técnicas de validación. La validación consiste en reestimar los datos experimentales mediante kriging y cuantificar el error cometido en estas predicciones. De esta forma, si los modelos de predicción son acertados, el error en la predicción de las observaciones conocidas será pequeño. Además, es posible aplicar criterios de comparación a los errores cometidos por distintos modelos considerados para la caracterización de la variable regionalizada.

La forma más popular de realizar el proceso de validación es con la técnica de validación cruzada, la cual se compone de los siguientes pasos [1]:

- Descartar una muestra del conjunto total de observaciones conocidas.
- Estimar el valor de esta muestra eliminada a partir de las muestras restantes y los modelos de predicción espacial que se desean evaluar.
- Calcular el error cometido en la estimación. Además, se obtiene el valor de la varianza del kriging, el cual representa el error teórico o esperado de la estimación.
- Este proceso se repite para cada uno de los datos experimentales hasta lograr el conjunto de todos los errores de predicción de las observaciones conocidas.

Otra forma de realizar la validación es mediante la técnica de Jack-knife que consiste en dividir los datos en dos grupos. Luego, a partir de los datos de uno de estos subconjuntos se estiman los valores del segundo subconjunto [5]. El conjunto de estos errores permite calcular distintos estadísticos para cuantificar la precisión de las estimaciones y estudiar su comportamiento.

Los estadísticos más utilizados en la validación cruzada son [11]:

Error cuadrático medio (*ECM*)

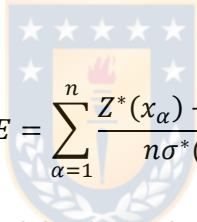
$$ECM = \sqrt{\frac{\sum_{\alpha=1}^n [Z^*(x_{\alpha}) - Z(x_{\alpha})]^2}{n}}$$

donde $Z^*(x_{\alpha})$ es el valor estimado en x_{α} , $Z(x_{\alpha})$ es el valor real de la variable aleatoria en x_{α} y n es el número de datos experimentales. Idealmente, el valor del *ECM* es cercano a 0 y menor al promedio de las varianzas del kriging de estas estimaciones.

Media de los errores (*ME*), la cual debe ser cercana a 0

$$ME = \frac{\sum_{\alpha=1}^n Z^*(x_{\alpha}) - Z(x_{\alpha})}{n}$$

Una variante de la *ME* es la media estandarizada de los errores de estimación (*MEE*). La cual viene dada por



$$MEE = \frac{\sum_{\alpha=1}^n \frac{Z^*(x_{\alpha}) - Z(x_{\alpha})}{\sigma^*(x_{\alpha})}}{n}$$

donde $\sigma^*(x_{\alpha})$ es la desviación estándar del valor estimado. Este estadístico debe ser cercano a 0. Además, tiene la ventaja de no estar influenciado por las diferentes escalas que pueden presentar los valores.

Error cuadrático medio adimensional (*ECMA*), que debe ser cercano a 1

$$ECMA = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n \left[\frac{Z^*(x_{\alpha}) - Z(x_{\alpha})}{\sigma^*(x_{\alpha})} \right]^2}$$

Así, se evalúan los modelos candidatos hasta encontrar el que satisface de mejor forma los estadísticos evaluados. Entre estos criterios de validación, a los que se les da una mayor importancia son a los estadísticos estandarizados. Además de estos métodos matemáticos, se debe considerar la información auxiliar disponible al momento de tomar decisiones sobre los modelos que describirán a la variable aleatoria. Ya que esta información, sumada a las interpretaciones por parte de los expertos, puede sugerir modelos distintos a los seleccionados por criterios matemáticos [23].

Los resultados de la validación también se pueden presentar en forma de gráficos, como [5]:

- Nube de correlación entre los errores estandarizados y valores estimados.
- Nube de correlación entre los valores estimados y los reales, donde el coeficiente de correlación de los datos debe ser cercano a 1.
- Histograma de los errores estandarizados

$$\frac{Z^*(x_\alpha) - Z(x_\alpha)}{\sigma^*(x_\alpha)}$$

El error estandarizado resulta de utilidad, ya que es posible definir intervalos de tolerancia arbitrarios dentro de los cuales se determina si los errores cometidos son razonables o no.

6.2.5 Categorización de recursos

La categorización de recursos permite tomar la decisión de llevar a cabo o no la explotación de un yacimiento, así como definir los planes y secuencia de extracción adecuados [7]. También es de utilidad en etapas tempranas de prospección con el fin de establecer una aproximación general del potencial económico del depósito y de este modo, sugerir ubicaciones tentativas para muestras y sondajes de exploración adicionales, lo que justifica una inversión adicional [36].

Es una exigencia entregar reportes de clasificación de recursos para la publicación de resultados, los cuales deben detallar desde los protocolos utilizados en la fase de prospección hasta las técnicas de laboratorio empleadas. Esto asegura una correcta interpretación por parte de los expertos y da una mayor seguridad a posibles inversionistas. Los reglamentos para la clasificación de recursos más conocidos son el JORC australiano y la norma 43-101 canadiense [7].

Los errores en la estimación de recursos y reservas mineras son causados por errores humanos o sesgos inherentes a los procedimientos empleados. La principal fuente de errores se debe a la inexperiencia de los practicantes del estudio [36]. Esto es así debido a que la interpretación personal de los expertos a cargo tiene una gran repercusión en los resultados. De manera que el encargado de la estimación de recursos y reservas debe contar con acreditaciones que lo avalen. Según el código 43-101 una persona “calificada” debe cumplir con las siguientes características [8]:

- Ser un ingeniero o geólogo con grado universitario en áreas relacionadas al sector minero y contar con al menos 5 años de experiencia en la industria.
- Tener experiencia y conocimientos relevantes en relación al proyecto que se desea desarrollar o evaluar.

- Estar afiliado a alguna organización profesional. En el caso de que dicha organización pertenezca a un país extranjero, estar en un cargo de importancia o contar con la recomendación de esta.

Para clasificar los minerales, estos se dividen en las categorías de recursos minerales y reservas minerales, las cuales son indicadores de la confianza que se tiene en las estimaciones realizadas. Los recursos minerales son concentraciones del material de interés en la corteza terrestre con una ley y cantidad que hacen razonable una posible extracción del mineral con un beneficio económico. La cantidad, ley y otras características geológicas son conocidas o estimadas a partir de evidencia geológica y conocimientos que abalan esta afirmación. Los recursos minerales son divididos en orden ascendente siguiendo la relación de la confianza que se tiene en ellos; en recursos minerales inferidos, indicados y medidos, respectivamente.

Las reservas minerales son la parte económicamente explotable de los recursos medidos o indicados. La dilución de estéril, así como la pérdida de mineral, se consideran en función del método de extracción seleccionado. Al momento en el que el reporte de prefactibilidad es entregado, la extracción del mineral es económicamente viable. Las reservas minerales se dividen en reservas probadas, las cuales son la parte económicamente extraíble de los recursos medidos; y en reservas probables, que provienen de los recursos indicados y en algunas circunstancias de los medidos [33]. Antiguamente se acuñaba el término de reservas posibles, pero actualmente está en desuso debido a la poca confianza que entregan reservas provenientes de recursos inferidos.

Las técnicas para clasificar recursos se engloban en 3 categorías principales, las cuales son:

Criterios geológicos: se basan en afirmar con suficiente certeza la continuidad geológica del área que se estudia gracias a la información y muestras disponibles. De esta forma se descartan fallas geológicas o la intrusión de mineralizaciones externas que interfieran con la continuidad geológica del cuerpo mineral que se estudia y, por lo tanto, con la continuidad espacial de la variable de interés dentro del cuerpo mineral, la cual requiere de una mayor cantidad de información para ser descrita de forma apropiada. Por este último motivo es arriesgado realizar una clasificación de recursos solo con un criterio geológico como base y se utiliza en combinación con los criterios que se describen a continuación para lograr resultados más representativos [7].

Criterios geométricos: estas técnicas se fundamentan en la distancia de separación que existe entre los sitios a estimar y los sitios con observaciones conocidas. Se otorga una mayor confianza a los bloques estimados a partir de un mayor número de muestras [7]. Bajo este supuesto se crean técnicas de categorización como la del espaciamiento de sondajes, que consiste en clasificar los bloques en función de su distancia de separación a las observaciones conocidas; o técnicas de

búsqueda de vecinos, que permite evaluar los bloques de acuerdo a la cantidad de muestras que se encuentran dentro de un determinado radio de búsqueda [2].

Criterios geoestadísticos: los criterios geoestadísticos permiten incorporar la continuidad espacial de la variable aleatoria a través de su modelo de variograma. Este aspecto es de gran importancia en presencia de una anisotropía pronunciada, la que determina si una configuración de muestras aporta información útil o es redundante [7].

El alcance del variograma permite definir categorías minerales en función de la distancia de separación entre los lugares a estimar y las observaciones conocidas. Sin embargo, a pesar de su simplicidad, esta opción generalmente no es adecuada, ya que no toma en consideración el efecto pepita de la variable aleatoria [36]. También es posible clasificar recursos minerales al observar el histograma de las varianzas de las estimaciones. Debido a la distinta cantidad de muestras utilizadas en la predicción de valores, en algunos casos se presentan agrupaciones de datos (figura 6) que permiten definir distintas categorías minerales [30].

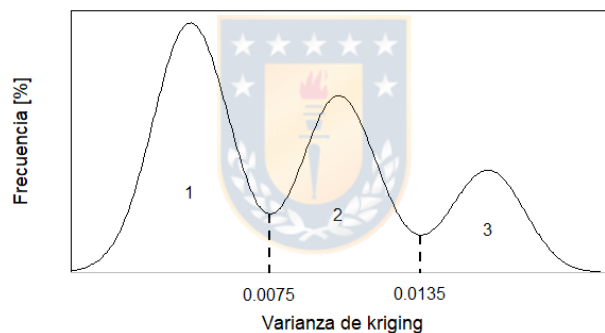


Figura 6. Histograma de las varianzas del kriging con presencia de 3 poblaciones, 0-0.0075 -Reservas probables, 2) 0.0075-0.0135 - Reservas posibles 3)>0.0135 - Reservas inferidas.

El método geoestadístico más aceptado para la categorización de recursos es el uso de la varianza del kriging. La persona calificada establece valores arbitrarios para clasificar recursos minerales en las categorías de medidos, indicados e inferidos, en base a la confianza que tiene en los métodos empleados y la cantidad de muestras recolectadas durante la etapa de prospección [2]. Una variante de este método surge del uso de la varianza relativa que es el cociente de la varianza de estimación por el valor estimado del atributo del bloque a clasificar al cuadrado. Blackwell ha demostrado la practicidad de la varianza relativa del kriging en la clasificación de recursos en depósitos epitermales y pórfidos cupríferos, en los cuales se sugieren los siguientes límites para dividir las categorías minerales [36]:

Tabla 1. Clasificación de recursos en base a la varianza relativa del kriging

Categoría	Varianza relativa del kriging
Medidos	0.3<
Indicados	0.3-0.5
inferidos	>0.5

Distintos autores proponen diferentes valores para delimitar las categorías minerales en base a las características particulares de cada depósito [30,3], así como aplicaciones más complejas que requieren de información adicional sobre el yacimiento que se estudia [30].

Finalmente, existen métodos de clasificación basados en la simulación condicional de la variable aleatoria. Se emplea la varianza de los datos simulados de manera similar a la varianza del kriging para utilizar los métodos descritos previamente. Otra aplicación reciente para la categorización de recursos mediante simulación consiste en crear planes de explotación y producción del yacimiento simulado para distintos periodos de tiempo y clasificar los recursos en función de los errores observados en estos planes de producción. Al utilizar criterios de clasificación basados en simulación se debe considerar que los datos simulados conservan el efecto proporcional de la variable regionalizada en sus valores [7].

6.3 Simulación

6.3.1 Definiciones, objetivos de simular

En geoestadística se considera que la variable regionalizada en estudio $z(x)$ es una realización particular de una función aleatoria $Z(x)$. De manera que sí es posible tomar valores adicionales de esta función aleatoria, se obtiene una nueva variable regionalizada, que comparte similitudes con la variable real, como su distribución espacial y estadísticas. Esta variable ficticia recibe el nombre de simulación y se denota por $Z_s(x)$ [34].

La elección entre estimación o simulación depende de la finalidad de los estudios. Para la estimación de recursos se prefiere la utilización del kriging, que busca encontrar en cada punto del dominio el mejor estimador local de la variable. Este estimador es insesgado y posee el menor error cuadrático medio entre los estimadores de $Z(x)$. Pero la estimación no reproduce la variabilidad espacial de las leyes verdaderas y no considera las fluctuaciones abruptas que puedan presentarse. Por otro lado, la simulación de $Z(x)$, al imitar los dos primeros momentos de los datos experimentales, resulta más

interesante en situaciones en las que se desea definir valores extremos, como en análisis de riesgo o para estimar las fluctuaciones de las leyes recuperadas. Sin embargo, a diferencia del kriging, el valor simulado no es el mejor estimador de la variable aleatoria $Z(x)$ [34].

Para llevar a cabo una simulación, además de un modelo de variograma, se requiere conocer la función de distribución de probabilidad de la variable aleatoria de interés. En general, los valores reales siguen una función de distribución que asegura que $Z(x) > 0$ como las distribuciones gamma o lognormal, las cuales no pueden ser inferidas completamente a partir de las muestras recolectadas [19]. Para solucionar este problema se realiza una transformación normal de valores para trabajar con una distribución normal. Esta transformación recibe el nombre de anamorfosis gaussiana [10]. Si se considera el conjunto de los datos reales $\{Z(x_\alpha), \alpha = 1, \dots, n\}$, la función de anamorfosis F transforma los valores de $Z(x)$ al conjunto de datos con una distribución normal $\{Y(x_\alpha), \alpha = 1, \dots, n\}$, tal que $Y(x) = F[Z(x)]$. Una vez terminada la simulación, la función F^{-1} permite retransformar los valores simulados a la escala de los datos reales [19].

En la práctica se utiliza una función de anamorfosis empírica \bar{F} , ya que la función de distribución de $Z(x)$ es inferida a partir de los datos experimentales $\{Z(x_i), i = 1, \dots, n\}$. De esta forma, la anamorfosis es realizada gráficamente, donde a cada intervalo de clase del histograma acumulo experimental de los datos reales $Z(x_i)$ se le asigna un valor equivalente de la función de distribución acumulada de la variable teórica gaussiana [19].

6.3.2 Métodos de simulación

6.3.2.1 Simulación Exacta

Dado el conjunto de observaciones conocidas $\{Z(x_i), i = 1, \dots, n\}$, existen técnicas de simulación no condicional que solo tienen por objetivo reproducir el mismo comportamiento espacial de la variable regionalizada. Razón por la que no consideran la relación entre los valores simulados y los datos experimentales. También se dispone de métodos de simulación exacta o condicional que además, buscan que la simulación resultante sea igual a las muestras en las ubicaciones de datos reales, tal que $Z_s(x_i) = Z(x_i), \forall x \in D, i = 1, \dots, n$ [18].

El método más simple para producir la simulación exacta de una variable aleatoria es el método secuencial, el cual es detallado en la siguiente sección, seguido del método de descomposición de Cholesky de la matriz de covarianza C o LU , llamado así por la descomposición de la matriz de covarianzas C explicada a continuación [10].

Sea la variable regionalizada estacionaria $z = \{z(x), x \in D\}$, con una distribución normal de media 0 y función de covarianza $C(\cdot)$, definida un sobre un dominio D , discretizado en N nodos. La matriz de covarianzas entre los N nodos C_N es simétrica y definida positiva, por lo que se puede descomponer en el producto de una matriz triangular inferior L por una matriz triangular superior U , tal que $C = LU$. De esta forma, al multiplicar la matriz inferior L por un vector de N valores normales independientes ω se obtiene como resultado un vector $Z(x)$ de valores simulados de la variable regionalizada que siguen una distribución espacial dada por la función de covarianza $C(\cdot)$ [12]

$$Z(x) = L\omega$$

Además, si entre los N nodos a ser simulados se considera un subconjunto de n observaciones conocidas $\{Z(x_i), i = 1, \dots, n\}$, se puede producir fácilmente una simulación condicional de forma directa [12].

Si se desean nuevas realizaciones, se debe multiplicar la matriz L por un nuevo vector de variables aleatorias normales ω' . La mayoría de los costos computaciones en este método derivan de la descomposición de la matriz de covarianzas en las matrices L y U [12].

Dado que todos los datos son considerados simultáneamente en la matriz de covarianzas C , se lleva a cabo la simulación de todos los nodos del dominio discretizado al mismo tiempo. Esto produce una limitación en la implementación del método a sistemas de grandes dimensiones debido a los tiempos de cálculo necesarios para resolver las matrices requeridas. Por otro lado, si el número de nodos a simular es pequeño y se requiere una gran cantidad de simulaciones, el algoritmo de descomposición LU es la alternativa más rápida para resolver este problema [15]. La descomposición de Cholesky suele ser empleada en la evaluación de bloques para estudiar los efectos del cambio de soporte [12]. O en la simulación de las unidades de extracción de un depósito [15].

Si aún se desea simular grillas de gran tamaño, se requiere de aproximaciones locales como aplicar el algoritmo a subáreas del dominio o a vecindarios sobrepuestos. Sin embargo, estas soluciones producen inexactitudes en los resultados, ya que no se considera la correlación de todos los datos al mismo tiempo [12]. Aunque pueden ser adecuadas en áreas donde un modelo de estacionaridad global no es el indicado para describir el comportamiento de la variable [15].

Para los métodos de simulación que no son capaces de generar simulaciones exactas de forma directa es posible añadir una etapa de condicionamiento de los datos. El condicionamiento modifica los valores de una simulación no condicional con el fin de adquirir los mismos valores que los datos experimentales y conservar la variabilidad espacial de los modelos simulados [10].

Sea el conjunto de n observaciones $\{Z(x_i), i = 1, \dots, n\}$ a partir de las cuales se calculan la media y el modelo de variograma de la variable regionalizada. Al realizar la estimación por kriging del área de trabajo se obtiene el valor $Z^*(x)$, el cual tiene un error dado por $[Z(x) - Z^*(x)]$. De esta forma, el valor real de la variable aleatoria se puede expresar como [13]

$$Z(x) = Z^*(x) + [Z(x) - Z^*(x)] \quad (1)$$

Esta expresión es desconocida, ya que para calcular el error de estimación, se requiere de los valores de $Z(x)$ en todo el dominio de estudio y solo se dispone de estos valores en algunas ubicaciones.

La simulación permite encontrar una aproximación a la distribución de probabilidad de las estimaciones y se consigue tener una solución para este problema. Primero, se considera la simulación no condicional $Z_s(x)$ en todos los puntos de la malla discretizada en lugar de la variable real $Z(x)$, incluidos los sitios con datos experimentales [13].

El siguiente paso para condicionar esta simulación a las muestras disponibles, es realizar la estimación por kriging de cada nodo del dominio discretizado a partir del conjunto de datos simulados en las ubicaciones de los puntos experimentales $\{Z_s(x_i), i = 1, \dots, n\}$. De este modo, los valores simulados se pueden reescribir de forma análoga a la ecuación (1) como [13]

$$Z_s(x) = Z_s^*(x) + [Z_s(x) - Z_s^*(x)] \quad (2)$$

Pero en este caso, ya que se poseen los valores simulados en todo el terreno, es posible calcular el error en la estimación de $Z_s(x)$. Este error simulado posee la misma distribución espacial que el error cometido en la estimación de la variable real. Además, debido a que el kriging es un interpolador exacto, la diferencia $[Z_s(x) - Z_s^*(x)]$ es igual a 0 en los lugares de las observaciones conocidas, de manera que la simulación toma el mismo valor que los puntos experimentales [13]. Así, la expresión (1) se reescribe como

$$Z_{sc}(x) = Z^*(x) + [Z_s(x) - Z_s^*(x)] \quad (3)$$

donde $Z_{sc}(x)$ es valor de la simulación condicional. De esta forma, se condiciona la simulación a las muestras iniciales $\{Z(x_i), i = 1, \dots, n\}$ y se mantienen los parámetros de los modelos escogidos. Este procedimiento para condicionar una simulación no condicional es completamente general y puede ser aplicado a cualquier método de simulación [13].

Una simulación condicional se comporta como la variable real, pero no es su mejor estimador, debido a que presenta una varianza de estimación del doble de la varianza que se obtiene mediante kriging [10]

$$Z_{sc}(x) - Z(x) = [Z_s(x) - Z_s^*(x)] + [Z^*(x) - Z(x)],$$

$$\text{entonces } E[Z_{sc}(x) - Z(x)]^2 = 2\sigma^2(x)$$

A pesar de esto, el proceso de condicionamiento le otorga una mayor robustez a la simulación respecto a las características de la variable real que no son descritas por el modelo de función aleatoria escogido. Por ejemplo, si se cuenta con una gran cantidad de datos condicionantes y estos manifiestan una tendencia espacial, entonces los valores de la simulación condicional reflejarán la misma tendencia, incluso si están basados en un modelo estacionario [34].

A modo de resumen, los pasos generales para llevar a cabo una simulación condicional son [5]:

- Transformar las observaciones conocidas $Z(x_i)$ en los datos $Y(x_i)$, que siguen una distribución normal estándar, mediante la función de anamorfosis gaussiana.
- Estimar el modelo de variograma de los datos transformados.
- Realizar la simulación de la variable transformada y condicionar los resultados en caso de que el algoritmo de simulación no realice este proceso de forma directa.
- Aplicar la transformación inversa para obtener una simulación condicionada a los datos conocidos de la variable $Z(x)$.

Además, si los modelos simulados están basados en un conjunto de observaciones iniciales, se debe verificar la correcta reproducción de sus estadísticos una vez terminada la simulación y después de retransformar los datos simulados a la escala de valores los reales. De este modo, se pueden aplicar correcciones a los parámetros de simulación si es necesario [20].

6.2.2.2 Gaussiano secuencial

El algoritmo de simulación secuencial es el método más simple para producir la simulación de una función aleatoria multigaussiana [12]. La teoría de la simulación secuencial es sencilla y se adapta a la aplicación de variables continuas o categóricas, así como a la simulación de múltiples variables correlacionadas que representan a distintos atributos [18].

Sea la distribución conjunta de N variables aleatorias Z_i , que representan al mismo atributo en todos los puntos de un dominio D , discretizado en N nodos. Entre estas variables se cuenta con una serie de observaciones conocidas representadas por un conjunto N_0 . Así, su función de distribución de probabilidad condicionada conjunta N-variante está dada por [18]

$$f(z_1, \dots, z_N | N_0) = Prob\{Z_i \leq z_i, i = 1, \dots, N | N_0\} \quad (4)$$

Es posible producir una realización de esta función aleatoria N-variante en N pasos al descomponer la ecuación (4) en el producto N funciones de distribución univariantes condicionadas y tomar sus valores sucesivamente en una secuencia aleatoria [18]

$$f(Z_1, \dots, Z_N | N_0) = f(Z_1 | N_0) f(Z_2 | Z_1 \cup N_0) \dots f(Z_{N-1} | Z_1, \dots, Z_{N-2} \cup N_0) f(Z_N | Z_1, \dots, Z_{N-1} \cup N_0) \quad (3)$$

De manera general, la simulación de la variable aleatoria Z_i se obtiene por medio de su función de distribución condicionada univariante $f(Z_i | Z_1, \dots, Z_{i-1} \cup N_0)$, dados los puntos experimentales N_0 y las $(i - 1)$ simulaciones previas. Z_i es añadido al conjunto de datos condicionantes para la simulación de la variable aleatoria Z_{i+1} . Esta secuencia continúa hasta completar la simulación de los N nodos que componen la grilla. En conjunto, todas estas simulaciones individuales corresponden a una realización de la función aleatoria N-variante de $Z(x)$ [18]. Si una nueva realización es requerida, entonces toda la secuencia de simulación es repetida.

De este modo, se producen simulaciones condicionales de forma directa. También es posible realizar simulaciones no condicionales si el conjunto de observaciones iniciales se considera nulo, por lo que en el primer paso se toma un valor aleatorio de la distribución marginal de Z_1 [18].

La dificultad de este método de simulación es que resulta difícil llegar a conocer completamente la función de distribución de una variable regionalizada [10]. Para solucionar este problema, se lleva a cabo una transformación de los valores originales $Z(x)$ a los datos $Y(x)$, que tienen una función de distribución conjunta normal estándar

$$g(Y_1, \dots, Y_N) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n |C|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} Y C^{-1} Y^t\right)$$

donde C es la matriz de covarianza entre los datos. Por lo que solo se requiere del modelo de variograma o covarianza de la variable transformada para conocer su función de distribución [5]. La aplicación del algoritmo secuencial a este conjunto de datos recibe en nombre de simulación secuencial gaussiana [10]. Así, bajo el supuesto de estacionaridad, la función de distribución condicional de $Y(x)$ es normal y tiene una media y varianza dadas por el sistema de kriging simple de los datos [17].

Si se desea realizar una simulación de valores gaussianos en las ubicaciones $\{x_1, \dots, x_N\}$, tal que tengan una distribución espacial dada por el variograma de los datos transformados y que estén condicionados al conjunto de observaciones conocidas N_0 , el algoritmo secuencial gaussiano se compone de los siguientes pasos [5]:

- Definir un camino aleatorio para visitar y simular cada uno de los N nodos que componen la grilla del dominio discretizado.
- Realizar la estimación por kriging simple de $Y(x_i)$ a partir de los valores previamente simulados $Y_s(x_1), \dots, Y_s(x_{i-1})$ y el conjunto de datos experimentales N_0 . De esta forma, se calculan el valor estimado $Y^*(x_i)$ y su varianza $\sigma^2(x_i)$, que corresponden a la media y la varianza de la función de distribución condicional.
- Generar un valor residual aleatorio R_i , con una distribución normal de media 0 y varianza dada por $\sigma^2(x_i)$.
- Simular el valor de la variable aleatoria $Y(x_i)$, el cual viene dado por

$$Y_s(x_i) = Y^*(x_i) + R_i$$
- Añadir este valor simulado al conjunto de datos condicionantes para la simulación del siguiente punto x_{i+1} .
- Repetir esta secuencia desde el segundo paso hasta completar la simulación de todos los nodos de la grilla. El conjunto de estos valores corresponde a una realización de la función aleatoria N-variante de $Y(x)$.

Finalizada la simulación, se aplica la función de anamorfosis inversa $Z(x) = F^{-1} [Y(x)]$ para transformar los valores simulados de la variable aleatoria $Y(x)$ en valores con la escalada de los datos reales [5].

Con el fin de generar nuevas realizaciones de la función aleatoria, una opción es repetir el mismo camino definido en la primera simulación para recorrer los nodos. De manera que todas las realizaciones comparten el mismo sistema de kriging, lo que reduce los tiempos de cálculo considerablemente. Otra alternativa consiste en producir una nueva ruta aleatoria para cada realización. Por lo tanto, se deben resolver nuevos sistemas de kriging y el tiempo de cálculo es proporcional al número de realizaciones [12].

El algoritmo de simulación secuencial gaussiana es popular debido a su fácil implementación y su capacidad de generar simulaciones condicionales directamente [5]. La desventaja de este método es que cada punto simulado se añade al conjunto de datos condicionantes para la simulación de los siguientes nodos. Lo que aumenta el nivel de condicionamiento gradualmente, pero requiere resolver grandes sistemas de ecuaciones [12]. Debido a esto, no es posible emplear el algoritmo secuencial de forma rigurosa en la práctica. Para solucionar este problema se define un número máximo de puntos condicionantes en la simulación de cada nodo x_i [10].

Algunas notas teóricas:

- Al acotar los datos a una vecindad móvil es posible utilizar la simulación secuencial en la práctica. Pero como consecuencia de esta aproximación, el orden en el que se visitan los nodos puede generar sesgos en los estadísticos de la variable simulada. Además, dado que los valores simulados se utilizan para el condicionamiento de los siguientes puntos, estos errores se trasladan a las siguientes simulaciones a medida que el algoritmo progresa [17].
- Estas discrepancias con los modelos teóricos se deben a que el campo de simulación no es infinito. Por este motivo, al aumentar la distancia de separación entre dos puntos el error cometido también será mayor. Este tipo de aproximaciones reciben el nombre de fluctuaciones ergódicas [5].
- Para minimizar los efectos de las fluctuaciones ergódicas se recomienda hacer uso de una secuencia aleatoria para recorrer los nodos y evitar patrones monótonos como visitar los nodos por filas y columnas. Una estrategia consiste en emplear una grilla extensa para abarcar todo el dominio con un vecindario único, lo que permite modelar el comportamiento a gran escala y minimizar los sesgos. Y luego, se utilizan grillas más finas. De este modo, los datos simulados con una vecindad móvil se sustentan en las realizaciones de los primeros nodos [12].
- Sin embargo, está demostrado que la mejor solución es escoger un número de puntos condicionantes lo suficientemente grande para la simulación de cada nodo [10]. Además, dado el efecto pantalla de los datos, las aproximaciones requeridas para la implementación del método secuencial gaussiano no producen un gran impacto en los parámetros de los modelos simulados [12].
- El algoritmo de simulación secuencial gaussiana no siempre es adecuado para la reproducción de tendencias espaciales debido al supuesto de estacionaridad requerido para la transformación normal de los datos y la hipótesis de una media constante para el uso del kriging simple. Si se desea utilizar el método secuencial es necesario modelar la tendencia espacial para llevar a cabo los procedimientos con los valores residuales [20]. Aunque si se cuenta con una gran cantidad de muestras, se pueden emplear aproximaciones locales para la inferencia de modelos no estacionarios. Por ejemplo, dividir el área de estudio y utilizar un modelo de función aleatoria distinto en cada subzona. O recalcular la media en cada nodo con la ayuda del kriging ordinario. Sin embargo, la reestimación de la media produce mayores errores en los parámetros del modelo simulado [12].

El método de simulación secuencial gaussiana será empleado en la generación de leyes de cobre en el caso simulado de este trabajo gracias a su simplicidad en la definición de los parámetros requeridos y su fácil implementación en la práctica [12,18].

6.2.2.3 Otros métodos de simulación

Una alternativa a la simulación secuencial gaussiana es el algoritmo de las bandas rotantes, que permite obtener el valor simulado $Z_s(x)$ de la variable regionalizada $z(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$ como la contribución de múltiples simulaciones unidimensionales. Lo que permite reducir los tiempos de cálculo empleados en comparación a los métodos clásicos [19]. Para lograr esto, se trazan N rectas alrededor del nodo a simular y en cada recta se simula un valor aleatorio $Y_i(x)$. Luego, $Z_s(x)$ corresponde a la suma de las proyecciones de los valores simulados en las rectas sobre el nodo a simular [9].

La covarianza unidimensional $C_1(h)$ necesaria para la simulación de valores sobre las rectas se obtiene a partir de la función de covarianza tridimensional $C_3(h)$ de la variable regionalizada en estudio al derivar la función $hC_3(h)$, respecto a h , tal que [9]

$$C_1(h) = \frac{\partial}{\partial h} [hC_3(h)]$$

Luego, la simulación tridimensional corresponde a la sumatoria de las contribuciones de las simulaciones unidimensionales de la función de covarianza $C_1(h)$ [9]

$$Z(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N Y_i(x)$$

Con el fin de aumentar la precisión del método, se debe emplear un mayor número de rectas. Para simulaciones en 3 dimensiones se recomienda hacer uso de 15 rectas dispuestas en las aristas de un icosaedro regular en cuyo centro se encuentra el nodo a simular [9]. Sin embargo, se pierde precisión debido al limitado número de rectas utilizadas. Además, no todos los modelos de covarianza tienen una simplificación unidimensional fácil de derivar, pero en la mayoría de los casos se puede lograr aproximaciones aceptables [15].

Existen varias formas de calcular la simulación unidimensional de la función aleatoria $Y(x)$ requerida en el algoritmo de las bandas rotantes. El método clásico consiste en el análisis espectral, ya que es un procedimiento general cualquiera sea la función de covarianza $C(h)$ de una variable regionalizada [19]. Ya que todas las funciones aleatorias estacionarias tienen una representación espectral [10].

Sea U un vector aleatorio con valores normales en R^n con una función de distribución de probabilidad $F(du)/\sigma^2$, con $\sigma^2 = \int F(du)$ y la variable aleatoria independiente Φ con una distribución uniforme sobre $[0, 2\pi[$. El valor de simulado $Z_s(x)$ de la variable regionalizada viene dado por [10]

$$Z_s(x) = \sigma\sqrt{2}\cos(2\pi \langle U, x \rangle + \Phi)$$

El cual tiene media 0 covarianza $C(h)$ dada por

$$C(h) = \int e^{2\pi i \langle u, h \rangle} F(du) = \int \cos(2\pi \langle u, h \rangle) F(u)$$

En la práctica, este método es adecuado para variables regionalizadas estacionarias diferenciables, con una función covarianza que presente un comportamiento parabólico en el origen [10]. La limitación del método espectral es que la ergodicidad es alcanzada lentamente. Y en determinados casos, producir las transformaciones de Fourier requeridas puede implicar elevados tiempos de cálculo [19].

Cuando el comportamiento espacial de la variable regionalizada se puede caracterizar mediante modelos de covarianza esféricos o exponenciales, una alternativa es aplicar una simulación por medias móviles, lo que permite disminuir en gran medida los tiempos de cálculo empleados [34]. Estos modelos de covarianza tienen representaciones unidimensionales $C_1(h)$ que pueden ser escritas como el producto de convolución de una función conocida $f(x)$ por su traspuesta $\check{f} = f(-x)$, tal que [19]

$$C_1(h) = f * \check{f} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(x+h)dx$$

Con esta covarianza, $Z_s(x)$ se define como el producto de una función de pesos $f(x)$ asociada a una medida unidimensional aleatoria estacionaria $T(r)dr$. Así

$$Z_s(x) = T * \check{f} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+r)T(r)dr$$

La versión discreta del proceso $T(r)dr$ es una sucesión de variables aleatorias independientes T_i que siguen una misma distribución [19].

Además, el proceso de medias móviles puede ser aplicado en 2 o 3 dimensiones sin la necesidad del algoritmo de bandas rotantes. Otra ventaja es su capacidad de producir simulaciones condicionales de forma directa. Sin embargo, los métodos de medias móviles están limitados a modelos cuya función de covarianza posee un alcance reducido en comparación al dominio de estudio [10].

7. Caso simulado

El caso simulado consiste en comparar las diferencias producidas en la estimación para distintos tipos de anisotropías, a partir de varios tamaños de mallas de muestreo complementarias. Para esto se diseñan mallas de muestreo complementarias con el algoritmo de búsqueda mostrado en la metodología del informe y mallas complementarias distribuidas de forma aleatorias. Los resultados entregados por ambos tipos de mallas son contrastados mediante una categorización de recursos, un análisis económico y la comparación de la varianza de estimación de los resultados y el error cuadrático medio de las predicciones.

7.1 Metodología de simulación

Para lograr el objetivo del estudio el primer paso es simular la base de datos. Se definen 4 casos de estudio con distintos tipos de continuidad espacial:

- Caso 1: posee una anisotropía pronunciada con un gran alcance en el eje mayor de continuidad.
- Caso 2: tiene una anisotropía con un alcance reducido.
- Caso 3: tiene una anisotropía con un efecto pepita grande.
- Caso 4: es un variograma isótropo.

Por cada caso de estudio se crean 100 bases de datos, cada una compuesta por 20301 nodos, y para los análisis estadísticos realizados se toma como valor representativo de los resultados el valor promedio de estas 100 simulaciones a menos que se mencione lo contrario.

La simulación de leyes de cobre se lleva a cabo sobre una superficie de 2000 [m] en dirección Este y 1000 [m] en dirección Norte, con puntos separados cada 10 [m]. Los valores son generados con el método de simulación secuencial gaussiano, gracias a las funciones incluidas en el paquete “gstat” disponible en RStudio. Mientras que para el cálculo de variogramas experimentales y posterior estimación de recursos se recurre a las funciones incorporadas en el paquete “gmin” de Rstudio.

Con las bases de datos creadas, en cada una de ellas se realiza una etapa de muestreo preliminar consistente en tomar 80 muestras de forma aleatoria. De esta manera se espera modelar el comportamiento del variograma cerca del origen y el efecto pepita de forma más exhaustiva que con una malla de muestreo regular, en especial para los casos en los cuales la variable en estudio tiene poca continuidad espacial [35].

Identificado el modelo de variograma se procede a la estimación del atributo de interés en la base de datos mediante kriging ordinario, para posteriormente emplear el algoritmo de búsqueda con el

fin de diseñar mallas complementarias hasta un tamaño máximo de 30 puntos adicionales. En esta nueva malla se busca posicionar las muestras en lugares alejados de las muestras previas y con una alta varianza del kriging. Así, se busca mejorar la clasificación de recursos y abarcar las zonas del terreno con una poca cantidad de observaciones. Además, se crean de forma paralela distintas mallas de muestreo complementarias distribuidas de forma aleatoria con el mismo número de muestras, para comparar los resultados de ambos tipos de redes.

Con la adición de las nuevas muestras se realiza la predicción de valores sobre el área o polígono de estudio, se reportan sus principales medidas estadísticas y se compara la varianza de estimación de las estimaciones realizadas a partir de mallas diseñadas con el algoritmo de búsqueda y las mallas complementarias aleatorias.

Luego, se procede a la clasificación de recursos. Para llevar a cabo la clasificación de recursos se asume que cada punto de la base de datos corresponde al centroide de un bloque de lado 10 [m]. De esta forma es posible cuantificar los tonelajes correspondientes a cada categoría de recursos y realizar una evaluación económica de las estimaciones realizadas a partir de las diferentes mallas empleadas.

Finalmente, se comparan los valores estimados con los valores simulados inicialmente con el fin de cuantificar el porcentaje de aciertos en la clasificación estéril-mineral de los bloques y el error cometido por la estimación de las diferentes mallas aplicadas.

7.2 Aplicación

Las bases de datos son simuladas sobre un área de 2000 [m] en la dirección Este y 1000 [m] en la dirección Norte, con puntos espaciados cada 10 [m], lo que da como resultado una superficie compuesta por 20301 puntos, estos nodos se consideran como en centroide de un bloque con tamaño de lado de 10 [m], de modo que las futuras estimaciones son realizadas sobre un modelo de bloques con estas mismas dimensiones. Antes de simular los valores sobre la superficie se definen los parámetros de los modelos de variograma para los 4 casos de estudio, los cuales se presentan en la tabla 2.

Tabla 2. Parámetros modelos de variograma para casos de estudio.

Caso estudio	Modelo	Pepita	Meseta	Alcance [m]	Coefficiente de anisotropía
Alta continuidad	Esférico	0.05	0.4	1120	0.15
Baja continuidad	Esférico	0.05	0.4	140	0.5
Pepita grande	Esférico	0.3	0.4	140	0.5
Omnidireccional	Esférico	0.05	0.4	140	1

Para el caso de efecto pepita grande se escoge una pepita igual al 75 [%] del valor de la meseta, ya que se ha estudiado que en casos isotrópos a partir de este valor el efecto pepita presenta modificaciones importantes en el diseño de mallas regulares [31]. El eje de anisotropía para los modelos de variograma se define en un ángulo de 45° en sentido horario. El caso de alta continuidad tiene un coeficiente de anisotropía de 0.15, para los casos de baja continuidad y efecto pepita grande, el coeficiente de anisotropía es de 0.5.

Con la definición de los modelos de variograma se procede a la simulación de las 100 bases de datos para cada uno de los casos de estudio sobre el área descrita previamente compuesta de 20301 nodos. Los datos simulados presentan una distribución normal multivariada. Mediante una transformación exponencial de valores, su distribución es llevada a una distribución log-normal, similar a la de leyes de cobre. La transformación exponencial deja una cola de valores altos, los cuales son truncados a un máximo de 1.1 [%] de cobre.

Creadas las bases de datos se procede a la toma de muestras. Se toman 80 muestras iniciales de la superficie en cada una de las bases de datos. A estas muestras se les realiza una transformación logarítmica para lograr una distribución normal de los datos, ya que esto facilita la aplicación de postulados estadísticos y a entender de mejor forma el comportamiento de la variable [23].

Con estas muestras transformadas se calcula el variograma experimental de la variable. Debido a la gran cantidad de variogramas a analizar se ajustan variogramas esféricos a cada uno de los variogramas experimentales de las bases de datos. Gracias a este variograma calculado se realiza la estimación de la zona de estudio y con la varianza del kriging obtenida se aplica el algoritmo de búsqueda para diseñar las nuevas mallas complementarias.

7.2.1 Caso de alta continuidad

A continuación, se procede a la creación de mallas de muestreo complementarias diseñadas con el algoritmo de búsqueda para tamaños desde 0 a 30 nuevas muestras. Como se aprecia en la figura 7, las muestras se posicionan en las zonas con una escasa cantidad de muestras para todos los tamaños de mallas, cumpliendo con este objetivo. En el ANEXO A se puede observar la distribución de 30 muestras adicionales distribuidas de forma aleatoria.

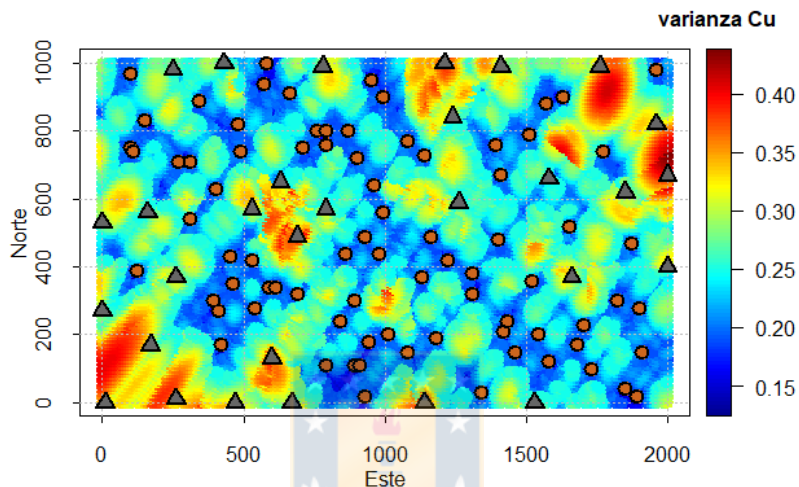


Figura 7. Mapa de varianzas generadas a partir de las 80 primeras muestras, con las muestras iniciales en círculos y las 30 muestras complementarias en triángulos.

Con los distintos tamaños de mallas complementarias empleadas se realiza la estimación de los modelos de bloques mediante kriging ordinario para cada una de estas mallas.

En la tabla 3 se observa que tanto las mallas complementarias aleatorias como las mallas complementarias diseñadas por el algoritmo de búsqueda presentan una ligera sobreestimación de los estadísticos de posición de las estimaciones para todos los tamaños de mallas. Además, ambos tipos de mallas presentan el mismo grado de sobreestimación para los estadísticos de posición y estos se mantienen constantes para todos los tamaños de mallas generados, con excepción del valor máximo de los modelos de bloques estimados, los cuales presentan una mayor sobreestimación y se comportan de forma irregular para distintos tamaños de mallas, mostrando una mayor desviación. También se observa una desviación de los valores próxima a la real, pero ligeramente inferior.

En cuanto a la varianza media de las estimaciones para distintos tamaños de mallas, figura 8, esta disminuye de forma más rápida para las estimaciones provenientes de mallas complementarias diseñadas a medida que aumenta el tamaño de estas.

Tabla 3. Estadísticos de posición del promedio de las 100 estimaciones de las bases de datos para distintos tamaños de mallas complementarias.

Tamaño malla complementaria	Mallas complementarias diseñadas			Mallas complementarias aleatorias			Datos reales
	10 puntos	20 puntos	30 puntos	10 puntos	20 puntos	30 puntos	
Mínimo	0.027	0.027	0.025	0.027	0.026	0.025	0.000
1° cuartil	0.180	0.178	0.177	0.178	0.177	0.178	0.141
Mediana	0.267	0.264	0.263	0.266	0.264	0.265	0.230
Media	0.311	0.307	0.304	0.310	0.309	0.310	0.283
3° cuartil	0.392	0.387	0.385	0.392	0.392	0.391	0.365
Máximo	1.571	1.613	1.640	1.646	1.666	1.751	1.100
Desviación	0.187	0.185	0.183	0.191	0.191	0.191	0.201

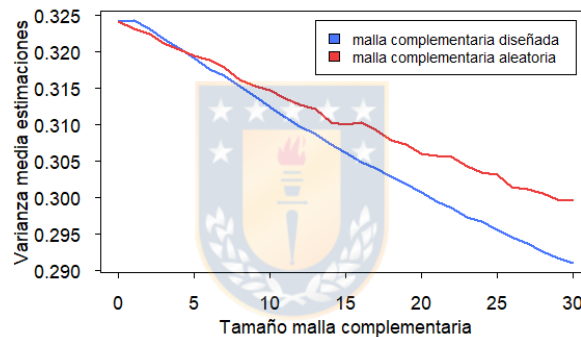


Figura 8. Varianza media de las distintas mallas complementarias para las 100 simulaciones de la base de datos.

Con los valores estimados para distintos tamaños de mallas se realiza la clasificación de recursos. Para llevar a cabo la clasificación de recursos, en todos los casos se definen límites arbitrarios para los valores de varianza de estimación, estos límites se calculan de acuerdo a lo mencionado en el ANEXO B. Para mallas complementarias diseñadas y mallas complementarias aleatorias se observa una distribución similar en las categorías minerales, tabla 4, siendo para las mallas complementarias diseñadas con el algoritmo de búsquedas ligeramente superiores los recursos indicados y para las mallas complementarias aleatorias los medidos. Los valores para todos los tamaños de mallas complementarias se encuentran en el ANEXO B, en el cual se observa que aumentan lentamente por cada muestra adicional.

Para realizar un análisis económico de la categorización de recursos se recurre a los parámetros físicos y económicos listados en el ANEXO C. Esto da como resultado la utilización de una ley de corte de 0.355 [%] para el cobre. Adicionalmente, solo se consideran valores provenientes de

recursos medidos e indicados, debido a su mayor confiabilidad. Estas consideraciones son utilizadas para el cálculo de los ingresos de todos los casos de estudio.

Tabla 4. Categorización de la estimación de las 100 simulaciones realizadas para distintos tamaños de mallas complementarias.

	Mallas complementarias diseñadas					
	Medidos		Indicados		Inferidos	
Tamaño malla complementaria	Tonelaje [Mton]	Ley media [%]	Tonelaje [Mton]	Ley media [%]	Tonelaje [Mton]	Ley media [%]
10 muestras	5.308	0.301	20.220	0.306	29.284	0.316
20 muestras	5.704	0.300	22.881	0.304	26.228	0.310
30 muestras	6.278	0.301	25.597	0.302	22.938	0.308
	Mallas complementarias aleatorias					
	Medidos		Indicados		Inferidos	
Tamaño malla complementaria	Tonelaje [Mton]	Ley media [%]	Tonelaje [Mton]	Ley media [%]	Tonelaje [Mton]	Ley media [%]
10 muestras	6.001	0.300	19.912	0.304	28.900	0.316
20 muestras	6.782	0.302	21.317	0.305	26.714	0.313
30 muestras	7.524	0.303	22.209	0.305	25.080	0.315

Tabla 5. Beneficios para distintos tamaños de mallas complementarias diseñadas y mallas complementarias aleatorias.

	Mallas complementarias diseñadas			Mallas complementarias aleatorias		
Tamaño malla complementaria	10 muestras adicionales	20 muestras adicionales	30 muestras adicionales	10 muestras adicionales	20 muestras adicionales	30 muestras adicionales
Ingresos [MUSD]	223.308	246.177	270.979	226.285	248.258	261.205
Costos [MUSD]	158.518	175.560	194.084	160.288	175.840	184.930
Beneficios [MUSD]	64.790	70.617	76.895	65.997	72.419	76.275
Ley media [%]	0.541	0.538	0.535	0.541	0.543	0.544
Recursos [Mton]	7.556	8.380	9.276	7.636	8.377	8.809

Las mallas complementarias de 30 muestras adicionales diseñadas con el algoritmo de búsqueda presentan un beneficio marginalmente superior al ser comparadas con las mallas complementarias creadas de forma aleatoria, incluso siendo menor para tamaños de mallas complementarias de 10 y 20 puntos adicionales. No obstante, debido a que estas mallas poseen un mayor error en sus estimaciones, estas pueden tener una mayor parte de sus beneficios proveniente de bloques mal clasificados o sobreestimados.

7.2.2 Caso baja continuidad

Con las mallas implementadas con el algoritmo búsqueda se obtiene una buena cobertura espacial del área de estudio, logrando uno de los objetivos principales de la nueva malla complementaria diseñada. En el ANEXO A se encuentra la malla complementaria de 30 muestras aleatorias.

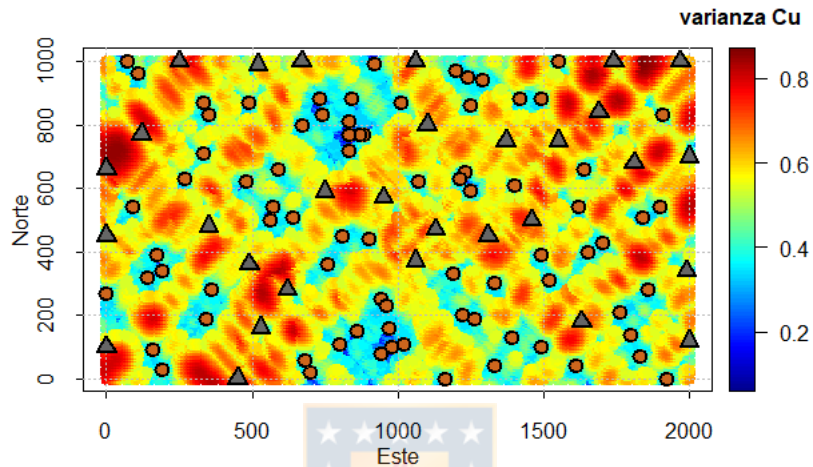


Figura 9. Mapa de varianzas generadas a partir de las 80 primeras muestras, con las muestras iniciales en círculos y las 30 muestras complementarias en triángulos.

Con las mallas complementarias diseñadas y aleatorias es posible realizar la estimación del modelo de bloques del área en estudio. En promedio, para ambos tipos de mallas complementarias se nota una sobreestimación de los estadísticos de posición de las estimaciones, la cual se mantiene constante para los distintos tamaños de mallas complementarias. En ambos tipos de mallas complementarias se aprecia una gran sobreestimación del valor máximo de la base de datos, la cual no presenta mejoras considerables al aumentar el tamaño de las mallas complementarias. Los errores en este caso son más groseros en comparación al caso de alta continuidad.

La varianza media de las estimaciones provenientes de mallas complementarias aleatorias es menor a la varianza media de mallas complementarias diseñadas, esta diferencia en la varianza media de las estimaciones disminuye a medida que aumenta el tamaño de la malla complementaria, donde para un tamaño de malla complementaria de 30 puntos adicionales, la varianza media de las estimaciones es menor para las mallas complementarias diseñadas, por lo que se espera que para tamaños superiores de mallas complementarias esta diferencia aumente, al igual que lo observado para el caso de alta continuidad.

Tabla 6. Estadísticos de posición del promedio de las 100 estimaciones de las bases de datos para distintos tamaños de mallas complementarias.

Tamaño malla complementaria	Mallas complementarias diseñadas			Mallas complementarias aleatorias			Datos reales
	10 puntos	20 puntos	30 puntos	10 puntos	20 puntos	30 puntos	
Mínimo	0.026	0.027	0.026	0.027	0.025	0.024	0.000
1° cuartil	0.198	0.195	0.193	0.195	0.192	0.192	0.137
Mediana	0.285	0.282	0.280	0.285	0.282	0.282	0.225
Media	0.329	0.325	0.322	0.332	0.328	0.328	0.282
3° cuartil	0.409	0.405	0.401	0.413	0.409	0.408	0.363
Máximo	2.300	2.346	2.163	2.432	2.575	2.737	1.100
Desviación	0.197	0.195	0.191	0.207	0.207	0.210	0.207

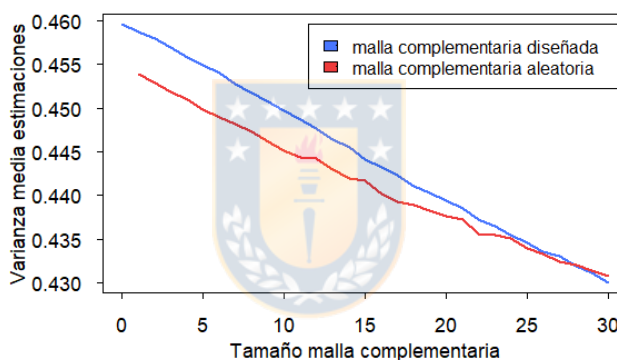


Figura 10. Varianza media de las distintas mallas complementarias para las 100 simulaciones de la base de datos.

En cuanto a la clasificación de recursos, esta es similar para ambos tipos de mallas complementarias, tabla 7, presentando una mejora marginal por cada muestra añadida a la malla complementaria, como se aprecia en la figura de la clasificación de recursos para todos los tamaños de mallas complementarias ANEXO B, figura 29.

Con los valores de las distintas categorías minerales se procede a la evaluación económica de los distintos escenarios generados para los recursos medidos e indicados, utilizando los parámetros económicos disponibles en el ANEXO C.

Tabla 7. Categorización de la estimación de las 100 simulaciones realizadas para distintos tamaños de mallas complementarias.

Mallas complementarias diseñadas						
	Medidos		Indicados		Inferidos	
Tamaño malla complementaria	Tonelaje [Mton]	Ley media [%]	Tonelaje [Mton]	Ley media [%]	Tonelaje [Mton]	Ley media [%]
10 muestras	5.567	0.321	18.668	0.328	30.578	0.331
20 muestras	6.017	0.320	20.863	0.324	27.932	0.327
30 muestras	6.616	0.318	23.097	0.321	25.100	0.324
Mallas complementarias aleatorias						
	Medidos		Indicados		Inferidos	
Tamaño malla complementaria	Tonelaje [Mton]	Ley media [%]	Tonelaje [Mton]	Ley media [%]	Tonelaje [Mton]	Ley media [%]
10 muestras	6.196	0.325	18.453	0.329	30.164	0.335
20 muestras	6.972	0.322	19.558	0.326	28.283	0.331
30 muestras	7.755	0.324	20.527	0.328	26.530	0.331

Tabla 8. Beneficios para distintos tamaños de mallas complementarias diseñadas y mallas complementarias aleatorias.

Tamaño malla complementaria	Mallas complementarias diseñadas			Mallas complementarias aleatorias		
	10 muestras adicionales	20 muestras adicionales	30 muestras adicionales	10 muestras adicionales	20 muestras adicionales	30 muestras adicionales
Ingresos [MUSD]	245.210	264.234	287.635	253.154	267.560	288.011
Costos [MUSD]	169.347	183.991	202.027	172.846	183.796	197.204
Beneficios [MUSD]	75.862	80.243	85.608	80.307	83.764	90.807
Ley media [%]	0.558	0.553	0.548	0.566	0.562	0.565
Recursos [Mton]	8.007	8.721	9.600	8.144	8.676	9.300

Se aprecia que las mallas complementarias diseñadas presentan menores ingresos y beneficios que las mallas complementarias aleatorias, no obstante, de la sección anterior se sabe que las mallas complementarias aleatorias incurren en una mayor sobreestimación de los valores altos, las cuales son mayores en este caso.

7.2.3 Caso efecto pepita grande

Con las estimaciones iniciales se procede a la creación de distintas mallas complementarias, tanto aleatorias como diseñadas. Para todos los tamaños de mallas complementarias diseñadas con el algoritmo se logran una buena cobertura de la zona de estudio, por lo que se cumple este importante aspecto impuesto en las condiciones del diseño.

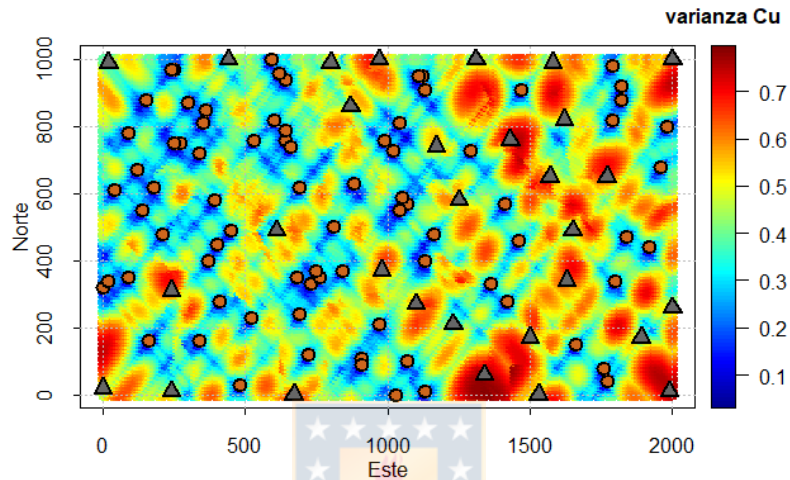


Figura 11. Mapa de varianzas generadas a partir de las 80 primeras muestras, con las muestras iniciales en círculos y las 30 muestras complementarias en triángulos.

Con las distintas mallas complementarias se procede a la estimación de recursos por medio de kriging ordinario. Con el fin de comparar las predicciones de las distintas mallas complementarias se presentan los estadísticos medios de la predicción de valores.

Como se observa en la tabla 9, al igual que los casos anteriores, se presenta una sobreestimación de los estadísticos de la base de datos reales. Ambos tipos de mallas complementarias presentan valores similares para sus estadísticos de posición, los cuales permanecen constantes para las distintas mallas complementarias aplicadas, con excepción del valor máximo estimado de la base de datos, siendo mucho mayor para mallas complementarias aleatorias. Además, las mallas complementarias aleatorias presentan una desviación en sus valores mayor a la real.

Para la varianza media de las estimaciones, al igual que los casos anteriores se observa que la varianza disminuye de forma más rápida para las mallas complementarias diseñadas y esta diferencia aumenta lentamente a medida que lo hace el tamaño de la malla.

Tabla 9. Estadísticos de posición del promedio de las 100 estimaciones de las bases de datos para distintos tamaños de mallas complementarias.

Tamaño malla complementaria	Mallas complementarias diseñadas			Mallas complementarias aleatorias			Datos reales
	10 puntos	20 puntos	30 puntos	10 puntos	20 puntos	30 puntos	
Mínimo	0.019	0.017	0.018	0.017	0.017	0.016	0.000
1° cuartil	0.176	0.172	0.174	0.174	0.173	0.170	0.112
Mediana	0.269	0.263	0.264	0.271	0.269	0.265	0.200
Media	0.329	0.322	0.321	0.331	0.331	0.327	0.275
3° cuartil	0.410	0.403	0.399	0.413	0.412	0.407	0.355
Máximo	3.012	3.206	2.856	3.050	3.438	3.358	1.100
Desviación	0.241	0.235	0.227	0.247	0.254	0.247	0.236

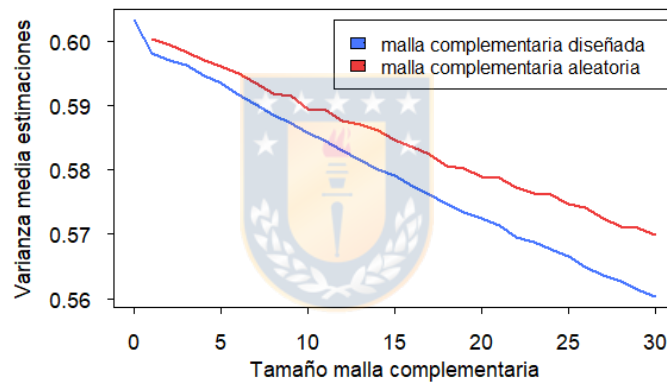


Figura 12. Varianza media de las distintas mallas complementarias para las 100 simulaciones de la base de datos.

Con la definición de los límites de varianza establecidos en el ANEXO B, se presenta la clasificación de recursos para distintas mallas complementarias diseñadas por ambos métodos, las mallas complementarias aleatorias reportan una mayor cantidad de recursos medidos. Además, en el ANEXO B se aprecia que la mejora producida a medida que aumenta el tamaño de las mallas complementarias empleadas es muy pequeña y similar en ambos casos.

Utilizando los parámetros económicos definidos en el ANEXO C, se realiza la evaluación económica para los distintos escenarios creados. En la tabla 11 se presentan los resultados económicos para distintos tamaños de mallas complementarias.

Tabla 10. Categorización de la estimación de las 100 simulaciones realizadas para distintos tamaños de mallas complementarias.

Mallas complementarias diseñadas						
	Medidos		Indicados		Inferidos	
Tamaño malla complementaria	Tonelaje [Mton]	Ley media [%]	Tonelaje [Mton]	Ley media [%]	Tonelaje [Mton]	Ley media [%]
10 muestras	5.539	0.321	18.188	0.326	31.085	0.333
20 muestras	5.956	0.320	20.261	0.322	28.595	0.323
30 muestras	6.506	0.318	22.438	0.320	25.869	0.323
Mallas complementarias aleatorias						
	Medidos		Indicados		Inferidos	
Tamaño malla complementaria	Tonelaje [Mton]	Ley media [%]	Tonelaje [Mton]	Ley media [%]	Tonelaje [Mton]	Ley media [%]
10 muestras	6.097	0.320	18.263	0.325	30.454	0.337
20 muestras	6.869	0.320	19.368	0.326	28.576	0.337
30 muestras	7.619	0.318	20.368	0.324	26.826	0.331

Tabla 11. Beneficios para distintos tamaños de mallas complementarias diseñadas y mallas complementarias aleatorias.

Tamaño malla complementaria	Mallas complementarias			Mallas aleatorias		
	10 muestras adicionales	20 muestras adicionales	30 muestras adicionales	10 muestras adicionales	20 muestras adicionales	30 muestras adicionales
Ingresos [MUSD]	248.419	268.917	290.217	254.916	275.649	291.194
Costos [MUSD]	160.752	174.803	190.571	164.855	178.040	188.687
Beneficios [MUSD]	87.667	94.113	99.645	90.061	97.610	102.507
Ley media [%]	0.604	0.602	0.593	0.606	0.607	0.605
Recursos [Mton]	7.447	8.110	8.871	7.636	8.243	8.745

Para todos los tamaños de mallas complementarias generadas, se observa que las mallas complementarias aleatorias presentan un beneficio superior aproximado de 3 [MUSD] frente a las mallas complementarias diseñadas del algoritmo de búsqueda.

7.3.4 Caso omnidireccional

Con la aplicación de las 30 mallas de muestreo complementarias diseñadas con el algoritmo de búsqueda se logra una buena cobertura de la zona de estudio. Además, para el caso omnidireccional cumplir con este objetivo es similar a posicionar las muestras en zonas con un alto valor de varianza del kriging, como se aprecia en la figura 13.

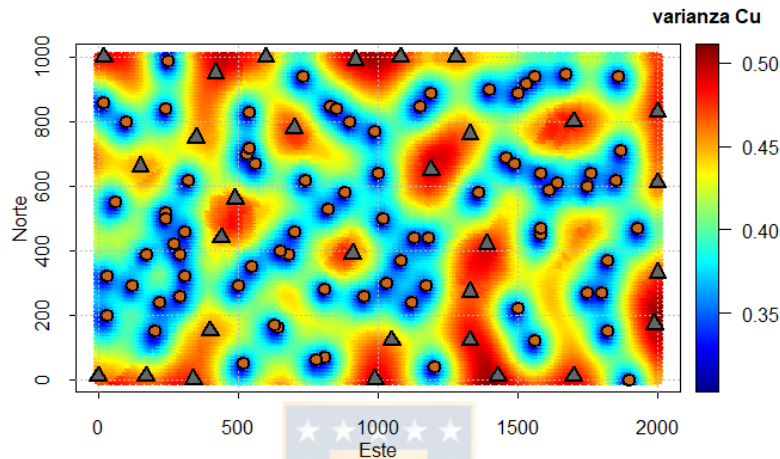


Figura 13. Mapa de varianzas generadas a partir de las 80 primeras muestras, con las muestras iniciales en círculos y las 30 muestras complementarias en triángulos.

Creadas las mallas de muestreo complementarias se procede a la estimación del modelo de bloques mediante kriging ordinario. En la tabla 12 se presentan los principales estadísticos de las estimaciones realizadas a partir de distintas mallas complementarias, ambos tipos de mallas presentan estadísticos promedios similares para las estimaciones, incluyendo la estimación del valor máximo. En este caso se logran estadísticos de posición similares a los reales con excepción del primer cuartil de los datos, el cual es sobreestimado de la misma forma por ambos tipos de mallas complementarias. Además, en todas las mallas complementarias se presenta la misma subestimación de la variabilidad real de los datos.

Se aprecia el mismo resultado para la varianza media de las estimaciones provenientes de mallas complementarias que en los casos de estudio previos, aumentando la diferencia entre la varianza media de las estimaciones creadas a partir de las mallas complementarias diseñadas y las estimaciones provenientes de mallas complementarias aleatorias a medida que lo hace el tamaño de la malla complementaria empleada.

Tabla 12. Estadísticos de posición del promedio de las 100 estimaciones de las bases de datos para distintos tamaños de mallas complementarias.

Tamaño malla complementaria	Mallas complementarias diseñadas			Mallas complementarias aleatorias			Datos reales
	10 puntos	20 puntos	30 puntos	10 puntos	20 puntos	30 puntos	
Mínimo	0.034	0.032	0.031	0.034	0.032	0.031	0.000
1° cuartil	0.201	0.198	0.196	0.201	0.198	0.197	0.136
Mediana	0.270	0.268	0.269	0.270	0.269	0.269	0.224
Media	0.296	0.296	0.297	0.296	0.296	0.297	0.281
3° cuartil	0.360	0.363	0.366	0.362	0.363	0.363	0.362
Máximo	1.168	1.174	1.186	1.171	1.178	1.181	1.100
Desviación	0.139	0.143	0.145	0.140	0.142	0.145	0.208

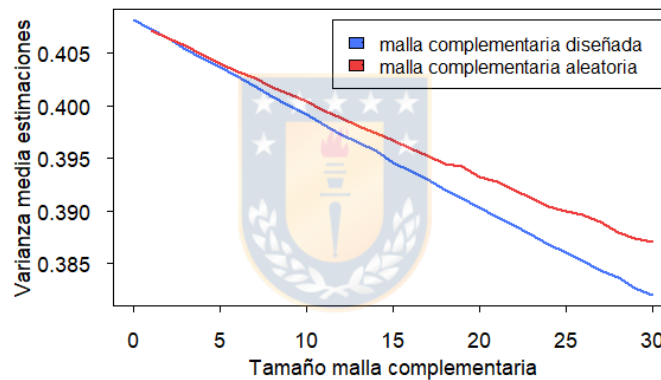


Figura 14. Varianza media de las distintas mallas complementarias para las 100 simulaciones de la base de datos.

Se calcula la categorización de recursos empleando las consideraciones mencionadas en el ANEXO B. Con estos límites para la clasificación de recursos se observa que tanto mallas complementarias diseñadas con el algoritmo de búsqueda como las mallas complementarias aleatorias presentan una porción muy reducida de recursos en la categoría de medidos, y los recursos clasificados como indicados son mucho menores en comparación a los demás casos de estudio, tabla 13. Para todas las mallas evaluadas los recursos entregados por mallas complementarias aleatorias son ligeramente mayores a los de las mallas complementarias diseñadas.

Con esta clasificación de recursos se presentan los resultados del análisis económico realizado para los distintos tamaños de mallas complementarias utilizando los parámetros físicos y económicos disponibles en el ANEXO C.

Tabla 13. Categorización de la estimación de las 100 simulaciones realizadas para distintos tamaños de mallas complementarias.

	Mallas complementarias diseñadas					
	Medidos		Indicados		Inferidos	
Tamaño malla complementaria	Tonelaje [Mton]	Ley media [%]	Tonelaje [Mton]	Ley media [%]	Tonelaje [Mton]	Ley media [%]
10 muestras	3.605	0.306	11.761	0.302	39.447	0.293
20 muestras	3.857	0.305	13.036	0.301	37.919	0.293
30 muestras	4.143	0.305	14.794	0.300	35.876	0.294
	Mallas complementarias aleatorias					
	Medidos		Indicados		Inferidos	
Tamaño malla complementaria	Tonelaje [Mton]	Ley media [%]	Tonelaje [Mton]	Ley media [%]	Tonelaje [Mton]	Ley media [%]
10 muestras	3.871	0.307	12.270	0.303	38.672	0.293
20 muestras	4.390	0.305	13.563	0.300	36.859	0.293
30 muestras	4.899	0.305	14.842	0.301	35.072	0.294

Tabla 14. Beneficios para distintos tamaños de mallas complementarias diseñadas y mallas complementarias aleatorias.

	Mallas complementarias diseñadas			Mallas complementarias aleatorias		
Tamaño malla complementaria	10 muestras adicionales	20 muestras adicionales	30 muestras adicionales	10 muestras adicionales	20 muestras adicionales	30 muestras adicionales
Ingresos [MUSD]	129.371	140.857	157.121	138.085	148.775	165.454
Costos [MUSD]	93.817	102.466	114.769	100.291	108.594	120.684
Beneficios [MUSD]	35.555	38.391	42.352	37.794	40.182	44.771
Ley media [%]	0.524	0.522	0.519	0.521	0.519	0.520
Recursos [Mton]	4.499	4.919	5.516	4.812	5.218	5.797

Para todos los tamaños de mallas diseñadas, las mallas complementarias aleatoria presentan un beneficio económico aproximadamente 2 [MUSD] superior a las mallas complementarias diseñadas.

7.3 Análisis de resultados

En todos los casos de estudio el valor máximo de las estimaciones realizadas es mayor al de los datos reales. Esto es causado por el uso de la retransformación no sesgada para llevar la variable a escala de los datos reales, la cual permite mantener la media de la distribución de los datos, pero al ser muy dependiente del modelo de variograma escogido puede generar valores altos aberrantes.

Respecto a la varianza media de la estimación para distintas mallas complementarias, esta disminuye de forma más rápida para las mallas complementarias diseñadas con el algoritmo de búsqueda. En el caso de baja continuidad se da la situación en la que las mallas complementarias aleatorias compuestas de pocas muestras entregan una varianza media de las estimaciones que es menor a la de mallas complementarias diseñadas, esto es debido al corto alcance del modelo de variograma, que hace poco relevante la posición de las muestras iniciales, pero esto cambia a medida que la malla complementaria aumenta su tamaño, ya que al aumentar la densidad de la malla de muestreo, se requerirá la optimización de las muestras para observar resultados con la adición de un punto a la malla.

Tabla 15. Reducción de la varianza media de las estimaciones (en porcentaje [%]) para mallas complementarias compuestas de 30 puntos adicionales respecto a la situación inicial.

Caso de estudio	Mallas diseñadas	Mallas aleatorias
Alta continuidad	10.237	7.566
Baja continuidad	6.447	6.287
Pepita grande	7.118	5.528
Omnidireccional	6.395	5.152

Para los casos de anisotropía, las mallas complementarias generadas con el algoritmo de búsqueda presentan una menor proporción de recursos medidos y una mayor proporción de recursos indicados que las mallas complementarias aleatorias, ya que estas últimas generan una mayor aglomeración de los puntos adicionales. Con respecto al caso omnidireccional, se observa una pequeña cantidad de recursos medidos e indicados. Esto se debe a que para definir un bloque como recurso medido, este debe tener una varianza de estimación menor o igual a la máxima varianza encontrada en un cuadrado de 40x40 [m] con observaciones conocidas en sus vértices. Y el variograma al ser isótropo aumenta en gran medida la exigencia para catalogar los bloques como medidos, en comparación a los otros casos de estudio.

Estas diferencias en la categorización de recursos son notadas al momento de análisis económico de los escenarios creados. En el que el caso de alta continuidad presenta mayores beneficios para

las mallas complementarias diseñadas, mientras que para el caso de efecto pepita las mallas complementarias aleatorias reportan un mayor beneficio. Sin embargo, como se mencionó en la sección anterior, las mallas complementarias aleatorias incurren en mayores errores a la hora de la estimación de recursos y esta diferencia en los ingresos se puede deber a recursos mal clasificados. Al contar con los valores de la base de datos en todos los puntos estimados y la ley de corte es posible comparar el porcentaje de aciertos de la clasificación estéril-minerales de los bloques estimados para los distintos tipos de mallas complementarias.

Tabla 16. Tasa de positividad en la clasificación de estéril-mineral y tasa de positividad global para las estimaciones realizadas a partir de mallas complementarias compuestas de 30 puntos adicionales.

Caso de estudio	Mallas complementarias diseñadas			Mallas complementarias aleatorias		
	Aciertos mineral [%]	Aciertos estéril [%]	Aciertos globales [%]	Aciertos mineral [%]	Aciertos estéril [%]	Aciertos globales [%]
Alta continuidad	58.198	80.299	74.485	57.393	79.148	73.426
Baja continuidad	44.154	71.539	64.407	43.970	70.486	63.580
Pepita grande	37.795	70.666	62.434	37.848	69.755	61.764
Omnidireccional	46.228	80.160	71.370	44.383	80.116	70.860

En la tabla 16 se aprecia que ambos tipos de mallas complementarias poseen una tasa de aciertos similar, siendo los aciertos para las mallas complementarias diseñadas mínimamente superiores a los aciertos de las mallas aleatorias. La tasa de aciertos para el estéril es mucho mayor que para la de mineral, fluctuando entre un 70-80 [%], mientras que para la clasificación de mineral, la tasa de positividad es de aproximadamente 50 [%]. Esto se debe al efecto de suavizamiento del kriging, puesto que las zonas que contienen bloques clasificados como mineral son reducidas, se presentan errores en las zonas “límites” con el estéril, donde se tienen los bloques mal estimados ya que no es posible estimar esta frontera de forma adecuada, sin embargo, se logran identificar las zonas de mineral y estéril de buena forma.

Por otra parte, al observar la tasa de aciertos según el tamaño de la malla complementaria, ANEXO D, la tasa de aciertos aumenta marginalmente, manteniéndose casi constante, a medida que lo hace el tamaño de la malla complementaria. Para el caso de alta continuidad, la tasa de aciertos respecto a la clasificación de minerales para la estimación proveniente de la situación inicial es de un 54.98 [%]. Esta tasa de aciertos aumenta a 58.19 [%] y 57.39 [%] para mallas complementarias diseñadas y aleatorias de tamaño 30, respectivamente.

Debido al efecto de suavizamiento del kriging, no se realiza una comparación del beneficio económico por bloques, pero como se cuenta con la información verdadera de cada bloque

estimado, es posible calcular el error cuadrático medio cometido por las estimaciones de las distintas mallas complementarias empleadas a los casos de estudio.

Tabla 17. Error cuadrático medio de las 100 estimaciones de las bases de datos para distintos tamaños de mallas complementarias.

Tamaño malla complementaria	Mallas complementarias diseñadas			Mallas complementarias aleatorias		
	10 puntos	20 puntos	30 puntos	10 puntos	20 puntos	30 puntos
Caso alta continuidad	0.201	0.194	0.190	0.208	0.203	0.202
Caso baja continuidad	0.268	0.263	0.256	0.276	0.274	0.275
Caso efecto pepita grande	0.333	0.324	0.317	0.339	0.344	0.335
Caso omnidireccional	0.207	0.204	0.201	0.210	0.208	0.205

Al contrastar el error cuadrático medio de las estimaciones para los distintos tamaños de mallas complementarias este es pequeño para ambos tipos de mallas, sin embargo, se aprecia que las mallas complementarias diseñadas presentan una mejora mayor en comparación a las mallas complementarias aleatorias. Por ejemplo, para el caso de alta continuidad, para mallas complementarias de tamaño 30, las mallas diseñadas presentan una reducción de un 10.35 [%] del error cuadrático medio respecto a la situación inicial y las aleatorias una mejora de 4.73 [%]. La mejora producida por mallas complementarias aleatorias es lograda con una malla complementaria diseñada compuesta por 8 muestras adicionales, para el caso de baja continuidad, la mejora proporcionada por mallas complementarias aleatorias de tamaño 30 es producida por mallas complementarias diseñadas de tamaño 3 puntos adicionales.

Al igual que con la varianza media de las estimaciones, se espera que esta diferencia aumente con el tamaño de las mallas complementarias. Asimismo, al observar el comportamiento del error cuadrático de forma gráfica para los distintos tamaños de mallas complementarias, ANEXO E, las mallas complementarias aleatorias presentan un error mucho más errático para cada malla generada.

Las mallas complementarias aleatorias presentan ingresos iguales o superiores a las mallas complementarias diseñadas. Sin embargo, las observaciones permiten inferir que los ingresos adicionales de las mallas complementarias aleatorias se deben a la mayor sobreestimación de valores.

8. Caso Real

8.1 Descripción de la base de datos

La base de datos se compone de 7997 observaciones. Estas observaciones contienen información de 3 variables de posición que abarcan una superficie de 1800 [m] en la dirección Este, 1250 [m] en la dirección Norte y 110 [m] con respecto a la Cota, como se muestra en la figura 15. Las observaciones están dispuestas en una franja que recorre la zona de estudio en dirección Noreste - Suroeste. Además, en cada punto de la base de datos se dispone de información de 2 variables continuas que caracterizan leyes minerales, las cuales son: “Cu”, cuyo valor es el porcentaje ([%]) de cobre contenido en una observación y “Au”, que corresponde a la ley de oro en las muestras en partes por millón ([ppm]). Y 1 variable categórica denominada como “Dominio”, que divide a las observaciones en 4 dominios geológicos.

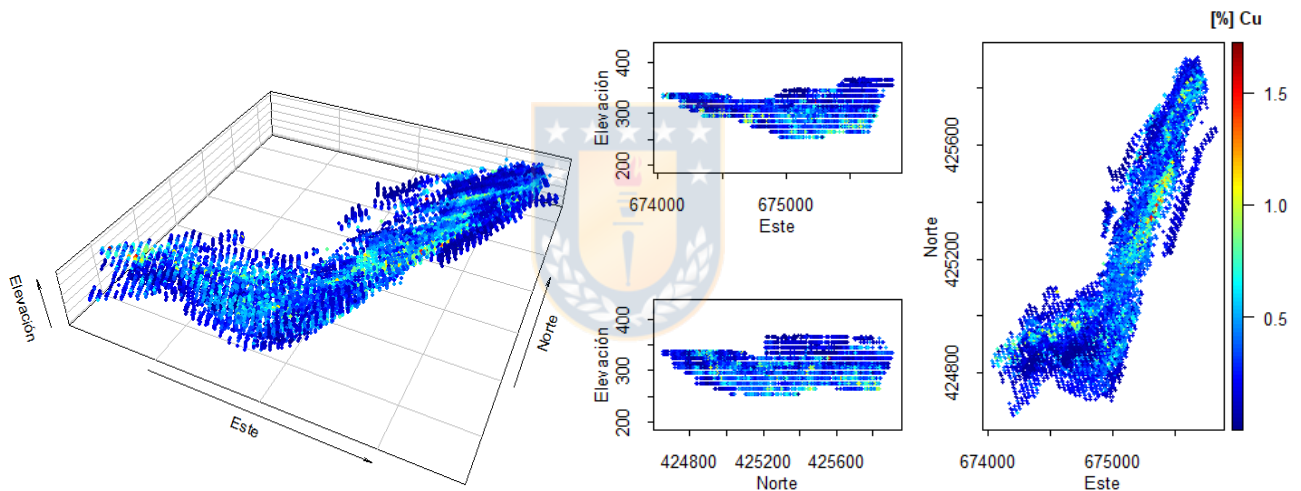


Figura 15. Vista tridimensional para leyes de cobre

Con respecto a los dominios presentes. En el ANEXO F se observa que el dominio 1 se encuentra en la zona noreste de la propiedad, el dominio 2 está situado en la parte suroeste de la propiedad, la mayor parte de los valores del dominio 3 se encuentran en la parte inferior de la base de datos y el dominio 4 está ubicado en la zona central. Se observa que las leyes de cobre tienden a aumentar a medida que lo hace la profundidad, el mismo efecto se puede apreciar para las leyes de oro, ANEXO F.

8.2 Análisis descriptivo preliminar

A continuación se presentan los principales parámetros estadísticos de los puntos que componen a la base de datos. La base de datos presenta 7 datos duplicados, los cuales son removidos antes de realizar el análisis estadístico de los datos.

Tabla 18. Estadísticas descriptivas de variables continuas en la base de datos.

	Este [m]	Norte [m]	Cota [m]	Cobre [%]	Oro [ppm]
Mínimo	674036.200	424650.900	255.000	0.001	0.000
Primer cuartil	674792.600	424916.700	295.000	0.172	0.120
Mediana	675077.900	425136.900	315.000	0.320	0.245
Media	675054.000	425209.500	310.883	0.352	0.320
Tercer cuartil	675378.200	425493.300	325.000	0.480	0.429
Máximo	675832.400	425907.700	367.500	1.720	3.700
Desviación	395.701	331.577	22.163	0.229	0.281

Tabla 19. Frecuencia de datos en los distintos dominios.

Dominios	Frecuencia
1	2166
2	2347
3	903
4	2574

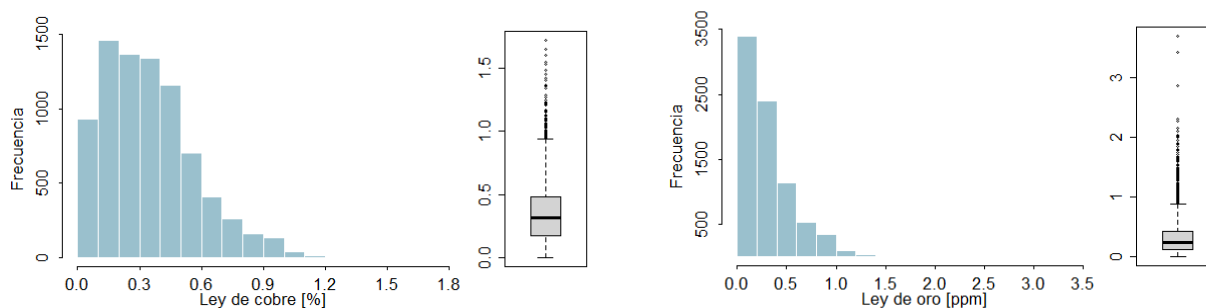


Figura 16. Histogramas y boxplot de leyes de la base de datos, cobre a la izquierda y oro a la derecha.

En la tabla 20, se observa una relación nula de las coordenadas espaciales Este y Norte con las leyes minerales y una correlación muy débil con respecto a la elevación. Además, se advierte la

existencia de una correlación débil entre los valores de cobre y oro. Al examinar la nube de correlación entre sus valores, ver ANEXO G, se aprecia que es una correlación lineal.

Tabla 20. Matriz de correlación entre variables continuas.

variable	Este	Norte	Elevación	Au	Cu
Au	0.037	-0.008	-0.198	1.000	0.778
Cu	0.083	0.061	-0.289	0.778	1.000

En la figura 16 se observa que el oro posee un histograma sesgado a la izquierda y valores atípicos mucho más alejados de la media de su distribución. Lo que causa que los valores de oro presenten una mayor variabilidad que los de cobre.

Los histogramas y gráficos de caja de las variables de cobre y oro por dominios, ANEXO G, corroboran la correlación entre estas dos variables para cada uno de los dominios por separado. Los dominios 1,2 y 4 presentan una cantidad similar de valores y distribuciones semejantes, mientras que el dominio 3 tiene aproximadamente la mitad de observaciones y cuenta con las leyes más altas de la base de datos, tanto para el cobre como para el oro. Además, en ambas variables el primer cuartil de las leyes del dominio 3 tiene un valor superior a la ley media presente en todo el yacimiento.

Para la aplicación de mallas de muestreo complementarias se utilizan los datos correspondientes a la superficie de la base real. Para la selección de este subconjunto se inscriben los puntos de la base de datos dentro de bloques con dimensiones de 20x20 [m²] en planta y 10 [m] de profundidad y se seleccionan los datos dentro de los bloques más superficiales con información. Se escoge este tamaño de bloques, ya que es el que será utilizado para la estimación de recursos en las secciones posteriores. Así, la superficie está compuesta por 2720 observaciones, las cuales cuentan con las siguientes estadísticas descriptivas.

Tabla 21. Estadísticas básicas de las variables continuas en la superficie.

	Este [m]	Norte [m]	Cobre [%]	Oro [ppm]
Mínimo	674036.200	424650.900	0.001	0.000
Primer cuartil	674728.100	424902.600	0.150	0.107
Mediana	675068.800	425122.700	0.279	0.223
Media	675029.600	425203.100	0.311	0.300
Tercer cuartil	675374.100	425496.700	0.435	0.400
Máximo	675832.400	425907.700	1.652	3.430
Desviación	422.214	336.810	0.202	0.273

Tabla 22. Frecuencia de datos por dominio en los datos superficiales.

Dominios	Frecuencia
1	949
2	1040
3	96
4	635

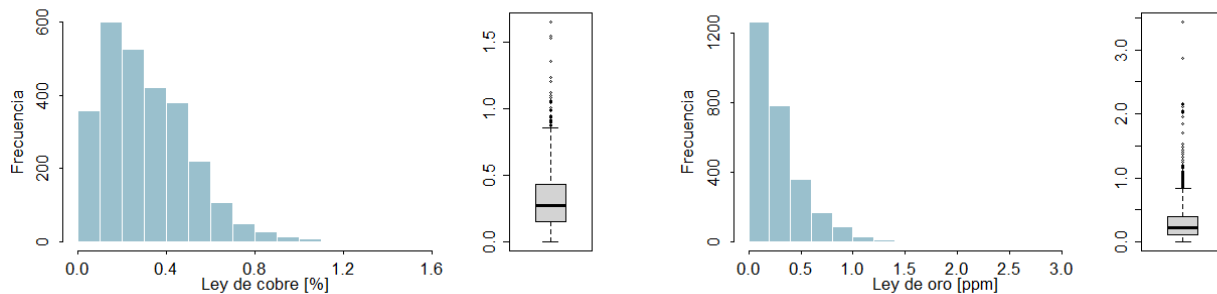


Figura 17. Histogramas y boxplot de leyes de la superficie, cobre a la izquierda y oro a la derecha.

Para el análisis de datos y trabajo posterior se desprecia la dimensión vertical debido a su reducida magnitud en comparación a la extensión de la variable en las coordenadas Este y Norte del espacio. De esta forma, se considera que los datos están situados en un plano.

Los datos superficiales presentan estadísticos ligeramente inferiores a los de la base completa, ya que cuenta con una reducida cantidad de puntos provenientes del dominio 3. Como se aprecia en la tabla 22, solo cuenta con 96 observaciones pertenecientes a este dominio. Lo que es esperable en un depósito mineral, en el que las mayores leyes se encuentran a una mayor profundidad, siendo la mayoría de los datos de la superficie pertenecientes a los dominios 1 y 2, cuyas distribuciones son similares a los de la base de datos completa. Al observar los histogramas de leyes de los datos pertenecientes a la superficie, estos presentan una distribución semejante a la de la base completa. Además, la matriz de correlación entre los puntos superficiales mantiene los valores que tiene la base completa.

Tabla 23. Correlación de variables continuas en la superficie.

	Este	Norte	Cobre	Oro
Cobre	-0.192	-0.184	1.000	0.763
Oro	-0.065	-0.103	0.763	1.000

8.3 Aplicación

El estudio consiste en realizar dos etapas de muestreo. En la primera etapa se decide tomar 80 muestras de forma aleatoria, lo que permite lograr un modelamiento más detallado del variograma cerca del origen, que es la parte más importante a la hora de realizar las estimaciones [4]. A continuación se presentan las principales estadísticas descriptivas de las muestras iniciales.

Tabla 24. Estadísticas descriptivas de las 80 muestras iniciales.

Variable	Mínimo	1° cuartil	Mediana	Media	3° cuartil	Máximo	Desviación
Cobre [%]	0.035	0.134	0.240	0.299	0.434	0.998	0.207
Oro [ppm]	0.022	0.100	0.190	0.278	0.378	1.400	0.276

Las muestras iniciales no presentan valores inusuales, además, sus leyes máximas no son excesivamente altas, por lo que se decide conservar estos valores que representan la variabilidad inherente del depósito. Asimismo, las distribuciones de cobre y oro siguen el mismo patrón que el observado para la base de datos completa, ANEXO H.

Se considera al cobre como el producto principal, de manera que el diseño de mallas complementarias y clasificación de recursos se realizará en base a lo observado para esta variable, mientras que las leyes de oro se estimarán como un producto secundario. Por esto, luego de la estimación de recursos las leyes de oro serán transformadas a su equivalente en leyes de cobre para el posterior análisis económico, ANEXO B.

Para evaluar la existencia de anisotropías se calculan variogramas experimentales direccionales en las direcciones de 0 a 90° cada 22.5° y se ajustan modelos esféricos, exponenciales y gaussianos a todos estos modelos experimentales. Los resultados de la validación cruzada permiten determinar que el modelo de variograma que se ajusta de mejor forma a los requisitos de este estudio es un modelo esférico con eje de anisotropía de 45 – 135°, figura 18, con un efecto pepita de 0.188, un alcance de 230 [m] y mese de 0.377 en la dirección de 45° y para la dirección de 135° un alcance de 130 [m] y una meseta de 0.396. Los resultados de la validación cruzada se encuentran en el ANEXO I.

Con el modelo de variograma ajustado se procede a la implementación de la segunda etapa de muestreo. Se generan mallas complementarias diseñadas con el pseudocódigo presentado en la metodología y mallas complementarias aleatorias hasta un tamaño máximo de 30 puntos adicionales, con el fin de encontrar los tamaños de mallas complementarias que entregan el mejor, peor y más probable beneficio económico utilizando las estimaciones provenientes de estas mallas

complementarias. La distribución de las mallas complementarias para 30 muestras adicionales en ambos casos se presenta en las figuras 19 y 20.

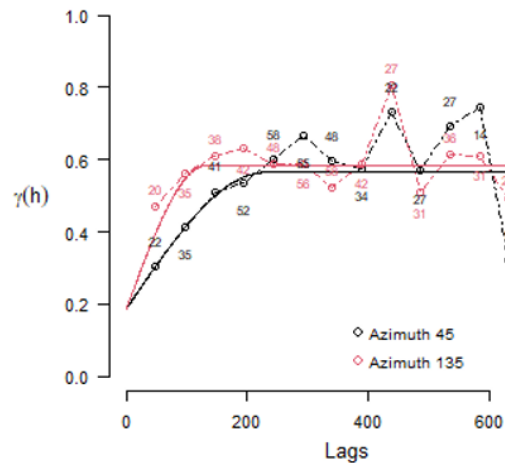


Figura 18. Variograma experimental direccional y modelo esférico ajustado.

Las mallas complementarias diseñadas logran una distribución homogénea de las muestras y una cobertura de las zonas con altos valores de varianza, lo que favorecerá la futura clasificación de recursos. Por otra parte, para las mallas complementarias aleatorias, la mayor aglomeración de las muestras y las zonas sin una cobertura espacial adecuada permiten esperar una mayor cantidad de recursos en las categorías de medidos e inferidos.

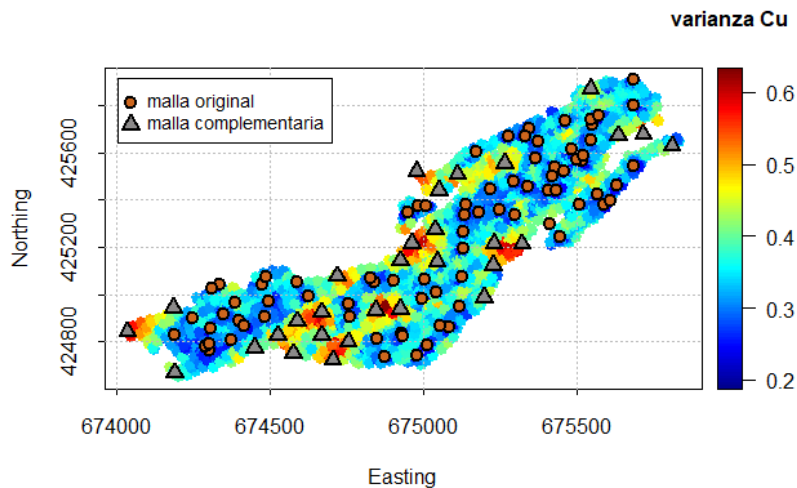


Figura 19. Malla complementaria diseñada compuesta por 30 muestras encontradas con el algoritmo de búsqueda.

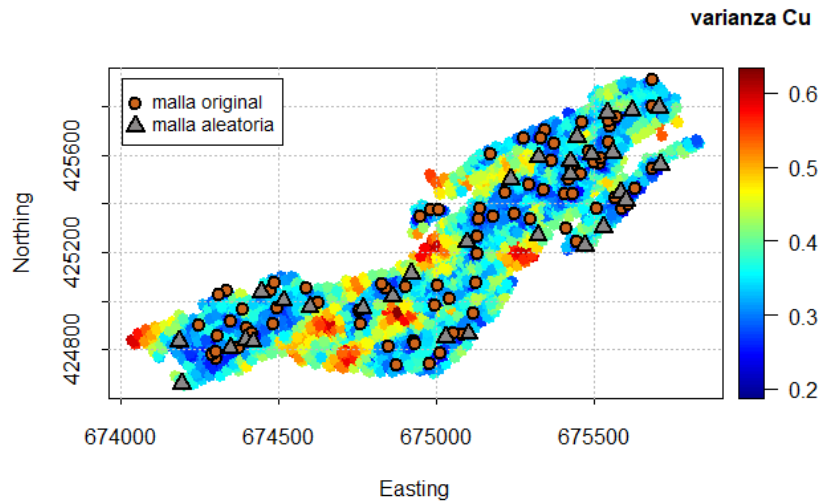


Figura 20. Malla complementaria aleatoria compuesta de 30 muestras.

Con las mallas complementarias se procede a la estimación y posterior categorización del modelo de bloques del área en estudio. El modelo de bloques consta de 4015 bloques a estimar, los cuales se representan mediante su centroide. Cada bloque tiene unas dimensiones de 20x20 [m²] en planta y 10 [m] respecto a la cota.

Las estimaciones provenientes de mallas complementarias diseñadas con el algoritmo de búsqueda presentan una mayor homogeneidad en sus valores, con estadísticos de posición similares. Mientras que las distribuciones creadas con mallas complementarias aleatorias son similares, pero presentan una mayor desviación en sus valores, figura 21. Las distribuciones se presentan con mayor detalle en el ANEXO J.

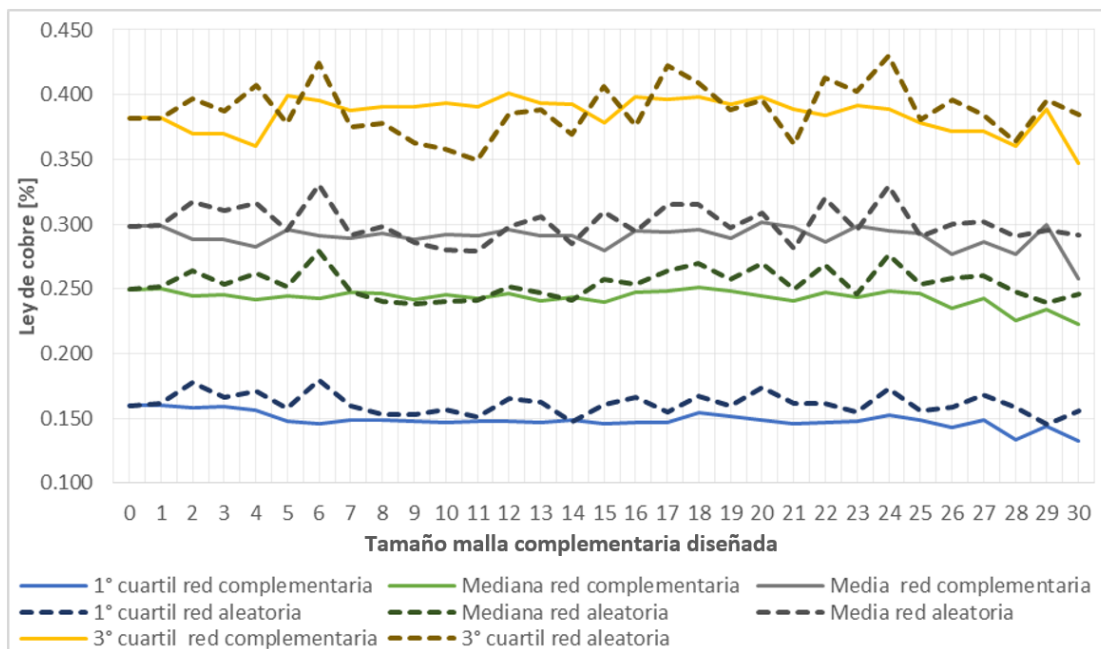


Figura 21. Estadísticos de posición de leyes de cobre estimadas para distintos tamaño de mallas complementarias.

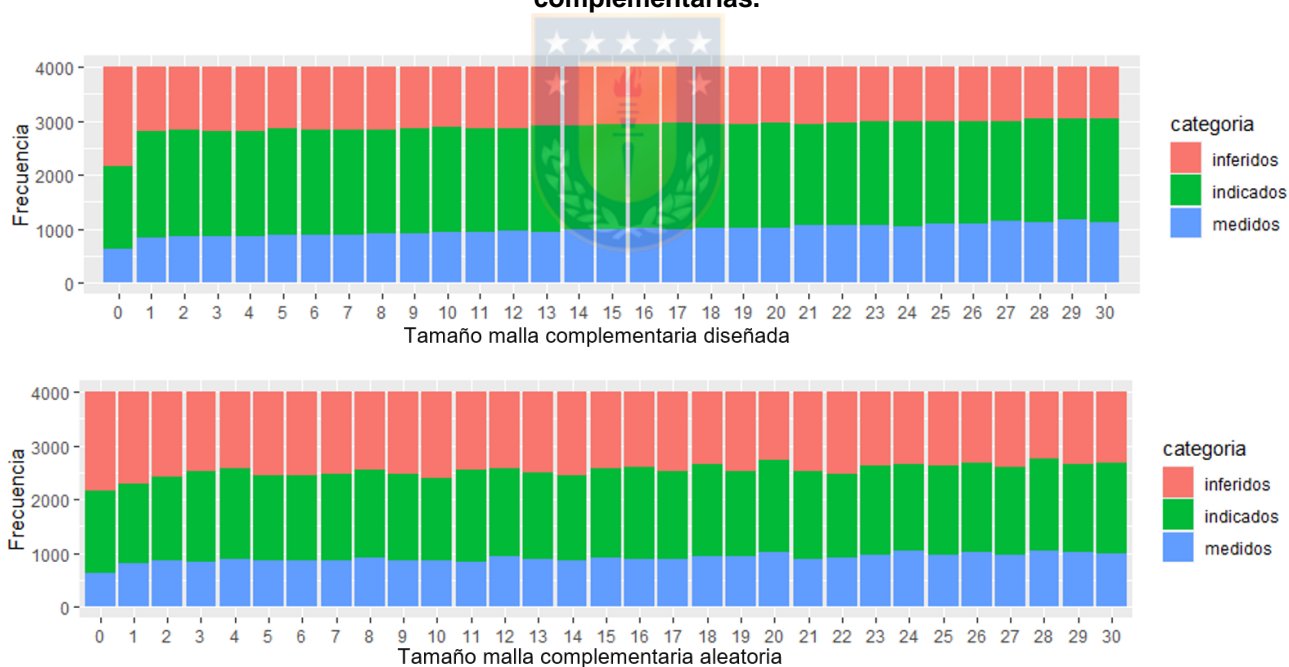


Figura 22. Clasificación de recursos para estimaciones generadas a partir de mallas complementarias diseñadas y mallas complementarias aleatorias.

Los recursos medidos e indicados aumentan ligeramente con cada muestra añadida para el caso de mallas complementarias diseñadas. Para mallas complementarias aleatorias se observa el mismo comportamiento con una mayor desviación.

Con el propósito de realizar un análisis económico de los resultados se asumen los parámetros físicos y económicos indicados en el ANEXO C. Esto da como resultados una ley de corte de 0.355% para el cobre. Solo se consideran valores provenientes de recursos medidos e indicados, debido a su mayor confiabilidad. De esta forma, se presentan el mejor, peor y más probable casos económicos para las distintas mallas complementarias, el cual se escoge de acuerdo al beneficio económico obtenido a partir de las estimaciones provenientes de los distintos tamaños de mallas complementarias.

Tabla 25. Utilidades presentadas por el mejor, peor y caso más probable para las distintas mallas complementarias para los recursos medidos e indicados por sobre la ley de corte.

Caso y tamaño malla complementaria	Mallas complementarias			Mallas aleatorias		
	Mejor caso (malla 29)	Peor caso (malla 2)	Más probable (malla 26)	Mejor caso (malla 17)	Peor caso (malla 11)	Más probable (malla 25)
Ingresos [MUSD]	884.463	662.380	781.177	807.364	622.021	736.303
Costos [MUSD]	450.985	357.226	429.051	410.227	335.855	389.925
Beneficios [MUSD]	433.478	305.154	352.126	397.137	286.165	346.377
Ley media [%]	0.852	0.786	0.766	0.856	0.785	0.807
Recursos [Mton]	19.051	15.466	18.716	17.302	14.548	16.751

La mejor malla complementaria diseñada creada con el algoritmo de búsqueda entrega estimaciones que generan beneficios de 433 [MUSD], los cuales son un 9.15 [%] mayores a los obtenidos con mallas complementarias aleatorias. Adicionalmente, se presenta la curva tonelaje-ley de las estimaciones generadas a partir de las mallas complementarias diseñadas con el algoritmo de búsqueda con leyes equivalentes de cobre.

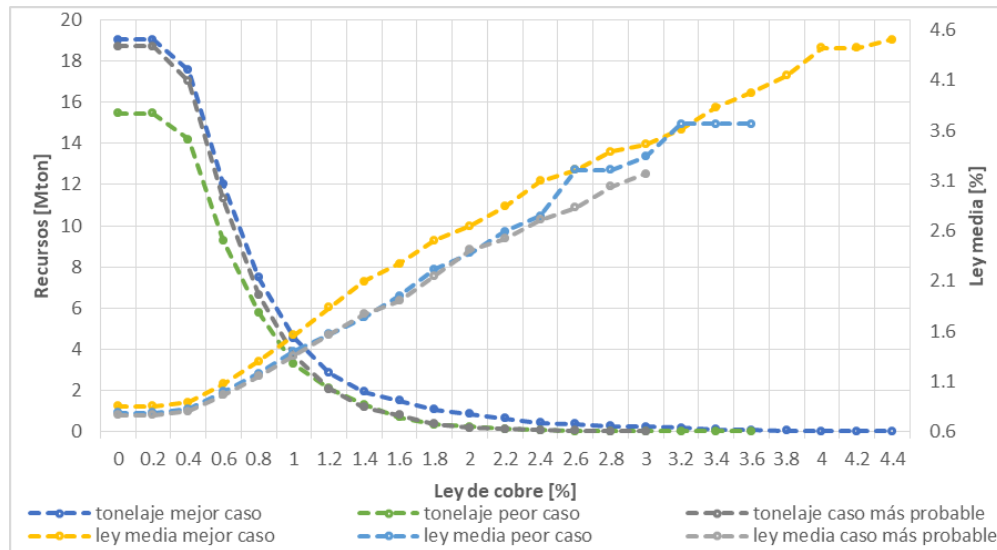


Figura 23. Curva tonelaje - ley las estimaciones realizadas a partir de las mallas complementarias que producen el mejor, peor y más probable ingresos económicos, tanto para mallas complementarias diseñadas y aleatorias.

8.4 Análisis de resultados

Los recursos medidos provenientes de las estimaciones realizadas a partir de mallas complementarias aleatorias se encuentran aglomerados, consiguiendo una distribución poco óptima de las muestras adicionales. Mientras que para mallas complementarias diseñadas se observa un mayor aumento de recursos indicados. Se obtendría una mayor cantidad de recursos indicados si se utilizaran mallas regulares para la totalidad de las muestras, pero no se lograría modelar la curva de variograma para distancias cortas con mayor detalle.

Al observar los gráficos de caja de las variables estimadas para los distintos tamaños de mallas complementarias, ANEXO J, en las mallas complementarias diseñadas no se presentan valores aberrantes de leyes de cobre, para las leyes de oro en la malla complementaria número 26 se encuentra una ley de oro con un valor estimado superior a 10 [ppm]. No obstante, al verificar la ubicación del punto, este se encuentra ubicado en un lugar con un alto valor de varianza de estimación y no tiene una cobertura adecuada por la malla complementaria diseñada, por lo que no se debe confiar en este valor en caso de posibles clasificaciones de recursos.

Al realizar la estimación de recursos con las 80 muestras pertenecientes a la malla original, el modelo de bloques estimado tiene una varianza media de estimación de 0.428. Al realizar la estimación la malla complementaria diseñada compuesta de 30 observaciones nuevas, la varianza media desciende a 0.395, presentando una reducción de un 7 [%], mientras que la varianza media de las

estimaciones para mallas complementarias aleatorias es de 0.404. Una varianza media de estimación de 0.404 es lograda con una malla complementaria diseñada compuesta de 20 puntos adicionales.

Los recursos medidos e indicados estimados con las 80 muestras iniciales se cuantifican en 23.296 [Mton]. Con una malla complementaria diseñada de 30 muestras adicionales se obtienen 29.516 [Mton] al sumar los recursos medidos e indicados, ANEXO K.

Al igual que para el caso simulado, se aprecia que la diferencia entre la efectividad de los dos tipos de mallas aumenta con el tamaño de la red, pero en este caso la diferencia es mayor debido a la mayor densidad de muestras sobre el área en estudio. Con un diseño hipotético de mallas complementarias hasta un tamaño máximo de 60 muestras adicionales, las mallas complementarias diseñadas logran una varianza media de 0.375, mientras que las mallas complementarias aleatorias logran un mínimo de 0.392, valor que es alcanzado con una malla complementaria diseñada de 32 observaciones adicionales, ANEXO J.

En cuanto al análisis económico realizado, el mejor caso para mallas complementarias diseñadas entrega un beneficio un 9.15 [%] mayor al mejor caso de mallas complementarias aleatorias, el peor caso tiene beneficios un 6.63 [%] mayores para mallas complementarias diseñadas y el caso más probable entrega beneficios un 1.66 [%] superiores a las mallas complementarias aleatorias.

Si se utilizan los datos reales para comparar el error cuadrático medio de las mallas que entregan el mejor, peor y más probable casos, se observa que este es similar para las distintas mallas complementarias diseñadas con el pseudocódigo, tabla 26.

Tabla 26. Error cuadrático medio de los distintos casos económicos para mallas creadas con el algoritmo de búsqueda.

	Mejor caso	Peor caso	Más probable
Cobre	0,228	0,239	0,230
Oro	0,306	0,300	0,292

En todos los casos económicos no se considera la remoción de estéril y la dilución producto de un diseño minero, lo que disminuye los costos y no representa los ingresos reales, solo una aproximación. Sin embargo, se encuentra la evidencia suficiente para justificar siguientes etapas de prospección, como etapas de muestreo adicionales o la implementación de sondajes de explotación. Adicionalmente a los datos presentados en este reporte, la incorporación de variables geológicas y la experiencia y conocimientos de un geólogo permitiría sospechar la existencia de mayores leyes en la parte inferior del depósito, las cuales corresponden al dominio 3, resaltando el importe rol que

juegan la integración de los conocimientos geológicos y las técnicas geoestadísticas, lo cual puede producir graves errores si no es logrado de forma adecuada [30].

9. Discusiones y conclusiones

Dada la naturaleza de las anisotropías se pueden obtener mejoras en la varianza media de las estimación al ubicar las muestras nuevas en posiciones específicas en lugar de realizar un diseño de mallas regular, de modo que si se cuenta con evidencia suficiente de la existencia de una anisotropía y se tienen las capacidades técnicas para elaborar un muestreo en base a un variograma anisótropo, se podrán obtener los beneficios de aplicar mallas irregulares, esto también depende de la etapa del estudio en la que se encuentra el proyecto, ya que en etapas tempranas es necesaria una cobertura completa del área.

Respecto a los estadísticos en la estimación de los modelos de bloques del caso simulado, estos disminuyen su precisión a medida que la información entregada por cada muestra recolectada es menor, siendo las estimaciones más exactas las provenientes de variogramas isótropos y las menos precisas las provenientes de variogramas con efecto pepita grande, las cuales presentan los errores más groseros. La sobreestimación se debe en parte a la retransformación no sesgada del logaritmo de los datos originales, la cual es sensible a la varianza de las estimaciones [16], pero esta transformación permite conservar de mejor forma la distribución original de la variable.

Mientras mayor es el coeficiente de anisotropía de la variable estudiada, la varianza de estimación juega un rol más importante en la determinación de la ubicación de las muestras adicionales. Así, para el caso de estudio de variogramas isótropos (considerando los criterios para el diseño de mallas empleados en este caso de estudio) se obtendrían resultados similares al utilizar como criterio para el diseño de las mallas solo mantener la distancia entre las muestras añadidas. Mientras que para el caso de anisotropía de alta continuidad, al tener un gran alcance en una dirección, la varianza del punto evaluado tiene una mayor participación al momento de determinar la ubicación de los puntos adicionales.

Para los casos de baja continuidad y efecto pepita grande, al tener un menor alcance en su variograma en proporción al área de estudio, la posición de las muestras se debe en gran medida al criterio de separación entre las muestras para mantenerlas alejadas entre sí, ya que si solo se tomara en cuenta la varianza de estimación, como la distancia de separación es mayor al alcance del variograma en una parte de los puntos adicionales, la posición de las muestras sería más errática [31]. Estos resultados permiten concluir que con estos dos criterios optimizados de manera conjunta

se tiene una forma confiable de ubicar las muestras independientemente del modelo de variograma que tiene la variable aleatoria, o de los errores que se produzcan en la etapa de modelamiento del variograma.

En el caso simulado se observa que la varianza media de las estimaciones para mallas complementarias diseñadas de tamaño 30 es ligeramente menor a la varianza media de las estimaciones provenientes de mallas complementarias aleatorias y no se aprecia un beneficio considerable. Esto ocurre debido a que la zona de estudio creada para el caso simulado es extensa y la mayoría de las muestras adicionales producen una mejora en los resultados. Sin embargo, el gradiente con el que disminuye la varianza media de las estimaciones provenientes de mallas complementarias diseñadas es mayor al de mallas complementarias aleatorias, por lo que se infiere que para mallas de mayor tamaño la diferencia será más notoria. Esto se demuestra en el caso real de estudio, en el cual la densidad de muestras por área es mayor y los resultados de las mallas complementarias diseñadas son superiores en mayor medida a los de mallas complementarias aleatorias, teniendo estas últimas una mejora marginal a partir de mallas complementarias de tamaño 30, mientras que las mallas complementarias diseñadas mantienen una mejora constante. De esta forma, cuanto mayor sea la cantidad de muestras a recolectar, se requerirá un estudio más exhaustivo para determinar sus posiciones de forma óptima. A esta consideración también se suma el alcance del modelo de variograma de la variable de interés, como es en el caso de baja continuidad, en el cual para mallas complementarias de tamaño reducido, las mallas complementarias aleatorias presentan una varianza de estimación menor a las mallas complementarias diseñadas, sin embargo, el gradiente con el que disminuye la varianza de estimación de estas últimas es mayor, como en todos los casos de estudio.

Debido a las diferencias observadas en la categorización de recursos para el caso omnidireccional respecto a los demás casos de estudio, se resalta la gran importancia y responsabilidad que asume la persona competente encargada de esta parte del estudio, ya que dependiendo del método y la exigencia impuesta para la clasificación de los datos se obtendrán resultados disímiles. Además, con el algoritmo de búsqueda se tiene como restricción mantener la distancia entre los puntos muestrales, a diferencia de las mallas complementarias aleatorias que permiten una mayor aglomeración de muestras y, por ende, una mayor clasificación de recursos en la categoría de medidos.

Para el caso simulado, los ingresos provenientes de las estimaciones de mallas complementarias diseñadas son similares o inferiores a los de las mallas complementarias aleatorias. Pero en el caso real, donde la densidad de muestras por área es mayor, las mallas complementarias diseñadas presentan un beneficio económico superior a las mallas complementarias aleatorias. Así, una mejora

en la varianza de estimación producirá mejores evaluaciones económicas de los modelos calculados. Esta mayor confiabilidad otorgada a las estimaciones propiciará tomar decisiones favorables respecto a la evaluación de un proyecto en curso.

Para el caso simulado, las mallas complementarias diseñadas producen un menor error cuadrático medio que disminuye de forma más rápida que el de mallas complementarias aleatorias, las cuales entregan un error cuadrático medio que presenta una variación errática al cambiar el tamaño de la malla utilizada, ANEXO E. Estas diferencias en el error producido deberían ser mayores en la realidad, ya que en este caso se trabaja con una versión simplificada de una variable real, en la cual tener grandes zonas sin toma de muestras producirá una mayor cantidad de impactos negativos.

En un sentido de aplicación es necesaria una buena cobertura espacial de área en estudio, por lo que se requiere del diseño de una malla específica para satisfacer las necesidades del estudio que se lleva a cabo. En este caso, como factor principal para definir la posición de las muestras adicionales se considera la separación de los puntos a la malla original, mientras que la varianza de estimación actúa como factor complementario. No obstante, se pueden diseñar mallas de muestreo con cualquier otro objetivo que el investigador a cargo defina, los cuales alterarán en gran medida los resultados obtenidos en cuanto a la distribución de las muestras [31]. La metodología utilizada en este caso para la construcción de las mallas de muestreo se puede resumir en los siguientes puntos:

- Definir los objetivos que se plantean conseguir con el estudio y realización de la toma de muestras, así como los criterios a utilizar para definir la ubicación de las muestras en la primera etapa de muestreo y en la etapa de muestreo complementario.
- Realizar una etapa inicial de muestreo aleatoria con el fin de recolectar información respecto al comportamiento de la variable de interés, sobre todo su comportamiento cercano al origen.
- Calcular el variograma experimental de las observaciones y ajustar un modelo teórico, para lo cual se debe considerar toda la información complementaria disponible y no solo los resultados de validación cruzada del ajuste de modelos de variograma.
- Con el modelo de variograma definido, calcular la varianza de estimación de las ubicaciones de interés para una posible etapa de muestreo complementaria.
- Gracias a estas varianzas calculadas, aplicar un algoritmo de convergencia para encontrar la mejor posición de una determinada cantidad de muestras complementarias a la malla original, se puede definir cualquier objetivo adicional, así como información extra.

Con la cual se pretende dar un mayor énfasis a la descripción del modelo de variograma de la variable regionalizada de interés a metodologías para el diseño de redes como las que se presentan en [32,37]

En un caso real, previo al despliegue de la primera etapa de muestreo, también se debe realizar una recolección de la información histórica del uso del suelo, de minas preexistentes y también de diversas variables complementarias, entre otros. Información que puede ayudar a encontrar una mejor distribución de las muestras en la primera etapa, así como mejorar la distribución de las muestras complementarias en la segunda etapa de muestreo. Este aspecto implica como trabajo futuro estudiar la incorporación de esta información, así como una mejor interpretación geológica en los parámetros del algoritmo de convergencia. También se debe estudiar el diseño de redes en etapas más avanzadas del estudio exploratorio en los que se requiera menos énfasis de la cobertura del terreno.



10. Referencias

- [8] ADMINISTRATORS, Canadian Securities. National Instrument 43-101. *Standards of Disclosure for Mineral Projects*, 2012, p. 43-101.
- [30] ANNELS, Alwyn E. *Mineral deposit evaluation: a practical approach*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [25] BRISEÑO-RUIZ, Jessica Vanessa; HERRERA-ZAMARRÓN, Graciela del Socorro; JÚNEZ-FERREIRA, Hugo Enrique. Método para el diseño óptimo de redes de monitoreo de los niveles del agua subterránea. *Tecnología y ciencias del agua*, 2011, vol. 2, no 4, p. 77-96.
- [10] CHILÈS, J. P.; DELFINER, P. Wiley series in probability and statistics. *Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty*, 2012, p. 705-14.
- [21] CASTILLA, Jorge; HERRERA, Juan. El proceso de exploración minera mediante sondeos. *ETS de ingenieros de minas de Madrid*, 2012.
- [33] CODE, J. O. R. C. Australasian code for reporting of exploration results, mineral resources and ore reserves. *AusIMM, Melbourne*, 2012, vol. 44.
- [12] CUADOR-GIL, José Q.; QUINTERO-SILVERIO, Arelys; ESTÉVEZ-CRUZ, Elmidio. La simulación condicional en Geoestadística. *Minería y Geología*, 2000, vol. 17, no 1, p. 47-50.
- [1] CLARK, Isobel; PLACE, A. Lower Grosvenor; OEN, London Sww. The art of cross validation in geostatistical applications. 1986.
- [15] DAVIS, Michael W. Production of conditional simulations via the LU triangular decomposition of the covariance matrix. *Mathematical geology*, 1987, vol. 19, no 2, p. 91-98.
- [28] DE ANDALUCÍA, Junta. Los criterios estándares para declarar un suelo contaminado en Andalucía y la metodología y técnicas de toma de muestras y análisis para su investigación. *Consejería de Medio Ambiente de Junta de Andalucía*, 1999.
- [12] DEUTSCH, C. V.; JOURNEL, A. G. GSLIB Geostatistical Software Library and User's Guide Second Edition: Oxford University Press. 1998.
- [26] DÍAZ-VIERA, Martín A.; CANUL-PECH, Félix. Diseño óptimo de la red de monitoreo del acuífero "Saltillo-Ramos Arizpe" para el adecuado manejo del recurso hídrico, aplicando un enfoque geoestadístico. *Tecnología y ciencias del agua*, 2014, vol. 5, no 5, p. 141-159.
- [5] EMERY, Xavier. Geoestadística. *Universidad de Chile*, 2013, vol. 107.

- [18] GÓMEZ-HERNÁNDEZ, J. Jaime; CASSIRAGA, Eduardo F. Theory and practice of sequential simulation. En *Geostatistical simulations*. Springer, Dordrecht, 1994. p. 111-124.
- [16] GOOVAERTS, Pierre. Geostatistics in soil science: state-of-the-art and perspectives. *Geoderma*, 1999, vol. 89, no 1-2, p. 1-45.
- [4] ISAAKS, Edward H.; SRIVASTAVA, Mohan R. *Applied geostatistics*. 1989.
- [19] JOURNEL, Andre G. Geostatistics for conditional simulation of ore bodies. *Economic Geology*, 1974, vol. 69, no 5, p. 673-687.
- [34] JOURNEL, Andre G.; HUIJBREGTS, Charles J. *Mining geostatistics*. London: Academic press, 1978.
- [35] WEBSTER, R.; OLIVER, M. A. How large a sample is needed to estimate the regional variogram adequately?. En *Geostatistics Tróia '92*. Springer, Dordrecht, 1993. p. 155-166.
- [17] LANTUÉJOL, Christian. Non conditional simulation of stationary isotropic multigaussian random functions. En *Geostatistical simulations*. Springer, Dordrecht, 1994. p. 147-177.
- [37] MCBRATNEY, A. B.; WEBSTER, R.; BURGESS, T. M. The design of optimal sampling schemes for local estimation and mapping of regionalized variables—I: Theory and method. *Computers & Geosciences*, 1981, vol. 7, no 4, p. 331-334.
- [27] NOEL, A. C. Cressie. *Statistics for Spatial Data*. 1993.
- [20] NOWAK, Marek; VERLY, Georges. The practice of sequential Gaussian simulation. En *Geostatistics Banff 2004*. Springer, Dordrecht, 2005. p. 387-398.
- [6] OLIVER, M. A.; WEBSTER, R. A tutorial guide to geostatistics: Computing and modelling variograms and kriging. *Catena*, 2014, vol. 113, p. 56-69.
- [7] ORTIZ, J. M.; EMERY, Xavier. Categorización de recursos y reservas mineras. En *1st International Conference on Mining Innovation MININ*. 2004. p. 198-208.
- [9] QUINTERO-SILVERIO, Arelys; CUADOR-GIL, José Q.; ESTÉVEZ-CRUZ, Elmidio. Simulación no condicional, método de las bandas rotantes en 3D. *Minería y Geología*, 2000, vol. 17, no 1, p. 51-54.
- [11] RAMÍREZ DÁVILA, José Francisco; PORCAYO CAMARGO, Elvia. Estudio comparativo de la distribución espacial del muérdago enano (*Arceuthobium* sp.) en la ladera norte del Parque Nacional Nevado de Toluca, México. *Bosque (Valdivia)*, 2010, vol. 31, no 1, p. 28-38.

- [29] REVUELTA, Manuel Bustillo. *Mineral Resources: From Exploration to Sustainability Assessment*. Springer, 2017.
- [14] RIVOIRARD, J. Two key parameters when choosing the kriging neighborhood. *Mathematical geology*, 1987, vol. 19, no 8, p. 851-856.
- [3] SABOURIN, Raymond L. Application of a geostatistical method to quantitatively define various categories of resources. En *Geostatistics for Natural Resources Characterization*. Springer, Dordrecht, 1984. p. 201-215.
- [23] SANTACRUZ, D. A. M. *Diseño de redes de muestreo óptimas para el monitoreo del carbono orgánico del suelo en el CI La Libertad mediante la aplicación de algoritmos genéticos*. 2010. Tesis Doctoral. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia. Colombia.
- [2] SILVA, D. S. F.; BOISVERT, J. B. Mineral resource classification: a comparison of new and existing techniques. *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy*, 2014, vol. 114, no 3, p. 265-273.
- [36] SINCLAIR, Alastair J.; BLACKWELL, Garston H. *Applied mineral inventory estimation*. Cambridge University Press, 2006.
- [22] SIRONVALLE, Marco Antonio Alfaro. *Introducción al muestreo minero*. Santiago, Chile, 2002.
- [31] VAN GROENIGEN, Jan Willem. The influence of variogram parameters on optimal sampling schemes for mapping by kriging. *Geoderma*, 2000, vol. 97, no 3-4, p. 223-236.
- [32] VAN GROENIGEN, Jan Willem; SIDERIUS, W.; STEIN, A. Constrained optimisation of soil sampling for minimisation of the kriging variance. *Geoderma*, 1999, vol. 87, no 3-4, p. 239-259.
- [24] WATSON, Alan G.; BARNES, Randal J. Infill sampling criteria to locate extremes. *Mathematical Geology*, 1995, vol. 27, no 5, p. 589-608.

ANEXO A. Distintas mallas complementarias distribuidas de forma aleatoria.

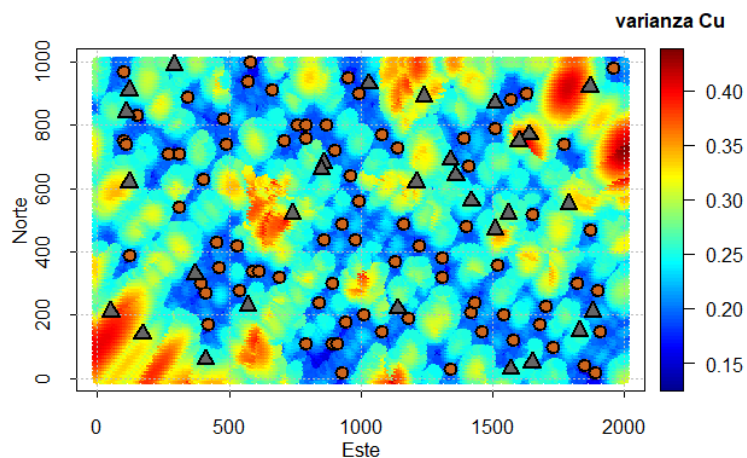


Figura 24. Mapa de varianzas generadas a partir de las 80 primeras muestras, con las muestras iniciales en círculos y las 30 muestras complementarias en triángulos, caso alta continuidad.

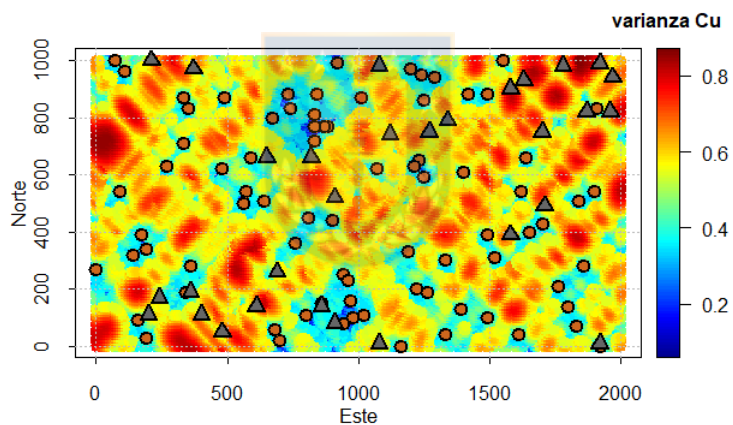


Figura 25. Mapa de varianzas generadas a partir de las 80 primeras muestras, con las muestras iniciales en círculos y las 30 muestras complementarias en triángulos, caso baja continuidad.

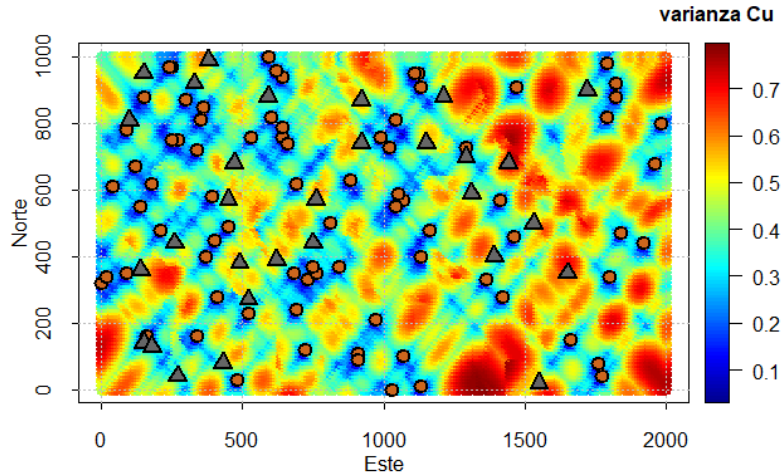


Figura 26. Mapa de varianzas generadas a partir de las 80 primeras muestras, con las muestras iniciales en círculos y las 30 muestras complementarias en triángulos, caso efecto pepita grande.

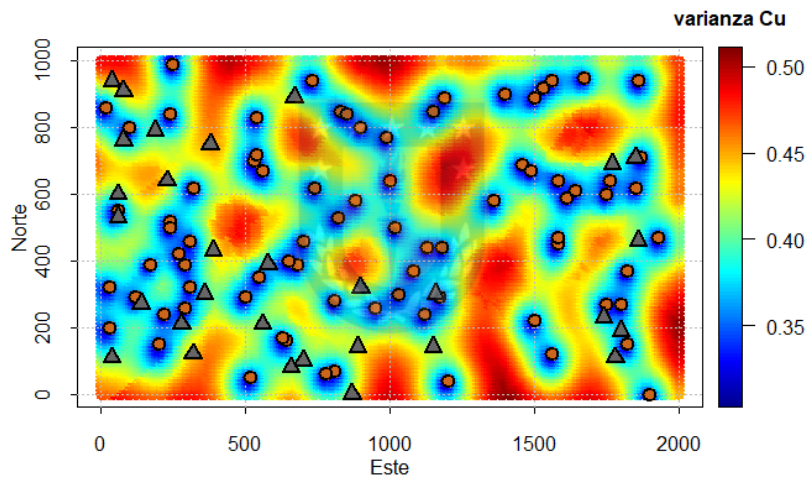


Figura 27. Mapa de varianzas generadas a partir de las 80 primeras muestras, con las muestras iniciales en círculos y las 30 muestras complementarias en triángulos, caso omnidireccional.

ANEXO B. Categorización de recursos caso simulado.

Luego de realizar las estimaciones de las variables normales se efectúa la retransformación de las variables estimadas para obtener la distribución de las leyes de cobre y oro. Se utiliza la retransformación no sesgada la cual viene dada por:

$$z^*(x) = \exp\left(y^*(x) + \frac{1}{2} \sigma_y^2\right)$$

donde $z^*(x)$ corresponde al valor estimado con la distribución real de la variable, $y^*(x)$ es la variable normal estimada y σ_y^2 su varianza de kriging.

Para la categorización de recursos los métodos más empleados son los métodos geométricos, seguidos de la definición de límites arbitrarios en la varianza de estimación [38]. Se opta por el segundo método. Para lograr una apreciación entre las distintas mallas complementarias se definen los siguientes límites arbitrarios para la clasificación de minerales estimados:

- Recursos medidos, todo bloque que tenga una varianza de estimación menor o igual a la de un punto en el centro de 4 muestras dispuestas en una malla cuadrada de 40x40 [m].
- Recursos indicados, todo bloque que tenga una varianza de estimación menor o igual a la de un punto en el centro de 4 muestras dispuestas en una malla cuadrada de 80x80 [m].

A continuación se presenta la categorización de recursos para distintos tamaños de mallas complementarias para los casos de estudio:

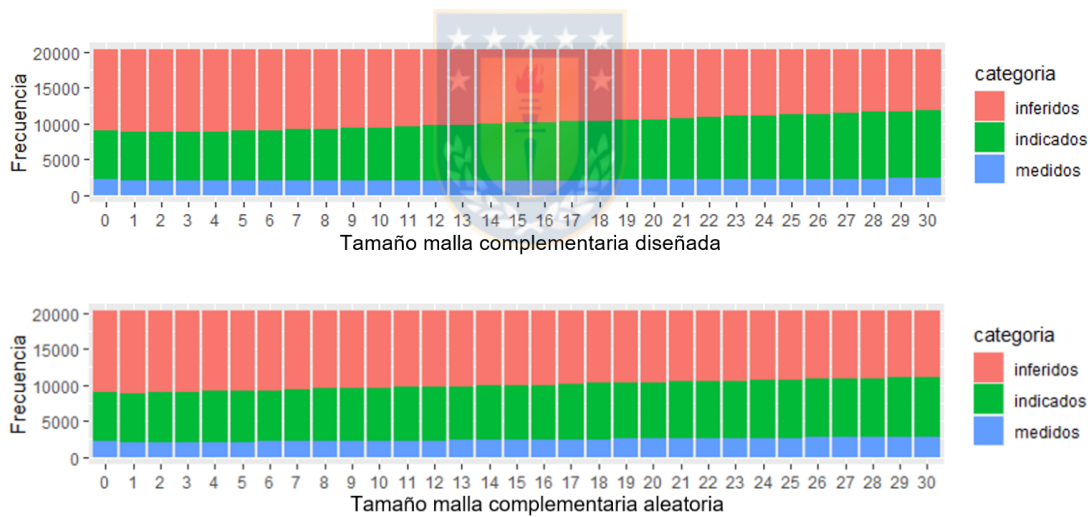


Figura 28. Categorización de recursos para mallas complementarias diseñadas con el algoritmo de búsqueda y para mallas complementarias aleatorias, alta continuidad.

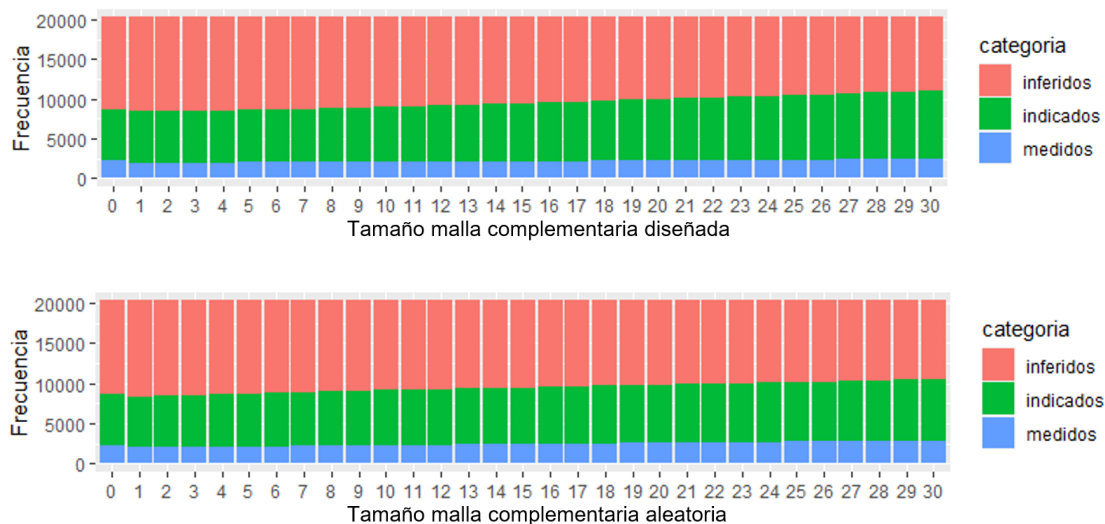


Figura 29. Categorización de recursos para mallas complementarias diseñadas con el algoritmo de búsqueda y para mallas complementarias aleatorias, baja continuidad.

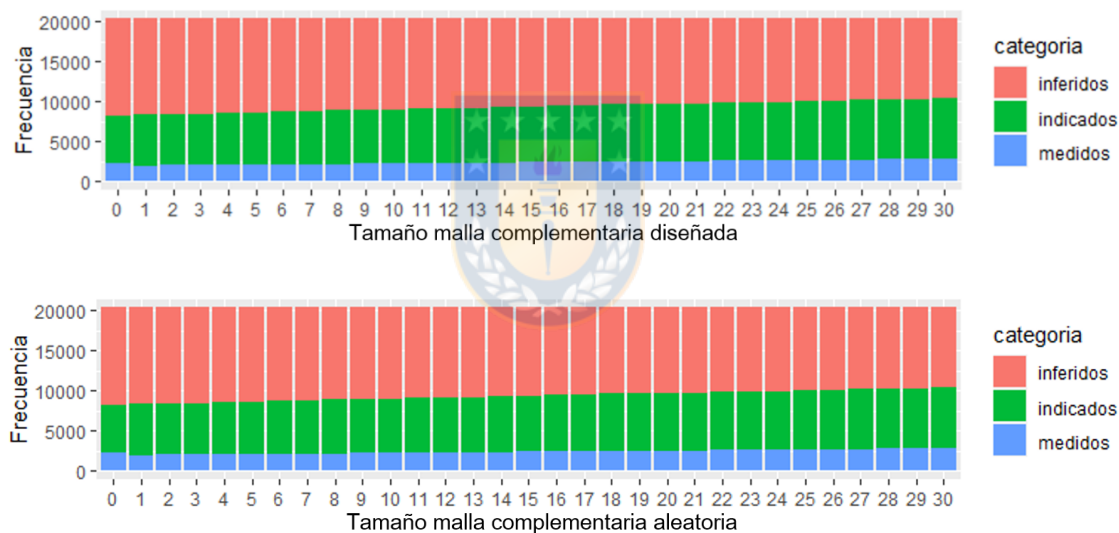
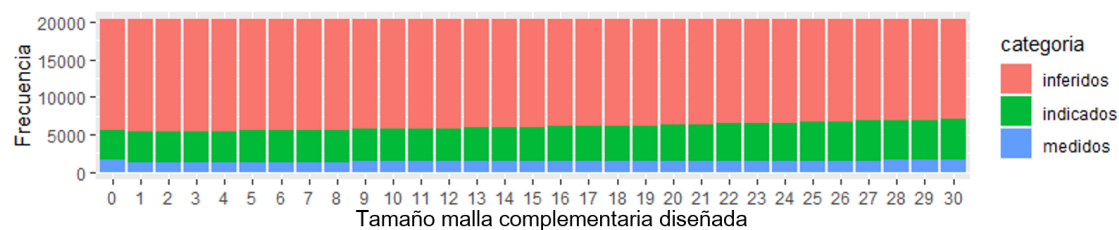


Figura 30. Categorización de recursos para mallas complementarias diseñadas con el algoritmo de búsqueda y para mallas complementarias aleatorias, efecto pepita grande.



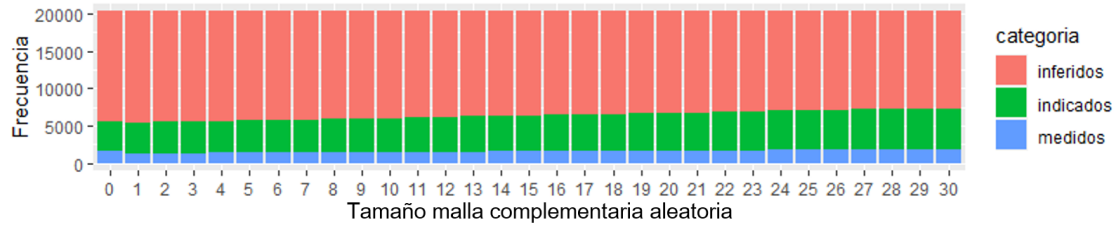


Figura 31. Categorización de recursos para mallas complementarias diseñadas con el algoritmo de búsqueda y para mallas complementarias aleatorias, omnidireccional.

ANEXO C. Parámetros necesario para un análisis económico de los datos.

Tabla 27. Parámetros físicos y económicos considerados.

Precio cobre [USD/lb]	2.8086
Precio oro [USD/OnzTroy]	1620
Costo de procesamiento [USD/ton]	10.69
Densidad de roca [ton/m ³]	2.7
Costo mina [USD/ton]	5.57
Recuperación metalúrgica [%]	88
Costo venta [USD/lb]	0.18
Costo refinación [USD/lb]	0.2684
Costo refinación y venta [USD/oz]	8

El precio del cobre y el oro se toma como el promedio de valores de la bolsa de metales de Londres de los últimos 12 meses y se asume una recuperación metalúrgica igual para ambos metales.

Ley de corte:

$$Ley\ de\ corte\ [\%] = \frac{(CM - CP)}{(P_{Cu} - C_v - C_r) * R * 2204.62} * 100$$

- CM : costo mina.
- CP : costo procesamiento del mineral.
- P_{Cu} : precio venta cobre.
- C_v : costo venta cobre.
- C_r : costos de transporte, tratamiento y refinación del cobre.
- R : recuperación metalúrgica.

Ley equivalente de metales:

$$Ley_{eq} = Ley_{Cu} + F_{eq} * Ley_{Au}$$

$$F_{eq} = \frac{(s_{Au} - r_{Au}) * y_{Au}}{(s_{Cu} - r_{Cu}) * y_{Cu}}$$

- s_{Au} : Precio de venta del oro.
- s_{Cu} : Precio de venta del cobre.
- r_{Au} : Costos de refinación, tratamiento y transporte para el oro.
- r_{Cu} : Costos de refinación, tratamiento y transporte para el cobre.
- y_{Au} : Recuperación mineral para el oro.
- y_{Cu} : Recuperación mineral para el cobre.

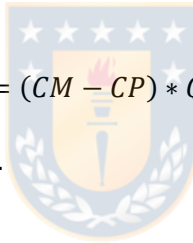
Ecuaciones para ingresos y costos esperados:

$$Ingresos = P_{Cu} * Q_r$$

- Q_r : cantidad de refinado.

$$Costos = (CM - CP) * Q_m + C_r * Q_r$$

- Q_m : cantidad de material minado.



ANEXO D. Tasa de positividad de las estimaciones para los casos de estudio.

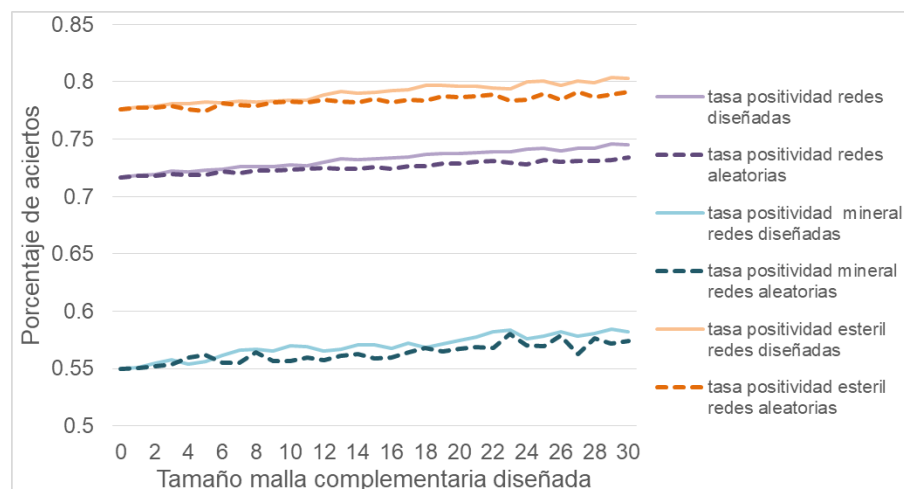


Figura 32. Tasa de positividad de las estimaciones de estéril y mineral y la exactitud caso alta continuidad.

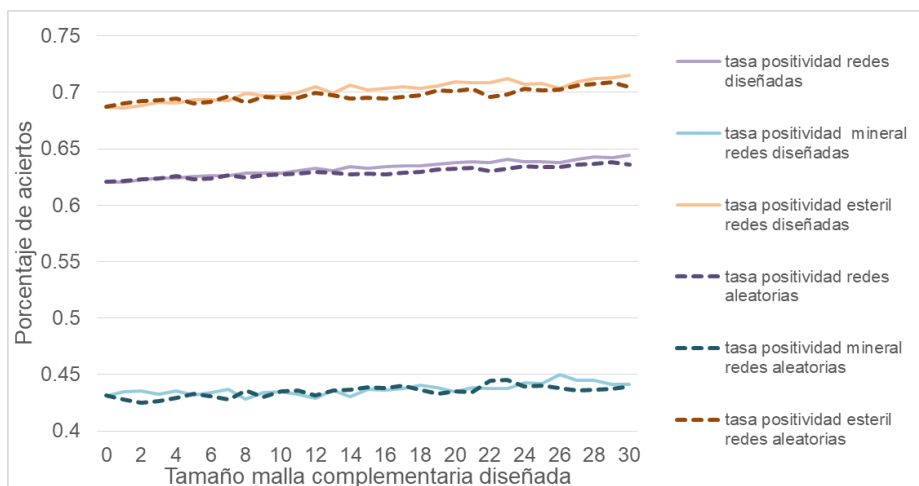


Figura 33. Tasa de positividad de las estimaciones de estéril y mineral y la exactitud caso baja continuidad.

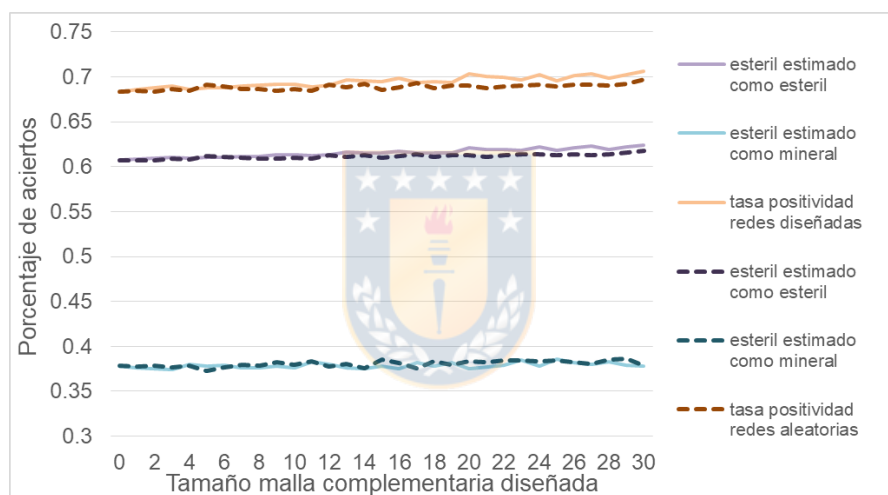


Figura 34. Tasa de positividad de las estimaciones de estéril y mineral y la exactitud, caso pepita grande.

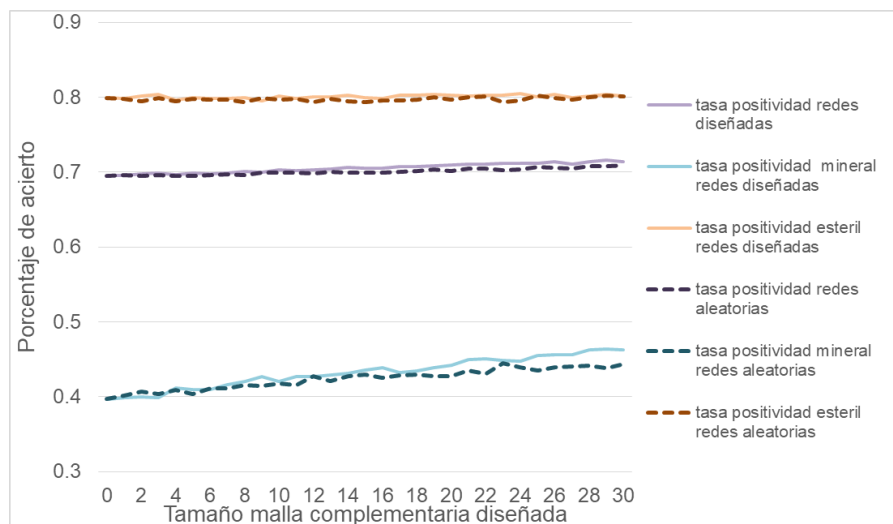


Figura 35. Tasa de positividad de las estimaciones de estéril y mineral y la exactitud, caso omnidireccional.

ANEXO E. Error cuadrático medio para distintos tamaños de mallas complementarias para los casos de estudio.

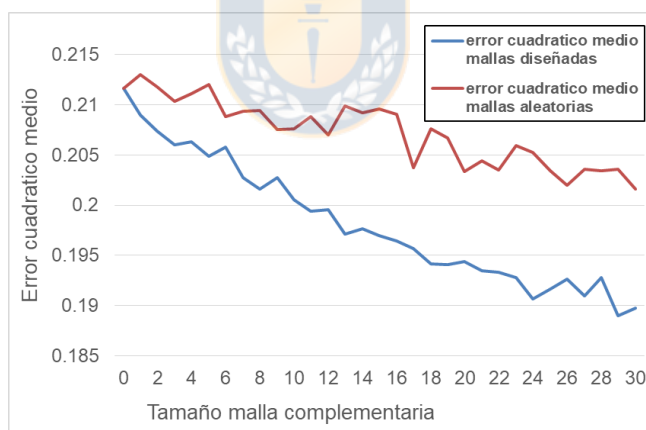


Figura 36. Error cuadrático medio del promedio de las 100 simulaciones para distintos tamaños de mallas complementarias diseñadas, alta continuidad.

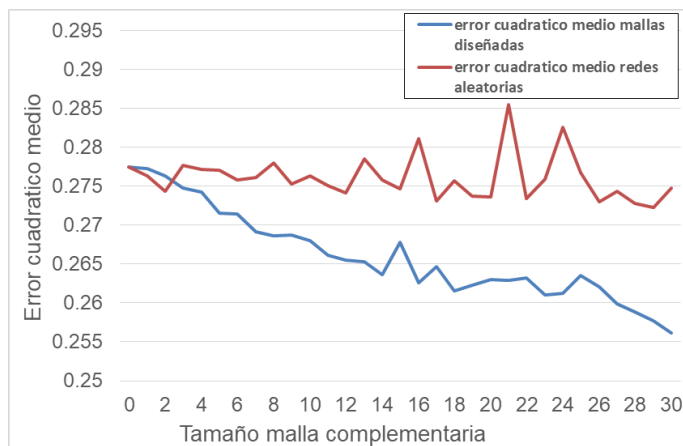


Figura 37. Error cuadrático medio promedio de 100 simulaciones para los distintos tamaños de mallas complementarias diseñadas, baja continuidad.

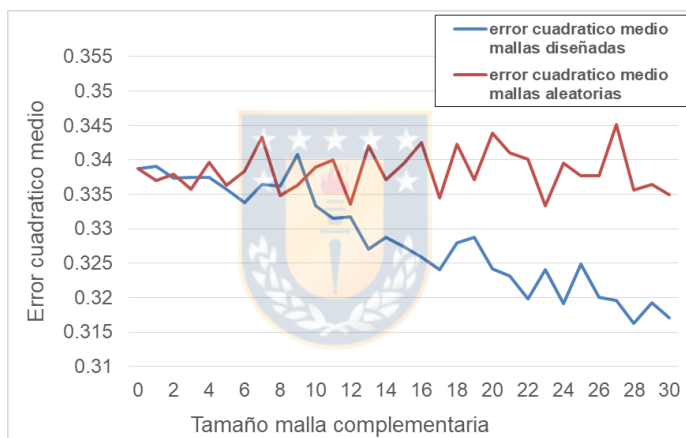


Figura 38. Error cuadrático medio promedio de 100 simulaciones para los distintos tamaños de mallas complementarias diseñadas, pepita grande.

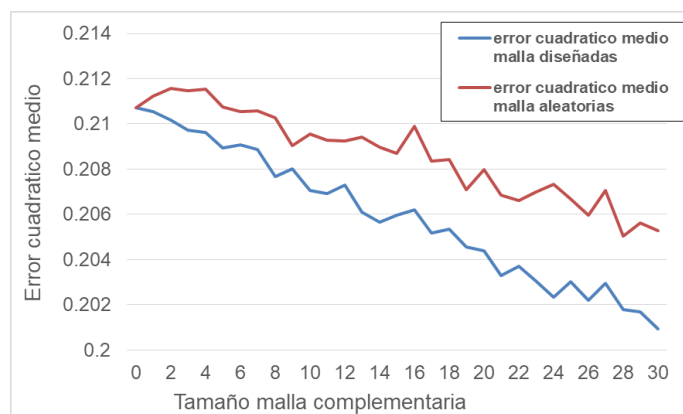


Figura 39. Error cuadrático medio promedio de 100 simulaciones para los distintos tamaños de mallas complementarias diseñadas, omnidireccional.

ANEXO F. Visualización de las variables en la base de datos real.

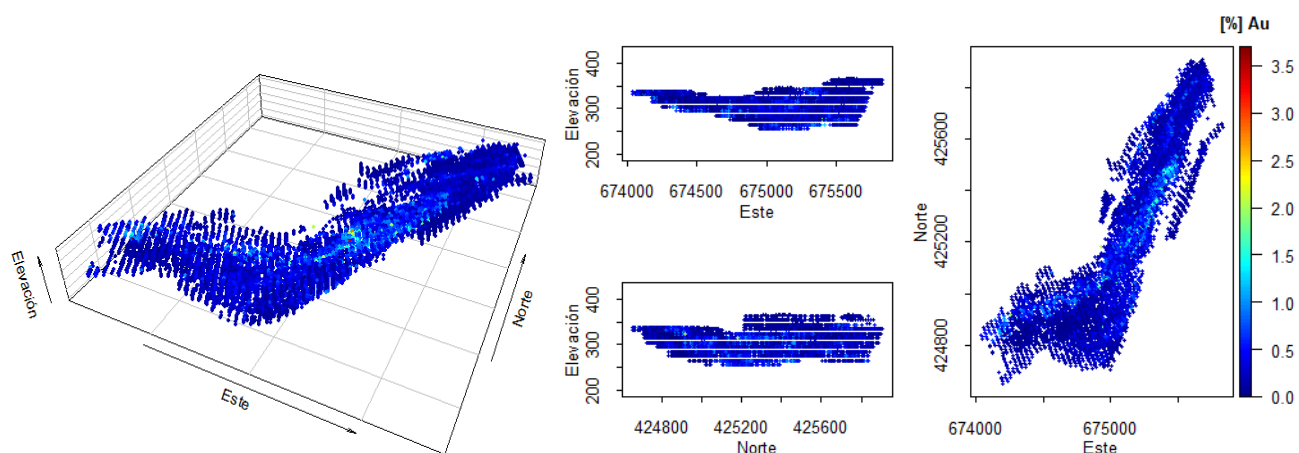


Figura 40. Vista tridimensional leyes de oro a la izquierda y sus proyecciones en planta y perfiles a la derecha.

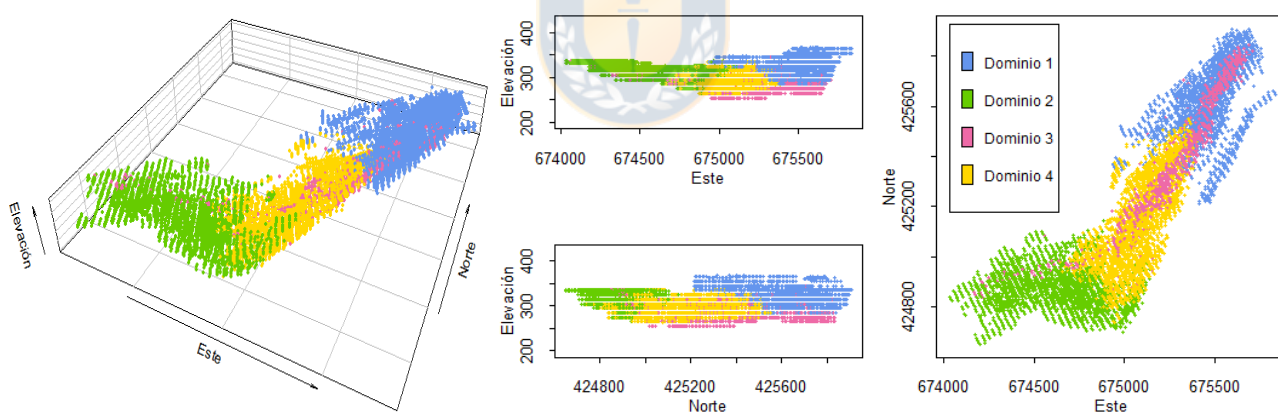


Figura 41. Vista tridimensional de dominios a la izquierda y sus proyecciones en planta y perfiles a la derecha.

ANEXO G. Análisis estadístico de la base de datos.

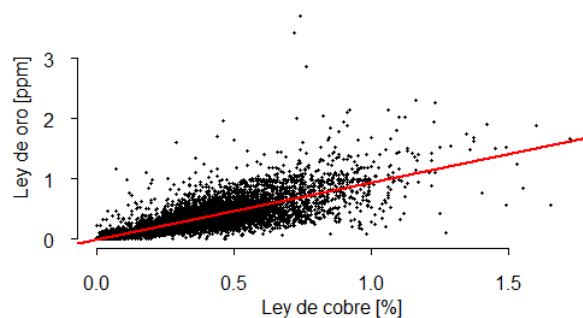


Figura 42. Leyes de cobre vs leyes de oro.

Tabla 28. Estadísticos para la variable Cu [%] para los distintos dominios.

Dominio	Mínimo	1° cuartil	Mediana	Media	3° cuartil	Máximo	Desviación
1	0.001	0.124	0.240	0.276	0.412	0.880	0.181
2	0.004	0.122	0.224	0.266	0.387	0.998	0.181
3	0.038	0.523	0.730	0.708	0.888	1.720	0.264
4	0.003	0.263	0.360	0.369	0.461	0.955	0.155

Tabla 29. Estadísticos para la variable Au [ppm] para los distintos dominios.

Dominio	Mínimo	1° cuartil	Mediana	Media	3° cuartil	Máximo	Desviación
1	0.000	0.100	0.170	0.215	0.290	1.170	0.162
2	0.000	0.075	0.156	0.212	0.295	1.130	0.183
3	0.052	0.392	0.718	0.731	0.990	3.700	0.447
4	0.009	0.208	0.330	0.364	0.494	1.110	0.204

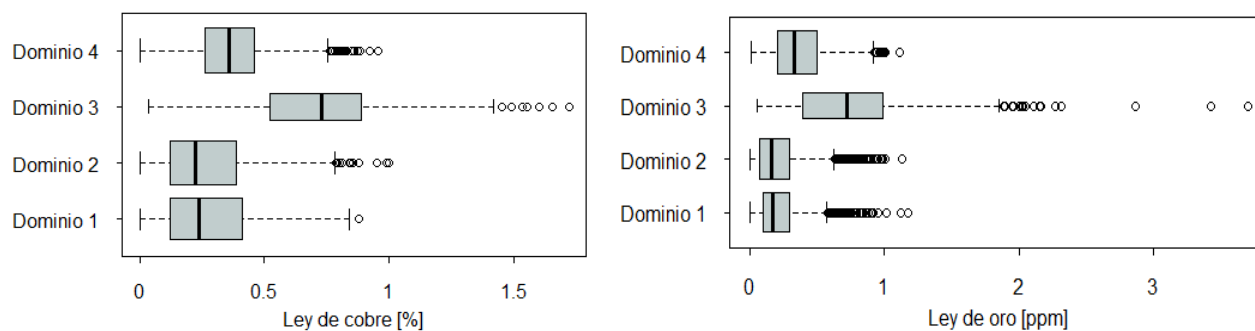


Figura 43. Gráfico de cajas leyes por dominios, cobre a la izquierda y oro a la derecha.

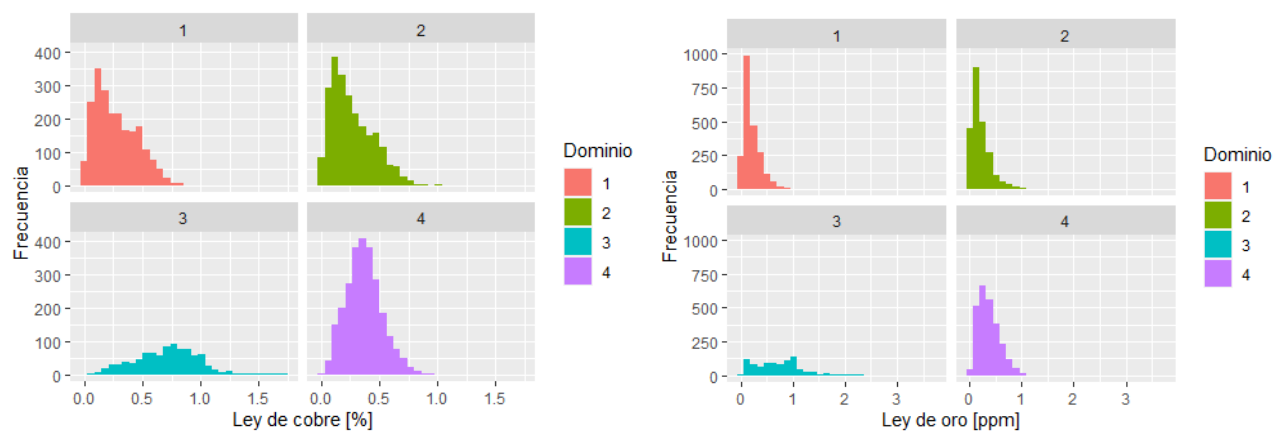


Figura 44. Histograma leyes por dominios, cobre a la izquierda y oro a la derecha.

ANEXO H. Distribución de las 80 muestras iniciales.

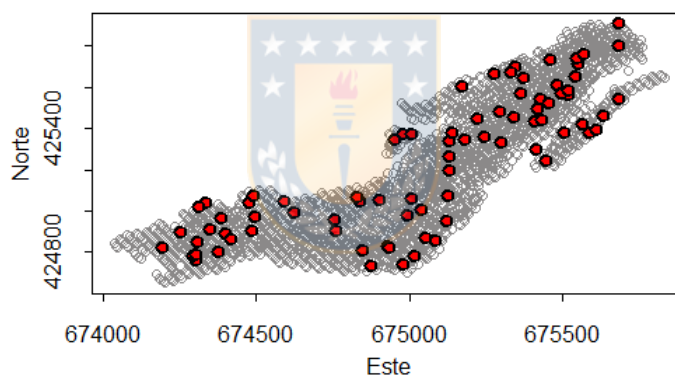


Figura 45. Distribución espacial de las muestras iniciales.

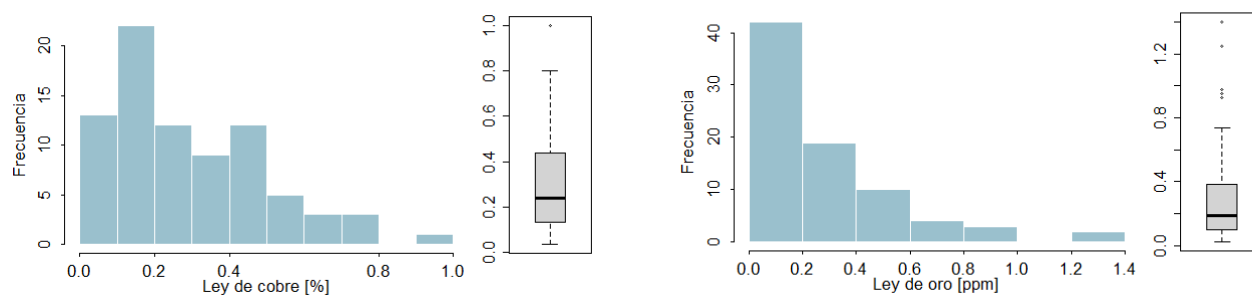


Figura 46. Histogramas y boxplot de las muestras iniciales, cobre izquierda y oro derecha.

Tabla 30. Correlación entre variables continuas de las muestras iniciales.

Variable	Este	Norte	Cu	Au
Cobre	-0.098	-0.065	1.000	0.727
Oro	0.039	0.003	0.727	1.000

ANEXO I. Variografía y validación cruzada.

Previo a la determinación del variograma de las muestras se realiza una transformación normal de valores. Por la distribución que siguen los datos, se decide tomar el logaritmo de las leyes. La prueba de normalidad de Kolmogorov-Smirnov, incluida en el paquete “norest” de Rstudio permite afirmar que no se rechaza la hipótesis de que la variable transformada proviene de una distribución normal de valores, tanto para las leyes de cobre como de oro.

Al calcular el variograma experimental omnidireccional de las muestras transformadas no se presentan valores excesivamente dispersos de variograma y se advierte la convergencia a una constante para grandes distancias, figura 47, por lo que se decide evaluar la existencia de anisotropías con estos datos. Se debe notar, que debido a la disposición espacial de los datos, este comportamiento para grandes distancias del variograma experimental omnidireccional corresponde al de variogramas direccionales para ángulos aproximados a 45 grados, lo que debe ser considerado al momento de analizar la existencia de posibles anisotropías.

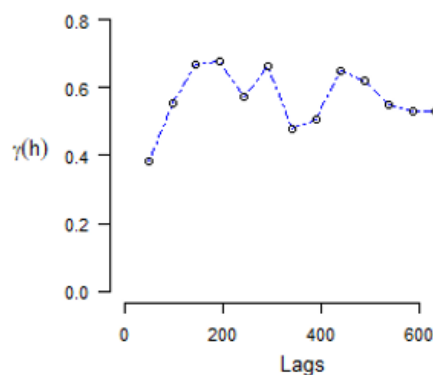


Figura 47. Variograma experimental omnidireccional de las muestras iniciales para leyes de cobre transformadas.

Para evaluar la existencia de anisotropías se calculan variogramas experimentales direccionales en las direcciones de 0 a 90° cada 22.5° y se ajustan modelos esféricos, exponenciales y gaussianos a todos estos modelos experimentales.

Tabla 31. Parámetros de modelos de variogramas direccionales ajustados.

Modelos esféricos				
Direcciones	0° - 90°	22.5° - 112.5°	45° - 135°	67.5° - 157.5°
Pepita	0.045	0.067	0.188	0.166
Meseta 1	0.528	0.516	0.377	0.442
Mesetas 2	0.599	0.549	0.396	0.388
Rango 1	151.095	180.000	229.561	267.727
Rango 2	324.444	141.606	130.923	119.334
Modelos gaussianos				
Direcciones	0° - 90°	22.5° - 112.5°	45° - 135°	67.5° - 157.5°
Pepita	0.104	0.125	0.242	0.241
Meseta 1	0.469	0.459	0.322	0.370
Mesetas 2	0.545	0.490	0.340	0.313
Rango 1	121.603	153.972	190.824	230.666
Rango 2	308.888	124.366	107.435	105.943
Modelos exponenciales				
Direcciones	0° - 90°	22.5° - 112.5°	45° - 135°	67.5° - 157.5°
Pepita	0.033	0.033	0.058	0.068
Meseta 1	0.538	0.550	0.508	0.549
Mesetas 2	0.629	0.586	0.524	0.490
Rango 1	144.134	182.046	206.413	285.442
Rango 2	415.249	159.147	102.387	126.155

El error cuadrático medio de los modelos gaussianos es excesivamente mayor al resto de modelos, por lo que estos modelos son descartados debido a la baja precisión de los valores entregados, mientras que los modelos esféricos y exponenciales presentan resultados similares.

Para evaluar el resto de los modelos de variograma se decide emplear estadísticos estandarizados. Para el error cuadrático medio adimensional los mejores resultados se obtienen con un modelo exponencial con eje de anisotropías en las direcciones de 22.5 – 112.5°. Mientras que para la media estandarizada de los errores los mejores resultados se logran con un modelo esférico con ejes de anisotropía en las direcciones de 45 – 135° y un modelo exponencial con anisotropía en 0 – 90°. Al tomar en cuenta la disposición espacial de los datos se opta por el modelo esférico.

Tabla 32. Error cuadrático medio de los errores de validación cruzada.

Direcciones	0° - 90°	22.5° - 112.5°	45° - 135°	67.5° - 157.5°
Modelos esféricos	0,739	0,768	0,925	0,781
Modelos exponenciales	0,726	0,735	0,861	0,745
Modelos gaussianos	4,138	1,811	2,406	2,957

Tabla 33. Error cuadrático medio adimensional de los errores de validación cruzada.

Direcciones	0° - 90°	22.5° - 112.5°	45° - 135°	67.5° - 157.5°
Modelos esféricos	1,500	1,361	1,575	1,349
Modelos exponenciales	1,232	1,030	1,237	1,073
Modelos gaussianos	12,130	4,424	4,762	6,198

Tabla 34. Media estandarizada de los errores de predicción.

Direcciones	0° - 90°	22.5° - 112.5°	45° - 135°	67.5° - 157.5°
Modelos esféricos	-0,033	-0,060	0,001	0,075
Modelos exponenciales	0,001	-0,021	0,023	0,085
Modelos gaussianos	0,467	0,557	0,022	0,801

ANEXO J. Modelos de bloques estimados.

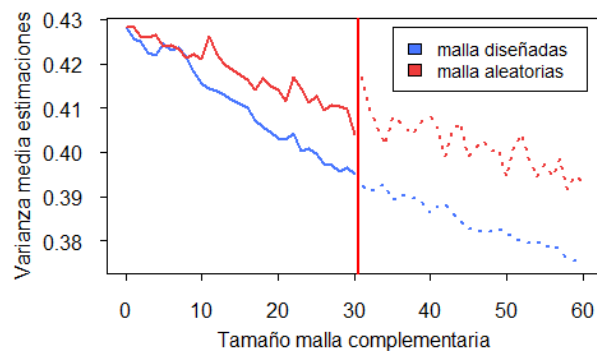


Figura 48. Varianza media de las estimaciones para distintas mallas complementarias.

Tabla 35. Estadísticos de posición de las estimaciones realizadas a partir de distintas mallas complementarias diseñadas con el algoritmo de búsqueda.

Tamaño malla complementaria	10 muestras adicionales		20 muestras adicionales		30 muestras adicionales	
	Cobre [%]	Oro [ppm]	Cobre [%]	Oro [ppm]	Cobre [%]	Oro [ppm]
Mínimo	0.010	0.003	0.008	0.003	0.007	0.003
1° cuartil	0.147	0.124	0.148	0.124	0.132	0.114
Mediana	0.245	0.236	0.244	0.242	0.223	0.215
Media	0.292	0.287	0.301	0.323	0.258	0.260
3° cuartil	0.394	0.373	0.398	0.407	0.347	0.342
Máximo	2.244	1.975	2.244	3.093	1.849	2.304

Tabla 36. Estadísticos de posición de las estimaciones realizadas a partir de distintas mallas complementarias aleatorias.

Tamaño malla complementaria	10 muestras adicionales		20 muestras adicionales		30 muestras adicionales	
	Cobre [%]	Oro [ppm]	Cobre [%]	Oro [ppm]	Cobre [%]	Oro [ppm]
Mínimo	0.024	0.003	0.021	0.004	0.026	0.003
1° cuartil	0.157	0.123	0.174	0.153	0.155	0.135
Mediana	0.240	0.219	0.270	0.252	0.246	0.232
Media	0.280	0.285	0.309	0.310	0.291	0.304
3° cuartil	0.358	0.362	0.396	0.383	0.385	0.393
Máximo	2.244	2.667	1.613	1.635	1.736	2.012

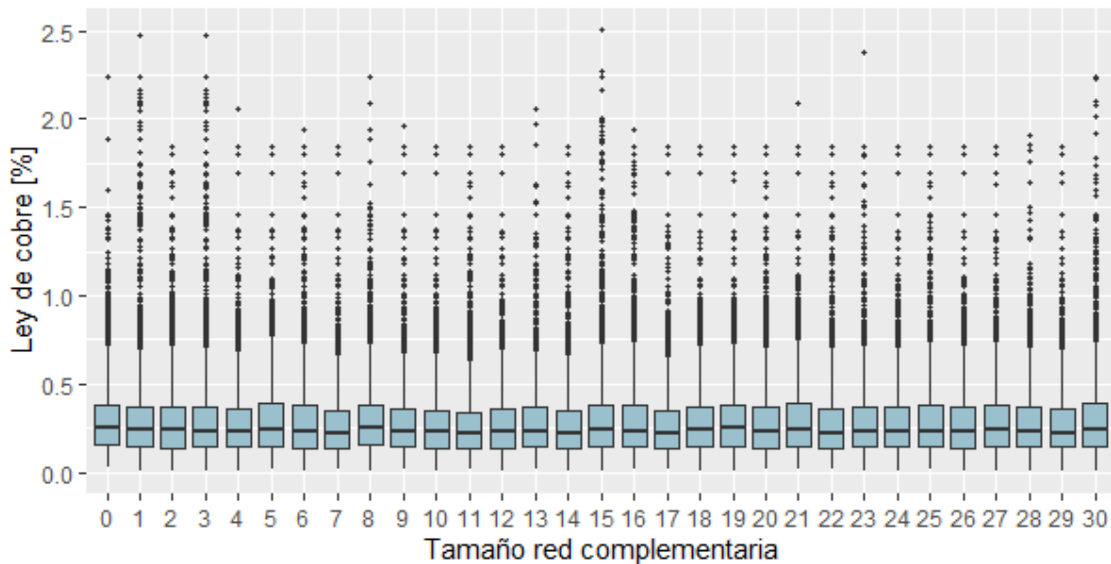


Figura 49. Boxplot para leyes de cobre de las estimaciones realizadas a partir de distintos tamaños de mallas complementarias creadas con el algoritmo de búsqueda.

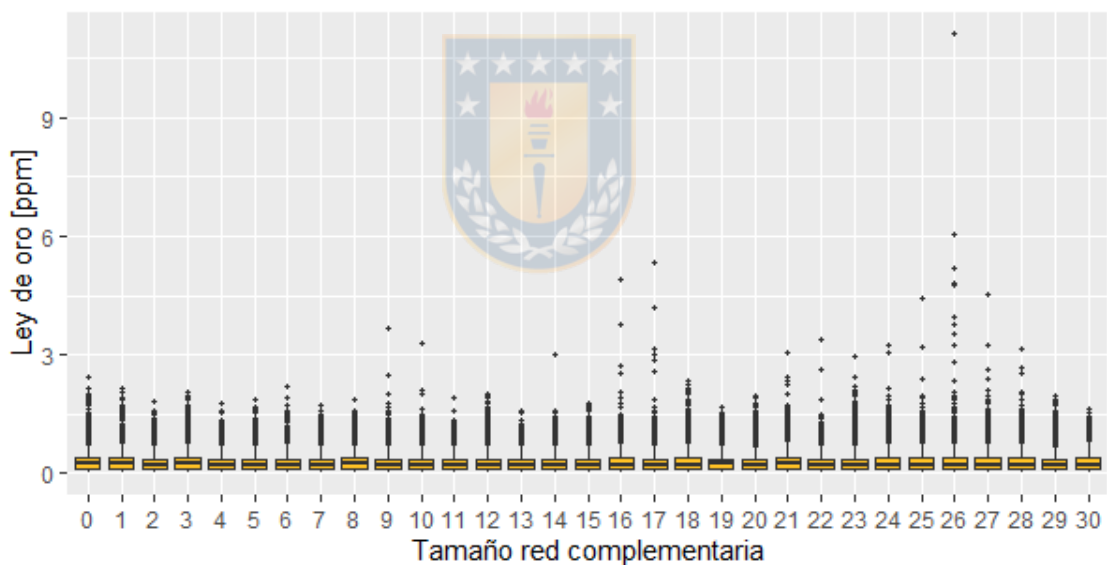


Figura 50. Boxplot para leyes de oro de las estimaciones realizadas a partir de distintos tamaños de mallas complementarias creadas con el algoritmo de búsqueda.

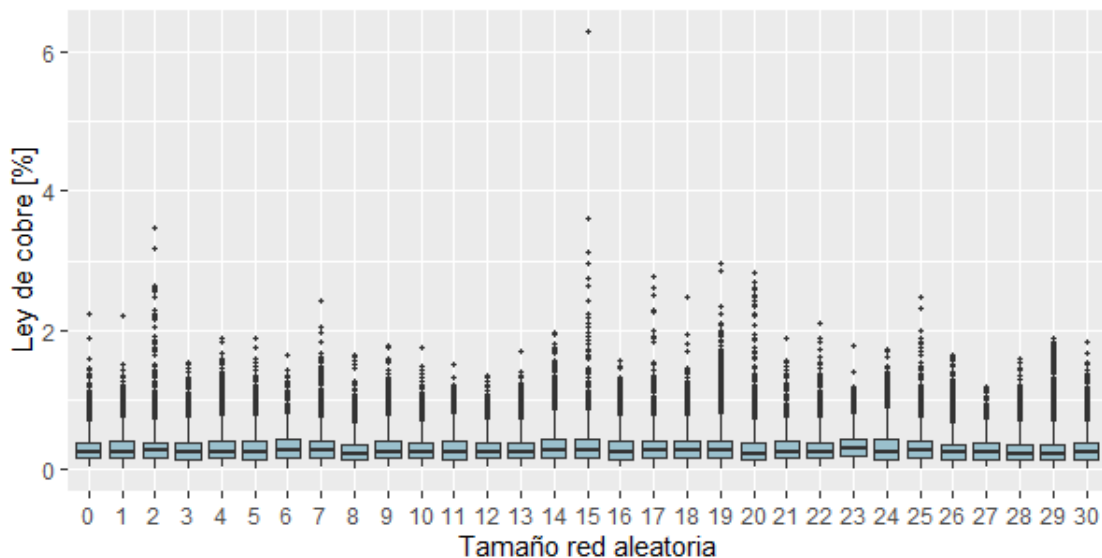


Figura 51. Boxplot para leyes de cobre de las estimaciones realizadas a partir de distintos tamaños de mallas complementarias aleatorias.

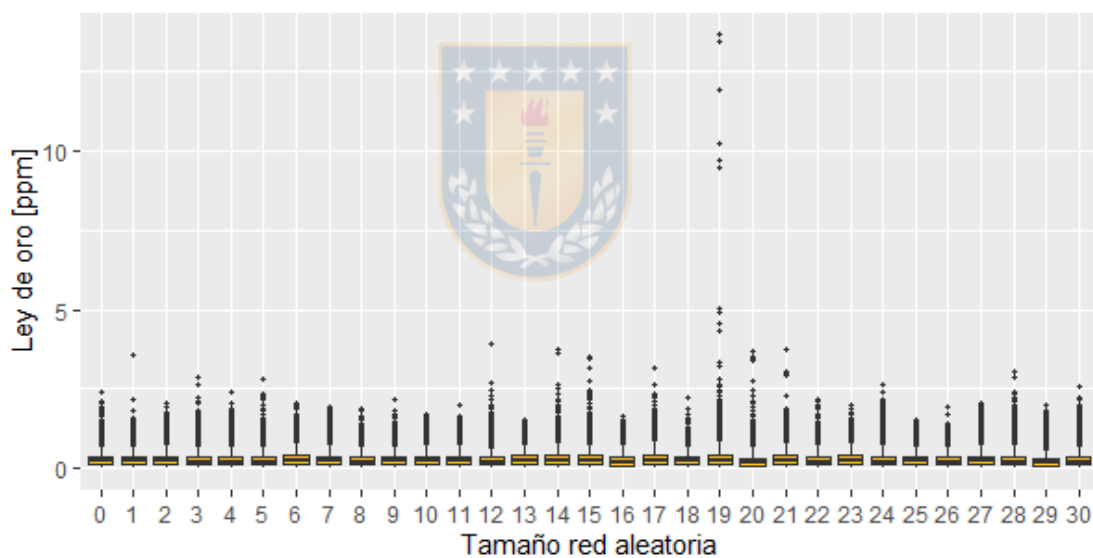


Figura 52. Boxplot para leyes de oro de las estimaciones realizadas a partir de distintos tamaños de mallas complementarias aleatorias.

ANEXO K. Categorización de recursos del caso real.

Con los límites de clasificación establecidos, para las 80 muestras iniciales se obtiene 6.696 [Mton] de recursos medidos, 16.6 [Mton] de indicados y 20.066 [Mton] de inferidos.

Tabla 37. Categorización de recursos para distintas mallas complementarias.

Tamaño malla complementaria	Mallas complementarias diseñadas			Mallas complementarias aleatorias		
	10 muestras adicionales	20 muestras adicionales	30 muestras adicionales	10 muestras adicionales	20 muestras adicionales	30 muestras adicionales
Medidos [Mton]	7.0848	7.938	9.1152	7.5168	8.2404	9.6552
Indicados [Mton]	18.9324	20.4552	20.4012	16.4808	17.3664	17.658
Inferidos [Mton]	17.3448	14.9688	13.8456	19.3644	17.7552	16.0488

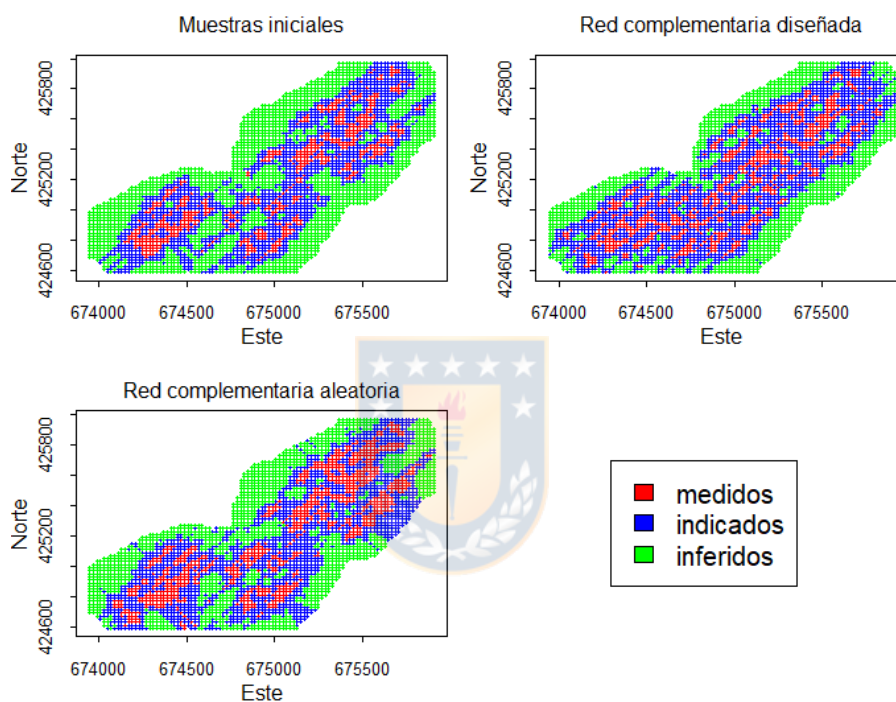


Figura 53. Categorización de recursos con 80 muestras iniciales, categorización con malla complementaria diseñada para 30 muestras adicionales, categorización con malla complementaria aleatoria para 30 muestras adicionales.

ANEXO L. Utilidades para distintos tamaños de mallas complementarias diseñadas.

Tabla 38. Utilidades para las distintas mallas complementarias diseñadas con el algoritmo de búsqueda.

Tamaño malla complementaria	Reservas [Mton]	Ley media [%]	Ingresos [MUSD]	Costos [MUSD]	Beneficios [MUSD]
10	17.302	0.789	743.691	400.061	343.630
20	18.803	0.838	858.809	442.850	415.959
30	18.641	0.734	745.507	422.126	323.381

ANEXO M. Mejor, peor y más probable casos económicos.

Tabla 39. Clasificación de recursos de las estimaciones realizadas con las distintas mallas complementarias.

	Mallas complementarias diseñadas			Mallas complementarias aleatorias		
	Mejor caso (malla 29)	Peor caso (malla 2)	Más probable (malla 26)	Mejor caso (malla 17)	Peor caso (malla 11)	Más probable (malla 25)
Medidos [Mton]	8.6292	6.8256	8.4564	8.543	7.312	8.273
Indicados [Mton]	20.844	16.8264	21.0924	17.345	16.416	17.410
Inferidos [Mton]	13.8888	19.71	13.8132	17.474	19.634	17.680

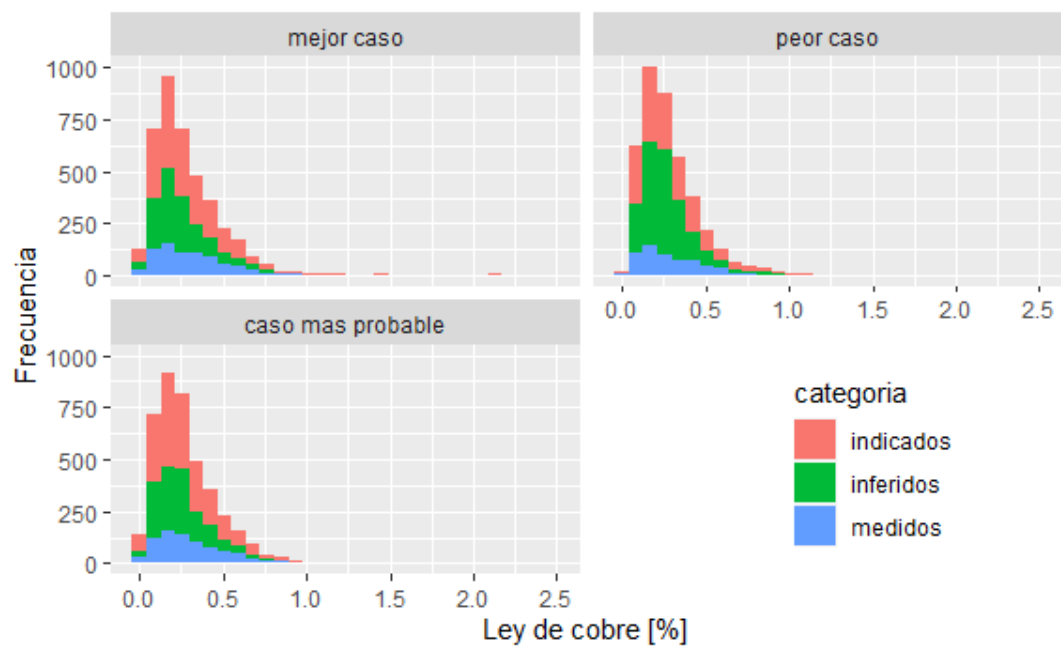


Figura 54. Histogramas mejor casos, peor caso y caso más probable de las mallas complementarias diseñadas con el algoritmo de búsqueda.



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN - FACULTAD DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Metalúrgica
 Hoja Resumen Memoria de Título

Título: Diseño de mallas de muestreo en presencia de anisotropías		
Nombre Memorista: HÉCTOR DANIEL VEGA ULLOA		
Modalidad	Investigación	Profesor (es) Patrocinante (s)
Concepto	Muy bueno	 Prof. Roberto Fustos T.
Calificación	6.5	
Fecha	07.06.2021	
 Prof. FERNANDO PARADA		
		Institución:
Comisión (Nombre y Firma)		
Prof. Francisco Muñoz G.		 Prof. Bernardo Lagos A.
Resumen		
<p>En este trabajo se estudia el impacto de la presencia de anisotropías en el comportamiento espacial de la variable regionalizada de interés en una primera etapa de prospección sin información previa. Para lograr esto se crea un pseudocódigo para crear mallas de muestreo complementarias diseñadas.</p> <p>Estas mallas de muestreo diseñadas se aplican a una base de datos simulados y a una base de datos reales. En la base de datos simulados se estudian diferentes tipos de anisotropías, donde para cada una se crean 100 bases de datos. A cada una de las bases de datos se le aplica el pseudocódigo para crear mallas complementarias diseñadas con las cuales se realiza la estimación de recursos y posterior cálculo de beneficios. Para cada caso de anisotropía se toma como valor representativo el promedio de los resultados de las 100 bases de datos y se presenta la diferencia producida por mallas complementarias de distinto tamaño. Para evaluar la eficiencia de las mallas complementarias diseñadas se comparan sus resultados con mallas de muestreo complementarias aleatorias del mismo tamaño, donde para el caso simulados se presentan resultados similares debido a la gran extensión del área de estudio.</p> <p>En la base de datos reales se estudian datos irregulares de superficie con los cuales se crean mallas complementarias diseñadas. En este caso se detallan el mejor, el peor y el más probable caso respecto a los beneficios generados por las mallas complementarias diseñadas.</p> <p>Debido a que la densidad de muestras en el área de estudio es mayor en el caso de datos reales, se observan mayores diferencias entre mallas complementarias diseñadas y mallas complementarias aleatorias, donde las mallas complementarias diseñadas presentan un beneficio máximo de 433.478 [MUSD], mientras que el beneficio máximo de mallas complementarias aleatorias es de 397.137 [MUSD].</p>		