



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN  
DIRECCIÓN DE POSTGRADO  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
PROGRAMA DE DOCTORADO EN CIENCIAS FÍSICAS

---

# SOLITONES GRAVITANTES Y SOLITONES CARGADOS EN EL MODELO DE SKYRME

---

POR

ALDO JAVIER VERA SERÓN

Tesis presentada a la  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Concepción  
para optar al grado académico de Doctor en Ciencias Físicas

Director de Tesis : Dr. Fabrizio Ernesto Canfora Tartaglia

Comisión                    Dr. Alex Giacomini  
                                      Dr. Julio Eduardo Oliva Zapata

Enero, 2019  
Concepción, Chile



Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento.

*A mi familia.*



*... vi el Aleph, desde todos los puntos, vi en el Aleph la tierra, y en la tierra otra vez el Aleph y en el Aleph la tierra, vi mi cara y mis vísceras, vi tu cara, y sentí vértigo y lloré, porque mis ojos habían visto ese objeto secreto y conjetural, cuyo nombre usurpan los hombres, pero que ningún hombre ha mirado: el inconcebible universo.*

Jorge Luis Borges, *El Aleph*

*Festina lente.*

Augusto

# AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer a los profesores Fabrizio Canfora y Julio Oliva, con quienes tuve el gusto de trabajar durante toda mi formación de postgrado. Gracias por todas las innumerables enseñanzas, motivación, apoyo, consejos y amistad.

Agradezco también a los profesores Patricio Salgado, Juan Crisóstomo, Alex Giacomini, Guillermo Rubilar y Fernando Izaurieta, por mostrarme varios aspectos de la física teórica. También a todos los profesores y colegas con los que tuve la oportunidad de colaborar en los artículos que componen esta tesis. A los funcionarios del departamento de Física de la Universidad de Concepción por su buena disposición, en particular a Soledad Daroch.

Agradezco también a mis amigos en Ancud y a mis amigos de la facultad, especialmente a Gustavo Álvarez por todas las conversaciones, las que trataron de física y las que no. También a Marcela Lagos por todo el apoyo y cariño.

Esta tesis está dedicada a mis padres y mi hermano. Su apoyo, cariño y aliento durante todos estos años son el *background* de este trabajo.

El desarrollo de esta tesis ha sido financiado por la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica mediante el proyecto CONICYT-PCHA/Doctorado Nacional/2015-21151067.

# Tabla de Contenidos

Índice de Figuras	viii
Índice de Tablas	x
Resumen	xi
Abstract	xiii
Introducción	1
<b>1 El modelo de Skyrme</b>	<b>5</b>
1.1 Bariones como solitones topológicos . . . . .	5
1.2 La acción de Skyrme . . . . .	7
1.3 Ecuaciones de campo . . . . .	8
1.4 Energía de los solitones . . . . .	9
1.5 Número bariónico . . . . .	9
1.6 Ansatz para el campo de Skyrme . . . . .	10
1.6.1 $SU(2)$ : Ansatz del erizo generalizado . . . . .	11
1.6.2 $SU(3)$ : Ansatz de Balachandran . . . . .	13
1.6.3 $SU(N)$ : Campo de Skyrme en ángulos de Euler . . . . .	14
<b>2 Solitones en el modelo de Skyrme acoplado a Maxwell</b>	<b>15</b>
2.1 El modelo Skyrme-Maxwell . . . . .	15
2.2 Skyrmiones en un volumen finito . . . . .	17
2.3 Skyrmiones cargados . . . . .	18
2.3.1 Ansatz, ecuaciones de campo y ecuación de Heun . . . . .	19
2.3.2 Campo eléctrico, campo magnético y condiciones de borde . . . . .	23



2.3.3	Energía de los skyrmiones cargados . . . . .	24
2.3.4	Ecuación de Whittaker-Hill . . . . .	25
2.3.5	Perturbaciones, ecuación de Mathieu y resurgencia . . . . .	26
2.4	Cristales de tiempo . . . . .	32
2.4.1	Ansatz, ecuaciones de campo y ecuación de Heun . . . . .	32
2.4.2	Dualidad Extendida . . . . .	37
2.5	Multi-solitones y estructuras cristalinas . . . . .	38
2.5.1	Modelo sigma no lineal acoplado a Maxwell con masa . . . . .	38
2.5.2	El ansatz de multi-solitones . . . . .	39
2.5.3	Ecuaciones de campo . . . . .	40
2.5.4	Carga topológica y densidad de energía . . . . .	43
2.5.5	Tubos bariónicos cargados . . . . .	44
2.5.6	Una nota sobre la estabilidad . . . . .	46
<b>3</b>	<b>El modelo de Skyrme acoplado a relatividad general</b>	<b>49</b>
3.1	El modelo Einstein-Skyrme . . . . .	49
3.2	Solitones gravitantes en una cavidad . . . . .	50
3.2.1	Ansatz y ecuaciones de campo . . . . .	50
3.2.2	Nuevas soluciones de solitones gravitantes . . . . .	53
3.2.3	Cargas conservadas . . . . .	55
3.3	Dibariones gravitantes . . . . .	57
3.3.1	Revisión de los skyrmiones gravitantes: $U \in SU(2)$ . . . . .	58
3.3.2	Ansatz de dibariones: $U \in SU(3)$ . . . . .	60
3.3.3	Ecuaciones de campo y soluciones de dibariones gravitantes . . . . .	61
3.3.4	Límite plano . . . . .	63
	<b>Conclusiones</b>	<b>65</b>
	<b>Referencias</b>	<b>68</b>
	<b>Apéndice A: Ecuaciones de campo</b>	<b>73</b>
	<b>Apéndice B: Energía y <i>bound</i> BPS en la teoría de Skyrme</b>	<b>76</b>
	<b>Apéndice C: Matrices de Pauli y matrices de Gell-Mann</b>	<b>78</b>

# Índice de Figuras

2.1	Comportamiento de $b'_3(r)$ para los primeros valores de $\Gamma$ . . . . .	24
2.2	Energía del sistema como función del área $p = 1, 2, 3, 4, 5$ . . . . .	25
2.3	Primeros cuatro modos para las coordenadas normales $U$ y $V$ , junto con las correspondientes frecuencias normales. . . . .	30
2.4	Espectro de las perturbaciones electromagnéticas. . . . .	30
2.5	Densidad de energía y densidad de carga topológica de dos solitones, con $n = 2$ , $m = 0.2$ , and $p = q = 1$ . . . . .	46
2.6	Campo eléctrico, campo magnético y corriente de una configuración de dos solitones con $n = 2$ , $m = 0.2$ y $p = q = 1$ . . . . .	46
2.7	Comparación de energía para diferentes configuraciones como función del parámetro $q$ y la masa. . . . .	47
3.1	Funciones métricas y campo de Skyrme para diferentes valores de $u_0$ y la frecuencia para la rama 1. . . . .	56
3.2	Radio de la cavidad $r = r_m$ como función creciente del valor del campo de Skyrme en el origen para diferentes valores de $\omega$ (con $\lambda = 1$ ) para la rama 1. . . . .	57
3.3	<b>Panel izquierdo:</b> Energía y carga $U(1)$ de los solitones para dos valores de la frecuencia y varios valores del campo en el origen para la rama 1. Como se espera, las cargas divergen como $u_0 \rightarrow 1$ . <b>Panel derecho:</b> Comportamiento de $Q$ vs $M$ para los solitones en la rama 1. Para todos los casos $Q > M$ , como se puede ver al comparar con la curva roja ( $M = Q$ ) de referencia. . . . .	57
3.4	Funciones métricas y campo de Skyrme para la rama 2 con diferentes valores de $u_0$ . . . . .	58



3.5 **Panel superior izquierdo:** El radio del espejo como función creciente del valor  $u_0$ , para rama 2. Esta diverge cuando  $u_0 \rightarrow 1$ . **Panel superior derecho:** Masa y carga como función de  $u_0$ . Ambas divergen cuando el radio del espejo va a infinito. **Panel inferior:**  $Q$  vs  $M$ . Existe valor crítico bajo el que  $Q > M$  (curva  $Q = M$  incluida como referencia). . . . . 59



# Índice de Tablas

2.1	Mapeo skyrmion a cristal de tiempo. . . . .	37
2.2	Mapeo componentes del campo electromagnético. . . . .	37



# Resumen

En esta tesis doctoral se construyen y analizan soluciones, tanto analíticas como numéricas, de solitones gravitantes y solitones cargados en el modelo de Skyrme para los grupos de simetría internos  $SU(2)$  y  $SU(3)$ .

Cuando el modelo de Skyrme es acoplado a la teoría de Maxwell, veremos que es posible construir dos tipos de configuraciones analíticas. La primera de estas corresponde a solitones topológicos cargados en un volumen finito. Primero mostramos que usando ansätze apropiados para el campo de Skyrme y el potencial de Maxwell, el sistema de ecuaciones de campo puede ser reducido a una única ecuación de Heun, la que entrega una descripción analítica completa estos solitones. Dependiendo del ordenamiento en las coordenadas del espacio-tiempo y de la hipersuperficie sobre la que se integra la densidad de carga topológica, estos solitones pueden describir tanto skyrmiones cargados como cristales de tiempo. En ambos casos estudiaremos sus principales propiedades.

En este mismo contexto, también mostramos que la inclusión de una dependencia temporal en el ansatz para el campo de materia permite construir soluciones que describen multi-solitones cargados con estructura cristalina dentro de un volumen finito. Estas configuración son particularmente interesantes pues pueden constituir diferentes arreglos con alta carga topológica para un valor fijo del volumen en el que están confinados. Si bien estas soluciones existen solo cuando el término de Skyrme se anula, mostraremos que esta construcción es también posible cuando se agrega un término de masa al modelo.

Por otro lado, cuando la teoría de Skyrme es acoplada a relatividad general, estudiaremos la construcción de dos tipos de soluciones. El primer conjunto, construido de forma numérica, corresponde a familias de solitones sin carga topológica en un espacio-tiempo esféricamente simétrico dentro de una cavidad. Estos solitones, que pueden ser interpretados como estrellas de bosones, aparecen como

dos ramas posibles en las ecuaciones de campo de la teoría, una analítica y otra no analítica en la constante de acoplamiento de Skyrme. Para ambas ramas calculamos la energía del solitón y su carga asociada a la simetría  $U(1)$ .

En el segundo caso consideraremos la teoría Einstein  $SU(3)$ -Skyrme con constante cosmológica. Los solitones aquí construidos poseen carga topológica  $B = 4$ , y relacionan las constantes de acoplamiento de la teoría con el radio de la esfera de la métrica considerada, la que también puede ser promovida a una métrica con dependencia temporal. Veremos además cómo el ansatz puede ser modificado para construir dibariones en un volumen finito en el límite plano.



# Abstract

In this doctoral thesis, are constructed and analyzed both analytical and numerical solutions of gravitating solitons and gauged solitones in the Skyrme model for the internal symmetry groups  $SU(2)$  and  $SU(3)$ .

When the Skyrme model is coupled to Maxwell's theory, we will see that it is possible to construct two types of analytic configurations. The first of these corresponds to gauged topological solitons in a finite volume. First we show that using appropriate ansätze for the Skyrme field and Maxwell's potential, the field equations system can be reduced to a single Heun equation, which gives a complete analytic description of these solitons. Depending on the arrangement in the space-time coordinates and the hypersurface on which the topological charge density is integrated, these solitons can describe charged skyrmions and time crystals. In both cases we will study its main properties.

In the same context, we also show that the inclusion of a temporal dependency in the ansatz for the matter field allows to construct solutions that describe gauged multi-solitons with crystalline structure within a finite volume. These configurations are particularly interesting because they can constitute different arrangements with high topological charge for a fixed value of the volume in which they are confined. Although these solutions exist only when the Skyrme term vanish, we will show that this construction is also possible when a mass term is added to the model.

On the other hand, when the Skyrme theory is coupled to general relativity, we will study the construction of two types of solutions. The first set, constructed in a numerical way, corresponds to families of solitons without topological charge in a spherically symmetric space-time within a cavity. These solitons, that can be interpreted as boson stars, appear as two possible branches in the field equations of the theory, one branch analytic in the Skyrme coupling constant and the other not. For both branches we calculate the energy of the soliton and its charge associated to the  $U(1)$  symmetry.

In the second case we will consider the Einstein  $SU(3)$ -Skyrme model with cosmological constant. The solitons here constructed have topological charge  $B = 4$ , and relate the coupling constants of the theory with the radius of the sphere of the metric considered, which can also be promoted to a metric with temporal dependence. We will also see how the ansatz can be modified to construct dibarions in a finite volume in the flat limit.



# Introducción

Los modelos sigma no lineales se encuentran entre las teorías más importantes en física teórica debido a sus múltiples aplicaciones, que van desde la teoría cuántica de campos a la mecánica estadística [1]. Estas teorías son definidas por un conjunto de campos escalares que toman valores en un *target manifold* no lineal. Dentro de estos modelos, la teoría de Skyrme resulta ser una de las más célebres.

Introducida por Tony Skyrme a principios de los años 60' [2], la teoría de Skyrme es un modelo no lineal cuya principal característica es que permite la existencia de solitones topológicos estáticos con energía finita, llamados skyrmiones, cuyas excitaciones representan grados de libertad fermiónicos apropiados para describir bariones [3]. Notablemente esto se logra a partir de una acción que es puramente bosónica y cuyo campo dinámico es un escalar evaluado en un grupo  $SU(N)$  (usualmente considerado  $SU(2)$ ).

El modelo de Skyrme tiene como base la acción usual de un modelo sigma no lineal (que describe la dinámica de los piones a bajas energías) en adición al llamado término de Skyrme, introducido de tal manera que la acción en su conjunto permita la existencia del tipo de solitones topológicos antes mencionados, donde la carga topológica de dichas configuraciones es el número bariónico [4]. Esta acción puede ser obtenida a partir de la cromodinámica cuántica [5] en el límite de  $N$  grande, por lo que resulta ser una teoría efectiva para los bariones en el sector de bajas energías, es decir, cuando la constante de acoplamiento de la cromodinámica cuántica es muy grande.

Este modelo ha resultado muy útil en varios contextos tales como física nuclear, astrofísica, condensados de Bose-Einstein, líquidos nemáticos, materiales multi-férricos, imanes quirales y física de

materia condensada en general, y sus predicciones han estado en buena concordancia con los experimentos (ver Refs. [1, 3]).

Desde el punto de vista práctico, el problema con esta teoría es que sus ecuaciones son altamente no lineales, por lo que construir soluciones resulta en general una tarea ardua. De hecho, la mayoría de las soluciones que se han encontrado son numéricas y, hasta hace muy poco, no se conocían soluciones analíticas con carga topológica no trivial. A esto se suma que en este modelo el *bound* de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield no puede ser saturado, a diferencia de otras teorías no lineales como en Refs. [6, 7], donde este hecho ha sido crucial en la construcción de soluciones. Un problema natural que se desprende de esto es que el análisis de los diagramas de fase es bastante difícil de efectuar y, en particular, resultados analíticos sobre el rol del potencial químico en un volumen finito no estaban disponibles a pesar de los enormes esfuerzos en los trabajos pioneros en Refs. [8, 9, 10, 11, 12].

Por lo anterior, al intentar construir soluciones resulta de suma importancia escoger un buen ansatz para que las ecuaciones de campo se simplifiquen lo suficiente, de tal forma que permitan su integración, ya sea de forma analítica o numérica, pero que a su vez preserve las propiedades relevantes que vienen del carácter no lineal. El más conocido de estos es el llamado ansatz del erizo para sistemas esféricamente simétricos, que logra reducir las ecuaciones de campo a una única ecuación para el perfil del solitón. Este ansatz ha permitido calcular, por ejemplo, propiedades estáticas de los nucleones en el célebre trabajo en Ref. [13], así como construir las primeras soluciones de agujeros negros con pelo cuando el modelo es acoplado a relatividad general [14, 15] (siendo este el primer contraejemplo a la conjetura de no-pelo), entre otros. Fuera de este ansatz, sin embargo, es frecuente encontrar en la literatura la idea de que no es posible construir soluciones analíticas, más aún cuando la teoría es acoplada a Maxwell o a relatividad general (algunos resultados numéricos se pueden encontrar en Refs. [16, 17]), que serán los casos a considerar en este trabajo. Debido a esta complejidad, se han propuesto modificaciones del modelo de Skyrme tal que se puedan obtener soluciones definiendo un *bound* adecuado [18, 19, 20, 21, 22, 23, 24]. Estos modelos presentan características muy interesantes y su importancia va más allá de ser únicamente una simplificación del modelo original para efectos prácticos, sin embargo, estas modificaciones rompen con la motivación original de la teoría de Skyrme que nace tanto de consideraciones teóricas como fenomenológicas.

El presente trabajo tiene como principal objetivo la construcción de soluciones analíticas en el modelo original de Skyrme cuando es acoplado tanto a la teoría de Maxwell como a relatividad general. Para estos efectos introduciremos ansätze que van más allá del erizo y que permiten describir



configuraciones de solitones y multi-solitones dentro de un volumen finito.

El caso del modelo Skyrme-Maxwell resulta particularmente interesante, pues la construcción de soluciones analíticas ayudaría a comprender de mejor manera las interacciones entre bariones, mesones y fotones, así como lograr un entendimiento acerca del rol de los efectos no perturbativos en este escenario. En efecto, veremos cómo la construcción de solitones cargados en este modelo guarda estrecha relación con la teoría de resurgencia (ver Refs. [25, 26, 27] sobre este tópico). Para estos efectos usaremos el ansatz del erizo generalizado y un ansatz en ángulos de Euler, que han sido introducidos en Refs. [28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42].

Por otro lado, cuando la teoría de Skyrme es acoplada a relatividad general, abordaremos el problema de construir solitones gravitantes que resuelven de forma consistente las ecuaciones de Einstein soportadas por un tensor de energía-momentum que tiene como fuente el campo de Skyrme. Como punto a destacar, construiremos la primera solución analítica que describe skyrmiones gravitantes con alto número bariónico cuando el grupo de simetría interno es  $SU(3)$ . Para esto combinaremos el ansatz del erizo generalizado con el ansatz introducido por Balachandran *et al* para construir dibariones de forma numérica [43, 44].

Finalmente, un problema muy interesante tanto desde el punto de vista teórico como fenomenológico, es comprender de qué manera coexisten estados de multi-solitones confinados en un volumen finito. Se espera que emerjan estructuras cristalinas cuando la carga topológica del sistema sea lo suficientemente alta, y de hecho, algunas aproximaciones muy buenas han sido desarrolladas en Refs. [45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52], las que arrojan luz sobre ciertas propiedades de estas configuraciones. Sin embargo, hasta ahora no existen soluciones analíticas que describan dicho comportamiento. En este trabajo mostraremos que es posible construir soluciones analíticas que describen estructuras cristalinas de multi-solitones en el modelo sigma no lineal acoplado a la teoría de Maxwell e incluyendo un término de masa.

La organización de la presente tesis será la siguiente.

El Capítulo I está dedicado a presentar el modelo de Skyrme. Revisamos brevemente los fundamentos de esta teoría, la obtención de las ecuaciones de campo, la derivación de la energía de los solitones y la carga topológica. También introducimos los ansätze que serán utilizados a lo largo de esta tesis para construir las nuevas soluciones.

En el Capítulo II estudiamos el modelo de Skyrme acoplado a la teoría de Maxwell. Comenzamos

con una revisión acerca de la construcción de skyrmiones y anti-skyrmiones en un volumen finito para luego, usando esas mismas técnicas, construir soluciones que describen skyrmiones cargados y cristales de tiempo. También mostramos la construcción de multi-solitones con estructura cristalina dentro de un volumen finito, esto en el sector donde la constante de acoplamiento de Skyrme se anula. Veremos también que este formalismo admite la inclusión de un término de masa.

En el Capítulo III mostramos la obtención de solitones gravitantes en el modelo Einstein-Skyrme. El primer caso corresponde a solitones sin carga topológica dentro de una cavidad, que pueden ser interpretados como estrellas de bosones. El segundo caso corresponde a dibariones gravitantes en un espacio-tiempo con constante cosmológica como soluciones del modelo Einstein  $SU(3)$ -Skyrme.

El último capítulo está dedicado a las conclusiones y comentarios finales.

En esta tesis usaremos las siguientes convenciones: los índices griegos corren sobre las coordenadas del espacio-tiempo cuya signatura es  $(-, +, +, +)$ , mientras los índices latinos denotan índices de grupo. Consideraremos además  $\hbar = 1$ ,  $c = 1$ ,  $\mu_0 = 1$ .



# Capítulo 1

## El modelo de Skyrme

En esta sección presentaremos el modelo de Skyrme, sus fundamentos y principales características. Introduciremos también las ecuaciones de campo del modelo, la carga topológica y los ansatz que usaremos a lo largo de este trabajo para construir tanto soluciones analíticas como numéricas.

### 1.1 Bariones como solitones topológicos

La cromodinámica cuántica (QCD) es considerada la teoría fundamental de la interacción nuclear fuerte. Este modelo, básicamente, está constituido por sus partículas fundamentales, llamadas quark, que interactúan a través de los bosones de gauge, llamados gluones, y que en su conjunto conforman las partículas compuestas llamadas hadrones. Los hadrones son por lo tanto aquellas partículas dentro del modelo estandar que se mantienen unidas debido a la interacción fuerte, tales como el protón y el neutrón (las partículas que no sienten la interacción fuerte son llamadas leptones).

La interacción nuclear fuerte se caracteriza por las propiedades de libertad asintótica y el confinamiento del color, lo que la diferencia significativamente de las otras tres interacciones fundamentales en la naturaleza.

El confinamiento es la imposibilidad de aislar partículas con carga de color (quarks y gluones). Estas partículas no pueden ser observadas de forma separada bajo condiciones normales, sino que siempre se observan agrupadas para formar los hadrones (partículas “sin color”). La familia de los hadrones se divide a su vez en dos grupos de partículas; los mesones, que están formados por un quark y un anti-quark, y los bariones, formados por tres quarks con distinta carga de color.

Por otro lado, la propiedad de libertad asintótica se refiere a que la constante de acoplamiento de QCD tiende a cero en el sector de altas energías. Esto significa que asintóticamente las partículas se comportan como partículas libres en el sector de altas energías (cuando las partículas que sienten la interacción fuerte están muy cercanos entre sí). Así mismo, a medida que la distancia entre estas partículas aumenta la interacción fuerte se va haciendo cada vez mayor.

La propiedad de libertad asintótica, en términos prácticos, implica que no es posible calcular analíticamente procesos a escala de bajas energías usando teoría de perturbaciones, pues el parámetro perturbativo usualmente utilizado es la constante de acoplamiento, la que en este sector resulta ser grande. Por lo tanto, para estudiar este tipo de procesos es necesario tener una teoría de campos efectiva. Una de estas, y particularmente importante, es la teoría de Skyrme, que corresponde al límite de bajas energías de QCD en el límite del número de colores  $N_c$  grande, y que entrega una descripción bastante precisa de los bariones.

Esto puede ser visto de la siguiente manera. Sabemos que QCD es una teoría de gauge para el grupo  $SU(3)$  de color, que tiene como parámetros fundamentales la masa de los quarks y la constante de acoplamiento de la interacción fuerte.

En Ref. [5] 't Hooft postula la expansión en el límite de  $N_c$  grande de QCD. Este formalismo radica esencialmente en generalizar el número de colores de QCD desde tres a  $N_c$  para considerarlo como un parámetro más en la teoría de gauge. Si  $N_c$  resulta ser muy grande, en un diagrama de Feynman, el número de estados intermedios posibles que llevan diferentes colores puede ser suficientemente grande de tal manera que la suma sobre los posibles estados intermedios de lugar a un factor combinatorio muy grande. Este factor combinatorio es el responsable de la naturaleza de la expansión en serie de potencias sobre  $1/N_c$  que determina el comportamiento de los hadrones en este sector.

En particular, se ve que en el límite de  $N_c$  grande un modelo efectivo de mesones se vuelve un modelo débilmente acoplado tal que el decaimiento de los mesones está prohibido en este sector. Lo mismo ocurre por ejemplo con estados de *glueballs*, donde en el límite de  $N_c$  grande se vuelven estables y no interactuantes.

El comportamiento de los bariones en este límite, que resulta más complejo de tratar, fue estudiado en Ref. [53] mediante el formalismo de muchos cuerpos. Allí se demuestra que al calcular las contribuciones de los diagramas de Feynman, los exponentes del parámetro  $N_c$  determinan el comportamiento de la masa, el radio y la amplitud de scattering, de tal manera que los bariones pueden ser convenientemente modelados como solitones topológicos.

En términos generales los solitones son soluciones regulares de una teoría de campos no lineal. Cuando dicha teoría posee una carga topológica asociada, sus soluciones (con carga topológica no trivial) son llamados solitones topológicos, caracterizados principalmente por ser estables, con masa finita y estructura suave. Estos objetos son muy importantes en física teórica ya que permiten describir kinks, vórtices, monopolos, instantones y multi-solitones en general [1].

La relación entre los solitones topológicos del modelo de Skyrme y los bariones de QCD en el límite de  $N_c$  grande radica entonces en que los solitones poseen una carga topológica que es identificada con el número bariónico en QCD. Además, estos solitones son objetos pesados que interactúan fuertemente tal como los bariones en límite de  $N_c$  grande. Además, en su cuantización emerge una rica estructura donde el solitón cuantizado es identificado en sí mismo como un barión debido a sus números cuánticos.

En resumen, los solitones topológicos del modelo de Skyrme proveen una buena descripción de los bariones en el límite de bajas energías de la cromodinámica cuántica. A continuación revisamos las principales características de esta teoría.

## 1.2 La acción de Skyrme

La acción de la teoría de Skyrme es dada por

$$I_{\text{Skyrme}} = \int d^4x \sqrt{-g} \text{Tr} \left( \frac{F_\pi^2}{16} R^\mu R_\mu + \frac{1}{32e^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right), \quad (1.1)$$

donde los tensores  $R_\mu$  y  $F_{\mu\nu}$  se definen como

$$R_\mu = U^{-1} \nabla_\mu U, \quad F_{\mu\nu} = [R_\mu, R_\nu], \quad (1.2)$$

y las constantes de acoplamiento son determinadas experimentalmente, siendo  $F_\pi = 186$  MeV la constante de decaimiento de los piones y  $e = 5.45$  la constante adimensional que estabiliza los skyrmiones. Aquí  $\nabla_\mu$  denota la derivada parcial por estar en espacio-tiempo plano, pero en capítulos posteriores será definida apropiadamente cuando se introduzca el acoplamiento con las teorías de Maxwell y Einstein.

El campo fundamental  $U$  en la teoría de Skyrme es un campo evaluado en un grupo  $SU(N)$  (siendo  $SU(2)$  el caso frecuentemente estudiado), de modo que  $R_\mu = R_\mu^i t_i$  está en el álgebra  $su(N)$ ,

con  $t_i$  los generadores de dicho grupo.

En la literatura es usual usar como constantes de acoplamiento  $K = F_\pi^2/4$  y  $\lambda = 4/(e^2 F_\pi^2)$ , de tal manera que la acción en Ec. (1.1) queda

$$I_{\text{Skyrme}} = \frac{K}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \text{Tr} \left( \frac{1}{2} R^\mu R_\mu + \frac{\lambda}{16} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right). \quad (1.3)$$

A lo largo de este trabajo haremos referencia a la acción de Skyrme como la acción definida en Ec. (1.3).

En esta acción hay dos términos presentes. El primer término en Ec. (1.3) corresponde al modelo sigma no lineal, que describe de manera apropiada la dinámica de los piones a bajas energías. Pese a las bondades de este término, el modelo sigma no lineal por si solo, en espacio-tiempo plano, no admite soluciones de solitones topológicos estáticos con energía finita. El segundo término en Ec. (1.3), llamado término de Skyrme, es introducido en la teoría justamente para sortear este problema (problema conocido como argumento de escala de Derrick [54]). Este es el término covariante más simple que mantiene las ecuaciones de campo de segundo orden y que permite la existencia del tipo de solitones antes mencionados. Más aún, es el único término con cuatro derivadas que lleva a un Hamiltoniano positivo de segundo orden en las derivadas temporales (ver Refs. [28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42]).

### 1.3 Ecuaciones de campo

Las ecuaciones de campo, obtenidas al variar la acción de Skyrme respecto del campo fundamental  $U$ , pueden ser escritas de manera compacta como

$$\nabla^\mu R_\mu + \frac{\lambda}{4} \nabla^\mu [R^\nu, F_{\mu\nu}] = 0. \quad (1.4)$$

Estas son  $(N^2 - 1)$  ecuaciones de segundo orden no lineales y acopladas. En Apéndice A se detalla la derivación de estas ecuaciones.

Las ecuaciones de Skyrme son por supuesto muy difíciles de resolver y, como hemos señalado antes, la mayor parte de las soluciones que se han logrado construir son numéricas. Para lidiar con ellas resulta entonces fundamental escoger un buen ansatz que permita simplificar las ecuaciones,

pero resguardando las propiedades importantes del modelo. Al final de este capítulo veremos tres ansätze que resultan muy útiles al momento de simplificar estas ecuaciones y que permiten en muchos casos construir soluciones analíticas, aún en el caso con el grupo de simetría interno el grupo  $SU(3)$ .

## 1.4 Energía de los solitones

El tensor de energía-momentum, asociado a la invariancia bajo difeomorfismos del modelo, puede ser obtenido directamente usando la fórmula

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu}\mathcal{L} , \quad (1.5)$$

con  $\mathcal{L}$  la densidad lagrangiana. Es directo chequear que

$$T_{\mu\nu} = -\frac{K}{2} \text{Tr} \left[ \left( R_\mu R_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^\alpha R_\alpha \right) + \frac{\lambda}{4} \left( g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \right] . \quad (1.6)$$

A partir de Ec. (1.6) podemos calcular la energía como la integral de la componente  $T_{00}$  del tensor de energía-momentum, la que resulta ser

$$E = -K \int d^3x \text{Tr} \left( \frac{1}{4} R_i R^i + \frac{\lambda}{32} F_{ij} F^{ij} \right) - K \int d^3x \text{Tr} \left( \frac{1}{4} R_0 R^0 - \frac{\lambda}{16} F_{0i} F^{0i} \right) , \quad (1.7)$$

donde el primer término es la energía estática del modelo y el segundo término representa la energía de rotación. En Apéndice B se detalla la derivación de Ec. (1.7).

## 1.5 Número bariónico

Además de las cargas conservadas asociadas a simetrías de la acción, el modelo de Skyrme posee también carga topológica.

Una carga topológica es una carga conservada que no proviene de una simetría continua en la acción (no es una carga de Noether) y que no requiere el uso de las ecuaciones de campo para probar su conservación. En general, para una teoría con carga topológica  $Q$  asociada, se cumple que

$$E \geq |Q| , \quad (1.8)$$

relación conocida como *bound* de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS). Cuando este *bound* es saturado, es decir, cuando  $E = |Q|$ , las ecuaciones de campo del sistema se reducen a ecuaciones de primer orden. Vemos entonces que conocer la carga topológica para una teoría dada puede facilitar enormemente la tarea de construir soluciones, como ocurre por ejemplo en Refs. [6, 7]. Sin embargo, en el caso del modelo de Skyrme el *bound* BPS no puede ser saturado (ver Apéndice B para la derivación del *bound*) y por lo tanto, al menos de esta manera, no es posible reducir el sistema de ecuaciones a uno de primer orden. Esta es una de las razones por las que existen tan pocas soluciones del modelo de Skyrme en comparación a otras teorías no lineales.

En el modelo de Skyrme la carga topológica (cuando la densidad topológica es integrada sobre una superficie tipo espacio) corresponde al número bariónico de la configuración en Ref. [4]. Por este motivo llamamos  $B$  a esta expresión, y las soluciones regulares (solitones) de Ec. (1.4) con carga topológica no nula son los skyrmiones. En este modelo, así como en todos los ejemplos conocidos hasta ahora, esta carga resulta ser un número discreto (cuantizado).

En la teoría de Skyrme la carga topológica es dada por

$$B = \frac{1}{24\pi^2} \int \epsilon^{ijk} \text{Tr} \left[ \left( U^{-1} \partial_i U \right) \left( U^{-1} \partial_j U \right) \left( U^{-1} \partial_k U \right) \right]. \quad (1.9)$$

Siendo Ec. (1.9) un invariante topológico, su valor depende únicamente de las condiciones de borde para el campo  $U$  en consideración. Esto implica que si queremos cambiar el valor de  $B$  debemos necesariamente cambiar las condiciones de borde del campo y, como las condiciones de borde no pueden cambiar en el tiempo, tampoco puede hacerlo  $B$ . Deformar una configuración con una carga topológica dada en otra con carga topológica distinta requeriría de un costo energético infinito.

Como se ha señalado anteriormente, cuando la carga topológica (o número bariónico) es diferente de cero, dicha configuración no puede ser deformada mediante transformaciones continuas en el vacío trivial  $U = \mathbf{1}_{N \times N}$ , y se sigue de esto que un estado de skyrmiones no puede decaer en el vacío, asegurando en este sentido su estabilidad.

## 1.6 Ansatz para el campo de Skyrme

En esta sección mostraremos tres posibles formas de parametrizar el campo de Skyrme que permiten escribir las ecuaciones de campo de una manera más simple y, a través de ciertas elecciones para los



campos escalares presentes, construir soluciones numéricas y/o analíticas. Estos ansätze en general no poseen simetría esférica, pero para valores particulares de los campos escalares se reducen a los ansatz con simetría esférica usuales utilizados para construir soluciones de skyrmiones o dibariones [2, 3], cuando los grupos de simetría son  $SU(2)$  y  $SU(3)$ , respectivamente. En este trabajo nos enfocaremos principalmente en configuraciones sin simetría esférica.

### 1.6.1 $SU(2)$ : Ansatz del erizo generalizado

Cuando el grupo de simetría interno es  $SU(2)$ , una forma particularmente útil de parametrizar el campo de Skyrme para poder construir soluciones es a través del llamado ansatz del erizo generalizado, introducido y utilizado en Refs. [28, 42]. En este ansatz escribimos el campo  $U$  de la siguiente manera

$$U^{\pm 1} = Y^0 \mathbf{1}_{2 \times 2} \pm Y^i t_i, \quad (1.10)$$

donde  $\mathbf{1}_{2 \times 2}$  es la matrix identidad de  $2 \times 2$ ,  $t_i = -i\sigma_i$  son los generadores del grupo  $SU(2)$  y  $\sigma_i$  corresponden a las matrices de Pauli (ver Apéndice C acerca de las propiedades de las matrices de Pauli que se usan en esta construcción). Además, en Ec. (1.10) definimos

$$Y^0 = \cos \alpha(x^\mu), \quad Y^i = \hat{n}^i \sin \alpha(x^\mu), \quad \text{tal que} \quad (Y^0)^2 + Y_i Y^i = 1, \quad (1.11)$$

con el vector unitario radial generalizado dado por

$$\hat{n}^1 = \cos \Theta(x^\mu) \sin \Phi(x^\mu), \quad \hat{n}^2 = \sin \Theta(x^\mu) \sin \Phi(x^\mu), \quad \hat{n}^3 = \cos \Phi(x^\mu). \quad (1.12)$$

Aquí  $\alpha, \Theta, \Phi$  son funciones arbitrarias de las coordenadas del espacio-tiempo.

Las ecuaciones de campo en este ansatz pueden ser calculadas directamente. Al reemplazar Ecs.

(1.11) y (1.12) en la acción definida en Ec. (1.3), obtenemos la acción efectiva

$$I_{\text{erizo}} = K \int d^4x \sqrt{-g} \left( \begin{array}{l} \frac{1}{2} (\nabla_\mu \alpha \nabla^\mu \alpha + \sin^2 \alpha \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi + \sin^2 \alpha \sin^2 \Phi \nabla_\mu \Theta \nabla^\mu \Theta) \\ + \frac{\lambda}{2} \left( \begin{array}{l} \sin^2 \alpha ((\nabla_\mu \alpha \nabla^\mu \alpha)(\nabla_\nu \Phi \nabla^\nu \Phi) - (\nabla_\mu \alpha \nabla^\mu \Phi)^2) \\ + \sin^2 \alpha \sin^2 \Phi ((\nabla_\mu \alpha \nabla^\mu \alpha)(\nabla_\nu \Theta \nabla^\nu \Theta) - (\nabla_\mu \alpha \nabla^\mu \Theta)^2) \\ + \sin^4 \alpha \sin^2 \Phi ((\nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi)(\nabla_\nu \Theta \nabla^\nu \Theta) - (\nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Theta)^2) \end{array} \right) \end{array} \right). \quad (1.13)$$

Ahora, variando Ec. (1.13) respecto a los campos  $\alpha$ ,  $\Theta$  y  $\Phi$  llegamos al sistema de ecuaciones

$$+ \lambda \left( \begin{array}{l} (-\square \alpha + \sin(\alpha) \cos(\alpha) (\nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi + \sin^2 \Phi \nabla_\mu \Theta \nabla^\mu \Theta)) \\ \sin(\alpha) \cos(\alpha) ((\nabla_\mu \alpha \nabla^\mu \alpha)(\nabla_\nu \Phi \nabla^\nu \Phi) - (\nabla_\mu \alpha \nabla^\mu \Phi)^2) \\ + \sin(\alpha) \cos(\alpha) \sin^2(\Phi) ((\nabla_\mu \alpha \nabla^\mu \alpha)(\nabla_\nu \Theta \nabla^\nu \Theta) - (\nabla_\mu \alpha \nabla^\mu \Theta)^2) \\ + 2 \sin^3(\alpha) \cos(\alpha) \sin^2(\Phi) ((\nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi)(\nabla_\nu \Theta \nabla^\nu \Theta) - (\nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Theta)^2) \\ - \nabla_\mu (\sin^2(\alpha) (\nabla_\nu \Phi \nabla^\nu \Phi) \nabla^\mu \alpha) + \nabla_\mu (\sin^2(\alpha) (\nabla_\nu \alpha \nabla^\nu \Phi) \nabla^\mu \Phi) \\ - \nabla_\mu (\sin^2(\alpha) \sin^2(\Phi) (\nabla_\nu \Theta \nabla^\nu \Theta) \nabla^\mu \alpha) + \nabla_\mu (\sin^2(\alpha) \sin^2(\Phi) (\nabla_\nu \alpha \nabla^\nu \Theta) \nabla^\mu \Theta) \end{array} \right) = 0, \quad (1.14)$$

$$+ \lambda \left( \begin{array}{l} (-\sin^2(\alpha) \square \Phi - 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \nabla_\mu \alpha \nabla^\mu \Phi + \sin^2(\alpha) \sin(\Phi) \cos(\Phi) \nabla_\mu \Theta \nabla^\mu \Theta) \\ \sin^2(\alpha) \sin(\Phi) \cos(\Phi) ((\nabla_\mu \alpha \nabla^\mu \alpha)(\nabla_\nu \Theta \nabla^\nu \Theta) - (\nabla_\mu \alpha \nabla^\mu \Theta)^2) \\ + \sin^4(\alpha) \sin(\Phi) \cos(\Phi) ((\nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi)(\nabla_\nu \Theta \nabla^\nu \Theta) - (\nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Theta)^2) \\ - \nabla_\mu (\sin^2(\alpha) (\nabla_\nu \alpha \nabla^\nu \Phi) \nabla^\mu \Phi) + \nabla_\mu (\sin^2(\alpha) (\nabla_\nu \alpha \nabla^\nu \Theta) \nabla^\mu \alpha) \\ - \nabla_\mu (\sin^4(\alpha) \sin^2(\Phi) (\nabla_\nu \Theta \nabla^\nu \Theta) \nabla^\mu \Phi) + \nabla_\mu (\sin^4(\alpha) \sin^2(\Phi) (\nabla_\nu \Phi \nabla^\nu \Theta) \nabla^\mu \Theta) \end{array} \right) = 0, \quad (1.15)$$

$$\left( \begin{array}{l} (-\sin^2(\alpha) \sin^2(\Phi) \square \Theta - 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \sin^2(\Phi) \nabla_\mu \alpha \nabla^\mu \Theta - 2 \sin^2(\alpha) \sin(\Phi) \cos(\Phi) \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Theta) \\ + \lambda \left( \begin{array}{l} -\nabla_\mu [\sin^2(\alpha) \sin^2(\Phi) (\nabla_\nu \alpha \nabla^\nu \alpha) \nabla^\mu \Theta] + \nabla_\mu [\sin^2(\alpha) \sin^2(\Phi) (\nabla_\nu \alpha \nabla^\nu \Theta) \nabla^\mu \alpha] \\ -\nabla_\mu [\sin^4(\alpha) \sin^2(\Phi) (\nabla_\nu \Phi \nabla^\nu \Phi) \nabla^\mu \Theta] + \nabla_\mu [\sin^4(\alpha) \sin^2(\Phi) (\nabla_\nu \Phi \nabla^\nu \Theta) \nabla^\mu \Phi] \end{array} \right) \end{array} \right) = 0. \quad (1.16)$$

Por otro lado, la densidad de carga topológica es dada por

$$\rho_B = 12 \left( \sin^2(\alpha) \sin(\Phi) \right) d\alpha \wedge d\Phi \wedge d\Theta, \quad (1.17)$$

donde vemos que para tener carga topológica no nula se debe cumplir que  $d\alpha \wedge d\Phi \wedge d\Theta \neq 0$ , es decir, las tres funciones deben ser independientes.

La idea de esta construcción es que, observando las Ecs. (1.14), (1.15) y (1.16), se ve que para

ciertas dependencias en las coordenadas de las funciones  $\alpha$ ,  $\Theta$ ,  $\Phi$ , ocurre que aún cuando el campo  $U$  no posea simetría esférica, el tensor de energía-momentum sí la tendrá. De forma más general, es posible construir configuraciones tal que el tensor de energía-momentum respete las simetrías del espacio-tiempo definidas por la métrica en consideración, aún cuando el campo de materia no posee los respectivos vectores de Killing asociados a dicha simetría de interés. Esto, como veremos en los capítulos posteriores, ayuda enormemente a simplificar las ecuaciones de campo y a obtener configuraciones físicamente muy interesantes.

Es importante notar que este ansatz se reduce al ansatz original propuesto por Skyrme en Ref. [2] cuando el perfil es únicamente una función radial,  $\alpha = \alpha(R)$ , y las funciones  $\Theta$  y  $\Phi$  son las coordenadas angulares de la métrica plana en coordenadas esféricas

$$ds^2 = -dt^2 + dR^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) .$$

### 1.6.2 $SU(3)$ : Ansatz de Balachandran

En el caso en que el campo de Skyrme es un elemento del grupo  $SU(3)$ , el ansatz natural a utilizar en la construcción de nuevas soluciones es una generalización de aquel introducido por Balachandran y colaboradores en Refs. [43, 44] para describir dibariones en espacio-tiempo plano de forma numérica. El campo de Skyrme es construido usando un subconjunto de las matrices de Gell-Mann que generan  $SU(3)$ , a saber  $\{\lambda_2, -\lambda_5, \lambda_7\}$ , que conforman el subálgebra  $so(3) \subseteq su(3)$ . En su generalización a simetría no esférica, definiremos el campo de Skyrme como

$$U_B = \exp(i\psi) \mathbf{1}_{3 \times 3} + i \sin(\chi) \exp\left(-\frac{i\psi}{2}\right) \mathbf{T} + \left(\cos(\chi) \exp\left(-\frac{i\psi}{2}\right) - \exp(i\psi)\right) \mathbf{T}^2 , \quad (1.18)$$

donde

$$\mathbf{T} = \vec{\Lambda} \cdot \hat{n} , \quad \hat{n} = (\sin \Theta \cos \Phi , \sin \Theta \sin \Phi , \cos \Theta) , \quad \vec{\Lambda} = (\lambda_7 , -\lambda_5 , \lambda_2) . \quad (1.19)$$

Aquí  $\psi$ ,  $\chi$ ,  $\Theta$  y  $\Phi$  son en principio funciones arbitrarias de las coordenadas, y la elección particular de estas determinará la integrabilidad de las ecuaciones de campo y la posible construcción de soluciones.

El campo de Skyrme definido en Ecs. (1.18) y (1.19) es por lo tanto un elemento del grupo  $SO(3) \in SU(3)$ , y al no ser un embebimiento trivial (en el sentido de que no es un elemento de  $SU(2)$ ) permite la existencia de configuraciones con alta carga topológica.

Al igual como hemos argumentado para el caso del ansatz del erizo generalizado, la idea es escoger una dependencia apropiada de las funciones escalares tal que las ecuaciones de campo se reduzcan lo más posible, pero garantizando en este caso que el campo de Skyrme siga siendo un elemento genuinamente  $SU(3)$ .

El campo definido en Ecs. (1.18) y (1.19) se reduce al ansatz original con simetría esférica  $U_{\text{esf}}$  en Refs. [43, 44] cuando ambos perfiles son radiales  $\psi = \psi(r)$ ,  $\chi = \chi(r)$  y las funciones  $\Theta$ ,  $\Phi$  corresponden a las coordenadas angulares. A saber

$$U_{\text{esf}} = e^{i\psi(r)} \mathbf{1}_{3 \times 3} + i \sin \chi(r) e^{-i\psi(r)/2} \vec{\Lambda} \cdot \hat{x} + [\cos \chi(r) e^{-i\psi(r)/2} - e^{i\psi(r)}] (\vec{\Lambda} \cdot \hat{x})^2 . \quad (1.20)$$

donde  $\hat{x} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ .

### 1.6.3 $SU(N)$ : Campo de Skyrme en ángulos de Euler

Como último caso, cuando  $U \in SU(N)$ , siempre es posible escribir el campo de Skyrme en su parametrización en ángulos de Euler. La derivación de la forma general para un elemento de un grupo  $SU(N)$  ha sido estudiada en detalle en Refs. [55, 56]. Esta fórmula, para nuestros casos de interés, a saber  $U \in SU(2)$  y  $U \in SU(3)$ , llevan respectivamente a

$$U_{SU(2)} = e^{i\frac{\alpha}{2}\sigma_3} e^{i\frac{\beta}{2}\sigma_2} e^{i\frac{\rho}{2}\sigma_3} , \quad (1.21)$$

$$U_{SU(3)} = U_1(\alpha, \beta, \rho) U_2(\Theta, \Phi) U_3(a, b, c) , \quad (1.22)$$

donde

$$U_1(\alpha, \beta, \rho) = e^{i\frac{\alpha}{2}\lambda_3} e^{i\frac{\beta}{2}\lambda_2} e^{i\frac{\rho}{2}\lambda_3} , \quad U_2(\Theta, \Phi) = e^{i\Theta\lambda_5} e^{i\Phi\lambda_8} , \quad U_3(a, b, c) = e^{i\frac{a}{2}\lambda_3} e^{i\frac{b}{2}\lambda_2} e^{i\frac{c}{2}\lambda_3} ,$$

$\alpha, \beta, \rho, a, b, c, \Theta$  y  $\Phi$  son funciones arbitrarias de las coordenadas  $x^\mu$ ,  $\{\sigma_i\}$ , con  $i = 1, \dots, 3$  son las matrices de Pauli y  $\{\lambda_i\}$ , con  $i = 1, \dots, 8$ , son las matrices de Gell-Mann (ver Apéndice C para las propiedades de estas matrices).

Escribir el campo de esta manera es particularmente útil, pues a partir de la forma de  $U$  es directo construir la métrica de la variedad del grupo usando las *left invariant forms* (ver Refs. [55, 56]). Dicha métrica, como veremos en los capítulos posteriores, puede ser considerada como la del espacio-tiempo mismo o proporcional a esta, lo que simplifica enormemente las ecuaciones de campo.

## Capítulo 2

# Solitones en el modelo de Skyrme acoplado a Maxwell

En este capítulo estudiaremos el modelo de Skyrme acoplado a la teoría de Maxwell. Construiremos soluciones analíticas que describen skyrmiones cargados, cristales de tiempo y estructuras cristalinas de multi-solitones en un volumen finito. Esto, haciendo uso de los ansatz del erizo generalizado y los ángulos de Euler introducidos en el Capítulo I.

### 2.1 El modelo Skyrme-Maxwell

La acción de la teoría Skyrme-Maxwell es dada por

$$I_{\text{SM}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{K}{2} \left( \frac{1}{2} \text{Tr} (R^\mu R_\mu) + \frac{\lambda}{16} \text{Tr} (G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}) \right) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right], \quad (2.1)$$

$$R_\mu = U^{-1} D_\mu U, \quad G_{\mu\nu} = [R_\mu, R_\nu], \quad D_\mu = \nabla_\mu + A_\mu [t_3, \cdot], \quad (2.2)$$

$$U \in SU(2), \quad R_\mu = R_\mu^j t_j, \quad t_j = i\sigma_j, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (2.3)$$

donde  $A_\mu$  es el potencial de gauge y  $F_{\mu\nu}$  el tensor de intensidad de campo electromagnético. El tensor de energía-momentum de esta teoría viene dado por

$$T_{\mu\nu} = -\frac{K}{2} \text{Tr} \left[ R_\mu R_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^\alpha R_\alpha + \frac{\lambda}{4} \left( g^{\alpha\beta} G_{\mu\alpha} G_{\nu\beta} - \frac{g_{\mu\nu}}{4} G_{\sigma\rho} G^{\sigma\rho} \right) \right] + \bar{T}_{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

donde

$$\bar{T}_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g_{\mu\nu} , \quad (2.5)$$

es el tensor de energía-momentum asociado al campo electromagnético.

Al variar la acción en Ec. (2.1) respecto del campo de Skyrme  $U$  y respecto del potencial  $A_{\mu}$ , obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones de campo

$$D^{\mu} \left( R_{\mu} + \frac{\lambda}{4} [R^{\nu}, G_{\mu\nu}] \right) = 0 , \quad (2.6)$$

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = J^{\nu} , \quad (2.7)$$

donde la corriente  $J^{\mu}$  es dada por

$$J^{\mu} = \frac{K}{2} \text{Tr} \left[ \hat{O} R^{\mu} + \frac{\lambda}{4} \hat{O} [R_{\nu}, G^{\mu\nu}] \right] , \quad (2.8)$$

con

$$\hat{O} = U^{-1} t_3 U - t_3 .$$

Notemos que cuando el potencial de gauge es una constante en la dirección tipo tiempo, las ecuaciones (2.6) describen el modelo de Skyrme con potencial químico de isospin finito.

Nos referiremos como skyrmiones cargados y cristales de tiempo a soluciones regulares del sistema de ecuaciones definido en Ecs. (2.6), (2.7) y (2.8) que poseen carga topológica no nula. La carga topológica adecuada para el modelo Skyrme-Maxwell fue construida en [57], y es dada por

$$W = \frac{1}{24\pi^2} \int_{\Sigma} \rho_B , \quad (2.9)$$

donde

$$\rho_B = \epsilon^{ijk} \text{Tr} \left\{ \left( U^{-1} \partial_i U \right) \left( U^{-1} \partial_j U \right) \left( U^{-1} \partial_k U \right) - \partial_i \left[ 3A_j t_3 \left( U^{-1} \partial_k U + (\partial_k U) U^{-1} \right) \right] \right\} . \quad (2.10)$$

Notar que hay un término extra con respecto al caso no cargado que asegura la invariancia de gauge de la carga topológica y su conservación al mismo tiempo, y que es responsable del efecto Callan-Witten

[57].

En la literatura, usualmente el único caso considerado es aquel en que la integración sobre la densidad de carga topológica se efectúa sobre una superficie tipo espacio  $\Sigma$ , tal que  $W$  corresponda a la carga bariónica, como hemos discutido en el Capítulo I. Sin embargo, desde el punto de vista matemático, uno puede integrar la 3-forma  $\rho_B$  sobre cualquier hipersuperficie tridimensional, y cualquier  $W$  obtenido será un invariante topológico. En particular, en Refs. [39, 40] se ha mostrado que pueden ser obtenidas configuraciones muy interesantes cuando  $\Sigma$  es tipo tiempo.

El interés en estos casos emerge de las siguientes consideraciones: sabemos que cuando  $W \neq 0$  (independiente de la hipersuperficie sobre que la que uno integre) no es posible deformar continuamente el ansatz correspondiente en  $U = \mathbf{1}_{2 \times 2}$ . En particular, cuando  $\rho_B$  es diferente de cero sobre una hipersuperficie tipo tiempo, se obtienen solitones topológicos cargados dependientes del tiempo. La dependencia temporal en esta clase de solitones está topológicamente protegida, por lo que estas configuraciones no pueden decaer en configuraciones estáticas por medio de transformaciones continuas (ya que para configuraciones estáticas  $\rho_B$  se anula sobre una hipersuperficie tipo tiempo). Ya que estos solitones resultan ser periódicos en el tiempo podemos llamarlos cristales de tiempo topológicamente protegidos por la teoría de homotopía.

## 2.2 Skyrmiones en un volumen finito

En Ref. [39], haciendo uso del ansatz del erizo generalizado que hemos presentado en Capítulo I, se logró construir la primera solución analítica en espacio-tiempo plano que describe estados de skyrmiones y anti-skyrmiones en un volumen finito. A continuación mostramos brevemente esta construcción para luego extenderlo al caso cargado.

Consideremos como punto de partida una métrica plana en la forma

$$ds^2 = -dt^2 + l^2(dr^2 + d\gamma^2 + d\phi^2), \quad (2.11)$$

donde la constante  $l$  representa el lado de la caja donde vive el skyrmion. Las coordenadas  $r, \gamma, \phi$  tienen como rangos

$$0 \leq r \leq 2\pi, \quad 0 \leq \gamma \leq 4\pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi. \quad (2.12)$$

En un cálculo largo pero directo se puede verificar, de acuerdo a Ecs. (1.14), (1.15) y (1.16) sobre la métrica definida en Ec. (2.11), introduciendo las siguientes relaciones para los campos escalares, que

$$\Theta = \frac{\gamma + \phi}{2}, \quad \tan \Phi = \frac{\tan H}{\cos A}, \quad \tan \alpha = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \Phi}}{\tan A}, \quad (2.13)$$

$$A = \frac{\gamma - \phi}{2}, \quad H = H(t, r), \quad (2.14)$$

y las ecuaciones de Skyrme definidas en Ec. (1.4) se reducen a una única ecuación para el perfil  $H$ , a saber, una ecuación de Sine-Gordon de la forma

$$\square H - \frac{\lambda}{8l^2(\lambda + 2l^2)} \sin(4H) = 0, \quad (2.15)$$

donde  $\square$  es el operador de D'Alambert en dos dimensiones. Usando Ec. (1.9) se puede comprobar que las configuraciones que son solución de Ec. (2.15), bajo adecuadas condiciones de borde, poseen número bariónico  $B = \{-1, 0, 1\}$ . Estos son los estados de skyrmiones y anti-skyrmiones.

Es posible mostrar además que esta construcción permite la inclusión de un potencial químico a través del mapeo

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + \bar{\mu}[t_3, ]\delta_{\mu 0},$$

con  $\bar{\mu}$  el potencial químico de isospin, donde en Ref. [39] su valor crítico es obtenido en términos de los parámetros de la teoría. La inclusión de un potencial químico resulta ser un caso particular en la teoría Skyrme-Maxwell, la que detallamos a continuación.

## 2.3 Skyrmiones cargados

En esta subsección, siguiendo el formalismo introducido en Refs. [39, 40] donde se presentan estados de skyrmiones y anti-skyrmiones en un volumen finito y con potencial químico, así como la reducción del sistema de ecuaciones del modelo Skyrme-Maxwell, mostraremos la construcción de soluciones analíticas que describen skyrmiones cargados. Los resultados de esta sección se pueden encontrar en Ref. [41].



### 2.3.1 Ansatz, ecuaciones de campo y ecuación de Heun

Como queremos estudiar el efecto de los solitones en un volumen finito, comenzaremos por introducir el sistema en un caja cuya métrica es dada por

$$ds^2 = -dt^2 + l_1^2 dr^2 + l_2^2 d\gamma^2 + l_3^2 d\phi^2 . \quad (2.16)$$

Esta métrica es la generalización de aquella introducida en Ec. (2.11) donde los lados de la caja tienen diferentes longitudes. Las coordenadas adimensionales  $r$ ,  $\gamma$ ,  $\phi$  tienen los rangos

$$0 \leq r \leq 2\pi , \quad 0 \leq \gamma \leq 4\pi , \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi . \quad (2.17)$$

Para el campo de materia usaremos el ansatz en ángulos de Euler para el caso  $SU(2)$  que hemos introducido en Ec. (1.21), con la siguiente elección en los campos escalares

$$\alpha = p\gamma , \quad \beta = 2H(r) , \quad \rho = q\phi , \quad p, q \in \mathbb{N} . \quad (2.18)$$

Notar que para que el ansatz cubra  $SU(2)$  un número entero de veces, los parámetros  $p$  y  $q$  deben ser enteros.

Por otro lado, para el potencial electromagnético asumiremos una dependencia únicamente radial de la siguiente forma

$$A_\mu = (b_1(r), 0, b_2(r), b_3(r)) . \quad (2.19)$$

Al introducir el ansatz métrico definido en Ec. (2.16), el campo de Skyrme presentado en Ec. (2.18) y el campo de gauge en Ec. (2.19) en las ecuaciones de campo (2.6) tenemos

$$D^\mu \left( R_\mu + \frac{\lambda}{4} [R^\nu, G_{\mu\nu}] \right) = E^i t_i = 0 , \quad i = 1, 2, 3.$$

Se puede chequear que estas se reducen a una única ecuación (ya que la tercera ecuación es idénticamente

satisfecha y la primera y segunda son proporcionales), a saber

$$\begin{aligned} E^3 &= 0 , \\ E^1 &= I_1 P [H] , \\ E^2 &= I_2 P [H] , \quad I_1 \neq 0 , \quad I_2 \neq 0 , \end{aligned}$$

donde  $I_j$  son funciones reales, mientras

$$\begin{aligned} 0 = P [H] &= 4 \left( X_1 \sin^2(H) + \frac{\lambda l_1^2}{2} \left( \frac{p^2}{l_2^2} + \frac{q^2}{l_3^2} \right) + 2l_1^2 \right) H'' + 2X_1 \sin(2H)H'^2 + 4 \sin^2(H)X_1' H' \\ &+ \left( 2\lambda l_1^4 \left( \frac{pb_2}{l_2^2} + \frac{qb_3}{l_3^2} \right) \left( \frac{pb_2}{l_2^2} + \frac{qb_3}{l_3^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{p^2}{l_2^2} - \frac{q^2}{l_3^2} \right) \right) - \frac{l_1^4}{l_2^2 l_3^2} \frac{\lambda p^2 q^2}{2} - \frac{l_1^2}{4} \left( \frac{p^2}{l_2^2} + \frac{q^2}{l_3^2} \right) X_1 \right) \sin(4H) \\ &- \frac{2l_1^2}{\lambda} X_1 \sin(2H) , \end{aligned}$$

con

$$X_1 = 4\lambda \left( -2l_1^2 b_1^2 + \frac{l_1^2}{l_2^2} b_2(2b_2 + p) + \frac{l_1^2}{l_3^2} b_3(2b_3 - q) \right) .$$

Por otro lado, las ecuaciones de Maxwell en Ec. (2.7) se reducen a

$$b_I'' = -\frac{K}{2} (M_{IJ} b_J + N_I) ,$$

donde

$$\begin{aligned} M_{11} &= 4 \sin^2(H) \left( 2\lambda H'^2 + \frac{\lambda l_1^2}{2} \left( \frac{p^2}{l_2^2} + \frac{q^2}{l_3^2} \right) \cos^2(H) + 2l_1^2 \right) , & M_{23} &= -\frac{l_1^2}{2l_3^2} \lambda p q \sin^2(2H) , \\ M_{22} &= M_{11} + \frac{p}{q} M_{32} , & M_{32} &= \frac{l_3^2}{l_2^2} M_{23} , & M_{33} &= M_{11} + \frac{q}{p} M_{23} , & N_1 &= 0 , \\ N_2 &= \frac{p}{4} M_{11} + \frac{1}{4q} \left( \frac{l_3^2 p^2}{l_2^2} - q^2 \right) M_{23} , & N_3 &= -\frac{q}{4} M_{11} + \frac{1}{4p} \left( \frac{l_3^2 p^2}{l_2^2} - q^2 \right) M_{23} . \end{aligned}$$

Tenemos que con los ansatz introducidos para la métrica, el campo de Skyrme y el potencial de gauge, hemos logrado reducir el sistema a cuatro ecuaciones. Notemos ahora que si en adición imponemos

las siguientes relaciones algebraicas

$$X_1 = -\frac{\lambda l_1^2}{2} \left( \frac{p^2}{l_2^2} + \frac{q^2}{l_3^2} \right) = \text{constante} , \quad \frac{p}{l_2^2} b_2 + \frac{q}{l_3^2} b_3 = -\frac{1}{4} \left( \frac{p^2}{l_2^2} - \frac{q^2}{l_3^2} \right) , \quad (2.20)$$

el sistema completo de ecuaciones se reduce a solamente dos ecuaciones de campo (donde una viene de las ecuaciones de Skyrme y la otra de las ecuaciones de Maxwell), que toman la forma

$$\left( 8 \left( \frac{p^2}{l_2^2} + \frac{q^2}{l_3^2} \right)^{-1} + 2\lambda \cos^2(H) \right) H'' + \sin(2H)(l_1^2 - \lambda H'^2) = 0 , \quad (2.21)$$

$$b_3'' - \frac{K}{4} (q - 4b_3) \sin^2(H) \left\{ 4l_1^2 + 4\lambda H'^2 + \lambda l_1^2 \left( \frac{p^2}{l_2^2} + \frac{q^2}{l_3^2} \right) \cos^2(H) \right\} = 0 . \quad (2.22)$$

Hasta ahora hemos reducido el sistema de ecuaciones del modelo Skyrme-Maxwell de siete a solo dos ecuaciones diferenciales ordinarias. Luego, para construir soluciones explícitas de skyrmiones cargados, debemos buscar soluciones para el perfil  $H(r)$  de Ec. (2.21). Una vez que el perfil es conocido Ec. (2.22) se vuelve una ecuación lineal tipo Schrodinger para la componente  $b_3$  del potencial de gauge. Finalmente, una vez que  $b_3$  sea determinado, las otras dos componentes del potencial de gauge puede ser obtenidad de las relaciones en Ecs. (2.20).

Usando Ec. (2.9) y (2.10) es directo verificar que para estas configuraciones la carga topológica dada por

$$B = -pq \int \sin(2H) dH + 2 \left[ \cos^2(H)(qb_2 - pb_3) \right] \Big|_0^{2\pi} ,$$

lleva a

$$B = -\frac{(p^2 + q^2)(q - 4b_3(0))}{2p} , \quad \text{ó} \quad B = \frac{(p^2 + q^2)(q - 4b_3(2\pi))}{2p} ,$$

cuando las condiciones de borde son escogidas como

$$H(2\pi) = \frac{\pi}{2} , H(0) = 0 , \quad \text{ó} \quad H(2\pi) = 0 , H(0) = \frac{\pi}{2} .$$

Es directo mostrar que existe una solución no trivial de Ec. (2.21) para la función  $H$ , dada por

$$H(r) = \frac{l_1}{\sqrt{\lambda}} r + h_0 , \quad (2.23)$$

donde  $h_0$  es una constante. Al imponer las condiciones de borde en la solución se fijan las constantes  $l_1$  y  $h_0$  según

$$l_1 = \frac{\sqrt{\lambda}}{4}, \quad h_0 = 0, \quad \text{ó} \quad l_1 = -\frac{\sqrt{\lambda}}{4}, \quad h_0 = \frac{\pi}{2}. \quad (2.24)$$

En lo que sigue estudiaremos la ecuación de Maxwell (2.22) una vez que la solución lineal en Ec. (2.23) es impuesta. Para analizar esta ecuación resulta conveniente introducir dos nuevas variables, a saber  $x$  e  $y$ , definidas como

$$x = \frac{l_1}{\sqrt{\lambda}}r + h_0, \quad y = q - 4b_3, \quad (2.25)$$

de tal manera que Ec. (2.22) se vuelve

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(8K\lambda \sin^2 x + \Gamma^2 \sin^2 2x\right)y = 0, \quad (2.26)$$

donde la constante  $\Gamma \geq 0$  es

$$\Gamma^2 := \frac{K\lambda^2}{4} \left( \frac{p^2}{l_2^2} + \frac{q^2}{l_3^2} \right).$$

Notablemente Ec.(2.26) puede ser llevada a la forma de la famosa ecuación de Heun confluyente como

$$\frac{d^2}{dz^2}Y(z) + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \epsilon\right)\frac{d}{dz}Y(z) + \frac{\alpha z - q}{z(z-1)}Y(z) = 0, \quad (2.27)$$

donde hemos definido

$$\begin{aligned} z &= \cos^2 x, & Y(z) &= e^{-i\Gamma z} y(\arccos \sqrt{z}), \\ \gamma &= \delta = 1/2, & \epsilon &= 2i\Gamma, & \alpha &= i\Gamma + 2K\lambda, & q &= i\Gamma/2 + 2K\lambda. \end{aligned} \quad (2.28)$$

La solución general de esta ecuación es dada por

$$\begin{aligned} Y(z) &= C_1 \text{HeunC}(i\Gamma + 2K\lambda, 1/2, 1/2, 2i\Gamma, i\Gamma/2 + 2K\lambda; z) \\ &+ C_2 \sqrt{z} \text{HeunC}(2i\Gamma + 2K\lambda, 3/2, 1/2, 2i\Gamma, 3i\Gamma/2 + 2K\lambda - 1/4; z), \end{aligned} \quad (2.29)$$

donde  $C_1$  and  $C_2$  son constantes de integración, y  $\text{HeunC}(\alpha, \gamma, \delta, \epsilon, q; z)$  es la función de Heun con-

fluente.

### 2.3.2 Campo eléctrico, campo magnético y condiciones de borde

Usando las relaciones

$$E_i = F_{0i} , \quad B_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{jk} ,$$

podemos calcular las componentes no nulas del tensor electromagnético asociadas a los campos eléctricos y magnéticos. Estas son dadas por

$$E_r = \frac{\sqrt{l_3^2 p^2 + l_2^2 q^2}}{l_3 p} b'_3 , \quad B_\gamma = \frac{1}{l_1^2 l_3^2} b'_3 , \quad B_\phi = \frac{q}{l_1^2 l_3 p} b'_3 .$$

El requisito de que el campo eléctrico sobre las superficies de la caja (en  $r = 0$  y  $r = 2\pi$ ) se anule lleva a las condiciones  $b'_3(0) = b'_3(2\pi) = 0$ , lo que define condiciones de Neumann para el potencial de gauge (y como  $b_3$  es parte de la conexión, esta es definida módulo una constante). A pesar de que Ec. (2.22) puede ser resuelta analíticamente en término de las funciones de Heun confluentes, es más simple imponer las condiciones de borde a través de una integración numérica. Por consiguiente Ec. (2.26) define el siguiente problema de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} \left( \hat{p}(x) \frac{d}{dx} y(x) \right) + \hat{Q}(x) y(x) = -\Gamma^2 \hat{w}(x) y(x) , \quad (2.30)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{w}(x) &= \sin^2 2x , \quad \hat{p}(x) = 1 , \\ \hat{Q}(x) &= 8K\lambda \sin^2 x . \end{aligned}$$

Ya que  $\Gamma^2$  juega el rol de valor propio del problema de Sturm-Liouville que hemos definido, se sigue que hay un infinito contable de valores para  $\Gamma$  que son consistentes con las condiciones de borde impuestas. Ya que  $p$  y  $q$  son enteros, la cuantización de  $\Gamma$  induce una cuantización sobre los posibles valores del volumen dentro del cual los bariones están confinados.

La Figura 2.1 muestra los perfiles de  $b'_3$  para los primeros cinco valores permitidos de  $\Gamma$ . La presencia de la corriente dentro de la caja es la responsable de la no trivialidad del perfil dentro de esta.

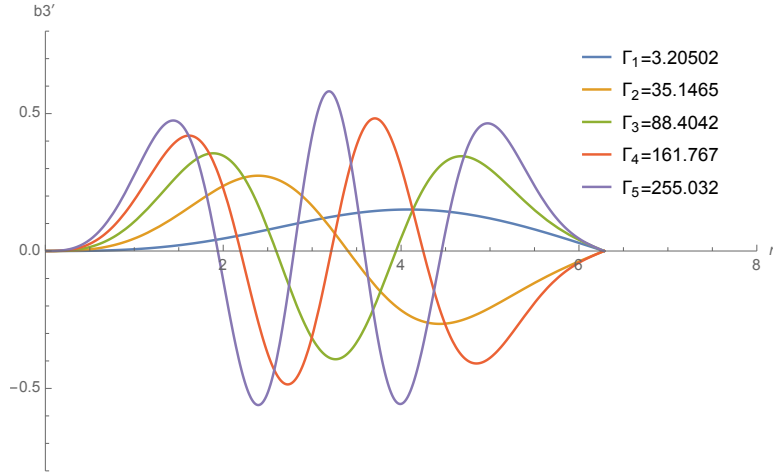


Figura 2.1: Comportamiento de  $b'_3(r)$  para los primeros valores de  $\Gamma$ . Fuente: Elaboración propia.

### 2.3.3 Energía de los skyrmiones cargados

La densidad de energía de estas configuraciones, de acuerdo a Ecs. (2.4) y (2.5), es dada por

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{K}{2} \left[ \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2} \left( \frac{p^2}{l_2^2} + \frac{q^2}{l_3^2} \right) + \left( \frac{1}{\lambda l_1^2} X_1 + 16b_1^2 \right) \right] \sin^2 H^2 \\ & + \frac{K\lambda}{8} \left( b_1^2 \left( \frac{p^2}{l_2^2} + \frac{q^2}{l_3^2} \right) + \frac{1}{4l_2^2 l_3^2} (2qb_2 - 2pb_3 + pq)^2 \right) \sin^2 (2H) + \frac{1}{2l_1^2} \left( b_1^2 + \frac{b_2^2}{l_2^2} + \frac{b_3^2}{l_3^2} \right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Con el objetivo de estudiar de forma gráfica el comportamiento de la energía del sistema, consideremos el caso simple donde

$$p = q, \quad l_2 = l_3,$$

tal que la carga bariónica es

$$B = p^2 = q^2,$$

mientras el área  $\tilde{A}$  de la caja, ortogonal al eje  $r$  es

$$A = \frac{\tilde{A}}{8\pi^2} = l_2^2 = l_3^2.$$

Por otro lado, el volumen total es

$$V = 2\pi l_1 \tilde{A} = 32\pi^3 \frac{\sqrt{\lambda}}{4} l_2^2.$$

Con lo anterior, la densidad de energía total del sistema queda

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{K}{2} \left[ \frac{1}{\lambda} + \frac{B}{A} + \left( \frac{1}{\lambda l_1^2} X_1 + 16b_1^2 \right) \sin H^2 + \frac{\lambda}{4} \left( 2\frac{B}{A}b_1^2 + \frac{1}{4A^2} \left( 2B^{1/2}b_2 - 2B^{1/2}b_3 + B \right)^2 \right) \sin(2H)^2 \right] \\
&\quad + \frac{1}{2l_1^2} \left( b_1^2 + \frac{b_2^2 + b_3^2}{A} \right) \\
&= \frac{K}{32A^2\lambda} (16A^2 + 24AB\lambda + B^2\lambda^2 - B\lambda(8A \cos(2H) + B\lambda \cos(4H))) \\
&\quad 32K\lambda(B^{1/2} - 2b_3)b_3(8A + B\lambda \cos(2H)) \sin^2(H) + 256Ab_3^2) . \tag{2.32}
\end{aligned}$$

La Figura 2.2 muestra la energía como función del área. La divergencia para valores pequeños del área es esperable ya que, a distancias muy pequeñas, el modelo de Skyrme debe ser reemplazado por QCD.

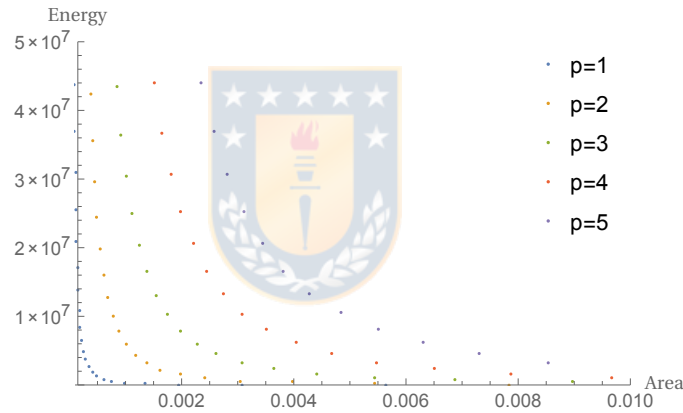


Figura 2.2: Energía del sistema como función del área  $p = 1, 2, 3, 4, 5$ . Fuente: Elaboración propia.

### 2.3.4 Ecuación de Whittaker-Hill

Notemos ahora que la ecuación (2.26) puede ser también llevada a una ecuación de Whittaker-Hill en la siguiente forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left( 4\alpha s \cos(2x) + 2\alpha^2 \cos(4x) + \lambda_0 \right) y = 0 , \tag{2.33}$$

donde

$$\alpha^2 = -\frac{K\lambda^2}{16} \left( \frac{p^2}{l_2^2} + \frac{q^2}{l_3^2} \right) , \quad s = 4i \left( \frac{p^2}{Kl_2^2} + \frac{q^2}{Kl_3^2} \right)^{-1/2} , \tag{2.34}$$

$$\lambda_0 = K\lambda \left\{ 4 + \frac{\lambda}{8} \left( \frac{p^2}{l_2^2} + \frac{q^2}{l_3^2} \right) \right\} , \tag{2.35}$$

y  $\lambda_0$  es un autovalor del operador diferencial. Sin embargo, no es cierto que la ecuación de Heun estudiada anteriormente sea equivalente a la ecuación de Whittaker-Hill (de hecho la relación de estos solitones cargados con la ecuación de Heun es más natural), ya que los parámetros  $\alpha$  y  $s$  no son independientes (a diferencia de lo que ocurre con la ecuación de Whittaker-Hill “propia”). Por lo tanto  $s$  no necesita ser un número entero. De hecho,

$$\alpha = -K\lambda/s, \quad \lambda_0 = 4K\lambda - 2K^2\lambda^2/s^2. \quad (2.36)$$

Ahora, podemos comparar Ec. (2.33) con la ecuación de Whittaker-Hill en Ref. [58],

$$\psi'' + (a - 2b \cos 2x - 2c \cos 4x)\psi = 0, \quad (2.37)$$

donde

$$a = \lambda_0, \quad b = -2\alpha s, \quad c = -\alpha^2. \quad (2.38)$$

De su análisis podemos obtener el parámetro resurgente de nuestro modelo, el que es dado por

$$g^2 = \frac{1}{2\sqrt{4\alpha^2 + 2\alpha s}} = \frac{il_2 l_3}{\sqrt{K\lambda (\lambda l_2^2 q^2 + \lambda l_3^2 p^2 + 8l_2^2 l_3^2)}}. \quad (2.39)$$

En la siguiente subsección abordaremos la relación entre la teoría de resurgencia y nuestros skyrmiones cargados.

### 2.3.5 Perturbaciones, ecuación de Mathieu y resurgencia

Ahora, mediante teoría de perturbaciones veremos cómo los skyrmiones cargados aquí construidos manifiestan una estructura resurgente.

Antes de entrar en los detalles técnicos recordemos primero algunos argumentos estándar de la expansión de  $N$  grande que hemos tratado en el Capítulo I, pues estos nos ayudarán a simplificar el análisis de esta subsección (para ver detalles consultar Ref. [59]). Como es bien sabido, en la aproximación de 't Hooft, en el scattering mesón-barión, el barión muy pesado (que en este caso es el skyrmion) no es esencialmente afectado, y básicamente solo el mesón será el que reaccione. Esto es aún más evidente en la interacción semiclásica fotón-barión (debido a que el fotón no posee masa). Así, en esta aproximación, al efectuar perturbaciones electromagnéticas, estas percibirán a los



skyrmiones como un medio efectivo. Desde el punto de vista práctico esto simplifica enormemente el estudio de la estabilidad, ya que uno puede despreciar las perturbaciones sobre los skyrmiones (suprimidos por potencias de  $1/N$ ) y solo considerar perturbaciones en el campo de Maxwell sobre el *background* definido por los skyrmiones. Por lo tanto para nuestro análisis consideraremos perturbaciones electromagnéticas de las ecuaciones definidas en Ecs. (2.7) y (2.8) alrededor del *background* de los skyrmiones cargados definido en Ecs. (2.16), (2.18), (2.19), (2.23) y (2.24).

Por otro lado, también es sabido que el poder de la resurgencia radica en relacionar la expansión perturbativa alrededor del vacío trivial con las expansiones perturbativas alrededor de puntos silla no triviales.

En particular, la teoría de resurgencia corresponde a una formulación matemática de lo que en el contexto de la teoría cuántica de campos se conoce como la eliminación de efectos perturbativos provenientes de la serie perturbativa de Feynman (matriz  $S$ ).

Expansiones en series divergentes aparecen en muchas ramas de la matemática y la física matemática. En casos simples, estas expansiones son dadas mediante series de potencias en un parámetro pequeño, pero frecuentemente también incluyen correcciones no analíticas exponencialmente pequeñas, llamadas a veces “instantones”. Estas correcciones hacen particularmente difícil el asignar una suma significativa a la serie.

En los años 1970s, J. Écalle [60] desarrollo una teoría, llamada “resurgencia”, la que explica como lidiar con estos objetos usando técnicas clásicas de análisis complejo, tales como integrales de contorno, continuación analítica, etc.

Reciente interés en la teoría de resurgencia ha surgido en el ámbito de la geometría y de la física matemática, debido a sus aplicaciones en numerosas áreas; teoría de gauge de conexiones singulares, cuantización de variedades simplécticas y de Poisson, homología de Floer y categorías de Fukaya, redes espectrales, aproximación WKB en mecánica cuántica, expansiones perturbativas en teoría cuántica de campos, entre otras.

Este último ejemplo es, en algún sentido, el más importante, dado que muchos de los otros pueden ser interpretados como cálculos en teorías de campo en bajas dimensiones. Además, la teoría cuántica de campo es donde algunos de los resultados más sorprendentes han sido encontrados: existe creciente evidencia de que, a partir únicamente de la expansión perturbativa, la teoría de resurgencia puede usarse para descubrir los efectos no perturbativos mediante una especie de continuación analítica.

Para un análisis completo y pedagógico ver Ref. [61].

En el presente caso, el análisis de la expansión perturbativa completa alrededor de los solitones cargados correspondería al análisis de las siete ecuaciones acopladas no lineales en el *background* de los skyrmiones cargados, lo que resulta un problema muy difícil de abordar incluso numéricamente. En consecuencia, consideraremos el caso simple pero aún suficientemente interesante, como hemos discutido antes, tal que los efectos resurgentes se presenten, esto es; el *background* de skyrmiones estará fijo y estudiaremos perturbaciones magnéticas de las ecuaciones de Maxwell.

Dicho lo anterior, consideremos las siguientes perturbaciones alrededor de las soluciones definidas en Ecs. (2.16), (2.18), (2.19), (2.23) y (2.24),

$$b_2(r) \rightarrow b_2(r) + \epsilon c_2(r) \sin(\Omega t) , \quad b_3(r) \rightarrow b_3(r) + \epsilon c_3(r) \sin(\Omega t) , \quad (2.40)$$

donde  $\epsilon$  es el parámetro perturbativo y  $\Omega$  es la frecuencia de la perturbación. La idea es determinar cómo la frecuencia depende de los demás parámetros del sistema. A primer orden en  $\epsilon$ , las ecuaciones de campo en Ecs. (2.7) y (2.8) se reducen a

$$0 = 4l_3^2 c_2''(r) - Kl_1^2 pq \lambda c_3(r) \sin^2(2H) + \frac{1}{2} l_1^2 c_2(r) \left( 32Kl_3^2 + Kq^2 \lambda + 8l_3^2 \Omega^2 - 32Kl_3^2 \cos(2H) - Kq^2 \lambda \cos(4H) \right) , \quad (2.41)$$

$$0 = 4l_2^2 c_3''(r) - Kl_1^2 pq \lambda c_2(r) \sin^2(2H) + \frac{1}{2} l_1^2 c_3(r) \left( 32Kl_2^2 + Kp^2 \lambda + 8l_2^2 \Omega^2 - 32Kl_2^2 \cos(2H) - Kp^2 \lambda \cos(4H) \right) . \quad (2.42)$$

Para simplificar un poco el estudio de estas ecuaciones vamos a considerar

$$l_3 = l_2 , \quad p = q ,$$

y en adición introduciremos las variables normales

$$U(r) = c_3(r) + c_2(r) , \quad V(r) = c_3(r) - c_2(r) ,$$

tal que el sistema dado por las Ecs. (2.41) y (2.42) se convierte en

$$\frac{d^2U}{dr^2} + l_1^2 \left( 8K \sin^2(H) + \Omega_U^2 \right) U = 0 , \quad (2.43)$$

$$\frac{d^2V}{dr^2} + l_1^2 \left( \frac{Kq^2\lambda}{2l_2^2} \sin^2(2H) + 8K \sin^2(H) + \Omega_V^2 \right) V = 0 . \quad (2.44)$$

Estas ecuaciones corresponden a una ecuación de Mathieu y una ecuación de Whittaker-Hill, respectivamente (ver Ref. [62] para un análisis resurgente de la ecuación de Mathieu). Es interesante notar que la ecuación para la coordenada normal  $U$  no depende de los detalles del *background* electromagnético definido por  $b_3$ , mientras la ecuación para  $V$  depende explícitamente del cociente  $q^2/l_2^2$ , que es diferente para cada configuración de *background* posible y depende del número de nodos de la función  $b_3(r)$  dentro de la cavidad. Aquí hemos introducido un índice para las frecuencias normales  $\Omega_U$  y  $\Omega_V$  asociadas con las coordenadas normales  $U(r)$  y  $V(r)$ , respectivamente. Es natural restringir las perturbaciones  $c_i$  de tal forma de satisfacer las mismas condiciones de borde que la solución de *background*, por lo tanto consideraremos  $c'_i(r=0) = c'_i(r=2\pi) = 0$ . Esto induce condiciones de borde tipo Neumann para  $U$  y  $V$ , tal que uno debe resolver Ecs. (2.43) y (2.44) restringidas a las condiciones

$$U'(r=0) = U'(r=2\pi) = 0 , \quad (2.45)$$

$$V'(r=0) = V'(r=2\pi) = 0 . \quad (2.46)$$

Como es de esperar, esto cuantiza las frecuencias normales de las perturbaciones  $\Omega_U$  y  $\Omega_V$  que determinan los modos normales del sistema dentro de la caja. Así, el problema de interés es determinar  $\Omega_{(U,V)}^2 = \Omega_{(U,V)}^2(K, \lambda; n)$ , con  $n$  un entero que rotula el modo. Nos gustaría conocer cómo las frecuencias de la perturbación electromagnética dependen del parámetro  $n$  y de las constantes de acoplamiento  $K$  y  $\lambda$ . Obviamente, ya que el problema es lineal, las soluciones generales serán dadas por una superposición lineal arbitraria de los modos normales multiplicadas por factores armónicos en el tiempo con las correspondientes frecuencias normales. La Figura 2.3 muestra los primeros cuatro modos para las coordenadas normales  $U$  y  $V$ .

La ecuación (2.43) puede ser llevada a la forma estándar de la ecuación de Mathieu

$$U'' + (A - 2Q \cos(2x))U = 0 , \quad (2.47)$$

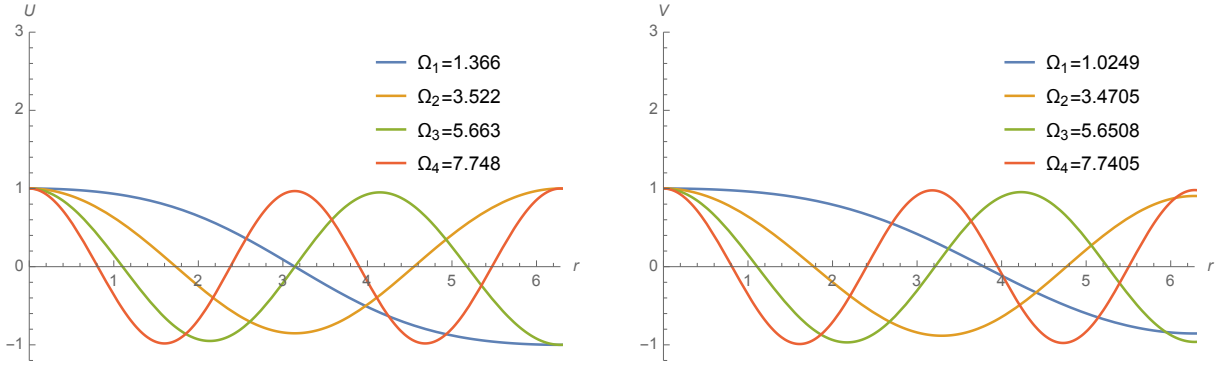


Figura 2.3: Primeros cuatro modos para las coordenadas normales  $U$  y  $V$ , junto con las correspondientes frecuencias normales. Han sido impuestas condiciones de borde de Neumann sobre las perturbaciones electromagnéticas. Fuente: Elaboración propia.

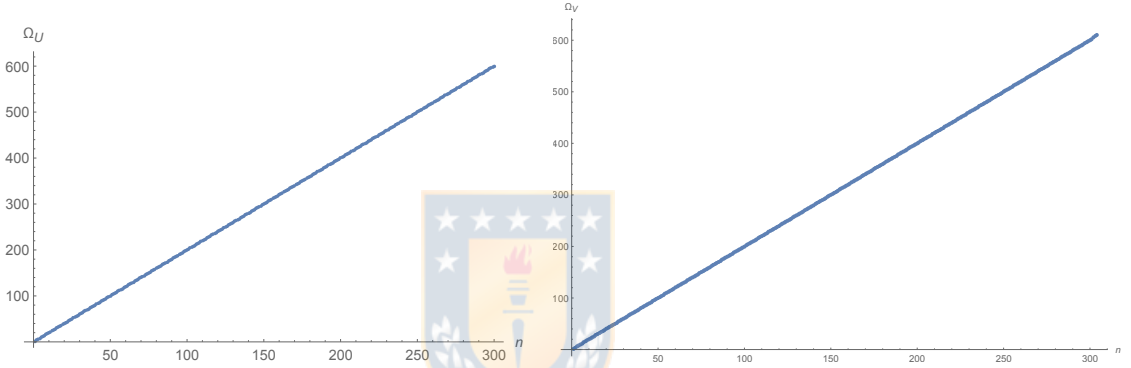


Figura 2.4: Espectro de las perturbaciones electromagnéticas. Se puede ver que las frecuencias tienden a equiespaciarse como función del número de modos, esto es, un espectro lineal. La ecuación para la variable normal  $U$  depende de los detalles de la configuración del *background*. Hemos seleccionado la configuración sin nodos para  $b'_3(r)$  como *background*. Fuente: Elaboración propia.

donde los parámetros se relacionan como

$$A = \left(4K + \Omega_U^2\right) l_1^2, \quad 2Q = 4Kl_1^2. \quad (2.48)$$

La comparación con Ecs. (7) y (8) en Ref. [62] muestra la correspondencia entre los parámetros de Skyrme y de Mathieu

$$\frac{2}{\hbar^2} = Kl_1^2, \quad \left(4K + \Omega_U^2\right) l_1^2 = \frac{8u}{\hbar^2} \Rightarrow \quad (2.49)$$

$$\Omega_U^2 = \frac{8u}{l_1^2 \hbar^2} - 4K, \quad \hbar_{eff}^2 = \frac{2}{Kl_1^2} = \frac{32}{K\lambda}, \quad (2.50)$$

donde  $32/(K\lambda)$  juega el rol de “constante de Planck efectiva”  $\hbar_{eff}^2$  del problema, tal que el parámetro  $u$  no depende de manera separada de  $K$  y  $\lambda$  sino del producto de estos (así como del parámetro  $n$  de los niveles discretos de energía). Se pueden usar resultados bien conocidos acerca de la ecuación

de Mathieu para determinar el espectro (en particular, el parámetro  $\Omega_U$ ) de las perturbaciones.

Los resultados de Ref. [62] pueden ser aplicados directamente a nuestro caso (reemplazando  $\hbar \rightarrow \hbar_{\text{eff}}$ ) de la siguiente manera.

1) Expandir  $u(K, \lambda; n)$  (o de manera equivalente  $\Omega(K, \lambda; n)^2$  de Ec. (2.50)) en serie de potencias en la constante de Planck efectiva no es suficiente para obtener una respuesta matemática bien definida. La serie perturbativa no es siquiera Borel sumable. Sin embargo, la inclusión de contribuciones no perturbativas revelan el fenómeno resurgente.

2) Es necesario expresar  $u$  como una trans-serie

$$\left(u_{\text{trans}}(\hbar_{\text{eff}}; n)\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{k-1} c_{k,j,l}(n) (\hbar_{\text{eff}})^j \left(\frac{\exp\left[-\frac{S}{\hbar_{\text{eff}}}\right]}{(\hbar_{\text{eff}})^{n+1/2}}\right)^k \left(\ln\left(-\frac{1}{\hbar_{\text{eff}}}\right)\right)^l, \quad (2.51)$$

donde, con las normalizaciones en Ecs. (7), (8) y (9) de Ref. [62] el factor  $S$  en la exponencial (la acción del instantón) en la trans-serie anterior es  $S = 8$ .

3) La trans-serie en Ec. (2.51) permite definir claramente un régimen de acoplamiento fuerte ( $n\hbar_{\text{eff}} \gg 1$ ) y un régimen de acoplamiento débil ( $n\hbar_{\text{eff}} \ll 1$ ). Luego, las expansiones correspondientes en Ref. [62] pueden ser aplicadas directamente a nuestro caso.

Ahora bien, la analogía con la ecuación de Mathieu analizada en Ref. [62] no es completa, ya que en dicho trabajo la ecuación de Mathieu es interpretada como una ecuación de Schrodinger, tal que la función incógnita en Ec. (7) de Ref. [62] es una función de onda compleja que satisface las condiciones de borde en Ec. (36) de la misma referencia. En nuestro caso, la función incógnita  $U$  en Ec. (2.47) es real y satisface (2.45). Por otro lado, algunos de los resultados de Ref. [62] pueden ser aplicados directamente: en particular, los resultados que no dependen de las condiciones de borde en Ec. (36) de Ref. [62] valen para nuestro caso.

Por otro lado, la coordenada normal  $V(r)$  es determinada por Ec. (2.42) la que, siendo una ecuación de Whittaker-Hill, admite un mapeo con los parámetros en Ec. (2.33) mediante

$$\alpha^2 = -\frac{Kq^2\lambda l_1^2}{8l_2^2}, \quad s = \frac{iKl_1l_2}{q} \sqrt{\frac{8}{K\lambda}},$$

$$\lambda_0 = \frac{l_1^2}{4l_2^2} \left(16Kl_2^2 + Kq^2\lambda + 4l_2^2\Omega^2\right),$$

y además

$$a = \frac{l_1^2}{4l_2^2} \left( 16Kl_2^2 + Kq^2\lambda + 4l_2^2\Omega^2 \right), \quad b = 2Kl_1^2, \quad c = \frac{Kq^2\lambda l_1^2}{8l_2^2}.$$

Consecuentemente, el parámetro resurgente en este caso es

$$g^2 = \frac{i}{2\sqrt{4c+b}} = \frac{il_2}{\sqrt{2K\lambda(\lambda q^2 + 4l_2^2)}l_1}.$$

## 2.4 Cristales de tiempo

Recientemente, Wilczek y Shapere [63, 64, 65] plantearon la intrigante pregunta (tanto en teoría clásica como en teoría cuántica) de si es posible romper espontáneamente la simetría de traslación temporal en modelos físicos realizables.

Esta pregunta, hasta hace muy poco, ha sido principalmente analizada en física de materia condensada. Es bien sabido que teoremas *no-go* [66, 67] restringen de forma severa la realización concreta de cristales de tiempo. Por otro lado, novedosas versiones de las ideas originales en Ref. [68] permiten la realización de cristales de tiempo en configuraciones de estado sólido (ver Refs. [69, 70, 71, 72, 73, 74]).

Por otro lado, los primeros ejemplos de soluciones periódicas en el tiempo que son topológicamente protegidas por la teoría de homotopía, tanto en física de partículas como en física nuclear fueron construidas en Refs. [39, 40]. Para construir estas configuraciones analíticas periódicas en el tiempo que no pueden ser deformadas en el vacío trivial, el ingrediente clave es la carga topológica del modelo de Skyrme. Además, la teoría de homotopía asegura que estos solitones solo pueden ser deformados en otros solitones con el mismo período de tiempo, por lo que resulta apropiado el nombre de cristales de tiempo topológicamente protegidos.

Veremos en esta sección que la periodicidad temporal de estas soluciones del modelo de Skyrme está determinada por una condición de cuantización que viene de la teoría de ecuaciones diferenciales, y esta periodicidad es protegida por la existencia de una carga topológica.

### 2.4.1 Ansatz, ecuaciones de campo y ecuación de Heun

El formalismo introducido en la subsección anterior puede ser ligeramente modificados para configuraciones que describen cristales de tiempo. La configuración natural para obtener estos cristales en

el modelo de Skyrme es

$$\alpha = \frac{\phi}{2}, \quad \beta = H(r), \quad \rho = \frac{\omega\gamma}{2},$$

con el conjunto de coordenadas ordenadas como

$$x^\mu = (\gamma, r, t, \phi).$$

Aquí  $\omega$  es una frecuencia, de tal forma que  $\rho$  es una cantidad adimensional. Podemos ver que este ansatz es básicamente una rotación de Wick del skyrmion cargado, donde hacemos una de las coordenadas espaciales periódicas como una coordenada tipo tiempo. Así, en este caso, la dependencia del cristal de tiempo respecto de la coordenada temporal es necesariamente periódica. Además, su densidad topológica puede ser integrada en una superficie tipo tiempo.

De igual forma que ocurre con el ansatz de los skyrmiones cargados de la subsección anterior, es directo mostrar que las tres ecuaciones acopladas de Skyrme

$$D^\mu \left( R_\mu + \frac{\lambda}{4} [R^\nu, G_{\mu\nu}] \right) = E^j t_j = 0,$$

y las cuatro ecuaciones de Maxwell se simplifican enormemente. De hecho, las ecuaciones de Skyrme se reducen nuevamente a una sola ecuación, a saber

$$\begin{aligned} & 4 \left( l_3^2 (4 - \lambda\omega^2) + \frac{l_3^2}{l_1^2} X_2 \sin^2(H) + \lambda \right) H'' + \frac{2l_3^2}{l_1^2} X_2 \sin(2H) H'^2 + \frac{4l_3^2}{l_1^2} \sin^2(H) X_2' H' \\ & + \left[ \frac{1}{4} (l_3^2 \omega^2 - 1) X_2 + \frac{\lambda l_1^2}{l_3^2} (2l_3^2 \omega b_1 - 2b_3 - 1) (2l_3^2 \omega b_1 - 2b_3 - l_3^2 \omega^2) \right] \sin(4H) - \frac{2l_3^2}{\lambda} X_2 \sin(2H) = 0, \end{aligned} \quad (2.52)$$

donde

$$X_2(r) = 8\lambda \left( l_1^2 b_1 (\omega - 2b_1) + \frac{2l_1^2}{l_2^2} b_2^2 + \frac{l_1^2}{l_3^2} b_3 (1 + 2b_3) \right). \quad (2.53)$$

Las ecuaciones de Maxwell pueden ser escritas en la misma forma que la sección anterior, donde las

componentes matriciales en este caso son dadas por

$$\begin{aligned}
M_{11} &= 2 \sin^2(H(r)) \left( 4\lambda H'^2 + \frac{\lambda l_1^2}{l_3^2} \cos^2(H) + 4l_1^2 \right) , \\
M_{13} &= -\frac{\lambda \omega l_1^2}{2l_3^2} \sin^2(2H) , \\
M_{22} &= M_{11} + l_3^2 \omega M_{13} , \\
M_{33} &= M_{11} + \frac{l_3^2 \omega^2 + 1}{\omega} M_{13} , \\
M_{31} &= -l_3^2 M_{13} ,
\end{aligned}$$

donde

$$N = \left( \frac{1}{4}(M_{13} - \omega M_{11}), 0, \frac{1}{4} \left( \frac{(2l_3^2 \omega^2 + 1)}{\omega} M_{13} + M_{11} \right) \right) .$$

Ahora, si imponemos las siguientes relaciones algebraicas

$$X_2 = \frac{\lambda l_1^2}{l_3^2} (l_3^2 \omega^2 - 1) = \text{constant} , \quad b_3(r) = l_3^2 \omega b_1(r) - \frac{l_3^2 \omega^2}{4} - \frac{1}{4} , \quad (2.54)$$

las ecuaciones de campo se reducen a

$$2(\lambda(l_3^2 \omega^2 - 1) \cos^2(H) - 4l_3^2) H'' + (l_3^2 \omega^2 - 1) \sin(2H) (l_1^2 - \lambda H'^2) = 0 , \quad (2.55)$$

$$b_1'' + \frac{K}{8} (\omega - 4b_1) \sin^2(H) \left( l_1^2 (\lambda \omega^2 - 8) - \frac{l_1^2}{l_3^2} \lambda + \frac{\lambda l_1^2}{l_3^2} (\omega^2 l_3^2 - 1) \cos(2H) - 8\lambda H'^2 \right) = 0 . \quad (2.56)$$

Para configuraciones que son solución de las ecuaciones anteriores, el *winding number* es dado por

$$W = \int \rho_W dr d(\omega\gamma) d\phi = \frac{(1 - l^2 \omega^2)(\omega - 4b_1(0))}{2\omega} ,$$

cuando consideramos  $r \in [0, 2\pi]$ ,  $\omega\gamma \in [0, 4\pi]$ ,  $\phi \in [0, 2\pi]$ , y  $H(2\pi) = \frac{\pi}{2}$ ,  $H(0) = 0$ .

Además, la carga topológica usual está también presente debido a la corrección del potencial electromagnético. Esta es

$$B = \int \rho_B dr dz d\phi = -2[\cos^2(H)b_2]_0^{2\pi} = \frac{l}{2} (\omega - 4b_1(0)) \sqrt{1 - l^2 \omega^2} ,$$



con las mismas condiciones de borde anteriores, pero con  $z \in [0, 2\pi]$  jugando el rol de coordenada temporal.

Podemos ver que la ecuación de Skyrme resultante Ec. (2.55) admite una solución lineal

$$H(r) = \frac{l_1}{\sqrt{\lambda}} r + h_0 ,$$

la que al introducirla en la ecuación de Maxwell en Ec. (2.56), se vuelve

$$b_1'' + \frac{K}{8}(\omega - 4b_1) \sin^2(H) \left( l_1^2 (\lambda\omega^2 - 16) - \frac{l_1^2}{l_3^2} \lambda + \frac{\lambda l_1^2}{l_3^2} (\omega^2 l_3^2 - 1) \cos(2H) \right) = 0 . \quad (2.57)$$

Esta última puede ser escrita nuevamente como una ecuación de Heun confluyente, en la forma

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left( 8K\lambda \sin^2 x - \Delta^2 \sin^2 2x \right) y = 0 , \quad (2.58)$$

con la constante no negativa  $\Delta \geq 0$ ,

$$\Delta^2 := \frac{K\lambda^2}{4} \left( \omega^2 - \frac{1}{l_3^2} \right) .$$

En esta sección asumiremos que  $\omega^2 \geq 1/l_3^2$ . Luego, Ec. (2.58) puede ser llevada a la forma

$$\frac{d^2}{dz^2} Y(z) + \left( \frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \epsilon \right) \frac{d}{dz} Y(z) + \frac{\alpha z - q}{z(z-1)} Y(z) = 0 , \quad (2.59)$$

donde

$$\begin{aligned} z &= \cos^2 x , & Y(z) &= e^{-\Delta z} y(\arccos \sqrt{z}) , \\ \gamma &= \delta = 1/2 , & \epsilon &= 2\Delta , & \alpha &= \Delta + 2K\lambda , & q &= \Delta/2 + 2K\lambda . \end{aligned} \quad (2.60)$$

La solución general de esta ecuación es

$$\begin{aligned} Y(z) &= C_1 \text{HeunC}(\Delta + 2K\lambda, 1/2, 1/2, 2\Delta, \Delta/2 + 2K\lambda; z) \\ &+ C_2 \sqrt{z} \text{HeunC}(2\Delta + 2K\lambda, 3/2, 1/2, 2\Delta, 3\Delta/2 + 2K\lambda - 1/4; z) . \end{aligned} \quad (2.61)$$

La función de Heun confluyente puede ser expresada en términos de funciones de Kummer confluyente, donde  $\epsilon \neq 0$  y  $\gamma + \delta$  no es cero ni un entero negativo [75]. Nuestra ecuación satisface esta condición

tal que

$$Y(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n {}_1F_1\left(n + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -2\Delta z\right), \quad (2.62)$$

donde  ${}_1F_1$  es la función hipergeométrica confluyente de Kummer, y los coeficientes son determinados por la relación de recursión

$$\begin{aligned} & n\left(n - \frac{K\lambda}{\Delta}\right)a_n + \left\{-2n^2 + \left(\frac{2K\lambda}{\Delta} + 2\Delta + 3\right)n - \left(\frac{3K\lambda}{2\Delta} + 2K\lambda + \frac{3\Delta}{2} + \frac{5}{4}\right)\right\}a_{n-1} \\ & + \left(n - \frac{3}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2} - \frac{K\lambda}{\Delta}\right)a_{n-2} = 0. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Es importante notar que este tipo de series se termina si

$$\frac{K\lambda}{\Delta} = N + \frac{1}{2}, \quad (2.64)$$

$$\Rightarrow \omega(N) = \pm \left(\frac{1}{l_3^2} + \frac{4K}{(N + 1/2)^2}\right)^{1/2}, \quad (2.65)$$

para algún número natural  $N \in \mathbb{N}$ .

Una posible crítica a los cristales de tiempo construidos en los trabajos en Refs. [39, 40] es que no habían argumentos para fijar los correspondientes períodos de tiempo. Por esta razón es notable que en nuestra construcción la teoría de funciones de Kummer confluentes sea capaz de fijar el período del tiempo de los cristales basado en la ecuación de Heun a través de la condición de cuantización en Ec. (2.65).

Finalmente, siguiendo los mismos pasos que para los skyrmiones cargados, el mapeo con la ecuación de Whittaker-Hill

$$y'' + \left(\lambda_0 + 4\alpha s \cos(2x) + 2\alpha^2 \cos(4x)\right)y = 0,$$

determina los coeficientes como

$$\lambda_0 = \frac{K\lambda}{8l_3^2} \left(\lambda - l_3^2(\lambda\omega^2 - 32)\right), \quad \alpha^2 = \frac{K\lambda^2}{16l_3^2} \left(l_3^2\omega^2 - 1\right), \quad s = -4l_3 \sqrt{\frac{K}{l_3^2\omega^2 - 1}},$$

tal que el parámetro resurgente es dado por

$$g^2 = l_3 \left(\lambda K(l_3^2\lambda\omega^2 - 8l_3^2 - \lambda)\right)^{-1/2}.$$

### 2.4.2 Dualidad Extendida

Existe un tipo de dualidad entre las soluciones de skyrmiones cargados y cristales de tiempo aquí construidas. Para ver esto, notemos que un mapeo entre el cristal de tiempo y el skyrmion debe involucrar una transformación del tipo

$$\gamma \rightarrow il\gamma, \quad z \rightarrow \frac{i}{l}z, \quad (2.66)$$

tal que la signatura pueda ser cambiada apropiadamente (donde hemos considerado el caso en que los lados de la caja son iguales). Con esto, es directo comprobar que las ecuaciones para el skyrmion cargado son mapeadas a las ecuaciones del cristal de tiempo (c. de t.) por medio de las siguientes transformaciones lineales

$$a_1 = \frac{i}{l}b_2, \quad a_2 = ilb_1, \quad a_3 = -b_3. \quad (2.67)$$

En Tabla 2.1 y Tabla 2.2 se muestran las transformaciones necesarias de los campos para ir de una configuración a otra.

Tabla 2.1: Mapeo skyrmion a cristal de tiempo. Fuente: Elaboración propia.

	$A_\mu$	Sistema coordenado $x^\mu$	Variable temporal
Skyrmion	$(b_1(r), 0, b_2(r), b_3(r))$	$(z, r, \gamma, \phi)$	$z$
C. de t. antes de transformación	$(a_1(r), 0, a_2(r), a_3(r))$	$(\gamma, r, z, \phi)$	$\gamma$

Tabla 2.2: Mapeo componentes del campo electromagnético. Fuente: Elaboración propia.

T.C.	→	Skyrmion
$a_1(r)$		$ib_2(r)/l$
$a_2(r)$		$ilb_1(r)$
$a_3(r)$		$-b_3(r)$
$\omega$		$-i/l$
$(\gamma, z)$		$(il\gamma, iz/l)$
$(E_1, B_2, B_3)$		$(-B_3, -B_2, E_1)$

En resumen, en esta sección hemos visto que el sistema completo de ecuaciones del modelo Skyrme-Maxwell se puede reducir a una única ecuación de Heun para dos sectores topológicamente no triviales. Estas configuraciones describen skyrmiones cargados y cristales de tiempo dentro de un volumen finito, y sus densidades de energía han sido calculadas explícitamente como función de la carga

topológica. Además, la teoría de ecuaciones diferenciales lleva a una condición de cuantización para el período de los cristales de tiempo y a la cuantización del volumen ocupado por los skyrmiones cargados.

## 2.5 Multi-solitones y estructuras cristalinas

Es esta sección estudiaremos la construcción de soluciones que describen multi-solitones cargados dentro de un volumen finito. Estas configuraciones son permitidas cuando el término de Skyrme se anula, es decir, son solución del modelo sigma no lineal acoplado a Maxwell. Dentro de este formalismo también incluiremos un término de masa.

Los solitones que consideraremos aquí son estáticos, en el sentido de que la densidad de energía (o de forma más general, su tensor de energía-momentum) no depende del tiempo, aún cuando el campo  $U$  dependa explícitamente de esta coordenada, como veremos a continuación.

### 2.5.1 Modelo sigma no lineal acoplado a Maxwell con masa

La acción para el modelo sigma no lineal acoplado a la teoría de Maxwell, incluyendo un término de masa, es dado por

$$I_{\text{NSLM-Max}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{K}{4} \text{Tr} (R^\mu R_\mu) - m^2 \text{Tr} (U + U^{-1}) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right], \quad (2.68)$$

$$R_\mu = U^{-1} D_\mu U, \quad D_\mu = \nabla_\mu + A_\mu [t_3, \cdot], \quad (2.69)$$

$$U \in SU(2), \quad R_\mu = R_\mu^j t_j, \quad t_j = i\sigma_j, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (2.70)$$

donde  $m$  es la masa de los piones. Esta acción es aquella presentada en Ec. (2.1) cuando  $\lambda \rightarrow 0$ , y con un término de masa adicional.

El tensor de energía-momentum es

$$T_{\mu\nu} = -\frac{K}{2} \text{Tr} \left[ R_\mu R_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^\alpha R_\alpha \right] - m^2 \text{Tr} \left[ g_{\mu\nu} (U + U^{-1}) \right] + \bar{T}_{\mu\nu},$$

con  $\bar{T}_{\mu\nu}$  el tensor de energía-momentum del campo electromagnético definido en Ec. (2.5).

Las ecuaciones de campo en este caso son dadas por

$$D_\mu R^\mu + \frac{2m^2}{K} (U - U^{-1}) = 0 , \quad (2.71)$$

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu , \quad (2.72)$$

donde la corriente  $J^\mu$  es dada por

$$J^\mu = \frac{K}{2} \text{Tr} [\hat{O} R^\mu] , \quad \hat{O} = U^{-1} t_3 U - t_3 . \quad (2.73)$$

La fórmula para la carga topológica de estas configuraciones ha sido definida en Ecs. (2.9) y (2.10) .

### 2.5.2 El ansatz de multi-solitones

Como hemos discutido anteriormente, la forma más simple de considerar efectos en un volumen finito es usar una métrica plana de la forma

$$ds^2 = -dt^2 + L^2 (dr^2 + d\theta^2 + d\phi^2) , \quad (2.74)$$

donde  $4\pi^3 L^3$  es el volumen de la caja donde viven los solitones. Las coordenadas adimensionales  $r$ ,  $\theta$  y  $\phi$  tienen los siguientes rangos

$$0 \leq r \leq 2\pi , \quad 0 \leq \theta \leq \pi , \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi . \quad (2.75)$$

Siendo consistentes con Refs. [39, 40, 41], las condiciones de borde en la dirección  $\theta$  serán tomadas como condiciones de Dirichlet, mientras que las direcciones  $r$  y  $\phi$  pueden ser consideradas tanto periódicas como antiperiódicas.

Combinando la estrategia de Refs. [39, 40, 41] con las estructuras cristalinas construidas en el modelo de Skyrme en Ref. [42] (sin acoplamiento con la teoría de Maxwell), es natural considerar el siguiente ansatz para describir estructuras cristalinas cargadas

$$U^{\pm 1}(x^\mu) = \cos(\alpha) \mathbf{1}_2 \pm \sin(\alpha) n^i t_i , \quad n^i n_i = 1 , \quad (2.76)$$

$$n^1 = \sin \Theta \cos \Phi , \quad n^2 = \sin \Theta \sin \Phi , \quad n^3 = \cos \Theta , \quad (2.77)$$

$$\alpha = \alpha(r) , \quad \Theta = q\theta , \quad \Phi = p \left( \frac{t}{L} - \phi \right) , \quad q = 2v + 1 , \quad p, v \in \mathbb{N} , \quad p \neq 0 , \quad (2.78)$$

$$A_\mu = (u(r, \theta), 0, 0, -Lu(r, \theta)) . \quad (2.79)$$

Ecs. (2.76), (2.77) y (2.78) corresponden a un caso particular del ansatz del erizo generalizado introducido en el Capítulo I con dependencia temporal. Notemos que con la elección anterior el campo de materia depende periódicamente del tiempo, ya que la dependencia de  $U$  es a través de  $\sin \Phi$  y  $\cos \Phi$ .

La dependencia temporal periódica en Ec. (2.78) merece ciertos comentarios. Primero que todo, es una suposición técnica clave que permite resolver las ecuaciones de campo de forma analítica. Segundo, el famoso teorema *no-go* de Derrick sobre la existencia de solitones en teorías con campos escalares no lineales, es evitado usando un ansatz periódico en el tiempo de tal forma que la densidad de energía de la configuración sea aún estática. El presente ansatz definido en Ecs. (2.76), (2.77) y (2.78) tiene precisamente esta propiedad (de hecho, un cálculo directo muestra que la densidad de energía no depende del tiempo). Tercero, a diferencia de lo que pasa con el ansatz de estrella bosónica usual para campos escalares cargados bajo  $U(1)$ , el presente ansatz para campos escalares valuados en  $SU(2)$  también posee una carga topológica no trivial.

### 2.5.3 Ecuaciones de campo

De forma notable, el ansatz definido anteriormente para el potencial de gauge  $A_\mu$  y para el campo escalar en  $SU(2)$  permite reducir las cuatro ecuaciones de Maxwell a una única ecuación, además de reducir las tres ecuaciones del modelo sigma no lineal a una ecuación simple para el perfil  $\alpha$ .

Primero, con el ansatz para el campo escalar evaluado en  $SU(2)$  en Ecs. (2.76), (2.77) y (2.78), las tres ecuaciones de campo del modelo sigma no lineal en Ec. (2.71) se reducen a una única ecuación para el perfil  $\alpha$  (para comprobar esto se debe reemplazar el ansatz para el campo de materia en Ecs. (1.14), (1.15) y (1.16) ), dada por

$$\alpha'' - \frac{q^2}{2} \sin(2\alpha) + \frac{4m^2}{K} \sin(\alpha) = 0 . \quad (2.80)$$

Notar que el potencial de gauge no entra de forma explícita en Ec. (2.80). Esto ocurre debido a la apropiada elección del ansatz para el campo escalar y el potencial de gauge, ya que estas funciones

satisfacen las siguientes propiedades

$$A_\mu A^\mu = 0, \quad (\nabla_\mu \Phi) (\nabla^\mu \Phi) = 0, \quad A_\mu \nabla^\mu \Phi = 0.$$

Gracias a las relaciones anteriores, podemos primero resolver las ecuaciones del modelo sigma no lineal de forma explícita. Luego, una vez que el campo escalar es conocido, las ecuaciones de Maxwell se reducen a una ecuación lineal, en la que el solitón juega el rol de un potencial efectivo. Es importante recalcar que hasta ahora no se han hecho aproximaciones, es decir, estamos tratando con el conjunto completo de ecuaciones de campo en las que el efecto de los solitones sobre el campo de Maxwell y viceversa son tomados en consideración. Explícitamente, el campo escalar y las componentes del tensor  $L_\mu$  son dados por

$$U = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) + i \cos(q\theta) \sin(\alpha) & ie^{-\frac{ip}{L}(t-L\phi)} \sin(q\theta) \sin(\alpha) \\ ie^{\frac{ip}{L}(t-L\phi)} \sin(q\theta) \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - i \cos(q\theta) \sin(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$L_t = \frac{P}{L} \begin{pmatrix} i \sin^2(q\theta) \sin^2(\alpha) & E^{(+)} F^{(-)} \\ -E^{(-)} F^{(+)} & -i \sin^2(q\theta) \sin^2(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$L_r = i\alpha' \begin{pmatrix} \cos(q\theta) & E^{(+)} \sin(q\theta) \\ E^{(-)} \sin(q\theta) & -\cos(q\theta) \end{pmatrix},$$

$$L_\theta = q \sin(\alpha) \begin{pmatrix} -i \sin(q\theta) \cos(\alpha) & E^{(+)} G^{(+)} \\ E^{(-)} G^{(-)} & i \sin(q\theta) \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$L_\phi = P \begin{pmatrix} -i \sin^2(q\theta) \sin^2(\alpha) & -E^{(+)} F^{(-)} \\ E^{(-)} F^{(+)} & i \sin^2(q\theta) \sin^2(\alpha) \end{pmatrix},$$

donde hemos definido

$$P = p - 2Lu, \quad F^{(\pm)} = [\pm i \cos(q\theta) + \cot(\alpha)] \sin(q\theta) \sin^2(\alpha), \\ E^{(\pm)} = e^{\pm i \frac{p}{L}(L\phi-t)}, \quad G^{(\pm)} = i \cos(q\theta) \cos(\alpha) \pm \sin(\alpha).$$

Notemos que Ec. (2.80) puede ser fácilmente integrada en términos de funciones elípticas inversas

observando que es equivalente a la siguiente ecuación de primer orden

$$\alpha' = \pm \left[ 2 \left( E_0 - \frac{q^2}{4} \cos(2\alpha) + \frac{8m^2}{K} \cos(\alpha) \right) \right]^{1/2}, \quad (2.81)$$

La constante de integración  $E_0$  será determinada en la siguiente subsección al requerir una carga topológica no nula. Por otro, las cuatro ecuaciones de Maxwell también se reducen a una única ecuación para  $u(r, \theta)$ , a saber

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u + Vu = \sigma, \quad (2.82)$$

donde

$$V = \frac{2L}{p} \sigma, \quad \sigma = 2pLK \sin^2(\alpha) \sin^2(q\theta).$$

Podemos ver que existe un valor máximo cuando  $\sin^2(\alpha) = \sin^2(q\theta) = 1$  y las ecuaciones de campo son satisfechas por

$$u(r, \theta)_{\max} = \sin(k_1 \theta) \sin(k_2 r) + u_0, \\ k_1^2 + k_2^2 = 4KL^2, \quad u_0 = \frac{p}{2L}.$$

Por otro lado, se espera un valor mínimo cuando  $\sin^2(\alpha) = 0$  o bien  $\sin^2(q\theta) = 0$ , pero en este escenario las ecuaciones de campo no tienen soluciones con condiciones de borde periódicas. Notemos también que la ecuación de Maxwell puede ser llevada a una ecuación homogénea para una nueva función, a saber  $\Psi$ , definiendo

$$\Psi = \frac{2L}{p} u - 1,$$

de tal forma que Ec. (2.82) se vuelve

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \Psi + V\Psi = 0. \quad (2.83)$$

En resumen, hemos visto que el sistema acoplado de siete ecuaciones de campo, formado por las tres ecuaciones del modelo sigma no lineal y las cuatro ecuaciones de Maxwell (en un sector con carga topológica no trivial, como veremos en lo que sigue), se reduce de forma exacta a una única ecuación lineal no homogénea en la forma de una ecuación de Schrödinger con potencial bidimensional periódico y un término de fuente. La interpretación física de estos resultados será discutida en la



siguiente subsección.

Es interesante notar además que la ecuación homogénea tipo Schrödinger pertenece al potencial bidimensional integrable de Veselov-Novikov [76].

#### 2.5.4 Carga topológica y densidad de energía

Tomando en cuenta Ecs. (2.76), (2.77), (2.78), (2.79) y (2.81), la densidad de carga topológica definida en Ecs. (2.9) y (2.10) para las configuraciones aquí construidas, es

$$\rho_B = \rho_B^{\text{NLSM}} + \rho_B^{\text{Maxwell}} , \quad (2.84)$$

donde las contribuciones del modelo sigma no lineal y de la teoría de Maxwell son, respectivamente

$$\begin{aligned} \rho_B^{\text{NLSM}} &= -12pq \sin(q\theta) \sin^2(\alpha) \partial_r \alpha , \\ \rho_B^{\text{Maxwell}} &= 12L \left[ \left( 2q \sin(q\theta) \sin^2(\alpha) u - \cos(q\theta) \partial_\theta u \right) \partial_r \alpha - q \sin(\alpha) \cos(\alpha) \sin(q\theta) \partial_r u \right] , \end{aligned}$$

y que también puede ser escrita como

$$\rho_B = 3q \frac{\partial}{\partial r} \left( p \sin(q\theta) (\sin(2\alpha) - 2\alpha) - 2L \sin(q\theta) u \sin(2\alpha) \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} (12L \alpha' u \cos(q\theta)) . \quad (2.85)$$

Así, podemos leer las condiciones de borde para los campos

$$\alpha(2\pi) - \alpha(0) = n\pi , \quad (2.86)$$

y con esto, la carga topológica se vuelve

$$W = -np \times \left( \frac{1 - (-1)^q}{2} \right) - \frac{L}{\pi} \int_0^{2\pi} dr \alpha' \left( (-1)^q u(r, \pi) - u(r, 0) \right) .$$

Ahora, asumiendo condiciones de borde para  $u$  de la siguiente forma

$$u(r, \pi) = (-1)^q u(r, 0) , \quad (2.87)$$

obtenemos

$$W = \begin{cases} -np & \text{if } q \in 2\mathbb{Z} + 1 , \\ 0 & \text{if } q \in 2\mathbb{Z} . \end{cases} \quad (2.88)$$

Podemos notar que, de acuerdo a Ecs. (2.81) y (2.86), la constante de integración  $E_0$  se fija en términos de  $n$  a través de la relación

$$n \int_0^\pi \frac{1}{\eta(n\alpha, E_0)} d\alpha = 2\pi, \quad \eta(\alpha, E_0) = \pm \left[ 2 \left( E_0 - \frac{q^2}{4} \cos(2\alpha) + \frac{8m^2}{K} \cos(\alpha) \right) \right]^{1/2} .$$

Por otro lado, la densidad de energía  $T_{00}$  queda

$$T_{00} = T_{00}^{\text{NLSM}} + T_{00}^{\text{Maxwell}} , \quad (2.89)$$

donde  $T_{00}^{\text{NLSM}}$  y  $T_{00}^{\text{Maxwell}}$  son las densidades de energía del modelo sigma no lineal y la teoría de Maxwell, que son dados por

$$T_{00}^{\text{NLSM}} = \frac{K}{2L^2} \left[ \alpha'^2 + 2 \sin^2(\alpha) \sin^2(q\theta) (p - 2Lu)^2 + q^2 \sin^2(\alpha) \right] + 4m^2 \cos(\alpha) , \quad (2.90)$$

$$T_{00}^{\text{Maxwell}} = \frac{1}{L^2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right] . \quad (2.91)$$

### 2.5.5 Tubos bariónicos cargados

En esta sección discutiremos la interpretación física de los solitones que hemos construido, y además de estudiar su estabilidad.

Primero que todo, recordemos que los solitones son topológicamente no triviales, por lo tanto estos no pueden ser deformados a la identidad mediante transformaciones continuas. Segundo, tenemos la expresión explícita de la densidad topológica  $\rho_B$  (en Ec. (2.85)), la densidad de energía  $T_{00}$  (en Ecs. (2.89), (2.90) y (2.91)) y la corriente  $J_\mu$  (definida en Ec. (2.73)). Para nuestras configuraciones las componentes no nulas de la corriente son

$$J_t = \frac{2K}{L} \sin^2(\alpha) \sin^2(q\theta) (p - 2Lu) ,$$

$$J_\phi = -2K \sin^2(\alpha) \sin^2(q\theta) (p - 2Lu) .$$

Notemos que, debido a los términos de interacción no lineales del modelo sigma no lineal, la corriente  $U(1)$  tiene tanto un término que no depende del potencial de gauge (llamémoslo  $J_\mu^{(0)}$ ) como un término lineal en el potencial de gauge (llamémoslo  $J_\mu^{(1)}$ ):

$$J_\mu = J_\mu^{(0)} + J_\mu^{(1)}, \quad J_\mu^{(1)} \approx C_\mu^\nu A_\nu,$$

por lo tanto podemos esperar un comportamiento similar a los superconductores cuando los solitones proveen al fotón de una masa efectiva. En efecto, de la gráficas es posible ver el siguiente hecho: el máximo valor de la densidad de energía y de la densidad topológica  $\rho_B$  tienen la forma de tubos (luego, estos multi-solitones lucen como muchos tubos con un patrón tipo cristal regular). Además la corriente  $J_\mu$  tiene un mínimo donde la densidad de energía y la densidad topológica tienen un máximo. Así, estos tubos se asemejan a tubos superconductores dado que el campo electromagnético está suprimido en su núcleo.

Las componentes de los campos eléctrico y magnético de estas configuraciones son dados por

$$E_r = -\partial_r u, \quad E_\theta = -\partial_\theta u, \quad E_\phi = 0, \quad (2.92)$$

$$B_r = \frac{1}{L^3} \partial_\theta u, \quad B_\theta = -\frac{1}{L^3} \partial_r u, \quad B_\phi = 0. \quad (2.93)$$

Las Figuras 2.5 and 2.6 muestran la densidad de energía, la densidad topológica, las componentes de la corriente y de los campos eléctrico y magnético para una configuración simple de dos solitones cargados a densidad finita. Para esto hemos usado la siguiente condición de borde

$$u(r, 0) = u(r, \pi) = 0, \quad (2.94)$$

y también hemos fijado el tamaño de la caja  $L = 1$  y la constante de acoplamiento de los piones  $K = 2$ .

La Figura 2.7 muestra el comportamiento de la densidad de energía para una configuración con carga topológica dada cuando los parámetros  $q$  y  $m$  cambian, esto usando las condiciones de borde en Ec. (2.94) y los mismos valores para los parámetros  $L$  y  $K$  antes mencionados.

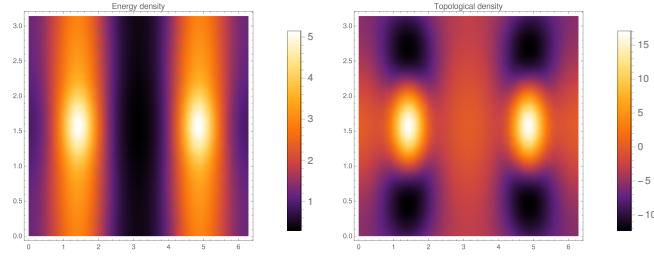


Figura 2.5: Densidad de energía y densidad de carga topológica de dos solitones, con  $n = 2$ ,  $m = 0.2$ , and  $p = q = 1$ . Fuente: Elaboración propia.

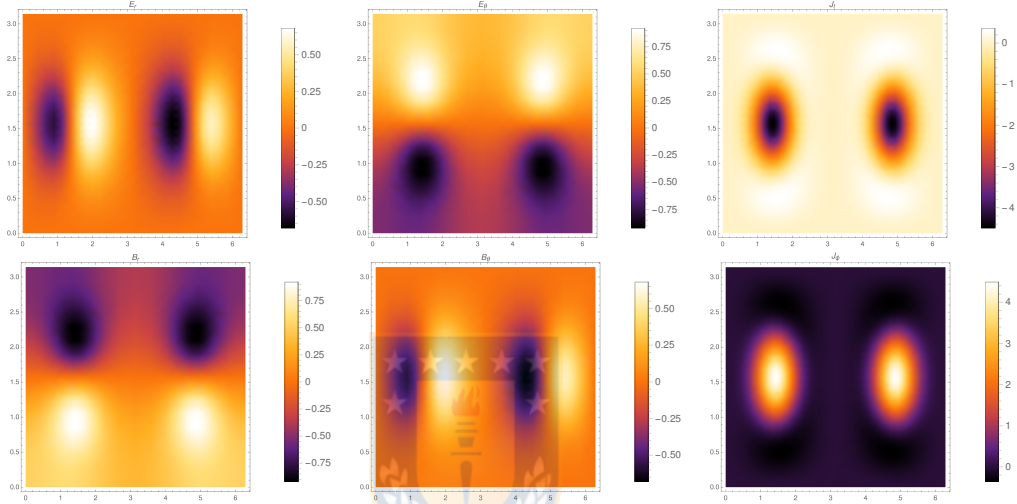


Figura 2.6: Campo eléctrico, campo magnético y corriente de una configuración de dos solitones con  $n = 2$ ,  $m = 0.2$  y  $p = q = 1$ . Fuente: Elaboración propia.

### 2.5.6 Una nota sobre la estabilidad

En esta subsección consideraremos un acercamiento al estudio de la estabilidad de las soluciones de multi-solitones. El análisis de estabilidad general para las presentes configuraciones es altamente no trivial, dado que se debe analizar un sistema de siete ecuaciones diferenciales no lineales acopladas. Tal tarea, incluso de forma numérica, es bastante difícil de tratar. Sin embargo, existen dos tipos particulares de perturbaciones de interés en las que sí es posible estudiar la estabilidad.

Es un hecho bastante conocido (ver Refs. [77, 78]) que cuando la propiedad del erizo para el modelo sigma no lineal se satisface (esto es, las ecuaciones de campo son reducidas a solo una ecuación para el perfil del solitón), surge un típico modo inestable en las perturbaciones que mantienen la estructura del ansatz. En el presente caso estos son

$$\alpha \rightarrow \alpha + \varepsilon \Psi(r) , \quad \varepsilon \ll 1 . \quad (2.95)$$

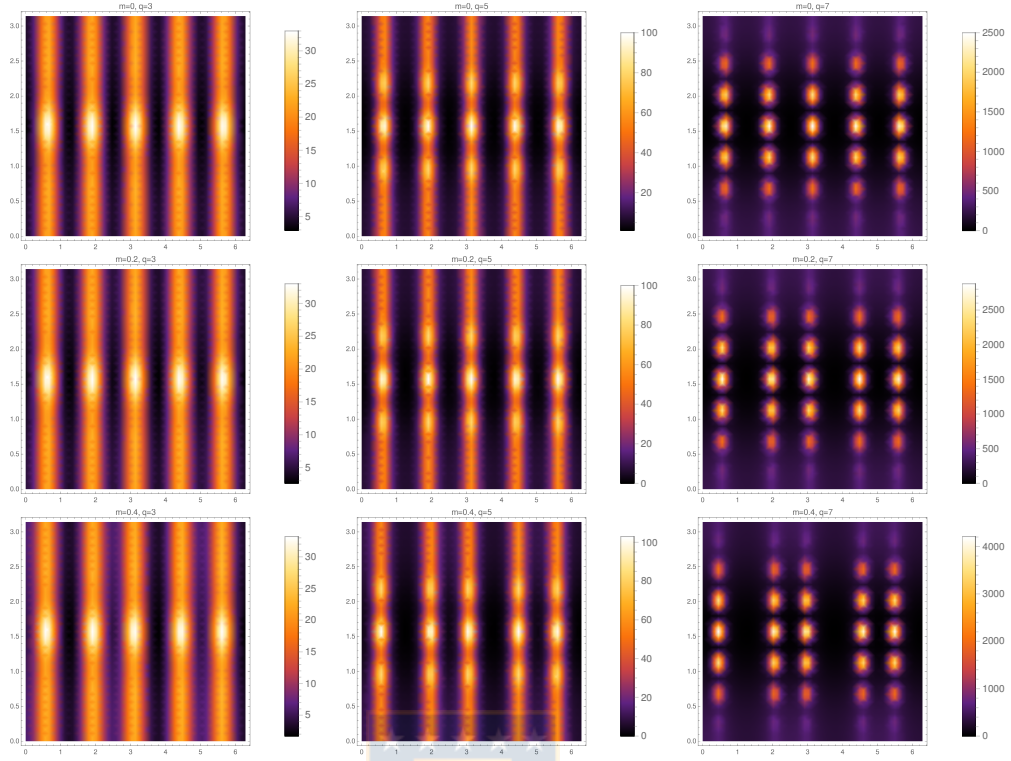


Figura 2.7: Comparación de energía para diferentes configuraciones como función del parámetro  $q$  y la masa. Aquí hemos considerado  $n = 5$ ,  $K = 2$ ,  $L = p = 1$ . Fuente: Elaboración propia.

Es un cálculo directo el mostrar que la versión linealizada de Ec. (2.80) alrededor de una solución de *background*  $\alpha_0(r)$  de carga  $B = -np$  siempre tiene el siguiente modo cero:  $\Psi(r) = \partial_r \alpha_0(r)$ . Debido a Ec. (2.81),  $\Psi(r)$  no tiene nodos, por lo que deben ser las perturbaciones con energía mas baja. Así, las soluciones acá presentadas son estables bajo perturbaciones sobre el perfil  $\alpha(r)$ .

Ahora analizaremos el comportamiento de los solitones bajo perturbaciones electromagnéticas. Como hemos discutido en la sección anterior, los argumentos que vienen de la aproximación de  $N$  grande sugieren que una manera simple, y aún físicamente relevante, de estudiar perturbaciones en este tipo de sistemas es simplemente considerar perturbaciones para el campo electromagnético sobre el *background* definido por los solitones.

Dicho esto, consideraremos la siguiente perturbación electromagnética

$$A_\mu^{(0)} \rightarrow A_\mu^{(0)} + \varepsilon A_\mu^{(1)}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (2.96)$$

donde

$$\begin{aligned} A_\mu^{(0)} &= (u(r, \theta), 0, 0, -Lu(r, \theta)) , \\ A_\mu^{(1)} &= (\xi(r, \theta), 0, 0, -L\xi(r, \theta)) \exp [i(\omega t + k\phi)] . \end{aligned}$$

De lo anterior, las ecuaciones de Maxwell linealizadas para el campo escalar  $\xi = \xi(r, \theta)$  se reducen a

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \xi + V\xi = 0 , \quad (2.97)$$

donde hemos considerado  $\omega = -\frac{k}{L}$  con el objeto de tener un valor no trivial para  $\xi$ . Aquí  $V$  es el mismo que en Ec. (2.72), por lo tanto, las ecuaciones de Maxwell a primer orden se reducen simplemente a la ecuación homogénea tipo Schrödinger definida en Ec. (2.72).

Cuando consideramos perturbaciones electromagnéticas generales junto a perturbaciones radiales sobre el perfil, la contribución a primer orden en la corriente tiene la misma forma anteriormente mencionada, y el tensor  $C_\nu^\mu$  puede ser visto como un término de masa. Explícitamente,

$$\begin{aligned} J_\mu^{\text{pert}} &= \bar{J}_\mu^{(0)} + \bar{C}_\mu^\nu \bar{A}_\nu , \\ \bar{J}_\mu^{(0)} &= \frac{2K}{L} \sin(2\alpha) \sin^2(q\theta) (p - 2Lu) (\delta_\mu^t - L\delta_\mu^\phi) a , \quad \bar{C}_\mu^\nu = -4K \sin^2(\alpha) \sin^2(q\theta) \delta_\mu^\nu , \end{aligned}$$

donde  $a = a(r)$  es la perturbación del perfil y  $\bar{A}_\mu = \bar{A}_\mu(t, r, \theta, \phi)$  son las componentes de las perturbación electromagnética general.

En resumen, hemos visto que es posible construir soluciones en el modelo sigma no lineal acoplado a Maxwell con un término de masa, que describen multi-solitones cargados dentro de un volumen finito. Además estos estados de multi-solitones son estáticos (aún cuando el campo depende explícitamente del tiempo) pues ni la densidad de energía ni la densidad de carga topológica dependen del tiempo. Por otro lado estas configuraciones son periódicas en las posiciones de los *peaks*, por lo que manifiestan una estructura cristalina. Finalmente, en la aproximación en la que los solitones son considerados como un *background* fijo, el campo de Maxwell percibe a estos como un medio periódico efectivo donde sus propiedades pueden ser estudiadas explícitamente.

## Capítulo 3

# El modelo de Skyrme acoplado a relatividad general

En este capítulo construiremos soluciones de solitones gravitantes en el modelo Einstein-Skyrme. La primera familia de soluciones corresponde a solitones sin carga topológica dentro de una cavidad, los que pueden ser interpretados como estrellas de bosones. La segunda familia corresponde a dibariones gravitantes en un espacio-tiempo con constante cosmológica cuando el grupo de simetría interno es  $SU(3)$ .

### 3.1 El modelo Einstein-Skyrme

La teoría de Einstein-Skyrme es descrita por la acción

$$I_{\text{SE}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{\mathcal{R} - 2\Lambda}{2\kappa} + \frac{K}{4} \text{Tr}[R^\mu R_\mu + \frac{\lambda}{8} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] \right), \quad (3.1)$$

donde  $\mathcal{R}$  es el escalar de Ricci,  $\Lambda$  es la constante cosmológica y  $\kappa$  la constante gravitatoria.

Variando la acción en Ec. (3.1) con respecto al campo escalar  $U$  y a la métrica  $g_{\mu\nu}$  se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones de campo

$$\nabla^\mu R_\mu + \frac{\lambda}{4} \nabla^\mu [R^\nu, F_{\mu\nu}] = 0, \quad G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

donde  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein,  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de energía-momentum definido en Ec. (1.6) y

$\nabla_\mu$  es la derivada covariante, que actúa sobre un campo vectorial  $V^\mu$  en la forma

$$\nabla_\mu V^\mu = \partial_\mu V^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu V^\lambda = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (\sqrt{|g|} V^\mu) ,$$

con  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$  los símbolos de Christoffel.

## 3.2 Solitones gravitantes en una cavidad

En esta sección, haciendo uso del ansatz del erizo generalizado presentado en el Capítulo I, mostraremos la construcción de soluciones que describen solitones gravitantes confinados en una cavidad en los modelos Einstein- $SU(2)$  sigma no lineal y Einstein- $SU(2)$  Skyrme sin constante cosmológica. También calcularemos la energía del campo escalar y la carga asociada a la simetría global  $U(1)$  de estas soluciones y estudiaremos sus principales características. Los resultados que mostramos a continuación han sido reportados en ([37]).



### 3.2.1 Ansatz y ecuaciones de campo

Como punto de partida consideremos el ansatz del erizo generalizado introducido en el primer capítulo con una elección particular de los campos escalares, a saber  $\Phi(x^\mu) = \pi/2$ . Aquí  $\alpha(x^\mu)$  describirá el perfil del solitón y  $\Theta(x^\mu)$  su orientación en el espacio de isospin. Notemos que bajo esta elección particular, de acuerdo a Ec. (1.17), la carga topológica se anula, por lo que estaremos en el sector piónico de la teoría.

Consideraremos también las ecuaciones de campo Ec. (3.2) en el caso  $\Lambda = 0$ .

Exigiendo además las siguientes relaciones

$$\square\Theta = 0 , \quad \nabla_\mu \Theta \nabla^\mu \alpha = 0 , \quad (3.3)$$

$$(\nabla^\mu \nabla^\nu \Theta) \nabla_\mu \Theta \nabla_\nu \Theta = 0 , \quad (3.4)$$

$$(\nabla^\mu \nabla^\nu \alpha) \nabla_\mu \alpha \nabla_\nu \Theta = 0 , \quad (3.5)$$

las ecuaciones de Skyrme se reducen a una única ecuación. Veremos en lo que sigue que, aún cuando el conjunto de relaciones en Ecs. (3.3), (3.4) y (3.5) junto con la fijación de la función  $\Phi(x^\mu)$  a una



constante pueda parecer muy restrictivo, existen familias de soluciones no triviales que describen solitones gravitantes con interesantes propiedades.

Con las simplificaciones antes mencionadas el conjunto completo de ecuaciones se reduce a las ecuaciones de Einstein con tensor de energía-momentum dado por

$$T_{\mu\nu} = \left[ (\nabla_\mu \alpha)(\nabla_\nu \alpha) + \sin^2 \alpha (\nabla_\mu \Theta)(\nabla_\nu \Theta) + \lambda \sin^2 \alpha \right. \\ \times \left( (\nabla \Theta)^2 (\nabla_\mu \alpha)(\nabla_\nu \alpha) + (\nabla \alpha)^2 (\nabla_\mu \Theta)(\nabla_\nu \Theta) \right) \\ \left. - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left( (\nabla \alpha)^2 + \sin^2 \alpha (\nabla \Theta)^2 + \lambda \sin^2 \alpha (\nabla \Theta)^2 (\nabla \alpha)^2 \right) \right], \quad (3.6)$$

en adición a la ecuación de Skyrme resultante

$$\square \alpha - \frac{1}{2} \sin(2\alpha) (\nabla \Theta)^2 + \lambda \left[ (\nabla_\mu \alpha) \nabla^\mu \left( \sin^2 \alpha (\nabla \Theta)^2 \right) \right. \\ \left. + \sin^2 \alpha (\nabla \Theta)^2 (\square \alpha) - \frac{1}{2} \sin(2\alpha) (\nabla \alpha)^2 (\nabla \Theta)^2 \right] = 0. \quad (3.7)$$

Es importante notar que estas ecuaciones también pueden ser obtenidas desde la acción efectiva

$$I_{\text{ef}} = \int \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{2\kappa} - 2 \left( \partial_\rho \alpha \partial^\rho \alpha + \sin^2(\alpha) \partial_\rho \Theta \partial^\rho \Theta + \frac{\lambda}{2} \sin^2(\alpha) (\nabla \alpha)^2 (\nabla \Theta)^2 \right) \right]. \quad (3.8)$$

Las ecuaciones en Ecs. (3.6) y (3.7) son obtenidas, por supuesto, variando Ec. (3.8) respecto de las funciones  $\alpha$ ,  $\Theta$  y respecto de la métrica  $g_{\mu\nu}$ . La ecuación que se obtiene al variar respecto de  $\Theta$  es idénticamente satisfecha al imponer las restricciones en Ecs. (3.3), (3.4) y (3.5).

Notemos además que la acción efectiva, al igual que las restricciones, son invariantes bajo la transformación global

$$\delta_{(1)} \alpha = 0, \quad \delta_{(1)} \Theta = \epsilon, \quad (3.9)$$

con  $\epsilon$  el parámetro de la transformación. Como veremos más adelante, esta simetría permite construir una corriente conservada local la que, integrada dentro de una cavidad, lleva a una carga conservada finita.

Para construir las soluciones de solitones gravitantes consideraremos una métrica estática esféricamente

simétrica

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{h(r)}dr^2 + r^2 \left( d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \right) , \quad (3.10)$$

y asumiremos la siguiente dependencia de los campo de materia

$$\alpha = \alpha(r) , \quad \Theta = \omega t , \quad (3.11)$$

donde  $\omega$  es una frecuencia. Es directo chequear que bajo esta dependencia coordenada se satisfacen las restricciones en Ecs. (3.3), (3.4) y (3.5). Es importante aclarar también que, aún cuando el campo de materia depende del tiempo, el tensor de energía-momentum será independiente de esta coordenada, y por lo tanto, las cantidades físicas asociadas serán estáticas.

Luego, introduciendo Ec. (3.11) en las ecuaciones de campo Ecs. (3.2), (3.6) y (3.7), el sistema se reduce a tres ecuaciones no lineales acopladas, a saber

$$r^2 \omega^2 u^2 \left( u^2 - \lambda h u'^2 - 1 \right) + f \left( 2(u^2 - 1)(r h' - 1) + h(2u^2 - r^2 u'^2 - 2) \right) = 0 , \quad (3.12)$$

$$f \left( 2(1 - u^2) + h \left( 2(u^2 - 1) + r^2 u'^2 \right) \right) - r \left( r \omega^2 u^4 + 2h f' + u^2 (r \lambda \omega^2 h u'^2 - 2h f' - r \omega^2) \right) = 0 , \quad (3.13)$$

$$-2r \omega^2 f u (u^2 - 1)^2 + (u^2 - 1) \left( 2f^2 (1 + h) - 4\lambda \omega^2 f h u^2 + r^2 \lambda \omega^4 u^4 \right) u' + 2r (\lambda \omega^2 - f) f h u u'^2 - 2r f h (u^2 - 1) \left( \lambda \omega^2 u^2 - f \right) u'' = 0 , \quad (3.14)$$

donde hemos definido por simplicidad  $u(r) = \sin \alpha(r)$ , y además hemos fijado  $2\kappa = 1$ .

A nivel de las ecuaciones de campo podemos ver que el parámetro  $\omega$  puede ser absorbido al reescalar la coordenada radial y la constante de acoplamiento de Skyrme en la forma  $r \rightarrow \bar{r} = \omega r$ ,  $\lambda \rightarrow \bar{\lambda} = \omega^2 \lambda$ . Mientras que en el modelo sigma no lineal esta transformación reduce el número de parámetros independientes, en presencia del término de Skyrme la libertad de escoger  $\omega$  es mapeada a la libertad de escoger el valor de  $\lambda$ .

La condición de que el espacio-tiempo sea asintóticamente plano requiere como condición necesaria (no así suficiente) que el campo de materia se debe anular en infinito. Por lo tanto, asumiendo que

$\alpha$  tiende a cero cuando la coordenada radial tiende a infinito, Ec. (3.12) se reduce a

$$r\alpha''(r) + 2\alpha'(r) + r\omega^2\alpha(r) = 0 . \quad (3.15)$$

De forma consistente, esta ecuación es equivalente a la ecuación para el perfil radial de un campo escalar sin masa en el espacio-tiempo de Minkowski, y admite el comportamiento asintótico  $\alpha(r) \rightarrow \cos(\omega r)/r$ . Ahora bien, este comportamiento no es compatible con configuraciones que posean masa finita y por lo tanto, si queremos solitones gravitantes bien definidos debemos confinar el sistema en una cavidad. Para lograr esto imponemos condiciones de borde tipo espejo para el perfil  $\alpha$  para un valor finito de la coordenada radial  $r = r_m$ , es decir, imponemos la condición  $\alpha(r_m) = 0$ .

Una situación similar a la comentada anteriormente ocurre en la teoría Einstein-Maxwell acoplada a un campo escalar cargado sin masa [79], donde el requerimiento de un comportamiento asintóticamente plano no es compatible con una masa finita tanto para solitones como para agujeros negros, salvo que el sistema sea encerrado en una cavidad.

### 3.2.2 Nuevas soluciones de solitones gravitantes

Para construir soluciones de solitones gravitantes necesitamos exigir regularidad de las componentes de la métrica y del campo escalar en el origen. Por lo tanto asumiremos expansiones en serie alrededor del origen de la forma

$$f(r) = \sum_{i=0}^N f_i r^i , \quad h(r) = \sum_{i=0}^N h_i r^i , \quad u(r) = \sum_{i=0}^N u_i r^i , \quad (3.16)$$

tal que  $f_1 = h_1 = 0$  para garantizar dicha regularidad. Aquí  $N$  es el orden de la expansión, el que será fijado posteriormente al realizar la integración numérica.

Introduciendo Ec. (3.16) en las ecuaciones de campo dadas en Ecs. (3.12), (3.13) y (3.14), y resolviendo los coeficientes orden por orden, vemos que existen dos ramas de soluciones posibles. La

primera rama permitida es dada por

$$f_1(r) = f_0 + \frac{1}{3}u_0^2\omega^2 r^2 + \frac{u_0^2\omega^4 (6f_0^2(2u_0^2 - 1) + f_0u_0^2(7 - 19u_0^2)\lambda\omega^2 + 6u_0^6\lambda^2\omega^4)}{180f_0(f_0 - u_0^2\lambda\omega^2)^2} r^4 + \mathcal{O}(r^6) , \quad (3.17)$$

$$h_1(r) = 1 - \frac{u_0^2\omega^2}{6f_0} r^2 + \frac{u_0^2\omega^4 (f_0^2(2 + u_0^2) - 2f_0u_0^2(2 + u_0^2)\lambda\omega^2 + 3u_0^6\lambda^2\omega^4)}{90f_0^2(f_0 - u_0^2\lambda\omega^2)^2} r^4 + \mathcal{O}(r^6) , \quad (3.18)$$

$$u_1(r) = u_0 + \frac{u_0(u_0^2 - 1)\omega^2}{6(f_0 - u_0^2\lambda\omega^2)} r^2 - \frac{u_0(u_0^2 - 1)\omega^4 (f_0^2(3 - 7u_0^2) + 5f_0u_0^2(1 + u_0^2)\lambda\omega^2 - 6u_0^6\lambda^2\omega^2)}{360f_0(f_0 - u_0^2\lambda\omega^2)^3} r^4 + \mathcal{O}(r^6) . \quad (3.19)$$

y la segunda

$$f_2(r) = \lambda u_0^2 \omega^2 + \frac{11u_0^2\omega^2}{30} r^2 + \frac{4u_0(20u_0^2 - 21)\omega^2}{225\sqrt{5}\lambda(1 - u_0^2)} r^3 + \mathcal{O}(r^4) , \quad (3.20)$$

$$h_2(r) = 1 - \frac{7}{30\lambda} r^2 + \frac{4(6 - 5u_0^2)}{75\lambda^{\frac{3}{2}}u_0\sqrt{5}(1 - u_0^2)} r^3 + \mathcal{O}(r^4) , \quad (3.21)$$

$$u_2(r) = u_0 - \frac{\sqrt{1 - u_0^2}}{\sqrt{5}\lambda} r + \frac{3 - 10u_0^2}{150\lambda u_0} r^2 + \frac{261 - 1890u_0^2 + 2125u_0^4}{38250\lambda^{\frac{3}{2}}u_0^2\sqrt{5}(1 - u_0^2)} r^3 + \mathcal{O}(r^4) . \quad (3.22)$$

Podemos ver que la primera rama es analítica en la constante de acoplamiento  $\lambda$  mientras que la segunda es intrínseca a la presencia de este parámetro. Estas ramas determinan el comportamiento de las componentes de la métrica y del perfil del solitón cerca del origen, y serán usadas como condiciones iniciales para realizar la integración que permite conocer el comportamiento de todas las funciones incógnitas limitadas por el radio de la cavidad.

Notemos con respecto a la primera rama que, para un valor dado de la constante de acoplamiento de Skyrme, los parámetros libres en la solución serán  $f_0$ ,  $u_0$  y  $\omega$ , pero podemos normalizar la coordenada radial  $t$  de tal forma que coincida con el tiempo propio de un observador geodésico localizado en el origen, tal que  $f_0 = 1$ . Ahora bien, en la segunda rama el valor de la componente  $g_{tt}$  de la métrica no es un parámetro libre. Aún así podemos normalizar la coordenada temporal  $t$  para coincidir con el tiempo propio del observador geodésico a través del escalamiento  $t \rightarrow t/\sqrt{\lambda u_0^2 \omega^2}$ . De esta manera el parámetro  $\omega$  es absorbido de todas las funciones de modo que  $\Theta = \omega t \rightarrow t/\sqrt{\lambda u_0^2}$ . Esto también puede ser logrado simplemente definiendo  $\omega = 1/\sqrt{\lambda u_0^2}$ , de tal manera que  $u_0$  será el único parámetro que caracterice la segunda rama.

Para realizar la integración numérica procedemos de la siguiente manera: primero fijamos la coordenada  $t$  como el tiempo propio de un observador en el origen, con lo que tendremos dos parámetros libres para la primera rama ( $\omega$  y  $u_0$ ) y un parámetro libre para la segunda rama ( $u_0$ ). Luego, para

ambas ramas integramos numéricamente usando como condiciones iniciales las expansiones cerca del origen de las funciones en Ecs. (3.17) y (3.20) y sus derivadas. La integración la efectuamos usando el método de Runge-Kutta hasta orden  $N = 8$  mediante un parámetro regulador  $\epsilon \sim 0$ . El primer cero del perfil del soliton corresponderá a la localización de la cavidad,  $r_m$ . Con esto logramos obtener el comportamiento de nuestra solución, la que será estudiada gráficamente en la siguiente sección.

### 3.2.3 Cargas conservadas

Hemos visto que a través de la integración numérica se obtiene el comportamiento de las funciones métricas y del campo de Skyrme usando como condiciones iniciales las expansiones en serie cerca del origen. Ahora, una vez que estas funciones son conocidas podemos calcular la energía del campo escalar y la carga  $U(1)$  usando las fórmulas

$$M = -4\pi \int_0^{r_m} T^t_t r^2 dr = 8\pi r_m (1 - h(r_m)) , \quad (3.23)$$

y

$$Q = -16\pi\omega \int_0^{r_m} dr \frac{r^2}{\sqrt{f(r)h(r)}} \left( 1 + \frac{\lambda}{2} \alpha'^2 h(r) \right) \sin(\alpha)^2 . \quad (3.24)$$

Para la primera rama, la Figura 3.1 muestra las funciones integradas para diferentes valores de  $\omega$  y  $u_0$ . El valor del radio de la cavidad  $r_m$  corresponde al primer cero del perfil radial. La relación entre el valor de  $r_m$  y el parámetro  $u_0$  se muestra en la Figura 3.2, donde podemos ver que el radio de la cavidad es una función creciente del valor del campo en el origen y decrece con  $\omega^{-1}$ . Esto último es esperable debido al comportamiento asintótico, ya que la periodicidad de los ceros del campo  $\alpha(r) \sim \cos(\omega r)$  está dado en términos de la periodicidad en el tiempo de la fase  $\Theta = \omega t$ . La Figura 3.2 también muestra que es posible localizar  $r_m$  a una distancia propia del origen arbitrariamente grande a medida que  $u_0$  tiende a la unidad. Sin embargo, como se muestra en Figura 3.3, cuando  $u_0 \rightarrow 1$  la energía y la carga divergen, por lo tanto solo valores de  $r_m$  localizados a distancia propia finita del origen son compatibles con la condición de masa y carga finita. Podemos ver además que para estas configuraciones la carga  $U(1)$  es mayor que el valor de la energía.

Para la segunda rama, que no es analítica en  $\lambda$  y es caracterizada únicamente por el valor del campo en el origen  $u_0$ , la Figura 3.4 muestra el comportamiento de las funciones métricas y el perfil de Skyrme para diferentes valores de  $u_0$ . La Figura 3.5 muestra el comportamiento del radio de la cavidad como función de  $u_0$ , donde se ve nuevamente que  $r_m$  diverge a medida que  $u_0$  tiende a la

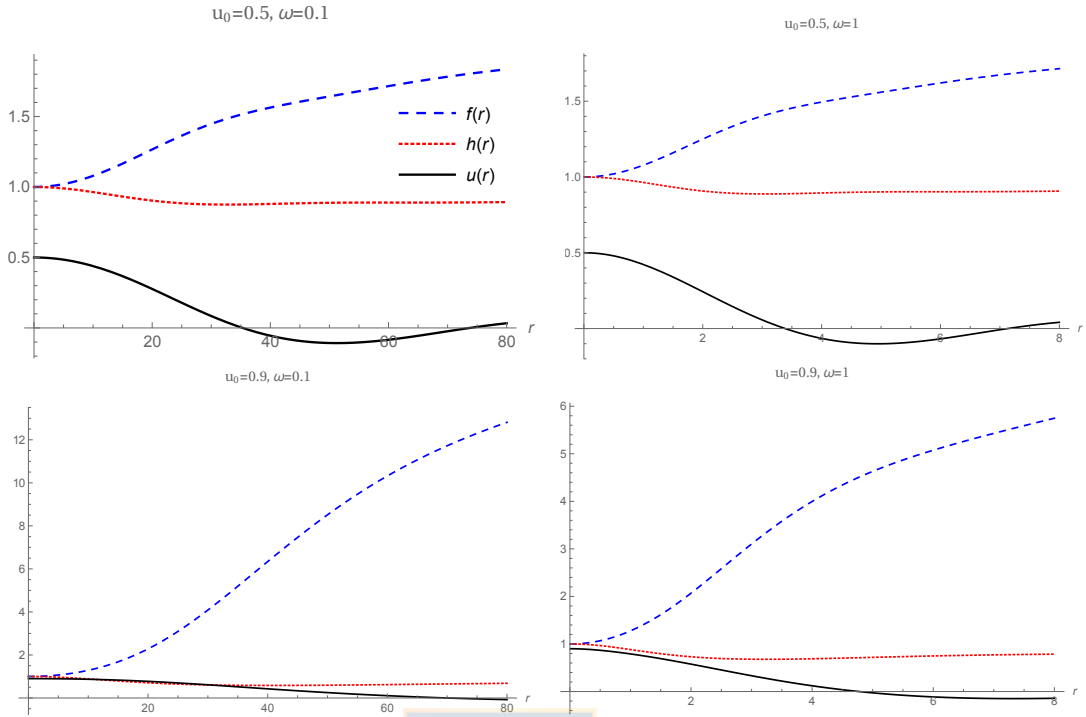


Figura 3.1: Funciones métricas y campo de Skyrme para diferentes valores de  $u_0$  y la frecuencia para la rama 1. El radio de la cavidad está localizado en el primer cero del perfil del skyrmion. Aquí hemos considerado  $\lambda = 1$ . Fuente: Elaboración propia.

unidad, así como la masa y la carga. Para valores pequeños de la carga y la masa las curvas se intersectan para un valor crítico de  $u_0$ .

Así, hemos logrado construir solitones gravitantes dentro de una cavidad en un espacio-tiempo esféricamente simétrico. Como comentario final, uno podría intentar construir soluciones de agujeros negros usando el mismo método. En concreto, asumiendo la existencia de un horizonte regular localizado en  $r_+$ , y asumiendo también analiticidad para  $u(r)$  en el horizonte, es posible mostrar que las ecuaciones de campo admiten dos ramas. La primera de estas lleva a  $u(r) = 0$ , lo que implica que  $U$  es igual a la identidad y la solución se reduce al agujero negro de Schwarzschild. La segunda rama lleva a una expansión cerca del horizonte de la forma

$$\begin{aligned}
 u(r) &= u_1(r - r_+) + \mathcal{O}((r - r_+)^2) , \\
 g(r) &= r_+^{-1}(r - r_+) + \mathcal{O}((r - r_+)^2) , \\
 f(r) &= -r_+\omega^2(r - r_+) + \mathcal{O}((r - r_+)^2) ,
 \end{aligned}$$

la que no es consistente con la estructura de un horizonte de eventos. Esto muestra que, al menos

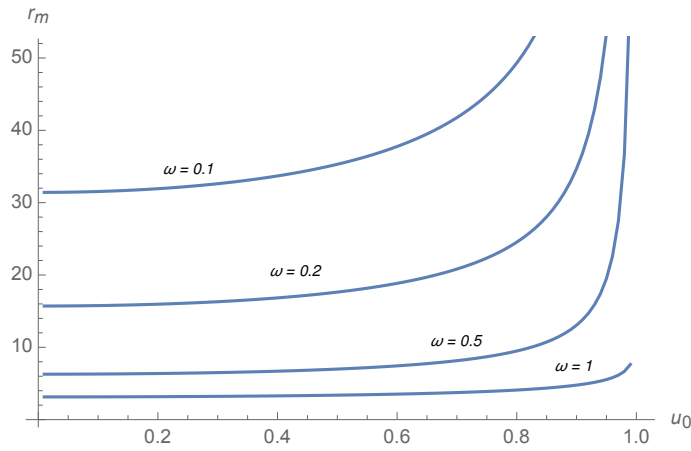


Figura 3.2: Radio de la cavidad  $r = r_m$  como función creciente del valor del campo de Skyrme en el origen para diferentes valores de  $\omega$  (con  $\lambda = 1$ ) para la rama 1. Fuente: Elaboración propia.

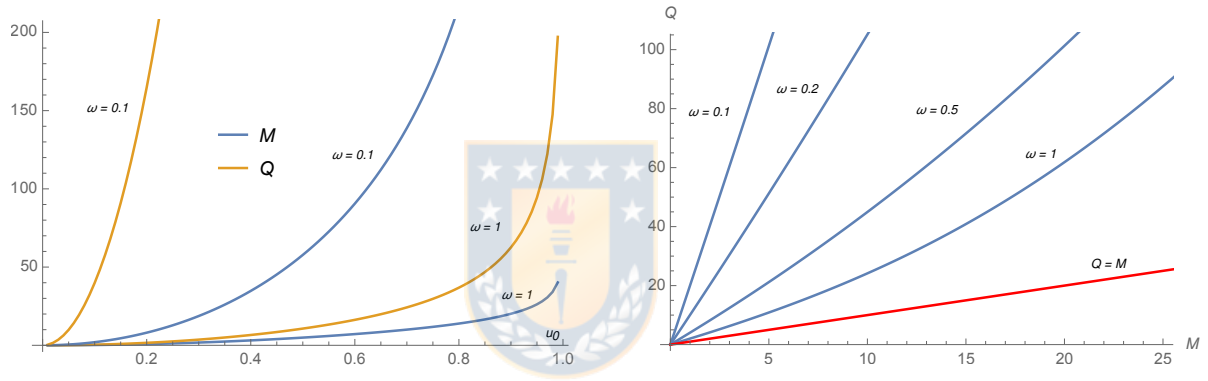


Figura 3.3: **Panel izquierdo:** Energía y carga  $U(1)$  de los solitones para dos valores de la frecuencia y varios valores del campo en el origen para la rama 1. Como se espera, las cargas divergen como  $u_0 \rightarrow 1$ . **Panel derecho:** Comportamiento de  $Q$  vs  $M$  para los solitones en la rama 1. Para todos los casos  $Q > M$ , como se puede ver al comparar con la curva roja ( $M = Q$ ) de referencia. Fuente: Elaboración propia.

dentro del ansatz en consideración, no existen soluciones de agujeros negros. Por lo tanto, las estrellas de bosones que hemos construido acá no pueden decaer en agujeros negros con pelo con las mismas simetrías.

### 3.3 Dibariones gravitantes

Hasta ahora hemos visto que tanto el ansatz del erizo generalizado como el ansatz en ángulos de Euler permiten la construcción de distintos tipos de solitones en el modelo de Skyrme. Ahora veremos que esto también es posible cuando el grupo de simetría interno de la teoría es  $SU(3)$ .

En particular, en esta sección construiremos las primeras soluciones analíticas de dibariones grav-

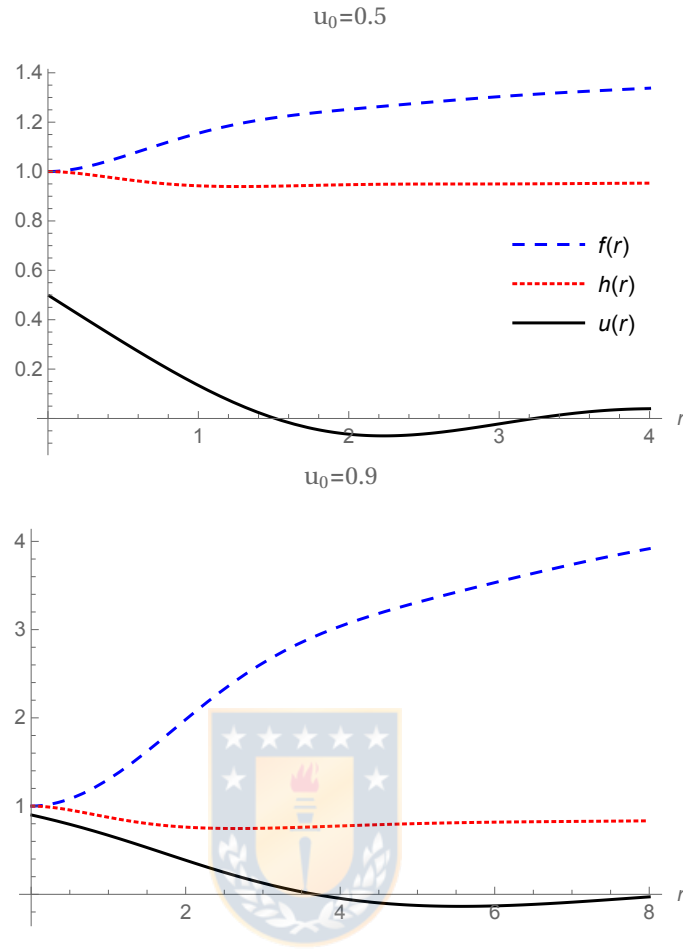


Figura 3.4: Funciones métricas y campo de Skyrme para la rama 2 con diferentes valores de  $u_0$ . La función *lapse* en el origen ha sido escogida como la unidad, fijando la frecuencia de fase del campo de Skyrme. Fuente: Elaboración propia.

itantes en el modelo Einstein  $SU(3)$ -Skyrme a través de la combinación del ansatz del erizo generalizado con el ansatz de Balachandran. Veremos que la geometría de estas soluciones es la de un universo Bianchi IX, mientras el campo de Skyrme es escogido de tal manera que las ecuaciones de Skyrme son idénticamente satisfechas en el sector de carga bariónica  $B = 4$  (a las que nos referiremos de todas formas como dibariones para enfatizar la importancia del ansatz).

### 3.3.1 Revisión de los skyrmiones gravitantes: $U \in SU(2)$

Para comprender de mejor manera la construcción de los dibariones gravitantes, revisemos primero brevemente cómo se construyen los skyrmiones gravitantes en la teoría Einstein  $SU(2)$ -Skyrme.

Consideremos el ansatz del erizo generalizado presentado en el Capítulo I de esta tesis. En Ref. [34] se mostró que si se definen los campos de materia como función de las coordenadas de la siguiente



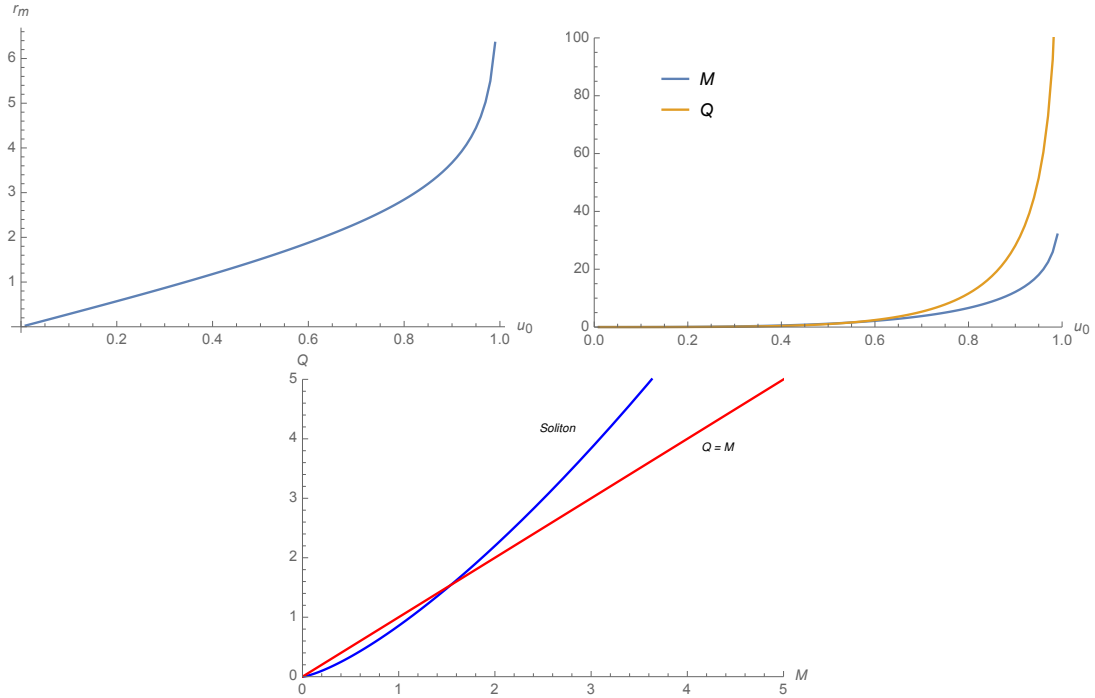


Figura 3.5: **Panel superior izquierdo:** El radio del espejo como función creciente del valor  $u_0$ , para rama 2. Esta diverge cuando  $u_0 \rightarrow 1$ . **Panel superior derecho:** Masa y carga como función de  $u_0$ . Ambas divergen cuando el radio del espejo va a infinito. **Panel inferior:**  $Q$  vs  $M$ . Existe valor crítico bajo el que  $Q > M$  (curva  $Q = M$  incluida como referencia). Hemos escogido  $\lambda = 1$ . Fuente: Elaboración propia.

forma

$$\Theta = \frac{\gamma + \varphi}{2}, \quad \tan \Phi = \frac{\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\gamma - \varphi}{2}\right)}, \quad \tan \alpha = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \Phi}}{\tan\left(\frac{\gamma - \varphi}{2}\right)}, \quad (3.25)$$

y asumimos que la métrica del espacio-tiempo es dada por

$$ds^2 = -dt^2 + \rho(t)^2 \left[ (d\gamma + \cos \theta d\varphi)^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right], \quad (3.26)$$

donde el rango de las coordenadas va como

$$0 \leq \gamma < 4\pi, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (3.27)$$

es posible chequear que el campo de materia definido en Ec. (3.25) satisface idénticamente las ecuaciones de campo de Skyrme cuando la métrica es dada por Ec. (3.26). Además, las ecuaciones

de Einstein se reducen a

$$\dot{\rho}^2 = \frac{\Lambda}{3}\rho^2 + \frac{\lambda\kappa K}{32\rho^2} + \frac{\kappa K - 2}{8}, \quad \ddot{\rho} = \frac{\Lambda}{3}\rho^2 - \frac{\lambda\kappa K}{32\rho^3}, \quad (3.28)$$

donde  $\dot{f}$  denota derivada de la función  $f$  con respecto a la coordenada temporal. En el caso particular  $\rho = \rho_0$  constante, la métrica es el producto  $\mathbb{R} \times S^3$ , y las relaciones anteriores fijan el radio de la esfera tridimensional y la constante cosmológica en términos de las constantes de acoplamiento de la teoría de la siguiente manera,

$$\rho_0^2 = \frac{3(2 - \kappa K)}{4\Lambda}, \quad \lambda = \frac{3(2 - \kappa K)^2}{8\Lambda\kappa K}.$$

Es directo calcular la carga topológica de esta configuración usando Ec. (1.9), que resulta ser  $B = 1$ , y por lo tanto la solución describe un skyrmion gravitante.

### 3.3.2 Ansatz de dibariones: $U \in SU(3)$

La manera natural de construir soluciones que describen solitones topológicos gravitantes en el modelo Einstein  $SU(3)$ -Skyrme es siguiendo la estrategia de Ref. [34] pero usando un ansatz modificado para el campo de Skyrme que presente las propiedades de una configuración genuinamente  $SU(3)$ . Esta construcción puede ser dividida en dos pasos.

Primero, usaremos el ansatz introducido en Refs. [43, 44] y que presentamos en el Capítulo I, que permite describir dibariones en espacio-tiempo plano con las condiciones de borde usuales en el infinito espacial. Como señalamos antes, este ansatz es construido con el subálgebra de las matrices de Gell-Mann que generan el subgrupo  $SO(3)$  contenido en  $SU(3)$ .

Un hecho notable que se desprende de los resultados en Refs. [43, 44] es que la carga topológica de las configuraciones allí construidas depende únicamente del perfil  $\chi = \chi(r)$  en Ecs. (1.18) y (1.19), por lo tanto podrían existir soluciones con número bariónico no nulo aún cuando  $\psi = 0$ . Sin embargo, en ese caso las ecuaciones de campo requieren que  $\psi$  sea no trivial. Veremos a continuación que este problema no aparece cuando el modelo de Skyrme es acoplado a relatividad general, y de hecho usaremos esta ventaja para construir soluciones analíticas con carga topológica no nula.

Dicho lo anterior, es directo chequear que una pequeña modificación del ansatz en Ec. (3.25),

definido ahora como

$$\psi = 0, \quad \Theta = \frac{\gamma + \varphi}{2}, \quad \tan \Phi = \frac{\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\gamma - \varphi}{2}\right)}, \quad \tan\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \Phi}}{\tan\left(\frac{\gamma - \varphi}{2}\right)}, \quad (3.29)$$

combinado con la métrica en Ecs. (3.26) y (3.27) satisfacen idénticamente las ecuaciones de Skyrme, tal como ocurre en el caso  $SU(2)$ . Por lo tanto, las ecuaciones de campo son reducidas únicamente a las siguientes relaciones obtenidas de las ecuaciones de Einstein

$$\dot{\rho}^2 = \frac{\Lambda}{3}\rho^2 + \frac{\lambda\kappa K}{8\rho^2} + \frac{2\kappa K - 1}{4}, \quad \ddot{\rho} = \frac{\Lambda}{3}\rho - \frac{\lambda\kappa K}{8\rho^3}. \quad (3.30)$$

En el caso particular  $\rho = \rho_0$  constante, las constantes de la teoría se fijan como

$$\rho_0^2 = \frac{3(1 - 2\kappa K)}{8\Lambda}, \quad \lambda = \frac{3(1 - 2\kappa K)^2}{8\Lambda\kappa K}.$$

Es importante mencionar que se puede escribir la solución más general de Ec. (3.30) en términos del sistema Ermakov-Pinney [80].



### 3.3.3 Ecuaciones de campo y soluciones de dibariones gravitantes

Podemos ver que las ecuaciones para el caso  $SU(3)$  son muy similares a las de caso  $SU(2)$  módulo ciertos coeficientes, los que juegan un rol muy importante pues llevan a diferentes valores de carga topológica para ambas configuraciones. En efecto, a partir de Ec. (1.9) es directo verificar que las densidades de carga topológicas para ambos grupos son dadas por

$$\rho_B^{\text{SU}(3)} = 6 \sin \theta, \quad \rho_B^{\text{SU}(2)} = \frac{3}{2} \sin \theta, \quad (3.31)$$

y por consiguiente, al realizar la integración de estas densidades en una superficie tipo espacio definida por Ec. (3.27), se ve que la nueva solución con grupo de simetría  $SU(3)$  posee número bariónico  $B = 4$ . Esto demuestra que las soluciones descritas por Ecs. (3.26) y (3.29) son genuinamente  $SU(3)$ , pues configuraciones con alta carga topológica, dentro de este ansatz, no pueden ser obtenidas para  $U \in SU(2)$ .

El hecho de que estas soluciones posean carga topológica cuatro en vez de dos está relacionado con la compacidad de las hipersuperficies a  $t = \text{constante}$  en la métrica. En nuestro caso, en

vez de requerir condiciones de borde en el infinito espacial como en Refs. [43, 44], hemos requerido condiciones de borde periódicas para el campo de Skyrme compatible con la métrica espacial compacta en Ecs. (3.26) y (3.27).

La construcción anterior puede ser también extendida a una cosmología Bianchi IX más general. De hecho, las ecuaciones de Skyrme, cuando la métrica es dada por

$$ds^2 = -dt^2 + I_1^2(\cos(\theta)d\gamma + d\phi)^2 + I_2^2(\cos(\phi)d\theta + \sin(\theta)\sin(\phi)d\gamma)^2 \quad (3.32)$$

$$+ I_3^2(\sin(\phi)d\theta - \sin(\theta)\cos(\phi)d\gamma)^2, \quad (3.33)$$

son aun idénticamente satisfechas para el campo de Skyrme definido en Ec. (3.29), donde acá  $I_j = I_j(t)$ . La razón detrás de esto es que las *left-invariant forms* que aparecen en la construcción de la métrica Bianchi IX más general son proporcionales a las *left-invariant forms*  $\Omega^a$  que se obtienen del campo de Skyrme usando la relación

$$(U_B)^{-1} \partial_\mu U_B = \Omega_\mu^a \lambda_a, \quad (3.34)$$

donde  $U_B$  es el campo que hemos definido en Ecs. (1.18), (1.19) y (3.29). Consecuentemente, las ecuaciones de campo se simplifican enormemente cuando la métrica inversa del espacio-tiempo se contrae con los  $\Omega_\mu^a$  que vienen del campo de Skyrme. Esta construcción es independiente del grupo en sí mismo, y es por esto que se pueden construir las soluciones analíticas tanto en  $SU(2)$  como en  $SU(3)$ .

Por otro lado, las ecuaciones de Einstein, que son las que quedan por resolver, se reducen a un sistema compatible de tres ecuaciones con tres funciones a determinar, a saber  $I_j$ . Estas ecuaciones toman la forma

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \left( I^{(4)} - 2\mathcal{I} + 4\Lambda\mathcal{I}_{(3)}^2 - 4\mathcal{I}_{(3)}(I_1'I_2'I_3 + I_1'I_2I_3' + I_1I_2'I_3') \right) + K\kappa(\lambda I^{(2)} + 4\mathcal{I}), \\ 0 &= I^{(4)} + 2I_3^4 + 2 \left( \mathcal{I} - 2I_1^2I_2^2 \right) + 4\mathcal{I}_{(3)} \left( I_1'I_2'I_3 - I_1I_2I_3'' \right) - K\kappa \left( \lambda I_3^2 + 2(\mathcal{I} - 2I_1^2I_2^2) \right), \\ 0 &= 2 \left( 2I_2I_1' \left( I^{(4)} - 2I_2^4 - 2I_1^2I_3^2(1 - \Lambda I_2^4) \right) + I_1I_2' \left( I^{(4)} - 4I_2^4 + 2(\mathcal{I} - 2I_1^2I_3^2) \right) \right) \\ &\quad - 8\mathcal{I}_{(3)} \left( I_2I_3I_1'I_2' + (I_2I_1' + I_1I_3I_2')I_1I_2'' \right) \\ &\quad + K\kappa \left( \lambda I_2((I^{(2)} - 2I_2^2)I_1' - 2I_1I_3I_3') - 4I_1 \left( (\mathcal{I} - 2I_1^2I_3^2)I_2' - 2\mathcal{I}_{(3)}I_3^2I_1' \right) \right), \end{aligned}$$

donde hemos definido

$$I^{(2)} = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2, \quad I^{(4)} = I_1^4 + I_2^4 + I_3^4, \quad \mathcal{I} = I_1^2 I_2^2 + I_1^2 I_3^2 + I_2^2 I_3^2, \quad \mathcal{I}_{(3)} = I_1 I_2 I_3.$$

Como las ecuaciones de Skyrme están automáticamente satisfechas en nuestro ansatz, las ecuaciones de Einstein describen, a través de las funciones  $I_j$ , la evolución dinámica de los skyrmiones gravitantes. Por lo tanto, el análisis de este sistema puede revelar muchas características interesantes acerca de la relación entre las interacciones gravitatorias y nuclear fuerte de los dibariones.

### 3.3.4 Límite plano

Otro hecho notable de este ansatz es que es posible adaptarlo ligeramente para poder construir soluciones en espacio-tiempo plano en un volumen finito.

Para lograr esto, manteniendo la estructura de Ec. (3.29), introducimos una función arbitraria  $H = H(t, z)$  en la forma

$$\psi = 0, \quad \Phi = \frac{\gamma + \varphi}{2}, \quad \tan \Theta = \frac{\tan H(t, z)}{\cos\left(\frac{\gamma - \varphi}{2}\right)}, \quad \tan\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \Theta}}{\tan\left(\frac{\gamma - \varphi}{2}\right)}, \quad (3.35)$$

junto con la métrica plana de una caja

$$ds^2 = -dt^2 + L^2 [dz^2 + d\gamma^2 + d\varphi^2], \quad (3.36)$$

donde  $L$  tiene dimensiones de longitud y representa el lado de la caja en la que el dibarion se encuentra. El rango de las coordenadas en este caso va como

$$0 \leq z \leq 2\pi, \quad 0 \leq \gamma \leq 4\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Entonces, insertando los ansätze para el campo de Skyrme en Ec. (3.35) y la métrica plana en Ec. (3.36), las ecuaciones de Skyrme en Ec. (1.4) se reducen a

$$\square H - \frac{\lambda}{8l^2(2l^2 + \lambda)} \sin(4H) = 0. \quad (3.37)$$

Aquellas soluciones de la ecuación de Sine-Gordon, de acuerdo a Ec. (1.9) poseen densidad de carga

bariónica dada por

$$\rho_B^{\text{SU}(3)} = -12 \sin(2H(t, z)) \partial_z H(t, z) .$$

Es posible comprobar que con las condiciones de borde  $H(0) = 0$  ,  $H(2\pi) = \pm \frac{\pi}{2}$ , la carga topológica es nuevamente  $B = 4$ . Por lo tanto, estas soluciones representan cuatro bariones dentro un volumen finito.

En resumen, combinando el ansatz del erizo generalizado con el ansatz de balachandran hemos logrado construir soluciones analíticas de dibariones en la teoría Einstein  $SU(3)$ -Skyrme. También hemos visto que este formalismo es aplicable cuando el espacio-tiempo es plano, describiendo de esta forma un estado de cuatro solitones dentro de un volumen finito.

El hecho de que las ocho ecuaciones de campo de Skyrme se reduzcan a solo una ecuación para el perfil de los solitones abre la posibilidad de estudiar propiedades interesantes de multi-skyrmiones viviendo dentro de un volumen finito usando la teoría de Sine-Gordon.



# Conclusiones

En esta tesis doctoral hemos construido nuevas soluciones, tanto analíticas como numéricas, del modelo de Skyrme acoplado a la teoría de Maxwell y a relatividad general. Estas soluciones representan diferentes tipos de solitones, cuyas propiedades han sido también estudiadas a lo largo de este trabajo. A continuación se detallan los principales resultados.

## Skyrme-Maxwell

En primer lugar, usando un ansatz en ángulos de Euler para el campo de Skyrme y considerando un potencial de Maxwell radial, hemos logrado brindar una descripción analítica completa de solitones cargados en un volumen finito mediante la teoría de ecuaciones diferenciales. En particular, hemos logrado reducir el sistema completo de ecuaciones de campo del modelo Skyrme-Maxwell (que en principio son siete ecuaciones no lineales acopladas) a una ecuación de Heun para dos sectores topológicos no triviales, que describen skyrmiones cargados y cristales de tiempo. La ecuación de Heun a su vez, bajo una elección apropiada de los parámetros, puede ser llevada a una ecuación de Whittaker-Hill, lo que permite en principio conocer la energía de los solitones en términos de la carga topológica. En el caso de los skyrmiones cargados hemos visto que el espacio ocupado por estos está cuantizado, mientras para los cristales de tiempo el período del tiempo es el que se encuentra cuantizado. Hemos visto además que perturbaciones electromagnéticas adecuadas sobre el sistema satisfacen una ecuación de Mathieu, y por lo tanto el espectro de estas perturbaciones está también sujeto al estudio de ecuaciones diferenciales. Es importante recordar que la ecuación de Mathieu es muy importante en resurgencia, por lo que esta construcción podría entregar pistas sobre la relación entre resurgencia y QCD.

Por otro lado, hemos logrado construir las primeras soluciones analíticas que describen multi-solitones topológicos cargados en un volumen finito como soluciones del modelo sigma no lineal

acoplado a Maxwell. Usando un ansatz con dependencia temporal para el campo sobre una métrica plana, hemos logrado reducir el sistema de siete ecuaciones acopladas a solo una ecuación ecuación lineal tipo Schrodinger con un potencial efectivo bidimensional periódico. Hemos visto que tanto la densidad de energía como la densidad de carga topológica de estas configuraciones son periódicas y las posiciones de los *peaks* manifiestan un orden cristalino. Estos solitones describen configuraciones donde la mayor parte de la densidad de carga y de energía total están concentradas en regiones con forma de tubos cuyas posiciones son espacialmente regulares.

### **Einstein-Skyrme**

En este modelo, haciendo uso del ansatz del erizo generalizado, hemos construido numéricamente soluciones de solitones gravitantes en un espacio-tiempo esféricamente simétrico. Para lograr esto hemos asumido un comportamiento regular de la métrica y del perfil del solitón cerca del origen, lo que lleva a dos ramas de soluciones posibles, una analítica en la constante de acoplamiento de Skyrme y una no analítica. Estos solitones no poseen carga topológica, por lo que pueden ser entendidos como estrellas de bosones. El requerimiento de poseer masa finita lleva a confinar el sistema en una cavidad localizada en el primero cero del perfil del solitón, y donde las cargas conservadas (la energía del solitón y la carga  $U(1)$ ) son leídas y comparadas; esto una vez que hemos normalizado la coordenada temporal para coincidir con el tiempo propio de un observador geodésico en el origen. Es importante notar que mientras la rama analítica posee dos parámetros libres, a saber, el valor del campo en el origen y la frecuencia, en la rama no analítica solo queda libre el valor del campo en el origen. Con respecto a la estabilidad, hemos visto que en el escenario de un ansatz de erizo generalizado con perfil radial, una expansión en serie cerca del origen no es compatible con la estructura de un horizonte de eventos a menos que el campo de Skyrme se anule, por lo que estas estrellas de bosones no pueden decaer en agujeros negros con pelo y las mismas simetrías.

Por otro lado, hemos logrado construir los primeros solitones gravitantes analíticos con alta carga bariónica cuando el grupo de simetría interno es  $SU(3)$ . Esto ha sido logrado combinando el ansatz del erizo generalizado con el ansatz para describir dibariones introducido por Balachandran *et al.* El espacio-tiempo corresponde a la cosmología más general Bianchi IX mientras las ecuaciones para el campo de Skyrme son satisfechas idénticamente en el sector con carga topológica  $B = 4$ . Estas soluciones revelan características genuinas del modelo  $SU(3)$ -Skyrme, ya que dichas configuraciones no se reducen a un embebimiento trivial de  $SU(2)$  en  $SU(3)$ . Finalmente, introduciendo una nueva función radial en el ansatz del campo de Skyrme antes mencionado, hemos visto que también es



posible construir estas configuraciones en un espacio-tiempo plano de volumen finito, donde esta vez las ecuaciones de Skyrme se reducen a una ecuación de Sine-Gordon.

En resumen, en este trabajo logramos construir nuevas soluciones físicamente relevantes en el modelo de Skyrme acoplado tanto a la teoría de Maxwell como a relatividad general, y cuando los grupos de simetría internos son  $SU(2)$  y  $SU(3)$ .

De estos resultados es natural preguntarse si es posible construir skyrmiones, o solitones en general, en el modelo Maxwell-Skyrme-Einstein, donde dichas configuraciones describirían objetos gravitantes y cargados que interactúan fuertemente. Esto nos permitiría un acercamiento respecto de cómo interactúan las tres fuerzas presentes en este escenario, incluso de forma analítica si las ecuaciones pueden ser simplificadas como ocurre en estos casos. También es necesario estudiar la estabilidad de las soluciones mediante perturbaciones más generales.

Por otro lado, resulta de muchísimo interés continuar explorando en profundidad la relación que existe entre el modelo de Skyrme y la teoría de resurgencia. La teoría de resurgencia es bastante prometedora como un mecanismo para lidiar con las divergencias en teoría cuántica de campos, y su aplicación en un modelo realista como Skyrme podría ser muy fructífero para estudiar aspectos no perturbativos. Esto también podría ayudar a comprender la relación entre resurgencia y QCD.

Finalmente, hemos visto que con estas técnicas es posible construir soluciones incluso cuando el grupo de simetría interno es  $SU(3)$ . Usando teoría de grupos, se podría estudiar la posibilidad de generalizar estas soluciones para grupos de orden mayor, incluso cuando  $U \subseteq SU(N)$ .

# Referencias

- [1] N. Manton and P. Sutcliffe, *Topological Solitons*, Cambridge University Press, Cambridge (2007).
- [2] T. Skyrme, *Proc. R. Soc. London A* **260**, 127 (1961); *Proc. R. Soc. London A* **262**, 237 (1961); *Nucl. Phys.* **31**, 556 (1962).
- [3] A.P. Balachandran, G. Marmo, B. S. Skagerstam, A. Stern, “*Classical Topology and Quantum States*” World Scientific, (1991).
- [4] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B 223** (1983), 422; *Nucl. Phys.* **B 223** (1983), 433.
- [5] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B 72**, 461 (1974).
- [6] D. I. Olive and P. C. West, Cambridge, UK: Univ. Pr. (1999) 473 p.
- [7] N. S. Manton, *Phys. Lett.* **110B**, 54 (1982).
- [8] I. Klebanov, *Nucl. Phys.* **B 262** (1985) 133.
- [9] A. Actor, *Phys. Lett.* **B 157** (1985) 53.
- [10] H. A. Weldon, *Phys. Rev.* **D 26** (1982) 1394.
- [11] M. Loewe, S. Mendizabal, J.C. Rojas, *Phys. Lett.* **B 632** (2006) 512.
- [12] J. A. Ponciano, N. N. Scoccola, *Phys. Lett.* **B 659** (2008) 551.
- [13] G. S. Adkins, C. R. Nappi, E. Witten, *Nucl. Phys.* **B 228** (1983), 552-566.
- [14] H. Luckock and I. Moss, *Phys. Lett.* **B 176**, 341 (1986).
- [15] S. Droz, M. Heusler, and N. Straumann, *Phys. Lett.* **B 271**, 61 (1991).
- [16] B.M.A.G. Piette, D. H. Tchrakian, *Phys.Rev.* **D 62** (2000) 025020.

- [17] E. Radu, D. H. Tchrakian, *Phys. Lett. B* **632** (2006) 109-113.
- [18] B. M. A. G. Piette, B. J. Schroers and W. J. Zakrzewski, *Z. Phys. C* **65**, 165 (1995). ;  
B. M. A. G. Piette, B. J. Schroers and W. J. Zakrzewski, *Nucl. Phys. B* **439**, 205 (1995).
- [19] R. A. Leese, M. Peyrard and W. J. Zakrzewski, *Nonlinearity* **3**, 773 (1990).
- [20] P. M. Sutcliffe, *Nonlinearity* **4**, no. 4, 1109 (1991).
- [21] T. Weidig, *Nonlinearity* **12**, 1489 (1999).
- [22] P. Eslami, W. J. Zakrzewski and M. Sarbishaei, *Nonlinearity* **13**, 1867 (2000).
- [23] A. E. Kudryavtsev, B. Piette and W. J. Zakrzewski, *Eur. Phys. J. C* **1**, 333 (1998).
- [24] C. Adam, J. Sanchez-Guillen and A. Wereszczynski, *Phys. Lett. B* **691**, 105 (2010). ; C. Adam,  
J. Sanchez-Guillen and A. Wereszczynski, *Phys. Rev. D* **82**, 085015 (2010).
- [25] J. C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, “*Large order behavior of perturbation theory*”, North-  
Holland, Amsterdam (1990).
- [26] M. V. Berry and C. J. Howls, *Proc. R. Soc. A* **430**, 653 (1990); *Proc. R. Soc. A* **434**, 657  
(1991); M. V. Berry, “*Asymptotics, Superasymptotics, Hyperasymptotics ...*”, in *Asymptotics  
Beyond All Orders*, H. Segur et al (Eds), Plenum Press, New York (1991).
- [27] M. Marino, R. Schiappa, and M. Weiss, *Commun. Num. Theor. Phys.* **2** (2008) 349; *J. Math.  
Phys.* **50**, 052301 (2009).
- [28] F. Canfora and P. Salgado-Rebolledo, *Phys. Rev. D* **87**, 045023 (2013).
- [29] F. Canfora, H. Maeda, *Phys. Rev. D* **87**, 084049 (2013).
- [30] F. Canfora, *Phys. Rev. D* **88**, (2013), 065028.
- [31] S. Chen, Y. Li, Y. Yang, *Phys. Rev. D* **89** (2014), 025007.
- [32] F. Canfora, F. Correa, J. Zanelli, *Phys. Rev. D* **90**, 085002 (2014).
- [33] F. Canfora, M. Di Mauro, M. A. Kurkov, A. Naddeo, *Eur. Phys. J. C* **75** (2015) 9, 443.
- [34] E. Ayon-Beato, F. Canfora, J. Zanelli, *Phys. Lett. B* **752**, (2016) 201-205.
- [35] F. Canfora, G. Tallarita, *Nucl. Phys. B* **921** (2017) 394-410.
- [36] F. Canfora, A. Paliathanasis, T. Taves and J. Zanelli, *Phys. Rev. D* **95**, no. 6, 065032 (2017).

- [37] A. Giacomini, M. Lagos, J. Oliva and A. Vera, *Phys. Lett. B* **783**, 193 (2018).
- [38] M. Astorino, F. Canfora, M. Lagos and A. Vera, *Phys. Rev. D* **97**, no. 12, 124032 (2018).
- [39] P. D. Alvarez, F. Canfora, N. Dimakis and A. Paliathanasis, *Phys. Lett. B* **773**, (2017) 401-407.
- [40] L. Aviles, F. Canfora, N. Dimakis, D. Hidalgo, *Phys. Rev. D* **96** (2017), 125005.
- [41] F. Canfora, M. Lagos, S. H. Oh, J. Oliva and A. Vera, *Phys. Rev. D* **98**, no. 8, 085003 (2018).
- [42] F. Canfora, *Eur. Phys. J. C* **78**, no. 11, 929 (2018).
- [43] A. P. Balachandran, V. P. Nair, N. Panchapakesan, S. G. Rajeev, *Phys. Rev. D* **28** (1983), 2830.
- [44] A. P. Balachandran, A. Barducci, F. Lizzi, V.G.J. Rodgers, A. Stern, *Phys. Rev. Lett.* **52** (1984), 887; A.P. Balachandran, F. Lizzi, V.G.J. Rodgers, A. Stern, *Nucl. Phys. B* **256**, 525-556 (1985).
- [45] L. Brey, H. A. Fertig, R. Cote, A. H. MacDonald, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2562 (1995).
- [46] I. Klebanov, *Nucl. Phys. B* **262** (1985) 133.
- [47] E. Wrist, G.E. Brown, A.D. Jackson, *Nucl. Phys. A* **468** (1987) 450.
- [48] N. Manton, *Phys Lett. B* **192** (1987) 177.
- [49] A. Goldhaber, N. Manton, *Phys Lett. B* **198** (1987), 231.
- [50] N. Manton, P. Sutcliffe, *Phys. Lett. B* **342** (1995) 196.
- [51] D. Harland, N. Manton, *Nucl. Phys. B* **935** (2018) 210.
- [52] W. K. Baskerville, *Phys. Lett. B* **380** (1996) 106.
- [53] E. Witten, *Nucl. Phys. B* **160**, 57 (1979).
- [54] G. H. Derrick, *J. Math. Phys.* **5**, 1252 (1964).
- [55] T. E. Tilma and G. Sudarshan, *J. Phys. A* **35**, 10467 (2002).
- [56] S. Bertini, S. L. Cacciatori and B. L. Cerchiai, *J. Math. Phys.* **47**, 043510 (2006).
- [57] C. G. Callan Jr. and E. Witten, *Nucl. Phys. B* **239** (1984) 161-176.
- [58] S. Demulder, D. Dorigoni and D. C. Thompson, *JHEP* **1607**, 088 (2016).

- [59] H. Weigel, *Chiral Soliton Models for Baryons*, Lecture Notes in Physics (Springer, 2008).
- [60] Deligne, “*Équations différentielles à points singuliers réguliers*” Berlin , pp. iii+133. Springer-Verlag (1970).
- [61] D. Dorigoni, “*An Introduction to Resurgence, Trans-Series and Alien Calculus*”.
- [62] G. V. Dunne and M. Unsal, “*WKB and Resurgence in the Mathieu Equation*”.
- [63] F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 160401 (2012).
- [64] A. Shapere, F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 160402 (2012).
- [65] F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 250402 (2013).
- [66] P. Bruno, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 070402 (2013); *Phys. Rev. Lett.* **110**, 118901 (2013); *Phys. Rev. Lett.* **111**, 029301 (2013).
- [67] H. Watanabe, M. Oshikawa, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 251603 (2015).
- [68] K. Sacha, J. Zakrzewski, “*Time crystals: a review*”.
- [69] K. Sacha, *Phys. Rev. A* **91**, 033617 (2015).
- [70] S. Choi, J. Choi, R. Landig, G. Kucsko, H. Zhou, J. Isoya, F. Jelezko, S. Onoda, H. Sumiya, V. Khemani, C. von Keyserlingk, N. Y. Yao, E. Demler, M. D. Lukin, *Nature* **543** (7644), 221–225 (2017), letter.
- [71] Zhang, J, P. W. Hess, A. Kyprianidis, P. Becker, A. Lee, J. Smith, G. Pagano, I.-D. Potirniche, A. C. Potter, A. Vishwanath, N. Y. Yao, C. Monroe, *Nature* **543** (7644), 217–220 (2017), letter.
- [72] N. Y. Yao, A. C. Potter, I.-D. Potirniche, A. Vishwanath, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 030401 (2017).
- [73] D. V. Else, B. Bauer, C. Nayak, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 090402 (2016); *Phys. Rev. Lett.* **118**, 030401 (2017).
- [74] V. Khemani, A. Lazarides, R. Moessner, S. L. Sondhi, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 250401 (2016).
- [75] T. A. Ishkhanyan and A. M. Ishkhanyan, *AIP Advances* **4**, 087132 (2014)
- [76] A. P. Veselov and S. P. Novikov, “*Exactly soluble periodic two-dimensional Schrödinger operators*”, Communications of the Moscow Mathematical Society, page 1316-1317 (1995); “*Exactly solvable two-dimensional Schrodinger operators and Laplace transformations*”.

- [77] M. Shifman, “*Advanced Topics in Quantum Field Theory: A Lecture Course*” Cambridge University Press, (2012).
- [78] M. Shifman, A. Yung, “*Supersymmetric Solitons*” Cambridge University Press, (2009).
- [79] S. Ponglertsakul, E. Winstanley and S. R. Dolan, Phys. Rev. D **94**, no. 2, 024031 (2016).
- [80] V. Ermakov, Univ. Isz. Kiev Series III 9 (1880) (translated by A. Harin); E. Pinney, *Proc. Am. Math. Soc.* **1**, 681 (1950).



# Apéndice A: Ecuaciones de campo

Para obtener las ecuaciones de campo del modelo de Skyrme en Ec. (1.4) debemos variar la acción en Ec. (1.3) respecto del campo de Skyrme  $U$ . Aplicando la derivada variacional sobre el lagrangiano obtenemos

$$\delta\mathcal{L} = \frac{K}{2} \left( \text{Tr}(R^\mu \delta R_\mu) + \frac{\lambda}{8} \text{Tr}(F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu}) \right). \quad (3.38)$$

Estudiaremos la variación de los dos términos por separado. Para el primer término en Ec. (3.38) resultan útiles las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \delta(UU^{-1}) = 0 &\quad \rightarrow \quad \delta U^{-1} = -U^{-1} \delta U U^{-1}, \\ \partial_\mu(UU^{-1}) = 0 &\quad \rightarrow \quad \partial_\mu U^{-1} = -U^{-1} \partial_\mu U U^{-1}, \end{aligned}$$

y teniendo esto en consideración calculamos la variación del tensor  $R_\mu$  como sigue

$$\begin{aligned} \delta R_\mu &= \delta(U^{-1} \partial_\mu U) \\ &= -U^{-1} \delta U U^{-1} \partial_\mu U + U^{-1} \delta \partial_\mu U \\ &= -U^{-1} \delta U R_\mu + R_\mu U^{-1} \delta U + \partial_\mu(U^{-1} \delta U). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Luego, el primer término en Ec. (3.38) queda

$$\begin{aligned} \text{Tr}(R^\mu \delta R_\mu) &= \text{Tr}(R^\mu \partial_\mu(U^{-1} \delta U)) \\ &= -\text{Tr}(\partial_\mu R^\mu U^{-1} \delta U) + \text{Tr}(\partial_\mu(U^{-1} \delta U R^\mu)). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Ahora, para la variación del término de Skyrme en Ec. (3.38), notemos primero que

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= [U^{-1}\partial_\mu U, U^{-1}\partial_\nu U] \\
&= (U^{-1}\partial_\mu U U^{-1})\partial_\nu U - (U^{-1}\partial_\nu U U^{-1})\partial_\mu U + U^{-1}\partial_\mu\partial_\nu U - U^{-1}\partial_\nu\partial_\mu U \\
&= -(\partial_\mu U^{-1}\partial_\nu U + U^{-1}\partial_\mu\partial_\nu U) + (\partial_\nu U^{-1}\partial_\mu U + U^{-1}\partial_\nu\partial_\mu U) \\
&= -\partial_\mu(U^{-1}\partial_\nu U) + \partial_\nu(U^{-1}\partial_\mu U) ,
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$F_{\mu\nu} = -\partial_\mu R_\nu + \partial_\nu R_\mu . \quad (3.41)$$

Usando Ec. (3.41) podemos calcular la variación del tensor  $F_{\mu\nu}$ ,

$$\begin{aligned}
\delta F_{\mu\nu} &= -\partial_\mu\delta R_\nu + \partial_\nu\delta R_\mu \\
&= -\partial_\mu(-U^{-1}\delta U R_\nu + R_\nu U^{-1}\delta U) + \partial_\nu(-U^{-1}\delta U R_\mu + R_\mu U^{-1}\delta U) ,
\end{aligned}$$

y actuando con la traza, el segundo término en Ec. (3.38) queda

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}) &= \text{Tr}\left(-F^{\mu\nu}\partial_\mu(-U^{-1}\delta U R_\nu + R_\nu U^{-1}\delta U) + F^{\mu\nu}\partial_\nu(-U^{-1}\delta U R_\mu + R_\mu U^{-1}\delta U)\right) \\
&= 2\text{Tr}(F^{\mu\nu}\partial_\nu(-U^{-1}\delta U R_\mu + R_\mu U^{-1}\delta U)) \\
&= 2\text{Tr}\left(F^{\mu\nu}\partial_\nu[R_\mu, U^{-1}\delta U]\right) \\
&= 2\text{Tr}\left(\partial_\nu(U^{-1}\delta U F^{\mu\nu} R_\mu - U^{-1}\delta U R_\mu F^{\mu\nu}) - U^{-1}\delta U\partial_\nu F^{\mu\nu} + U^{-1}\delta U R_\mu\partial_\nu F^{\mu\nu}\right) \\
&= 2\text{Tr}\left(\partial_\mu(U^{-1}\delta U[R_\nu, F^{\mu\nu}]) - U^{-1}\delta U[R_\nu, \partial_\mu F^{\mu\nu}]\right) . \quad (3.42)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, reemplazando los resultados obtenidos de Ecs. (3.40) y (3.42) en Ec. (3.38), obtenemos

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{K}{2}\text{Tr}\left((\partial_\mu R^\mu + \frac{\lambda}{4}[R_\nu, F^{\mu\nu}])U^{-1}\delta U\right) ,$$



donde hemos omitido los términos de borde. En adición, notando que

$$\begin{aligned}
[R_\nu, \partial_\mu F^{\mu\nu}] &= R_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} - \partial_\mu F^{\mu\nu} R_\nu \\
&= \partial_\mu (R_\nu F^{\mu\nu} - F^{\mu\nu} R_\nu) - \partial_\mu R_\nu (-\partial^\mu R^\nu + \partial^\nu R^\mu) + (-\partial^\mu R^\nu + \partial^\nu R^\mu) \partial_\mu R_\nu \\
&= \partial_\mu [R_\nu, F^{\mu\nu}] + \partial_\mu R_\nu \partial^\mu R^\nu - \partial_\mu R_\nu \partial^\nu R^\mu - \partial^\mu R^\nu \partial_\mu R_\nu + \partial^\nu R^\mu \partial_\mu R_\nu \\
&= \partial_\mu [R_\nu, F^{\mu\nu}] ,
\end{aligned}$$

podemos reescribir la variación del lagrangiano como

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{K}{2} \text{Tr} \left( \partial_\mu (R_\mu + \frac{\lambda}{4} [R^\nu, F_{\mu\nu}]) U^{-1} \delta U \right) .$$

Finalmente, teniendo en consideración que  $U \neq 0$  es un elemento del grupo y  $R_\mu$  es un elemento del álgebra, de acuerdo a las propiedades del producto de las matrices de Pauli (ver Apéndice C) vemos que necesariamente el factor dentro de la traza debe anularse. Con esto llegamos a la forma final de las ecuaciones de Skyrme:

$$\partial^\mu \left( R_\mu + \frac{\lambda}{4} [R^\nu, F_{\mu\nu}] \right) = 0 . \tag{3.43}$$

# Apéndice B: Energía y *bound* BPS en la teoría de Skyrme

Para determinar la energía primero debemos calcular la componente  $T_{00}$  (densidad de energía) del tensor de energía-momentum definido en Ec. (1.6), a saber

$$\begin{aligned}
 T_{00} &= -\frac{K}{2} \text{Tr} \left( R_0 R_0 - \frac{1}{2} g_{00} R_\alpha R^\alpha + \frac{\lambda}{4} \left( g^{\alpha\beta} F_{0\alpha} F_{0\beta} - \frac{1}{4} g_{00} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \right) \\
 &= -\frac{K}{2} \text{Tr} \left( R_0 R_0 - \frac{1}{2} g_{00} R_0 R^0 - \frac{1}{2} g_{00} R_i R^i + \frac{\lambda}{4} g^{ij} F_{0i} F_{0j} - \frac{\lambda}{8} g_{00} F_{0i} F^{0i} - \frac{\lambda}{16} g_{00} F_{ij} F^{ij} \right) \\
 &= -K \text{Tr} \left( \frac{1}{4} R_i R^i + \frac{\lambda}{32} F_{ij} F^{ij} \right) - K \text{Tr} \left( \frac{1}{4} R_0 R^0 - \frac{\lambda}{16} F_{0i} F^{0i} \right),
 \end{aligned}$$

aquí identificamos el primer término como la energía estática y el segundo término como la energía de rotación. Ahora, nos centraremos en la energía estática para estudiar la existencia de un *bound*. Notemos que en la energía estática

$$E_{\text{est}} = -K \text{Tr} \left( \frac{1}{4} R_i R^i + \frac{\lambda}{32} F_{ij} F^{ij} \right), \quad (3.44)$$

el segundo término puede ser reescrito como

$$\begin{aligned}
 \text{Tr} \left( F_{ij} F^{ij} \right) &= \text{Tr} \left( [R_i, R_j] [R^i, R^j] \right) \\
 &= 2 \text{Tr} (R_i R_j R^i R^j - R_j R^j R^i R_i) \\
 &= 2 \text{Tr} \left( \epsilon^{ijk} \epsilon_{ilm} R_j R_k R^l R^m \right) \\
 &= 2 \text{Tr} \left( (\epsilon^{ijk} R_j R_k)^2 \right),
 \end{aligned}$$

por lo tanto, Ec. (3.44) toma la forma

$$\begin{aligned}
E_{\text{est}} &= -K \text{Tr} \left( \frac{1}{4} R_i R^i + \frac{\lambda}{16} \left( \epsilon^{ijk} R_j R_k \right)^2 \right) \\
&= -\frac{K}{4} \text{Tr} \left( R_i R^i \pm \sqrt{\lambda} \epsilon_{ijk} R^i R^j R^k + \frac{\lambda}{4} (\epsilon^{ijk} R_j R_k)^2 \mp \sqrt{\lambda} \epsilon_{ijk} R^i R^j R^k \right) \\
&= -\frac{K}{4} \text{Tr} \left( \left( R_i \pm \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \epsilon_{ijk} R^j R^k \right) \left( R^i \pm \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \epsilon^{ilm} R_l R_m \right) \mp \sqrt{\lambda} \epsilon_{ijk} R^i R^j R^k \right) \\
&= -\frac{K}{4} \text{Tr} \left( \left( R_i \pm \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \epsilon_{ijk} R_j R_k \right)^2 \mp \sqrt{\lambda} \epsilon_{ijk} R^i R^j R^k \right) .
\end{aligned}$$

Así, de la última expresión para la energía vemos la existencia del *bound* BPS del modelo de Skyrme

$$E_{\text{est}} \geq \left| \frac{K}{4} \text{Tr} \left( \sqrt{\lambda} \epsilon_{ijk} R^i R^j R^k \right) \right| . \quad (3.45)$$



# Apéndice C: Matrices de Pauli y de Gell-Mann

Las matrices de Pauli, generadoras del grupo  $SU(2)$  son

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Estas matrices satisfacen las siguientes importantes propiedades, donde  $i = 1, 2, 3$ :

1.  $\text{Det}(\sigma_i) = -1$ ,
2.  $\text{Tr}(\sigma_i) = 0$ ,
3.  $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma^k$ ,
4.  $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}I_{2 \times 2}$ ,
5.  $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}I_{2 \times 2} + i\epsilon_{ijk}\sigma^k$ ,

Por otro lado, las matrices de Gell-Mann, generadores infinitesimales del grupo  $SU(3)$ , son

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Este conjunto presenta las siguientes propiedades:

1.  $\text{Tr}(\lambda_i) = 0$  ,
2.  $\text{Tr}(\lambda_i \lambda_j) = 2\delta_{ij}$  ,
3.  $[\lambda_i, \lambda_j] = 2i \sum_k f^{ijk} \lambda_k$  ,

con las constantes de estructura  $f^{ijk}$  completamente antisimétricas en los tres índices, generalizando la antisimetría del símbolo de Levi-Civita  $\epsilon_{jkl}$  de  $SU(2)$ , tomando las no nulas los siguientes valores

$$f^{123} = 1 , \quad f^{147} = f^{165} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = f^{376} = \frac{1}{2} , \quad f^{458} = f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} . \quad (3.46)$$

4.  $\{\lambda_i, \lambda_j\} = 2d_{ijk} \lambda_k + \frac{4}{3} \delta_{ij} I_{2 \times 2}$  ,

con  $d_{ijk}$  constantes totalmente simétricas bajo el intercambio de cualquier par de índices, siendo las no nulas

$$d_{118} = d_{228} = d_{338} = \frac{1}{\sqrt{3}} = -d_{888} , \quad d_{448} = d_{558} = d_{688} = d_{778} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} ,$$

$$d_{146} = d_{157} = d_{256} = d_{344} = d_{355} = \frac{1}{2} = -d_{247} = -d_{366} = -d_{377} ,$$

Estas propiedades fueron escogidas con la idea de generalizar de forma natural las matrices de Pauli para el grupo  $SU(2)$  al grupo  $SU(3)$ , este último siendo la base para el modelo de quarks de Gell-Mann. La generalización de Gell-Mann se puede extender al grupo  $SU(N)$ .