



**UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN**

**ESCUELA DE EDUCACIÓN**

**CAMPUS LOS ÁNGELES**



---

**ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO EN EL CONTENIDO DE  
POTENCIAS Y RAÍCES: SUS CAMBIOS Y EVOLUCIONES**

**(1969-2015)**

---

Seminario de Título para optar al Grado Académico de Licenciado en Educación y al  
Título Profesional de Profesor de Matemática y Educación Tecnológica

**SEMINARISTAS: NATALIA ALEJANDRA DURÁN MOLINA**

**MARIETTA ANDREA GUTIÉRREZ LEIVA**

**PROFESOR GUÍA: MG. JORGE CID ANGUITA**

**COMISIÓN EVALUADORA: MG. RICARDO ALZUGARAY HENRÍQUEZ**

**MG. SIXTO MARTÍNEZ HERNÁNDEZ**

Los Ángeles, Chile

Julio 2016

## RESUMEN

A través de la historia se han gestado diferentes reformas educacionales o ajustes curriculares, los cuales conllevan un cambio en el currículum escolar y por consiguiente en los libros de texto. Los cambios no siempre son positivos ya que, con las modificaciones se pueden producir errores por omisión o por fragmentación del conocimiento. De aquí emerge la motivación de hacer un análisis de los libros de texto en el contenido de potencias y raíces, pasando por las principales modificaciones hechas en Chile al currículum escolar.

Se realizará una triangulación entre el contenido dado por el saber sabio, los programas oficiales de estudio entregados por el Ministerio de Educación y los libros de texto entregados por este mismo ente; de esta manera, se pretende que salgan a la luz aquellos errores que por omisión, por una mala transposición didáctica o por algún otro motivo se hayan producido y luego ver si estos errores se han subsanado o se han mantenido y, por otra parte evidenciar la metodología de enseñanza-aprendizaje imperante en cada uno de estos períodos.

A través del tiempo, se visualiza el paso desde un método de enseñanza-aprendizaje puramente conductista, a una del tipo más bien constructivista. Por otra parte, se evidencian aquellas propiedades, tanto del álgebra de potencias como del álgebra de radicales, que se han mantenido dentro del currículum escolar y, adicional a esto, período a período se muestran las concordancias o discordancias de cada programa y cada libro de texto para con el saber erudito.

**Palabras claves:** Libro de texto – Análisis- Reforma educativa – Programas curriculares Saber erudito - Secuencia conceptual – Error – Transposición didáctica

## ABSTRACT

Throughout history they have gestated different curricular educational reforms or adjustments, which involve a change in the school curriculum and therefore in textbooks. The changes are not always positive because, with the modifications could be errors by omission or fragmentation of knowledge. From here emerges the motivation to do an analysis of textbooks in the content of powers and roots, through the main changes made to the school curriculum in Chile.

Will be performed a triangulation between content given by the wise know, the official study programs delivered by the Ministry of Education and textbooks supplied by the same entity; thus, it is intended that come to light errors that by default, a bad didactic transposition or for some other reason have occurred and then see if these errors have been corrected or remained and, moreover evidence the teaching-learning prevailing in each of these periods.

Over time, the passage is viewed from a method of teaching and learning purely behaviorist, one of the most well constructivist. Moreover, those properties, both algebra powers like algebra radicals, which have remained in the school curriculum and, in addition to this, period to period concordance or discordance of each program are shown and each book are evident text with the learned knowledge.

**Keywords:** Textbook - Analysis- Educational reform - curricular programs Saber scholar - conceptual sequence - Error - Didactic Transposition

## DEDICATORIA

*A mis padres por cada una de las oportunidades que siempre me dieron, por su apoyo incondicional frente a mis logros y por enseñarme a nunca bajar los brazos ante una derrota.*

*A mi familia que siempre estuvo presente en cada etapa de mi vida, dándome ánimo para poder lograr mis objetivos.*

*Y en especial a Ti, que hoy no estás físicamente presente conmigo, pero sé que te sientes feliz y orgullosa de tu nieta mayor. . . Gracias por todo Tatita, un beso al cielo.*

*Marietta*

*A Dios y a las circunstancias de la vida que han hecho de mí la mujer que soy.*

*A Benjamín, por ser la luz de mis ojos, mi compañero, mi fortaleza y motivación durante todos estos años.*

*A Luz, mi madre, por instarme siempre a ser mejor cada día y ser mi apoyo incondicional, pese a su desacuerdo a que estudiara pedagogía.*

*A mis tíos y primos por apoyarme y ayudarme cada vez que los necesito.*

*Natalia*

## AGRADECIMIENTOS

### *A Dios*

*Por darnos la fortaleza y el conocimiento durante todos estos años, sin el nada de esto hubiese sido posible.*

### *A nuestras familias*

*Por brindarnos un apoyo incondicional y ser un pilar fundamental en nuestras vidas. Por dotarnos con valores imprescindibles para la vida y para superar los obstáculos de ésta.*

### *A nuestros profesores*

*Quiénes fueron artífices de nuestra formación profesional, sobre todo a nuestro profesor Jorge Cid, quien nos guió, acompañó y entregó parte de su tiempo a nosotras y, a nuestro seminario, siempre con una buena disposición y mucha paciencia.*

*Natalia y Marietta*

## ÍNDICE

<b>RESUMEN</b> .....	2
<b>ABSTRACT</b> .....	3
<b>DEDICATORIA</b> .....	4
<b>AGRADECIMIENTOS</b> .....	4
<b>CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN</b> .....	14
<b>CAPÍTULO 2: DEFENSA DEL PROBLEMA PLANTEADO</b> .....	15
2.1 Definición del tema .....	15
2.2 Planteamiento del problema.....	16
2.3 Justificación de la problemática. ....	17
<b>CAPÍTULO 3: MARCO TEÓRICO</b> .....	20
3.1 Reforma Educacional.....	20
3.1.1 Reforma educacional de 1965 .....	21
<b>3.1.1.1 Objetivo de la reforma para la educación:</b> .....	23
3.1.2 Reforma Educacional de 1981:.....	23
<b>3.1.2.1 Objetivo de la reforma para la Educación:</b> .....	25
3.1.3 Ajuste Curricular de 1990: .....	26
<b>3.1.3.1 Objetivo del ajuste para la Educación:</b> .....	27
3.1.4 Reforma Educacional de 1996:.....	27
<b>3.1.4.1 Objetivo de la reforma para la educación</b> .....	28
3.1.5 Ajuste Curricular de 2007 .....	29
<b>3.1.5.1 Objetivo del Ajuste para la Educación</b> .....	31
3.1.6 Ajuste Curricular 2009 .....	32
<b>3.1.6.1 Objetivos del Ajuste para la Educación</b> .....	33
3.2 Libros de texto.....	35
3.2.1 Definición de libro de texto:.....	35

3.2.2 Proceso de Adquisición de los textos escolares:.....	36
3.2.3 Requerimientos para un texto de calidad: .....	39
3.3 Teorías de aprendizaje .....	41
3.4 Neurociencia .....	44
3.4.1 Neurovisión: .....	48
3.5 Teoría de la Transposición Didáctica .....	50
3.6 Dialéctica Herramienta-Objeto: .....	54
<b>CAPÍTULO 4: PROPUESTA DE INVESTIGACIÓN.....</b>	<b>57</b>
4.1 Preguntas de investigación.....	57
4.2 Objetivo General .....	57
4.3 Objetivos Específicos .....	58
4.4 Supuestos .....	59
<b>CAPÍTULO 5: MARCO METODOLÓGICO.....</b>	<b>60</b>
5.1 Enfoque de la investigación:.....	60
5.2 Tipo de investigación:.....	60
5.3 Recolección de la información:.....	61
5.3.1 Instrumentos para la recolección de datos.....	61
<b>5.3.1.1 Matriz de Identificación General para la caracterización general de los Programas Oficiales (MIGp).....</b>	<b>62</b>
<b>5.3.1.2 Matriz de Identificación General para la caracterización general de los libros de texto (MIGt):.....</b>	<b>63</b>
<b>5.3.1.3 Matriz de Análisis de Contenido para la caracterización de los Programas Oficiales (MACp) .....</b>	<b>63</b>
<b>5.3.1.4 Matriz de Análisis de Contenido para la caracterización de los Libros de Texto (MACT) .....</b>	<b>65</b>
<b>5.3.1.5 Matrices de Resumen y Cotejo. Caracterizaciones y Perfiles .....</b>	<b>68</b>
5.3.2 Localización del saber sabio para el contenido de Potencias y Raíces .....	74
5.3.3 Períodos históricos contemplados en esta investigación.....	75
5.3.4 Programas oficiales de estudio: .....	76

5.3.5 Selección de libros de texto:.....	78
5.4 Técnica de análisis de la información:.....	80
5.5 Plan de análisis de la información: .....	80
5.5.1 Secuencia ideal de contenidos .....	80
5.5.2 Triangulaciones y Obtención de conclusiones .....	80
<b>CAPÍTULO 6: ANÁLISIS DE DATOS .....</b>	<b>82</b>
6.1 Análisis del Saber a enseñar en los Programas Ministeriales. ....	82
6.1.1 Reforma de 1965 .....	82
<b>6.1.1.1 Objetivo de la reforma para matemática: .....</b>	<b>82</b>
<b>6.1.1.2 Aplicación MIGp a la Reforma de 1965.....</b>	<b>83</b>
<b>6.1.1.3 Aplicación MACp a la Reforma de 1965 .....</b>	<b>84</b>
6.1.1.3.1 Organización del programa:.....	84
6.1.1.3.2 Orientaciones didácticas:.....	85
6.1.1.3.3 Actividades o ejemplos propuestos:.....	85
6.1.1.3.3.1 Actividades relacionadas con potencias:.....	85
6.1.1.3.3.2 Actividades relacionadas con las raíces:.....	86
6.1.2 Reforma de 1981 .....	86
<b>6.1.2.1 Objetivo de la reforma para Matemáticas.....</b>	<b>86</b>
<b>6.1.2.2 Aplicación MIGp a la Reforma de 1981.....</b>	<b>87</b>
<b>6.1.2.3 Aplicación MACp a la Reforma de 1981 .....</b>	<b>88</b>
6.1.2.3.1 Organización de los contenidos .....	89
6.1.2.3.2 Orientaciones didácticas .....	90
6.1.2.3.3 Actividades o ejemplos propuestos .....	90
6.1.3 Reforma de 1996.....	90
<b>6.1.3.1 Objetivo de la reforma para Matemáticas.....</b>	<b>90</b>
<b>6.1.3.2 Aplicación MIGp a la Reforma de 1996.....</b>	<b>91</b>
<b>6.1.3.3 Aplicación MACp a la Reforma de 1996 .....</b>	<b>92</b>
6.1.3.3.1 Organización de los contenidos .....	93
6.1.3.3.1.1 Organización de contenidos primero medio.....	93

6.1.3.3.1.2 Organización de contenidos tercero medio .....	94
6.1.3.3.2 Orientaciones didácticas .....	95
6.1.3.3.3 Actividades o ejemplos propuestos: .....	96
6.1.3.3.3.1 Primero medio .....	96
6.1.3.3.3.1.1 Aprendizaje esperado 1:.....	96
6.1.3.3.3.1.2 Aprendizaje esperado 2:.....	97
6.1.3.3.3.2 Tercero medio .....	98
6.1.3.3.3.2.1 Aprendizaje esperado 1.....	98
6.1.3.3.3.2.2 Aprendizaje esperado 2.....	99
6.1.3.3.3.2.3 Aprendizaje esperado 3.....	100
6.1.4 Ajuste Curricular de 2009 .....	101
<b>6.1.4.1 Objetivo del Ajuste en matemáticas:</b> .....	101
<b>6.1.4.2 Aplicación MIGp al Ajuste Curricular de 2009</b> .....	102
<b>6.1.4.3 Aplicación MACp al Ajuste Curricular de 2009</b> .....	103
6.1.4.3.3.1 Organización de los contenidos primero medio .....	104
6.1.4.3.4 Orientaciones didácticas .....	106
6.1.4.3.5 Actividades o ejemplos propuestos .....	106
6.1.4.3.5.1 Primero medio .....	107
6.1.4.3.5.1.1 Aprendizaje esperado 1.....	107
6.1.4.3.5.1.2 Aprendizaje esperado 2.....	107
6.1.4.3.5.2 Segundo año medio.....	108
6.1.4.3.5.2.1 Aprendizaje esperado 1.....	108
6.1.4.3.5.2.2 Aprendizaje esperado 2.....	108
6.1.4.3.5.2.3 Aprendizaje esperado 3.....	109
6.1.5 Matriz de resumen y cotejo aplicada a los Programas Oficiales de Estudio .	109
6.1.6 Resultados por período.....	111
6.1.7 Resultados de conjunto.....	111
<b>6.1.7.1 Caracterización del saber a enseñar oficial en los programas (1969 – 2015)</b> .....	113

6.2 Análisis del Saber a Enseñar en los Libros de Texto .....	114
6.2.1 Reforma de 1965.....	114
<b>6.2.1.1 Caracterización Libros de Texto</b> .....	115
6.2.1.1.1 Aplicación de la MIGt para la caracterización del libro 1.....	115
6.2.1.1.2 Aplicación de la Matriz MACt para la caracterización del libro 1 ..	116
6.2.1.1.3 Aplicación de la Matriz MIGt para la caracterización del libro 2....	127
6.2.1.1.4 Aplicación de la Matriz MACt para la caracterización del libro 2 ..	128
6.2.1.1.5 Aplicación de la Matriz MACt para la caracterización del libro 3 ..	145
6.2.2 Reforma de 1981:.....	159
<b>6.2.2.1 Caracterización Libros de Texto</b> .....	160
6.2.2.1.1 Aplicación de la Matriz MIGt para la caracterización del libro 1 ....	160
6.2.2.1.2 Aplicación de la Matriz MACt para la caracterización del libro 1 ..	160
6.2.2.1.3 Aplicación de la MIGt para la caracterización del libro 2.....	171
6.2.2.1.4 Aplicación de la Matriz MACt para la caracterización del libro 2 ..	171
6.2.2.1.5 Aplicación de la MIGt para la caracterización del libro 3.....	182
6.2.2.1.6 Aplicación de la Matriz MACt para la caracterización del libro 3 ..	183
<b>6.2.2.3 Perfil del Saber a Enseñar segundo período</b> .....	187
6.2.3 Reforma de 1996.....	189
<b>6.2.3.1 Caracterización Libros de Texto</b> .....	190
6.2.3.1.1 Aplicación de la MIGt para la caracterización del libro 1.....	190
6.2.3.1.2 Aplicación de la MACt para la caracterización del libro 1 .....	191
6.2.3.1.3 Aplicación de la MIGt para la caracterización del libro 2.....	196
6.2.3.1.4 Aplicación de la MACt para la caracterización del libro 2 .....	197
6.2.3.1.5 Aplicación de la MIGt para la caracterización del libro 3.....	201
6.2.3.1.6 Aplicación de la Matriz MACt para la caracterización del libro 3 ..	202
6.2.3.1.7 Aplicación de la MIGt para la caracterización del libro 4.....	210
6.2.3.2 Perfil del Saber a Enseñar tercer período.....	216
6.2.4 Ajuste Curricular de 2009 .....	218
<b>6.2.4.1 Caracterización Libros de Texto</b> .....	219

6.2.4.1.1 Aplicación de la MIGt para la caracterización del libro 1.....	219
6.2.4.1.2 Aplicación de la MACt para la caracterización del libro 1 .....	220
6.2.4.1.3 Aplicación de la MIGt para la caracterización del libro 2.....	225
6.2.4.1.4 Aplicación de la MACt para la caracterización del libro 2 .....	226
<b>6.2.4.2 Perfil del Saber a Enseñar cuarto período.....</b>	<b>232</b>
<b>Capítulo 7: Resultados.....</b>	<b>234</b>
<b>7.1 Triangulación de CSaEp, CSaEt y SS.....</b>	<b>234</b>
7.3 Caracterización del Saber a Enseñar en los Programas Oficiales .....	236
7.4 Caracterización del Saber a Enseñar en los Libros de Texto.....	236
7.5 Caracterización del Saber Erudito .....	242
<b>CAPÍTULO 8: CONCLUSIONES.....</b>	<b>243</b>
8.1 Triangulación Final .....	244
<b>8.2 Conclusiones de la triangulación anterior desde el Saber matemático de referencia .....</b>	<b>245</b>
8.3 Conclusiones específicas respecto a los Objetivos.....	246
<b>CAPÍTULO 9: REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>249</b>
<b>CAPÍTULO 10: ANEXOS.....</b>	<b>253</b>
Matriz de Identificación General de los Programas Oficiales .....	253
Matriz de Identificación General de los Libros de Texto.....	254
Matriz de Análisis de Contenidos de los Programas Oficiales .....	255
Matriz de Análisis de Contenidos de los Libros de Texto.....	256
Matriz de Resumen y Cotejo. Caracterizaciones y Perfiles.....	257
Articulación entre los campos de las matrices de recogida de información, las matrices de resumen y los objetivos de la investigación .....	260

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla N°1	Reformas educacionales y ajustes curriculares contemplados.....	74
Tabla N°2	Libros de textos primer periodo (1969-1981).....	76
Tabla N°3	Libros de textos segundo periodo (1982-2000).....	76
Tabla N°4	Libros de textos tercer periodo (2001-2010).....	77
Tabla N°5	Libros de textos cuarto periodo (1969-1981).....	77
Tabla N°6	Mr Programas Oficiales.....	259
Tabla N°7	SaEp1.....	263
Tabla N°8	SaEp2.....	264
Tabla N°9	SaEp3.....	265
Tabla N°10	SaEp4.....	266
Tabla N°11	CSaEp.....	267
<b>Primer Periodo</b>		
Tabla N°12	Libros de textos seleccionados Primer periodo.....	112
Tabla N°13	MIGtL1.....	113
Tabla N°14	Organización de los contenidos L1.....	114
Tabla N°15	MIGtL2.....	125
Tabla N°16	Organización de los contenidos L2.....	126
Tabla N°17	MIGtL3.....	143
Tabla N°18	Organización de los contenidos L3.....	144
Tabla N°19	Mr P1.....	268
Tabla N°20	CSaEtP1.....	273
<b>Segundo Periodo</b>		
Tabla N°21	Libros de textos seleccionados Segundo periodo.....	157
Tabla N°22	MIGtL1.....	158
Tabla N°23	Organización de los contenidos L1.....	159
Tabla N°24	MIGtL2.....	169
Tabla N°25	Organización de los contenidos L2.....	170
Tabla N°26	MIGtL3.....	180

Tabla N°27	Organización de los contenidos L3.....	181
Tabla N°28	Mr P2.....	276
Tabla N°29	CSaEtP2.....	280
<b>Tercer Periodo</b>		
Tabla N°30	Libros de textos seleccionados Tercer periodo.....	187
Tabla N°31	MIGtL1.....	188
Tabla N°32	Organización de los contenidos L1.....	189
Tabla N°33	MIGtL2.....	194
Tabla N°34	Organización de los contenidos L2.....	195
Tabla N°35	MIGtL3.....	199
Tabla N°36	Organización de los contenidos L3.....	200
Tabla N°37	MIGtL4.....	208
Tabla N°38	Organización de los contenidos L4.....	209
Tabla N°39	Mr P3.....	282
Tabla N°40	CSaEtP3.....	287
<b>Cuarto Periodo</b>		
Tabla N°41	Libros de textos seleccionados Cuarto periodo.....	216
Tabla N°42	MIGtL1.....	217
Tabla N°43	Organización de los contenidos L1.....	218
Tabla N°44	MIGtL2.....	223
Tabla N°45	Organización de los contenidos L2.....	224
Tabla N°46	Mr P4.....	289
Tabla N°47	CSaEtP4.....	294
Tabla N°48	Triangulación de los 4 perfiles del SaE por periodo.....	296
Tabla N°49	CSaEt.....	300
Tabla N°50	Triangulación de CSaEp y CSaEt.....	242

## CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

El libro de texto siempre ha estado presente en los procesos de enseñanza-aprendizaje, es por ello que por medio de esta investigación se pretende incentivar en los nuevos docentes un sentido crítico-constructivo hacia esta herramienta de trabajo, pues es en él donde se encuentra la mayor parte de la información escrita que reciben los alumnos. Si la información contenida en los libros de texto presenta algún tipo de sesgo, puede inducir a los alumnos a crear falsas concepciones, las que se tornan muy difíciles de erradicar y además, pueden provocar una alteración en la forma de aprender los contenidos posteriores, pues la educación sigue el diseño del currículum en espiral. Cobo y Batanero (2004, citado en Martínez y Penalva, 2006) establecen que algunas de las dificultades que los estudiantes encuentran en el aprendizaje de un concepto matemático dependen de la enseñanza recibida y ésta está condicionada, en gran medida, por la forma en la que los libros de texto presentan los conceptos.

La presente investigación es de carácter retrospectivo, ya que considera cuatro cambios curriculares importantes para la educación en Chile, en este sentido, se pretende evidenciar los cambios, si es que existieran, en cuanto al tratamiento del álgebra de potencias y radicales hasta el año 2015, para así dar cuenta de la cercanía o distancia existente entre lo que se debería enseñar, lo que se pretende enseñar y finalmente lo que se entrega a los alumnos. Es por esto, que se hace una comparación entre el saber sabio o erudito, los programas oficiales de estudio y los libros de texto, por medio de una matriz de análisis de contenido, de esta manera podemos ser testigos de los aciertos y errores que se cometen en el afán de acercar el contenido a los alumnos, ya que, muchas veces por intentar hacerlo más amigable, éste se mutila presentándose de forma errónea.

## **CAPÍTULO 2: DEFENSA DEL PROBLEMA PLANTEADO**

### **2.1 Definición del tema**

Como se dijo anteriormente, el libro de texto es la herramienta más utilizada al momento de llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje, es por ello que esta investigación busca analizar la concordancia existente entre el libro de texto, lo requerido por la noosfera y lo que establece el saber sabio. Para determinar dicha concordancia, en primer lugar se realiza una selección de períodos históricos a contemplar, en este caso son aquellos relativos a cambios curriculares provocados por reformas o ajustes educacionales, de esta manera, período a período se va analizando la forma en que se pretende entregar el contenido versus la forma en que realmente se realiza. Por último se presenta una triangulación final en la que se hace evidente la cercanía o distancia que existe entre estos tres saberes, saber sabio, saber a enseñar según los programas oficiales de estudio y saber a enseñar según los libros de texto.

## 2.2 Planteamiento del problema

Un saber se enseña por medio de diferentes metodologías a lo largo del tiempo, estas modificaciones vienen dadas por cambios en el currículo, un claro ejemplo de esto es el paso del currículo netamente enfocado en acumular contenidos y conocimientos a uno abocado al uso efectivo de esos conocimientos adquiridos. No obstante, es bien sabido que los cambios producen, sobre todo en un inicio, una cierta confusión y caos, donde la educación no ha estado exenta de ellos. Es por lo anterior, que en la enseñanza de contenidos con el paso del tiempo, se pueden provocar confusiones, contradicciones e incluso mutilaciones del mismo. En este sentido, se ha decidido analizar en libros de textos el contenido de Potencias y Raíces, ya que, a lo largo de las reformas educacionales o ajustes curriculares que ha habido en Chile se ha encontrado inserto en el currículum escolar de enseñanza media (educación secundaria).

En base a esta problemática es que se ha planteado, la siguiente pregunta general: ¿Cómo es el tratamiento que se le da al contenido de Potencias y Raíces en los libros de textos, utilizados en Chile entre los años 1969 y 2015?

## 2.3 Justificación de la problemática.

Actualmente un tema muy cuestionado en Chile es la calidad de su educación, frente a esto es muy diferente tener la intuición de que ésta es mala o deficiente, a tener estudios que lo confirmen. En este sentido y de acuerdo a los resultados de la prueba PISA, se observa que hay un progreso o evolución de los alumnos en relación a la preparación para enfrentar los desafíos de la vida en la sociedad moderna, existiendo una positiva variación porcentual de un 4% entre la muestra del año 2006 y 2012; siguiendo con el progreso, en esta última evaluación Chile queda ubicado en el primer lugar de Latinoamérica en todas las áreas evaluadas, pero sigue estando bajo el promedio de la OCDE, específicamente existe una brecha de 71 puntos entre el resultado obtenido por Chile en matemática y el promedio de la OCDE, quedando en el lugar 51 de 65 países evaluados. Agencia de calidad de la educación (2014).

Otra medición internacional y que da cuenta de la calidad de la Educación de diferentes países es el Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias, conocido como TIMSS, donde Chile, de acuerdo al resultado obtenido el año 2011, ha mostrado una mejora que no resulta significativa y que lo sitúa bajo el promedio de la escala TIMSS. Agencia de Calidad de la Educación (2012).

En cuanto a los factores que pueden incidir en los resultados obtenidos por Chile en estas pruebas internacionales y, siempre en el campo de la especulación, se encuentra el currículum escolar, los profesores y los libros de texto. Para el primer caso, tal como se mencionó anteriormente, los cambios que se han forjado en el ámbito de la educación, han hecho mella en el currículum escolar, puesto que, con el transcurso del tiempo, se ha intentado fortalecer la aplicación de los conocimientos, lo que lógicamente ha producido diversos trastornos en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Moder (2014). En cuanto a la variable de los profesores y de acuerdo a los resultados obtenidos en la última evaluación de la Prueba Inicia, lo primero que se destaca es el hecho de que sólo un 13%

de los egresados de carreras de pedagogía se sometieron a dicha evaluación; se puede decir además, que de los egresados evaluados menos de un tercio de ellos consiguieron un porcentaje de logro superior al 75% y la mayoría centra su rendimiento entre el 50% y 74%. Estos niveles de logro fueron similares en cuanto a las pruebas de conocimiento disciplinar como de didáctica de disciplinas, además la mayor parte de los egresados demuestra capacidad de argumentación en el nivel competente, en la prueba de Habilidades de Comunicación Escrita. Ministerio de Educación (2015). Finalmente, el tercer componente mencionado es el que hace referencia a los libros de texto y a la cuestionada calidad de los mismos, la que ha sido expuesta luego de encontrar grotescos errores en diferentes asignaturas; un claro ejemplo de lo anterior, es el libro de ciencias naturales de séptimo año básico del año 2014, el que situaba a la mina de Chuquicamata en la región de Atacama y no en la de Antofagasta que es donde realmente se encuentra y, además unas páginas más adelante altera la fauna del Lago Chungará al presentar un dibujo en el que se visualiza una orca, una ballena azul, un pingüino de Humboldt y un lobo leopardo, siendo que la fauna del lugar corresponde principalmente a flamencos y patos, no a animales de agua salada. Leiva (2014). Siguiendo con esta tónica, y en el mismo año, en el libro de Historia, Geografía y Ciencias Sociales de la editorial Zig-Zag, destinado a alumnos de sexto año básico, se pueden apreciar dos nuevos errores, el primero de ellos es el que establece que la Escuadra Libertadora de Perú partió cien años después de lo que realmente lo hizo y, por otra parte, menciona a la esposa de Arturo Prat con el apellido de su adversario, es decir, como Carmela Carvajal de Grau. Gutiérrez (2014). En este último factor es en donde se justifica esta investigación, principalmente por la importancia que poseen los libros de texto como recurso didáctico, sobre esto, en el informe Cockcroft (1985) se establece que el libro de texto constituye una ayuda inestimable para el trabajo diario del docente en el aula. En este mismo sentido Choppin (1980, citado en González y Sierra 2002) dice que el libro de texto es un instrumento que contribuye a forjar los andamios intelectuales tanto de alumnos como de profesores. En el mismo texto y referente a la importancia que tienen los libros de texto en la enseñanza, encontramos a Schubring (1987) quien asevera que los libros

de texto determinan en la práctica de la enseñanza más que los decretos de los distintos gobiernos. Por todo lo expuesto en este último punto es que se torna importante el estudio detallado de los libros de texto, pues son ellos los que entregan las principales directrices para abordar y profundizar un contenido y además son modificados cada vez que existe un cambio curricular, los que a su vez vienen influenciados por modificaciones de concepciones y del contexto sociocultural.



## CAPÍTULO 3: MARCO TEÓRICO

### 3.1 Reforma Educativa

En Chile han acaecido diferentes cambios educacionales, los cuales han producido una variación en el currículum y por ende, los enfoques y perfiles que se buscan son reflejo de las necesidades que va teniendo la sociedad.

De acuerdo al diccionario de la Real Academia Española (2015), se define reforma como: Aquello que se propone, proyecta o ejecuta como innovación o mejora en algo. Por otra parte educativa está definida como: Que educa o sirve para educar; siendo esta la forma en la que se denomina el proceso de socialización de las personas. A través de la educación las personas asimilamos y aprendemos conocimientos, desarrollando una concienciación conductual y cultural.

Al unir estos dos conceptos surge lo que se conoce como Reforma Educativa, término que se utilizará para referirse a la modificación del sistema educativo con el objetivo de mejorarlo. Toda reforma educativa viene condicionada al contexto social, cultural y político del momento y lugar en el que se está instaurando. Esta definición concuerda con lo que establece Donoso (2005) quien establece que:

El concepto de reforma educativa agrupa múltiples expresiones orientadas al cambio, que en educación dan cuenta de una transformación significativa del sistema educativo o de parte relevante del mismo, atendiendo a su mejoría respecto de la situación inicial, que involucra la dimensión estructural, la histórica y la epistemológica

Sin embargo, no todo cambio al sistema educativo es considerado una reforma educacional, he aquí cuando emerge un nuevo concepto que es el de Ajuste Curricular, el cual mantiene el enfoque de la reforma pero realiza adecuaciones de Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios. Jaqueline Gysling (2013).

Por lo tanto, la principal diferencia existente entre una reforma educacional y un ajuste curricular está dada por, el grado de modificación que se le hace al sistema educativo. En el primer caso, se realiza un cambio de fondo y forma, mientras que el segundo caso, es más bien una modificación en los contenidos.

A continuación se presentarán las reformas educacionales de los años 1965, 1981 y 1996; además de los ajustes curriculares correspondientes a los años 1990, 2007 y 2009 que se han producido en materia de educación, en Chile.

### **3.1.1 Reforma educacional de 1965**

De acuerdo a lo expresado por Vidal (2009), bajo el mandato de Eduardo Frei Montalva (1964-1970), se da comienzo a una reforma educacional, la cual viene impulsada principalmente por la alta tasa de analfabetismo existente y por la necesidad de recursos humanos que respondan de manera apropiada a la demanda de un país en vías de desarrollo.

Con respecto a los lineamientos de acción de esta reforma se establecieron sobre 4 principios fundamentales, extraídos de Vidal (2009):

- a. **Asegurar una efectiva igualdad de oportunidades ante el sistema educacional.** Esto busca que los alumnos ingresen, permanezcan y avancen, sin otro límite que sus capacidades personales.
- b. **Responsabilidad socio-cultural de la educación.** Como complemento de su papel del proceso formativo integral de la personalidad, se valoró también el rol decisivo que debe cumplir la educación en la integración de la persona a la vida en comunidad, como un elemento determinante del cambio social. En este contexto, se darían las condiciones necesarias a la educación para alcanzar una sociedad abierta a través de una educación abierta.
- c. **Formación para la vida activa.** Se toma conciencia de que la educación es un agente esencial para conducir al país hacia un desarrollo, el cual debe apoyarse sobre bases sólidas, por lo tanto, requiere de un estrecho contacto con las diversas formas operacionales del trabajo y de responder a la necesidad de proporcionar al país los diversos niveles de recursos humanos necesarios para su progreso, en la cantidad y calidad adecuadas.
- d. **Educación como proceso de toda la vida.** La formación del hombre y su incorporación a la vida social y del trabajo son enfocados como un proceso que se ha de prolongar a través de toda su existencia, de tal forma que asimile nuevos contenidos y experiencias, en concordancia al ritmo de avance que la ciencia y la técnica imponen al mundo del conocimiento.

Entre los principales cambios que trajo consigo esta reforma educacional, extraídos del mismo texto mencionado anteriormente, destacan la extensión de la enseñanza primaria de 6 a 8 años, llamada desde ahora enseñanza básica; la disminución de la enseñanza secundaria de 6 a 4 años, llamada desde ahora enseñanza media.; la jornada de estudio se estructura en 30 horas semanales, aproximadamente; se crea la Junta Nacional de Jardines Infantiles (JUNJI); se crea la Junta Nacional de Auxilio Escolar y Becas (JUNAEB); incorporación de horas de orientación y consejo de curso al plan de estudio.

### **3.1.1.1 Objetivo de la reforma para la educación:**

El principal objetivo de esta reforma, de acuerdo a lo establecido por Vidal (2009), es asegurar educación para todos, es por esto, que se modifica la estructura al sistema educacional; se incorpora la promoción automática, válido sólo para el primer grado y se extiende la enseñanza obligatoria a ocho años de escolaridad, con el propósito de elevar el nivel cultural del país (hasta octavo año).

Con respecto al perfil de los alumnos, la nueva reforma esperaba conseguir un estudiante autónomo, autorregulado, capaz de descubrir sus propios procesos cognitivos, que tenga en sus manos el control del aprendizaje y no se limite a adquirir conocimiento, sino que los construya, utilizando la experiencia previa para comprender y dar forma al nuevo aprendizaje.

### **3.1.2 Reforma Educacional de 1981:**

La Reforma educacional se consolidó en 1981, pero tiene sus antecedentes desde mucho antes, en el año 1970 con la promulgación de otras leyes. Lo que da como escenario un Chile bajo Régimen Militar, periodo de la historia comprendido entre el 11 de septiembre de 1973 y el 11 de marzo de 1990, encabezada por el general Augusto Pinochet donde el país experimentó una notoria transformación económica, política y social.

Vidal (2009), comenta en una de sus publicaciones que la historia del sistema escolar poseía un carácter muy centralizado antes de este régimen, ya que el Estado era quien financiaba y administraba el sistema educacional público, ofreciendo una educación gratuita para todas las personas independiente de su nivel socioeconómico. En el mandato de Augusto Pinochet este sistema cambió, ya que se implementó una nueva Reforma educacional, la cual es descentralizadora y privatizadora, donde el Estado deja

de tener un rol principal y delega sus funciones al mercado quién es el encargado de regular todas las actividades en el ámbito educacional.

Dentro de los propósitos fundamentales en esta reforma educacional según Cox (s/f), están:

- 1.- Lograr una mayor eficiencia en el uso de los recursos, mediante la competencia entre establecimientos por matricular a más alumnos, lo que daría como resultado el mejoramiento de la calidad de la educación y el nivel de aprendizaje.
- 2.- Traspasar las funciones desde el Ministerio de Educación y su burocracia central a los poderes locales representados en el Municipio.
- 3.- Disminuir el poder de negociación del gremio docente.
- 4.- Aumentar la participación del sector privado en la provisión de la educación.
- 5.- Potenciar la participación de la comunidad en la educación de sus comunas
- 6.- Establecer una mayor cercanía de la educación media técnico-profesional a los ámbitos económicos de la producción y los servicios.

Como se mencionó anteriormente, esta reforma del tipo neoliberal se consolidó en 1981 y trajo consigo 3 grandes cambios:

- 1.- Transfirió la administración del conjunto de los establecimientos escolares, hasta entonces dependientes del Ministerio de Educación, a los 325 Municipios del país (de esa época), los que pasaron a manejar su personal, con poder de contratar y despedir profesores, y administrar su infraestructura, mientras el

Ministerio de Educación mantenía funciones normativas, de definición del currículum y de los libros de texto, de supervisión y de evaluación.

2.- Cambió la forma de la asignación de los recursos, de una modalidad basada en los presupuestos históricos de gasto de los establecimientos a una modalidad basada en el pago de una subvención por alumno atendido; adicionalmente, el pago por alumno fue calculado de modo de operar como incentivo económico para el ingreso de gestores privados dispuestos a establecer nuevos establecimientos de educación básica y media.

3.- La reforma traspasó la administración de un número de establecimientos públicos de educación vocacional (nivel medio) desde el Ministerio de Educación a corporaciones constituidas ad - hoc por los principales gremios empresariales.

### **3.1.2.1 Objetivo de la reforma para la Educación:**

En cuanto a los cambios en el currículum, la reforma desarrollo nuevos planes y programas para todas las asignaturas tanto en el nivel básico como secundario, los cuales son mucho más flexibles y dan mucha libertad a los profesores para seleccionar y realizar ajustes en cuanto a los objetivos que se plantean en el aula Vidal (2009). Esto es esencial ya que el profesor es quien administra los libros de textos y hace una transposición didáctica adecuada para el contexto y para los diferentes estados de madurez personal que alcance el educando.

### 3.1.3 Ajuste Curricular de 1990:

Este ajuste está desarrollado bajo el alero del Gobierno de Patricio Aylwin Azócar (1990-1994), fue un desarrollo paulatino dentro del periodo de mandato de dicho Presidente, y posteriormente serviría de antecedente y como impulso para la que se denominaría Reforma Educacional de 1996.

Al asumir el cargo el presidente Aylwin, se encuentra con un Chile que ha presentado mejoras en cuanto al aumento de la escolaridad promedio de los chilenos y por consiguiente la reducción del analfabetismo, no obstante, estos progresos se ven opacados por la calidad de educación que se está recibiendo y por la equidad de la distribución de la misma, estos problemas vienen dados principalmente por la crisis económica de 1982, la cual provocó una disminución considerable en el gasto público, la disminución generalizada de salarios de los docentes y además la diferencia de sueldos entre docentes del sector público y privado.

Los lineamientos de las políticas educacionales que competen a este ajuste, y que servirían de base para la reforma que se produciría más adelante, de acuerdo a Vidal (2009) son:

1. Políticas centradas en la equidad de la educación, la cual debe ser homogénea en términos nacionales y al mismo tiempo diferenciada para niños que sean culturalmente distintos
2. Políticas centradas en la calidad, que pretende pasar de un enfoque netamente de insumos para la educación a que estos sean complemento para los procesos y resultados del aprendizaje
3. Pasar de regulaciones exclusivamente burocrático-administrativas del sistema, a poner énfasis a regulaciones por incentivos, información y evaluación
4. De instituciones relativamente cerradas respecto de los requerimientos de su sociedad, abocadas principalmente a su autosustentación y controladas por sus

practicantes y burocracia, a instituciones abiertas a las demandas de su sociedad, e interconectadas entre ellas y con otros ámbitos o campos institucionales.

El mayor cambio que se produjo en este ajuste es la promulgación de la ley N°18.962: Ley Orgánica Constitucional de Enseñanza (LOCE), la que establece el derecho a la educación y la libertad de enseñanza.

### **3.1.3.1 Objetivo del ajuste para la Educación:**

Es un ajuste que pretende abarcar todas las dimensiones existentes en el sistema educativo: las formas de enseñar y aprender, los contenidos de la educación, la gestión de los procesos educativos, los insumos tanto de materiales educativos como de infraestructura escolar, el financiamiento del sector, así como el mejoramiento sostenido de las condiciones de trabajo de los docentes. Arellano (2001).

### **3.1.4 Reforma Educacional de 1996:**

Esta reforma es llevada a cabo bajo el mandato de quien fuere Presidente de la República desde 1994 hasta el año 2000, el Sr. Eduardo Frei Ruiz-Tagle. Su antecedente inmediato es la política educacional que se implementó desde 1990 a 1994 (mencionada anteriormente).

El presidente Frei creó la Comisión Nacional para la Modernización de la Educación, la cual tuvo como misión diagnosticar la educación en Chile y dar directrices de para mejorarla en el corto, mediano y largo plazo. Como consecuencia del informe entregado por esta comisión se establecieron las bases del proyecto y las políticas de modernización de la educación en los siguientes términos:

- Proporcionar una formación de calidad para todos

- Reformar y diversificar la educación media
- Otorgar mayor autonomía y flexibilidad de gestión y más información pública sobre sus resultados para tener escuelas efectivas
- Aumentar la inversión educacional, tanto pública como privada, junto con impulsar la modernización actual

Como esta reforma viene impulsada directamente por la de 1990, mantiene los lineamientos políticos educacionales con los que se trabaja en dicha reforma, no obstante, los extiende añadiendo dos más, los que son definidos por Vidal (2009):

1. De políticas de cambio vía reformas integrales, y un concepto de planeamiento lineal, a estrategias diferenciadas y un concepto de cambio incremental basado en el despliegue de la capacidad de iniciativa de las escuelas y no en una receta metodológica o curricular determinada
2. De una ausencia de políticas estratégicas de Estado, o su subordinación a presiones particularistas externas e internas, a políticas estratégicas definidas nacionalmente, con consenso de actores y diferenciación y combinación de medios.

Las consecuencias de esta reforma las comenzamos a ver en 1999 para primer año de enseñanza media, finalizando en 2002 con cuarto año.

#### **3.1.4.1 Objetivo de la reforma para la educación**

El hincapié de esta reforma en cuanto a educación, está dirigido a 3 puntos fundamentales, los cuales son mencionados por Vidal (2009):

1. Cambio de un énfasis de los contenidos a un énfasis en habilidades o competencias;
2. Actualización y enriquecimiento de las materias, o exigencia de estándares de logro más altos en ellas;
3. Relevancia del currículum en conexión con la vida de los estudiantes.

### 3.1.5 Ajuste Curricular de 2007

Durante el primer mandato de Michelle Bachelet Jeria, entre los años 2006-2010, cerca de 800.000 estudiantes secundarios se tomaron las calles del país en una verdadera revolución que se gestó en los pupitres de los liceos y colegios municipales de norte a sur de Chile; esta revolución es conocida como la Revolución Pingüina, en donde el país se vio sumido de golpe en una reflexión crítica sobre la calidad de la educación.

El petitorio de los estudiantes abarca varios ítems, entre los que se destacan según Astudillo (2011):

- Derogación de la Ley Orgánica Constitucional de Enseñanza (LOCE)
- Derogación del Decreto Supremo 524 del 10 de Abril de 1990, que regula a los Centros de Alumnos.
- Fin de la municipalización de la enseñanza.
- Estudio y reformulación de la Jornada Escolar Completa (JEC).
- Gratuidad de la Prueba de Selección Universitaria (PSU).
- Pase escolar gratuito y unificado.
- Tarifa escolar gratuita en el transporte escolar para la Educación Media.

El 01 de Junio de 2006, la presidenta Michelle Bachelet se dirigió al país en cadena nacional de radio y televisión, en donde dio a conocer las nuevas medidas enfocada a la mejora de la calidad y del acceso a la educación, enunciadas por Astudillo (2011).

- Aumento de raciones alimenticias.
- Mejoras en infraestructuras.
- Pase escolar las 24 horas al día, 7 días a la semana (Tarjeta Nacional Estudiantil).

- Prácticas bonificadas.
- Beca completa para cubrir el costo PSU.
- Incentivo para estudiantes vulnerables.
- Superintendencia de educación.
- Fortalecimiento de los municipios.
- Fortalecer evaluación y formación docente.

Esta propuesta fue rechazada por los estudiantes, quienes convocaron a un nuevo paro el día 5 de Junio, pero este no tuvo la fuerza que tuvo la primera convocatoria, razón por la cual el movimiento se fue debilitando, retomando las clases el día 9 del mismo mes.

Finalmente, después de meses de lucha constante por parte de los estudiantes, al finalizar el mandato de la presidenta Michelle Bachelet, se cuenta con:

- 1.- La derogación de la Ley Orgánica Constitucional de Enseñanza (LOCE) y la aprobación de la Ley General de Educación (LGE).
- 2.- Ley sobre Sistema Nacional de Aseguramiento de la Calidad de la Educación Superior.
- 3.- Envío de Proyecto de Ley sobre Sistema Nacional de Aseguramiento de la Calidad de la Educación Parvularia, Básica y Media.
- 4.- La Subvención Escolar Preferencial, permitió entregar más recursos a los establecimientos educacionales que se financian con fondos del Estado y atienden a la población de niños y niñas más vulnerables del país.
- 5.- Los beneficiarios de ayudas estudiantiles (becas y créditos) pasaron de 246.601 a 640.784. Gobierno 2006-2010 (s.f.)

En lo que respecta al currículum, la educación básica disminuye en dos años y la educación media aumenta en dos años.

La nueva Ley instauro un marco institucional y constituye la máxima expresión de la agenda de política educacional. Establece principios y obligaciones, y promueve cambios en la manera en que los niños de nuestro país serán educados.

### **3.1.5.1 Objetivo del Ajuste para la Educación**

El principal cambio que se vivió durante este proceso, fue el paso de la Ley Orgánica Constitucional de Enseñanza (LOCE) a la Ley General de Educación (LGE).

Este ajuste establece objetivos **generales** que favorecen la educación integral de los jóvenes, es decir tanto la educación formativa (valores, principios) como la cognitiva. Por otra parte las bases curriculares deberán asegurar que los establecimientos con régimen de jornada escolar completa cuenten con un 30% de tiempo de libre disposición. Finalmente, se creará un banco de planes y programas complementarios que estará a disposición de todos los establecimientos para que cuenten con alternativas y puedan enriquecer sus propios planes y programas. Salazar (2012)

Todos estos sucesos desembocan en el gran ajuste curricular del año 2009 el cual, como se verá más adelante, se ve eclipsado por el nacimiento de un nuevo ajuste en el año 2010.

### 3.1.6 Ajuste Curricular 2009

Este ajuste viene a consecuencia de la verdadera revolución educacional, en la cual Chile se vio inmerso durante el mandato de la presidente Michelle Bachelet. La aplicación de este ajuste comenzaría durante el año 2010, sin embargo, quien dirige en ese momento al país es el presidente Sebastián Piñera Echeñique, quien comienza con un nuevo ajuste curricular al mismo tiempo en que se comenzaría a implementar el propuesto por la anterior mandataria, lo cual produce confusiones y desavenencias.

En marzo de 2010 debía comenzar la implementación del ajuste curricular definido en los decretos 256 y 259 de 2009 (ajuste que era consecuencia del torbellino educacional vivido durante el año 2007), sin embargo, al inicio del año escolar, mediante una carta a los establecimientos educacionales se comunicó la postergación de la implementación y en junio, mediante el Decreto 257 de 2010, se modificó oficialmente el cronograma.

Desde diciembre de 2009 se encontraban disponibles, en la página web del Ministerio, los programas de estudio requeridos para la implementación y habían sido considerados por los docentes para sus procesos de planificación. Sin embargo, estos programas aprobados por el Consejo Nacional de Educación en enero de 2010 (Acuerdo CNED 020/2010), fueron retirados en marzo del mismo año, al asumir el nuevo gobierno. Por otra parte, desde 2008 las editoriales ya habían elaborado textos escolares considerando la implementación proyectada del Ajuste curricular 2009.

En este mismo periodo (2010 y 2011), el Ministerio de Educación se abocó a la reformulación de los Programas de estudio y a elaborar una propuesta de Planes de estudio para los cursos 5° a 8° de Enseñanza Básica y 1° a 2° de Enseñanza Media, para establecimientos con y sin jornada escolar completa, cambios que también se insertaban en lo proyectado por el Ajuste 2009.

El Consejo Nacional de Educación aprobó la propuesta de ajustes a los Planes de estudio, en la que se aumentaban las horas de lenguaje y comunicación y matemáticas a 7 horas semanales, junto con ello, disminuyeron las horas de libre disposición y las horas de Educación Tecnológica.

En el año 2011 se promulga la Ley 20.529, la cual crea el Sistema Nacional de Aseguramiento de la Calidad de la Educación Parvularia, Básica y Media, así como también su fiscalización. En ese mismo año, comienza la implementación de los nuevos programas para los cursos y asignaturas con ajuste, es por ello que este es el período que consideraremos para la última parte de nuestro análisis. Espinoza (2014)

### **3.1.6.1 Objetivos del Ajuste para la Educación**

De acuerdo a lo planteado por el Gobierno de Chile (2013), los objetivos establecidos para este ajuste curricular son los siguientes:

- Implementar los objetivos de aprendizaje, los cuales definen en un lenguaje claro y directo los aprendizajes terminales esperables para una asignatura determinada. Además facilitan el monitoreo, evaluación y observación de los aprendizajes a través de objetivos redactados como desempeños observables.
- Mejor aprovechamiento de los niveles de 2° a 4° básico (particularmente en historia, geografía y ciencias sociales y ciencias naturales)
- Importante actualización de asignaturas postergadas desde 1996 (Educación Física y Salud, Artes visuales, Música, Tecnología y Orientación).
- Explicitación, definición y secuenciación de las habilidades para la asignatura.
- Enriquecer y ampliar su capital cultural.
- Entregarles herramientas para el siglo XXI aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a ser y aprender a convivir.
- Generar en los alumnos motivación, ansias de aprender, una base sólida para continuar estudiando.

- Enfocar los aprendizajes hacia la aplicabilidad y la resolución de problemas de la vida.
- Entregar herramientas a los docentes para trabajar un aprendizaje profundo, significativo, para la vida e integral.
- Atender a distintas formas de aprender, de entender el mundo y la cultura, y de expresar ideas y emociones.
- Asegurar un aprendizaje integral, que otorgue valor al desarrollo de los valores y actitudes, a las artes, la educación física y la tecnología.

En cuanto al perfil de los alumnos, este ajuste, espera formar jóvenes inquisitivos, equilibrados, reflexivos, abiertos de mente, pensadores, audaces, comunicadores, respetuosos, empáticos y con principios.



## 3.2 Libros de texto

Los libros de texto no son frutos del azar, sino que se ven influenciados por las modificaciones que se producen en el sistema educativo y, de acuerdo a lo visto en el apartado anterior, Chile se ha visto inmerso en varias de ellas.

Según lo establecido por MINEDUC (s.f) la política del Estado chileno, en materia de textos escolares establece la entrega gratuita de libros de calidad, para los sectores prioritarios del currículum, a todos los estudiantes y profesores de los establecimientos educacionales municipales y subvencionados del país.

### 3.2.1 Definición de libro de texto:

Primero es prudente aclarar que un libro de texto es sinónimo de texto escolar y de manual escolar, en este sentido Bravo (1989) afirma que: un texto escolar o manual escolar es uno de los recursos escolares básicos y prioritarios de mayor tradición en las aulas.

Para seguir con la idea, ahora sobre la función que cumplen los libros de texto, el Ministerio de Educación (Mineduc, 2014) en su política de textos escolares, plantea que:

El Texto Escolar cumple una función central en la tarea educativa de los docentes, tanto en el aula como en otros espacios de aprendizaje. Para los estudiantes juega fundamentalmente un rol articulador en el proceso de aprendizaje. Los docentes, en tanto, lo utilizan junto a la guía didáctica para planificar, preparar y desarrollar sus clases. Además, en sectores de mayor vulnerabilidad socioeconómica y cultural, el texto representa un instrumento de equidad y enriquecimiento cultural para las familias

Tomando en cuenta lo que manifiestan Fontaine, Eyzaguirre (1997) sostienen que, los alumnos aprenden más usando textos de estudio que sin ellos, cuando se mantienen constantes sus habilidades y calidad de profesores.

A partir de esto podemos decir que, el término hace referencia a los libros a los que recurren los alumnos y docentes para trabajar en el aula y ha sido pensado exclusivamente a suplementar aquellos conocimientos que se van trabajando a lo largo del año escolar. Esto indica que cada concepto expuesto en los textos escolares está dado por una razón y de acuerdo al programa de estudio entregado por el Ministerio de Educación.

Como se ha visto en los puntos anteriores, los libros de textos son fundamentales para el desarrollo académico de los alumnos y para el trabajo docente. Es por esto que es necesario saber cómo son adquiridos estos textos por el Ministerio de Educación y luego entregados a los Establecimientos Educativos del país.

### **3.2.2 Proceso de Adquisición de los textos escolares:**

El Ministerio de educación entrega gratuitamente estos textos escolares y los hace a partir de 5 procesos interrelacionados, MINEDUC (2014):

- **Adquisición:** Con el fin de adquirir las ofertas más adecuadas, se ha implementado un proceso de licitación exigente, objetiva, equitativa, transparente y eficaz.
- **Evaluación:** El objetivo principal del proceso de evaluación es asegurar que los textos adjudicados cumplan con la calidad y los requisitos técnico-pedagógicos definidos por el Ministerio. Con el fin de asegurar la confiabilidad y la imparcialidad del proceso, esta tarea es desarrollada de manera externa por instituciones de reconocida competencia en el campo educativo.

La evaluación de las ofertas se hace en dos etapas: primero la evaluación técnico pedagógica, a cargo de comisiones evaluadoras dependientes de Centros Evaluadores externos al Ministerio, y luego la evaluación económica, que realizan especialistas del Mineduc.

- ***Evaluación Técnico- Pedagógica:*** Este proceso se realiza en una etapa. Las editoriales presentan propuestas completas que son sometidas a rigurosos procesos de evaluación de calidad. En esta evaluación se aplican pautas que contemplan los contenidos de los textos y materiales asociados, así como el audio de los textos de inglés. Al término de la evaluación técnico-pedagógica, el Ministerio entrega a las editoriales un informe con los resultados que han obtenido sus ofertas en cada una de las áreas mencionadas.
- ***Evaluación Económica:*** Las ofertas que aprueban la evaluación técnico-pedagógica, son luego evaluadas económicamente. Para ello, se ha establecido un algoritmo que considera el puntaje obtenido en la evaluación técnica y los precios ofertados por las editoriales. En éste se definen las prioridades de calidad que se considerarán en la evaluación técnico-económica, las cuales deben ceñirse al marco presupuestario asignado para la adquisición total de los textos escolares considerados en la compra.
- **Acta de compromiso y elegibilidad de textos:** El proceso de compromiso y elegibilidad de textos escolares, es un procedimiento importante para recibir oportunamente los textos escolares que el Ministerio de Educación entrega de forma gratuita a los estudiantes y docentes de los establecimientos educacionales municipales y particulares subvencionados del país.

El acta de compromiso es el documento a través del cual los establecimientos educacionales se comprometen a recibir y luego entregar a sus estudiantes y profesores, los textos escolares que provee gratuitamente el Ministerio de Educación.

La elegibilidad entrega la posibilidad a los directivos y profesores de elegir en algunas asignaturas entre dos alternativas de textos escolares, con el propósito de optar por la que mejor se adapte a las prácticas pedagógicas, la realidad estudiantil y el proyecto educativo de cada establecimiento.

El proceso de compromiso y elegibilidad debe ser certificado por el Director (a) del establecimiento educacional.

- **Adjudicación:** La entrega de textos escolares, son los resultados de procesos de Evaluación y Elegibilidad, y el Ministerio indica a las editoriales adjudicadas la cantidad de textos que se les comprará.
- **Seguimiento:** Se han delegado a varias instituciones especializadas en investigación en el área de educación, realizar estudios de distintas índoles sobre el uso de textos escolares para retroalimentar su quehacer e indagar sobre posibles nuevas líneas de acción.

Como se ha podido apreciar, el Ministerio de Educación, tiene una clara política en cuanto al proceso de adjudicación y adquisición de los libros de texto, en este sentido cabe preguntarse entonces ¿Por qué pese a las estrictas normas de adjudicación, se filtran errores en los libros de texto? Frente a las conjeturas que se pudiesen entablar para dar respuesta a esta pregunta, se puede poner en tela de juicio la evaluación técnico-pedagógica que se está realizando al momento de analizar las propuestas de las editoriales y, por otra parte pudiese ser que falta un proceso entre la Adjudicación y el Seguimiento, en el que se vuelva a revisar lo que realmente se entregará a los establecimientos y finalmente a los estudiantes.

### 3.2.3 Requerimientos para un texto de calidad:

Cuando se habla de calidad, se hace referencia a cumplir las expectativas del usuario. Por tanto, cuando se hace referencia a un texto de calidad, se está buscando satisfacer a los diferentes agentes educativos.

De acuerdo a lo señalado anteriormente y, según los requerimientos técnicos del Ministerio de Educación, un libro de texto de calidad implica para el caso de la asignatura matemática, lo siguiente:

El Texto de matemática del Estudiante debe desarrollar conocimientos, procedimientos y habilidades del área considerando la diversidad presente en los alumnos. Debe ser riguroso y actualizado en la información que contiene y estar orientado a estudiantes de distintas realidades del país. Su diseño gráfico, estructura y formato general favorecerá y motivará el aprendizaje. MINEDUC (2014)

En relación a lo anterior, en primera instancia se establece que el libro de texto debe estructurarse en secciones (unidades/capítulos) con objetivos, actividades y recursos educativos bien definidos, además, los contenidos mínimos obligatorios, los objetivos transversales y habilidades a desarrollar deben estar en concordancia a lo establecido por el Marco Curricular. Por otra parte, al finalizar cada sección del libro deben haber evaluaciones basadas en preguntas de desarrollo y de selección múltiple, a su vez, deben incluirse para cada tema actividades finales o de síntesis que recojan los contenidos centrales y que se presten para evaluar las competencias disciplinares buscadas, dichas actividades y evaluaciones deben ser variadas en cuanto a la forma en que se realizan y los procedimientos y habilidades que promueven; el libro de texto debe contener las respuestas a las actividades y evaluaciones.

Adicional a lo anterior, MINEDUC (2014), establece que hay cuatro variables que debe satisfacer un buen libro de texto, dichas variables son:

1. Presentación formal, debe tener formato adecuado, letra de buen tamaño, esquemas visuales apropiados, espacio para hacer los ejercicios, símbolos que inviten a comunicarse con el texto y colorido atractivo.
2. Contenido y lenguaje, vocabulario y lenguaje adaptado a los niños y motivador, pertinencia e interés en los temas, cantidad adecuada de información; claridad y ausencia de errores y ajustados a la realidad de los niños.
3. Usabilidad, organizado, con suficiente ejercitación, que facilite buscar los contenidos y apoye el proceso de enseñanza-aprendizaje.
4. Propuesta metodológica, orientador del docente, con ejercitación suficiente e instrucciones adecuadas, que incite a trabajar y a buscar más información y puntos de vistas distintos.

Para los docentes un libro de texto, según Mejías (2001), es de calidad si se adecua al nivel de conocimiento de los estudiantes, también si usa un lenguaje apropiado planteando buenas actividades y relacionándolas a un contexto adecuado siendo un apoyo didáctico para él, también un buen texto escolar tiene aspectos formales (colorido, tamaño, ilustraciones, etc.) adecuados, un planteamiento innovador, responde a los programas oficiales y trata los contenidos con suficiente extensión.

Finalmente se puede establecer que un buen libro de texto debe reunir las características que ya han sido mencionadas y que resultan de gran ayuda para potenciar el trabajo en el aula, ya que, el libro de texto representa el recurso de mayor importancia dentro de la sala de clases, tanto de apoyo para el docente como de contenidos para el estudiante.

Ya se ha revisado que las diversas reformas acaecidas en Chile han inspirado modificaciones en las bases curriculares lo que conlleva a cambios también en los libros de texto, esto ha influido en la forma con la que se enseña y en el cómo entienden los alumnos.

### 3.3 Teorías de aprendizaje

Una de las teorías de aprendizaje que se utilizará en el análisis de actividades en los libros de texto y programas oficiales de estudio, es la denominada conductista. Esta teoría tiene como primer exponente a Iván Pavlov, quien desarrolla la teoría del reflejo condicionado en la cual da un estímulo a un individuo cuando este ejecuta una acción, la cual si se reitera y el individuo reacciona siempre de una manera determinada, vuelve a ese estímulo un condicionador de la conducta, lo que se puede concebir como aprendizaje (condicionamiento clásico). Sobre la propuesta de pavlov Thorndike desarrolla la teoría de aprendizaje por ensayo y error, en la cual mediante un estímulo-respuesta, el individuo debía resolver una situación asociando el estímulo a la respuesta que se obtuviera (condicionamiento operante). Por otra parte, John Watson se centra solamente en la conducta negando considerar los procesos mentales. En su teoría (condicionamiento clásico) señala que: Un estímulo neutro si se une a otro estímulo no condicionado comienza a generar en el individuo una respuesta, la cual indica que el individuo está listo para recibir el estímulo no condicionado. Skinner comienza con la propuesta de Watson, pero incorpora la observación de elementos introspectivos como sentimientos (condicionamiento operante). En 1925 Albert Bandura, propone que el individuo puede aprender a través de instrucciones o la observación de un modelo, situaciones que no implican la experiencia de realizar la acción de parte del individuo, a lo que se denomina teoría de aprendizaje social; en esta señala además que existe un determinismo recíproco entre el ambiente, el comportamiento y el individuo.

Jean Piaget sostiene que el ser humano, construye su conocimiento a partir de la enseñanza pero lo va complementando en base a la etapa de desarrollo intelectual y físico que vive. Crea la teoría genética en que el ser humano desde pequeño aprende automotivado, buscando conocimiento, creando teorías y comprobándolas con la experiencia en 4 etapas: etapa motora sensorial (0-2 años), etapa preoperacional (2-7 años), etapa concreta operacional (7-12 años), etapa de forma operacional (12-15 años). En 1915 Jerome Bruner, postula un aprendizaje por descubrimiento en donde el individuo logra un mejor aprendizaje cuando lo hace a partir de su experiencia en contacto con su objeto de estudio y lo integra con lo que sabe, mediante 3 etapas: sistema enactivo, sistema icónico, sistema simbólico. David Ausubel, postula que los individuos aprenden cuando son capaces de encontrarle un sentido a ese aprendizaje, lo que se lograría a través de la activación de ciertos esquemas previos a partir de su experiencia y la relación de estos con los elementos que está aprendiendo, de manera de poder desarrollar un aprendizaje significativo superando la memorización de contenidos. En 1932 Joseph Novak desarrolla los mapas conceptuales para generar aprendizaje significativo a partir de su creencia en que los individuos piensan, sienten y actúan, elementos que se deben integrar para generar un aprendizaje significativo para la generación de conocimientos nuevos en donde es clave la resignificación conceptual y su ordenamiento. A este conjunto de postulados se les denomina teorías cognitivistas.

La otra teoría que servirá para nuestro análisis es el denominado constructivismo el que señala que el conocimiento nuevo sólo se origina de otro conocimiento existente. La persona de esta forma no solo acumula conocimiento sino que lo construye a partir de su experiencia y de la información que recibe durante la instrucción, siendo ella su responsable. Para ello, la persona que aprende con otros debe trasladar y aplicar sus conocimientos en la práctica dentro de un contexto real, en este paradigma lo que lleva a aprender a la persona es el conflicto cognitivo, al buscar explicaciones de cómo funciona su entorno. Ello provoca que la persona vea como su conocimiento previo se debe

actualizar con conocimiento nuevo a raíz de lo que aprende y vive. De acuerdo a Villegas (2013) en el proceso de reconstrucción del aprendizaje se dan 3 momentos:

- Equilibrio inicial: conocimientos iniciales ya asimilados que permiten explicar el mundo.
- Desequilibrio: se produce cuando se da un conflicto cognitivo y hay que cambiar o reconceptualizar conocimientos que respondan a nuevas realidades o experiencias.
- Reequilibrio: es cuando se construyen los nuevos conocimientos que explican la nueva realidad, acomodándose los nuevos conocimientos para luego pasar a sustituir a los iniciales y convirtiéndose en el nuevo equilibrio inicial.

Las reformas o ajustes curriculares, vienen altamente influenciadas por el contexto sociocultural de la época en que se gestan, es por ello que dicha influencia se puede distinguir también en los libros de texto, pudiendo transitar entre una teoría de aprendizaje y otra.

Las personas aprenden como siempre han aprendido: construyendo significados. Lo único que ha cambiado, a lo largo de la historia, es la forma en que los educadores median para que los alumnos los construyan. En un tiempo se creyó que eso se lograba siguiendo el realismo platónico; en otro, con el conductismo de Watson y Skinner; más tarde, llegó el constructivismo y otros enfoques didácticos ligados a diferentes teorías psicológicas. Sin embargo, al final, el aprendizaje no se puede desligar del cerebro: es ahí donde ha sucedido y sucede. Si el cerebro privilegia los contenidos con carga emocional y el enfoque educativo está orientado hacia lo racional, como lo está en la mayoría de las aulas nacionales, hay un desencuentro perjudicial y por eso aparecen los problemas de atención, memorísticos, conductuales y funcionales.

### 3.4 Neurociencia

Si bien es cierto, las teorías de aprendizaje dan directrices respecto a la forma que mejor aprenden los estudiantes, no se involucran en cómo se construye somáticamente ese conocimiento. Este vacío lo busca llenar la neurociencia.

Los hombres deben saber que el cerebro es el responsable exclusivo de las alegrías, los placeres, la risa y la diversión, y la pena, aflicción, desaliento y las lamentaciones. Y gracias al cerebro, de manera especial, adquirimos sabiduría y conocimientos, y vemos, oímos y sabemos lo que es repugnante y lo que es bello, lo que es malo y lo que es bueno, lo que es dulce y lo que es insípido... Y gracias a este órgano nos volvemos locos y deliramos, y los miedos y terrores nos asaltan... Debemos soportar todo esto cuando el cerebro no está sano... Y en este sentido soy de la opinión de que esta víscera ejerce en el ser humano el mayor poder (Hipócrates, siglo IV a.C)

Tal y como ya lo anticipaba Hipócrates hace varios siglos atrás, se ha tomado una importancia superlativa al conocimiento del cerebro humano, en este sentido muchos investigadores se han abocado a su estudio y, para poder comprender como funciona no sólo han tenido que investigar cómo se hallan construidas las distintas subdivisiones de él, sino también han debido descubrir su funcionalidad.

Gracias a todas estas investigaciones, podemos saber que cada parte específica del cerebro desempeña un papel importante en la expresión de funciones tan diversas como el pensamiento abstracto, el aprendizaje, la memoria, el lenguaje o el movimiento.

La neurociencia investiga el sistema nervioso con especial énfasis en cómo la actividad del cerebro se relaciona con la conducta y el aprendizaje, ésta tiene un cierto carácter transdisciplinario, proporcionando así a los pedagogos los principios básicos del funcionamiento del cerebro que hacen posible la percepción sensorial, la actividad

motora y la cognición durante el proceso de enseñanza. El objetivo de la neurociencia, según Kandel, Schwartz y Jessell (1997, citados en Salas), es entender cómo el encéfalo produce la marcada individualidad de la acción humana.

De acuerdo al artículo publicado por Salas (2003), se destaca que entre sus descubrimientos importantes que se han hecho gracias a la neurociencia destacan:

1. El aprendizaje cambia la estructura física del cerebro.
2. Esos cambios estructurales alteran la organización funcional del cerebro; en otras palabras, el aprendizaje organiza y reorganiza el cerebro.
3. Diferentes partes del cerebro pueden estar listas para aprender en tiempos diferentes.
4. El cerebro es un órgano dinámico, moldeado en gran parte por la experiencia. La organización funcional del cerebro depende de la experiencia y se beneficia positivamente de ella (Bransford, Brown y Cocking 2000). Sylwester (1995) precisa más esto al sostener que el cerebro es moldeado por los genes, el desarrollo y la experiencia, pero él moldea sus experiencias y la cultura donde vive.
5. El desarrollo no es simplemente un proceso de desenvolvimiento impulsado biológicamente, sino que es también un proceso activo que obtiene información esencial de la experiencia.

En resumen, la Neurociencia está comenzando a dar algunas iluminaciones (insights), si no respuestas finales, a preguntas de gran interés para los educadores.

La educación sin duda necesita de la neurociencia, ya que cuan más correcta, coherente y detallada sea la información obtenida por los pedagogos acerca del funcionamiento del cerebro, más les servirá para conocer el comportamiento general de los niños; el cómo aprende, cómo guarda información y cuáles son los procesos biológicos que facilitan el aprendizaje.

A comienzos del siglo XX comienza el estudio de las alteraciones del proceso matemático y su comprensión y, con el paso del tiempo se han ido logrando dilucidar cuáles son los sectores del cerebro que están activas en el momento del procesamiento matemático, dichas regiones son:

- El lóbulo frontal en el cual se destacan la corteza prefrontal, la corteza premotora y el área motora primaria.
- El lóbulo parietal en el cual participan el área somatosensorial primaria y la corteza de asociación del lóbulo parietal.
- El lóbulo occipital en el cual están involucradas la corteza visual primaria y la corteza de asociación del lóbulo occipital
- El lóbulo temporal que incluye la corteza auditiva primaria, la corteza superior temporal y la corteza de asociación del lóbulo temporal.

Estas zonas van madurando poco a poco, inicialmente maduran las áreas primarias, tanto motoras, como somatosensorial, visual y auditiva para terminar al final de la segunda década de vida con la maduración de la corteza prefrontal y corteza temporal superior encargada de integrar información proveniente de diferentes modalidades sensoriales. Vargas (2012).

El procesamiento numérico es una cualidad innata del ser humano, para demostrar esto, se desarrolló un experimento en el cual a un bebé se le muestra un juguete y luego se esconde tras una pantalla, acto seguido se le muestra un segundo juguete y se repite el procedimiento de esconderlo tras la pantalla. Cuando la pantalla es

levantada se obtuvo que los bebés miraban durante más tiempo si sólo se encontraban con un juguete (lo que no sería lógico pues  $1+1$  no es 1), en comparación a si detrás de la pantalla se encontraban los dos juguetes ( $1+1=2$ ). Este no es el único experimento que muestra que los seres humanos nacemos con un sentido numérico intrínseco, según Dehaene y Butterworth, dos de los grandes expertos mundiales en el estudio de las matemáticas y el cerebro, la escuela obstaculiza este desarrollo facilitado, inicialmente, por factores genéticos. Dehaene cree que la construcción de los conceptos abstractos ha de iniciarse con la formulación de ejemplos concretos, con la finalidad de estimular el desarrollo del razonamiento intuitivo del niño; más aún uno de los principales problemas de la enseñanza de la matemática es que se presentan contenidos académicos muy distantes de lo que se puede utilizar en la vida real. El excesivo énfasis en conceptos abstractos, sin utilidad práctica aparente, y la memorización rutinaria de algoritmos perjudica la evolución y motivación del alumno. Por otra parte, el docente debe ser capaz de entregar contenidos que faciliten el establecimiento de relaciones y generación de ideas; así como también debe entregarle herramientas con las que puedan autocorregirse, de esta manera razonan sobre su acierto y principalmente sobre su error. Guillén (2012)

Gracias los estudios de la neurociencia, podríamos comprender la génesis de los problemas de aprendizaje en los alumnos, encontrar a tiempo los errores cometidos por parte del alumno o de nosotros mismos al aplicar una metodología poco adecuada o tal vez encontrar errores en los libros de textos que utilizan y que crean conceptos no adecuados provocando así un obstáculo didáctico.

Los seres humanos estamos dotados con cinco sentidos por medio de los cuales percibimos el mundo, uno de estos sentidos es la visión, el cual en este caso es el objeto de nuestro estudio, ya que, los alumnos perciben, se generan una idea, en resumidas cuentas analizan los libros de texto por medio de la visión. Según un estudio realizado por la Fundación del Instituto de Ciencias Visuales de Madrid (INCIVI) el 90% de la información recibida dentro de la sala de clases es por la vista. García (2010).

### 3.4.1 Neurovisión:

De acuerdo a lo estipulado por García (2010), el Laboratorio de Desarrollo Cerebral de la Universidad de Oregon (EE.UU) ha desarrollado un programa denominado Changing Brains que muestra que cada aspecto del cerebro humano y de las habilidades sensoriales, cognitivas, sociales y emocionales que esto apoya, depende y es moldeado por la experiencia. En este caso se utilizará a lo desarrollado por este programa en cuanto a la visión, pues son los ojos las ventanas al mundo que recolectan la información que el cerebro interpreta, permitiendo percibir el entorno.

Los lentes de los ojos enfocan la luz en una imagen en el fondo de los ojos. Aquí, lo brillante y lo oscuro se convierten en señales eléctricas que viajan a través del nervio óptico al cerebro medio y bajan a la parte trasera del cerebro.

Al nacer, el ser humano sólo puede ver imágenes borrosas y no pueden coordinar sus dos ojos, pero unos pocos meses después, las imágenes toman forma, los ojos trabajan sincronizadamente y el bebé es capaz de seguir objetos y encontrarle sentido a las escenas que cambian rápidamente. El cerebro no es el único órgano que aprende a organizar lo que los ojos ven, pero lo que los ojos ven afecta internamente el desarrollo cerebral, es por esto que cualquier problema visual repercutirá en el desarrollo óptimo del cerebro.

Las conexiones neuronales que procesan las señales visuales cambian dramáticamente, algunas conexiones son reforzadas mientras que otras se rompen. Pero, ¿cuáles son las conexiones favorecidas? aquellas neuronas vecinas entre las áreas del

cerebro y esto va a depender de lo que estamos viendo. Las partes importantes de la visión son formadas de acuerdo a lo que se enfrenta el ojo por ejemplo, color, movimiento y forma son interpretados y combinados en partes diferentes del cerebro. Cada una de estas partes de la visión es moldeada de acuerdo a las experiencias previas.

Es importante reconocer que tener ojos funcionales es solamente el primer paso para ver bien, pues el cerebro necesita ser capaz de organizar e interpretar lo que los ojos le proveen. Inclusive con ojos perfectos, si esta parte del cerebro está dañada, la visión también lo estará.

En este punto es necesario recordar que la primera variable que debe satisfacer un buen libro de texto es:

Presentación formal, debe tener formato adecuado, letra de buen tamaño, esquemas visuales apropiados, espacio para hacer los ejercicios, símbolos que inviten a comunicarse con el texto y colorido atractivo

Esto tiene estrecha relación con la neurovisión, ya que, el libro de texto es un medio de información netamente visual, es por ello que se requiere que sea atractivo a la vista de quien lo utilice, de esta manera el cerebro será capaz de organizar e interpretar de mejor manera lo que se está estudiando.

### 3.5 Teoría de la Transposición Didáctica

Esta teoría será estudiada con cierto detalle y cuidado, pues es la que dará las directrices para el análisis que se hará más adelante.

Un contenido del saber sabio que haya sido designado como saber a enseñar sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para tomar lugar entre los objetos de enseñanza. El ‘trabajo’ que un objeto de saber a enseñar hace para transformarlo en un objeto de enseñanza se llama transposición didáctica. Chevallard (1985, citado en Pascual 2013).

La transposición didáctica tiene como objeto estudiar la serie de transformaciones a las cuales se ve sometido un saber con la finalidad de ser enseñado. Chevallard (1991, citado en Pascual 2013)

De acuerdo a lo extraído desde el artículo, La transposición didáctica: Un modelo teórico para investigar los estatus de los objetos matemáticos, publicado por Roberto Vidal (s.f.) es evidente que el saber de los matemáticos (Saber Sabio) no es el mismo que el saber de los estudiantes (Saber Escolar). El conjunto de transformaciones que va sufriendo el primero para llegar a convertirse en saber escolar es lo que Michel Henry divide en cinco actos, tal como si se tratara de una obra teatral, en la que cada acto tiene un protagonista a cargo del saber.

Los 5 actos de la transposición didáctica

### **Primer Acto**

Protagonista: Matemáticos e investigadores puros.

Ellos son los poseedores y fabricantes del saber sabio o saber erudito. Construyen o reconstruyen herramientas, escogen lo que es útil y comunican su descubrimiento, pero no sin antes descontextualizarlo, es decir hacerlo lo más general posible, y despersonalizarlo, es decir, suprimir todo lo referente a la infancia de la investigación: reflexiones, errores, caminos tortuosos o demasiado largos que lo llevaron a impases y de la misma manera suprimir todo lo que está asociado a motivaciones personales. Estos nuevos conocimientos son publicados y legitimados por la comunidad científica.

### **Segundo Acto**

Protagonista: La noosfera (sistema social de enseñanza)

El Ministerio de Educación es el agente que decide junto a su equipo de expertos cuáles son los objetos a enseñar. Una vez lista la selección de los objetos a enseñar, se elabora el texto del saber a enseñar, que pasa a ser el manual del profesor. Para hacer este texto, los expertos deben re-escribir las definiciones, propiedades y demostraciones para lograr una articulación lógica, coherente y accesible a los estudiantes

### **Tercer Acto**

Protagonista: Libros de Texto

En este acto se elabora el Saber Escolar, el cual es difundido por los libros de texto (los cuales son nuestro objeto de estudio en el presente trabajo). Las editoriales presentan sus textos proponiendo organización del programa, aportan ilustraciones de los temas, ejercicios de entrenamiento y problemas. La responsabilidad de seleccionar aquel libro de texto que responda de mejor manera a la selección hecha previamente (acto 2), le corresponde a la noosfera: conjunto de agentes político-educativos de una nación.

### **Cuarto Acto**

Protagonista: Profesor

Es el docente quien tiene la responsabilidad de realizar una transposición interna, pues debe adaptar los objetos a enseñar, a su conocimiento, debe insertarlos en el saber escolar y organizarlos en el tiempo. En este acto, el profesor en cierta manera realiza el trabajo inverso del investigador, pues debe recontextualizar y personalizar el saber para así transformar el objeto a enseñar en objeto enseñado, de manera que los alumnos lo hagan propio.

### **Quinto Acto**

Protagonista: Estudiantes

Los alumnos transforman el saber enseñado a saber del alumno. En este último acto, los estudiantes deben hacer un trabajo similar al investigador, pues deben despersonalizar y descontextualizar el saber para así darle un estatus general.

Este trabajo se centra principalmente en la distancia que pudiese existir entre el Saber Sabio y el Saber a Enseñar. Chevallard acerca de esta distancia afirma lo siguiente:

El estudio de la transposición didáctica implica una “vigilancia epistemológica”, esto es, examinar la distancia, vista por la deformación que existe entre el objeto de saber (del saber erudito) y el objeto de enseñanza (del saber a enseñar). A veces no queda más que una nomenclatura en común y en el peor de los casos, un lenguaje pseudo-erudito. En casos extremos se habla de “ruptura epistemológica”.

En este estudio, la transposición didáctica se encuentra inserta en diferentes niveles, en primer lugar se puede observar una transposición desde el saber sabio a los programas oficiales de estudio y luego, desde los programas oficiales hacia los libros de texto.

Finalmente, ¿cómo este saber a enseñar se transforma en saber enseñado? , ¿qué es lo que realmente se aprende? y ¿cómo la asimilación de un contenido sirve de base para la construcción de un nuevo conocimiento? son interrogantes que han rondado históricamente a la educación; en torno a estas inquietudes es que emerge la interrelación de los contenidos dentro de la misma asignatura, he aquí donde la dialéctica herramienta-objeto adquiere una importancia superlativa.

### 3.6 Dialéctica Herramienta-Objeto:

La dialéctica herramienta-objeto establece a grandes rasgos que un determinado contenido en primera instancia es aprendido y luego es utilizado para crear un conocimiento nuevo.

De acuerdo a lo expuesto por Pascual (2013), Régine Douady desarrolló en 1990 la denominada dialéctica herramienta-objeto, la cual está caracterizada esquemáticamente a partir de un problema inicial:

- a. Primera fase “antiguo”: Esta fase consiste en la puesta en obra de un objeto conocido como herramienta explícita para emprender un procedimiento de resolución del problema, o al menos de una parte del problema
- b. Segunda fase “Investigación”: En la segunda etapa, el alumno encuentra dificultades para resolver completamente su problema, en esa instancia el alumno es conducido a buscar otro medio mejor adaptado a su situación. Él puede entonces poner en acción implícitamente herramientas nuevas, a las que se les denomina nuevo implícito. Del punto de vista de los alumnos, estas nuevas concepciones van a entrar en conflicto con las antiguas. Los errores o contraindicaciones pueden convertirse en los juego de procesos dialécticos de formulación y validación propias para resolver los conflictos y asegurar las integraciones necesarias.
- c. Tercera fase “Explicitación”: Algunos elementos han sido importantes en la fase anterior y pueden ser apropiados ahora para los alumnos. Son formulados en términos de objeto o de práctica con sus condiciones de empleo para el momento. Se puede también tratar de convicciones que hayan sido el objeto del debate y dando lugar a la formulación argumentada. En esta fase se discute colectivamente la validez de los trabajos y las propuestas de los alumnos. Aún cuando el grupo ha resuelto el problema, no todos han reaccionado igual ante las herramientas movilizadas. En las situaciones de comunicación, el saber se difunde diversamente según los alumnos. Oficializar conocimientos que hasta el

momento sólo han sido herramientas, darles un estatuto de objeto matemático es una condición de homogeneización y de constitución de un saber de la clase, y para cada uno una manera de señalar su propio saber y con ello asegurarse la progresión.

- d. Cuarta fase “Intervención del profesor”: Puede suceder en el transcurso de la segunda o tercera fase, el profesor se dé cuenta que la situación tiene el riesgo de bloquearse si él no interviene, o que él lo perciba demasiado tarde y que tenga que desbloquear. Le corresponde, según su análisis de la situación didáctica, tomar la decisión de intervenir o no, y si es necesario debe elegir el momento y la forma de la intervención respetando la maniobra de los alumnos.
- e. Quinta fase “Institucionalización”: El profesor expone lo que es nuevo y debe relacionarlo con las conversaciones usuales. Expone la clase presentando de manera organizada y estructurada las definiciones, teoremas, demostraciones, señalando lo esencial y lo secundario. Así, el enseñante tiene el cargo de dar un estatuto de objeto a los conceptos utilizados en su aspecto de herramienta. Esta novedad a retener está destinada a funcionar ulteriormente en tanto que antigua, pero aún no ha llegado el momento. En realidad, la *estructuración personal* es de primera importancia en matemáticas para que haya efectivamente saber. Para perfeccionar esta estructuración, el alumno debe poner a prueba por él mismo los conocimientos que cree haber adquirido y hacer el balance sobre lo que sabe.
- f. Sexta fase “Familiarización-reinversión”: El profesor pide a los alumnos que resuelvan ejercicios variados que necesitan las nociones recientemente institucionalizadas. Al proceder, los alumnos desarrollan hábitos y habilidades, integran el saber social confrontándolo a su saber particular. Esos ejercicios sólo ponen en juego lo conocido, pero los alumnos los abordan con conceptos que han evolucionado y que les permiten considerar un campo más amplio de problemas.
- g. Séptima fase “Complejidad de la tarea o nuevo problema”: Queda por utilizar los nuevos conocimientos en el seno de una situación compleja implicando otros conceptos ya conocidos y contemplados por el aprendizaje. El nuevo objeto es susceptible de tomar un lugar como antiguo para un nuevo ciclo de la dialéctica herramienta objeto.

En esta investigación la dialéctica herramienta-objeto, se encuentra presente al momento de analizar las aplicaciones que tienen tanto el álgebra de potenciación como el álgebra de radicales. Es decir, cómo a partir de ellos se va construyendo un nuevo conocimiento. Actualmente, esta dialéctica se encuentra altamente presente en la educación chilena, ya que, ésta se basa en el currículum espiral; esto se puede visualizar claramente en los nuevos programas curriculares, que incorporan mapas de progreso, los que brindan un apoyo al docente en el proceso de observación y análisis de aprendizaje de sus alumnos.



## CAPÍTULO 4: PROPUESTA DE INVESTIGACIÓN

### 4.1 Preguntas de investigación

Para abordar la pregunta general enunciada en el apartado 2, es necesario definir algunas preguntas específicas:

- ¿Se observan diferencias en la estructuración del contenido matemático en el contenido de Potencias y Raíces entre los años 1969 y 2015?
- En caso de que existan, ¿Cuáles son esos cambios?
- ¿Existen rupturas epistemológicas en las matemáticas transpuestas tanto por los programas ministeriales como en los libros de textos?
- ¿Existen errores matemáticos en los libros de textos dentro del contenido de Potencias y Raíces?
- ¿Cuáles son las representaciones que se utilizan para trabajar el contenido de Potencias y Raíces y bajo qué ámbito numérico?

### 4.2 Objetivo General

Identificar y caracterizar el tratamiento de potencias y raíces en los libros de texto mediante un análisis conceptual, de contenido y su adaptación al currículum durante el período 1969-2015 en Chile.

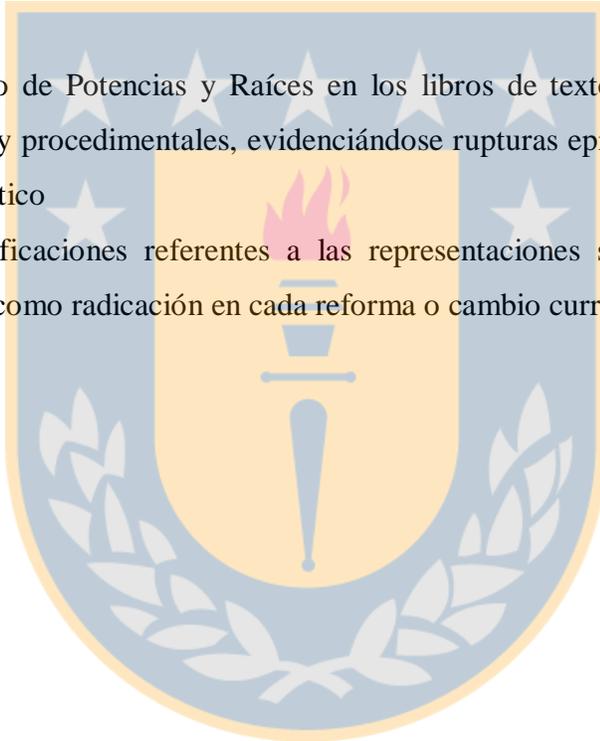
### 4.3 Objetivos Específicos

Para alcanzar el objetivo general, se torna necesario establecer algunos objetivos específicos, que contribuyan a su consecución.

- OE1: Establecer las principales diferencias entre los marcos curriculares producidos por las reformas o ajustes educacionales, específicamente en el contenido de potencias y raíces
- OE2: Detectar cuáles son las propiedades de potencias y raíces que se trabajan en los libros de texto relación a cada reforma curricular y cómo son tratadas.
- OE3: Describir y analizar la organización conceptual de los contenidos con los cuales se relacionan, que permita establecer la existencia de rupturas epistemológicas.
- OE4: Evidenciar errores conceptuales y procedimentales en los libros de textos en el contenido de potencias y raíces
- OE5: Analizar los tipos de representaciones simbólicas que se utilizan en el tratamiento de potencias y raíces

## 4.4 Supuestos

- Existen diferencias en la estructuración del saber matemático en el contenido de Potencias y Raíces entre los años 1969 y 2015
- Las propiedades de potencias y raíces varían en cada reforma en cuanto a su presentación y tratamiento.
- En el tratamiento de Potencias y Raíces en los libros de texto, no se sigue una secuencia conceptual, lo cual impide la realización de demostraciones algebraicas.
- El tratamiento de Potencias y Raíces en los libros de texto, comunica errores conceptuales y procedimentales, evidenciándose rupturas epistemológicas con el saber matemático
- Existen modificaciones referentes a las representaciones simbólicas tanto de potenciación como radicación en cada reforma o cambio curricular.



## CAPÍTULO 5: MARCO METODOLÓGICO

### 5.1 Enfoque de la investigación:

Esta investigación se encuentra enmarcada bajo un paradigma cualitativo, pues en ella se caracterizarán los libros de texto en diferentes aspectos, por ejemplo, al compararlos con los programas oficiales de estudio y con el saber erudito en la materia; así como también, al describirlos físicamente y de acuerdo a su contenido.

### 5.2 Tipo de investigación:

La finalidad de esta investigación es del tipo descriptiva, ya que, estas investigaciones tienen como propósito la descripción de eventos, situaciones representativas de un fenómeno o unidad de análisis específico; lo cual se condice con la intención de este seminario, pues el foco de interés está en describir, identificar y caracterizar tanto el álgebra de radicales como el álgebra de las potencias, en los libros de textos y en los programas oficiales de estudio.

De acuerdo a la cronología de los hechos, a esta investigación le corresponde un estudio retrospectivo, ya que, se realiza con posterioridad a los hechos ocurridos. Un estudio retrospectivo, trabaja con datos recogidos de archivos, en este caso, desde programas oficiales de estudio, libros de texto y libros matemáticos.

Finalmente y de acuerdo al control de asignación a los factores de estudio corresponde a uno del tipo no experimental, pues las variables que atañen nuestra investigación no serán manipuladas. Una investigación del tipo observacional o no experimental, no es controlada por el investigador, sino que éste sólo se limita a observar y medir.

## 5.3 Recolección de la información:

### 5.3.1 Instrumentos para la recolección de datos

La recolección de la información pertinente para esta investigación se hará por medio de una matriz elaborada y validada por el Dr. Roberto Vidal y cuatro matrices que son modificaciones a las elaboradas por el mismo doctor. Dichas matrices abarcan las dos fuentes que proporcionan los datos que se requieren, los Programas Oficiales del Ministerio de Educación y los Libros de Texto.

De acuerdo a la misma descripción que hace el Dr. Vidal, las matrices se pueden clasificar en dos grupos:

- a. Matrices para la descripción y análisis de las fuentes: Aquellas cuyos campos permiten relatar, citar y comentar la información que trae la fuente (programa o texto). A su vez, según el tipo de información que organizan pueden ser Matrices de Identificación General (MIG) o bien Matrices de Análisis de Contenido (MAC).
- b. Matrices de Resumen y Cotejo, cuyo propósito es objetivar y reducir la información de las matrices de descripción y análisis, de modo que sirvan para elaborar perfiles para el Saber a Enseñar, tanto a nivel Oficial (acto 2 de la transposición didáctica) como de los libros de texto (acto 3).

Las MIG tienen como objetivo la caracterización estructural de la fuente, sin considerar el contenido matemático. Por el contrario las MAC se utilizan para hacer el análisis del contenido matemático. Ambos tipos de matrices se aplican para el análisis de Programas Oficiales de Estudio y, para el análisis de los Libros de Texto.

Al ser matrices tomadas o levemente modificadas, sus variables quedan en igual condición, es decir, definidas de la misma manera que lo hace su autor o adaptadas al contexto requerido.

A continuación se presentan en detalle las matrices antes mencionadas, incluyendo cada uno de los campos que las componen:

### **5.3.1.1 Matriz de Identificación General para la caracterización general de los Programas Oficiales (MIGp)**

- **MIGp1: Decreto**
  - Se rescata el número del decreto, su fecha de aparición en el diario oficial, algunos de los artículos de interés relacionados con la problemática de investigación y la implementación de los programas.
- **MIGp2: Características Generales de los Programas Oficiales**
  - En este apartado se entrega información acerca de la concepción curricular base, los elementos que se enfatizan y organizan los programas.
- **MIGp3: Programa Seleccionado y sus referencias identificatorias**
  - Se expone en este campo los programas que son examinados, junto a sus datos de identificación tales como el año de publicación, edición, número de ejemplares, número de páginas.
- **MIGp4: Secciones del Programa**
  - Este campo es completado con la información que ofrece el programa al mirarlo globalmente, tales como sugerencias metodológicas, organización del programa, objetivos o aprendizajes esperados, sugerencias evaluativos, entre otras. Esto permitirá observar el tipo de direccionamiento que se les da a los profesores para su tarea.

### **5.3.1.2 Matriz de Identificación General para la caracterización general de los libros de texto (MIGt):**

- **MIGt1: Título y Procedencia**
  - Corresponde al nombre del libro de texto y si es distribuido o no por el Ministerio de Educación
- **MIGt2: Datos de Autoría**
  - En esta dimensión se describe los estudios de los autores y sus respectivas instituciones de formación.
- **MIGt3: Edición y tipo de obra**
  - Se detalla editorial, número de edición consultada, lugar de edición. En cuanto a tipo de obra, se refiere a determinar el nivel al cual está dirigido.
- **MIGt4: Presentación Física**
  - Se informa aquí el número de páginas y características de la impresión (color o blanco y negro).

### **5.3.1.3 Matriz de Análisis de Contenido para la caracterización de los Programas Oficiales (MACp)**

- **MACp1: Lugar oficial de la potenciación y radicación en el saber a enseñar**
  - Se describe sucintamente el o los programas del o los niveles de enseñanza media en que las potencias y raíces son trabajadas en el álgebra, obteniendo así una primera aproximación al contexto de las matemáticas escolares en que se ha transpuesto este nivel.

- **MACp2: Propósito explicitados para el contenido de potencias y raíces**
  - En los programas existen distintos modos de referirse a los propósitos, los que entendemos aquí en el genérico para abarcar lo que llaman objetivos (tanto generales como específicos), conductas deseables o en los programas actuales llamados aprendizajes esperados. Los que aquí se describen corresponden exclusivamente a los que tengan alguna relación con las potencias y raíces directamente o bien de modo indirecto.
- **MACp3: Organización de los contenidos**
  - Se describe en este campo, cómo se organizan los contenidos del nivel específico en que aparece el estudio de potencias y raíces (propiedades, demostraciones, actividades sugeridas y conexiones con otros objetos matemáticos).
- **MACp4: Orientaciones explicitadas acerca del contenido de potencias y raíces**
  - Toda orientación relacionada con el tratamiento de las potencias y raíces que permita extraer alguna conclusión, la describiremos en este campo, incluyendo las relacionadas con los conceptos que traen.
- **MACp5: Actividades o ejemplos propuestos**
  - Cada una de las actividades desarrolladas o propuestas será objeto de análisis. Se procede a su resolución en caso que ésta no aparezca, lo que informa sobre los conocimientos previos y concepciones que se tiene de las potencias y raíces, manejo de sus dominios de validez, discusión y pertinencia de lo obtenido, y en general lo que genéricamente se ha denominado: tratamiento.

#### **5.3.1.4 Matriz de Análisis de Contenido para la caracterización de los Libros de Texto (MACT)**

- **MACT1: Organización de los contenidos**
  - Se presenta la secuenciación general de todos los contenidos del libro de texto, existencia de bloques, capítulos, secciones, de modo de obtener una visión que permita interpretar la obra en términos de la articulación y organización de la matemática escolar y ser comparable con otras.
- **MACT2: Tipo de presentación de los contenidos**
  - Para el desarrollo de este campo, consideraremos seis tipos de presentación en forma de par ordenado (estructura, actividades). La componente estructura puede tomar uno los siguientes valores excluyentes:
    - Axiomática (A): Es aquella que comienza dando las definiciones y propiedades, seguida de ejemplos y ejercicios, entregando un conocimiento impuesto y que no da espacio para construcción alguna por el estudiante.
    - Constructiva incompleta (CI): Comienza mediante la descripción de una situación (matemática o no) que llevará supuestamente a los lectores a generar un protoconcepto, pero que no evidencia institucionalización del saber trabajado.
    - Constructiva completa (CC): Comienza mediante la descripción de una situación (matemática o no) que llevará supuestamente a los lectores a generar un protoconcepto, incorporando la institucionalización.

La segunda componente, que está denominada actividades, toma uno y sólo uno de los siguientes valores:

- Mecanicista (M): Enfatiza en actividades de repetición con gran número de ejercicios (sobre 10).

- Heurística (H): La mayor parte de las actividades propuestas se cimientan en la resolución de problemas.

De este modo, con las combinaciones posibles, se obtienen las 6 parejas: (A, M), (A, H), (CI, M), (CI, H), (CC, I), (CC, H), que caracterizan así el tipo de presentación de los contenidos del libro de texto.

- **MACT3: Ecología de las potencias y raíces en los libros de textos**

- En este campo se describe en qué capítulos, unidades o lecciones se encuentran las potencias y raíces, las diferentes articulaciones con otros conceptos o contenidos. El propósito de esta descripción es tomar una primera fotografía respecto de los usos de las potencias y raíces, los énfasis en los procedimientos que los involucran, como los contextos en que aparecen (contextos numéricos, algebraicos, geométricos).

- **MACT4: Presentación de raíces y potencias**

- Interesa conocer cómo son introducidos los conceptos de potencia y raíz, cómo los define y si los relaciona. Se describe lo que trae el libro de texto seguido del análisis para interpretar cómo el autor concibe estos conceptos. Además si hace énfasis o no en el error conceptual del doble signo al usar el signo radical.

○ **MACt5: Tratamiento de las propiedades de potencias y raíces**

■ Este campo constituye el de mayor detalle (y por tanto extensión) junto al siguiente (MACt6), pues se accede a través de ellos al núcleo de esta tesis. Se describirá cada punto relacionado con el tratamiento de las propiedades, observando:

- Cuáles son las propiedades que enuncia y su secuencia. Ésta última viene dada por un diagrama que incluiremos para revelar la dependencia lógica de unos teoremas respecto de otros, si la ofrece el texto y analizar esta dependencia con la de orden formal.
- Uso de restricciones o explicitación de los campos de validez de cada propiedad.
- Pertinencia de las demostraciones que desarrolle desde el punto de vista lógico.
- Notaciones o representaciones semióticas utilizadas.
- Tipos de tareas asignadas (en relación a las verificaciones o usos de las propiedades, contextos numéricos para inferir si en las tareas se induce a algún tipo de error conceptual o procedimental).

○ **MACt6: Aplicaciones del álgebra de potencias y radicales**

■ En este campo veremos como el álgebra de potencias se torna necesario para la construcción del concepto de raíz y, a su vez cómo este último es un medio para definir la potencia de exponente racional. Por otra parte, ambos conceptos matemáticos son utilizados como herramienta para la construcción de otros contenidos como por ejemplo, notación científica y racionalización, respectivamente.

### **5.3.1.5 Matrices de Resumen y Cotejo. Caracterizaciones y Perfiles**

Para realizar la triangulación que finalmente permitirá obtener las conclusiones referentes a esta investigación, se torna necesario hacer primero una triangulación por periodo entre los aspectos antes mencionados (saber sabio, saber a enseñar y saber escolar), para este fin se utilizaron las matrices MIG y MAC. Seguido a este proceso, es menester realizar una Caracterización del Saber a Enseñar según los programas ministeriales (CSaEp) y una Caracterización del Saber a Enseñar según los libros de texto (CSaEt); ambas caracterizaciones forman parte de la triangulación que tiene como tercera componente al saber sabio.

A continuación se presentará la Matriz de Resumen (Mr) con el previo detalle de sus campos, aspectos y/o sub-aspectos según corresponda. Esta matriz como ya se indicó anteriormente, es una adaptación a la elaborada y validada por el Dr. Vidal.

Se comenzará caracterizando a cada uno de los descriptores que componen a esta matriz, la Mr es del tipo  $Mr(i,j,k)$  en donde  $i$  corresponde al campo,  $j$  al aspecto y  $k$  al sub-aspecto. Se utiliza la denominación campo, aspecto y/o sub-aspecto para indicar el grado de especificidad que requiere el ítem, así entonces, campo es mucho más general que sub-aspecto.

- **Mr(1) Vigencia de la fuente:** Se anotan los dos últimos dígitos de los años en que la fuente es utilizada en el sistema escolar.
- **Mr(2) Nivel de enseñanza media:** Se anotará el nivel al que pertenece la fuente (en caso que corresponda) en términos ordinales, como de costumbre; 1°, 2°, 3°, 4°, para el primero, segundo, tercero o cuarto año de enseñanza media, respectivamente.

- **Mr(3.j) Secuenciación de los contenidos ( $1 \leq j \leq 6$ ):** Este campo presenta 3 aspectos, los cuales son:
  - 1.- Potencia de exponente entero - Raíz principal - Potencia de exponente racional
  - 2.- Raíz principal - Potencia de exponente entero - Potencia de exponente racional
  - 3.- Potencia de exponente entero - Potencia de exponente racional - Raíz principal
  - 4.- Potencia de exponente entero - Raíz o radical - Potencia de exponente racional
  - 5.- Raíz o radical - Potencia de exponente entero - Potencia de exponente racional
  - 6.- Potencia de exponente entero - Potencia de exponente racional - Raíz o radical
    - El objetivo de este campo es determinar si los conceptos son construidos en forma paulatina, siguiendo la secuencia dada por el saber sabio.
  
- **Mr(4.j) Introducción al concepto ( $1 \leq j \leq 8$ ):** Este campo está compuesto por 8 aspectos, los cuales están separados entre potencias y raíces:
  - Potencias:
    - 1.- Deductiva (de la potencia a la multiplicación iterada)
    - 2.- Inductiva (de la multiplicación iterada a la potencia)
    - 3.- Como suma iterada
    - 4.- Otro (especificar al final)
  - Radicales:
    - 4.- Deductiva (del n-ésimo al cuadrado)
    - 5.- Inductiva (del cuadrado al n-ésimo)
    - 6.- Como inversa de la potenciación

- 7.- Como potencia de exponente fraccionario (racional)
- 8.- Otro (especificar)
  - Los dos primeros apuntan al modo en que se presentan los radicales, si parte del radical n-ésimo y luego sus casos particulares o bien al revés. Los aspectos seis y siete, muestran los conocimientos previos en que ancla el nuevo objeto matemático.
  - Tanto para la introducción del concepto de potencia o raíz se ha dejado otra posibilidad, por si se obtiene una introducción no contemplada aquí.
- **Mr(5.j) Tipos de representaciones que utiliza ( $1 \leq j \leq 8$ ):** Este campo consta de 8 aspectos, también separados entre potencias y raíces:
  - Potencias:
    - 1.- Con uso de paréntesis
    - 2.- Con notación científica
    - 3.- Como multiplicación iterada
    - 4.- Otro (especificar al final)
  - Radicales:
    - 4.- Con el signo radical: Se refiere al uso explícito de  $\sqrt{\quad}$
    - 5.- Con uso de valor absoluto: Incorpora la notación en valor absoluto en tratamientos como por ejemplo:  $\sqrt{a^2b}=|a|\sqrt{b}$ . También será completado con x este aspecto, si el lugar del valor absoluto, menciona que los literales los restringe a los números positivos (o no negativos).
    - 6.- Con notación de potencia (exponente fraccionario): Usa las expresiones  $a^{\frac{p}{q}}$ .
    - 7.- Notación funcional: Emplea la notación funcional  $f(x) = \sqrt[n]{x}$ , y su tratamiento como tal.
    - 8.- Otro (especificar al final)

- Al igual que en el campo anterior, se dejó la posibilidad abierta de la utilización de otras representaciones no especificadas aquí, tanto para potencias como para raíces.
- **Mr(6.j.k) Propiedades de las potencias y radicales ( $1 \leq j \leq 16$ ) y ( $1 \leq k \leq 8$ ):** Se chequea la presencia de las siguientes propiedades:

- 1.-  $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$
- 2.-  $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- 3.-  $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- 4.-  $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n; \quad b \neq 0$
- 5.-  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; \quad a \neq 0, n \geq m$
- 6.-  $\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{n-m}}; \quad a \neq 0, m > n$
- 7.-  $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}; \quad n, k \in N; a \geq 0$
- 8.-  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}; \quad n \in N; a, b \geq 0$
- 9.-  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k \cdot b^n}; \quad n, k \in N; a, b \geq 0$
- 10.-  $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}; \quad n \in N; a \geq 0; b > 0$
- 11.-  $\sqrt[n]{a} : \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k : b^n}; \quad n, k \in N; a \geq 0; b > 0$
- 12.-  $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}; \quad n, k \in N; a \geq 0$
- 13.-  $(\sqrt[n]{a})^n = a, \quad n \in N; a \geq 0$
- 14.-  $\sqrt[n]{a^n} = a; \quad n \in N; a \geq 0$
- 15.-  $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}; \quad n \in N; a \geq 0$
- 16.-  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}; \quad n, m \in N; a \geq 0$

- Estas 16 propiedades corresponden a los aspectos considerados en este campo, en cuanto a los sub-aspectos como ya indicó son ocho los considerados y están definidos de la siguiente manera:

- 1.- La demuestra con errores lógicos: Se refiere a errores cometidos al emplear teoremas que no han sido demostrados previamente.
- 2.- La demuestra correctamente: La demostración que aparece o sugiere es lógicamente aceptable.
- 3.- No demuestra: Sólo enuncia la propiedad, la verifica o no, pero no hay referencia a la demostración.
- 4.- Usa restricciones completas: Al enunciar la propiedad, indica el ámbito numérico para cada una de las variables que la componen, en que es válida.
- 5.- Usa restricciones incompletas: Al enunciar la propiedad, da restricciones sólo para algunas de las variables, omitiendo otras.
- 6.- No restringe: La propiedad es sólo enunciada sin indicar contexto numérico de sus variables.
- 7.- Define unilateralmente: La propiedad se presenta en el sentido izquierda a derecha y es tratada de este modo. El signo igual es considerado como resultado de. El tratamiento de una misma propiedad se divulga como si fueran dos propiedades distintas, como ocurre cuando se presentan: la multiplicación de radicales de igual orden (o igual índice) y radical de un producto.
- 8.- Define bilateralmente: El signo igual se emplea como relación de equivalencia, haciendo notar que se trabaja de ida y vuelta, como permite la simetría de la relación de igualdad.

- **Mr(7,j) Aplicaciones ( $1 \leq j \leq 7$ ):** En este campo se resume alguno de los contenidos en que se utiliza el álgebra de potencia y radicales, para efectos de esta investigación solo veremos si los relaciona , pero no en la forma como lo hace.
  - 1.- Notación científica
  - 2.- Teorema de Pitágoras
  - 3.- Polinomios
  - 4.- Productos notables
    - Estas 4 aplicaciones corresponden al contenido de potencia, seguido de esto se nombraran las que son para raíces.
  - 4.- Racionalización
  - 5.- Ecuaciones cuadráticas
  - 6.- Ecuaciones con radicales

Una vez explicitado cada uno de los campos que posee nuestra matriz, es necesario explicar la forma en que se completarán dichos campos, la cual quedará de la siguiente forma:

- Como se trata de una matriz de resumen y cotejo, se marca en estos aspectos o sub – aspectos con x en la celda de la descripción respectiva.

Es necesario aclarar dos eventuales situaciones:

- Si el descriptor no aparece en la fuente examinada, se colocará NI (abreviando que no hay información) en la celda que corresponda.
- Si la información corresponde a la negación del descriptor, y no existe otro en la matriz que lo represente, se deberá dejar en blanco el casillero respectivo.

Finalmente, un último punto a aclarar es que la Matriz de Resumen y Cotejo se utiliza tanto para los Programas Oficiales como para los Libros de Texto; bajo esta situación es que la primera se abrevia Mrp, mientras que la segunda se hace Mrt.

### 5.3.2 Localización del saber sabio para el contenido de Potencias y Raíces

Para la localización del saber matemático correspondiente al contenido de potencias y raíces, se utilizaron 6 libros de álgebra y precálculo, las cuales en rigor son de segunda mano pues son traducciones de las originales. Las obras que fueron consultadas son:

- Raymond A. Barnett. (1997). Álgebra y Trigonometría. 3° edición en inglés (2° edición en español). Traducción: Diego Edmundo Barahona Peña. México. McGraw-Hill.
- Smith, S; Charles, R; Dossey, J; Keedy, M; Bittinger, M. (1998). Álgebra, trigonometría y geometría analítica. Traducción: Carlos Torres Alcaraz. 1° edición en español. México. Addison-Wesley Publishing Company.
- Sullivan, Michael. (2006). Álgebra y Trigonometría. 7° edición. México. Pearson Educación.
- Stewart, J; Redeling, L; Watson, S. (2006). Precalculus. Mathematics for calculus. México. Thomson/Brooks cole.
- Swokowski, E. W; Cole, J. A. (2008). Algebra and Trigonometry with analytic geometry. México. Thomson/Brooks cole.
- Zill, D; Dewar, J. (2012). Algebra and Trigonometry. U.S.A. Jones y Barlett Learning.

### 5.3.3 Períodos históricos contemplados en esta investigación

Como ya se hizo referencia en el marco teórico, la primera reforma que consideraremos es la del año 1965, no obstante, debido a que su implementación fue paulatina comenzando en 1966 con primero básico y terminando en 1971 con cuarto medio, es que se ha decidido comenzar la investigación con libros de textos a partir de 1969, donde se ve instaurada casi en su totalidad dicha reforma. Posterior a ella, se consideró la reforma de 1981 la cual viene rodeada por un importante cambio social en el país, que se ve inmerso en un golpe militar. Con el retorno de la democracia, se comienza a trabajar en mejorar la calidad de la educación, principalmente invirtiendo más en ella; por otra parte, es en este año es donde se promulga la Ley Orgánica Constitucional de Enseñanza, la que acompaña todo este proceso. El cambio que se comienza en 1990, se ve desembocado en otra gran reforma curricular, esta nueva reforma es la que se comienza a gestar en 1996, donde no sólo hay cambios curriculares sino que también estructurales en cuanto a la jornada escolar, por lo que los alumnos pasan más tiempo en los establecimientos educacionales.

Hasta este punto, cada cambio presidencial ha traído consigo a lo menos un cambio curricular, sin embargo, en el año 2000 asume el Sr. Ricardo Lagos Escobar, el cual si bien hace aportes a la educación éstas no afectan directamente al currículum escolar, razón por la cual no fue considerado para este estudio. En 2007, bajo una alta presión social liderada por los estudiantes secundarios del país, se comienza a trabajar en un Ajuste Curricular el cual desemboca en un importante cambio a los planes de estudio. A consecuencia de este Ajuste, se cambia la Ley Orgánica Constitucional de Enseñanza a Ley General de Educación. Estos cambios curriculares deberían haber comenzado a regir desde marzo del 2010, sin embargo y con el cambio de mando, dicha transición no se realizó generando una disparidad entre los programas que estaban aprobados y lo que se pedía que se realizara. Es por esta última razón, que el último ajuste considerado es el que se comienza a idear en el año 2007 y cuyas consecuencias empezamos a observar

desde el 2011 con la aprobación de las nuevas bases curriculares hasta segundo año medio.

### 5.3.4 Programas oficiales de estudio:

En primera instancia se torna menester evidenciar las limitaciones encontradas en el desarrollo del presente seminario, la más importante de ellas es el restringido acceso a las leyes y decretos que se pretendían considerar para este estudio. Es por lo anterior que sólo se utilizarán cuatro reformas con cambios curriculares, estas reformas son las de los años 1965, 1981, 1996 y 2009. A continuación se presenta un cuadro resumen, en el cual la primera columna presenta el año de la reforma, mientras que en la segunda columna muestra los años en los que estas reformas están activas, por lo cual son los años que se considera al momento de seleccionar los libros de textos.

Tabla N°1: Reformas Educativas y Ajustes Curriculares contemplados

Año de reforma	Períodos contemplados por cada reforma
1965	1969-1981
1981	1982-2000
1996	2001-2010
2009	2011-2015



Para los primeros dos cambios curriculares, se utilizará la información proporcionada por Roberto Vidal (2009), en su tesis doctoral y, para los dos siguientes cambios extraeremos la información de los planes y programas de estudios de los años contemplados.

### 5.3.5 Selección de libros de texto:

Para realizar el análisis del contenido de potencias y raíces se hizo una selección de algunos ejemplares que ha entregado el ministerio de educación en los periodos contemplados. Además se considerarán textos matemáticos que han significado un referente en el estudio ya sea a nivel secundario y/o superior.

A continuación se presentan los textos seleccionados, agrupándolos según los 4 periodos considerados para esta investigación:

**Tabla 2: Libros de texto primer periodo (1969-1981)**

Nº	Año	Edición	Autor	Título	Editorial
1	1965	5	Bélgica Parra Guzman	Matemática II Medio	Universitaria
			Julio Villalobos Corona		
2	1965	23	Francisco W. Pröschle	Curso de Matemáticas Elementales. Álgebra	Imprenta y litografía Universo, S.A
3	1977	4	Carlos Mercado Schüler	Álgebra. Enseñanza media y preuniversitaria	Universitaria

**Tabla 3: Libros de texto segundo periodo (1982-2000)**

Nº	Año	Edición	Autor	Título	Editorial
1	1983	13	Aurelio Baldor	Álgebra	Publicaciones cultural
2	1985	2	Carlos Mercado	Matemática 1º Medio	Universitaria
3	1997	1	Gonzalo Riera Lira	Matemática aplicada. 1º Medio	Zig - Zag

**Tabla 4: Libros de texto tercer periodo (2001-2010)**

N°	Año	Edición	Autor	Título	Editorial
1	2003 - 2004	1	Roberto Vidal Cortés	Matemática. 1° Medio	Zig - Zag
			María Chicharro Ciuffardi		
			María Montoya González		
2	2008 - 2009	3	Patricio González González	Matemática. 3° Medio	Mare nostrum
			Jorge Soto Andrade		
3	2002	2	Rodrigo Bamón	3° Medio. Matemática activa	Mare nostrum
			Patricio González		
			Carmen Medina		
			Jorge Soto		
4	2001	1	Rodrigo Bamón	1° Medio. Matemática	Mare nostrum
			Patricio González		
			Carmen Medina		
			Jorge Soto		

**Tabla 5: Libros de texto cuarto periodo (2011-2015)**

N°	Año	Edición	Autor	Título	Editorial
1	2014	1	Gerardo Muñoz Díaz	Matemática 2° Medio	SM Chile
			Pedro Rupin Gutiérrez		
			Lorna Jiménez Martínez		
2	2011	1	Andrés Ortiz Jiménez	Matemática. 1er año Medio	Mc Graw Hill
			Cristián Reyes Reyes		
			Marisol Valenzuela Chandía		
			Eugenio Chandía Muñoz		

## **5.4 Técnica de análisis de la información:**

Para el análisis de la información, se adoptará la técnica de triangulación, la cual consiste en la utilización de diferentes medios para comprobar un dato o indicador. Existen diversos tipos de triangulación, en este caso y debido al tipo de investigación que se realiza se es útil aplicar la Triangulación de Fuentes, la cual permite recolectar y analizar la información procedente de diferentes fuentes.

## **5.5 Plan de análisis de la información:**

A continuación se presenta la forma en la que se analizará la información obtenida por las matrices descritas en el punto 5.3.

### **5.5.1 Secuencia ideal de contenidos**

En primer lugar se contrastará la secuencia de contenidos presentada tanto en los Programas Oficiales de estudio como en los Libros de Texto, con la que se obtuvo de los seis libros de álgebra y pre cálculo, aludidos en el apartado 5.3.2.

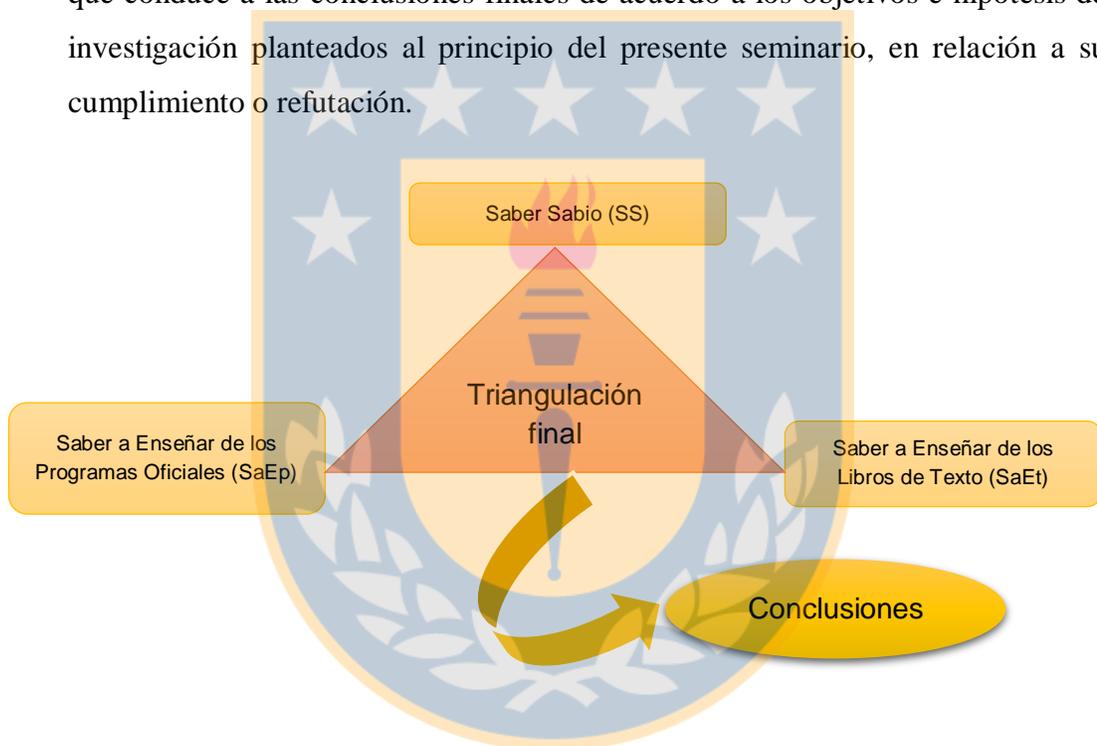
### **5.5.2 Triangulaciones y Obtención de conclusiones**

La confrontación entre la información y los análisis, se efectuará de la siguiente manera:

- En primera instancia se realiza la triangulación entre los programas de estudio de los 4 períodos contemplados en esta investigación, construyendo de esta manera un Saber a Enseñar que sea representativo del saber oficial a enseñar, el cual

queda designado por CSaEp (Caracterización del Saber a Enseñar según programas).

- En una segunda fase se efectúa la triangulación correspondiente al Saber a Enseñar de los libros de texto, obteniendo su caracterización simbolizada por CSaEt (Caracterización del Saber a Enseñar según libros de texto)
- Finalmente, se hace la triangulación entre el Saber a Enseñar de los programas (SaEp), el Saber a Enseñar de los libros de texto (SaEt) y el Saber Sabio (SS), lo que conduce a las conclusiones finales de acuerdo a los objetivos e hipótesis de investigación planteados al principio del presente seminario, en relación a su cumplimiento o refutación.



## CAPÍTULO 6: ANÁLISIS DE DATOS

### 6.1 Análisis del Saber a enseñar en los Programas Ministeriales.

A continuación se presenta la individualización de cada uno de los Programas Oficiales de estudio, de acuerdo a los campos requeridos por las matrices correspondientes.

#### 6.1.1 Reforma de 1965

##### 6.1.1.1 Objetivo de la reforma para matemática:

Los dos ejes esenciales de esta reforma, fueron las situaciones de aprendizaje y las conductas, en donde se tienen los contenidos de materia y actividades para el primer caso y los procesos para la integración de la enseñanza, en el segundo. Teniendo esto en cuenta es que, el énfasis de matemática se coloca en la resolución de ejercicios, sin considerar la resolución de problemas.

### **6.1.1.2 Aplicación MIGp a la Reforma de 1965**

<p><u>6.1.1.2.1 Decreto</u></p>	<p>Decreto N°27.952                  Fecha de aparición: 7 de Diciembre de 1965                  En 1966 se comenzó la implementación de los nuevos programas para primer y segundo año de educación básica.</p>
<p><u>6.1.1.2.2 Características Generales</u></p>	<p>En educación media se comenzó en Abril de 1968, con la aparición del Programa para Primer año, en el N°5 de Edición extraordinaria de la revista de educación; y concluye en 1971 con cuarto año de educación media.                  Existe un predominio del paradigma conductista, lo que desemboca en un énfasis en el desarrollo de ejercicios por sobre la resolución de problemas.</p>
<p><u>6.1.1.2.3 Programa seleccionado y referencia</u></p>	<p>Edición especial N°14 de la revista de Educación, fechada en marzo de 1969; la revista consta de 98 páginas, donde las últimas 7 se dedican a la asignatura de matemática.</p>
<p><u>6.1.1.2.4 Secciones del programa</u></p>	<p>El índice del programa de segundo medio es el siguiente:                  Introducción                  Organización de programa                  Conductas deseables                  Unidades programáticas                  Primera Unidad: Los números complejos                  Segunda Unidad: Álgebra en R                  Tercera Unidad: Geometría vectorial                  Sugerencias metodológicas generales                  Bibliografía                  Criterios y formas generales de evaluación</p>

### **6.1.1.3 Aplicación MACp a la Reforma de 1965**

<p><u>6.1.1.3.1 Lugar Oficial de la Potenciación y Radicación del Saber a Enseñar</u></p>	<p>Bajo esta reforma el álgebra de radicales queda estipulado como saber a enseñar en el Programa de Segundo Año de enseñanza media. Esta sección es abarcada entre las páginas 34 – 43</p>
<p><u>6.1.1.3.2 Propósito explicitados para el contenido de Potencias y Raíces</u></p>	<p>El o los objetivo(s) correspondientes a esta unidad no se encuentran especificados, sino que se habla en forma muy general de conductas deseables, dejándolas más bien en manos del profesor.</p>

#### 6.1.1.3.1 Organización del programa:

De acuerdo al programa, en la Unidad Álgebra en R se muestra el contenido de potencias y raíces de la siguiente forma:

- Potencias de base real con exponente natural, Potencias de base no nula con exponente entero.
- Raíces de radicando real positivo e índice natural; existencia de raíz aritmética. Aplicación al módulo complejo.
- Ecuaciones de segundo grado, con coeficientes reales; existencia y propiedades de sus raíces o soluciones. Ecuaciones de segundo grado con coeficientes complejos; existencia y propiedades de sus raíces o soluciones.
- Inecuaciones de segundo grado con una incógnita.

- Potencias de base real positiva y exponente racional. Potencias de base real positiva y exponente real. La función exponencial.

#### 6.1.1.3.2 Orientaciones didácticas:

Según lo explicitado por Vidal en su tesis, sólo se dan recomendaciones generales acerca de las adaptaciones del programa, destaca algunos elementos como:

- Distribución de la Unidad de números completos 20%, para el Álgebra en  $\mathbb{R}$  un 40% y para la geometría vectorial 40%, todo esto según el programa ministerial.

Esto a modo de poder visualizar la cantidad de tiempo o interés que se le da a la unidad de álgebra.

Además el programa de Segundo medio, agrega un procedimiento más riguroso de las propiedades de potencias y raíces, para que al momento de la resolución de problemas éstas no sean un estancamiento en el aprendizaje.

#### 6.1.1.3.3 Actividades o ejemplos propuestos:

Las actividades que se muestran a continuación, son tomadas textualmente del trabajo desarrollado por Vidal.

##### 6.1.1.3.3.1 Actividades relacionadas con potencias:

Demostrar las propiedades fundamentales para potencias de exponente natural y ejercitarlas. Ampliar al caso de exponentes enteros, también con demostraciones sencillas.

### 6.1.1.3.3.2 Actividades relacionadas con las raíces:

- Definir el concepto de raíz de la siguiente manera: Se llama raíz enésima de  $x$  real a todo  $y$ , también real, tal que  $y^n = \sqrt[n]{x}$  con  $n$  natural
- Destacar la raíz real y positiva, llamándola raíz aritmética, y representándola por  $\sqrt[n]{x}$ , con  $x$  real y  $n$  par. Dar ejemplos sencillos.
- Distinguir los casos en que el índice es par o impar.
- Probar los teoremas referentes a la raíz aritmética.
- Examinar el caso del radicando negativo y el índice impar y las propiedades fundamentales de estas raíces.
- Partiendo de la definición de módulo de un número complejo, probar a modo de ejercicio, algunas relaciones fundamentales entre módulos.
- Definir raíz cuadrada de un número complejo; constatar que sólo hay dos raíces cuadradas de un complejo.

## **6.1.2 Reforma de 1981**

### **6.1.2.1 Objetivo de la reforma para Matemáticas**

En cuanto al objetivo de esta reforma en matemáticas, sigue siendo el foco central la resolución de ejercicios, no obstante, ahora aparece también la resolución de problemas, pero de modo amplio. La diferencia con la reforma anterior, es que ahora es el docente quien tiene la libertad de abordar el contenido, de acuerdo a los factores del contexto en el que se encuentre inmerso.

**6.1.2.2 Aplicación MIGp a la Reforma de 1981**

<p><u>6.1.2.2.1 Decreto</u></p>	<p>Decreto N° 300.                  Fecha de publicación: 30 de Noviembre de 1981                  Modificación al decreto, publicada el 11 de enero de 1984.                  La puesta en marcha de los nuevos programas queda estipulado de la siguiente forma: 1983 para primer y segundo año medio, 1984 para tercero medio y 1985 en cuarto medio</p>
<p><u>6.1.2.2.2 Características Generales</u></p>	<p>La principal característica de este programa es la gran libertad que se le da al docente en la realización para que realice selecciones y ajustes.                  En la página 14 de la revista se indica que los programas han sido reformulados con la finalidad de que el eje central sea la persona, lo que significa que la educación tiene por objeto el pleno desarrollo de la persona en las distintas etapas de su vida.                  Vidal (2009)</p>
<p><u>6.1.2.2.3 Programa seleccionado y referencia</u></p>	<p>Revista de Educación N°94, de Julio de 1985. Cuenta con 180 páginas de las cuales 3 son destinadas al Programa de tercer año medio, en matemática.</p>
<p><u>6.1.2.2.4 Secciones del programa</u></p>	<p>Unidad I                  Objetivos específicos                  Contenidos                  Unidad II                  Objetivos específicos                  Contenidos</p>

**6.1.2.3 Aplicación MACp a la Reforma de 1981**

<p><u>6.1.2.3.1 Lugar Oficial de la Potenciación y Radicación del Saber a Enseñar</u></p>	<p>A diferencia de la reforma anterior, aquí el álgebra de radicales queda estipulado en tercer año del plan común, mientras que el álgebra de potencias queda establecido en primer año de enseñanza media</p>
<p><u>6.1.2.3.2 Propósito explicitados para el contenido de Potencias y Raíces</u></p>	<p>Los objetivos generales referentes al tratamiento de radicales, extraídos del trabajo realizado por Roberto Vidal durante esta reforma, son:</p> <p>Comprender y aplicar las propiedades fundamentales de las operaciones con números reales, que le faciliten la descripción de relaciones, el análisis de situaciones y el planteo y resolución de problemas.</p> <p>Comprender y aplicar las ecuaciones de segundo grado en la solución de problemas verbales propios de la matemática y de otras ciencias, que le permitan interpretar enunciados y comunicar resultados de forma clara y precisa.</p> <p>Los objetivos específicos, que apuntan a cumplir con los objetivos generales, antes mencionados, son:</p> <p>Resolver ejercicios de multiplicación y división de potencias de base real positiva y exponente racional</p> <p>Aplicar las ecuaciones de segundo grado en la solución de problemas diversos.</p>

### 6.1.2.3.1 Organización de los contenidos

El programa presenta los contenidos por ciclos; siendo 1° y 2° correspondientes al primer ciclo, mientras que 3° y 4° el segundo ciclo.

Los contenidos para el primer ciclo, referente al álgebra de potencias, se detallan a continuación:

- Potencia exponente natural
- Potencia exponente cero
- Potencia exponente negativo
- Potencia de diez
- Notación científica

Los contenidos para el segundo ciclo, de acuerdo a lo expuesto por Roberto Vidal, se organizan en dos Unidades:

- Primer Bloque de contenidos:
  - Concepto de raíz enésima de un número real positivo.
    - Propiedades de las raíces
    - Potencias de base real positiva y exponente racional.
    - Multiplicación y división de raíces.
    - Racionalización de denominadores.
- Segundo Bloque de contenidos:
  - La función de segundo grado y su gráfico.
  - Ceros de una función cuadrática.
  - La ecuación de segundo grado; métodos de resolución.
  - Propiedades de las raíces o soluciones de una ecuación cuadrática.
  - Coordenadas del vértice de una parábola.

- Ecuaciones Irracionales reducibles a ecuaciones de primer grado y segundo grado.

#### 6.1.2.3.2 Orientaciones didácticas

No hay información

#### 6.1.2.3.3 Actividades o ejemplos propuestos

No hay información

### **6.1.3 Reforma de 1996**

#### **6.1.3.1 Objetivo de la reforma para Matemáticas**

En esta reforma, el profesor no cuenta con la libertad de acción con la cual contaba durante el proceso anterior, ahora los programas de estudio vienen con una estructura bien definida con actividades para el desarrollo de la clase y la evaluación de los aprendizajes, no dando espacios a la flexibilidad para la adaptación que pueda otorgarle el docente.

El plan de estudios también se ve modificado en esta reforma, pues agrega un programa diferenciado para tercer y cuarto año medio de educación científico-humanista. Para tercer año medio: Álgebra y modelos analíticos y, para cuarto año medio: Funciones y procesos infinitos.

### **6.1.3.2 Aplicación MIGp a la Reforma de 1996**

<p><u>6.1.3.2.1 Decreto</u></p>	<p>Decreto N° 220. Fecha de publicación: 18 de Mayo de 1998 La implementación del nuevo Programa Oficial, para enseñanza media, comienza en 1999 con primer año y finaliza en el año 2002 para cuarto año medio.</p>
<p><u>6.1.3.2.2 Características Generales</u></p>	<p>A diferencia de los programas anteriores, este documento presenta una estructura claramente definida, en la que delimita el quehacer del profesor, incorporando propósitos, contenidos, bibliografías y orientaciones metodológicas. Además de lo anterior, añade un conjunto de actividades, seguidas de otro conjunto para la evaluación, las que siguen la secuencia de actividad-ejemplo, con sus respectivos indicadores, de modo que el docente sepa qué observar para la evaluación de los aprendizajes</p>
<p><u>6.1.3.2.3 Programa seleccionado y referencia</u></p>	<p>La primera edición aparece publicada en Octubre del año 2000, para comenzar su aplicación en 2001. Consta de 127 páginas, pudiendo obtenerse en formato digital.</p>
<p><u>6.1.3.2.4 Secciones del programa</u></p>	<p>En todos los programas correspondientes a la reforma de 1996 de enseñanza media, traen el mismo formato. Sus secciones son las siguientes:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● Presentación</li> <li>● Objetivos fundamentales transversales y su presencia en el programa</li> <li>● Objetivos fundamentales</li> <li>● Cuadro sinóptico de las unidades, contenidos y distribución temporal</li> <li>● Unidades</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ Cada unidad se desarrolla en relación a dos secciones:             <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Actividades para el aprendizaje y ejemplos</li> <li>■ Actividades para la evaluación y ejemplos</li> </ul> </li> <li>● Bibliografía</li> </ul>
--	---

### **6.1.3.3 Aplicación MACp a la Reforma de 1996**

<b><u>6.1.3.3.1 Lugar Oficial de la Potenciación y Radicación del Saber a Enseñar</u></b>	<p>El contenido de potencias está establecido en primer año medio, mientras que el contenido de raíces en tercer año de enseñanza media.</p>
<b><u>6.1.3.3.2 Propósito explicitados para el contenido de Potencias y Raíces</u></b>	<p><b>Aprendizajes esperados en el programa 1º medio</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Describen ritmos de crecimiento utilizando las potencias y comparan situaciones descriptibles por adición iterada.</li> <li>- Multiplican y dividen potencias de base positiva y exponente entero, en contextos numéricos. Relacionan el cambio de signo en el exponente con el valor inverso de una potencia.</li> </ul> <p><b>Aprendizajes esperados en el programa 3º medio</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Conocen y utilizan procedimientos de cálculo algebraico con expresiones en las que intervienen raíces cuadradas y cúbicas.</li> <li>- Plantean y resuelven problemas que involucran ecuaciones de segundo grado; explicitan sus</li> </ul>

	<p>procedimientos de solución y analizan la existencia y pertinencia de las soluciones obtenidas.</p> <p>- Analizan la función cuadrática y la función raíz cuadrada en el marco de la modelación de algunos fenómenos sencillos, con las correspondientes restricciones en los valores de la variable; reconocen limitaciones de estos modelos y su capacidad de predicción.</p>
--	---

### 6.1.3.3.1 Organización de los contenidos

#### 6.1.3.3.1.1 Organización de contenidos primero medio

Unidades, contenidos y distribución temporal			
Cuadro sinóptico			
Unidades			
<b>1</b> Números	<b>2</b> Lenguaje algebraico	<b>3</b> Transformaciones isométricas	<b>4</b> Variaciones proporcionales
Temas			
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Potencias de base un entero, un decimal o una fracción positiva y exponente un entero. Multiplicación de potencias.</li> <li>• Números racionales e irracionales.</li> <li>• Resolución de problemas, estimaciones de cálculos, redondeos. Uso de la calculadora.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Operatoria algebraica.</b> Generalización de la operatoria aritmética a través del uso de símbolos. Convención de uso de los paréntesis. Reducción de términos semejantes. Sintaxis del lenguaje algebraico.</li> <li>• Demostración de propiedades asociadas a los conceptos de múltiplos, factores y divisibilidad.</li> <li>• Planteo y resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado con una incógnita.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Traslaciones, simetrías y rotaciones de figuras planas.</b></li> <li>• <b>Uso de regla y compás; de escuadra y transportador; manejo de un programa computacional que permita dibujar y transformar figuras geométricas.</b></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Gráficos de distinto tipo; interpretación y lectura.</b></li> <li>• <b>Proporcionalidad directa e inversa; constantes de proporcionalidad; su relación con un cociente o un producto constante.</b></li> <li>• <b>Resolución de problemas. Gráficos, tablas de valores y expresión algebraica.</b></li> </ul>
Distribución temporal			
Tiempo estimado: 25 a 30 horas	Tiempo estimado: 25 a 30 horas	Tiempo estimado: 20 a 25 horas	Tiempo estimado: 20 a 25 horas

Durante sus años de Educación Básica las alumnas y alumnos han aprendido acerca de los números enteros, fraccionarios y decimales, positivos y negativos. Es por esto que el propósito de esta unidad es, retomar esos conceptos y plantear fundamentalmente una profundización; que tiene como columna vertebral la resolución de problemas.

Los contenidos mínimos obligatorios para la primera unidad de números en primero medio es:

- Potencias de base positiva y exponente entero
- Multiplicación de potencias

6.1.3.3.1.2 Organización de contenidos tercero medio

Unidades, contenidos y distribución temporal			
Cuadro sinóptico			
Unidades			
1	2	3	4
Las funciones cuadrática y raíz cuadrada	Inecuaciones lineales	Más sobre triángulos rectángulos	Otro paso en el estudio de las probabilidades
Contenidos			
a. Raíces cuadradas y cúbicas. Raíz de un producto y de un cociente. Estimación y comparación de fracciones que tengan raíces en el denominador. b. Función cuadrática. Gráfico de las siguientes funciones: $y = ax^2$ $y = x^2 \pm a, a > 0,$ $y = (x \pm a)^2, a > 0$ $y = ax^2 + bx + c$ Discusión de los casos de intersección de la parábola con el eje x. Resolución de ecuaciones de segundo grado por completación de cuadrados y su aplicación en la resolución de problemas. c. Función raíz cuadrada. Gráfico de: $y = \sqrt{x}$ , enfatizando que los valores de x, deben ser siempre mayores o iguales a cero. Identificación de $\sqrt{x^2} =  x $ . d. Uso de algún programa computacional de manipulación algebraica y gráfica.	a. Sistemas de inecuaciones lineales sencillas con una incógnita. b. Intervalos en los números reales. c. Planteo y resolución de sistemas de inecuaciones con una incógnita. Análisis de la existencia y pertinencia de las soluciones. d. Relación entre las ecuaciones y las inecuaciones lineales.	a. Demostración de los teoremas de Euclides relativos a la proporcionalidad en el triángulo rectángulo. b. Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo. c. Resolución de problemas relativos a cálculos de alturas o distancias inaccesibles que pueden involucrar proporcionalidad en triángulos rectángulos. Análisis y pertinencia de las soluciones. Uso de calculadora científica para apoyar la resolución de problemas. d. Comentario histórico sobre los números irracionales; trios pitagóricos; comentarios sobre el Teorema de Fermat.	a. Variable aleatoria: estudio y experimentación en casos concretos. Gráfico de frecuencia de una variable aleatoria a partir de un experimento estadístico. b. Relación entre la probabilidad y la frecuencia relativa. Ley de los grandes números. Uso de programas computacionales para la simulación de experimentos aleatorios. c. Resolución de problemas sencillos que involucren suma o producto de probabilidades. Probabilidad condicionada.
Tiempo estimado			
30 a 35 horas	20 a 25 horas.	25 a 30 horas	25 a 30 horas

El propósito para esta unidad, según el programa de estudio es fundamentalmente que los alumnos y alumnas visualicen y comparen el tipo de crecimiento que modelan las funciones cuadráticas, raíz cuadrada y función lineal. Ello les permitirá distinguir la necesidad de utilizar un modelo u otro, frente a una determinada situación.

Los contenidos mínimos obligatorios para la primera unidad de las funciones cuadrática y raíz cuadrada son:

- Raíces cuadradas y cúbicas. Raíz de un producto y de un cociente.
- Estimación y comparación de fracciones que tengan raíces en el denominador.

#### 6.1.3.3.2 Orientaciones didácticas

Las orientaciones para el programa de primero medio viene dada por: la resolución de problemas en esta unidad, se orienta hacia el conocimiento de características y propiedades de los números racionales e irracionales; de la presencia de regularidades o patrones en el mundo de los números; de cómo las potencias facilitan la descripción de algunas situaciones numéricas relativas a incremento o crecimiento en donde las actividades de esta unidad se ordenan en torno a cinco núcleos temáticos:

a.- Actividades con situaciones que involucran potencias con base positiva y exponente entero.

b.- Actividades con situaciones que involucran números racionales, irracionales, decimales y fracciones.

c.- Actividades con situaciones relativas a patrones o regularidades numéricas.

d.- Actividades relativas a números racionales e irracionales.

e.- Actividades acerca del desarrollo histórico de los números.

Las orientaciones para el programa de tercero medio vienen dadas por: introducir el trabajo algebraico con raíces cuadradas y cúbicas, a través de situaciones que involucran no sólo la resolución algebraica, sino también el análisis del procedimiento y de las soluciones.

### 6.1.3.3.3 Actividades o ejemplos propuestos:

Las actividades para el programa de primero medio, se pueden encontrar entre las páginas 18-21, mientras que para tercero medio están en las páginas 19-28.

#### 6.1.3.3.3.1 Primero medio

##### 6.1.3.3.3.1.1 Aprendizaje esperado 1:

###### **Actividad 1**

Resolver problemas para analizar diversas situaciones que permitan visualizar ritmos de crecimiento que se pueden describir por la multiplicación o la adición iterada de un mismo número. Utilizar tablas de valores y/o diagramas de árbol para formarse una idea de los crecimientos o decrecimientos.

###### **Ejemplo A**

Eugenia llama por teléfono a tres amigas y las compromete para que al día siguiente, regalen un kilo de alimentos a un hogar de ancianos y llamen a otras tres amigas para que ellas, a su vez, al día siguiente regalen un kilo de alimentos a un hogar de ancianos y llamen a otras tres amigas y así continúen con esta cadena de solidaridad.

Si todas las personas involucradas en la cadena cumplen el compromiso y tienen que enviar el kilo de alimentos al día siguiente de recibido el llamado, ¿cuántos kilogramos de alimento recibe el hogar de ancianos al cabo de 10 días?

**Comentario:**

De acuerdo al programa de primer año medio, la forma de abordar este tipo de problema es utilizando el diagrama de árbol y/o una tabla de valores.

Se puede recurrir a la notación con potencias para expresar la cantidad de regalos al cabo de 5, 8, 10, 20 días. La resolución de este problema abre un espacio para la estimación de resultados, comentar sobre la diversidad de maneras de hacerlo y distinguir las más eficientes, con mayor aproximación, con menor riesgo de error. En el proceso de su resolución se puede incorporar el uso de la calculadora y la multiplicación de potencias.

6.1.3.3.1.2 Aprendizaje esperado 2:

**Actividad 3**

Ejercitar la multiplicación y división de potencias con base positiva y exponente entero.

Ejemplo Completar para que las igualdades sean verdaderas.

$$3^4 : 3^5 = 3^4 \times \underline{\hspace{1cm}}$$

$$8^2 \times 4 = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$(0,5)^2 : 2^{-2} = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$3 \times 10^8 \times \underline{\hspace{1cm}} = 10^5$$

**Comentario:**

Si bien estos ejercicios tienden a ser mecanicistas, se pide al docente en las indicaciones, que los dosifique de modo que el trabajo se transforme en desafíos para el pensamiento y reflexión de los estudiantes.

6.1.3.3.2 Tercero medio

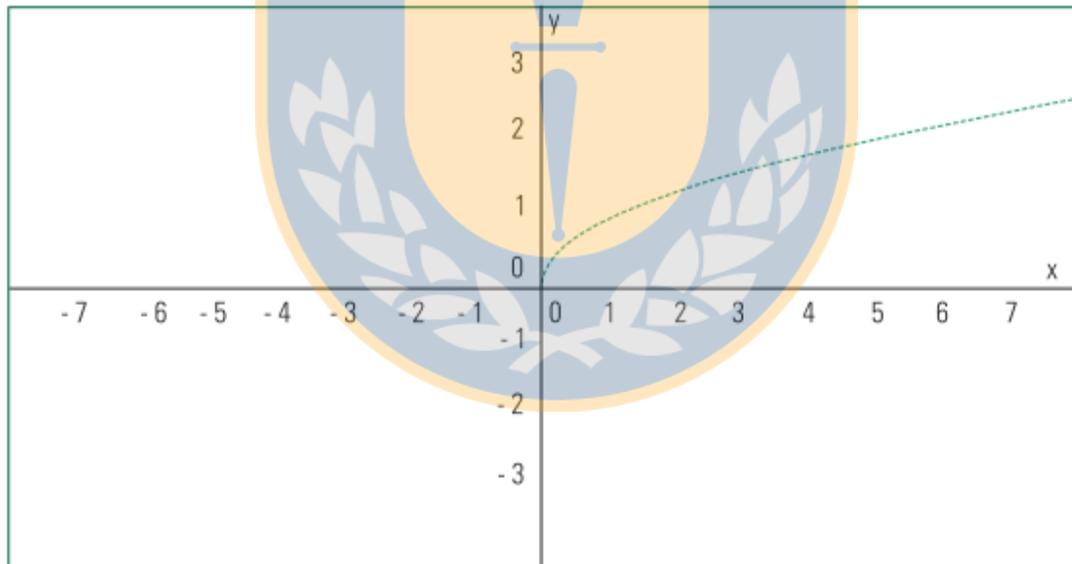
6.1.3.3.2.1 Aprendizaje esperado 1

Actividad 2

Estudian la expresión  $y = \sqrt{x}$ , como modelo de algunos fenómenos o situaciones; organizan una tabla de valores y trazan el gráfico correspondiente utilizando, preferentemente, un programa computacional de manipulación algebraica y gráfica.

Ejemplo A

Graficar y analizar la expresión  $y = \sqrt{x}$ , en que la variable  $x$  corresponde al área de un cuadrado en tanto que  $y$  corresponde a la medida del lado de ese cuadrado.



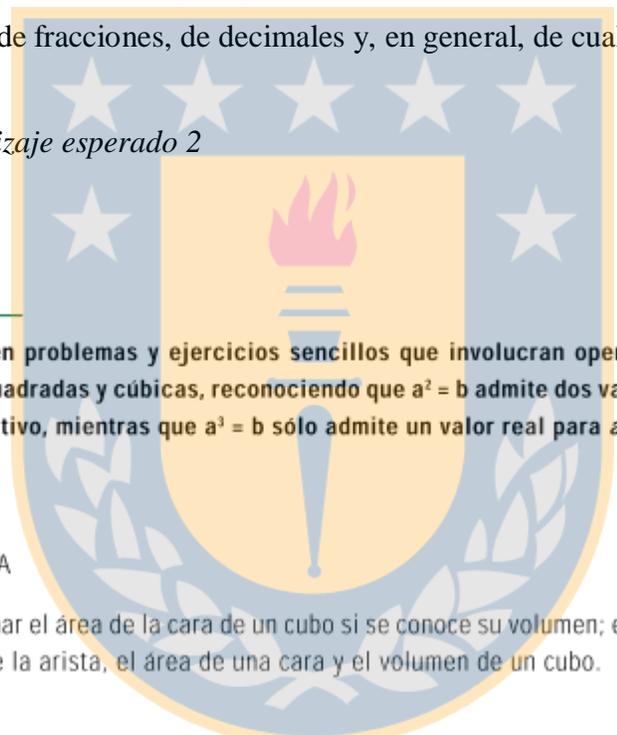
**Comentario:**

El programa de primero medio hace referencia a que los estudiantes deben analizar en el gráfico las variaciones entre los valores de las variables; si  $x$  toma los valores en  $[1,2]$ . ¿Cuál es el intervalo para  $y$ ?. Y si  $x$  varía en el intervalo  $[4, 5]$ . ¿Cuáles son los valores para  $y$ ?.

Este es un buen momento para profundizar en relación con las raíces cuadradas de números enteros, de fracciones, de decimales y, en general, de cualquier número real.

6.1.3.3.2.2 Aprendizaje esperado 2

**Actividad 4**



Resuelven problemas y ejercicios sencillos que involucran operatoria algebraica de raíces cuadradas y cúbicas, reconociendo que  $a^2 = b$  admite dos valores reales para  $a$  si  $b$  es positivo, mientras que  $a^3 = b$  sólo admite un valor real para  $a$  para cualquier valor de  $b$ .

Ejemplo A

Determinar el área de la cara de un cubo si se conoce su volumen; establecer las relaciones entre la arista, el área de una cara y el volumen de un cubo.

**Comentario**

Para el docente las indicaciones del programa con respecto a la actividad propuesta establecen que si se conoce la medida de una arista de un cubo, se supone que no habrá dificultad para calcular el área de una cara y el volumen.

Sin embargo, si la información es el volumen de un cubo, determinar el área de una cara y la medida de la arista presenta un mayor nivel de complejidad.

Partiendo de medidas numéricas se podrá llegar a establecer una tabla de relaciones como la siguiente:

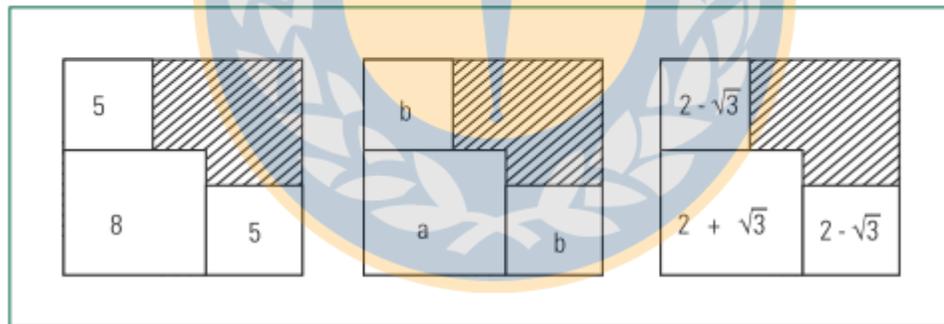
$a$	Arista	$\sqrt[3]{V}$
$a^2$	Area de una cara	$\sqrt[3]{V^2}$
$a^3$	Volumen del cubo	$V$

Este ejemplo abre un espacio para precisar acerca de las similitudes y diferencias entre las raíces cuadradas y cúbicas

#### 6.1.3.3.2.3 Aprendizaje esperado 3

##### Ejemplo C

Calcular la medida del área achurada en figuras como las siguientes, que están constituidas por un cuadrado grande en el que se han dibujado otros cuadrados cuyas áreas están indicadas.



##### Comentario:

Las indicaciones extraídas del programa de tercero medio, hacen referencia que es conveniente asociar la imagen de área y medida del lado de un cuadrado con la cuadrática y con la raíz cuadrada. Si  $x$  es el lado de un cuadrado, su área es  $x^2$ ; si  $x$  es el área de un cuadrado, su lado mide  $\sqrt{x}$ .

En general los estudiantes tienden a no reconocer como número expresiones con raíces; de ahí la importancia de utilizarlas en algunos ejemplos.

Es importante tener presente que esta visualización sólo puede representar números positivos; quedan fuera expresiones de la forma  $-\sqrt{a}$ , con  $a > 0$ .

## 6.1.4 Ajuste Curricular de 2009

### 6.1.4.1 Objetivo del Ajuste en matemáticas:

La Ley 20.370, en su artículo 30, título II: En el ámbito del conocimiento y la cultura, establece que el objetivo referente a matemática es:

Comprender y aplicar conceptos, procedimientos y formas de razonamiento matemático para resolver problemas numéricos, geométricos, algebraicos y estadísticos, y para modelar situaciones y fenómenos reales como formular inferencias y tomar decisiones fundadas.

**6.1.4.2 Aplicación MIGp al Ajuste Curricular de 2009**

<p><u>6.1.4.2.1 Decreto</u></p>	<p>Decreto supremo de Educación N°254. Modifica decreto supremo N°220 de 1998, del Ministerio de Educación, que establece los objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la Educación Media y fija normas generales para su aplicación.</p> <p>Fecha de publicación: 17 de Agosto de 2009</p>
<p><u>6.1.4.2.2 Características Generales</u></p>	<p>Este decreto establece que los nuevos planes y programas de estudio, deberán aplicarse gradualmente a partir del año 2010, comenzando en ese mismo año con primero medio, hasta el año 2013 con cuarto medio del plan general.</p>
<p><u>6.1.4.2.3 Programa seleccionado y referencia</u></p>	<p>El Programa Oficial de estudio para Tercer año medio, se publica en una primera edición en Octubre de 2015 y consta de 161 páginas.</p> <p>Por otra parte, el Programa correspondiente a Primer año medio, se publica en su primera edición el año 2011 y cuenta con una totalidad de 110 páginas.</p>
<p><u>6.1.4.2.4 Secciones del programa</u></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Presentación</li> <li>- Nociones Básicas</li> <li>- Consideraciones generales para implementar el programa</li> <li>- Matemática</li> <li>- Visión Global del año</li> <li>- Unidades</li> <li>- Semestre I</li> <li>- Semestre II</li> <li>- Bibliografía</li> <li>- Anexos</li> </ul>

**6.1.4.3 Aplicación MACp al Ajuste Curricular de 2009**

<p><u>6.1.4.3.1 Lugar Oficial de la Potenciación y Radicación del Saber a Enseñar</u></p>	<p>El contenido de potencias y raíces ahora queda establecido en primer y segundo año de enseñanza media, respectivamente.</p>
<p><u>6.1.4.3.2 Propósito explicitados para el contenido de Potencias y Raíces</u></p>	<p>Los aprendizajes esperados para esta unidad, del programa de primer año medio, los encontramos en el inicio del capítulo y son:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- AE08: Comprender el significado de las potencias de base racional y exponente entero.</li> <li>- AE09: Resolver problemas en contextos diversos que involucran números racionales o potencias de base racional y exponente entero.</li> </ul> <p>También es conveniente agregar el programa de segundo año medio, ya que está la unidad de raíces. Sus aprendizajes esperados los encontramos detallados en el inicio del capítulo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- AE07: Analizar la existencia de las raíces en el conjunto de los números reales:</li> <li>- AE08: Utilizar relaciones entre las potencias y raíces para demostrar propiedades de las raíces.</li> <li>- AE09: Establecer relaciones entre los logaritmos, potencias y raíces.</li> </ul>

### 6.1.4.3.3 Organización de los contenidos

#### 6.1.4.3.3.1 Organización de los contenidos primero medio

## Semestre 1

### Unidad 1

#### Números

##### AE 01

Distinguir problemas que no admiten solución en los números enteros y que pueden ser resueltos en los números racionales.

##### AE 02

Justificar matemáticamente que los decimales periódicos y semiperiódicos son números racionales.

##### AE 03

Establecer relaciones de orden entre números racionales.

##### AE 04

Representar números racionales en la recta numérica.

##### AE 05

Utilizar la calculadora para realizar cálculos reconociendo sus limitaciones.

##### AE 06

Verificar la densidad de los números racionales.

##### AE 07

Verificar la cerradura de las operaciones en los números racionales.

##### AE 08

Comprender el significado de las potencias de base racional y exponente entero.

##### AE 09

Resolver problemas en contextos diversos que involucran números racionales o potencias de base racional y exponente entero.

Tiempo estimado

65 horas pedagógicas

### Unidad 2

#### Álgebra

##### AE 01

Identificar patrones en multiplicaciones de expresiones algebraicas no fraccionarias.

##### AE 02

Factorizar expresiones algebraicas no fraccionarias.

##### AE 03

Establecer estrategias para resolver ecuaciones lineales.

##### AE 04

Analizar representaciones de la función lineal y de la función afín.

##### AE 05

Realizar composiciones de funciones y establecer algunas propiedades algebraicas de esta operación.

##### AE 06

Resolver problemas asociados a situaciones cuyos modelos son ecuaciones literales de primer grado.

Tiempo estimado

70 horas pedagógicas

### 6.1.4.3.3.2 Organización de los contenidos segundo medio

## Unidad 1

### Números

#### AE 01

Comprender que los números irracionales permiten resolver problemas que no tienen solución en los números racionales.

#### AE 02

Aproximar números irracionales por defecto, por exceso y por redondeo.

#### AE 03

Ordenar números irracionales y representarlos en la recta numérica.

#### AE 04

Conjeturar y verificar propiedades de los números irracionales.

#### AE 05

Comprender que los números reales corresponden a la unión de los números racionales e irracionales.

#### AE 06

Demostrar algunas propiedades de los números reales.

#### AE 07

Analizar la existencia de las raíces en el conjunto de los números reales.

#### AE 08

Utilizar relaciones entre las potencias y raíces para demostrar propiedades de las raíces.

#### AE 09

Establecer relaciones entre los logaritmos, potencias y raíces.

#### AE 10

Deducir propiedades de los logaritmos.

#### AE 11

Resolver problemas en contextos diversos relativos a números reales, raíces y logaritmos.

#### Tiempo estimado

78 horas pedagógicas

## Unidad 2

### Geometría

#### AE 01

Comprender el concepto de semejanza de figuras planas.

#### AE 02

Identificar los criterios de semejanza de triángulos.

#### AE 03

Utilizar los criterios de semejanza de triángulos para el análisis de la semejanza de figuras planas.

#### AE 04

Comprender el teorema de Thales sobre trazos proporcionales y aplicarlo en el análisis y la demostración de teoremas relativos a trazos.

#### AE 05

Demostrar los teoremas de Euclides relativos a proporcionalidad de trazos.

#### AE 06

Demostrar el teorema de Pitágoras y el teorema recíproco de Pitágoras.

#### AE 07

Identificar ángulos inscritos y del centro en una circunferencia, y relacionar las medidas de dichos ángulos.

#### AE 08

Demostrar relaciones que se establecen entre trazos determinados por cuerdas y secantes de una circunferencia.

#### AE 09

Demostrar teoremas relativos a la homotecia de figuras planas.

#### AE 10

Resolver problemas relativos a:

- el teorema de Thales sobre trazos proporcionales
- la división interior de un trazo
- teoremas de Euclides relativos a proporcionalidad de trazos

#### Tiempo estimado

62 horas pedagógicas

El propósito para esta unidad es recoger los conocimientos que los estudiantes ya poseen sobre números racionales y sus propiedades para introducir los números irracionales y posteriormente los reales. Además se incorporan las potencias de exponente racional y el estudio de sus propiedades.

Los conocimientos previos a esta unidad son: Operaciones de números racionales, potencias de base racional y exponente entero, propiedades de las potencias de base racional y exponente entero.

#### 6.1.4.3.4 Orientaciones didácticas

Según las orientaciones explicitadas en el programa ubicadas en las páginas 37-38, las indicaciones al docente sugieren que como los alumnos ya han trabajado con potencias y sus propiedades, ahora en las potencias de exponente racional:

1. Es importante que el profesor repase con ellos todas las propiedades de las potencias, pero ahora en el caso de exponente racional. Con esto, los estudiantes estarán a un paso del estudio de las raíces enésimas. Al entender las propiedades de las potencias, podrán comprender mejor las propiedades de las raíces y verificarlas.

De acuerdo a esta orientación propuesta para el profesor, podemos decir que no da certeza de cuáles fueron las propiedades antes vistas por los alumnos.

#### 6.1.4.3.5 Actividades o ejemplos propuestos

Las actividades de primero medio se ubican entre las páginas 40-42 del programa de estudio, mientras que las actividades de segundo medio vienen entre las páginas 39-45, existen ejemplos para cada aprendizaje esperado, algunos con observaciones al docente, además en la página 46 hay un ejemplo de evaluación para el AE08, con indicadores de evaluación, actividades y criterios de evaluación.

6.1.4.3.5.1 Primero medio

6.1.4.3.5.1.1 Aprendizaje esperado 1

**AE 08**

**Comprender el significado de las potencias de base racional y exponente entero.**

1

Identifican la propiedad que permite resolver potencias del tipo:

a.  $\left(\frac{a}{b}\right)^m \left(\frac{a}{b}\right)^n, m, n \in \mathbb{Z},$  o  $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^n, m, n \in \mathbb{Z}$

b.  $\left(\frac{a}{b}\right)^m \left(\frac{c}{d}\right)^n, m, n \in \mathbb{Z},$  o  $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^n, m, n \in \mathbb{Z}$

c.  $\left(\left(\frac{a}{b}\right)^m\right)^n, m, n \in \mathbb{Z}$

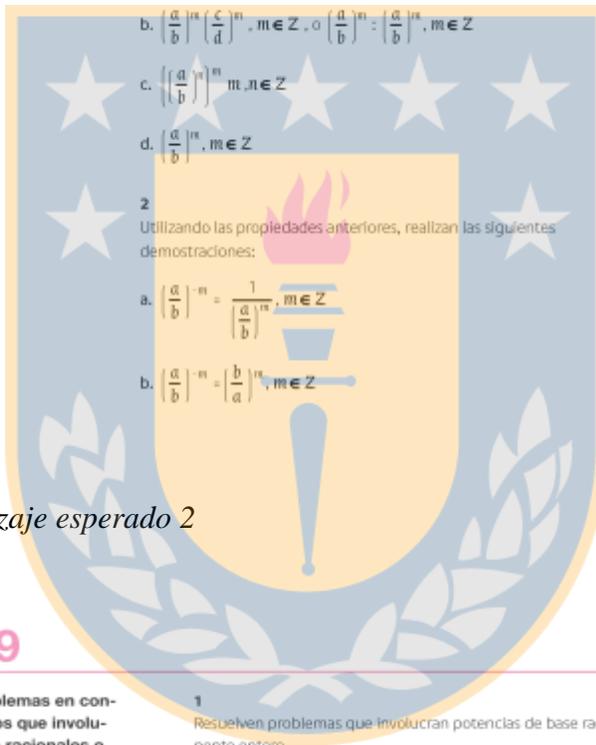
d.  $\left(\frac{a}{b}\right)^m, m \in \mathbb{Z}$

2

Utilizando las propiedades anteriores, realizan las siguientes demostraciones:

a.  $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m}, m \in \mathbb{Z}$

b.  $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m, m \in \mathbb{Z}$



6.1.4.3.5.1.2 Aprendizaje esperado 2

**AE 09**

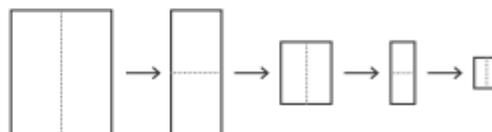
**Resolver problemas en contextos diversos que involucran números racionales o potencias de base racional y exponente entero.**

1

Resuelven problemas que involucran potencias de base racional y exponente entero.

Por ejemplo:

a. Un trozo rectangular de cartulina de lado 40 cm de largo por 30 cm de ancho se dobla sucesivamente por la mitad, según muestra la figura:



Responden preguntas como:

- ¿Cuánto medirá el área del cuadrado de la figura resultante después de hacer 8 dobleces?
- ¿Cuánto medirá el área del cuadrado resultante después de hacer n dobleces?

6.1.4.3.5.2 Segundo año medio

6.1.4.3.5.2.1 Aprendizaje esperado 1

**AE 07**

**Analizar la existencia de las raíces en el conjunto de los números reales.**

**1**  
Utilizan la definición  $\sqrt{x^2} = |x|$  para deducir que las raíces cuadradas son números mayores o iguales a cero, y determinan los valores de  $a$  para los cuales está definida  $\sqrt{a}$

**2**  
Determinan los valores para los cuales está definida  $\sqrt[3]{x}$  y el conjunto de valores que toma esta raíz.

**3**  
Determinan los valores para los cuales están definidas las raíces  $\sqrt[4]{x}$ ,  $\sqrt[5]{x}$ , y el conjunto de valores que toman estas raíces.

**4**  
Generalizan resultados de las actividades anteriores a  $\sqrt[n]{x}$  para  $n$  par o impar.

6.1.4.3.5.2.2 Aprendizaje esperado 2

**AE 08**

**Utilizar relaciones entre las potencias y raíces para demostrar propiedades de las raíces.**

A partir de las relaciones entre potencias y raíces, efectúan demostraciones como las siguientes:

a.  $\sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$ , para  $x, y$  apropiados y  $n$  natural

b.  $(\sqrt[n]{x^p})^m = \sqrt[n]{x^{mp}}$ , para  $x$  apropiado y  $m, n$  naturales

c.  $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$ , para  $x, y$  apropiado y  $n$  naturales

6.1.4.3.5.2.3 Aprendizaje esperado 3

## AE 09

Establecer relaciones entre los logaritmos, potencias y raíces.

1

Relacionan logaritmos con potencias, a partir de la definición de logaritmo.

2

Argumentan sobre la relación que existe entre raíces y logaritmos, a partir de la relación entre potencias y logaritmos y entre raíces y potencias.

### 6.1.5 Matriz de resumen y cotejo aplicada a los Programas Oficiales de Estudio

En esta matriz se presenta un resumen correspondiente al saber a enseñar según los Programas Oficiales de estudio por periodo, explicitando en primer lugar la vigencia de la fuente y el nivel de enseñanza al que corresponde, en este caso varía entre 1° y 3° medio.

En un tercer ítem, en cuanto a la secuenciación de los contenidos, se puede destacar que todas concuerdan con iniciar presentando potencia de exponente entero, seguido de raíz o radical, para terminar con potencia de exponente racional. Con respecto a cómo se introduce el contenido, en el caso de las potencia en los dos primeros periodos no se posee información por lo que se describe según la matriz como NI (no hay información), luego en los siguientes periodos ésta se introduce de manera inductiva

desde la multiplicación iterada a la potencia, con respecto a la presentación de los radicales se puede apreciar que durante los cuatro períodos analizados se utiliza como operación inversa a la potenciación; por otra parte, en los dos primeros períodos se utiliza el método deductivo, mientras que en los dos últimos períodos se aprecia el método inductivo.

Siguiendo con la descripción de la matriz en cuanto al tipo de representación que se utiliza, se observa que en los dos últimos períodos se hace uso de paréntesis y notación científica para la potenciación, en cuanto a radicales podemos destacar la prevalencia en el tiempo del signo radical y la notación de potencia con exponente fraccionario; por otra parte durante los dos últimos períodos se utiliza el valor absoluto y la notación funcional.

Con respecto a las propiedades descritas en la matriz, podemos destacar la multiplicación y la división de radicales de igual índice que se encuentran presentes en todos los programas de los períodos analizados, donde no son demostradas pero su restricción es la adecuada.

Finalmente, en cuanto a las aplicaciones tanto de potencias como de radicales se ve una mayor utilización en el teorema de Pitágoras, polinomios y productos notables para la primera y racionalización y ecuación cuadrática para la segunda.

Para una visión más detallada de lo anteriormente descrito, revisar el capítulo de anexos, la tabla N°6.

## 6.1.6 Resultados por período

### (Determinación de perfiles del Saber a Enseñar Oficial)

De acuerdo a la matriz anterior, se hará una caracterización del Saber a Enseñar Oficial, por cada período. Para tal efecto, se utilizará la tabla de doble entrada confeccionada por el Dr. Roberto Vidal, extendiéndola al álgebra de potencias; dicha tabla, contiene en su primera columna las variables del 3 al 7 de la matriz de resumen y cotejo (Mr), la segunda columna corresponde al comportamiento modal de cada programa y, la tercera al porcentaje obtenido de las fuentes consultadas. Para revisar dichas tablas, ver anexos.

En concordancia a la información proporcionada por las tablas descritas anteriormente, se genera una caracterización modal del Saber a Enseñar, de los cuatro períodos consultados. Dicha caracterización se puede apreciar en el punto 6.1.7.

## 6.1.7 Resultados de conjunto

### (Determinación de la caracterización del Saber a Enseñar Oficial)

Conclusiones derivadas de la matriz de resumen y cotejo aplicada a los programas.

La localización del saber a enseñar ha variado entre un período y otro, en el primero de ellos queda establecido en segundo año medio (esto de acuerdo a la información obtenida de la investigación del Dr. Roberto Vidal), mientras que para el segundo y tercer período los niveles son primer año medio para potencias y tercer año medio para raíces, finalmente el cuarto período designa a la unidad de potencia en primer año medio y a la unidad de raíces en segundo año medio. Lo anterior, permite

concluir que la edad propicia para el estudio de este contenido, según el Ministerio de Educación, fluctúa entre los 13 y 16 años, aproximadamente.

Como no se tuvo acceso a los dos primeros programas, se continuará guiando el análisis de acuerdo a lo que dice el Dr. Vidal sobre ellos. En este sentido Vidal establece que el primer programa ofrece pocos ejemplos que orienten la labor docente, no obstante el programa correspondiente al segundo período deja aún más vacíos en este sentido, pues deja una muy amplia libertad al profesor para desarrollar las directrices ministeriales. Todo lo anterior se ve revertido con la aparición del tercer programa el cual entrega una serie de actividades genéricas, cada una de ellas con claras indicaciones al docente incluyendo el tiempo que debiera destinarse a cada unidad y lo que debería evaluarse en cada caso. Siguiendo este lineamiento, se tiene el cuarto período el que entrega un programa aún más específico, donde se aprecian claramente las actividades propuestas relacionadas de manera inmediata con el aprendizaje esperado al cual apunta, estas actividades incluyen indicaciones al docente e indicadores de evaluación; consta también de mapas de progreso, tiempo destinado a cada unidad, además de orientaciones tanto para planificar como para evaluar.

A continuación, se mostrará un resumen con la misma estructura de la tabla anterior, pero ahora contemplando la caracterización general del Saber a Enseñar, en los cuatro periodos estudiados. Es necesario clarificar que en el caso de potencias, los porcentajes expresados y por tanto las conclusiones extraídas, vienen limitadas por aquellos programas a los que se tuvo realmente acceso, mientras que para el caso de raíces se cuenta tanto con los programas que físicamente se analizaron, como así también la información que proporciona el Dr. Roberto Vidal, en su tesis doctoral.

### **6.1.7.1 Caracterización del saber a enseñar oficial en los programas (1969 – 2015)**

En primera instancia se puede deducir que la secuenciación de contenidos es la misma para los cuatro periodos contemplados, ésta es, potencia de exponente entero seguida por raíz o radical, para terminar con potencia de exponente racional.

En cuanto a la introducción del concepto, se debe hacer una separación entre potencias y raíces, ya que son contenidos vistos en diferentes niveles. Para el primer caso encontramos con que en un 100% de los programas a los que se tuvo acceso, se introduce inductivamente, dentro del cual hay un período que además hace uso de la suma iterada. En el segundo caso, se tiene que en todos los períodos se ve como inversa de la potenciación, sin embargo, el planteamiento que se utiliza es 50% deductivo y 50% inductivo.

Al analizar los tipos de representaciones que se utilizan, se observa que para potencias se hace uso de paréntesis en el 100% del total de programas analizados directamente, esta representación apunta al trabajo con base negativa o con base racional, además en el mismo porcentaje se utiliza la notación científica como forma de representación; por otro lado, para raíces se observa que en los cuatro períodos se hace uso del signo radical y de la notación de potencia con exponente fraccionario, mientras que en los últimos dos períodos esto se ve complementado por el uso de valor absoluto y notación funcional.

En el último período contemplado, se visualizan algunas propiedades de potencias las cuales no se encuentran demostradas ni tampoco restringidas por completo. Por otra parte, se observa que en el 100% de los períodos se encuentran dos propiedades, la que son, multiplicación y división de raíces de igual índice, las que tampoco están demostradas y su restricción varía de completa a nula.

Finalmente y en cuanto a las aplicaciones de potencias, se evidencia que en un 50%, se utiliza para notación científica, teorema de Pitágoras y productos notables, mientras que un 100% lo utiliza en polinomios. En cuanto a las aplicaciones de raíces, un 75% lo usa en racionalización y otro 75% en ecuaciones cuadráticas.

## 6.2 Análisis del Saber a Enseñar en los Libros de Texto

Tal y como se mencionó anteriormente, llegados a este punto, se realizará un análisis de los libros de texto de la misma manera en que se hizo para los programas oficiales de estudio, en base a la Matriz de Análisis de Contenido (MACT) y de Identificación General (MIGt).

### 6.2.1 Reforma de 1965

Los libros analizados para este período son:

Tabla N°12: Libros de texto seleccionados primer período

N°	Año	Edición	Autor	Título	Editorial
1	1965	5	Julio Villalobos	Matemática II Medio	Universitaria
			Bélgica Parra		
2	1965	23	Francisco W. Prösche	Curso de Matemáticas Elementales. Álgebra	Imprenta y litografía Universo, S.A
3	1977	4	Carlos Mercado Schüler	Álgebra. Enseñanza media y preuniversitaria	Universitaria

Las portadas de los libros correspondientes son:



### 6.2.1.1 Caracterización Libros de Texto

#### 6.2.1.1.1 Aplicación de la MIGt para la caracterización del libro 1

Tabla N°13: MIGtL1

Campos genéricos MIGt(i), con i = 1, 2, 3, 4	Libro 1
MIGt1: Título y Procedencia	Matemáticas segundo año de educación media, distribuido por el Ministerio de educación
MIGt2: Datos de Autoría	<b>Bélgica Parra Guzmán.</b> Profesora de Metodología de la Enseñanza de las Matemáticas en el Instituto Pedagógico de la Universidad de Chile; profesora de Matemáticas en la Escuela de Medicina Veterinaria de la Universidad de Chile. <b>Julio Villalobos Corona.</b> Profesor de Metodología de la Enseñanza de las Matemáticas en el Instituto Pedagógico de la Universidad de Chile; profesor de Matemáticas en la Escuela de Agronomía de la Universidad de Chile
MIGt3: Edición y Tipo de Obra	Editorial Universitaria, S.A. Quinta edición 1970; Santiago de Chile. Este libro de texto está destinado a los alumnos de segundo año medio.
MIGt4: Presentación física	El libro de texto cuenta con 138 páginas, en hoja de roneo e impresión a color. Las dimensiones del mencionado libro son 18 cm por 26,5 cm

6.2.1.1.2 Aplicación de la Matriz MACt para la caracterización del libro 1

**MACt1: Organización de los contenidos**

En la segunda página se encuentra el índice el cual está organizado por 5 capítulos y un apéndice el cual contiene tabla con las raíces, funciones trigonométricas, valor de los logaritmos, etc. A continuación se presenta dicho índice:

Tabla N°14: Organización de los contenidos L1

Capítulo	Nombre
1	Nuevos números
2	Álgebra de los números reales
3	Funciones y ecuaciones
4	Los vectores
5	Geometría afín del plano

**MACt2: Tipo de presentación de los contenidos**

En este libro de texto se visualiza con mayor claridad la estructura axiomática, pues comienza dando definiciones para finalizar con ejercicios, en donde la mayoría se dan resueltos. Ahora, en cuanto al tipo de actividades cae en la categoría de mecanicista, ya que, presenta ejercicios de tipo rutinario, donde se necesita aplicar algoritmos. Es por todo lo explicitado anteriormente que este libro de texto queda bajo la denominación del par ordenado (A, M).

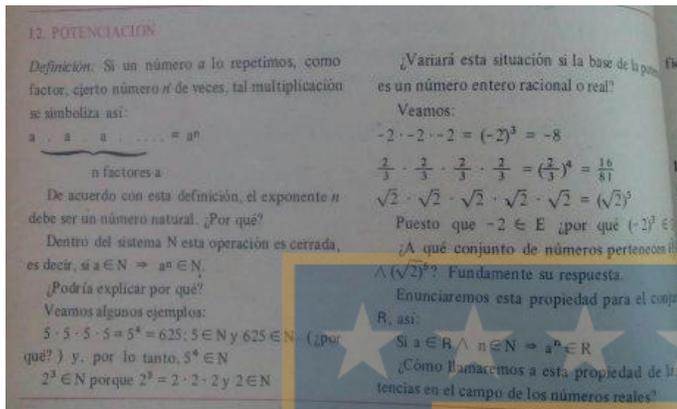
**MAcT3: Ecología de las potencias y raíces en los libros de textos**

A contar de la página 34 se encuentra el contenido de potencias y raíces, el cual se extiende hasta la página 50, lo que entrega una totalidad de 17 páginas que representan un 12,3% del libro de texto.

El contenido de potencias y raíces se encuentra estructurado de la siguiente manera:

- 1) Definición (de potencia)
- 2) Propiedades de las potencias
- 3) Ejercicios
- 4) Valores de potencias de base entera
- 5) Potencias cuyo exponente no es un número natural
- 6) Ejercicios
- 7) Radicación
- 8) Radicandos negativos
- 9) Ejercicios
- 10) Propiedades de las raíces
- 11) Ejercicios
- 12) Raíz cuadrada de un número complejo
- 13) Ejercicios

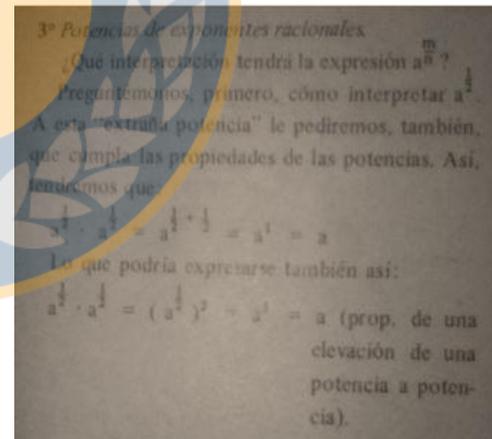
**MACT4: Presentación de raíces y potencias**



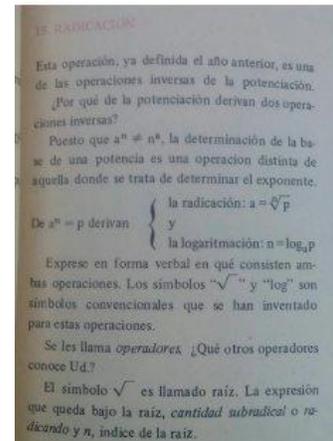
El contenido comienza con una definición de potencias, basada en la multiplicación iterada. En primera instancia restringe a los naturales al exponente y a la base, para así explicar la cerradura de esta operación. Acto seguido amplía

el conjunto para la base, de esta manera se explica que la cerradura de la operación también se amplía a los reales. Esta propiedad (clausura) no está demostrada formalmente, sino que solamente ejemplificada.

Antes de comenzar radicación, se puede ver que introduce el tema de potencias de un exponente racional, en el ítem de potencias de exponentes no naturales. Comienza a través de un ejemplo de donde se deduce la definición de raíz preguntando qué interpretación tendría la expresión, el problema es que no restringe qué valores puede tomar  $a$  ni tampoco los valores del número racional del exponente

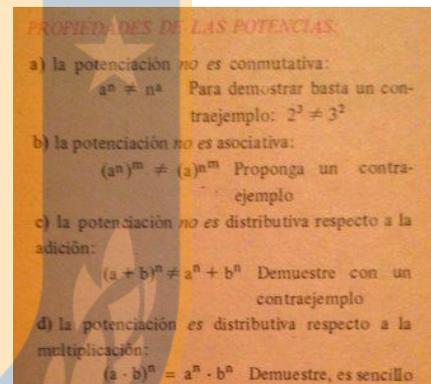


Para iniciación del contenido de raíces, afirma que es un contenido visto en años anteriores y que es una de las operaciones inversas de la potenciación.

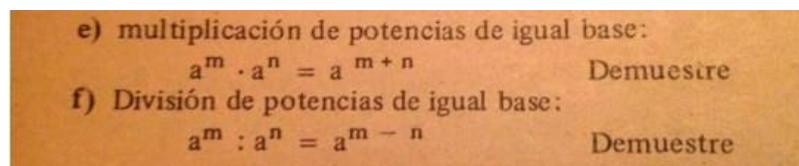


**MACT5: Tratamiento de las propiedades de potencias y raíces.**

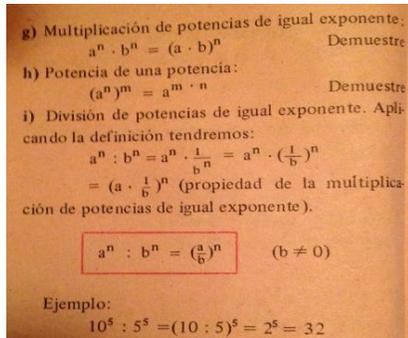
En el caso de las potencias, comienza mostrando algunas regularidades que cumplen, por ejemplo si es conmutativa, asociativa y distributiva con respecto a la suma y multiplicación. Se da un ejemplo y se pide al lector que realice las demostraciones pertinentes y/o presente algún contraejemplo.



Siguiendo con las propiedades se visualiza la multiplicación y división de potencias de igual base, las que no están demostradas y no cuentan con las restricciones pertinentes.

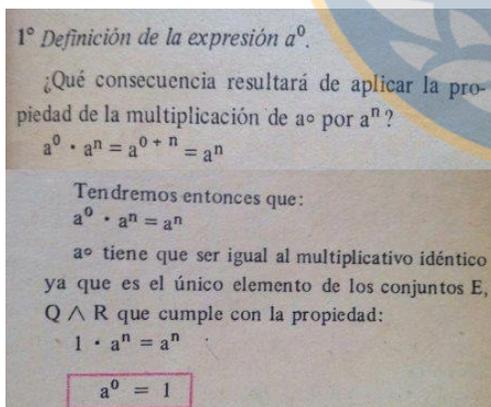
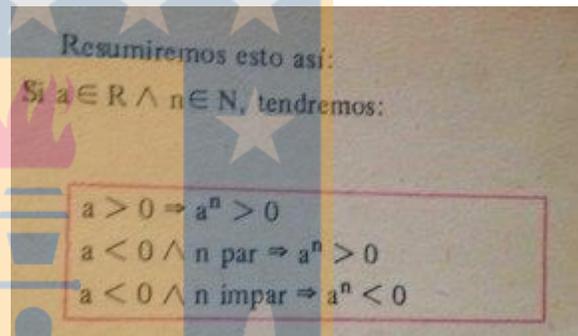


Algo parecido ocurre con las siguientes propiedades:



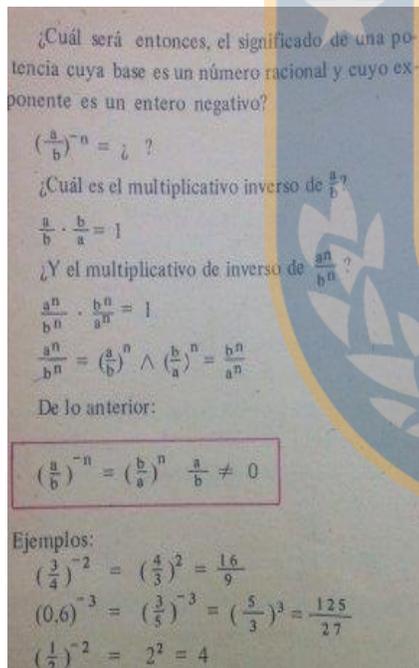
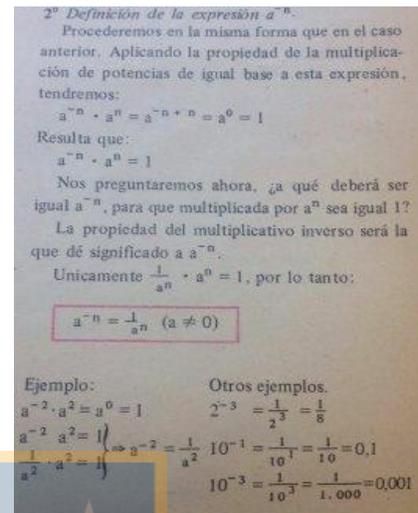
Se puede ver que en la división de potencias de igual exponente, existe algún tipo de restricción con respecto al valor del denominador pero sin embargo no especifica si el exponente es entero o racional, luego da un ejemplo en el cual se cumple dicha propiedad.

Dentro de los ítems del contenido de potencias, está el de valores de las potencias de base entera, donde analiza cada una de las opciones y restringe correctamente siendo un poco más detallista que en las propiedades antes vistas, luego las resume en el cuadro que se muestra a continuación.



La definición de la expresión  $a^0$ , está dentro del ítem potencias cuyo exponente no es un número natural, se comienza haciendo una multiplicación de potencias de igual base para luego intuir que ésta debe ser igual al neutro multiplicativo. En la presente definición no se observa minuciosamente restricciones a la base de la potencia, no especificando que  $a \neq 0$ .

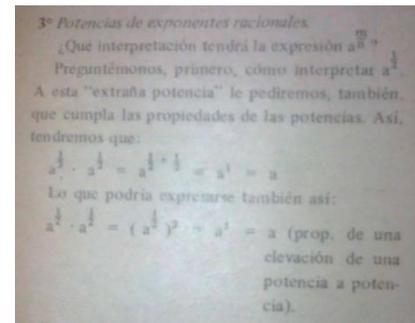
Con respecto a la secuenciación de contenidos, se encuentra en el orden correcto, pero sigue sin detallar las restricciones relativas a los literales intervinientes.



Dentro de estas mismas definiciones se encuentra la de expresión  $a^{-n}$ , la cual utiliza el mismo método que la anterior para demostrarla, además hace referencia al valor del denominador  $b \neq 0$ . Muestra además algunos ejemplos resueltos, en donde la propiedad se aplica directamente.

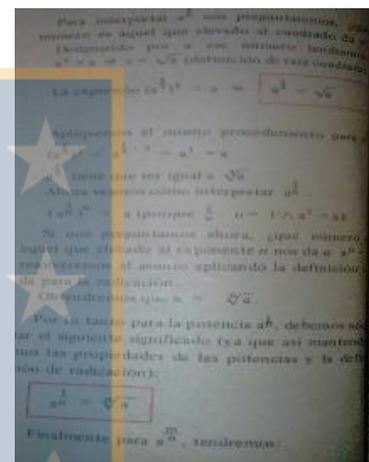
También hace la diferencia cuando la base es racional, en donde la propiedad también se cumple, la demostración es muy parecida a la anterior buscando su inverso multiplicativo, hace restricciones y luego concluye con algunos ejemplos resueltos.

Para finalizar se observan las potencias de exponentes racionales, definición que comienza preguntando cuál es la interpretación que el lector le da a la expresión  $a^{\frac{m}{n}}$  que aún hasta el momento no se tiene conocimiento.

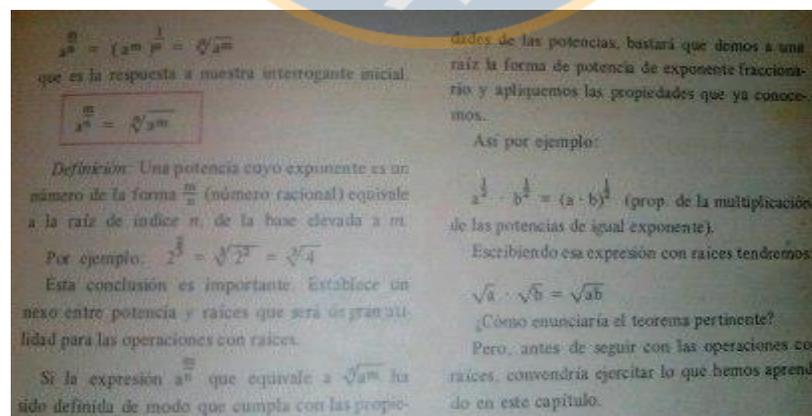


Utiliza un ejemplo en particular  $a^{\frac{1}{2}}$ , para llegar a la definición de raíz cuadrada como se muestra a continuación:

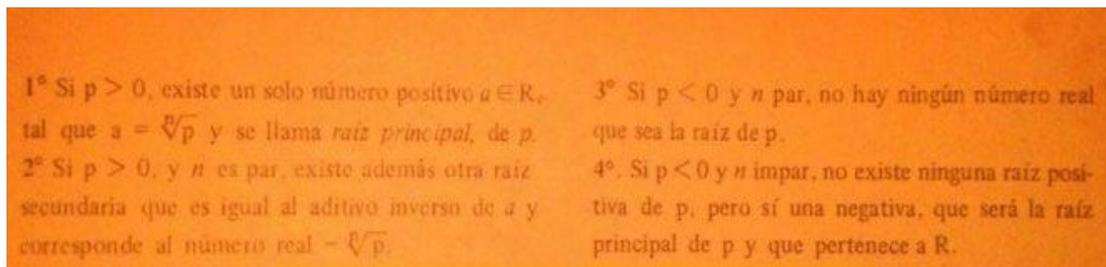
Aplica el mismo procedimiento para la raíz cúbica para luego interpretar y definir lo que sucede con  $a^{\frac{1}{n}}$  como lo muestra la imagen.



Sólo se sabe que  $n \in \mathbb{N}$ , pero con respecto al valor de  $m$ , no se conoce el conjunto con el que es válida la definición, sigue siendo poco específica con las restricciones, por lo que nuevamente son incompletas.

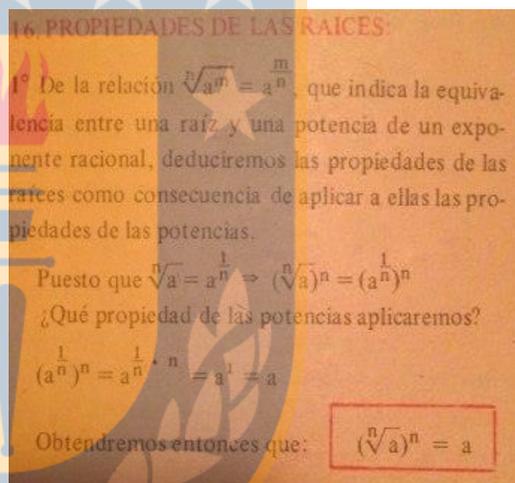


El contenido de raíces comienza en primera instancia con los radicandos negativos, utilizando restricciones en las cuales se cumplen estas definiciones.

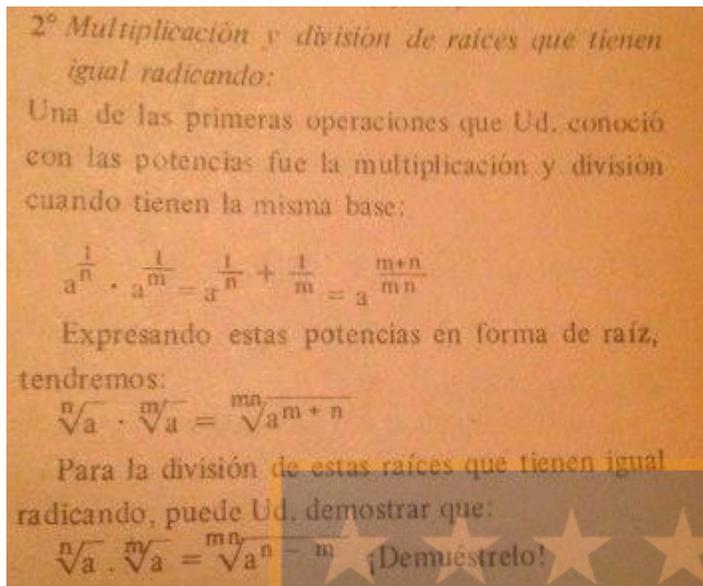


En cuanto a las propiedades, algunas están demostradas y otras se dejan de ejercicio para el lector.

La primera de ellas, no utiliza restricción alguna, por lo cual es sumamente necesario saber si el índice subradical es par o impar, para que ésta se cumpla en  $\mathbb{R}$ .



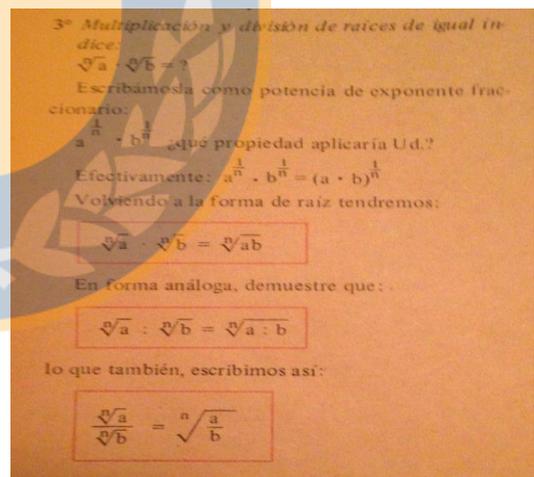
La demostración se basa en el cambio de potencia de exponente fraccionario visto anteriormente, sin ocupar la definición de radical propuesta por el autor.

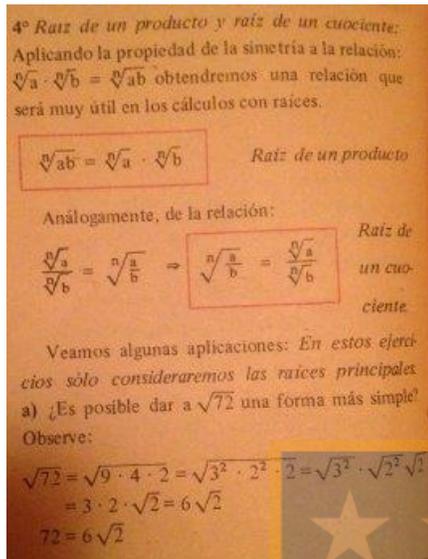


En la multiplicación y división de raíces con igual radicando, nuevamente las restricciones se encuentran ausentes, al igual que utilizar el cambio de potencias a raíz e inversamente para la demostración.

Para la división deja como ejercicio al lector la demostración y sigue con algunos ejercicios resueltos muy triviales sin mayor dificultad.

En la siguiente propiedad, multiplicación y división de raíces de igual índice sigue con la misma estructura, utilizando restricciones incompletas de los literales involucrados, ya que si el índice del radical es par la propiedad no se cumple.

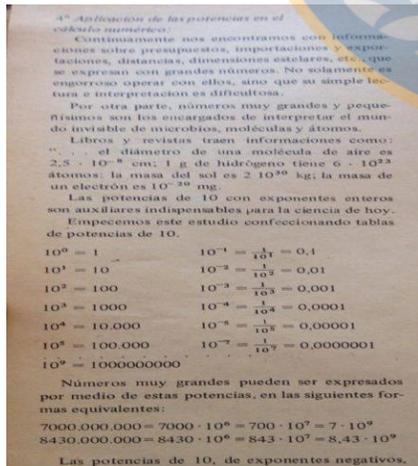




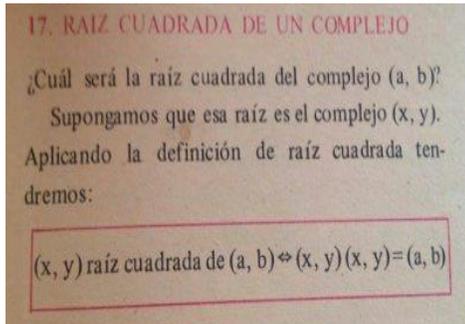
En la siguiente propiedad, raíz de un producto y raíz de un cociente siguiendo con la tónica del libro de texto no se consideran las restricciones en los literales. En la multiplicación de raíces no especifica si hablamos de números enteros o sólo naturales, en la división de raíces no especifica ni establece que  $b \neq 0$ . Finalmente da un ejemplo en donde la propiedad es válida y no muestra un real panorama si se toma un número donde esta definición no es verdadera.

**MACT6: Aplicaciones del Álgebra de potencias y radicales**

En las aplicaciones del contenido de potencias y raíces se encuentran algunas como: Notación científica, raíz cuadrada de un número complejo, notación de números imaginarios, racionalización, ecuaciones irracionales, entre otras.



Con respecto a la utilización de potencia en notación científica, ésta es sólo para el cálculo numérico, se presenta una lista de ejercicios resueltos y luego algunos para el desarrollo del lector.

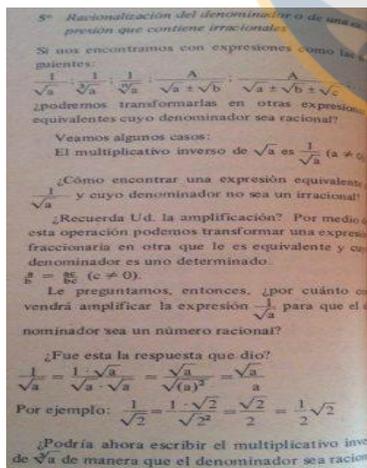
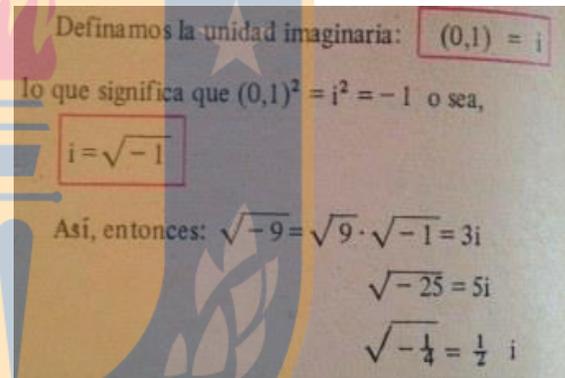


Para las aplicaciones del contenido raíces, se comienza utilizando la definición de esta para establecer la raíz cuadrada de un número complejo, la cual ejemplifica. No entrega ningún tipo de información nuevamente acerca de restricciones o campos de validez y el desarrollo

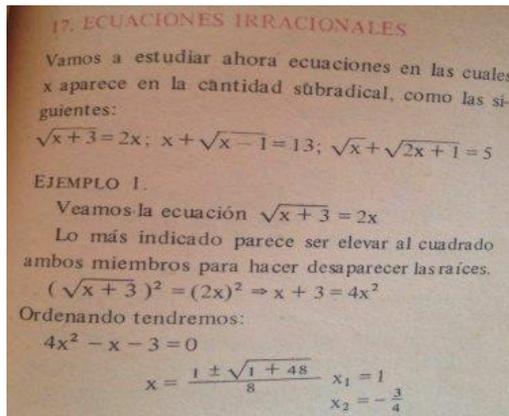
es mediante pares ordenados.

También otra aplicación en donde se utiliza raíces en la notación de números imaginarios, el cual se encuentra en el primer capítulo entre las páginas 7-16.

Para la iniciación del contenido señala que una raíz con el radicando negativo no es un número real, para lo cual es necesario definir un significado para ello y lo hace utilizando pares ordenados para luego llegar a la forma binomial y definirla posteriormente.



En cuanto a la racionalización, ésta solo la trabaja con respecto a los denominadores, se encuentra en la página 46. Las restricciones son incompletas con respecto a los literales.



Las ecuaciones con radicales se encuentran en la página 79 y utiliza el término de irracionales para decir radicales.

No existe restricción con respecto a la resolución de los ejercicios.

### 6.2.1.1.3 Aplicación de la Matriz MIGt para la caracterización del libro 2

Tabla N°15: MIGtL2

Campos genéricos MIGt(i), con i = 1, 2, 3, 4	Libro 2
MIGt1: Título y Procedencia	"Álgebra 4°,5° y 6° años de humanidades", este libro no es distribuido por el Ministerio de Educación.
MIGt2: Datos de Autoría	<b>Francisco Pröschle</b> , ex profesor de matemática en el Instituto Nacional y en la Escuela Militar.
MIGt3: Edición y Tipo de Obra	Imprenta y litografía Universo, s.a. Edición N°23. Santiago de Chile. Los niveles a los que está dirigido son: 4°,5° y 6° de humanidades.
MIGt4: Presentación física	Este libro consta de 422 páginas, cuyas dimensiones son 18,5 cm por 12,8 cm. Impreso en papel roneo, en color negro.

6.2.1.1.4 Aplicación de la Matriz MACt para la caracterización del libro 2

**MACt1: Organización de los contenidos**

En las últimas páginas del libro se encuentra el índice, el cual está seccionado en tres partes, donde cada una de ellas corresponde a un nivel de enseñanza comenzando con 4° año de humanidades en la primera para finalizar en 6° año de humanidades en la tercera. Además observamos que el libro se compone de 16 capítulos, donde 5 de ellos corresponden a la primera parte, 3 capítulos a la segunda parte y 8 capítulos a la parte final. A continuación se presentará una tabla con el nombre de cada capítulo y separado por sección:

Tabla N°16: Organización de los contenidos L2

Capítulo	Nombre
<i>Primera Parte</i>	
I	Introducción
II	Adición y sustracción
III	Multiplicación
IV	División
V	Proporciones
<i>Segunda Parte</i>	
VI	Potencias
VII	Raíces
VIII	Ecuaciones de segundo grado con una incógnita
<i>Tercera Parte</i>	
IX	Sistema de ecuaciones simultáneas de primer grado con dos y tres incógnitas
X	Algunos sistemas sencillos de ecuaciones de segundo grado
XI	Representación gráfica
XII	Logaritmos
XIII	Progresión aritmética
XIV	Progresión geométrica
XV	Interés compuesto
XVI	Anualidades

**MAcT2: Tipo de presentación de los contenidos**

La presentación de los contenidos en este libro sigue la forma de (A, M), es decir, Axiomática-Mecanicista. Es axiomática en cuanto a su estructura, pues en primera instancia entrega definiciones y teoremas, seguidas por ejemplos y finaliza con ejercicios. Cada capítulo presenta una alta cantidad de ejercicios tendientes a la mecanización o aplicación de algoritmos, es por esta razón que en cuanto al tipo de actividades, este libro queda calificado bajo la denominación de mecanicista.

**MAcT3: Ecología de las potencias y raíces en los libros de textos**

Los capítulos destinados tanto a potencias como a raíces, representan aproximadamente un 11,8% del texto. Presenta potencias en el capítulo VI y raíces en el capítulo VII. La organización interna de cada capítulo, es la que se presenta a continuación:

Capítulo VI:

- 1) Definición (de potencia)
- 2) Multiplicar potencias de igual base
- 3) Dividir potencias de igual base
- 4) Potencias de exponente cero y de exponente negativo
- 5) Multiplicar potencias de igual exponente y elevar a potencia un producto
- 6) Dividir potencias de igual exponente y elevar a potencia un cuociente o una fracción
- 7) Elevar una potencia a potencia

- 8) Signo de una potencia
- 9) Ejercicios

Capítulo VII:

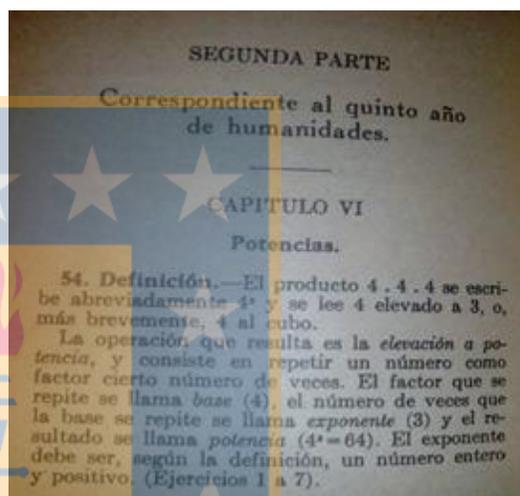
- 1) Definición (de raíz)
- 2) Extraer raíz de un producto
- 3) Multiplicar raíces de un mismo índice
- 4) Números irracionales
- 5) Extraer raíz de un cuociente
- 6) Dividir raíces de un mismo índice
- 7) Raíz de una potencia
- 8) Raíz de una raíz
- 9) Signos de una raíz
- 10) Extracción de raíz cuadrada
- 11) Ecuaciones irracionales
- 12) Ecuaciones exponenciales



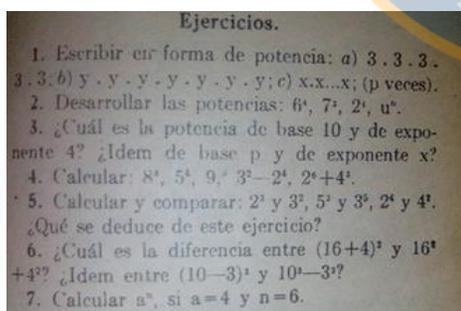
**MACT4: Presentación de raíces y potencias**

En primera instancia se analizara la presentación que hace en cuanto a potencias.

Utiliza la multiplicación iterada para realizar la introducción al contenido de potencias, para ello realiza la restricción del exponente a los enteros positivos. No hay mayores ejemplos posterior a esta definición, lo que hace es indicar al lector que los ejercicios relacionados a ella son los que se enumeran del 1 al 7, al final del capítulo, en la página 151.



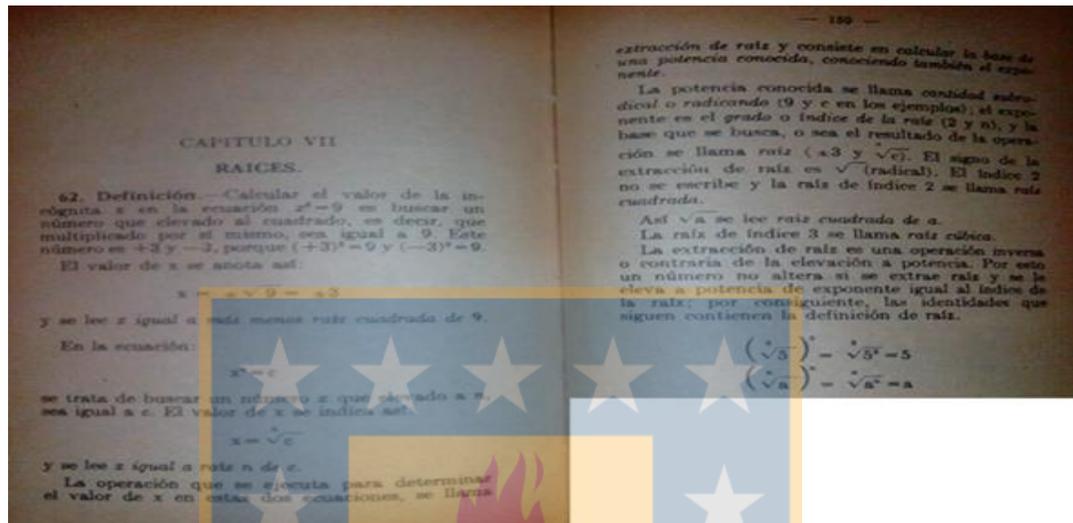
Los ejercicios a los que hace alusión el autor, son los que se presentan a continuación:



Claramente estos ejercicios están abocados a identificar base y exponente en primera instancia, luego a la aplicación de la multiplicación iterada para así conseguir el valor de la potencia y finalmente existe un tercer grupo de ejercicios en los que se busca que el lector sea

capaz de hacer comparaciones entre potencias, mediante el cálculo de las mismas.

Por otra parte, la presentación de los radicales se realiza mediante una definición denominada raíces:

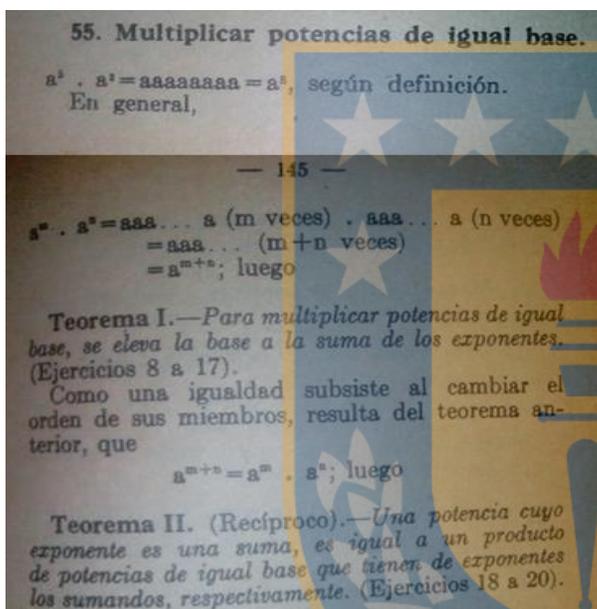


Este contenido es introducido mediante una ecuación, en donde se presenta la raíz como la solución de una ecuación.

No hace referencia al concepto de *raíz principal* o *raíz aritmética*; seguido a esto no se hacen restricciones ni para el índice, ni tampoco para la cantidad subradical. Finalmente, presenta un listado con 22 ejercicios.

**MACT5: Tratamiento de las propiedades de potencias y raíces.**

Al igual que en el ítem anterior, se realizará en primera instancia la revisión del tratamiento de las propiedades de las potencias y se finalizará con el contenido referente a radicales.



El álgebra de potenciación es introducido con la multiplicación de potencias de igual base. Se inicia con el enunciado de esta propiedad, la cual se da a conocer mediante el uso de la multiplicación iterada, sin embargo, no se hace ningún tipo de restricción para base ni exponente.

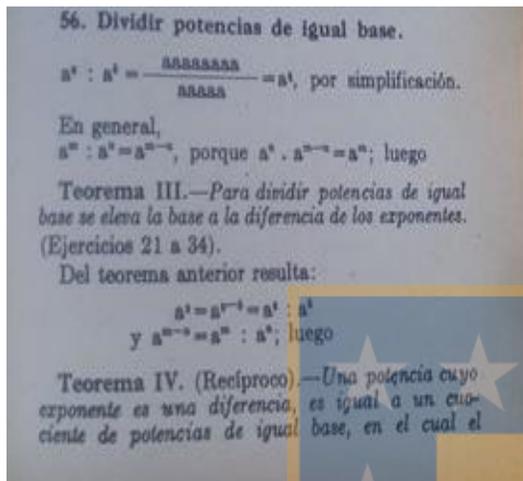
Seguido a esto, se entrega el teorema I, el cual indica que *para multiplicar potencias de igual base, se eleva la base a la suma de los exponentes*, no obstante, se sigue con un déficit de restricciones. Hay una ausencia de ejemplos bajo este teorema que clarifiquen el contenido, lo que entrega son los ejercicios del 8 al 17, entre los que destacan ejercicios como el siguiente:

Expresar en un solo cociente:

$$\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}; \quad b) \frac{1}{26x^{10}} - \frac{2}{39x^9} - \frac{3}{65x^8}$$

En el cual se necesita aplicar el teorema que aún no se enuncia, el recíproco del Teorema I.

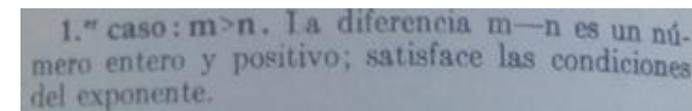
Finaliza enunciando el Teorema II, que el autor establece como recíproco del Teorema I, este teorema no se encuentra ejemplificado. Por otra parte, el autor hace referencia a los ejercicios 18, 19 y 20, los que se encuentran centrados en descomponer expresiones.



Al igual que para la propiedad anterior, la división de potencias de igual base se comienza demostrando por medio de la multiplicación iterada, para luego enunciar el Teorema III y IV. Una vez más, vemos claras falencias en las restricciones tanto para la base como para el exponente.

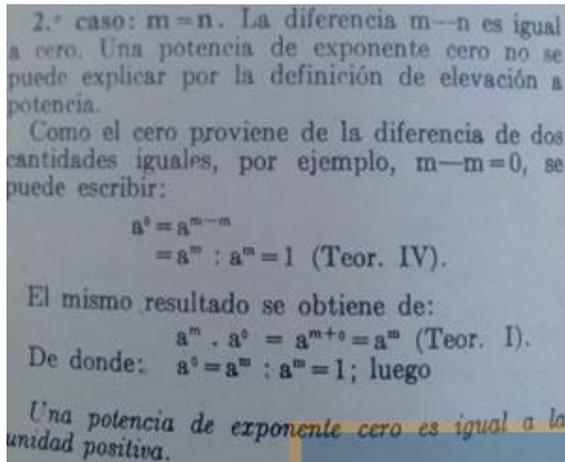
Se vuelve a apreciar la ausencia de ejemplos clarificadores para cada uno de los teoremas enunciados, en su reemplazo, se definen los ejercicios 21 a 34 para teorema III y sólo el ejercicio 35 para el teorema IV.

Este tema sigue siendo abordado más adelante pues, en el ítem siguiente clarifica tres situaciones posibles: potencia de exponente entero positivo, potencia de exponente cero y potencia de exponente negativo.

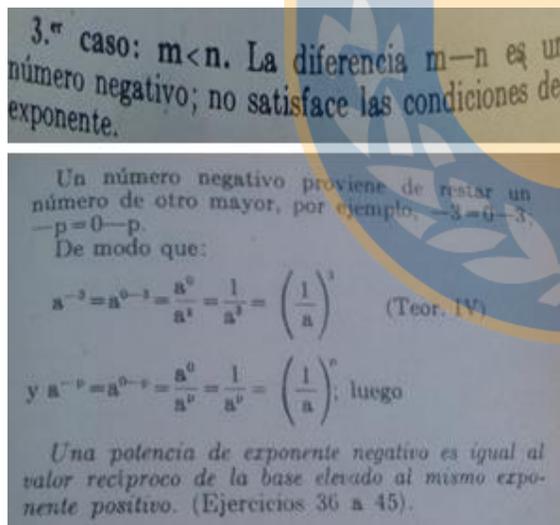


Para este primer caso no se clarifica a qué condiciones del exponente se hace

referencia, ya que, como se mencionó en su debido momento, no hay restricciones referentes al mismo. Sin embargo, por lo que se ve más adelante, se asume que al ser el exponente un número entero positivo, se aplica sin problema la propiedad  $a^m : a^n = a^{m-n}$ .



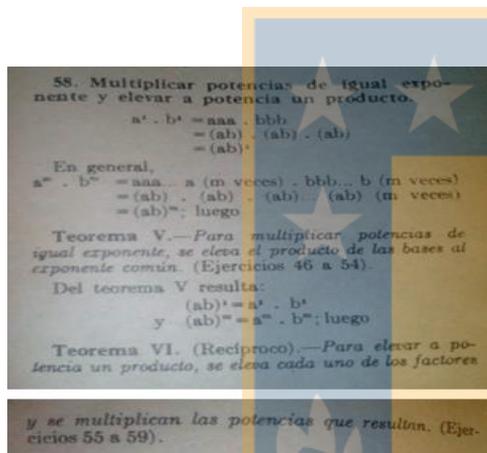
En el segundo caso, se demuestra que *una potencia de exponente cero es igual a la unidad positiva*, esta demostración la realiza aplicando el teorema IV a una potencia cuyo exponente es la diferencia de dos números iguales. Se observa que no hay restricciones para la base, por lo tanto, esta demostración es correcta para potencias con cualquier base distinta de cero. No obstante, de acuerdo a lo observado en los libros del saber erudito,  $a^0 = 1$  es una definición y no una propiedad, por lo cual no se debería demostrar, sino que solamente enunciar.



El tercer y último caso, es demostrado aplicando el Teorema IV cuando la diferencia producida en el exponente arroja un número negativo, a ese resultante le aplica la condición anterior, en donde se afirma que potencia elevada a cero es igual a la unidad positiva; todo esto desemboca en la conclusión que afirma que *una potencia de exponente negativo es igual al valor*

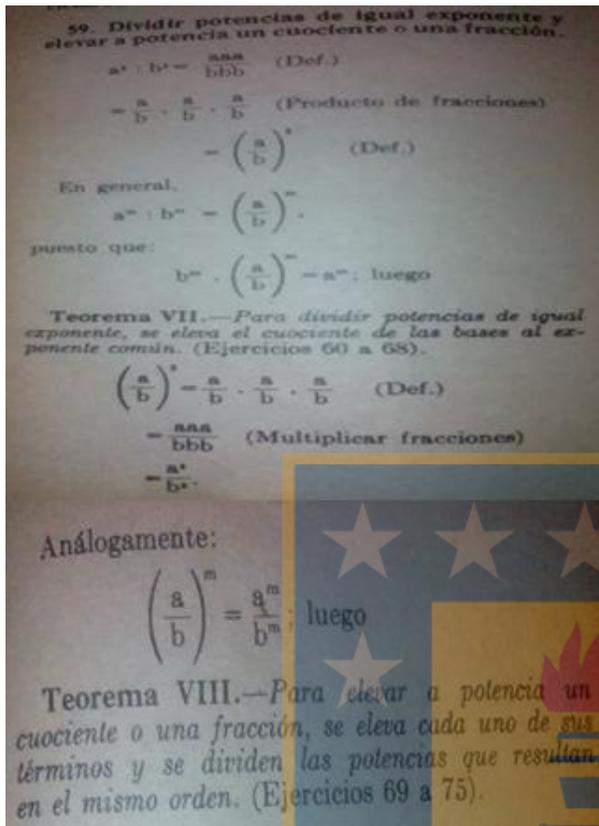
*recíproco de la base elevado al mismo exponente positivo*. Una vez más se aprecia la ausencia de restricciones para la base, ya que podría ser cero y, en ese caso, la demostración sería inválida.

La siguiente propiedad en ser expuesta es la multiplicación de potencias de igual exponente, la que es demostrada mediante el uso de la multiplicación iterada, sin restricciones ni explicaciones respecto a las propiedades utilizadas, como por ejemplo la asociatividad de la multiplicación. Posterior a esto, se enuncia formalmente el Teorema V, bajo el cual no se presentan ejemplos clarificadores, sino que se indica que deben revisarse los ejercicios 46 al 54. Finaliza con el enunciado del recíproco, el cual tampoco tiene restricciones ni ejemplos clarificadores.



Siguiendo con la misma tónica anterior, la división de potencias de igual exponente es presentada mediante la multiplicación iterada tanto para el numerador como para el denominador, no existiendo restricciones para este último. El Teorema VII formaliza esta propiedad y el Teorema VIII presenta su recíproco, ambos careciendo de restricciones para las

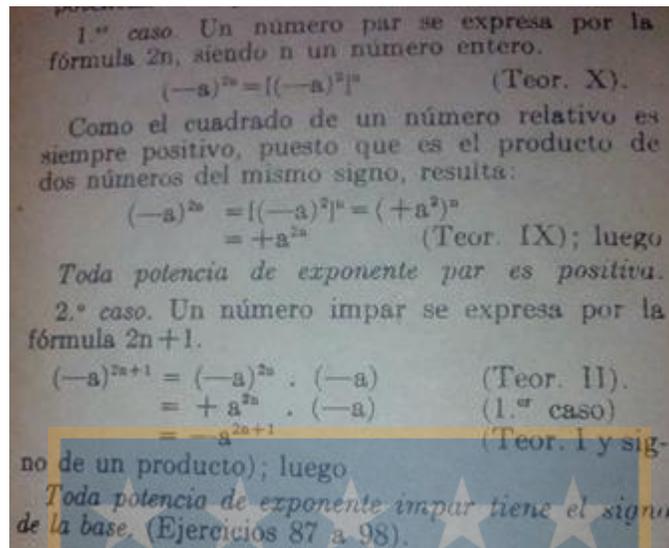
componentes de la potencia. Una vez más, no se aprecian ejemplos bajo estos teoremas, sino que indican que hay que desarrollar los ejercicios del 60 al 75.



Para introducir potencia de una potencia, aplica la definición de potencia y luego la propiedad de multiplicación de potencias de igual base a un ejemplo en particular, luego lo generaliza tal y como se muestra a continuación

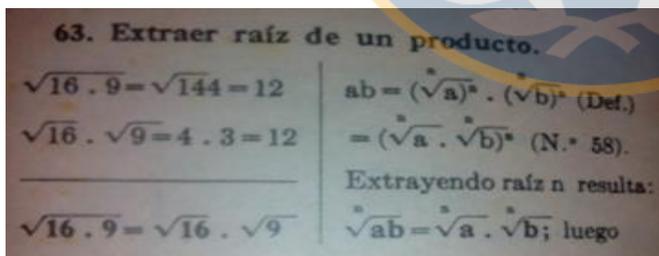
$$\begin{aligned} (a^4)^3 &= a^4 \cdot a^4 \cdot a^4 && \text{(Def.)} \\ &= a^{4+4+4} && \text{(Teor. I)} \\ &= a^{12} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (a^m)^n &= a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdots a^m \text{ (n veces)} \\ &= a^{m+m+m+\cdots+m} \\ &= a^{mn} \end{aligned}$$

El último tema tratado se denomina: Signo de una potencia, donde se clarifica que si la potencia tiene base positiva entonces su valor también es positivo, mientras que para bases negativas hace la distinción de dos casos:



En el primer caso expone que si la base es elevada a un número par, entonces la potencia resulta positiva, mientras que en el segundo caso afirma que si la base es elevada a un exponente impar, entonces la potencia conserva el signo de la base. Una vez más, no existen ejemplos clarificadores, sino que arroja los ejercicios numerados desde el 87 al 98.

El tratamiento que el autor realiza sobre los radicales, se verá a continuación:



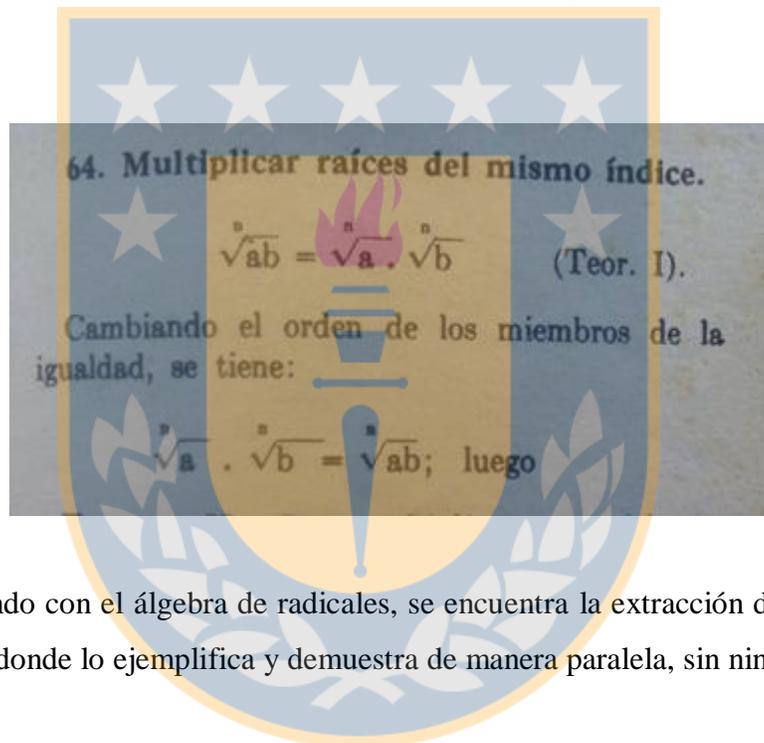
Utiliza la definición de lo que él denomina raíz para introducir la raíz de un producto, seguido de la utilización de la propiedad de potencia multiplicación de potencias de

igual exponente, lo que lo lleva a la conclusión del Teorema I que afirma que *para extraer raíz de un producto, se extrae raíz de cada uno de los factores y se multiplican las raíces que resultan*. Todo lo anterior lo hace en compañía de un ejemplo, realiza la demostración y la ejemplificación de forma paralela.

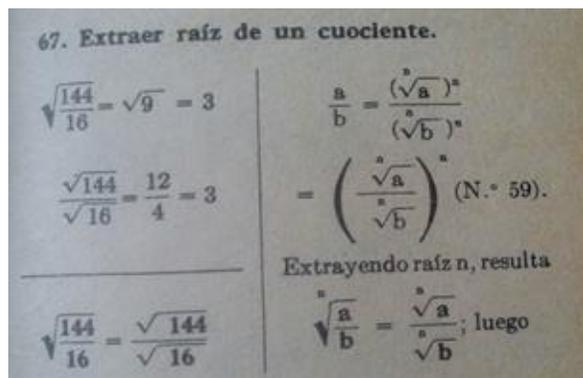
Se puede ver que no hace ningún tipo de restricciones, por lo cual toda su demostración es verdadera, siempre y cuando la cantidad subradical sea positiva.

Finaliza la presentación de esta propiedad con 16 ejercicios.

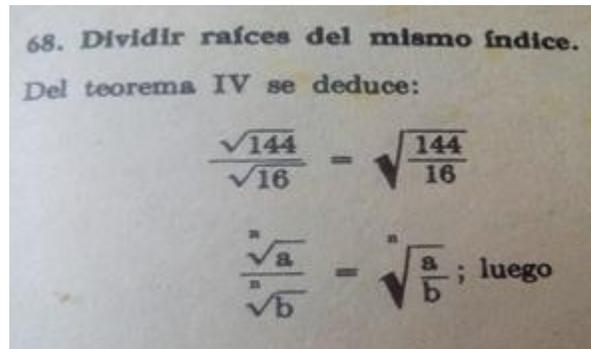
Se enuncia el Teorema II, el cual asevera que *para multiplicar raíces del mismo índice, se extrae raíz del producto de las cantidades subradicales*, una vez más sin restricciones y, presentándolo como un teorema adicional. Seguido de 21 ejercicios para el estudiante.



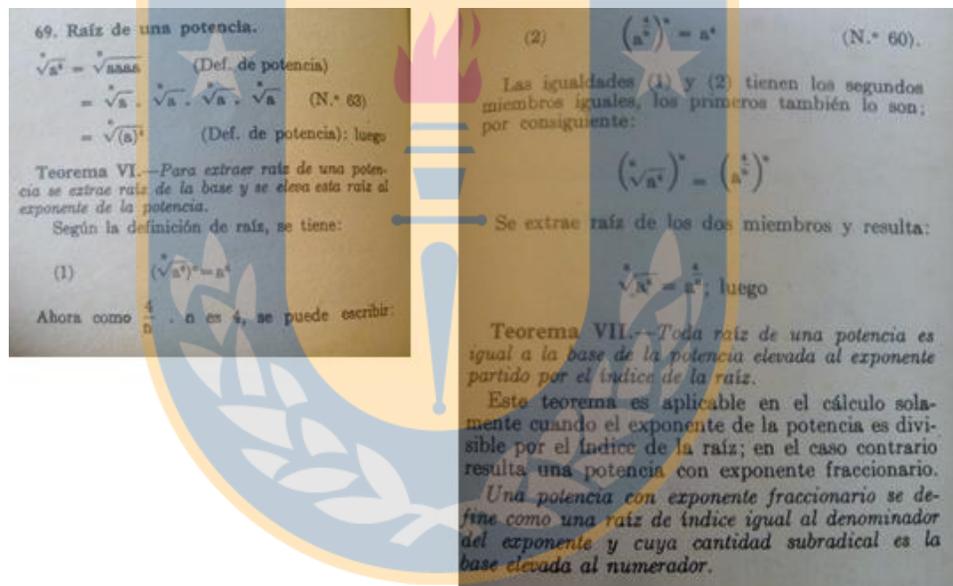
Continuando con el álgebra de radicales, se encuentra la extracción de la raíz de un cociente, en donde lo ejemplifica y demuestra de manera paralela, sin ningún tipo de restricción.



En esta demostración, además de la carencia de restricciones se puede observar que utiliza la división de potencias de igual exponente, el cual como se mencionó en su momento, tampoco posee las restricciones apropiadas.



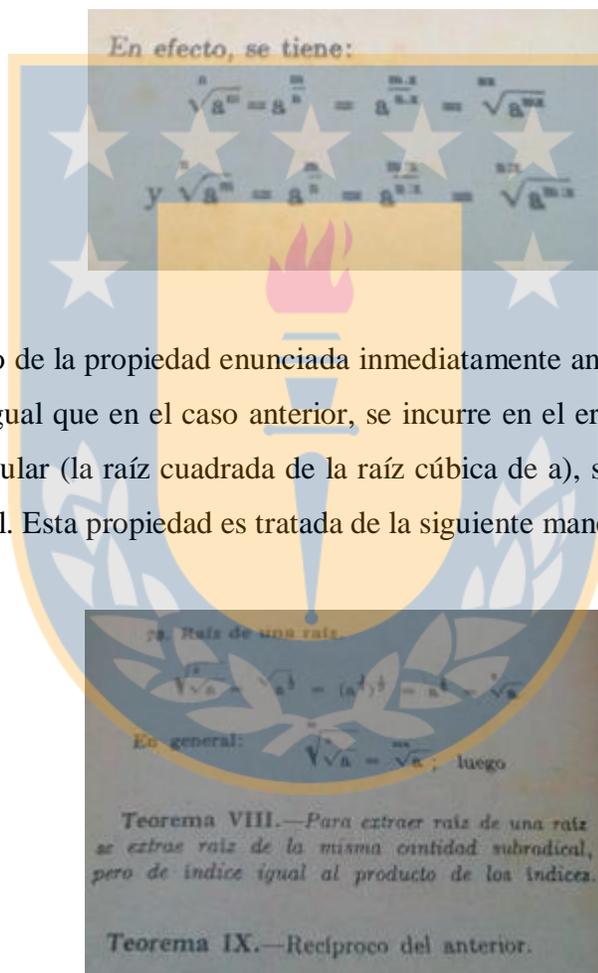
La siguiente propiedad es la Raíz de una potencia, el que es presentado de la siguiente manera:



Para la demostración de esta propiedad usa en primera instancia la definición de potencia, seguida de la propiedad que titula extraer raíz de un producto, una vez más el lector se ve enfrentado a la carencia de restricciones para los literales que actúan en la propiedad. Por otra parte cae en el error de utilizar un caso particular para la demostración (exponente igual a 4), finalmente hace uso incorrecto de la propiedad que asevera que  $(\forall a \in R)(\forall b \in R): a = b \rightarrow a^n = b^n$ , pues como se puede observar el saber matemático indica que es una condición necesaria, sin embargo, el autor la utiliza

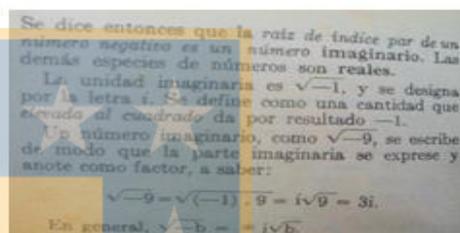
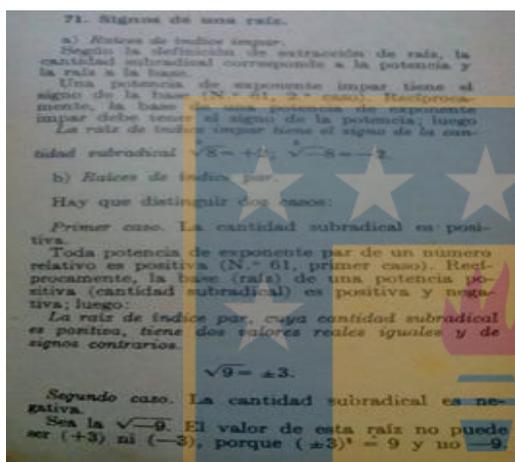
como condición suficiente al utilizarla para extraer la raíz de ambos miembros de la igualdad.

Seguido a esto formaliza el cambio de notación, de raíz a potencia de exponente fraccionario, acompañado de un listado de ejercicios que abordan la raíz de una potencia y la amplificación y simplificación de una raíz.



Haciendo uso de la propiedad enunciada inmediatamente antes, se introduce raíz de una raíz, que al igual que en el caso anterior, se incurre en el error de demostrar en base a un caso particular (la raíz cuadrada de la raíz cúbica de a), sin restricciones para la cantidad subradical. Esta propiedad es tratada de la siguiente manera:

Para tratar signos de una raíz realiza dos distinciones, la primera cuando la raíz posee un índice impar y la segunda es cuando posee un índice par. A su vez, en este último caso hace una subdivisión, primero cuando la cantidad subradical es positiva y otra cuando la cantidad subradical es negativa. La división que llama la atención aquí es la de índice par, pues presenta la raíz con doble signo tanto para radicandos positivos como negativos, esto se debe a que la trata directamente como inverso de las potencias.



No obstante lo anterior, cuando se ve el solucionario que se entrega para el listado de ejercicios propuestos, se encuentra con que en ninguna de las respuestas está con doble signo, por lo tanto, el autor cae en una contradicción que no es explicada en el texto.

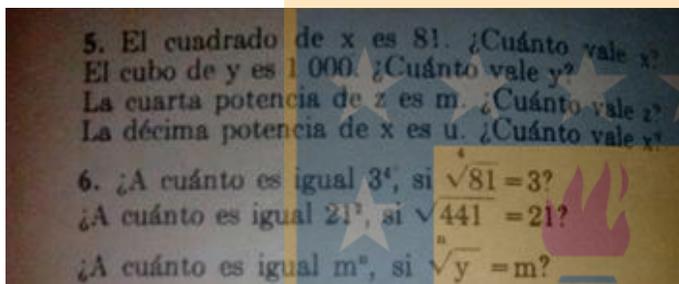
Pág. 182

4. 9	11. 2i
5. $2\frac{1}{2}$	12. si.
7. 20; 511.	13. 2
8. 4i; 6ai.	14. $-i$ ; $i$ ; $-1$ ; $1$ ; $-i$ .
9. $-5i\sqrt{3}$ ; 7i.	15. $-\frac{1}{2}$ .
10. 511.	16. $-13$ .

El siguiente tema que trata es extracción de raíz cuadrada, en el que el autor trabaja cómo calcular raíz cuadrada de números positivos a mano, por medio de algoritmos. Al realizar el cálculo de la raíz el autor no utiliza el doble signo, ¿Cuál es la razón? Tampoco está explicada en el texto.

**MACT6: Aplicaciones del Álgebra de potencias y radicales**

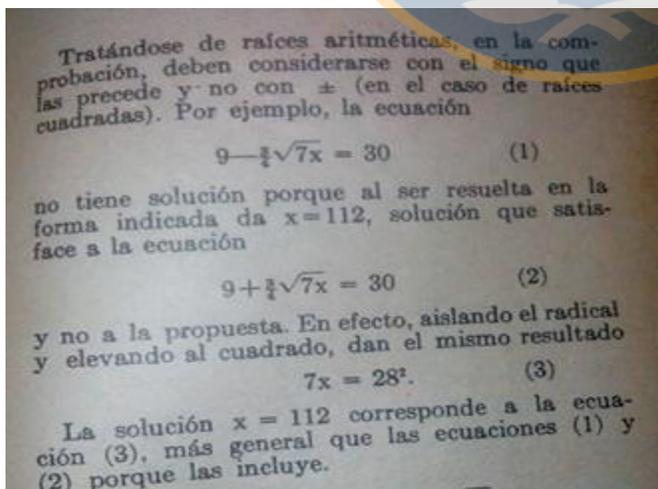
Las aplicaciones que desarrolla son cuatro: en primer lugar, a las potencias las utiliza directamente en raíces como operatorias inversas, mientras que raíces las aplica en la racionalización de denominadores, en ecuaciones irracionales y, en ecuaciones cuadráticas.



Este extracto corresponde a la aplicación de las potencias como operación inversa de las raíces.



En cuanto a la racionalización de denominadores, sólo se dan instrucciones de cómo hacerlo, pero no se entrega la teoría que existe tras esta aplicación.



Otra aplicación para raíces en el libro de texto consultado, es el de ecuaciones irracionales, en donde se enseña a aislar uno de los componentes, para luego elevar ambos miembros de la ecuación al índice de la raíz. De acuerdo, a lo observado en el ejemplo

propuesto, el autor deja el espacio para inferir que siempre será posible elevar ambos miembros de la ecuación al índice de la raíz, sin embargo en este mismo ejemplo se puede observar una contradicción a ello, pues al resolver de manera paralela ambas ecuaciones se obtiene lo siguiente:

$$(1) 9 - \frac{3}{4}\sqrt{7x} = 30$$

$$(2) 9 + \frac{3}{4}\sqrt{7x} = 30$$

$$-\frac{3}{4}\sqrt{7x} = 21$$

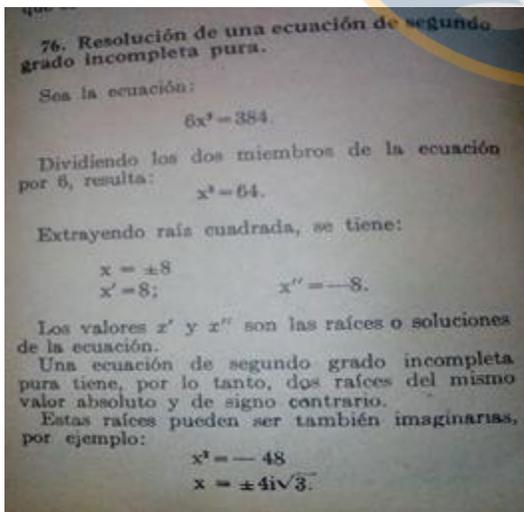
$$\frac{3}{4}\sqrt{7x} = 21$$

$$\sqrt{7x} = -28$$

$$\sqrt{7x} = 28$$

En (1) se aprecia claramente que es una ecuación, que desde el saber sabio, no tiene solución en los reales, ya que, la función raíz cuadrada tiene recorrido sólo para números reales no negativos. Es por esta razón que no se puede continuar como lo hace el autor elevando ambos miembros al cuadrado.

Finalmente, para esta aplicación se entrega un listado compuesto por 45 ejercicios, en donde 44 de ellos corresponde a raíces cuadradas, mientras que sólo uno presenta un índice distinto de 2.



Las ecuaciones de segundo grado con una incógnita son estudiadas en el capítulo VIII y ahí se vuelve a recurrir al doble signo que el autor entrega cuando hace cálculo de raíces.

6.2.1.1.4 Aplicación de la Matriz MIGt para la caracterización del libro 3

Tabla N°17: MIGtL3

Campos genéricos MIGt(i), con i = 1, 2, 3, 4	Libro 3
MIGt1: Título y Procedencia	El título de la obra es "Curso de Matemáticas Elementales I. Álgebra". Este libro no es repartido por el Ministerio de Educación.
MIGt2: Datos de Autoría	<b>Carlos Mercado Schüller</b> , profesor de Escuela Militar Bernardo O'Higgins; Facultad de Filosofía y Educación; Facultad de Química y Farmacia; Colegio Santa Ursula; Instituto Luis Campino y ex profesor de Liceo de Aplicación; Liceo Federico Hansen; Escuela Superior de Correos y Telégrafos.
MIGt3: Edición y Tipo de Obra	Editorial Universitaria, s.a. Cuarta Edición. Santiago de Chile, los niveles a los que está dirigido son enseñanza media y universitaria.
MIGt4: Presentación física	Este texto consta de 298 páginas, sus dimensiones son 26,5 cm por 18,5 cm, impreso en papel roneo, en color negro.

6.2.1.1.5 Aplicación de la Matriz MACt para la caracterización del libro 3

**MACt1: Organización de los contenidos**

En las primeras páginas del libro se encuentra el índice general, el cual está dividido en 29 unidades. A continuación se presenta la organización interna del texto.

Tabla N°18: Organización de los contenidos L3

Unidad	Nombre
1 <sup>a</sup>	Conocimientos fundamentales de conjuntos
2 <sup>a</sup>	Álgebra: Concepto y operaciones fundamentales
3 <sup>a</sup>	La Multiplicación
5 <sup>a</sup>	La División
5 <sup>a</sup>	Números racionales: Fracciones comunes y decimales
6 <sup>a</sup>	Ecuaciones
7 <sup>a</sup>	Razones y proporciones
8 <sup>a</sup>	Problema con enunciado
9 <sup>a</sup>	Potenciación
10 <sup>a</sup>	Ecuaciones exponenciales
11 <sup>a</sup>	Radicación
12 <sup>a</sup>	Ecuación cuadrática o de segundo grado.
13 <sup>a</sup>	Ecuaciones irracionales
14 <sup>a</sup>	Sistema numérico
15 <sup>a</sup>	Resumen de conocimientos de geometría
16 <sup>a</sup>	Sistema de coordenadas en el plano
17 <sup>a</sup>	Funciones: Representación gráfica.
18 <sup>a</sup>	Resolución algebraica de sistemas de ecuaciones
19 <sup>a</sup>	Interválos. Desigualdades e inecuaciones
20 <sup>a</sup>	Determinantes
21 <sup>a</sup>	Sucesiones y series
22 <sup>a</sup>	Inducción matemática
23 <sup>a</sup>	Teorema del binomio de Newton
24 <sup>a</sup>	Progresiones
25 <sup>a</sup>	Sumatoria
26 <sup>a</sup>	Análisis combinatorio
27 <sup>a</sup>	Cálculo de probabilidades
28 <sup>a</sup>	Productos binomiales especiales
29 <sup>a</sup>	Teoría de los errores

**MAcT2: Tipo de presentación de los contenidos**

En cuanto a la estructura de los contenidos esta es de la forma axiomática, mientras que de acuerdo a las actividades sigue un patrón mecanicista, esto quiere decir, que sigue la forma (A,M).

**MAcT3: Ecología de las potencias y raíces en los libros de textos**

En cuanto a su extensión, el contenido de potencias y raíces ocupa un 5,7% del total de contenidos. Potencias y raíces se ubican en la 9<sup>a</sup> y 11<sup>a</sup> Unidad respectivamente, la estructura interna de ambas está estipulada de la siguiente manera:

9<sup>a</sup> Unidad

1. Definición (de potencias).
2. Signos de una potencia.
3. Operaciones con potencias.
4. Notación científica.

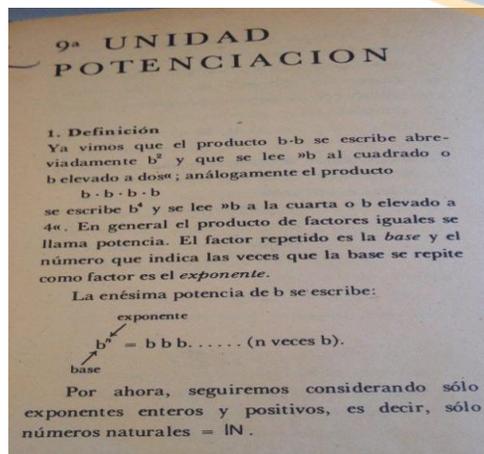
11<sup>a</sup> Unidad

1. Definición (de raíz).
2. Operaciones inversas.
3. Potencia de exponente fraccionario.
4. Transformar una raíz en potencia de exponente fraccionario.
5. Amplificar y simplificar una raíz.

6. Extraer raíz cuadrada.
7. Multiplicar raíces del mismo índice.
8. Extraer raíz de un producto.
9. Dividir raíces del mismo índice.
10. Extraer raíz de un cuociente o de una fracción.
11. Raíz de una potencia.
12. Raíz de una raíz.
13. Números racionales o irracionales.
14. Racionalización de denominadores.
15. Introducir el coeficiente de una raíz como factor del subradical.
16. Signos de una raíz.
17. Potencias de  $i$ .
18. Número complejo.
19. Ubicación de los números imaginarios y complejos.

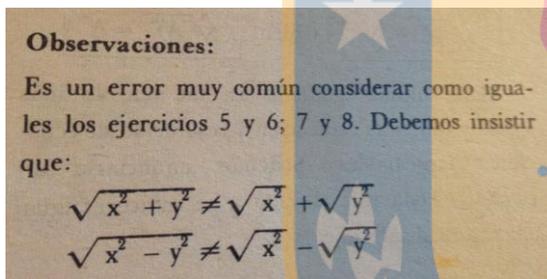
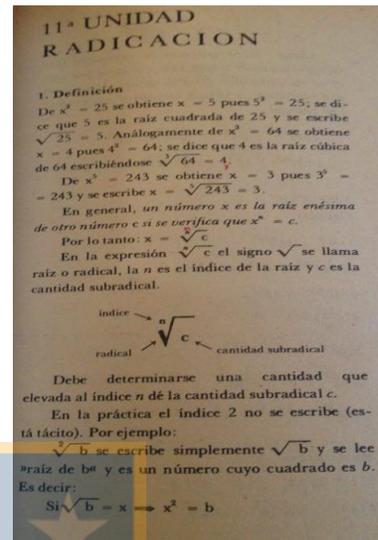
#### MACT4: Presentación de raíces y potencias

La presentación de los contenidos en la Unidad de potencias, se expresa de la siguiente forma:



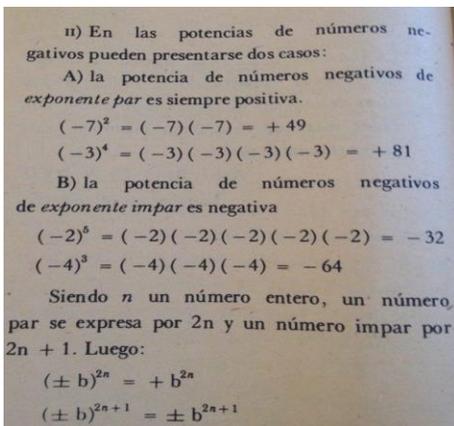
Comienza la 9ª Unidad en la página 86 del libro de texto y define potenciación con producto iterado, definiendo base y exponente dejando en claro que hasta ese momento sólo considera los números naturales.

Luego para raíces en la 11<sup>a</sup> Unidad y en la página 97, introduce el concepto como el inverso de la potencia por medio de un planteamiento inductivo, donde comienza con raíz cuadrada, raíz cúbica, raíz quinta y finalmente con raíz n-ésima. No hace restricción respecto de los literales y tampoco hace una diferencia entre raíz aritmética y raíz principal.

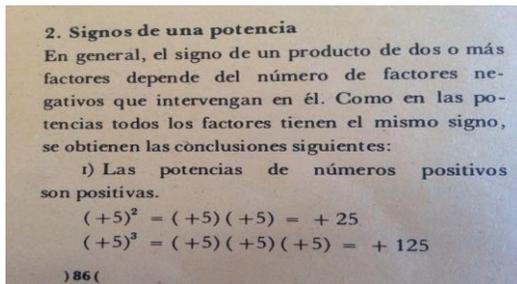


Junto con presentar el contenido, hace una observación en un error común por los estudiantes al generalizar algunas propiedades en contextos no adecuados.

**MACT5: Tratamiento de las propiedades de potencias y raíces.**



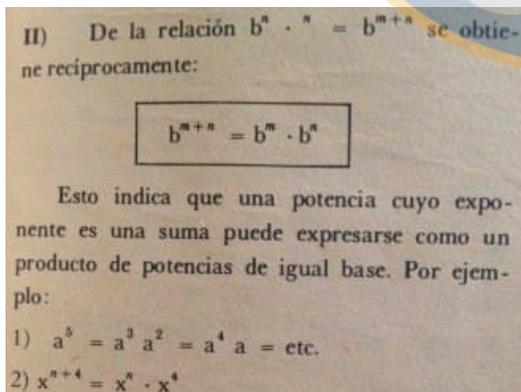
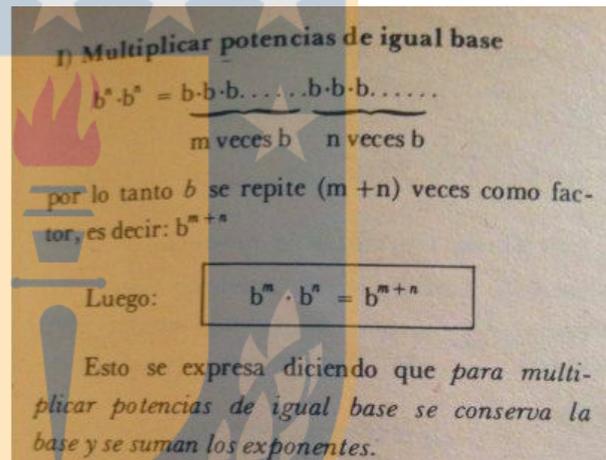
En cuanto a la presentación, demostración y uso de las propiedades de potencias, el libro de texto analizado, realiza el siguiente tratamiento:



Luego de hacer la presentación del concepto de potencia, se aboca a realizar la distinción en cuanto a los signos que puede adoptar ésta, para ello hace una separación entre potencias de números positivos y potencias de números negativos, donde esta

última se subdivide en potencias de exponente par e impar. Todo esto lo hace basándose en casos particulares, al final generaliza sólo para potencias de base entera.

Al presentar la multiplicación para potencias de igual base, lo hace por medio del producto iterado para cada una de las potencias. Si bien, no realiza restricciones respecto de los literales, existe la salvedad que al iniciar el contenido dice explícitamente *por ahora, seguiremos considerando sólo exponentes enteros y positivos, es decir, sólo números naturales*



Luego de realizar la generalización correspondiente, presenta el inverso de la propiedad anterior, esto no lo hace bajo el título ni de propiedad ni de teorema.

Siguiendo con la estructura anterior, se presenta la división de potencias de igual base y luego su recíproco. La demostración de dicha propiedad la realiza por medio de la multiplicación de potencias de igual base; lo hace de manera generalizada y sin restricciones, puesto que como ya se mencionó anteriormente ellas están hechas al inicio del capítulo.

**III) Dividir potencias de igual base**

Por ejemplo:  $b^m : b^n$ . El resultado debe ser una cantidad que multiplicada por el divisor  $b^n$  sea igual al dividendo  $b^m$ . El resultado es  $b^{m-n}$  puesto que  $b^{m-n} \cdot b^n = b^m$ . Por lo tanto:

$$b^m : b^n = \frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$$

Luego: para dividir potencias de igual base se conserva la base y se restan los exponentes (el exponente del dividendo menos el exponente del divisor).

**V) Potencias de exponente cero**

Hasta ahora hemos considerado las potencias cuyos exponentes son números enteros positivos, es decir, números naturales  $= \mathbb{N}$ .

El cero puede considerarse como el resultado que se obtiene al restar dos números iguales, por ejemplo,  $n - n = 0$ . Por lo tanto, podemos escribir sucesivamente:  $b^0 = b^{n-n} = \frac{b^n}{b^n} = 1$ , pues toda cantidad cabe en sí misma una vez.

Luego:  $b^0 = 1$

Toda potencia de exponente cero vale 1.

Como la restricción para los literales contempla sólo números naturales, para hacer la introducción al exponente cero, hace la demostración tomando dos números naturales iguales, a partir de ello consigue establecer que toda potencia elevada a cero es igual a uno, sin embargo, no hace restricción respecto a la base.

**VI) Multiplicar potencias de igual exponente**

Sea  $a^n \cdot b^n$ ; por definición se obtiene:

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ veces } a} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ veces } b}$$

Aplicando la conmutatividad y la asociatividad del producto podemos escribir el producto anterior «agrupando» una  $a$  con una  $b$  con lo cual se obtienen  $n$  factores  $(ab)$ ; es decir:

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{(ab) (ab) (ab) \cdot \dots \cdot (ab)}_{n \text{ veces } (ab)}$$

Por lo tanto:  $a^n \cdot b^n = (ab)^n$

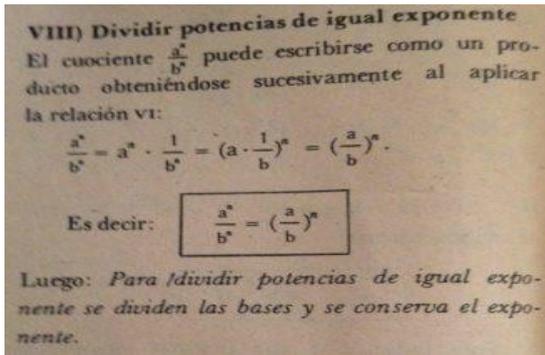
Para multiplicar potencias de igual exponente se multiplican las bases y se conserva el exponente.

El texto continúa demostrando a partir de un producto iterado la multiplicación de potencias de igual exponente.

**VII) Elevar a potencia un producto**

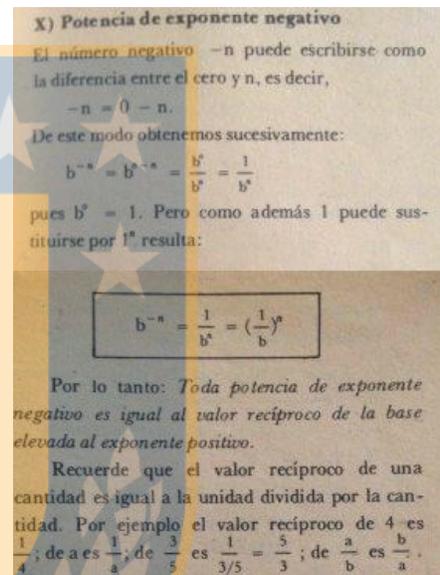
Se eleva cada factor al exponente común. En efecto, del teorema del párrafo anterior (vi)  $a^n \cdot b^n = (ab)^n$  se obtiene recíprocamente:

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

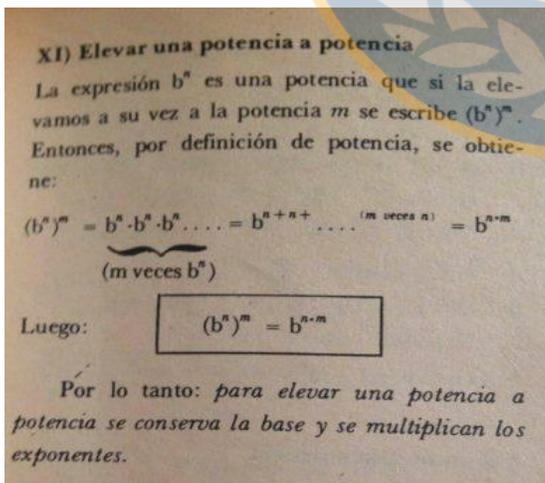


Para exponer la división de potencias de igual exponente, hace uso del teorema anterior que hace referencia a la multiplicación de potencias de igual exponente. Sin embargo, no hace las restricciones pertinentes.

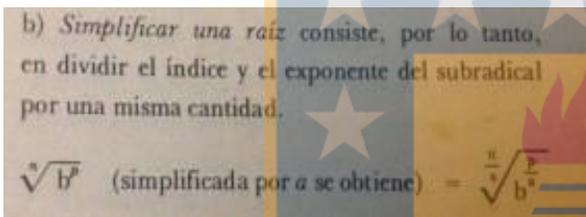
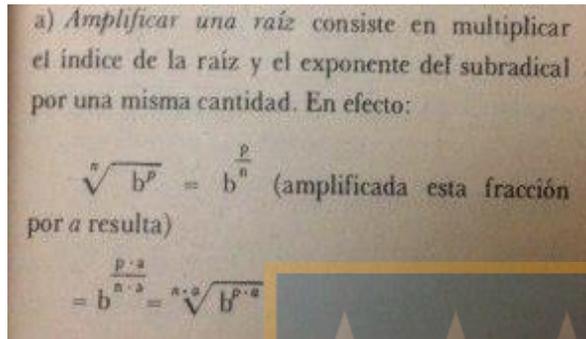
Para explicar la potencia de exponente negativo, utiliza primero el teorema de división de potencia de igual base y luego aplica el teorema de potencia elevada a exponente cero, con ellos consigue establecer que toda potencia de exponente negativo es igual al recíproco de la base elevada al exponente positivo. Al igual que para el teorema anterior, no hace restricción, por ejemplo, para establecer que la base debe ser diferente de cero.



Esta propiedad está demostrada por medio del uso de la suma iterada en el exponente, donde a partir de ella establece que para elevar una potencia a potencia se conserva la base y se multiplican los exponentes. Esta definición estaría correcta y completa si la base se tratara siempre de un número entero, sin embargo hace falta la restricción correspondiente a una base fraccionaria.



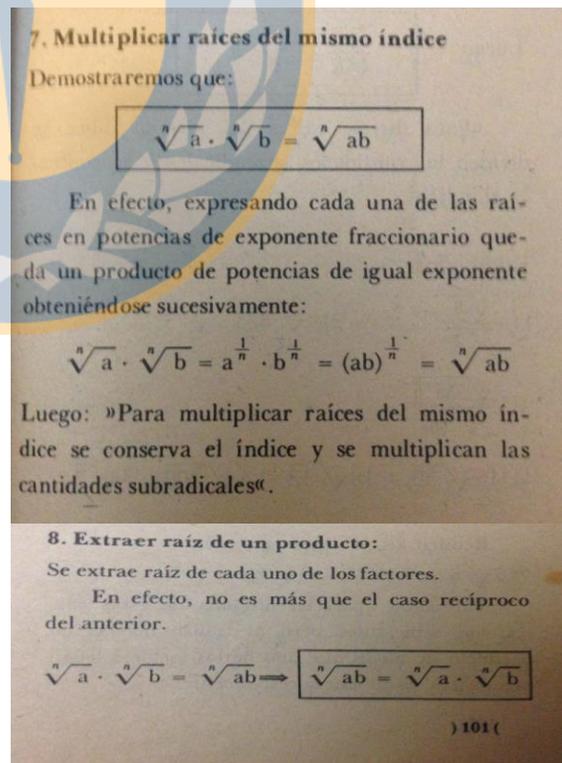
A continuación se expondrá el tratamiento que se le da al álgebra de radicales en este libro de texto:



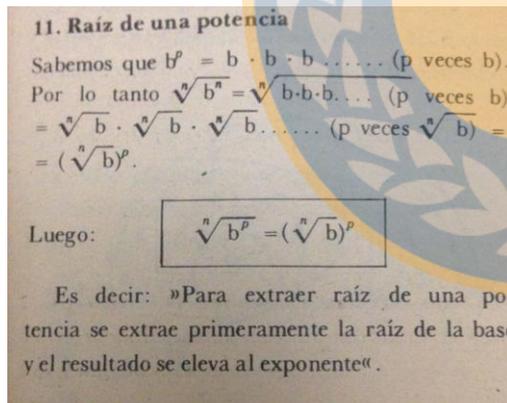
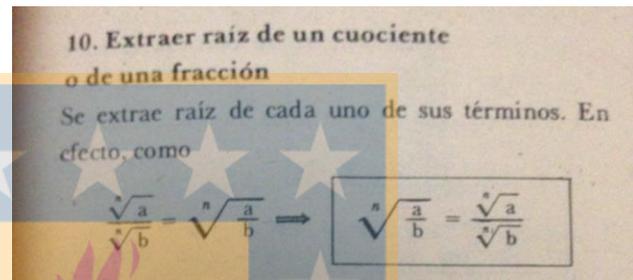
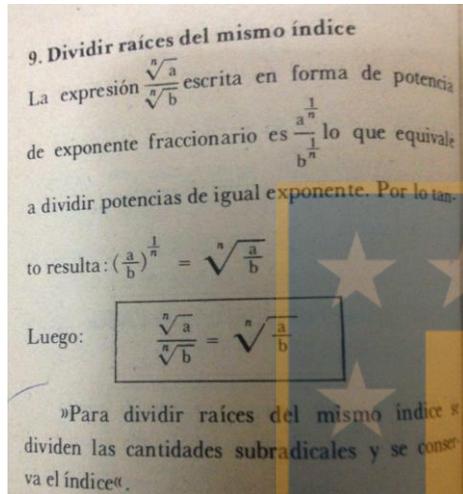
entero).

Esta propiedad es enunciada sin restricciones. Se pasa de inmediato a la demostración sin ejemplos intermedios. Se sigue un listado con ejercicios propuestos con respuestas. Todos los ejercicios propuestos son numéricos, con radicandos positivos.

Para amplificar o simplificar una raíz, usa la notación de exponente fraccionario del radical, sin realizar las restricciones correspondientes. Por ejemplo para la transformación a potencia de los radicales (que requiere que la base corresponda a los números reales positivos) o para la amplificación de radicales (la cual requiere que el índice sea un número

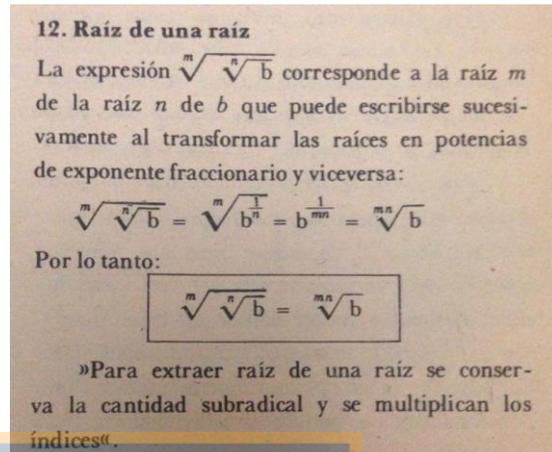


Para demostrar las propiedades 9 y 10, utiliza el mismo procedimiento que para las dos propiedades anteriores, cometiendo los mismos errores de restricción, conceptual y notación.



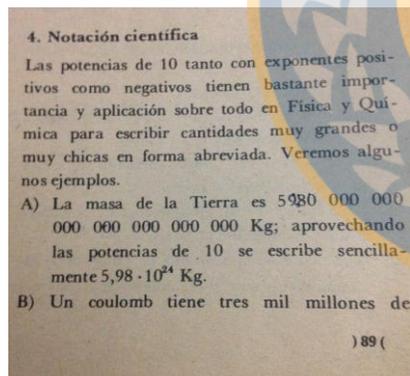
Siguiendo con la unidad de raíz, se aprecia que nuevamente no hace restricciones de los literales.

Nuevamente los ejemplos no están propuestos en este teorema, así como tampoco sus restricciones pertinentes.



**MACT6: Aplicaciones del Álgebra de potencias y radicales**

Las aplicaciones que se muestran en este libro de texto, para el caso de potencia son:



Notación científica, donde propone 24 ejercicios y 4 ejemplos, sin embargo, no se ahonda en el procedimiento que se debe seguir para escribir un número en dicha notación.

División de binomios especiales, lo cual es una división sintética; contenido en el que presenta 9 ejercicios y presenta al menos un ejemplo resuelto completamente, además hace referencia a un contenido tratado con anterioridad.

**XII) División de binomios especiales**  
 Ya vimos que, en general, un polinomio en  $x$  es divisible por  $(x - a)$  cuando se anula para  $x = a$ . Por ejemplo el polinomio  $3x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x - 26$  será divisible por  $(x + 3)$  si se anula para  $x = -3$ . Para esto basta sustituir este valor en el polinomio dado obteniéndose:  
 $3(-3)^4 - 2(-3)^3 + (-3)^2 - 5(-3) - 26 = 243 + 54 + 9 + 15 - 26 \neq 0$ . Es decir, no se anula el polinomio para  $x = -3$  y, por lo tanto, el polinomio no es divisible por  $(x + 3)$ .  
 Veamos si es divisible por  $(x - 2)$ ; para esto se sustituye  $x = 2$  resultando:  
 $= 3(2)^4 - 2(2)^3 + (2)^2 - 5(2) - 26 = 48 - 16 + 4 - 10 - 26 = 0$ . Es decir, se anula el polinomio para  $x = 2$  y, por lo tanto el polinomio es divisible por  $(x - 2)$ .  
 Efectuando la división como se vio en la página 48 se obtiene sucesivamente:

$$\begin{array}{r} (3x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x - 26) : (x - 2) = 3x^3 + 4x^2 + 9x + 13 \\ -3x^4 + 6x^3 \\ \hline + 4x^3 + x^2 \\ -4x^3 + 8x^2 \\ \hline + 9x^2 - 5x \\ -9x^2 + 18x \\ \hline + 13x - 26 \\ -13x + 26 \\ \hline 0 \end{array}$$

Con esto el polinomio dado puede expresarse en producto quedando:  
 $3x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x - 26 = (3x^3 + 4x^2 + 9x + 13)(x - 2)$

Con respecto a las aplicaciones con raíces se pueden observar las siguientes:

**10ª UNIDAD ECUACIONES EXPONENCIALES**

1. Definición  
 Las ecuaciones que tienen la incógnita en el exponente. Hay algunas ecuaciones que parecen sencillas y, más adelante, después de estudiar las propiedades fundamentales sobre esas cosas, se verá su importancia.

Una potencia con igual base y exponente iguales a una potencia igual.  
 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$   
 $a^m : a^n = a^{m-n}$   
 $a^m = a^n$  si y sólo si  $m = n$ .

Una potencia con igual base y exponente iguales a una potencia igual y para resolver una de ellas se debe determinar la igualdad de los exponentes. Esto es correcto siempre que las bases no sean el cero, el uno o el negativo.

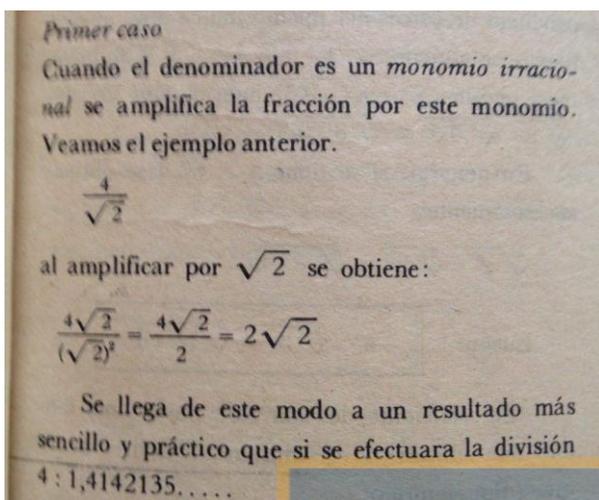
En otros casos:  
 $2^x = 1 \Rightarrow x = 0$   
 $2^x = 0 \Rightarrow$  no tiene solución.  
 $2^x = 10 \Rightarrow x = \log_2 10$

2. Ejemplos  
 Resolvamos las ecuaciones siguientes sin ayuda de los logaritmos:  
 a)  $2^{2x} = 2^{x+1} - 2^{x-1}$

Dividamos ambos miembros que aquí se resuelve una igualdad de dos potencias de la misma base una es producto de potencias de igual base que es igual a un exponente entre potencias de igual base. De esta igualdad debemos obtener la igualdad de dos potencias de la misma base y de ahí deducir la igualdad de los exponentes respectivos.

En nuestro ejemplo se obtiene aplicando

Ecuaciones irracionales, las cuales define como aquellas en que la incógnita aparece como cantidad subradical. Entrega algunas indicaciones para la resolución de ejercicios y resuelve 2 ejemplos, donde no se puede apreciar el método ni qué tipo de condiciones utilizó para resolverlas.



Otra aplicación corresponde a la racionalización sólo de denominadores, lo que se fundamenta con que calcular una fracción del tipo  $\frac{2}{\sqrt{5}}$  resulta más sencillo al utilizar este método.

### 6.2.1.3 Perfil del Saber a Enseñar primer período (1969-1981)

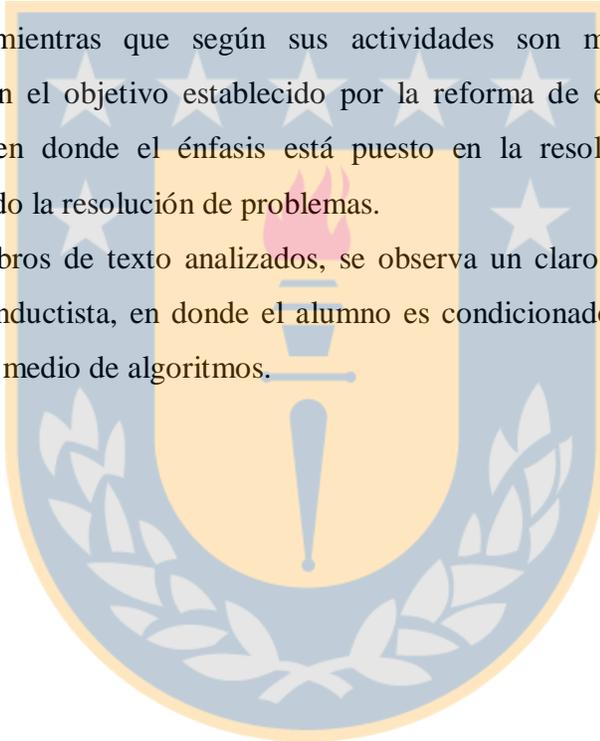
De acuerdo a la información analizada mediante la matriz de resumen que se puede encontrar en la sección de anexos, bajo el número 19 y, la tabla de doble entrada N°20, se construirá el perfil del saber a enseñar correspondiente al primer período. Este perfil será caracterizado de acuerdo al comportamiento modal observado en cada ítem de las matrices contempladas.

En cuanto a la información proporcionada por las matrices de identificación general, se destacan los siguientes aspectos:

1. Los tres libros de texto analizados en este período corresponden a obras nacionales, de los cuales uno de ellos está dirigido a estudiantes de segundo año medio y, es entregado gratuitamente por el Ministerio de Educación, mientras que los otros dos son cursos elementales de álgebra, no distribuidos por dicho agente educativo.
2. El 100% de los autores de los libros de texto analizados poseen el título de pregrado de Profesor de Matemática, mientras que sólo dos de ellos poseen

estudios de post grado, teniendo a su haber el título de Profesor de Metodología de la Enseñanza de las Matemáticas

3. Un 66,6% de los libros de textos analizados corresponden a ediciones de Editorial Universitaria, mientras que el otro tercio corresponde a la Imprenta y Litografía Universo, la que actualmente no existe.
4. En cuanto a la presentación física de las obras, se observa que todas ellas son impresas en papel roneo e impresas casi en su totalidad con tinta de color negro.
5. La presentación de contenidos de todos los libros de texto siguen una estructura axiomática, mientras que según sus actividades son mecanicistas lo que concuerda con el objetivo establecido por la reforma de este período para la matemática, en donde el énfasis está puesto en la resolución de ejercicios dejando de lado la resolución de problemas.
6. En los tres libros de texto analizados, se observa un claro predominio de una formación conductista, en donde el alumno es condicionado a la resolución de ejercicios por medio de algoritmos.



### 6.2.2 Reforma de 1981:

Los libros de texto contemplados para esta reforma son:

Tabla N° 21: Libros de texto seleccionados segundo período

N°	Año	Edición	Autor	Título	Editorial
1	1983	13	Aurelio Baldor	Álgebra	Publicaciones cultural
2	1985	2	Carlos Mercado	Matemática 1° Medio	Universitaria
3	1997	1	Gonzalo Riera Lira	Matemática aplicada. 1° Medio	Zig - Zag

Las portadas de dichos libros de texto son las que se presentan a continuación:



### 6.2.2.1 Caracterización Libros de Texto

#### 6.2.2.1.1 Aplicación de la Matriz MIGt para la caracterización del libro 1

Tabla N°22: MIGtL1

Campos genéricos MIGt(i), con i = 1, 2, 3, 4	Libro 1
MIGt1: Título y Procedencia	El título de la obra es "Álgebra". Este libro no es repartido por el ministerio de Educación.
MIGt2: Datos de Autoría	<b>Dr. Aurelio Baldor.</b> fundador, director y jefe de la cátedra de matemáticas del colegio Baldor, Habana, Cuba. Jefe de la cátedra de matemáticas, Stevens Academy, Hoboken, New- Jersey, USA. Profesor de matemáticas, Saint Petter's College, Jersey city, New-Jersey.
MIGt3: Edición y Tipo de Obra	Compañía Cultural Editora y Distribidora de textos americanos, S.A. México. Obra aprobada y recomendada como texto para los institutos de la segunda enseñanza de la república por el Ministerio de educación, previo informe favorable de la junta técnica de directores de institutos de segunda enseñanza.
MIGt4: Presentación física	Este libro consta de 537 páginas, cuyas dimensiones son 24 cm por 16,5 cm. Impreso en hoja blanca y en colores.

#### 6.2.2.1.2 Aplicación de la Matriz MACt para la caracterización del libro 1

##### **MACt1: Organización de los contenidos**

El índice se encuentra en las últimas páginas del texto escolar, está seccionado en 39 capítulos los cuales se muestran a continuación:

Tabla N°23: Organización de los contenidos L1

Capítulo	Nombre
	Preliminares
I	Suma
II	Resta
III	Signos de agrupación
IV	Multiplicación
V	División
VI	Productos y coeficientes notables
VII	Teorema del residuo
VIII	Ecuaciones enteras de primer grado con una incógnita
IX	Problemas sobre ecuaciones enteras de primer grado con una incógnita
X	Descomposición factorial
XI	Máximo común divisor
XII	Mínimo común múltiplo
XIII	Fracciones algebraicas. Reducción de fracciones
XIV	Operaciones con fracciones algebraicas
XV	Ecuaciones numéricas fraccionarias de primer grado con una incógnita
XVI	Ecuaciones literales de primer grado con una incógnita
XVII	Problemas sobre ecuaciones fraccionarias de primer grado. Problema de móviles
XVIII	Fórmulas
XIX	Desigualdades. Inecuaciones
XX	Funciones
XXI	Representación gráfica de las funciones
XXII	Gráficas. Aplicaciones prácticas
XXIII	Ecuaciones indeterminadas
XXIV	Ecuaciones simultáneas de primer grado con dos incógnitas
XXV	Ecuaciones simultáneas de primer grado con tres o más incógnitas
XXVI	Problemas que se resuelven por ecuaciones simultáneas
XXVII	Estudio elemental de la teoría coordinatoria
XXVIII	Potenciación
XXIX	Radicación
XXX	Teorema de los exponentes
XXXI	Radicales
XXXII	Cantidades imaginarias
XXXIII	Ecuaciones de segundo grado con una incógnita
XXXIV	Problemas que se resuelven por ecuaciones de segundo grado. Problema de las luces
XXXV	Teoría de las ecuaciones de segundo grado. Estudio del trinomio de segundo grado
XXXVI	Ecuaciones binomias y trinomias
XXXVII	Progresiones
XXXVIII	Logaritmos
XXXIX	Interés compuesto. Amortizaciones. Imposiciones

**MACT2: Tipo de presentación de los contenidos**

La forma que el texto utiliza para presentar los contenidos es del tipo axiomático, ya que comienza mostrando propiedades y definiciones para luego dar ejemplos de los mismos. En cuanto a los ejercicios propuestos y actividades para el lector, son mecanicistas ya que solo posee problemas de cálculo, por lo que la presentación queda definida como el par ordenado (A,M)

**MACt3: Ecología de las potencias y raíces en los libros de textos**

El total de páginas que posee el contenido tanto de potencias como de raíces es de 41 las cuales equivalen a un 7,6% del total del libro de texto. La estructura interna de ambas está estipulada de la siguiente manera:

Capítulo XXVIII: POTENCIACIÓN

1. Definición (de potencia)
2. Signos de las potencias
3. Potencia de un monomio
4. Cuadrado de un binomio
5. Cubo de un binomio
6. Deducción de la regla para elevar un polinomio al cuadrado
7. Deducción de la regla para elevar un polinomio al cubo
8. Elevar un binomio a una potencia entera y positiva
9. Prueba por inducción matemática de la ley del binomio
10. Desarrollo de  $(a - b)^n$
11. Triángulo de pascal
12. Término general

Capítulo XXIX: RADICACIÓN

1. Definición (de raíz)
2. Expresión radical o radical
3. Signos de las raíces
4. Cantidad imaginaria
5. Cantidad real
6. Valor algebraico y aritmético de un radical

7. Raíz de una potencia
8. Raíz de un producto de varios factores
9. Raíz cuadrada de polinomios
10. Raíz cuadrada de polinomios con términos fraccionarios
11. Raíz cúbica de polinomios enteros
12. Raíz cúbica de polinomios con términos fraccionarios

### Capítulo XXX: TEORÍA DE LOS EXPONENTES

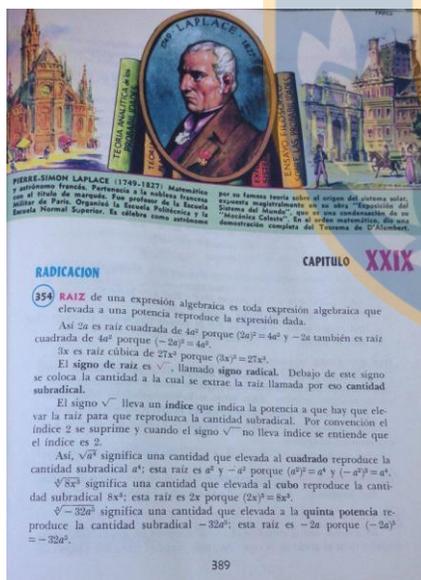
1. Exponente cero. Origen
2. Exponente fraccionario. Origen
3. Exponente negativo. Origen
4. Pasar los factores del numerador de una expresión al denominador o viceversa
5. Transformar una expresión con exponentes negativos en una expresión equivalente con exponentes positivos
6. Ejercicios sobre expresiones con exponentes cero, negativos o fraccionarios
7. Valor numérico de expresiones algebraicas con exponentes cero, negativos o fraccionarios.
8. Multiplicación de monomios con exponentes negativos y fraccionarios.
9. Multiplicación de polinomios con exponentes negativos y fraccionarios.
10. División de monomios con exponentes negativos y fraccionarios.
11. División de polinomios con exponentes negativos y fraccionarios
12. Potencias de monomios con exponentes negativos o fraccionarios
13. Potencias de polinomios con exponentes negativos y fraccionarios
14. Raíces de polinomios con exponentes negativos o fraccionarios.
15. Raíz cuadrada de un polinomio con términos fraccionarios usando la forma de exponentes negativos.

**MACT4: Presentación de potencias y raíces**

La iniciación del contenido, se encuentra en el capítulo XXVIII, éste comienza definiendo potencia a partir de la repetición de dos o más factores de una expresión algebraica, para luego generalizar que:

$$(2a)^n = 2a \times 2a \times 2a \dots n \text{ veces}$$

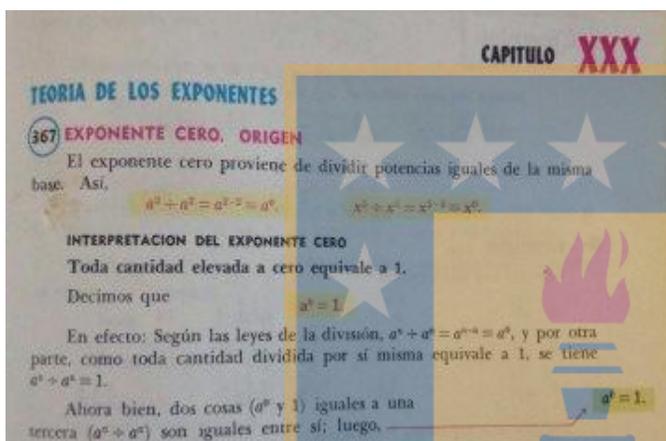
Esta forma de multiplicación iterada es bastante común en los libros analizados hasta el momento. Las propiedades de las potencias están explicitadas en el capítulo Teoría de los exponentes, las que se mostrarán a continuación.



Con respecto a raíces, llamado en este libro de texto como radicación, comienza en el capítulo XXIX y al igual que potencias define raíz de una expresión algebraica a toda expresión que elevada a una potencia reproduce la expresión dada, como por ejemplo  $2a$  es raíz cuadrada de  $4a^2$ . Además llama signo radical al signo  $\sqrt{\quad}$ , el cual está expresado como un operador y que extrae raíz dependiendo de la cantidad subradical.

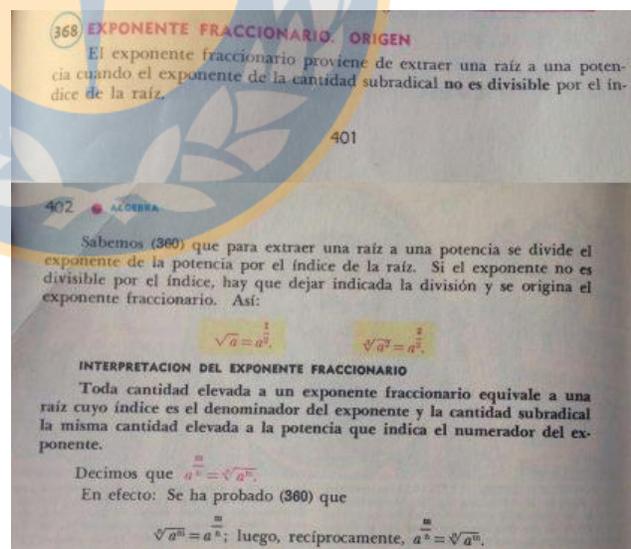
**MACT5: Tratamiento de las propiedades de potencias y raíces.**

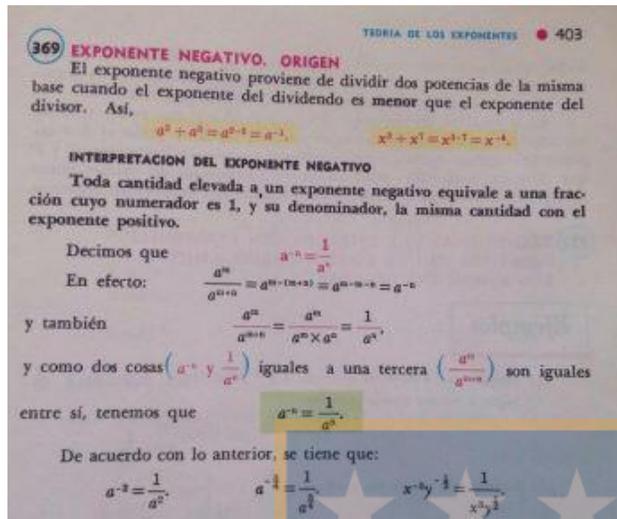
Como se dijo anteriormente las propiedades de las potencias se encuentran en el capítulo XXIX: Teoría de los exponentes, aquí se detallarán cada una de ellas.



De acuerdo a la secuenciación de contenidos, esta parte con la definición de potencia exponente cero, utilizando la división de potencia de igual exponente sin antes definirla. De esto obtiene que  $a^0 = 1$ , no restringe, sólo a partir de un ejemplo generaliza la definición.

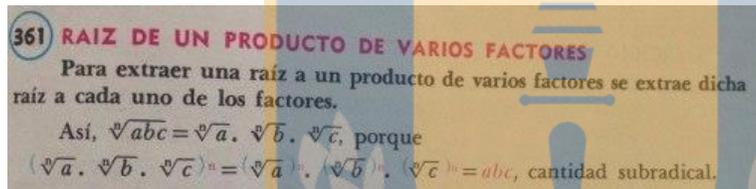
La definición de potencia exponente fraccionario es establecida a partir de la propiedad raíz de una potencia, vista en el capítulo anterior. Es decir, a partir de raíz expresa potencia de exponente fraccionario, lo que lógicamente debería ser al revés. No restringe ni el índice ni cantidad subradical.





Al igual que en la definición de potencia exponente cero, utiliza la propiedad división de potencias de igual base para llegar a potencia de exponente negativo. No hace las restricciones pertinentes, solo generaliza para luego definir.

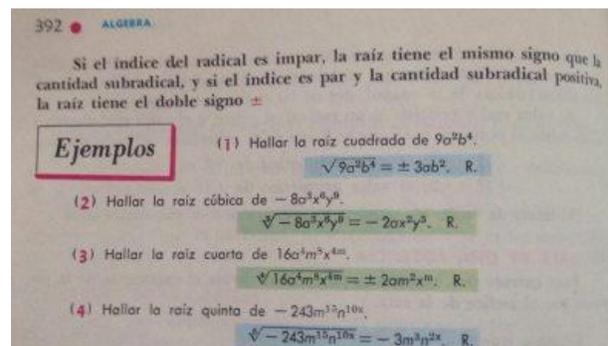
Para continuar con el análisis, se verá cómo es el tratamiento de las propiedades de las raíces en este mismo libro de texto.



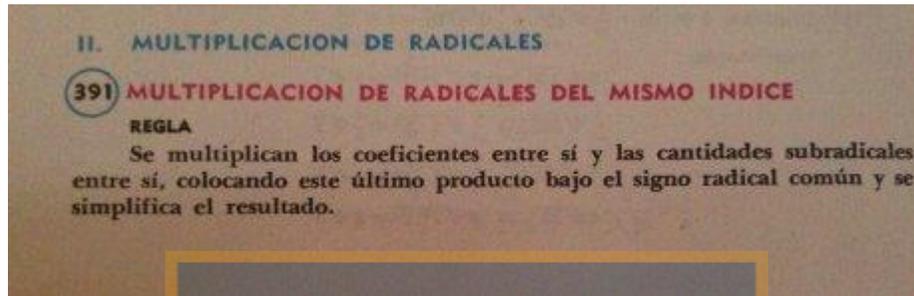
Una de las primeras propiedades que aparece en el capítulo es la de raíz de

un producto de varios factores, cae nuevamente en el error de no restringir qué valor puede tomar el índice ya que en el capítulo anterior se basa en que  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ , propiedad que en esa instancia tampoco hace referencia del valor de n. Se puede rescatar que la secuencia es la correcta para este caso.

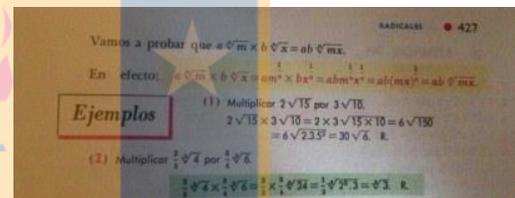
Luego de esta propiedad hace un par de ejemplos de raíz de algunos monomios y vuelve a utilizar el error del doble signo de la siguiente manera:



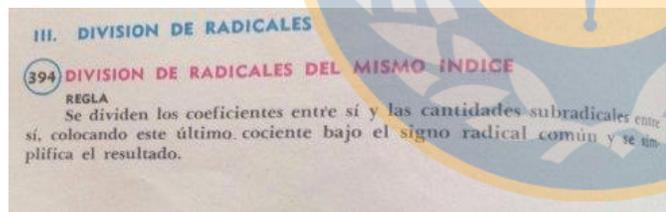
Para el tratamiento de la multiplicación de radicales del mismo índice comienza de la siguiente manera:



Esta regla inmediatamente muestra la falta de restricciones al momento de aplicarla, luego hace una demostración en la cual utiliza la multiplicación de potencias de igual



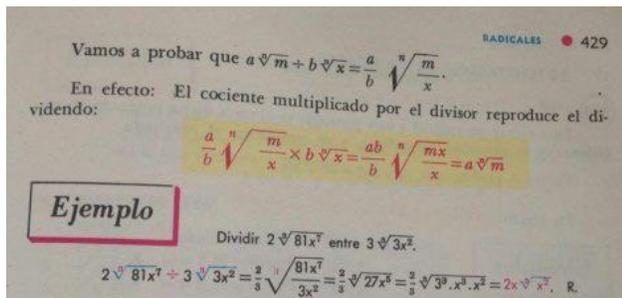
exponente, en la cual no especifica si el exponente es entero o racional, ni tampoco hace referencia del valor que puede tomar nuevamente el índice de la raíz.



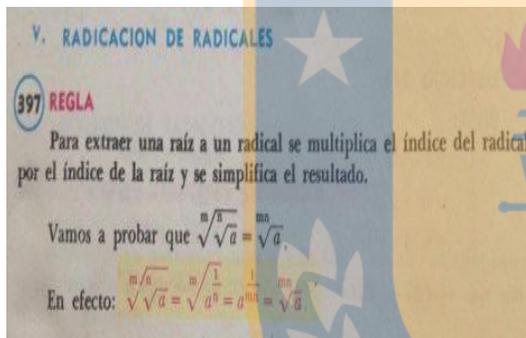
Siguiendo con las propiedades, continúa con la división de radicales del mismo índice. Al igual que en la

propiedad anterior se omiten las restricciones en cuanto a la regla que allí se plantea y también en la demostración que se muestra a continuación.

Esta demostración, es más una verificación que la propiedad debe funcionar así, utiliza la relación inversa de las operaciones multiplicación y división, omitiendo restricciones con respecto a las cantidades subradicales y a los coeficientes de la demostración.



Los mismos errores lógicos y de omisión, se aprecian en la demostración de la siguiente propiedad:

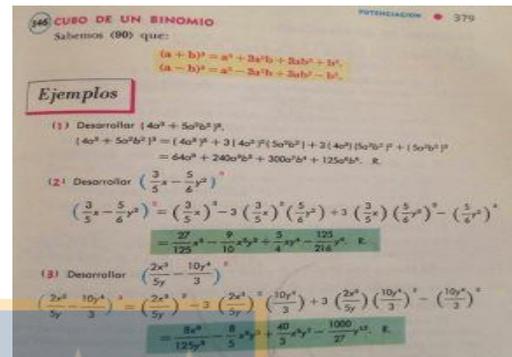


Se sigue con la poca pulcritud a la hora de ver los verdaderos dominios de validez de los radicandos, no hace demostraciones utilizando las definiciones, sino que se basa en escribir los radicales como potencias y de ahí hacer la demostración correspondiente,

sin utilizar las restricciones necesarias y adecuadas.

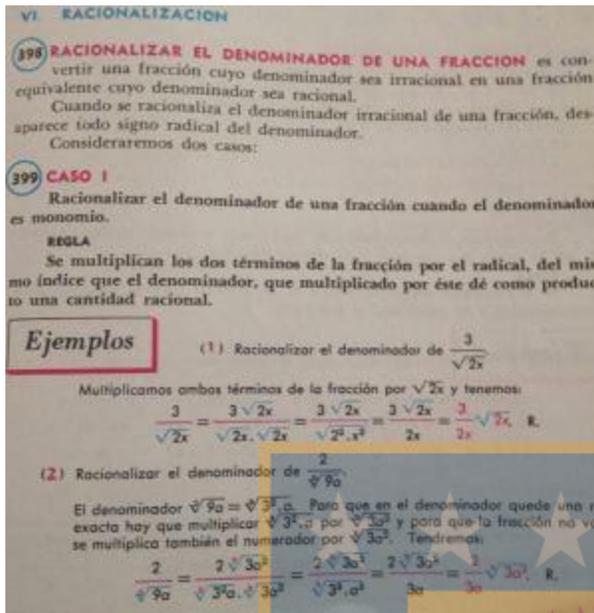
**MACT6: Aplicaciones del Álgebra de potencias y radicales**

Una de las aplicaciones en donde las potencias y raíces se utilizan como herramienta en este libro de texto son: productos notables, triángulo de pascal, racionalización y ecuaciones con radicales.

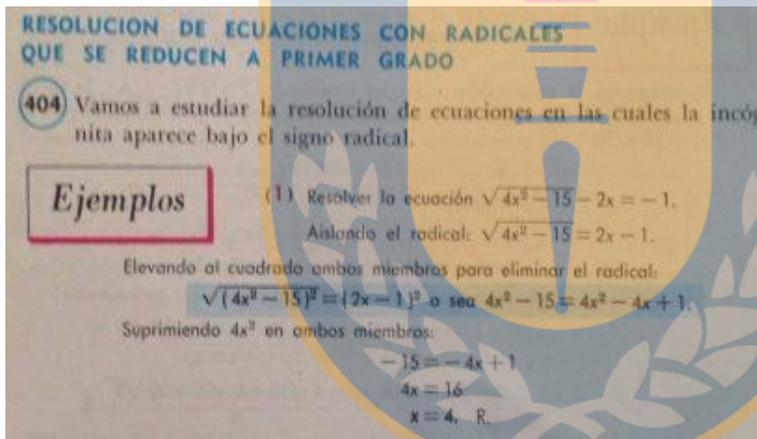


En cuanto a potencias se mostrarán algunas de ellas, en este caso el cubo de un binomio visto anteriormente en el capítulo de productos y cocientes notables en donde es demostrado de manera algebraica y luego en este capítulo relacionado con potencias. Sólo resuelve el binomio a partir de la definición vista anteriormente, sin hacer el procedimiento de multiplicar término a término para llegar a la misma.

Para el tratamiento de raíces la herramienta utilizada es racionalización, en la cual sólo se trata cuando el denominador es irracional y se desea de convertir en racional.



Muestra dos casos; uno donde el denominador es un monomio mostrando 3 ejemplos de cómo resolverlos paso a paso, un segundo caso es cuando el denominador es un binomio y también muestra 2 ejemplos resueltos para luego proponer 18 ejercicios mecánicos y muy parecidos a los ejemplos.



Las ecuaciones con radicales tienen el mismo tratamiento, en primera instancia muestra 3 ejemplos resueltos paso a paso para luego dar un listado de ejercicios, los cuales

también son muy monótonos y parecidos a los ejemplos resueltos, en donde no existen situaciones en las que no se satisfaga la ecuación.

6.2.2.1.3 Aplicación de la MIGt para la caracterización del libro 2

Tabla N°24: MIGtL2

Campos genéricos MIGt(i), con i = 1, 2, 3, 4	Libro 2
MIGt1: Título y Procedencia	Matemática. Libro distribuido gratuitamente por el Ministerio de Educación.
MIGt2: Datos de Autoría	<b>Carlos Mercado Schüler.</b> Miembro de la Real Academia de Farmacia de España; Miembro de la Academia de Ciencias Farmacéuticas de Chile. Miembro honorario del Colegio Químico-Farmacéutico y Bioquímico de Chile; Miembro de la Junta Directiva de la Universidad de La Serena; Profesor de la Escuela Militar Bernardo O'Higgins; Profesor de la Facultad de Química y Farmacia U. de Chile; Profesor del Colegio Santa Úrsula; Ex profesor de: Liceo de Aplicación; Liceo Federico Hanssen; Escuela Superior de Correos y Telégrafos; Facultad de Filosofía y Educación U. de Chile; Instituto Luis Campino
MIGt3: Edición y Tipo de Obra	Editorial Universitaria. 2° Edición; destinado a alumnos de primer año medio
MIGt4: Presentación física	El libro consta de 264 páginas, impresas a color en papel de roneo. Sus dimensiones son 26,4 cm de largo por 18,2 cm de ancho

6.2.2.1.4 Aplicación de la Matriz MACt para la caracterización del libro 2

**MACt1: Organización de los contenidos**

En la tercera página del libro de texto se ubica el índice el que está dividido en 2 unidades, la primera de ellas se encuentra subdividida en 10 capítulos, mientras que la segunda tiene una subdivisión de 18 capítulos. A continuación, se presenta el índice con sus respectivas divisiones y subdivisiones:

Tabla N°25: Organización de los contenidos L2

Unidad	Capítulo	Temas
Introducción al álgebra en R	I	Conjuntos numéricos. Números naturales, enteros, racionales, irracionales. La recta numérica de los Reales
	II	Conceptos y operaciones fundamentales. Expresión algebraica. Término. Valor relativo y absoluto. Adición, sustracción, multiplicación y división de números relativos. Valoración de expresiones. Términos semejantes. Supresión de paréntesis. Suma y resta de polinomios.
	III	La multiplicación. Propiedades. Regla de los signos. Potenciación (1° parte). Multiplicar y dividir potencias de igual base. Potencia de exponente cero. Potencia de exponente negativo. Notación científica. Potencias de diez. Multiplicación de monomios y polinomios. Productos notables. Factorización
	IV	La división. Propiedades. Dividir un polinomio por un monomio. División de polinomios. Números primos y compuestos.
	V	Números racionales. Fracciones comunes y decimales. Fracciones equivalentes. Relación entre fracciones comunes y decimales. Amplificar y simplificar. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo. Sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones. Fracciones compuestas.
	VI	Ecuaciones. Ecuaciones con paréntesis, fraccionarias y literales. El cero y el infinito. ¿Ecuaciones?
	VII	Razones y proporciones. Proporcionalidad directa e inversa. Aplicaciones.
	VIII	Propiedades de las proporciones. Proporciones continuas y discontinuas. Cuarta, tercera y media proporcional. Proporciones iteradas o serie de razones. Ejercicios de recapitulación.
	IX	Problemas con enunciado. Problemas por plantear y resolver.
	X	Problemas con recapitulación de la Unidad de Álgebra.

<b>Congruencia y construcciones geométricas</b>	I	Orígenes de la Geometría. Conceptos primarios. Punto. Línea. Espacio. Superficie. Plano y semiplano. Recta y semirecta. Trazo o segmento. Rayo. Vertical y Horizontal. Poligonal. Polígonos. Ángulos.
	II	Circunferencia y círculo. Elementos principales. Tangente y normal a una curva
	III	Medida de los ángulos. Sistema absoluto, sexagesimal y centesimal. Transportador. Clasificación de los ángulos. Ángulos complementarios y suplementarios. Ángulos adyacentes. Ángulo recto. Rectas perpendiculares.
	IV	Construcciones geométricas fundamentales (1° Parte). Trazado de paralelas y de perpendiculares. Simetral. Bisectriz
	V	Construcciones geométricas fundamentales (2° Parte). Adición y sustracción de trazos. División de un trazo. Copiar ángulos. Adición y sustracción de ángulos
	VI	Definición. Axiomas. Postulados. Teoremas
	VII	El triángulo. Clasificación. Distancia entre puntos y rectas. Elementos principales y secundarios del triángulo. Alturas, simetrales, bisectrices, transversales de gravedad, medianas y radios. Circunferencia circunscrita, inscrita y ex inscrita al triángulo. Incentro y circunscentro
	VIII	Construcciones geométricas fundamentales (3° Parte). Dibujar geoméricamente determinados ángulos. Trisección de un ángulo (90°, 45° y "otros")
	IX	Rectas paralelas cortadas por una transversal. Ángulos correspondientes, alternos, contrarios o conjugados, y del mismo lado de la transversal o colaterales. Ángulos de la misma naturaleza y de distinta naturaleza. Demostración indirecta o por reducción al absurdo. Ángulos de lados paralelos
	X	Teoremas sobre ángulos interiores y exteriores de un triángulo. Corolario. Escolio. Ángulos de lados perpendiculares. Ángulos interiores de un cuadrilátero. Suma de los ángulos interiores y exteriores de un polígono. Ángulo de un polígono regular. Número de diagonales de un polígono.
	XI	Clases de polígonos: cóncavos y convexos; regulares e irregulares; inscritos y circunscritos.
	XII	Figuras y polígonos congruentes. Teoremas de congruencia de triángulos. Postulados de congruencia. Bisectriz de un ángulo. Simetral de un trazo. Teorema recíproco
	XIII	Teoremas relativos al triángulo isósceles demostrados por congruencia
	XIV	Cuadrilátero. Clasificación. Sus elementos. Teoremas sobre paralelógramos y trapecios
	XV	Otras relaciones métricas en el triángulo y en el trapecio. Medianas
	XVI	Simetría axial. Simetría central
	XVII	Puntos singulares en el triángulo. Ortocentro, circunscentro, incentro, centro de gravedad y centros de circunferencias ex inscritas
	XVIII	Perímetros y áreas de figuras. Cálculo experimental. Problemas

**MAcT2: Tipo de presentación de los contenidos**

Este libro de texto queda calificado bajo el par (A, M). La primera componente de este par hace referencia a Axiomático, pues es un texto donde se entrega la definición seguida de ejemplos y ejercicios, en cuanto a la cantidad de estos últimos, por cada definición y/o propiedad se dan a lo menos 15 ejercicios para desarrollo del lector, siendo del mismo tipo, buscando aplicar un algoritmo. Esta es la razón de la segunda componente del par: Mecanicista.

**MAcT3: Ecología de las potencias y raíces en los libros de textos**

Como este libro de texto es enfocado para estudiantes de primer año medio y, siguiendo las directrices dadas por el programa oficial, en él sólo encontramos potenciación. Este contenido se encuentra inmerso en la primera unidad, en el capítulo III denominado La Multiplicación, el cual consta de 20 planas que representan 7,57% del libro de texto.

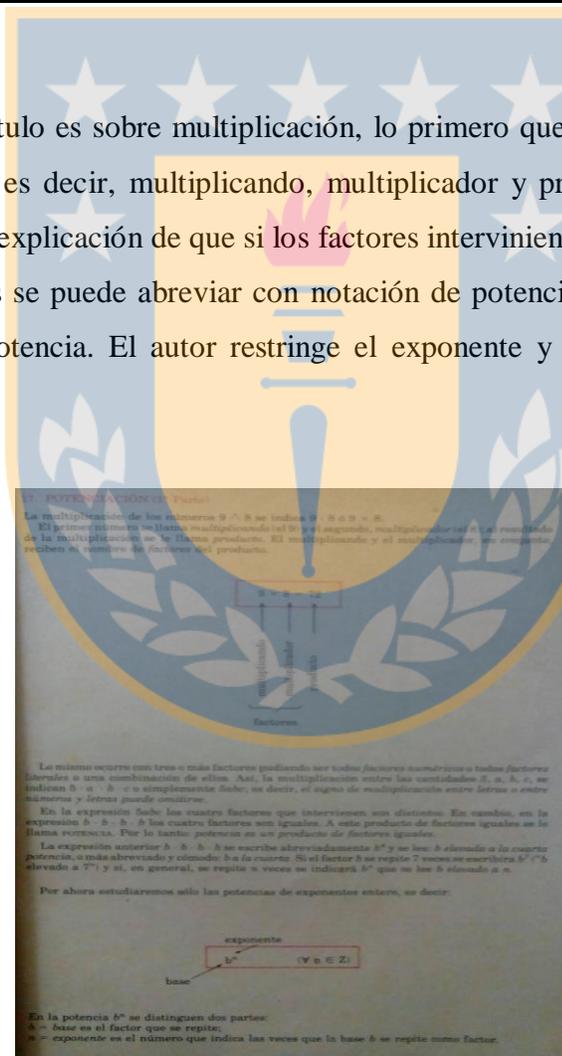
El capítulo se divide de la siguiente manera:

- Regla de los signos
- Potenciación
- Multiplicar potencias de igual base
- Dividir potencias de igual base
- Potencia de exponente cero
- Potencia de exponente negativo
- Potencias de 10

- Notación científica
- Multiplicación de monomios
- Multiplicar un monomio por un polinomio
- Multiplicar un polinomio por otro
- Productos notables y factorización

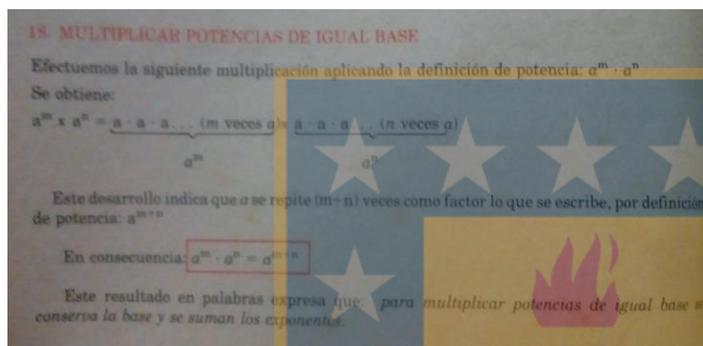
**MACT4: Presentación de potencias y raíces**

Como el capítulo es sobre multiplicación, lo primero que realiza es definir cada componente de ella, es decir, multiplicando, multiplicador y producto. Aprovechando este enlace realiza la explicación de que si los factores intervinientes en la multiplicación son iguales, entonces se puede abreviar con notación de potencia. Es ahí donde define base, exponente y potencia. El autor restringe el exponente y la base a los números enteros.



No existen ejemplos posterior a esta definición, sin embargo sigue un listado de 18 ejercicios, donde 13 de ellos están destinados al cálculo directo de potencias, mientras 5 ejercicios buscan que el alumno sepa escribir en notación potencial. Posterior a estos ejercicios se encuentra el solucionario de los mismos.

**MACT5: Tratamiento de las propiedades de potencias y raíces.**



La primera propiedad tratada es la multiplicación de potencias de igual base, para demostrarla se basa en la definición de potencias como multiplicación iterada. A

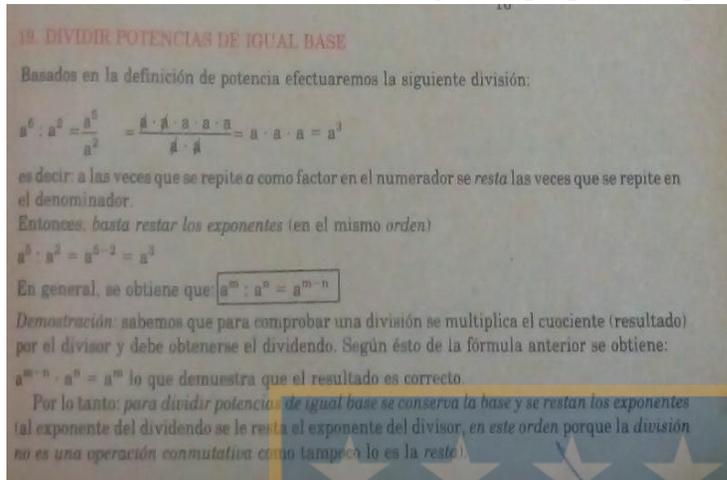
partir de ello y de manera deductiva se construye la mencionada propiedad. Cabe mencionar que no se hace referencia a restricciones respecto a los literales intervinientes, esto puede deberse a que se restringió al comienzo del capítulo, sin embargo, debería hacerse cada vez que se utiliza la notación de potencia pues es necesario tener muy claro el conjunto con el cual se está trabajando. Hay una carencia de ejemplos clarificadores y un exceso de ejercicios que tienden a la mecanización tanto por la cantidad como por el formato de los mismos.

3)  $(0,1)^2 \cdot (0,1)^3 \cdot (0,1)$

El ejercicio N° 3, del listado propuesto en el libro de texto, es una clara contradicción a la restricción que el autor plantea en primera

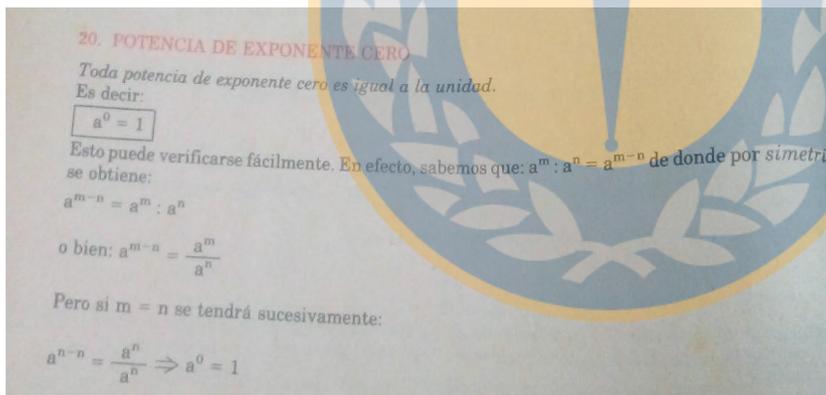
instancia, ya que, en ella define a exponente y base en los números enteros y, en dicho ejercicio se presenta una base que no corresponde al conjunto establecido. Cabe destacar que no es el único ejercicio que presenta esta contradicción dentro del listado propuesto.

La demostración de la segunda propiedad, que corresponde a la división de



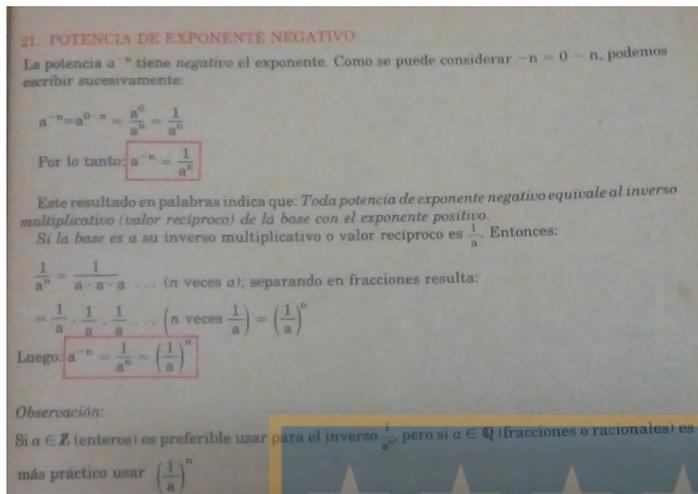
potencias de igual base, se realiza por medio de la definición de potencia, es decir, con multiplicación iterada. En primera instancia se realiza para exponente específicos (3 y 5 respectivamente), luego se generaliza para cualquier

exponente  $m$  y  $n$ . No existen restricciones de ningún tipo para la propiedad enunciada. Carece de ejemplos clarificadores, salvo por aquel con el que se comienza la demostración. Bajo esta propiedad existen 15 ejercicios propuestos, tendientes todos ellos a la aplicación de un algoritmo.



A continuación se define la potencia de exponente cero. Como ha sido la tónica de este libro de texto, existe una nula restricción para los literales existentes. Esta definición finaliza

con 10 ejercicios propuestos para el estudiante, donde todos ellos son numéricos y tendientes a la aplicación de algoritmos.



La última definición tratada por el autor es la referente a las potencias con exponente negativo, se aprecia la inexistencia de restricciones a los literales, es decir, la definición es válida siempre y cuando la base sea distinta de cero. Existen 6 ejemplos clarificadores, seguidos de 17

ejercicios propuestos para el alumno, todos ellos numéricos y buscando aplicar un algoritmo determinado para cada caso.

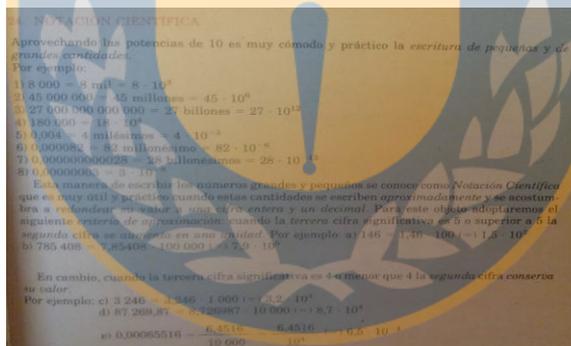
### MACT6: Aplicaciones del Álgebra de potencias y radicales

En cuanto a las aplicaciones dadas a las potencias, el libro de texto presenta las siguientes:

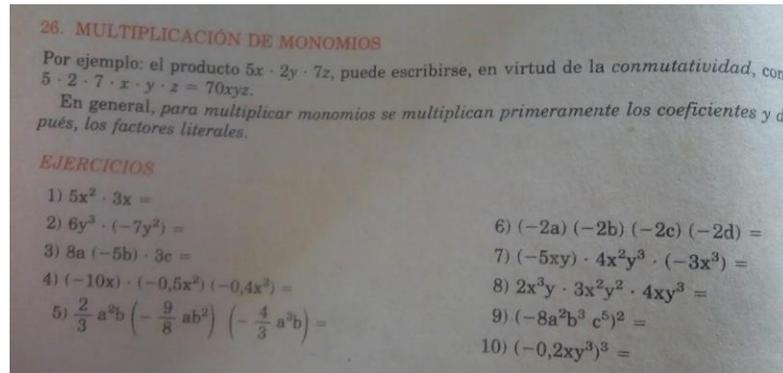
- Potencias de 10: hace una clarificación que este tema, es referente a aquellas potencias cuya base es 10 y, realiza una aplicación de las mismas a unidades de medidas.

T = Tera = 1 billón = 1.000.000.000.000 = $10^{12}$
G = Giga = mil millones = 1000 millones = 1.000.000.000 = $10^9$
M = Mega = 1 millón = 1.000.000 = $10^6$
M' = Miria = diez mil = 10 mil = 10.000 = $10^4$
K = Kilo = mil = 1.000 = $10^3$
H = Hecto = cien = 100 = $10^2$
D = Deca = diez = 10 = $10^1$
u = unidad = 1 = $10^0$
d = 1 décimo = $0,1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$
c = 1 centésimo = $0,01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$
m = 1 milésimo = $0,001 = \frac{1}{.1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$
$\mu$ = micro = 1 millonésimo = $0,000001 = \frac{1}{1.000.000} = \frac{1}{10^6} = 10^{-6}$
n = nano = 1 milimicro = 1 mil millonésimo = $0,000000001 = 10^{-9}$
$\mu\mu$ = 1 micromicro (también p = piko) = 1 billonésimo = $10^{-12}$

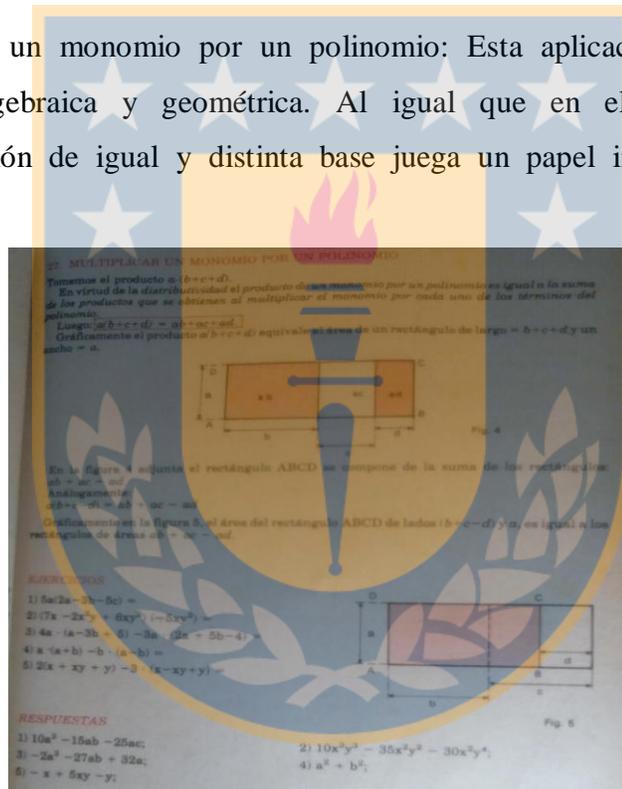
- Notación científica: Esta aplicación la introduce gracias a la aplicación anterior, en este caso hace referencia a que es útil para escribir tanto grandes como pequeñas cantidades. Hay una ejemplificación al respecto y le sigue una explicación sobre cifras significativas y cómo escribir un número en notación científica. Se finaliza el contenido, con un listado de ejercicios seguido de sus respuestas



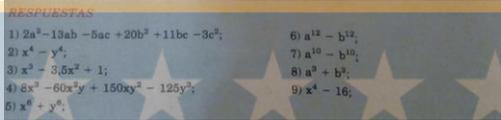
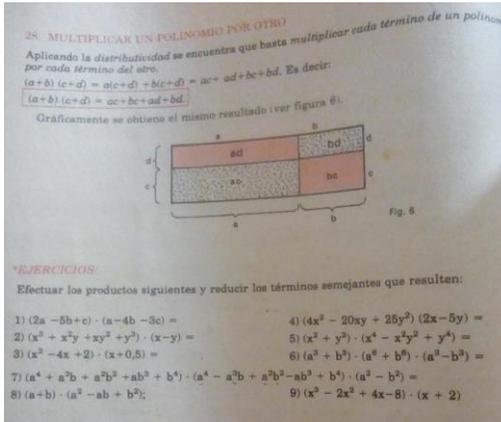
- Multiplicación de monomios: En esta aplicación, se utiliza específicamente la multiplicación de potencias de igual y distinta base, esto último no fue tratado en el presente libro de texto lo que podría generar dificultades en su desarrollo.



- Multiplicar un monomio por un polinomio: Esta aplicación se presenta de manera algebraica y geométrica. Al igual que en el caso anterior, la multiplicación de igual y distinta base juega un papel importante para esta aplicación.



- Multiplicar un polinomio por otro: Este contenido se presenta algebraica y geométricamente y, al igual que las aplicaciones anteriores la multiplicación de potencias de igual y distinta base es fundamental.



- Productos notables y factorización:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b) \cdot x + ab.$$

$$(nx+a)(nx+b) = (nx)^2 + (a+b) \cdot nx + ab$$

V. DIFERENCIA DE DOS CUADRADOS

Corresponde al caso recíproco del anterior. En efecto vemos que:  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ , por tanto se obtiene recíprocamente que:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Luego: la diferencia de dos cuadrados es igual a la suma de las bases por la diferencia de ellas.

Por ejemplo:  $16x^2 - 9 = (4x+3)(4x-3)$  pues  $(4x)^2 = 16x^2 \wedge 3^2 = 9$ .

IV. PRODUCTO DE LA SUMA DE DOS TÉRMINOS POR SU DIFERENCIA

Es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

1° término      2° término

Para demostrar esta relación basta efectuar el producto indicado resultando:

$$(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$$

III. CUADRADO DE UN BINOMIO

Es igual al cuadrado del primer término seguido del doble producto del primer término por el segundo y más el cuadrado del segundo término. Es decir:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Para demostrar este teorema basta desarrollar la potencia indicada resultando:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2. \text{ Si se desarrolla } (a-b)^2 \text{ solo cambia el signo del doble producto.}$$

Por lo tanto:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

1° término      2° término

En general, en estas aplicaciones se da a conocer la forma de desarrollarlas, dando la definición correspondiente a cada caso, seguido de una ejemplificación y de ejercicios para el lector. En este ítem, son utilizadas la multiplicación y división de potencias de igual base, así como también la multiplicación y división de potencias de igual exponente, cabe recordar que estas últimas no fueron tratadas en el presente libro de texto.

VII. CUADRADO DE UN POLINOMIO

Es igual a la suma de los cuadrados de cada uno de los términos seguidos del doble producto de cada término por cada uno de los que le siguen.

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab - 2ac - 2ad - 2bc - 2bd + 2cd.$$

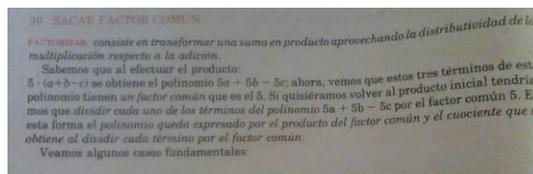
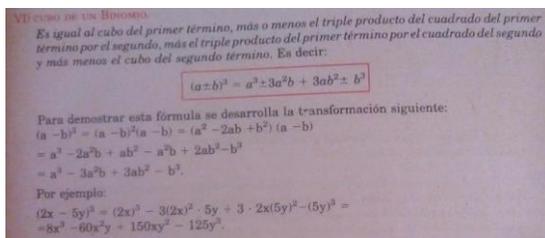
Para la demostración basta efectuar el siguiente desarrollo:

$$(a+b+c+d)^2 = (a+b+c+d)(a+b+c+d)$$

Multiplicando estos dos polinomios y reduciendo los términos semejantes, se obtiene la demostración de la regla. ¡Hágalo Ud.!

Como ejemplo desarrollaremos:

$$(2x - 3y - 5)^2 = 4x^2 + 9y^2 + 25 - 12xy - 20x + 30y.$$



6.2.2.1.5 Aplicación de la MIGt para la caracterización del libro 3

Tabla N°26: MIGtL3

Campos genéricos MIGt(i), con i = 1, 2, 3, 4	Libro 3
MIGt1: Título y Procedencia	El título de la obra es "Matemática aplicada ". Este libro es repartido por el ministerio de Educación.
MIGt2: Datos de Autoría	<b>Gonzalo Riera Lira</b> , profesor de matemática en Pontificia Universidad Católica de Chile, Licenciado facultad de ciencias en Universidad de Chile, Doctor en matemática en Columbia university EE.UU.
MIGt3: Edición y Tipo de Obra	Empresa editora Zig-Zag, S.A. Esta obra es recomendada como texto para los alumnos de 1º año medio de establecimientos educacionales en Chile.
MIGt4: Presentación física	Consta de 269 páginas, cuyas dimensiones son 27,1 cm por 17,9 cm. Impreso en hoja roneo y en colores.

6.2.2.1.6 Aplicación de la Matriz MACt para la caracterización del libro 3

**MACt1: Organización de los contenidos**

La tabla de contenidos o índice se encuentra en las páginas 6 y 7 del libro de texto, se divide en 8 capítulos los cuales se presentan a continuación.

Tabla N°27: Organización de los contenidos L3

Capítulo	Nombre
1	Operaciones y resolución de problemas
2	Fracciones
3	Población, razones y proporciones
4	Geometría y construcción
5	La física y el álgebra
6	Finanzas, demografía y potencias
7	Mapas, planos y dibujos a escala
8	Encuestas, estadísticas y probabilidades

**MACt2: Tipo de presentación de los contenidos**

La forma que el texto utiliza para presentar los contenidos es del tipo Axiomática. En cuanto a los ejercicios propuestos y actividades para el lector, son más bien heurística, ya que la mayoría de los ejercicios son resoluciones de problemas, por lo que la presentación queda definida como el par ordenado (A,H).

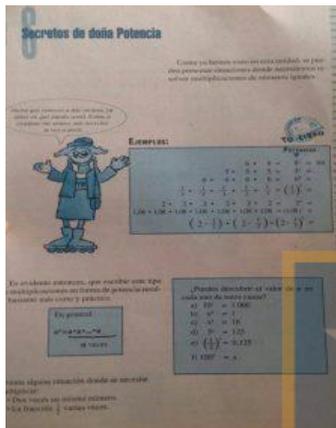
**MAcT3: Ecología de las potencias y raíces en los libros de textos**

En este libro de texto al igual que en el anterior, sólo podemos observar el contenido de potencias en 1° año Medio. Se establece en el capítulo 6 y corresponde al 2,23% del libro de texto. Dentro del capítulo, el contenido de potencias se estructura de la siguiente forma:

Capítulo 6: Finanzas, demografía y potencias

- Arriendo y diviendo
- Compras a crédito
- Ahorro
- Interés simple y compuesto
- Tasas de natalidad, mortalidad y crecimiento
- Términos de una potencia
- Propiedades de las potencias
- Productos
- Cuadrado de un binomio
- Factorización
- Factorización de expresiones cuadráticas
- Despejar fórmulas

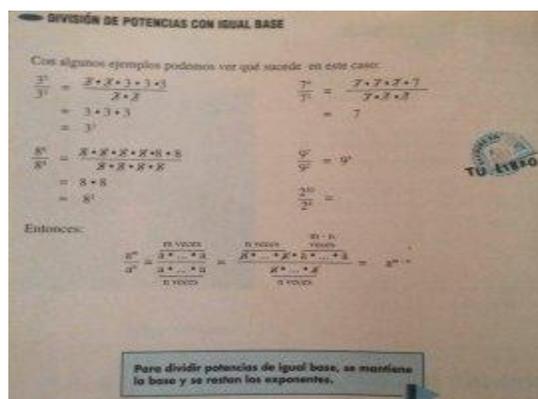
**MAcT4: Presentación de potencias y raíces**



Comienza el capítulo dando ejemplos de multiplicaciones iteradas, en donde resuelve uno de los ejemplos y los otros los deja a modo de ejercicios para el lector, el método utilizado es más bien mecánico en un comienzo. No hace demostraciones y deja dos problemas propuestos en donde se multiplique dos veces el mismo número y otro donde se necesite multiplicar una fracción varias veces.

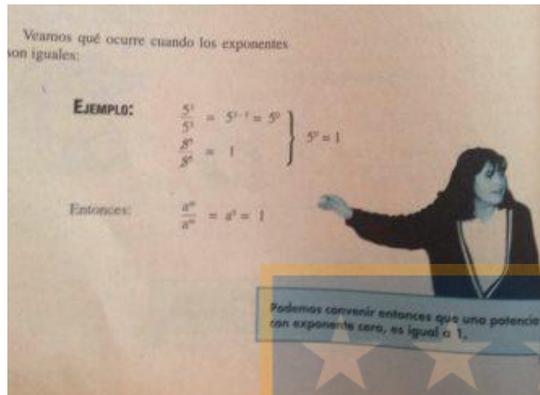
**MAcT5: Tratamiento de las propiedades de potencias y raíces.**

La primera propiedad es multiplicación de potencias de igual base, comienza dando ejemplos particulares para luego llegar a la formalización. No existen restricciones ni claridad del conjunto con el cual se está trabajando.

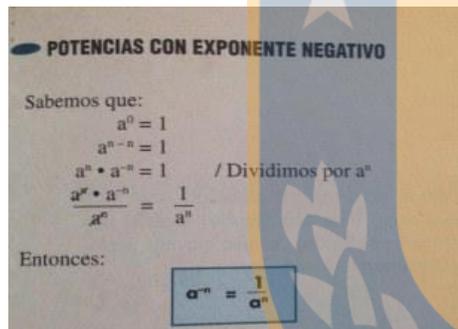


La segunda propiedad, división de potencias de igual base al igual que la propiedad anterior comienza dando ejemplos particulares en donde utiliza la definición de potencias y luego simplifica los términos. A partir de esto construye la institucionalización, haciendo una

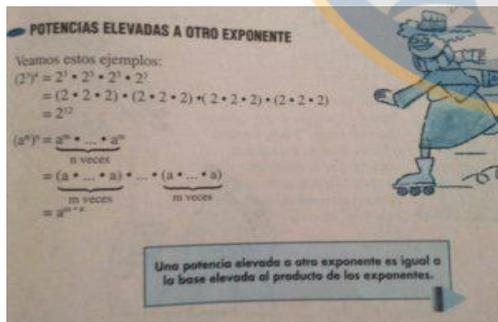
demostración en la que no hace las restricciones pertinentes en cuanto a los literales.



A partir de la propiedad anterior, define potencia de exponente 0, en donde nuevamente a partir de un ejemplo en particular generaliza y no hace las restricciones pertinentes.

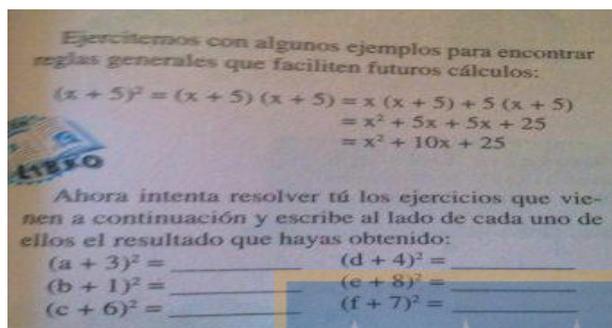


Utilizando la misma tónica de la definición anterior, a partir de la potencia de exponente cero, define la potencia de exponente negativo. Continúa sin hacer restricciones ni definir el conjunto numérico para los literales involucrados.



Potencia de una potencia, aquí llamada potencias elevadas a otro exponente, sigue al igual que las otras propiedades con un ejemplo particular, a partir del cual hace una demostración y generaliza para obtener finalmente el concepto.

**MACT6: Aplicaciones del Álgebra de potencias y radicales**



Utiliza el contenido de potencias, para el cálculo algebraico del cuadrado de binomio de manera mecánica.

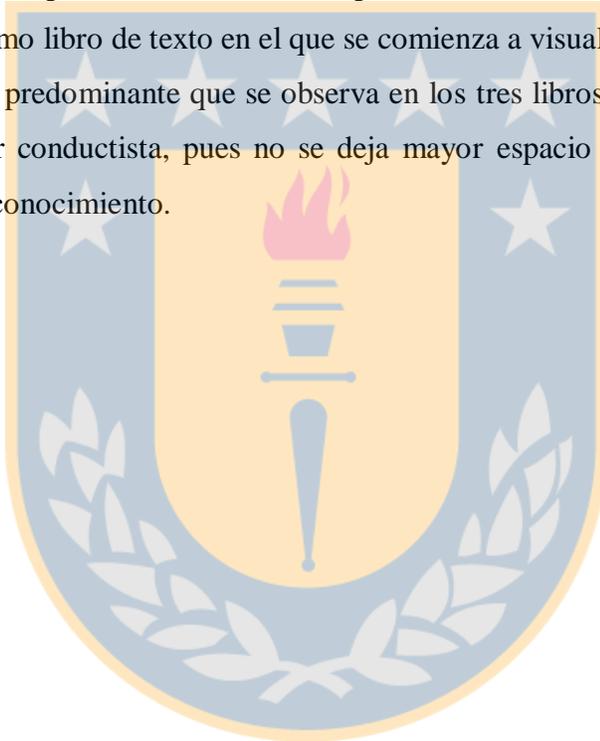
**6.2.2.3 Perfil del Saber a Enseñar segundo período**

De acuerdo a la información analizada anteriormente, se construirá el perfil del saber a enseñar correspondiente al segundo período, vaciando la información en una matriz de resumen y en una tabla de doble entrada, ambas se encuentran enumeradas en la sección de anexos bajo los números 28 y 29, respectivamente. Este perfil será caracterizado de acuerdo al comportamiento modal observado en cada ítem de las matrices contempladas.

En cuanto a la información proporcionada por las matrices de identificación general, se destacan los siguientes aspectos:

1. Dos de los libros de texto analizados corresponden a obras nacionales, distribuidas gratuitamente por el Ministerio de Educación, mientras que la tercera corresponde a un manual de álgebra que se obtiene en el comercio.
2. Los autores de los tres libros consultados corresponden a profesores de matemática.
3. Dos de los libros de texto son obras editadas en Chile, mientras que la tercera es una obra editada en México.

4. En cuanto a la presentación física de los libros de texto, se observa que el 66,6% de ellos utiliza hoja tipo roneo y/o impresión a color, mientras que el 33,3% se presenta en hoja blanca y/o impresión negra.
5. El 100% de las obras analizadas presenta el contenido de manera axiomática y, en cuanto a las actividades que proponen dos de ellas lo hacen de forma mecanicista, mientras que una lo hace heurísticamente. Este cambio en las actividades propuestas, marca el punto de inflexión con respecto a la reforma del período anterior, pues ahora el foco está puesto en la resolución de problemas y es en este último libro de texto en el que se comienza a visualizar dicho cambio.
6. La formación predominante que se observa en los tres libros de texto analizados es de carácter conductista, pues no se deja mayor espacio para que el alumno construya su conocimiento.



### 6.2.3 Reforma de 1996

Los libros de texto utilizados para el presente período, son los siguientes:

Tabla N°30: Libros de texto seleccionados tercer período

N°	Año	Edición	Autor	Título	Editorial
1	2003 - 2004	1	Roberto Vidal Cortés	Matemática. 1° Medio	Zig - Zag
			María Chicharro Ciuffardi		
			María Montoya González		
2	2008 - 2009	3	Patricio González González	Matemática. 3° Medio	Mare nostrum
			Jorge Soto Andrade		
3	2002	2	Rodrigo Bamón	3° Medio. Matemática activa	Mare nostrum
			Patricio González		
			Carmen Medina		
			Jorge Soto		
4	2001	1	Rodrigo Bamón	1° Medio. Matemática	Mare nostrum
			Patricio González		
			Carmen Medina		
			Jorge Soto		

Las portadas de estos libros de texto, son las que se presentan a continuación:



### 6.2.3.1 Caracterización Libros de Texto

#### 6.2.3.1.1 Aplicación de la MIGt para la caracterización del libro 1

Tabla N°31: MIGtL1

Campos genéricos MIGt(i), con i = 1, 2, 3, 4	Libro 1
MIGt1: Título y Procedencia	Matemática. Libro distribuido gratuitamente por el Ministerio de Educación
MIGt2: Datos de Autoría	<b>Roberto Alfredo Vidal Cortés:</b> Licenciado y Profesor de Educación Matemática, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación; Magister en Enseñanza de las Ciencias, Mención Didáctica de la Matemática, Universidad Católica de Valparaíso
	<b>María José Chicharro Ciuffardi:</b> Licenciada y Profesora de Educación Matemática, Pontificia Universidad Católica de Chile; Magister en Enseñanza de las Ciencias, Mención Didáctica de la Matemática, Universidad Católica de Valparaíso
	<b>María Soledad Montoya González:</b> Bachiller en Educación Matemática, Universidad Católica de Valparaíso; Profesora de Matemática, Magister en Enseñanza de las Ciencias, Mención Didáctica de la Matemática, Universidad Católica de Valparaíso
MIGt3: Edición y Tipo de Obra	Empresa Editora Zig-Zag S.A. Primera edición. Libro de texto destinado a alumnos de primer año medio.
MIGt4: Presentación física	El libro de texto consta de 239 páginas, impresas en hoja blanca y a color. Sus dimensiones son 20,9 cm de ancho y 26,8 cm de largo

6.2.3.1.2 Aplicación de la MACt para la caracterización del libro 1

**MACt1: Organización de los contenidos**

En las páginas 6, 7, 8 y 9 se encuentra un colorido índice, el que se divide en 8 unidades, tal y como se presenta a continuación:

Tabla N°32: Organización de los contenidos L1

Unidad	Nombre
1	Números
2	Lenguaje Algebraico
3	Transformaciones isométricas
4	Variaciones proporcionales
5	Variaciones porcentuales
6	Factores y productos
7	Congruencia de figuras planas
8	Geometría a través del computador

El contenido referente a potencias, que es el que se trata en este libro de texto, se encuentra inmerso en la primera unidad.

**MACt2: Tipo de presentación de los contenidos**

La presentación de contenidos que realiza el libro de texto en cuanto a su estructura, corresponde a lo que se ha denominado como Constructivista Incompleta, pues comienza dando situaciones de aplicación para así generar el concepto, pero no siempre existe una institucionalización del saber. Por otra parte, en cuanto a las actividades que presenta queda calificado como Mecanicista, ya que, pese a que existen

ejercicios del tipo de resolución de problemas, hay un predominio de aquellos que buscan el cálculo directo por medio de algoritmos. En conclusión, el presente libro de texto queda caracterizado por la combinación (CI, M).

**MACT3: Ecología de las potencias y raíces en los libros de textos**

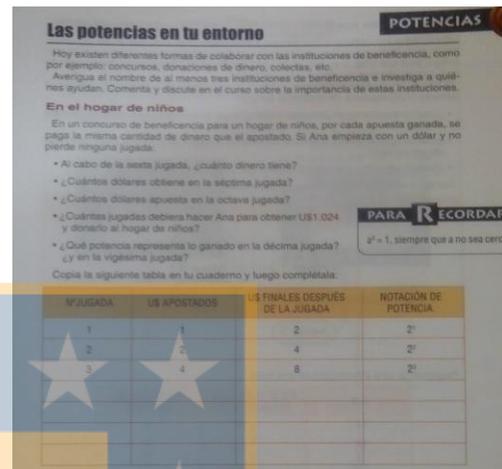
Tal y como establece la reforma, el contenido que corresponde a primer año medio es sólo el de potencias, por lo tanto, es ese el contenido con el que se trabajara en el presente libro de texto. Dicho contenido utiliza 9 planas de la primera unidad, en su quinto capítulo, lo que representa un 3,76% de la totalidad del libro de texto.

Dentro de este capítulo, el contenido de potencias queda estructurado de la siguiente forma:

- Las potencias en tu entorno
- Potencias de base racional positiva y exponente entero negativo
- Multiplicación de potencias de igual base
- División de potencias de igual base

**MACT4: Presentación de potencias y raíces**

El contenido de potencias se introduce por medio del planteamiento de una situación, en donde el alumno va construyendo el protoconcepto. Sin embargo, hace falta una formalización del concepto mismo; como no existe una formalización, tampoco hay restricciones.

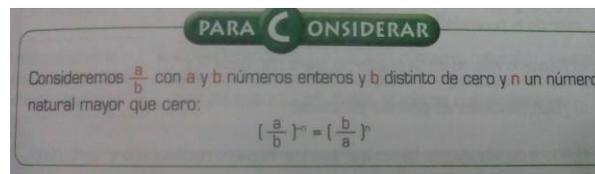
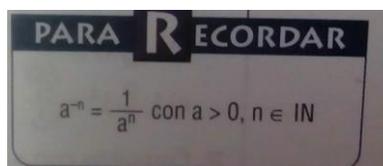


**MACT5: Tratamiento de las propiedades de potencias y raíces.**

La primera propiedad que aparece mencionada es la que hace referencia al exponente cero, cabe recordar que esto no es una propiedad sino que es una definición.



El libro de texto continúa trabajando con los exponentes negativos y la base natural o racional, frente a ello establece lo siguiente:



Las restricciones correspondientes a los literales intervinientes en la definición, están correctamente establecidos. La forma de presentar dichas definiciones es a partir de un ejemplo puntual, desde él se generalizan, tal y como se muestra a continuación:

**Con base un número natural**

Sabemos que:

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

4 factores

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

5 factores

• Pero, ¿cuál es el valor  $2^{-2}$ ?

Observa la siguiente secuencia de potencias de base 2.

$2^4 = 16$	+ 2	Los primeros números de la secuencia son conocidos, ya que son potencias de exponente natural.
$2^3 = 8$	+ 2	
$2^2 = 4$	+ 2	
$2^1 = 2$	+ 2	
$2^0 = 1$	+ 2	
$2^{-1} = \frac{1}{2}$	+ 2	Fíjate en que dicha secuencia sugiere dividir por 2 cada igualdad (ya que la base es 2).
$2^{-2} = \frac{1}{4}$	+ 2	
$2^{-3} = \frac{1}{8}$	+ 2	

De este modo, llegamos a conocer las potencias con base 2 y exponente entero negativo.

Así llegamos a que  $2^{-2} = \frac{1}{8}$ , pero sabemos que  $8 = 2^3$ .

Luego,  $2^{-2} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$ .

**Con base un número racional**

Sabemos que:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

2 factores

Consideremos ahora que queremos calcular  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} =$

Para conocer este valor, realicemos una secuencia similar a la anterior:

$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$	En este caso, tenemos que dividir por $\frac{2}{3}$ .
$\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3}$	
$\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$	
$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$	
$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{9}{4}$	

Recuerda que para dividir,  $\frac{8}{27} \div \frac{2}{3}$  debemos multiplicar, así:

$$\frac{8}{27} \div \frac{2}{3} = \frac{8}{27} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4}{9}$$

Así obtenemos que:  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{9}{4}$  y observa que:

$$\frac{9}{4} = \frac{3^2}{2^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

Así obtenemos que:  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

**Multiplicación de potencias de igual base**

Completa:

$$2^3 \cdot 2^4 = \dots = 2^{\dots} = (-5)^{\dots} = (-5)^{\dots}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \dots = \left(\frac{1}{2}\right)^{\dots}$$

$$0,2^3 \cdot 0,2^4 = \dots$$

$$a^m \cdot a^n = \dots = a^{m+n}$$

¿Descubriste algo? Si es así, escríbelo en tu cuaderno.

Si uno de los exponentes fuera negativo, como por ejemplo:

$$2^3 \cdot 2^{-4} = \dots = \left(\frac{1}{2}\right)^{\dots} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\dots}$$

¿Cómo calcularías el resultado?

Comparte tu estrategia con un compañero o con tu pareja.

¿Hay alguna diferencia entre estas dos estrategias?

**División de potencias de igual base**

$$4^3 \div 4^2 = \frac{4^3}{4^2} = ?$$

Te proponemos ahora que tú descubras esta propiedad. Para esto, te sugerimos desarrollar las potencias, como se muestra a continuación.

$$4^3 \div 4^2 = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 4} = 4^1 = 4$$

$$8^5 \div 8^2 = \frac{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}{8 \cdot 8} = \dots$$

$$0,3^7 \div 0,3^4 = \dots$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)^5 \div \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \dots$$

Escribe más ejemplos en tu cuaderno y luego establece conclusiones.

Entonces, en general  $a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ , con m y n números naturales.

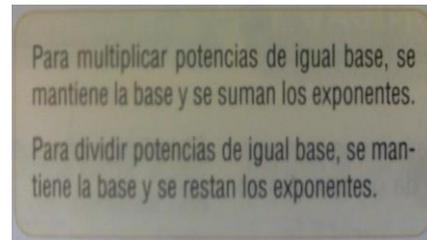
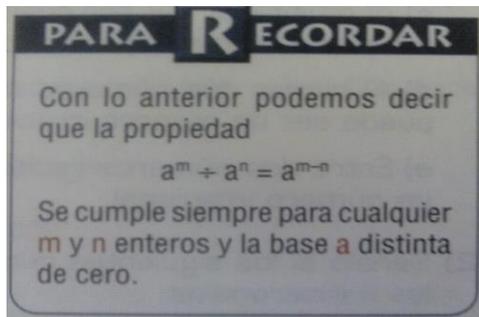
• Reúnete con un compañero o compañera y analicen el caso cuando m es número entero negativo, cuando n es número entero negativo y luego cuando los dos m y n son enteros negativos.

¿Qué ocurre?

• Determina el valor de:

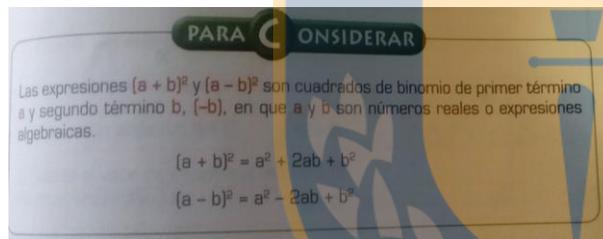
a)  $2^{-5} \cdot 2^8 =$       b)  $1,9^5 + 1,9^{-5} =$       c)  $8^{-4} \cdot 8^{-8} =$

La siguiente propiedad tratada es la multiplicación y división de potencias de igual base, tal y como ha sido la tónica del presente libro de texto, estas propiedades no están demostradas sino que, trabajadas de manera particular con un ejemplo y luego generalizadas.



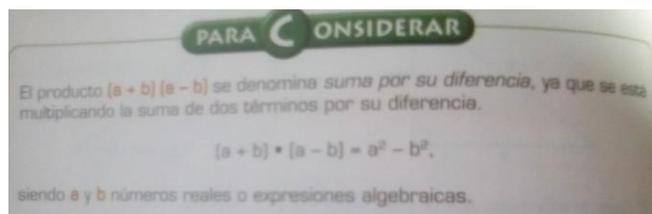
Se puede observar, que existen las restricciones adecuadas para los literales intervinientes.

### MACT6: Aplicaciones del Álgebra de potencias y radicales



La primera aplicación que el autor le da al álgebra de potencias es en Productos Notables, donde trabaja con cuadrado de binomio y suma por su diferencia, en donde los presenta

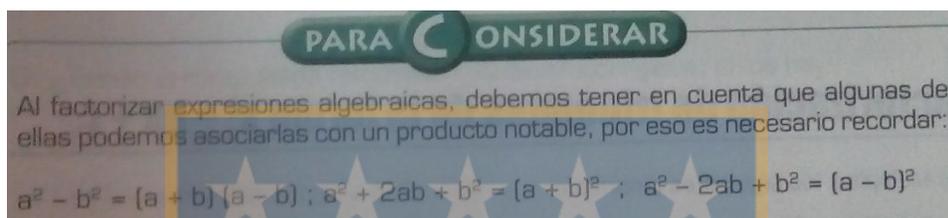
en su representación algebraica y geométrica, se explica su contenido y sus aplicaciones por ejemplo, en el cálculo de áreas.



EXPRESIÓN	FACTOR COMÚN
$c^2 + 2c$	$c$
$10b^3 - 30ab^2$	$10b^2$
$a^4 + a^3 - a^2$	$a^2$
$7xy - 7x^2c + 21xz$	$7x$
$7(x + 2) + (x + 8)(x + 2)$	$(x + 2)$

Otra aplicación que se da para el álgebra de potencias, es la factorización, en primera instancia se explica lo que es y cómo se encuentra el factor común de una expresión algebraica.

En segundo lugar, se presenta la factorización en productos notables. El contenido se resume en lo siguiente:



En cuanto a la factorización de trinomios de la forma  $x^2 + bx + c$ , no da algoritmos ni el contenido relacionado, sino que, se enfoca en el desarrollo de ejercicios de cálculo.

### 6.2.3.1.3 Aplicación de la MIGt para la caracterización del libro 2

Tabla N°33: MIGtL2

Campos genéricos MIGt(i), con i = 1, 2, 3, 4	Libro 2
MIGt1: Título y Procedencia	El título de la obra es "Matemática 3º Medio". Este libro es repartido por el ministerio de Educación.
MIGt2: Datos de Autoría	<b>Patricio González González</b> , Dr. Matemáticas Universidad de Louis Pasteur, Estrasburgo - Profesor Depto. Ciencias Físicas y Matemáticas Universidad Arturo Prat. <b>Jorge Soto Andrade</b> , Dr. Sc.Math. Universidad París XI - Profesor Facultad de Ciencias Universidad de Chile.
MIGt3: Edición y Tipo de Obra	Editorial Mare Nostrum Ltda. 3a edición. Este libro es recomendado para alumnos de 3º medio.
MIGt4: Presentación física	Consta de 256 páginas, cuyas dimensiones son 27,2 cm por 21 cm. Impreso en hoja blanca y en colores.

6.2.3.1.4 Aplicación de la MACt para la caracterización del libro 2

**MACt1: Organización de los contenidos**

El índice se encuentra entre las páginas 8 y 9 del texto escolar, está dividido en 7 Unidades, las cuales se muestran a continuación:

Tabla N°34: Organización de los contenidos L2

Unidad	Nombre
1	En busca de las raíces
2	¿Para donde se inclina la bañanza?
3	¿Cómo lograr más con menos?
4	El triángulo rectángulo: sus relaciones y sus razones
5	¿Por dónde andas?
6	Nadie sabe ni el día ni la hora
7	¡No a las islas! "La matemática no es un archipiélago"

El contenido de raíces se encuentra en la primera unidad.

**MACt2: Tipo de presentación de los contenidos**

La presentación de los contenidos es del tipo Constructivista incompleta, ya que comienza dando ejemplos de la vida cotidiana y mostrando problemas en los cuales se utiliza el cálculo de raíces. En cuanto a las actividades, éstas son del tipo Heurística, ya que al igual que el contenido propuesto los problemas son fundamentales en el desarrollo del libro de texto, dándole a los alumnos instancias para aplicar lo aprendido.

Por lo tanto, el presente libro de texto queda caracterizado por la combinación (CI, H).

**MACT3: Ecología de las potencias y raíces en los libros de textos**

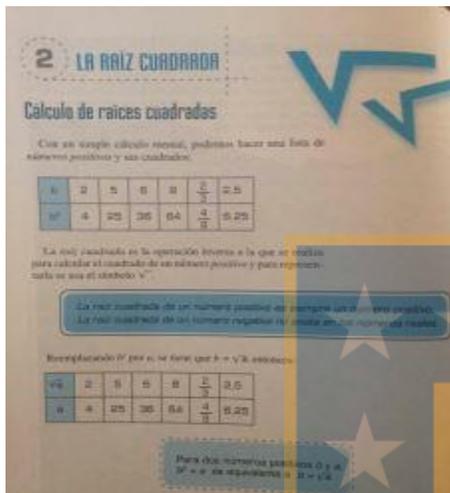
Como se mencionó anteriormente, el contenido de raíces se encuentra en la unidad 1. Con respecto a potencias, éstas se conocen de años anteriores por lo que aquí solo muestra algunas propiedades. Cabe mencionar que en cuanto al contenido de raíces, este es más bien cálculo, sin mostrar sus propiedades, y a diferencia de lo que dice el programa de estudio, el contenido está inserto en el libro de Segundo año medio, el cual en su segunda unidad muestra el concepto de raíz cuadrada y algunas de sus propiedades.

Esta unidad tiene 37 páginas que corresponden al 10,5% del total de los contenidos del libro de texto, y su estructura está de la siguiente forma:

Unidad N°2: Estructuras de la naturaleza

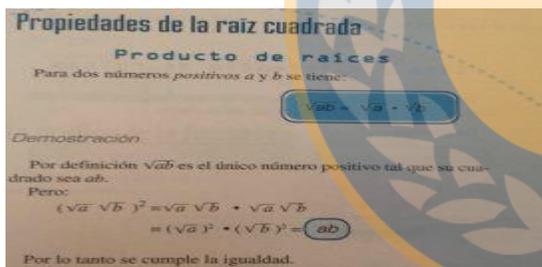
- La presencia geométrica en la naturaleza
- La raíz cuadrada
- El teorema de Pitágoras
- El triángulo equilátero
- Geometría con papel y tijeras
- Historia de Pitágoras
- En resumen
- Autoevaluación
- Juegos y desafíos
- Bibliografía

**MAcT4: Presentación de potencias y raíces**

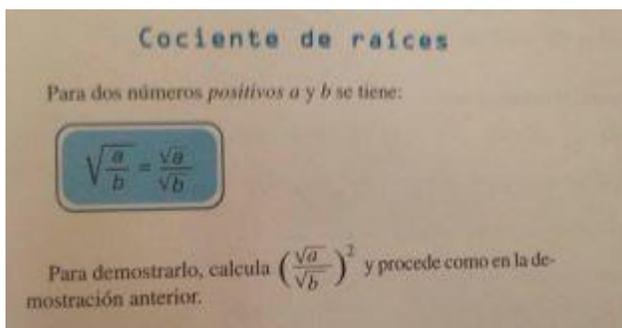


Comienza el contenido buscando los cuadrados de diferentes números, para luego definir lo que es raíz cuadrada para el autor de la siguiente forma: La raíz cuadrada es la operación inversa a la que se realiza para calcular el cuadrado de un número positivo y para representarla se usa el símbolo  $\sqrt{\quad}$ . Luego en un cuadro azul define que la raíz cuadrada de un número positivo es siempre positivo lo cual es correcto.

**MAcT5: Tratamiento de las propiedades de potencias y raíces.**

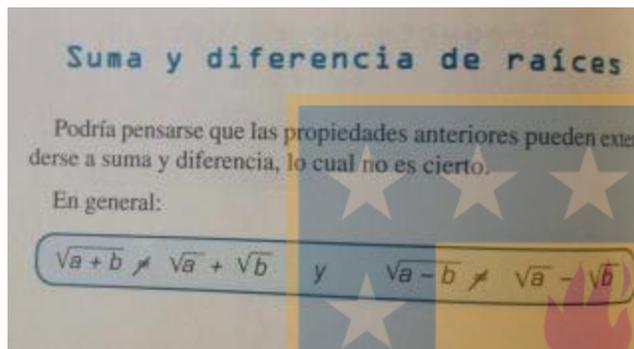
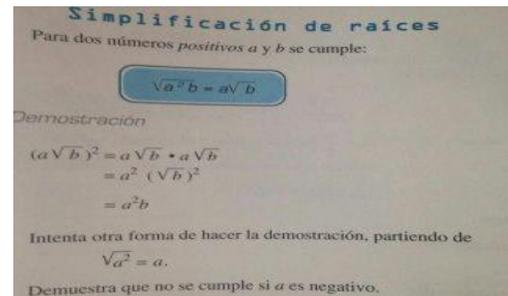


En la propiedad producto de raíces, o también llamada multiplicación de raíces de igual índice se define para  $a$  y  $b$  positivos por lo que la restricción es correcta.

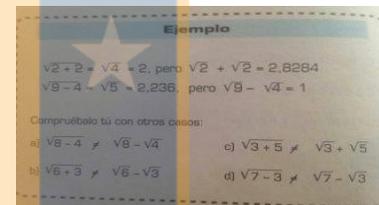


Para cociente de raíces o división de raíces de igual índice, la definición dice que al igual que en la propiedad anterior  $a$  y  $b$  son positivos. No realiza demostración, la deja como ejercicio para el lector.

La simplificación de raíces, la define para  $a$  y  $b$  positivos. Además deja al lector un contraejemplo para corroborar que no se cumple la propiedad para los números negativos. Falta extender la dicha propiedad para raíces que poseen un índice distinto de 2.

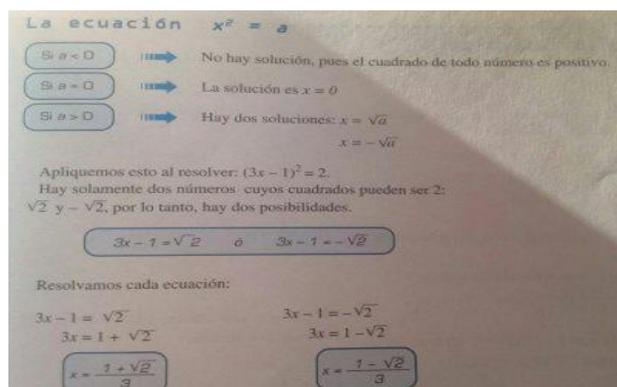


Deja claro que las siguientes situaciones no son verdaderas y da algunos ejemplos en donde se puede observar con claridad.



**MACT6: Aplicaciones del Álgebra de potencias y radicales**

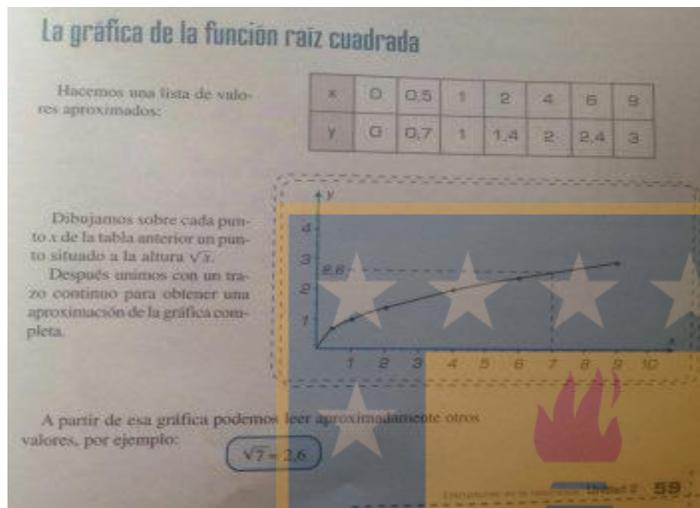
Con respecto a las aplicaciones que el libro de texto le da a raíces, podemos nombrar: función raíz, ecuación cuadrática entre otras.



La primera aplicación se encuentra en la página 59, la cual parte definiendo que las soluciones de una ecuación cuadrática van a depender de los posibles valores de  $a$ . Luego resuelve un ejercicio en el cual se llega fácilmente al resultado,

los ejercicios propuestos son del mismo tipo, no hace alusión de cómo sería una ecuación sin solución o cero.

La segunda aplicación encontrada fue la de función raíz cuadrada, la cual se



encuentra también en la página 56 del libro de texto. Comienza realizando una tabla de valores para luego hacer el gráfico correspondiente, no da otro ejemplo, para ver cómo se comporta la gráfica de la función  $\sqrt{x-1}$  u otra similar.

### 6.2.3.1.5 Aplicación de la MIGt para la caracterización del libro 3

Tabla N°35: MIGtL3

Campos genéricos MIGt(i), con $i = 1, 2, 3, 4$	Libro 3
MIGt1: Título y Procedencia	Matemática. Libro distribuido gratuitamente por el Ministerio de Educación
MIGt2: Datos de Autoría	<b>Rodrigo Bamón Cabrera:</b> Dr. Matemáticas IMPA, Brasil; Profesor Facultad de Ciencias Universidad de Chile
	<b>Patricio González González:</b> Dr. Matemáticas Université Louis Pasteur, Estrasburgo; Profesor Facultad de Ciencias Universidad de Chile
	<b>Jorge Soto Andrade:</b> Dr. Sc. Math. Université Paris XI; Profesor Facultad de Ciencias Universidad de Chile
MIGt3: Edición y Tipo de Obra	<b>Carmen Gloria Medina:</b> Profesora de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile (PUCCH)
MIGt4: Presentación física	Editorial Mare Nostrum Ltda. Segunda edición, destinada a alumnos de tercer año medio
	El libro de texto consta de 304 páginas, impresas en hoja blanca y a color. Sus dimensiones son 21 cm de ancho y 26 cm de largo

6.2.3.1.6 Aplicación de la Matriz MACt para la caracterización del libro 3

**MACt1: Organización de los contenidos**

En las páginas 10 y 11 se encuentra el índice del libro de texto, el que está dividido en 8 unidades tal y como se muestra a continuación:

Tabla N°36: Organización de los contenidos L3

Unidad	Nombre
1	En búsqueda de las raíces
2	Desigualdades
3	Optimizar: Un desafío permanente
4	Triángulos rectángulos: de Pitágoras a Fermat
5	¿En qué lugar te encuentras? He aquí mis coordenadas y lo sabrás. Plan diferenciado 3°
6	El retrato de la incertidumbre
7	Graficando con el computador
8	No a las islas, la matemática no es un archipiélago

El contenido de raíces queda establecido en la primera unidad de este libro de texto.

**MACt2: Tipo de presentación de los contenidos**

La estructura del contenido presentado en el libro de texto sigue la denominación de Constructivista Incompleto, pues comienza con el planteamiento de situaciones para que sea el estudiante el propio constructor del conocimiento, no obstante, tiende a existir una carencia de institucionalización del mismo. En cuanto a las actividades que presenta para la aplicación e internalización del conocimiento, queda calificado como heurístico, ya que, presenta una mayor cantidad de resolución de problemas que de cálculo directo.

De acuerdo a lo expresado anteriormente, el presente libro de texto queda caracterizado bajo el par (CI, H).

### **MACT3: Ecología de las potencias y raíces en los libros de textos**

El capítulo objeto de este estudio, se encuentra inmerso en la primera unidad dentro de la que ocupa 19 planas, lo cual equivale a un 6,25% del total del libro de texto. El contenido dentro de la unidad, se encuentra estructurado de la siguiente manera:

- ¿Cómo calculamos con potencias y raíces?
- Cálculo de potencias (repaso)
- El cálculo radical (con raíces)
- La célebre raíz cuadrada de 2
- Calculando hábilmente muchas raíces cuadradas a partir de pocas
- Las reglas del cálculo con raíces cuadradas
- Las raíces cúbicas
- Las reglas del cálculo radical para el caso de las raíces cúbicas
- ¿Por qué no ir más allá? en busca de las raíces n-ésimas

### **MACT4: Presentación de potencias y raíces**

La presentación que se hace para potencias y raíces, es más bien enfocada al cálculo de las mismas, es decir, no hay un mayor ahondamiento en cuanto a la teoría que corresponde a las mismas. En el caso de potencias, se asume que se ha visto en cursos anteriores, razón por la cual se entrega sólo un resumen con las propiedades correspondiente a ellas; por otra parte, la presentación que se hace de los radicales es un resumen de sus principales características, se puede observar en ellas que hay un pulcro trato con respecto a las restricciones de los literales intervinientes, además de dar una

visión apropiada del signo que toma la raíz, sin caer en el error del doble signo, no obstante falta una clara definición del conjunto en el cual se está trabajando.

Pongámonos de acuerdo primero, en que si  $a$  es un número positivo, entonces  $\sqrt{a}$ , que se escribe más simplemente  $\sqrt{a}$ , designa aquel único número positivo cuyo cuadrado es  $a$ . Por definición, entonces  $(\sqrt{a})^2 = a$  y  $\sqrt{a} \geq 0$ . Te indicamos que  $\sqrt{a}$  se llama la **raíz cuadrada positiva de  $a$** . Además de  $\sqrt{a}$  existe otro número, esta vez negativo, tal que su cuadrado es también  $a$ . A saber,  $-\sqrt{a}$ , la **raíz cuadrada negativa de  $a$** . Es decir:

$$(\sqrt{a})^2 = (-\sqrt{a})^2 = a.$$

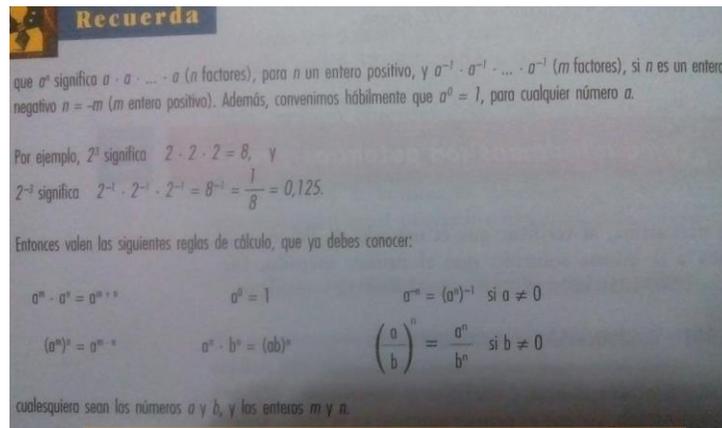
**Ten en cuenta**

Nota que si nos interesáramos en  $\sqrt{-4}$ , por más que busquemos, no encontraremos ningún número  $x$  tal que  $x^2 = -4$ , por la simple razón que, tanto si  $x$  es positivo como si es negativo, su cuadrado será un número positivo. Por otro lado, como  $0^2 = 0$ , escribiremos  $\sqrt{0} = 0$ .

Para un número positivo  $a$ , hay dos números, uno positivo y otro negativo, denotados por  $\sqrt{a}$  y  $-\sqrt{a}$  (**raíz de  $a$**  y **menos raíz de  $a$** ), cuyos cuadrados resultan ser  $a$ . El **cero** tiene uno solo número cuyo cuadrado es cero:  $\sqrt{0} = 0$ . Los números **negativos no** tienen raíces cuadradas.

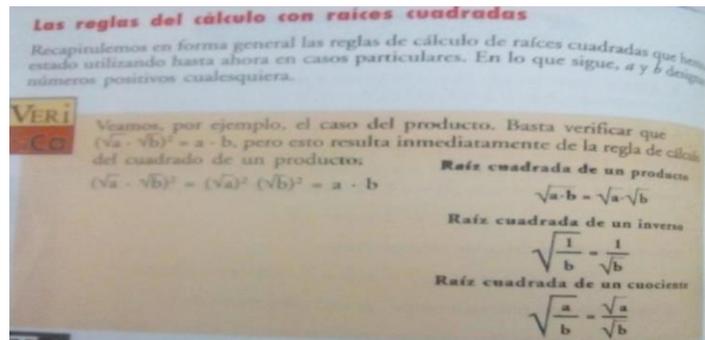
**MACt5: Tratamiento de las propiedades de potencias y raíces.**

En cuanto a potencias tal y como ya se mencionó anteriormente, sólo se hace referencia al contenido a modo de repaso:



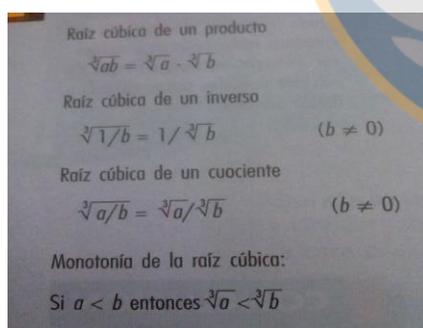
Se observa que las potencias son presentadas como multiplicación iterada y se hace entrega de 6 propiedades: la primera de ella establece que para multiplicar potencias de igual base, se conserva la base y se suman los exponentes; la segunda propiedad es la referente a aquellas potencias que tienen exponente cero, de acuerdo a lo estipulado por el saber sabio, esto no corresponde a una propiedad, si no que a una definición que establece que toda potencia elevada a cero es igual a uno, sin embargo, no realiza la restricción correspondiente a la base; la tercera propiedad establece que  $a^{-n} = (a^n)^{-1}$  y, establece que esto se cumple para cualquier número distinto de cero; en cuanto a potencia de una potencia, establece que  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ ; luego, se establece que para multiplicar potencias de igual exponente, se multiplican las bases y se conserva el exponente; en sexto lugar y final, establece que  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ , siempre y cuando el denominador sea distinto de cero. Todas estas propiedades establecidas por el autor sólo aparecen enunciadas, no son demostradas ni ejemplificadas y, con la restricción al final del apartado.

En cuanto al álgebra de radicales, el autor presenta lo que ha denominado: reglas del cálculo con raíces cuadradas, frente a ello establece lo siguiente:



Si bien es cierto, restringe los literales en el enunciado del contenido, diciendo que a y b son números positivos cualesquiera, las propiedades carecen de demostración. Seguido a este listado de reglas, hay ejemplificaciones de las mismas, con explicaciones paso a paso, lo que permite una mejor comprensión de estas reglas.

El siguiente título se denomina: las raíces cúbicas, en donde se simboliza una raíz cúbica y se explica que todo número positivo, negativo o cero, posee una única raíz cúbica y especifica que el signo de la raíz será igual al que tenga la cantidad subradical, seguido a esto se entregan ejercicios resueltos para clarificar el contenido. Finalmente, se entrega un nuevo listado de reglas algebraicas, pero esta vez para raíces cúbicas.



Antes de entregar este listado con reglas, se indica que a y b se designan con números cualesquiera, no obstante, al momento de enunciar la raíz cúbica de un inverso y de un cociente, se restringe que el denominador debe ser distinto de cero, por lo tanto, la restricción para los literales intervinientes está hecha de manera completa. Ninguna propiedad de las enunciadas en este listado presenta una demostración formal.

Luego que presenta el álgebra de radicales para raíces cuadradas y cúbicas, indica que la notación de raíces se puede hacer por medio de potencia con exponente fraccionario, acto seguido generaliza las propiedades que fueron indicadas puntualmente para raíces cuadradas y cúbicas y, las extiende para potencias de exponente entero y fraccionario. Nuevamente estas propiedades no son demostradas, sino que solamente enunciadas.

Handwritten mathematical properties of powers and roots:

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

$$(a/b)^n = a^n/b^n \quad \text{si } b \neq 0$$

$$a^{-n} = (a^n)^{-1} = 1/a^n \quad \text{si } a \neq 0$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^0 = 1$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Al finalizar el capítulo existe una síntesis del mismo, donde se clarifica que las raíces n-ésimas de números positivos se comportan de la misma manera que las potencias y raíces cuadradas y cúbicas en lo que se refiere a productos y cuocientes, y se presenta un listado de reglas general las cuales no son demostradas pero sí restringidas, para a y b números positivos cualesquiera, mientras que el exponente puede ser entero o fraccionario.

Handwritten general rules of calculation for powers and roots:

Reglas de cálculo general:

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

$$(a/b)^n = a^n/b^n$$

$$a^{-n} = (a^n)^{-1}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

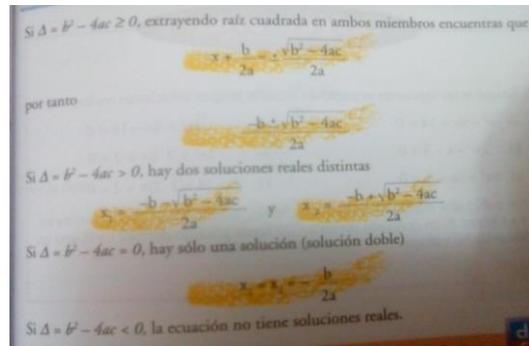
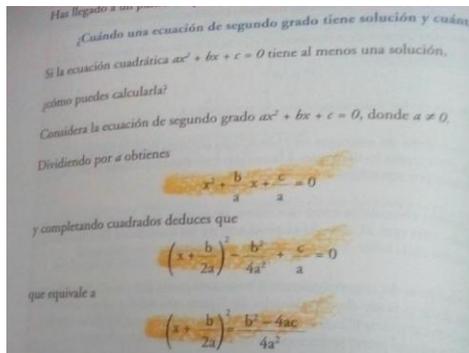
**MACT6: Aplicaciones del Álgebra de potencias y radicales**

En cuanto a las aplicaciones dadas en el libro de texto al álgebra de potencias y radicales, se encuentra primeramente el cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos, frente a lo que no se hace mayor hincapié en la teoría sino que, se entrega una tabla con las fórmulas que permiten determinar el volumen y/o área de ciertos cuerpos geométricos:

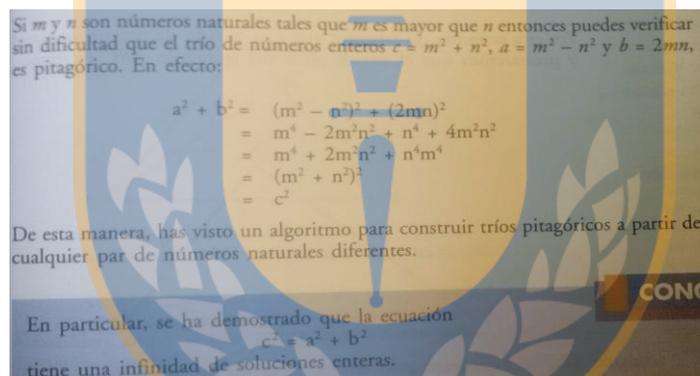
$V = \pi r^2 h$	$V = a^3$	$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$	$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$
$A = 2\pi r h + 2\pi r^2$	$A = 6a^2$	$A = \pi r^2$	$A = \pi r^2 + \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

Más adelante en la tercera unidad, estos contenidos se vuelven a utilizar en el capítulo de funciones cuadráticas, en el que se trabaja principalmente con parábola. Se define la teoría referente a ella y cómo calcular sus diversos elementos.

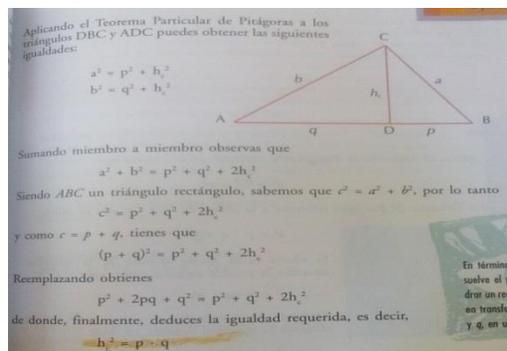
Otra aplicación relacionada son las ecuaciones de segundo grado, que se presentan en la misma tercera unidad, se presenta teoría y una serie de ejercicios que piden determinar soluciones para dichas ecuaciones. Un poco más adentrado en la unidad, aparece un nuevo título: Discusión y análisis de soluciones, en este punto ya no sólo se pide encontrar las soluciones correspondientes, sino que el alumno sea capaz de analizar la pertinencia de las mismas; para ello, lo primero que realiza es que a partir de una ecuación cuadrática cualquiera obtiene tres opciones de solución: dos soluciones reales distintas, única solución o sin soluciones reales:



En la cuarta unidad denominada: triángulos rectángulos de Pitágoras a Fermat, se utiliza el álgebra de potencias para demostrar el Teorema de Pitágoras, el cual es demostrado matemáticamente como una implicación y luego se conjetura su recíproco y se establece la igualdad.



Dentro de la misma cuarta unidad, el álgebra de potencias es utilizada para demostrar los teoremas de Euclides, de los cuales se entrega la teoría, sus aplicaciones y ejemplificaciones que clarifiquen el contenido.



Al seguir revisando el libro de texto, se puede visualizar que en la unidad 5, tanto el álgebra de potencias, el álgebra de radicales y la relación existente entre ellas, es utilizada para el cálculo de elementos de la circunferencia como lugar geométrico, así como también para la parábola y elipse.

Finalmente, aparece la unidad N°8 que se denomina: No a las islas, la matemática no es un archipiélago, tal y como indica su nombre en esta unidad se busca interrelacionar los contenidos tratados en el libro de texto, razón por la cual se trabaja evidentemente con el álgebra de potencias y con el álgebra de radicales.

#### 6.2.3.1.7 Aplicación de la MIGt para la caracterización del libro 4

Tabla N°37: MIGtL4

Campos genéricos MIGt(i), con i = 1, 2, 3, 4	Libro 4
MIGt1: Título y Procedencia	El título de la obra es " 1º Matemática activa ". Este libro es repartido por el ministerio de Educación.
MIGt2: Datos de Autoría	<b>Patricio González González</b> , Dr. Matemáticas Universidad de Louis Pasteur, Estrasburgo - Profesor Depto. Ciencias Físicas y Matemáticas Universidad Arturo Prat. <b>Jorge Soto Andrade</b> , Dr. Sc.Math. Universidad París XI - Profesor Facultad de Ciencias Universidad de Chile.
MIGt3: Edición y Tipo de Obra	Editorial Mare Nostrum Ltda. 1a edición. Este libro es recomendado para alumnos de 1º medio.
MIGt4: Presentación física	Consta de 256 páginas, cuyas dimensiones son 27 cm por 21 cm. Impreso en hoja blanca y en colores.

6.2.3.1.8 Aplicación de la MACt para la caracterización del libro 4

**MACt1: Organización de los contenidos**

El índice consta de 8 unidades, las cuales se muestran a continuación:

Tabla N°38: Organización de los contenidos L4

Unidad	Nombre
1	Jugando con la calculadora, ¿cuánto sale?
2	Comprando siempre comprando
3	El álgebra y la geometría de la mano
4	El juego de la balanza
5	¿Encaja o no? Reconociendo formas
6	Teselando el plano
7	De la Grecia antigua al computador
8	No a las islas

El contenido de potencias se encuentra en la primera unidad, el cual está inmerso entre las páginas 14-35.

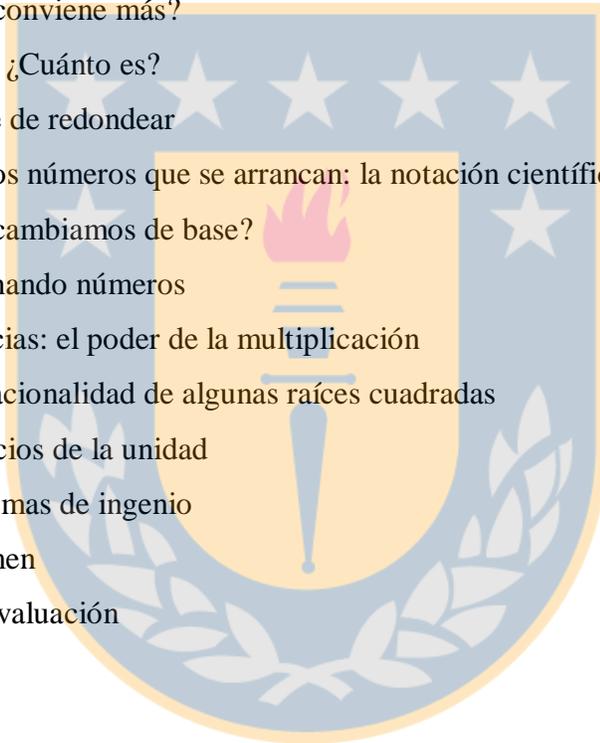
**MACt2: Tipo de presentación de los contenidos**

La presentación que utiliza el libro de texto para la unidad de potencias es del tipo constructivista incompleta, ya que no genera una institucionalización del contenido. Con respecto a las actividades propuestas, son más bien del tipo heurística ya que la mayoría de los ejercicios son problemas de ingenio. Por lo que la clasificación queda estipulada como (CI, H).

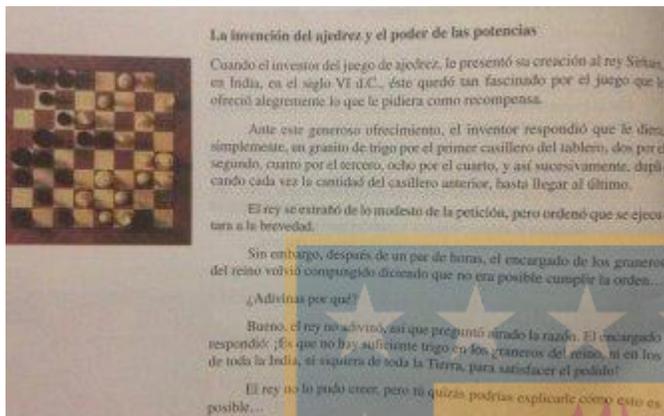
**MAcT3: Ecología de las potencias y raíces en los libros de textos**

La unidad posee 21 páginas, que corresponden al 8,2% del total del contenido del libro de texto. Su estructura es la siguiente:

- Unidad 1
  - ¿Qué conviene más?
  - A ojo, ¿Cuánto es?
  - El arte de redondear
  - Para los números que se arrancan: la notación científica
  - ¿Y si cambiamos de base?
  - Adivinando números
  - Potencias: el poder de la multiplicación
  - La irracionalidad de algunas raíces cuadradas
  - Ejercicios de la unidad
  - Problemas de ingenio
  - Resumen
  - Autoevaluación



**MAc4: Presentación de potencias y raíces**

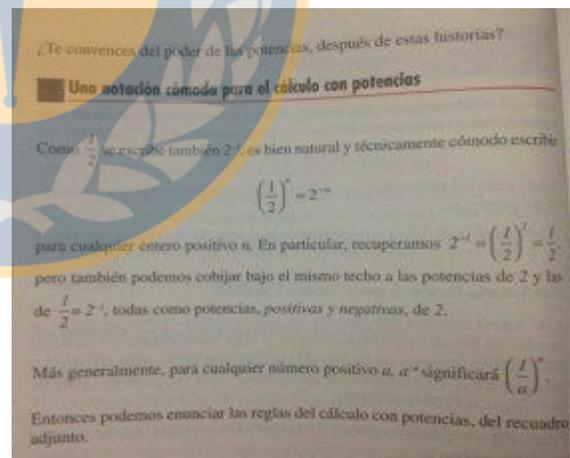


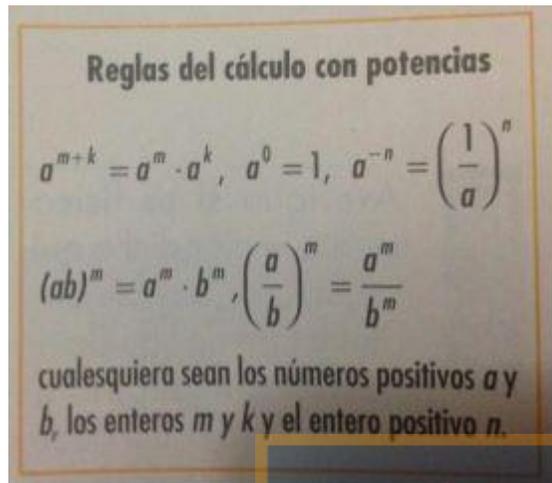
Utiliza la multiplicación iterada para definir el término potencia, pero comienza el contenido dando dos problemas, en donde utiliza el cálculo de potencias de igual base, uno de ellos con base entera y el otro con base racional. No utiliza mucha

simbología, ni institucionaliza la definición.

**MAc5: Tratamiento de las propiedades de potencias y raíces.**

Lo que respecta a las propiedades en este libro de texto, se puede ver una buena restricción con respecto al conjunto en las que es válida, pero no existe demostración formal de cada una de ellas.

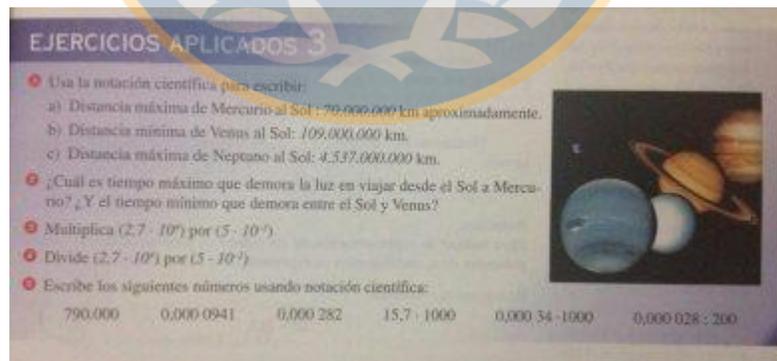




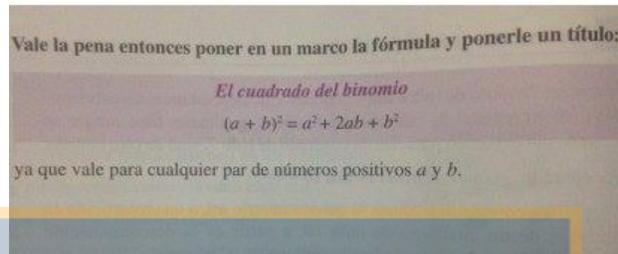
El autor enuncia lo que él denomina como regla de cálculo de potencias, en donde se observa una combinación de propiedades y definiciones, no haciendo una distinción entre ambas. Cabe señalar que hace una correcta y completa restricción de los literales.

**MACT6: Aplicaciones del Álgebra de potencias y radicales**

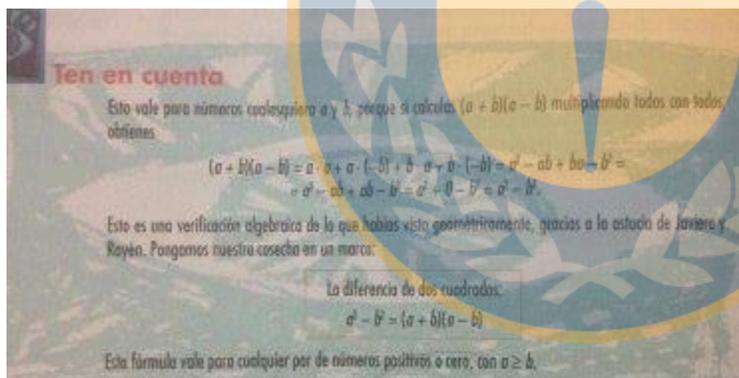
Dentro de las aplicaciones consideradas para este contenido, en primera instancia se encuentra notación científica, la cual está entre las páginas 20-21, mucho antes del contenido de potencias. Los ejercicios que plantea son mecánicos pero también tiene algunos problemas de ingenio.



Otra de las aplicaciones que se utilizan, son las de productos notables, si bien es cierto, la definición no la construye haciendo la repetición del binomio utilizando potencias, éstas la utiliza al momento del cálculo.



La definición que presenta el texto es memorizando la siguiente frase, para el caso de cuadrado del binomio: Para descomponer el cuadrado de un número más otro, hay que elevar al cuadrado el primer número sumarle el doble del producto de los dos números y añadir el cuadrado del segundo número.



En el caso de suma por su diferencia, lo verifica de manera algebraica y luego de resolver un problema de ingenio, por lo que institucionaliza la propiedad a partir de esta observación.

### 6.2.3.2 Perfil del Saber a Enseñar tercer período

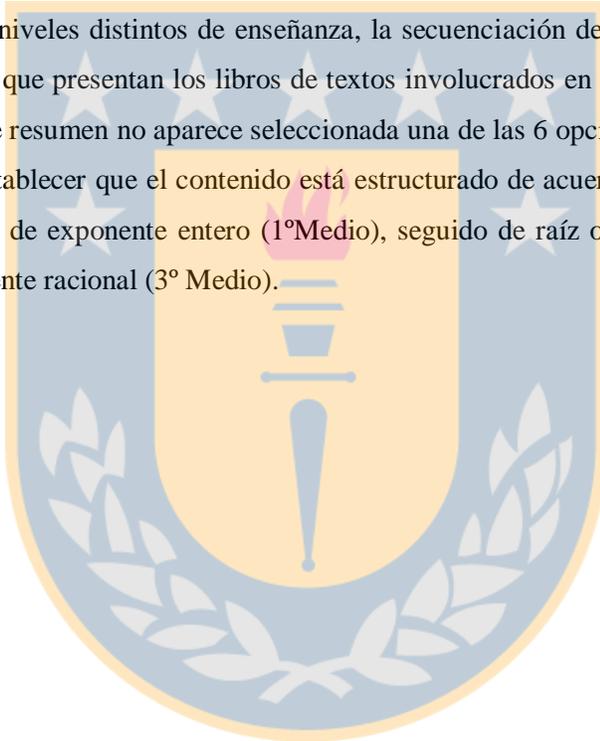
De acuerdo a la información analizada anteriormente, se construirá el perfil del saber a enseñar correspondiente al tercer período, vaciando dicha información primero en una matriz de resumen y cotejo, para finalmente analizarlas mediante una tabla de doble entrada, ambos instrumentos se encuentran en la sección de anexos bajo los números 39 y 40, respectivamente. Este perfil será caracterizado de acuerdo al comportamiento modal observado en cada ítem de las matrices contempladas.

En cuanto a la información proporcionada por las matrices de identificación general, se destacan los siguientes aspectos:

1. El 100% de los libros de texto analizados en este período son nacionales y distribuidos gratuitamente por el Ministerio de Educación, para el proceso de enseñanza-aprendizaje de los alumnos de primer y tercer año medio.
2. Los 7 autores que participan en la confección de los libros de texto analizados en este período tienen el título de pre-grado de Profesor de Matemática; 3 de ellos poseen un Magister en Enseñanza de las Ciencias con Mención en didáctica de la matemática y, 3 poseen el grado de Doctor de las matemáticas.
3. Las cuatro obras consultadas fueron editadas en Chile por las editoriales Zig-Zag y MareNostrum.
4. En cuanto a la presentación física de los libros de texto, el 100% de ellas fueron impresas en hoja blanca y con tinta de color.
5. De acuerdo a la estructura con la que se presenta el contenido, este período queda predominado por un Constructivismo Incompleto y, de acuerdo a las actividades que proponen hay una prevalencia de la resolución de problemas por sobre la resolución de ejercicios, es por ello que se califica como Heurística. Lo anterior tiene estrecha relación con lo que se propone en la reforma para matemática.

6. En estos libros de texto se puede apreciar claramente la intención de implementar el constructivismo como método de aprendizaje. Su mayor diferencia en relación a los períodos anteriores, es la alta cantidad de aplicación que se le da a los contenidos a situaciones de la vida cotidiana, sin embargo, se excede en problemas de este tipo dejando un poco de lado lo que atañe a la matemática formal, olvidando muchas veces institucionalizar los contenidos trabajados.

\*Observación: Es importante señalar que debido a que el contenido de potencias y raíces está estipulado en dos niveles distintos de enseñanza, la secuenciación de contenidos se realizó siguiendo la estructura que presentan los libros de textos involucrados en ambos niveles. Es por ello que en la matriz de resumen no aparece seleccionada una de las 6 opciones, sin embargo, en este punto podemos establecer que el contenido está estructurado de acuerdo a la secuencia que comienza con potencia de exponente entero (1º Medio), seguido de raíz o radical y finalizando con potencia de exponente racional (3º Medio).

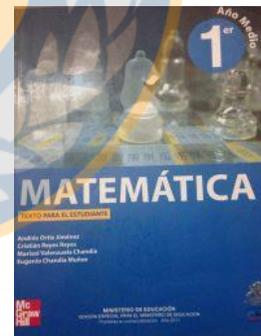
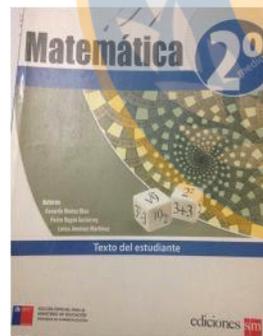


### 6.2.4 Ajuste Curricular de 2009

Los libros de texto utilizados para el presente período, son los siguientes:

Tabla N°41: Libros de texto seleccionados cuarto período

N°	Año	Edición	Autor	Título	Editorial
1	2014	1	Gerardo Muñoz Díaz	Matemática 2° Medio	SM Chile
			Pedro Rupin Gutiérrez		
			Lorna Jiménez Martínez		
2	2011	1	Andrés Ortiz Jiménez	Matemática. 1er año Medio	Mc Graw Hill
			Cristián Reyes Reyes		
			Marisol Valenzuela Chandía		
			Eugenio Chandía Muñoz		



### 6.2.4.1 Caracterización Libros de Texto

#### 6.2.4.1.1 Aplicación de la MIGt para la caracterización del libro 1

Tabla N°42: MIGtL1

Campos genéricos MIGt(i), con i = 1, 2, 3, 4	Libro 1
MIGt1: Título y Procedencia	Matemática. Libro distribuido gratuitamente por el Ministerio de Educación
MIGt2: Datos de Autoría	<b>Gerardo Muñoz Díaz:</b> Profesor de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Chile; Ingeniero Eléctrico, Universidad de Santiago de Chile; Magister en Enseñanza de las Ciencias con mención en Didáctica de la Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
	<b>Lorna Jiménez Martínez:</b> Profesora de Matemática; Licenciada en Matemática, Pontificia Universidad Católica de Chile
	<b>Pedro Rupín Gutiérrez:</b> Profesor de Matemática; Licenciado en Matemática, Pontificia Universidad Católica de Chile
MIGt3: Edición y Tipo de Obra	Ediciones SM Chile S.A. Primera edición. Esta publicación está destinada a jóvenes que cursan segundo año medio
MIGt4: Presentación física	El libro de texto consta de 384 páginas, impresas en hoja blanca y a color. Sus dimensiones son 20,9 cm de ancho y 27,4 cm de largo

6.2.4.1.2 Aplicación de la MACt para la caracterización del libro 1

**MACt1: Organización de los contenidos**

En las páginas 2 y 3 se encuentra el índice del libro de texto, donde se muestra la siguiente estructura:

Tabla N°43: Organización de los contenidos L1

Unidad	Nombre
1	Números
2	Álgebra
3	Geometría
4	Datos y Azar

En este curso, el contenido de raíces está establecido en la primera unidad, esto incluye a las potencias de exponente racional.

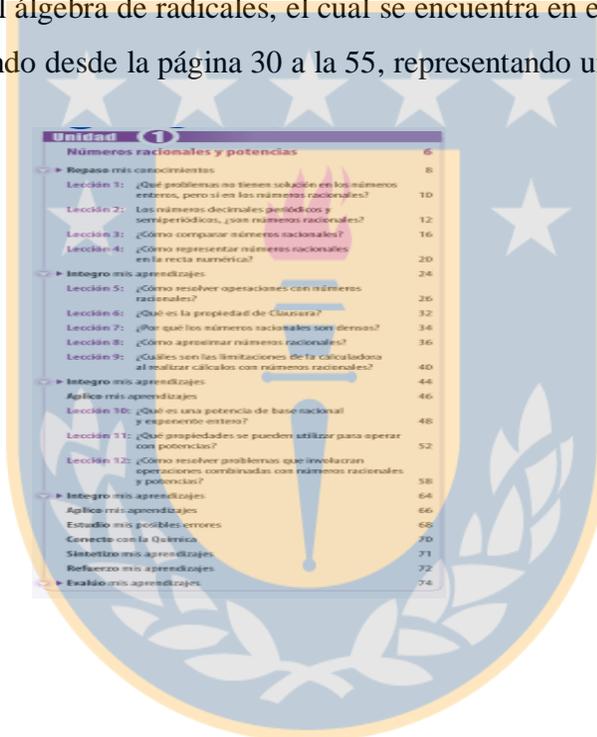
**MACt2: Tipo de presentación de los contenidos**

En cuanto a la estructura con la que se presenta el contenido en este libro de texto, sigue una secuencia que se adapta más bien a lo que se ha denominado como Constructivista Incompleta, pues comienza ejemplificando de manera que el alumno vaya llegando a las conclusiones pertinentes, no obstante al finalizar muchas veces falta una definición formal del contenido. Por otra parte, de acuerdo a las actividades presentadas en el texto estas siguen un patrón mecanicista, pues se basan en cálculo directo de raíces mediante la aplicación de algoritmos. En conclusión en cuanto a la

presentación de los contenidos dados por este libro de texto, éste queda clasificado bajo el par (CI, M).

**MACT3: Ecología de las potencias y raíces en los libros de textos**

Como ya se ha mencionado anteriormente, en este curso sólo se estudia el contenido referente al álgebra de radicales, el cual se encuentra en el primer capítulo del libro de texto abarcando desde la página 30 a la 55, representando un 6,77% del total del texto.



Unidad 1	
Números racionales y potencias	
Repasa más conocimientos	8
Lección 1: ¿Qué problemas no tienen solución en los números enteros, pero sí en los números racionales?	10
Lección 2: Las números decimales periódicos y semiperiódicos, ¿son números racionales?	12
Lección 3: ¿Cómo comparar números racionales?	16
Lección 4: ¿Cómo representar números racionales en la recta numérica?	20
Integro mis aprendizajes	24
Lección 5: ¿Cómo resolver operaciones con números racionales?	26
Lección 6: ¿Qué es la propiedad de Clausura?	32
Lección 7: ¿Por qué los números racionales son densos?	34
Lección 8: ¿Cómo aproximar números racionales?	36
Lección 9: ¿Cuáles son las limitaciones de la calculadora al realizar cálculos con números racionales?	40
Integro mis aprendizajes	44
Aplico mis aprendizajes	46
Lección 10: ¿Qué es una potencia de base racional y exponente entero?	48
Lección 11: ¿Qué propiedades se pueden utilizar para operar con potencias?	52
Lección 12: ¿Cómo resolver problemas que involucren operaciones combinadas con números racionales y potencias?	58
Integro mis aprendizajes	64
Aplico mis aprendizajes	66
Estudio mis posibles errores	68
Conecto con la Química	70
Síntesis mis aprendizajes	71
Refuerzo mis aprendizajes	72
Evaluó mis aprendizajes	74

**MACT4: Presentación de potencias y raíces**

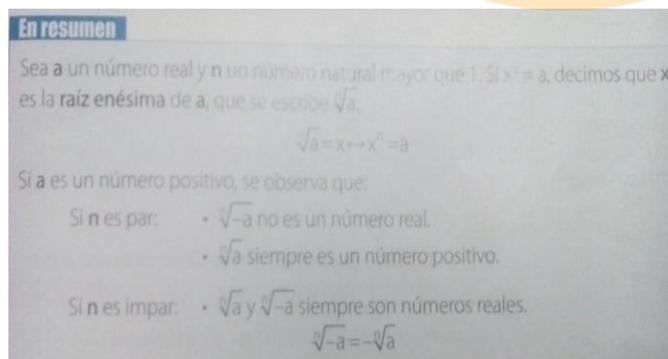


Mediante la utilización de una situación contingente como lo es la viralización de contenidos por medio de las redes sociales, se busca acercar el contenido de crecimiento exponencial y, junto con él lo referente a potencias y radicales. Si bien, no se da una definición formal del contenido, se propone una actividad en la cual se aplicarán los contenidos que se verán más adelante. Esta presentación es lo que Guy Brousseau denomina situación a-didáctica, en donde el estudiante pone en acción sus conocimientos previos,

para la resolución de una situación puntual, de esta manera tiene un primer acercamiento al contenido que se pretende introducir.

**MACT5: Tratamiento de las propiedades de potencias y raíces.**

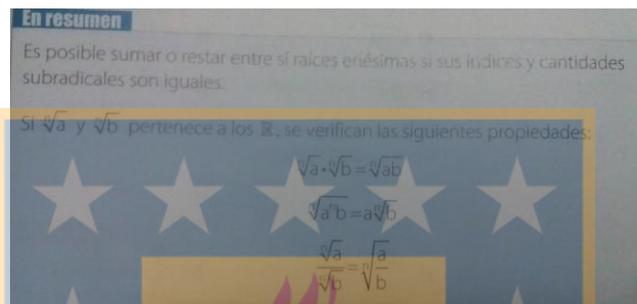
A partir de ejercicios puntuales, va presentando el contenido de radicales para luego generalizarlos de la siguiente manera:



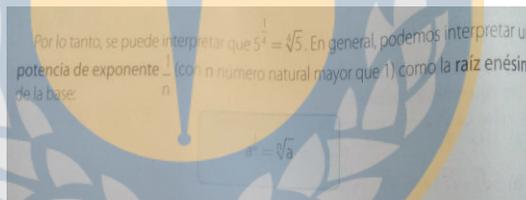
Se presentan los radicales como operación inversa de las potencias y, se hace la diferenciación para el índice par e impar de una raíz de un número positivo y negativo. Las restricciones están hechas de manera correcta y

completa, sin embargo, no existe una demostración formal para las propiedades entregadas.

Sigue la misma tónica al presentar ejercicios de cálculo al principio, para luego generalizarlos sin demostraciones pero con restricciones para cada propiedad



Las potencias de exponente racional son presentadas de la misma manera que el contenido anterior, es decir, a partir de un caso particular se extiende a lo general, sin demostraciones, sino que solamente es enunciada



Después de todas estas propiedades que son enunciadas, el autor dice que ellas son las que permiten reducir expresiones y demostrar otras propiedades, acto seguido entrega una tabla con 6 propiedades de radicales, de las cuales ninguna está demostrada y tampoco existen restricciones para los literales intervinientes.

Propiedad	Ejemplo
$\sqrt[n]{a^{mr}} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$\sqrt[3]{3^6} = \sqrt[3]{3^{2 \cdot 3}} = \sqrt[3]{3^3}$
$\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = (ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{ab^m}$	$\sqrt[3]{9^2} \cdot \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{45^2}$
$\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}}$	$\frac{\sqrt[2]{2^4}}{\sqrt[2]{11^4}} = \sqrt[2]{\frac{2^4}{11^4}}$
$\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{n}} = a^{\left(\frac{m+p}{n}\right)} = \sqrt[n]{a^{mq+np}}$	$\sqrt[6]{2^1} \cdot \sqrt[2]{2^2} = 2^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\left(\frac{1+4}{6}\right)} = 4\sqrt[2]{2^{19}}$
$\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{a^p}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{n}}} = a^{\left(\frac{m-p}{n}\right)} = \sqrt[n]{a^{mq-np}}$	$\frac{\sqrt[5]{8^4}}{\sqrt[3]{8^1}} = \frac{8^{\frac{4}{5}}}{8^{\frac{1}{3}}} = 8^{\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{3}\right)} = 8^{\left(\frac{12-5}{15}\right)} = 15\sqrt[8]{8^7}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left((a)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = (a)^{\frac{1}{n \cdot m}} = (a)^{\frac{1}{nm}} = \sqrt[nm]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[5]{10}} = \left((10)^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{3}} = (10)^{\frac{1}{15}} = 15\sqrt[10]{10}$

Posterior a cada una de las propiedades que se presentaron, sigue un listado con ejercicios que buscan la aplicación de algoritmos.

### MACT6: Aplicaciones del Álgebra de potencias y radicales

Entre las actividades que destacan el uso del álgebra de radicales son en primer lugar la racionalización donde se explica qué es la racionalización y cómo se desarrolla.

**En resumen.**

Dada una expresión que contiene una o más raíces inexactas (irracional) en su denominador, se llama racionalizar al proceso de encontrar una expresión equivalente a ella que no contenga raíces en el denominador. Para ello se pueden emplear las siguientes equivalencias:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b \pm \sqrt{c}}} = \frac{a(\sqrt{b \pm \sqrt{c}})}{b - c}$$

La segunda aplicación es lo que el autor denomina ecuación radical, que son aquellas ecuaciones en las que intervienen radicales, se entrega la teoría y se muestran ejemplificaciones.

**El resumen**

Una ecuación radical es aquella cuya incógnita se encuentra en una cantidad subradical. Para resolverla es necesario utilizar las propiedades de las raíces y considerar sus restricciones.

6.2.4.1.3 Aplicación de la MIGt para la caracterización del libro 2

Tabla N°44: MIGtL2

Campos genéricos MIGt(i), con i = 1, 2, 3, 4	Libro 2
MIGt1: Título y Procedencia	El título de la obra es " 1º Matemática". Este libro es repartido por el ministerio de Educación.
MIGt2: Datos de Autoría	<p><b>Andrés Ortiz Jimenez</b>, Profesor de Matemáticas - Licenciado en Educación - Magister en Enseñanza de las Ciencias - Facultad de Educación, Universidad de Concepción.</p> <p><b>Cristián Reyes Reyes</b>, Doctor en Matemática - Centro de modelamiento matemático, Universidad de Chile.</p> <p><b>Marisol Valenzuela Chandía</b>, Profesor de Matemática - Facultad de Filosofía y Humanidades - Licenciada en Matemática - Facultad de Ciencias, Universidad de Chile - Coordinadora de Ciencias y Matemáticas EDUCAUC.</p> <p><b>Eugenio Chandía Muñoz</b>, Profesor de Matemática y Computación - Facultad de Educación, Universidad de Concepción - Magíster en Educación - Facultad de Educación, Universidad de Concepción - Estudios de Magíster en Matemática - Facultad Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Concepción.</p>
MIGt3: Edición y Tipo de Obra	Editorial McGraw-Hill Interamericana. 1a Edición. Libro recomendado para alumnos de 1º año medio.
MIGt4: Presentación física	Consta de 256 páginas, cuyas dimensiones son 27 cm por 21 cm. Impreso en hoja blanca y en colores.

6.2.4.1.4 Aplicación de la MACt para la caracterización del libro 2

**MACt1: Organización de los contenidos**

El índice de contenidos, se encuentra en las páginas 6 y 7 del texto escolar y su estructura es la siguiente:

Tabla N°45: Organización de los contenidos L2

Unidad	Nombre
1	Números
2	Álgebra
3	Geometría
4	Datos y Azar

En donde el contenido de potencias se encuentra en la Unidad 1.

**MACt2: Tipo de presentación de los contenidos**

Los contenidos presentados en este libro de texto, son del tipo Constructivista completa, ya que comienza con un problema y luego a partir de eso construye la definición de potencia. Con respecto a los ejemplos o actividades propuestos son del tipo heurísticos, ya que no mecaniza y presenta problemas para desarrollar. Por lo tanto la caracterización de la presentación de contenidos queda (CC,H).

**MAcT3: Ecología de las potencias y raíces en los libros de textos**

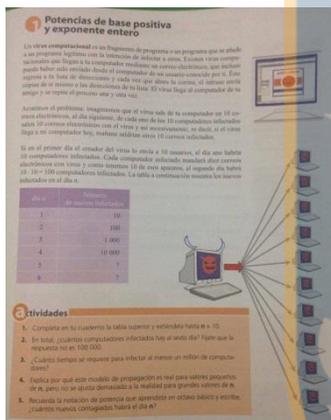
Como mencionó anteriormente el contenido de potencias se encuentra en la Unidad 1, la cual contiene 43 páginas, las cuales representan el 16,8% del total de contenidos que incluye el libro de texto. Esta unidad está estructurada de la siguiente forma:

Unidad N°1: Números

- Para recordar
  - Potencias de base positiva y exponente entero
  - Propiedades de las potencias
- Problema resuelto
- Aplicando lo aprendido
  - Notación decimal
  - Notación científica
- Información en los medios
- Aplicando lo aprendido
  - Números racionales v/s números irracionales
  - Suma y productos de números racionales
  - Un número no racional
  - Notación decimal de los números racionales
- Aplicando lo aprendido
  - Transformación de notación decimal a fraccionaria
- Aplicando lo aprendido
- Un poco de historia
  - Los números irracionales
- Aplicando lo aprendido

- Aproximaciones
- Regularidades numéricas
- Aplicando lo aprendido
- Actividades finales
- Autoevaluación

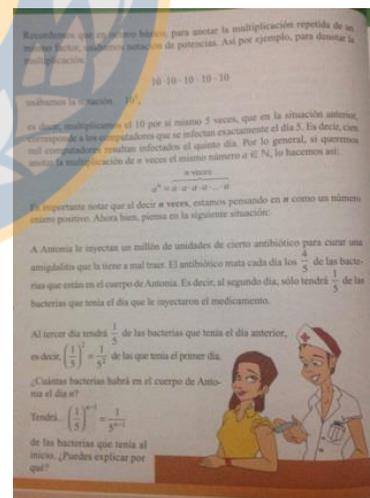
**MACT4: Presentación de potencias y raíces**



Para la presentación del contenido de potencias, utiliza un problema de la vida cotidiana para explicar un proceso que se repite varias veces. Es claro y explica a través de dibujo y una tabla de valores. Luego deja 5 actividades para el estudiante relacionadas con el mismo problema para una mejor comprensión.

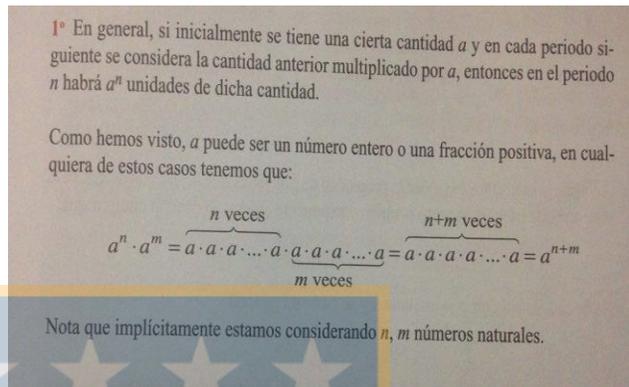
En la siguiente página, recuerda un contenido de octavo básico correspondiente a la multiplicación repetida, para luego formalizar a partir de ese aprendizaje previo la definición de potencias, dejando en claro que  $a \in \mathbb{N}$  y  $n$  es un número entero positivo.

Nuevamente propone un ejemplo resuelto, ahora para una potencia de base racional.

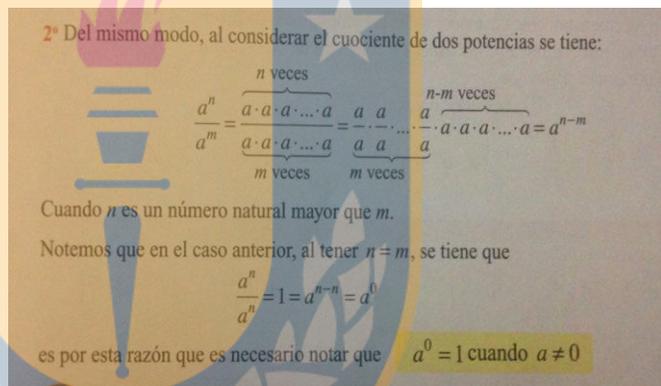


**MACt5: Tratamiento de las propiedades de potencias y raíces.**

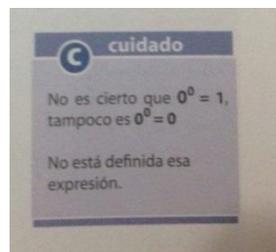
La primera propiedad corresponde a la multiplicación de potencias de igual base, demuestra dicha propiedad y hace las restricciones pertinentes, considerando la base  $a$  como un número entero y  $n, m$  números naturales.



Del mismo modo, considera la división de potencias de igual base, de la cual también realiza una demostración, pero su restricción es incompleta ya que en ninguna parte hace referencia a que  $a$  debe ser distinto de cero, solo que es un número entero. Para este caso considera  $n > m$ , ambos naturales.



Luego a partir de la misma propiedad, pero ahora considerando  $n = m$ , define una potencia con exponente 0 y especificando ahora que solo es válido para  $a \neq 0$ , además en la misma página agrega:



Otra propiedad es potencia de una potencia, donde hace referencia que  $a > 0$  y  $n, m \in \mathbb{N}$ , utiliza la definición de potencias ya mencionada anteriormente para la demostración. También hace la siguiente observación:

3ª Otra propiedad es una forma abreviada de calcular las potencias de una potencia, es decir, ¿cómo calcular  $(a^n)^m$ , si  $a > 0$  y  $n, m \in \mathbb{N}$ ?

Para responder esta pregunta basta recordar las definiciones de potencias:  $(a^n)^m$  es multiplicar  $m$  veces  $a^n$ , esto es:

$$(a^n)^m = \overbrace{a^n \cdot a^n \cdot a^n \cdot \dots \cdot a^n}^{m \text{ veces}} = \overbrace{a^{n+n+\dots+n}}^{m \text{ veces}} = a^{nm}$$

Recordemos que al inverso multiplicativo de  $a$  lo anotamos por  $a^{-1}$  cuando  $a$  no es cero. Es decir,  $a^{-1} = \frac{1}{a}$ .

Como  $5^n \cdot \frac{1}{5^n} = \frac{5^n}{5^n} = 1$ , es decir, el número  $5^n$  y  $\frac{1}{5^n}$  son inversos multiplicativos, es lógico anotar  $(5^n)^{-1} = \frac{1}{5^n}$ .

Además, si queremos extender la propiedad de potencias que acabamos de ver, para potencias de base un número positivo y exponente entero, se debería cumplir que:

$$5^{-n} = \frac{1}{5^n}$$

De hecho, es así como lo anotamos y se tiene en general:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{con } a > 0 \text{ y } n \in \mathbb{N}$$

En resumen, podemos extender todas las propiedades de potencias de base positiva y exponente natural a propiedades de potencias de base cualquier fracción y exponente entero. Estas son:

Si  $a$  es fracción y  $n, m \in \mathbb{Z}$  se tiene:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad a^0 = 1$$

**C** **cuidado**

No es cierto que  $a^{n^m} = (a^n)^m$

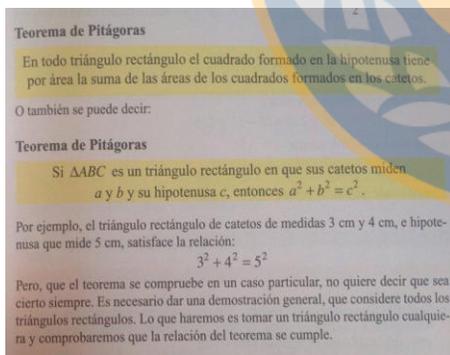
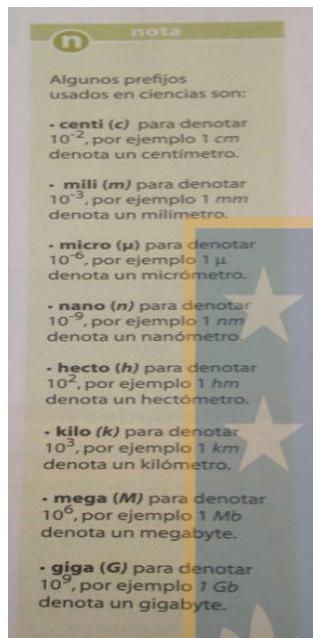
Por ejemplo,  $10^{3^2}$  es un número que tiene 9 ceros después de un 1, es decir, mil millones; en cambio,  $(10^3)^2$  es un número formado por 6 ceros después de un 1, es decir, un millón.

Luego a partir del inverso multiplicativo, termina definiendo potencia de exponente negativo, del cual si hace restricciones.

**MACT6: Aplicaciones del Álgebra de potencias y radicales**

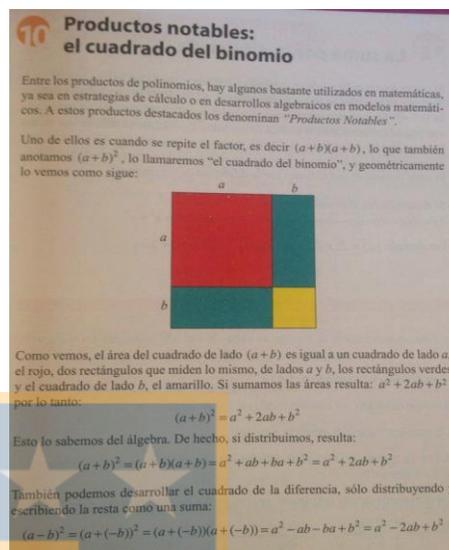
Algunas de las aplicaciones que se encuentran en el libro de texto son:

Utiliza el concepto de notación científica para representar la medida en metros de varios objetos existentes en la naturaleza, y así evitar tantos decimales y simplificar el cálculo. A continuación se muestran alguno de ellos.



En el caso del teorema de pitágoras, anuncia que este ya se ha aplicado y mencionado en otras situaciones, pero que en este caso en particular y partir del contenido ya visto de potencias, realizará la demostración formal y luego se utilizan además para la aplicación en algunos ejercicios propuestos.

Dentro de los productos notables utilizados en el libro de texto, se destacara como aplicación uno de ellos, el cual se genera a partir de la repetición de los siguientes factores  $(a + b)(a + b)$ , los que llevándolos a potencias se expresan  $(a + b)^2$ .



El autor afirma que no es necesario aprenderse de memoria el resultado del cuadrado de binomio, sino que también es posible desarrollar la multiplicación que se genera al resolver la potencia, sin promover la memorización en los alumnos.

#### **6.2.4.2 Perfil del Saber a Enseñar cuarto período**

De acuerdo a la información analizada anteriormente, se construirá el perfil del saber a enseñar correspondiente al cuarto período, al traspasar dicha información en primera instancia a una matriz de resumen y cotejo y, luego a una tabla de doble entrada, ambos instrumentos se encuentran en el capítulo de anexos bajo los números 46 y 47, respectivamente. Este perfil será caracterizado de acuerdo al comportamiento modal observado en cada ítem de las matrices contempladas.

En cuanto a la información proporcionada por las matrices de identificación general, se destacan los siguientes aspectos:

1. Las dos obras consultadas para realizar este análisis, corresponden a libros de texto nacionales distribuidas gratuitamente por el Ministerio de Educación.
2. De los siete autores de los libros de texto, 6 de ellos son profesores de matemática mientras que uno es doctor en matemática. Además entre ellos se

encuentran 3 licenciados en matemática y 1 licenciado en educación. Por otra parte, en cuanto a los Magister, encontramos 2 autores que poseen el título de Magister en Enseñanza de las Ciencias, otro que posee el Magister en educación y matemática.

3. Ambas obras fueron editadas en Chile, por las editoriales SM Chile y McGraw-Hill.
4. Ambos libros de texto poseen una presentación en hoja blanca e impresión a color.
5. Pese a que los textos pertenecen a un mismo período educativo, se observa una estructura de contenidos distinta, pues mientras el primero de ellos responde a una combinación de Constructivista Incompleta de carácter mecanicista, la segunda lo hace a una combinación de Constructivista Completa de carácter heurística. De acuerdo al objetivo establecido en este período para la enseñanza matemática, el segundo libro de texto analizado es el que lo cumpliría con lo propuesto por la reforma.
6. En este período se ve un predominio de la teoría de aprendizaje constructivista, si bien, en un libro de texto está mejor logrado que en el otro, en ambos se puede identificar dicha teoría.

\*Observación: Al igual que para los dos períodos anteriores, la secuenciación de los contenidos se realizará en base a la estructuración que presenten los libros de texto analizados, ya que, los contenidos de potencias y raíces se encuentran establecidos en niveles distintos de enseñanza. En este sentido es que se ha determinado que la secuencia a la cual responden los libros de texto estudiados es la correspondiente a potencia de exponente entero, seguido de raíz o radical, para finalizar con potencia de exponente fraccionario.

## Capítulo 7: Resultados

### 7.1 Triangulación de CSaEp, CSaEt y SS

El primer estudio comparativo a realizar es el correspondiente al saber a enseñar de los programas oficiales con el saber erudito, en este punto, se vislumbra la diferencia de términos existente entre ambos, mientras el primero trabaja con el concepto de raíz o radical, el segundo comienza trabajando con raíz, para posteriormente especificar el término raíz principal; también se puede diferenciar la cantidad de restricciones con las que se trabaja en cada documento, mientras que en el saber erudito se encuentran las definiciones y propiedades claramente restringidas, en algunos de los programas oficiales se observa una carencia de las mismas, lo que saca a las propiedades de su campo de validez; en este mismo sentido, se puede observar un punto en común entre el saber sabio y los programas oficiales, donde se diferencian claramente las definiciones de las propiedades, sin embargo, en los programas no se tratan todas las propiedades que dicta el saber erudito.

Por otra parte, al hacer un análisis comparativo entre el Saber Sabio y los Libros de Texto, inmediatamente se visualiza una extensa brecha en lo que respecta a las restricciones presentes tanto para las definiciones como para las propiedades del álgebra de potencias y de radicales, donde en los libros de texto existe una carencia, la que se ha ido subsanando con el paso del tiempo. El Saber Erudito es claro en diferenciar lo que corresponde a una definición de lo que corresponde a una propiedad, mientras que en los libros de texto examinados se torna recurrente la confusión entre ambas. Otro punto a considerar, es que en el saber erudito se hace una clara distinción entre el concepto de raíz y raíz principal, mientras que en los libros de texto se trabaja como un concepto unificado, lo que muchas veces conduce al error del doble signo, al establecer que  $\sqrt{a} = \pm b$ .

Al momento de realizar la triangulación entre el saber a enseñar de los programas oficiales con el saber a enseñar de los libros de texto, se visualiza que no existe una gran distancia de contenidos entre ambos, existe una escases de restricciones tanto en programas como en libros, siendo mucho más notorias en estos últimos. Por otra parte, las demostraciones de las propiedades del álgebra de radicales y de potencias, no aparecen demostradas en los programas de estudios, mientras que en algunos libros de texto sí encontramos las demostraciones correspondientes, ya sea, de manera correcta o incompleta. En ambos documentos, predomina el término raíz o radical, en desmedro de raíz principal.

## 7.2 Análisis y discusión de resultados

De acuerdo a la triangulación realizada anteriormente, se aprecia una gran diferencia en lo que establece el saber sabio con lo que se entrega por medio de los programas oficiales de estudio y que se ve reflejado en los libros de texto; la primera de las diferencias visualizadas, es la que respecta a la secuenciación de contenidos, pues mientras el Saber Erudito dicta que se debe pasar desde potencia de exponente entero a raíz principal para finalizar con potencia de exponente racional, los programas y más aún los libros de texto, encaminan la secuencia sin clarificar el concepto de raíz principal, sino que solamente, con la idea de raíz o radical; por otra parte, al no obedecer la secuencia dada por el saber erudito, provoca alteraciones en la concepción de los contenidos, fragmentándolos.

Tal y como se mencionó en el apartado anterior, en el Saber Sabio y en los Programas Oficiales se encuentra establecido claramente lo que es una definición de lo que es una propiedad, sin embargo, en los libros de texto se tiende a confundir ambos conceptos, principalmente, al tratar las definiciones como propiedades.

En cuanto al campo de validez en el que se mueven tanto definiciones como propiedades, éste se encuentra alterado principalmente en los libros de texto, pues por años se ha trabajado con una escasa restricción para los literales al momento de enunciar las propiedades y más aún al momento de demostrarlas; esto puede desembocar en confusiones para el lector y alteraciones en la construcción de nuevos conocimientos.

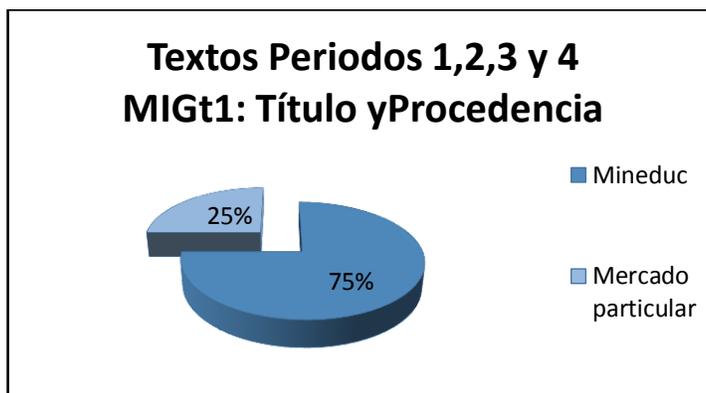
### **7.3 Caracterización del Saber a Enseñar en los Programas Oficiales**

Para efectos de esta caracterización, se utilizará la información extraída, analizada y explicada en el apartado 6.1.7.1, titulado caracterización del saber a enseñar oficial (1969-2015).

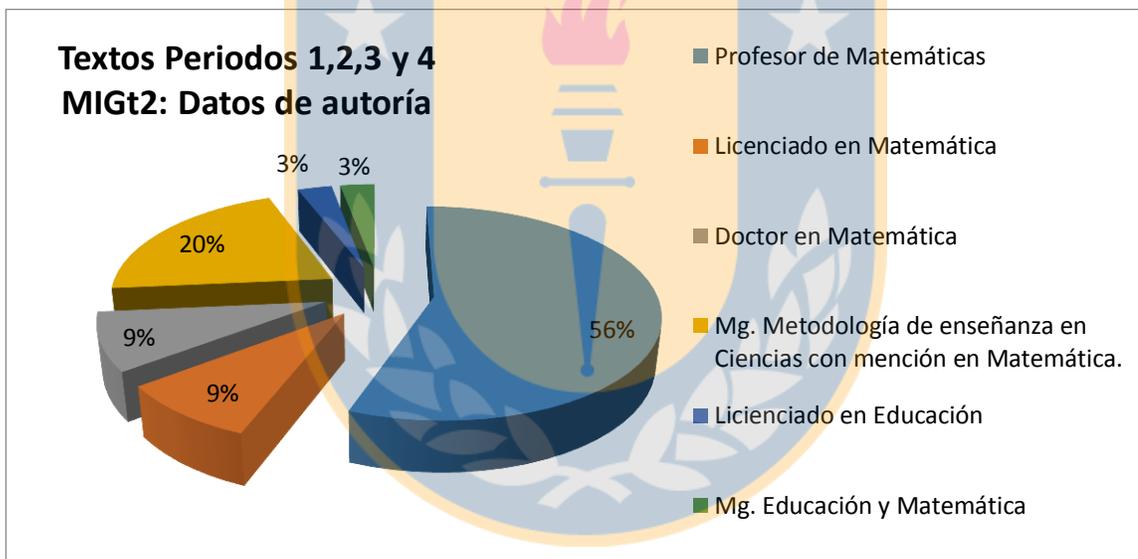
### **7.4 Caracterización del Saber a Enseñar en los Libros de Texto**

Para comenzar con las conclusiones, se detallarán los resultados obtenidos de la MIGt de los cuatro períodos analizados. Esto dará una visión general de la identificación de los textos consultados para esta investigación.

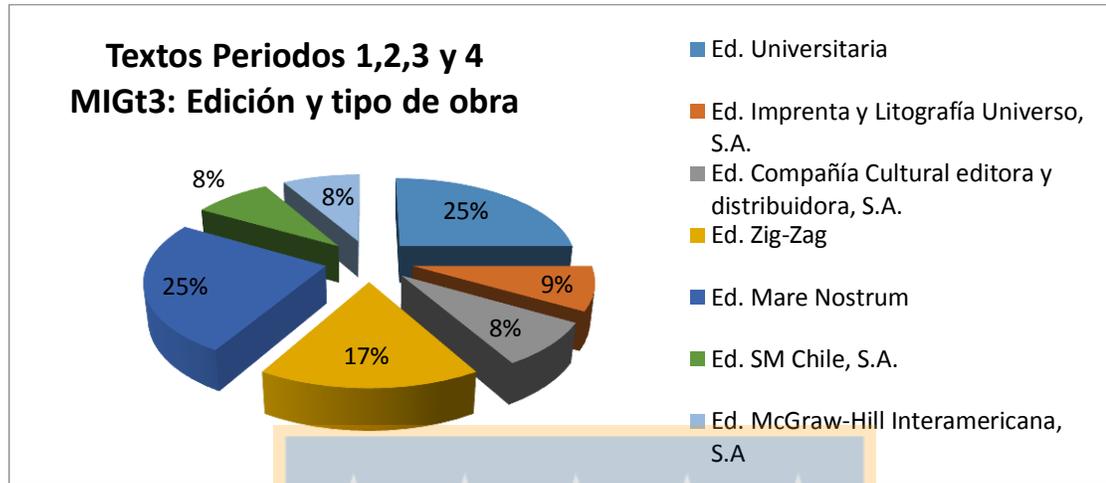
El 75% de los textos escolares son distribuidos por el Ministerio de Educación, esto es porque lo que se buscaba era conocer el real contenido propuesto para los estudiantes de educación media con respecto a la unidad de Potencias y radicales.



Con respecto a la formación académica de los autores de estos textos escolares podemos concluir que:

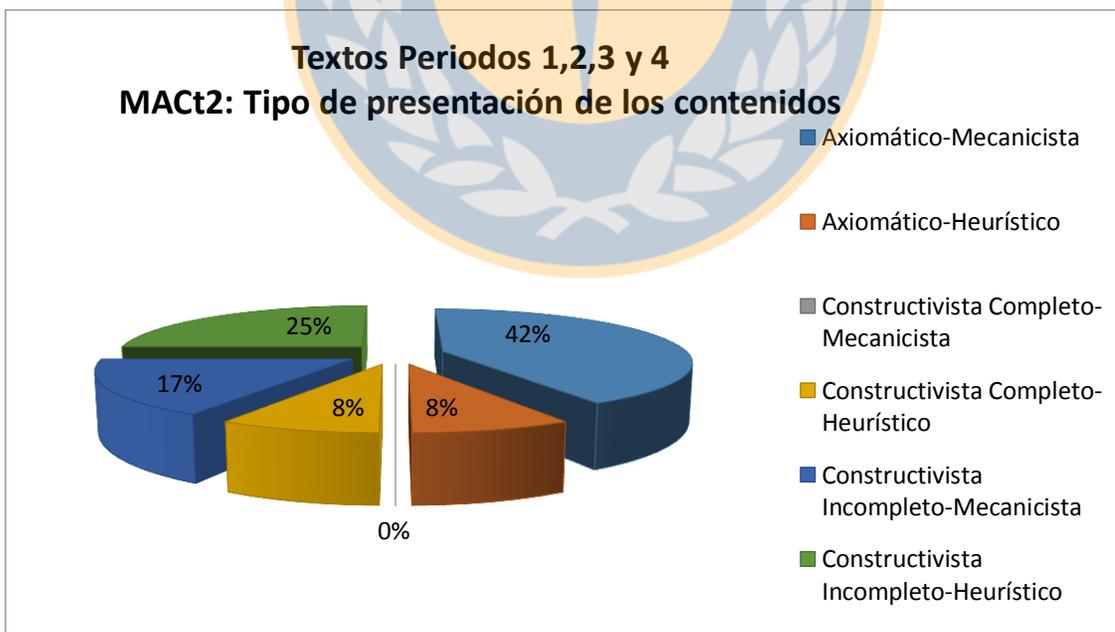


El 56% de los profesionales son profesores de la asignatura, seguido por los profesor en metodología de la enseñanza en matemática quienes participan en 3 de los periodos analizados, además los últimos dos periodos podemos ver que los doctores en matemáticas correspondientes a un 9% se interesan en el análisis de texto. Finalmente y con un porcentaje muy bajo se encuentran un Licenciado educación y Magister en educación y matemática.



Las editoriales, también fueron parte de este proceso de análisis. Dentro de ellas podemos destacar Mare Nostrum y Editorial universitaria, que corresponde al 50% del total del total de los textos consultados.

Siguiendo con el análisis referente a los contenidos y ejercicios propuestos en los libros de textos, es necesario dejar en claro cómo éstos se presentan:



Se ve una inclinación notoria, frente a un contenido del tipo (A, M), que corresponde mayoritariamente a los dos primeros periodos, seguido por un (CI, H) que ya se ve marcado en los últimos periodos analizados.

De acuerdo a la triangulación de los datos obtenidos por los perfiles de los libros de texto de cada período y que fue vaciada a una tabla de doble entrada, la que se encuentra en el capítulo de anexos, bajo el número 49, se puede inferir lo siguiente:

1. Determinar el porcentaje de libros de texto que sigue una secuencia determinada se torna complejo puesto que, en la mayor parte de los períodos analizados el contenido de potencias y radicales se encuentran establecidos en niveles diferentes de enseñanza. No obstante, de igual manera se puede observar que en el primer período, dos tercios de los textos consultados se inclinaron por la secuencia que estructura en primer lugar la potencia de exponente entero, seguido por el concepto de raíz o radical para luego, explicar la potencia de exponente racional; mientras que el otro tercio sigue la secuencia potencia de exponente entero, potencia de exponente racional y finaliza con el concepto de raíz o radical. Por otra parte en el segundo período, el texto correspondiente a un compendio de álgebra sigue la secuencia de potencia de exponente entero, potencia de exponente racional y raíz o radical. En cuanto al resto de los períodos y libros de texto consultados es un poco sesgado y aventurado precipitar una conclusión referente a la secuencia de contenidos, sin embargo, si se realiza un análisis a grandes rasgos siguiendo, por ejemplo el contenido presentado en un nivel de enseñanza y unirlo al presentado en el nivel de enseñanza siguiente, se puede apreciar una inclinación hacia la primera secuencia presentada, es decir, potencia de exponente entero, raíz o radical y potencia de exponente racional.

2. En primer lugar en cuanto a la forma en que se introduce el concepto de potencia, se puede visualizar un predominio del método inductivo, es decir, utilizando la multiplicación iterada para luego generalizar en el concepto formal de potencia. Sin embargo, también se puede observar que éste va disminuyendo conforme transcurre el tiempo, en desmedro de él toma fuerza el comenzar el contenido planteando situaciones de la vida cotidiana, en donde se aprecia claramente la influencia del método constructivista de enseñanza.

Asimismo, para la introducción del contenido de radicales predomina el método inductivo, ya que se comienza explicando la raíz cuadrada con ejemplos particulares para luego generalizar y construir así el contenido de raíz enésima. Una vez más, podemos apreciar la influencia del constructivismo, ya que, en el último período el contenido comienza a ser tratado a partir de una situación puntual, en la que se deben poner en juego concepciones anteriores y así el alumno sea capaz de construir el nuevo concepto.

3. Las principales representaciones para el contenido de potencia, son en primer lugar, el uso de paréntesis cuando la base corresponde a un número negativo y/o racional, seguido de la multiplicación iterada de la base. Por otra parte, las representaciones más utilizadas en la enseñanza de los radicales, son el signo radical seguido por la potencia de exponente fraccionario.
4. En cuanto al tratamiento del álgebra de potencias y radicales, se puede observar que en el transcurso del tiempo han habido propiedades que poco a poco han ido quedando fuera de la enseñanza, al igual que las demostraciones de las propiedades que en un comienzo era obligatorias y ahora no lo son. En este sentido, se pueden destacar aquellas propiedades que se han mantenido a través de los cambios curriculares analizados, para el álgebra de potencias estas propiedades son: potencia de una potencia y la multiplicación y división de

potencias de igual base, en la que sin embargo, se observa un déficit en cuanto a las restricciones pertinentes; por otra parte, para el álgebra de radicales las propiedades que se han mantenido dentro del currículo escolar son la multiplicación y división de radicales con igual índice, radical de un radical y también las siguientes  $\sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k}$  y  $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ , en el contenido de radicales también se puede observar una carencia de restricciones pertinentes para los literales intervinientes.

5. Las principales aplicaciones que se le da al álgebra de potencias es en el uso de notación científica y productos notables, mientras que para el álgebra de radicales destacan la racionalización de denominador y las ecuaciones con radicales.

Una vez realizada la triangulación correspondiente a los cuatro perfiles, corresponde hacer la caracterización del Saber a Enseñar de los Libros de Texto. Por ello, es que se descartarán todos aquellos campos que posean menos de 40% de presencia. La tabla N°50, que se encuentra en el capítulo de anexos, presenta dichos resultados, los que son también presentados en el apartado 8.2.

## 7.5 Caracterización del Saber Erudito

De los libros consultados que pertenecen al saber erudito se obtuvo un comportamiento modal, que establece lo siguiente:

- 1.- La secuencia de contenidos comienza con: potencia de exponente natural - potencia de exponente cero y potencia de exponente entero negativo, con ello construye la definición de potencia de exponente entero; continua con el concepto de raíz, raíz principal o aritmética, finalizando con potencia de exponente racional.
- 2.- Todos los conceptos nombrados anteriormente, son definiciones y no propiedades.
- 3.- En cuanto a las propiedades, éstas cuentan con un campo de validez claramente estipulado, además de las restricciones relativas a los literales que se condicen con las establecidas en la matriz de resumen y cotejo.

En este punto de la investigación se está en condiciones de realizar la triangulación final que permitirá obtener las conclusiones que respondan a las interrogantes planteadas al comienzo del seminario.

## CAPÍTULO 8: CONCLUSIONES

Previo a las conclusiones dadas por la triangulación, es necesario resaltar algunos aspectos que salieron a la luz durante el desarrollo del presente seminario:

En primer lugar, se puede observar que los programas oficiales de estudio, no son cubiertos en su totalidad por los libros de texto. Una de las razones que puede tener aquello es el hecho que dentro de los programas de estudio hay contenidos del tipo conceptual, procedimental y actitudinal, siendo estos últimos muy complejos de plasmar en un libro de texto.

En segundo lugar, se pone en evidencia que pese a que el ministerio de educación cuenta con un protocolo riguroso para hacer la revisión de los libros de texto, se pueden encontrar en ellos errores grotescos como los expuestos en la presente investigación. Esto denota una falta de prolijidad por parte de quienes están encargados de llevar a cabo el protocolo.

## 8.1 Triangulación Final

Tabla N°50: Triangulación de CSaEp y CSaEt

<i>Variable Observada</i>	<i>Descripción</i>	<i>% Promedio de determinación Programas oficiales</i>	<i>% Promedio de determinación Libros de texto</i>
3.- Secuenciación de los contenidos	Sigue la secuencia de potencia de exponente entero, raíz o radical y potencia de exponente racional	100	66,5
4.- Introducción al concepto	<b>Potencia</b>		
	Inductiva (de la multiplicación iterada a potencia)	100	54,2
	<b>Radicales</b>		
	Inductiva (del cuadrado al n-ésimo)	50	58,3
5.- Tipos de representaciones que utiliza	<b>Potencia</b>		
	Con uso de paréntesis	100	100
	Con notación científica	100	58,3
	<b>Radicales</b>		
	Con signo radical	100	100
	Con notación de potencia (exponente fraccionario)	100	87,5
6.- Propiedades	<b>Potencia</b>		
	Multiplicación de potencias igual base	50	100
	No demuestra	50	41,7
	<b>Radicales</b>		
	Multiplicación de raíces de igual índice	100	100
	No demuestra	100	54,2
	Usa restricciones completas	50	50
	División de raíces de igual índice	100	83,3
	No demuestra	100	75
Usa restricciones completas	75	50	
7.- Aplicaciones	<b>Potencias</b>		
	Notación científica	50	58,3
	Productos Notables	50	66,7
	<b>Radicales</b>		
	Racionalización	75	75

## 8.2 Conclusiones de la triangulación anterior desde el Saber matemático de referencia

- Lo que respecta a la secuenciación de contenidos, se puede ver que en los programas oficiales sigue en un 100% la secuencia de potencia de exponente entero, raíz o radical y potencia de exponente racional, mientras que en los libros de textos y probablemente debido a la diferencia de nivel en la que se enseñan los contenidos, esta misma secuencia apenas alcanza un poco más del 66% de los libros consultados. Sin embargo, la secuencia ideal dada por el saber sabio es la que sigue el orden de potencia de exponente entero, raíz principal y potencia de exponente racional.

- Tanto en potencias como en raíces, el método inductivo prevalece dentro de cómo se introduce el contenido.

- En cuanto al tipo de representación, tanto en los programas oficiales como en los libros de texto, se destacan por el uso de paréntesis y notación científica para potencias; mientras que para los radicales se destaca el uso del signo radical y la notación de potencia exponente fraccionario.

- Las propiedades que se mantienen dentro del currículo escolar a través de las reformas educacionales son la multiplicación de potencias igual base y multiplicación y división de raíces de igual índice. Uno de los principales cambios que se aprecian es la relevancia que se le da a las demostraciones de las propiedades, pasando de ser obligatorio a quedar a criterio del profesor. Por otra parte, y en cuanto a las restricciones de los literales que intervienen en las propiedades, se puede visualizar un déficit o carencia de las mismas, lo que desvirtúa el saber matemático, pues lo erradica de su campo de validez.

- Dentro de los contenidos, es común observar que los productos notables son una de las aplicaciones directas de las potencias, así como lo es la racionalización para los radicales.

### 8.3 Conclusiones específicas respecto a los Objetivos

El objetivo general que era identificar y caracterizar el tratamiento de potencias y raíces en los libros de texto mediante un análisis conceptual, de contenido y su adaptación al currículum durante el periodo 1969 – 2015 en Chile, se ha logrado en la medida en que se ha caracterizado cada periodo por medio de los Programas Oficiales y los Libros de Textos utilizados.

En relación a los objetivos específicos:

Se pudo establecer las diferencias existentes entre los marcos curriculares, producidos por las reformas educacionales, identificándolas por medio de la presentación de contenidos y actividades del siguiente modo:

- 1° Periodo (1969 - 1981), se caracteriza por presentar programas altamente delimitados en cuanto a contenido y la libertad con que el docente puede abordarlo, además de una estructura axiomática con un modelo de actividades mecanicistas, que evidencia el método de enseñanza-aprendizaje imperante, como lo era el conductismo.
- 2° Periodo (1982 - 2000), a diferencia del periodo anterior, los programas de estudio ahora son muy ligeros y dejan la responsabilidad de la estructura de contenidos en el profesor. En cuanto a las actividades que propone, estas son altamente mecanicistas ya que buscan que el alumno sea capaz de aplicar un algoritmo, es en este periodo en que aparece incipientemente la resolución de problemas, sin embargo el conductismo imperante es quien sobresale.
- 3° Periodo (2001 -2010), los programas de estudio son completados ahora con orientaciones didácticas y tipos de actividades para el docente. Es en este periodo donde el constructivismo toma una

importancia superlativa en cuanto a la estructura, se busca acercar el contenido a los alumnos con situaciones de la vida cotidiana.

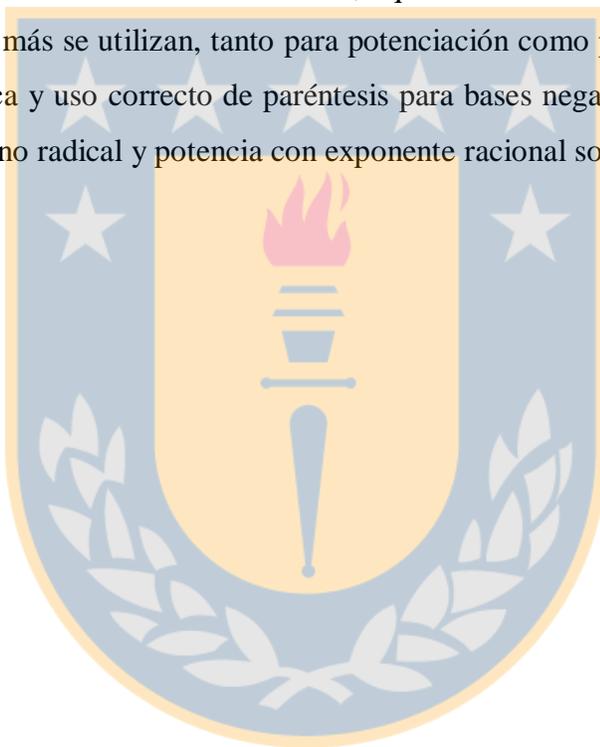
- 4° Periodo (2011 - 2015), en la actualidad los programas de estudio representan una guía para el docente, contiene desde orientaciones didácticas hasta forma de evaluación. Ya en este periodo el constructivismo se ve más instaurado en el currículo escolar, intentando que sea el alumno quien construya su propio conocimiento a través de experiencias pasadas.

Por otra parte, en el capítulo de análisis de datos, se pueden visualizar el tratamiento que se le da en cada período a las propiedades tanto del álgebra de potencias como de radicales, además, se evidencian aquellas propiedades que se han mantenido invariantes en el tiempo pese a las modificaciones realizadas en el currículo escolar. En este sentido, gracias a las matrices de análisis de contenidos, se puede establecer que la multiplicación de potencias de igual base y la multiplicación y división de raíces de igual índice, cumplen con esta característica de mantenerse vigente durante todo el período analizado.

En esta investigación establecer a ciencia cierta una secuenciación determinada de contenidos resulta un poco aventurera, pues como ya se ha mencionado anteriormente, debido a que los contenidos quedan establecidos en niveles distintos de enseñanza no se puede determinar con una certeza absoluta la estructuración con la que es diseñada el saber a enseñar. Sin embargo, se pueden hacer conjeturas al respecto, considerando los antecedentes tangibles que están al alcance de la presente investigación.

En los primeros periodos se incurre en el error del doble signo para el contenido de radicales, esto es porque se tiende a presentar como operación inversa de la potenciación, no obstante este error se ha ido subsanando con el transcurso del tiempo. La mayor parte de los errores evidenciados en esta investigación, corresponden a la poca pulcritud a la hora de restringir los literales, puesto que por omisión o incompletitud se altera el campo de validez del contenido.

En el capítulo de análisis de datos, quedan establecidos los tipos de representaciones que más se utilizan, tanto para potenciación como para radicales. Estos son notación científica y uso correcto de paréntesis para bases negativas y/o racionales, además el uso del signo radical y potencia con exponente racional son las más utilizadas.



## CAPÍTULO 9: REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Agencia de Calidad de la Educación. (2014). *Informe Nacional Resultados Chile PISA 2012*. Recuperado de <https://goo.gl/d19Kvr>

Agencia de Calidad de la Educación (2012). *Resultados TIMSS 2011 Chile*. Recuperado de <http://goo.gl/h93b1d>

Arellano, J (2001). *La reforma educacional chilena*. CEPAL (73): 83-94.

Astudillo, F. (2011). *¿Qué fue la revolución pinguina?* [Mensaje en un blog]. Recuperado de <http://goo.gl/vJU4g1>

Cockcroft, W. (1985). *Informe Cockcroft. Las Matemáticas sí Cuentan*. Madrid, MEC

Cox, C. (2001). *El currículum escolar del futuro*. *Perspectivas*. (4): 213 -232

Donoso, S (2005). *Reforma y política educacional en Chile 1990 – 2004: El Neoliberalismo en crisis*. *Estudios Pedagógicos*. Recuperado de <http://goo.gl/9IjKZF>

Espinoza, O (Julio de 2014). *Cambios recientes al currículum escolar: problemáticas e interrogantes*. Centro de Estudios de Políticas y Prácticas en Educación. Recuperado de <http://goo.gl/ZUaAcp>

Fontaine, L., Eyzaguirre, B. (1997). *Por qué es importante el texto escolar*. En *El futuro en riesgo: Nuestros textos escolares* (Cap. 1) [En línea]. Recuperado de <http://goo.gl/Bo4cAI>

García, R. (2010). *Desarrollo del cerebro humano*. [Mensaje en un blog]. Recuperado de <http://goo.gl/5l7WWG>

Gobierno de Chile (2010). *Gobierno 2006 – 2010*. Recuperado de <http://goo.gl/vGUizu>

González, M y Sierra, M. (2002). *La enseñanza del análisis matemático en los libros de texto españoles de enseñanza secundaria del siglo XX*. Universidad de Salamanca. Salamanca, España.

Guillén, J. (2012). *Matemáticas y Neurociencia*. [Mensaje en un blog]. Recuperado de <https://goo.gl/OhGZey>

Gutiérrez, P (9 de Julio 2014). *Nuevo error en libros de básica: Carmela Carvajal de Grau*. La Nación. Recuperado de <http://goo.gl/0E9s2D>

Gysling, J. (2013). *Doble clic al ajuste curricular* [Mensaje en un blog]. Recuperado de <http://goo.gl/2p0ME0>

Leiva, F. y Repenning, A (2014). *Las reacciones al error en texto escolar de la editorial Santillana*. [Programa Televisivo]. Santiago, Chile: CNN Chile.

Ley N° 20.370. Diario Oficial de la República de Chile, Santiago, Chile, 12 de Septiembre de 2009.

Martínez, C y Penalva, M (2006). *Proceso de simbolización del concepto de*

*potencia: Análisis de libros de texto de secundaria.* Universidad de Alicante, Alicante, España.

Mejías, W. (2001). *Libros de texto escolar en Colombia.* Educación y Pedagogía. Volumen (13). 271-334.

Ministerio de Educación (2014). *Políticas de textos escolares.* Recuperado de <http://goo.gl/qYhETM>

Ministerio de Educación (2014). *Proceso de adquisición de textos escolares.* Recuperado de <http://goo.gl/91NyAT>

Ministerio de Educación (2014). *Requerimientos de un texto de calidad.* Recuperado de <http://goo.gl/RYkkhb>

Ministerio de Educación (2015). *Resultados Evaluación INICIA 2014.* Recuperado de <http://goo.gl/XyftCK>

Moder, M. (20 de Junio 2014). *El currículo: la cara oculta de la calidad de la calidad de la educación.* El Mostrador. Recuperado de <http://goo.gl/LXvhBZ>

Pascual, S. (2013). *Dialéctica Herramienta-Objeto* (Manuscrito no publicado). Universidad del Bío Bío, Chillán, Chile.

Pascual, S. (2013). *Primeros Conceptos de la Didáctica de la Matemática* (Manuscrito no publicado), Universidad del Bío Bío, Chillán, Chile.

Real Academia Española. (2015). *Diccionario de la lengua española.* Madrid, España: Felipe IV.

Salas, R. (2003). *¿La educación necesita realmente de la neurociencia?* Estudios pedagógicos. Recuperado de <http://goo.gl/05a3KI>

Salazar, L (2012). *Reformas de la Educación en Chile*. Universidad Católica de Temuco. Temuco, Chile.

Vargas, R. (2012). *Matemáticas y cerebro*. [Mensaje en un blog]. Recuperado de <https://goo.gl/rpffDr>

Vidal, R. (2009). *Las raíces y radicales en Libros de Texto en Chile (1969-2009): Un análisis de rupturas epistemológicas como aporte a la didáctica de las matemáticas*. (Tesis doctoral). Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile.

Vidal, R. (s/f). *La transposición didáctica: Un modelo teórico para investigar los status de los objetos matemáticos*. (manuscrito no publicado). Santiago, Chile.

Villegas, A. (2013). *Síntesis de Teorías de Aprendizaje*. [Mensaje en un blog]. Recuperado de <http://goo.gl/Taj9SZ>



## CAPÍTULO 10: ANEXOS

### Matriz de Identificación General de los Programas Oficiales

Campos genéricos MIGp(i), con i =1, 2, 3, 4	Programa
MIGp1: Decreto	
MIGp2: Características Generales de los Programas Oficiales	
MIGp3: Programa Seleccionado y sus referencias identificatorias	
MIGp4: Secciones del Programa	

## Matriz de Identificación General de los Libros de Texto

Campos genéricos MIGt(i), con $i = 1, 2, 3, 4$	Libro de texto
MIGt1: Título y Procedencia	
MIGt2: Datos de Autoría	
MIGt3: Edición y Tipo de Obra	
MIGt4: Presentación física	



## Matriz de Análisis de Contenidos de los Programas Oficiales

Campos genéricos MACp(i), con $i = 1, 2, 3, 4, 5$	Programa
MACp1: Lugar oficial de potenciación y radicación en el saber a enseñar	
MACp2: Propósitos explicitados para el contenido de potencias y raíces	
MACp3: Organización de los contenidos	
MACp4: Orientaciones didácticas	
MACp5: Actividades o ejemplos propuestos	

## Matriz de Análisis de Contenidos de los Libros de Texto

Campos genéricos MACt(i) con i=1,2,3,4,5	Libro de texto
MACt1: Organización de los contenidos	
MACt2: Tipo de presentación de los contenidos	
MACt3: Ecología de las potencias y raíces en los libros de texto	
MACt4: Presentación de potencia y raíces	
MACt5: Tratamiento de las propiedades de las potencias y raíces.	
MACt6: Aplicaciones del Álgebra de potencias y raíces.	

## Matriz de Resumen y Cotejo. Caracterizaciones y Perfiles

Campos, aspectos y sub-aspectos		Periodos			
		Prog.1	Prog.2	Prog.3	Prog.4
1.- Vigencia de la fuente					
2.- Nivel de enseñanza media					
3.- Secuenciación de los contenidos	Potencia de exponente entero - raíz principal - Potencia de exp				
	Raíz principal - Potencia de exponente entero - Potencia de exp				
	Potencia de exponente entero - Potencia de exponente racion				
4.- Introducción al concepto	<b>Potencias:</b>				
	Deductiva (de la potencia a la multiplicación iterada)				
	Inductiva (de la multiplicación iterada a la potencia)				
	Como suma iterada				
	Otro (especificar al final)				
	<b>Radicales:</b>				
	Deductiva (del n-ésimo al cuadrado)				
	Inductiva (del cuadrado al n-ésimo)				
	Otro (especificar al final)				
5.- Tipos de representaciones que utiliza	<b>Potencias:</b>				
	Con uso de paréntesis				
	Con notación científica				
	Como multiplicación iterada				
	Otro (especificar al final)				
	<b>Radicales:</b>				
	Con el signo radical				
	Con uso de valor absoluto				
	Otro (especificar al final)				
6.- Propiedades	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	La demuestra con errores lógicos			
		La demuestra correctamente			
		No demuestra			
		Usa restricciones completas			
		Usa restricciones incompletas			
		No restringe			
	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	La demuestra con errores lógicos			
		La demuestra correctamente			
		No demuestra			
		Usa restricciones completas			
		Usa restricciones incompletas			
		No restringe			
	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	La demuestra con errores lógicos			
		La demuestra correctamente			
		No demuestra			
Usa restricciones completas					
Usa restricciones incompletas					
No restringe					

Campos, aspectos y sub-aspectos		Períodos				
		Prog.1	Prog.2	Prog.3	Prog.4	
6.- Propiedades	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	La demostración con errores lógicos				
		La demostración correctamente				
		No demuestra				
		Usa restricciones completas				
		Usa restricciones incompletas				
		No restringe				
		Define unilateralmente				
		Define bilateralmente				
	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; n \geq m$	La demostración con errores lógicos				
		La demostración correctamente				
		No demuestra				
		Usa restricciones completas				
		Usa restricciones incompletas				
		No restringe				
		Define unilateralmente				
		Define bilateralmente				
	$\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{n-m}}; m > n$	La demostración con errores lógicos				
		La demostración correctamente				
		No demuestra				
		Usa restricciones completas				
		Usa restricciones incompletas				
		No restringe				
		Define unilateralmente				
		Define bilateralmente				
	$\sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k}$	La demostración con errores lógicos				
		La demostración correctamente				
		No demuestra				
		Usa restricciones completas				
Usa restricciones incompletas						
No restringe						
Define unilateralmente						
Define bilateralmente						
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	La demostración con errores lógicos					
	La demostración correctamente					
	No demuestra					
	Usa restricciones completas					
	Usa restricciones incompletas					
	No restringe					
	Define unilateralmente					
	Define bilateralmente					
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k b^n}$	La demostración con errores lógicos					
	La demostración correctamente					
	No demuestra					
	Usa restricciones completas					
	Usa restricciones incompletas					
	No restringe					
	Define unilateralmente					
	Define bilateralmente					
$\sqrt[n]{a} : \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a:b}$	La demostración con errores lógicos					
	La demostración correctamente					
	No demuestra					
	Usa restricciones completas					
	Usa restricciones incompletas					
	No restringe					
	Define unilateralmente					
	Define bilateralmente					

Campos, aspectos y sub-aspectos		Períodos				
		Prog.1	Prog.2	Prog.3	Prog.4	
6.- Propiedades	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k \cdot b^n}$	La demostración con errores lógicos				
		La demostración correctamente				
		No demuestra				
		Usa restricciones completas				
		Usa restricciones incompletas				
		No restringe				
		Define unilateralmente				
	Define bilateralmente					
	$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[kn]{a}$	La demostración con errores lógicos				
		La demostración correctamente				
		No demuestra				
		Usa restricciones completas				
		Usa restricciones incompletas				
		No restringe				
Define unilateralmente						
Define bilateralmente						
7.- Aplicaciones	$(\sqrt[n]{a})^n = a$	La demostración con errores lógicos				
		La demostración correctamente				
		No demuestra				
		Usa restricciones completas				
	Usa restricciones incompletas					
	No restringe					
	Define unilateralmente					
	Define bilateralmente					
	$\sqrt[n]{a^n} = a$	La demostración con errores lógicos				
		La demostración correctamente				
		No demuestra				
		Usa restricciones completas				
	Usa restricciones incompletas					
	No restringe					
	Define unilateralmente					
	Define bilateralmente					
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	La demostración con errores lógicos					
	La demostración correctamente					
	No demuestra					
	Usa restricciones completas					
Usa restricciones incompletas						
No restringe						
Define unilateralmente						
Define bilateralmente						
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	La demostración con errores lógicos					
	La demostración correctamente					
	No demuestra					
	Usa restricciones completas					
Usa restricciones incompletas						
No restringe						
Define unilateralmente						
Define bilateralmente						
<b>Potencias:</b>						
Notación Científica						
Teorema de Pitágoras						
Polinomios						
Productos Notables						
<b>Radicales:</b>						
Racionalización						
Ecuaciones Cuadráticas						
Ecuaciones con Radicales						

## Articulación entre los campos de las matrices de recogida de información, las matrices de resumen y los objetivos de la investigación

Campos de las matrices MIGp, MIGt, MACp y MACt	Campos de la matriz de resumen y cotejo	Objetivos específicos de la investigación
MIGp1 MIGp2 MIGp3	Mr1 Mr2	OE1
MACp3 MACp4 MACp5 MACt4 MACt5	Mr6	OE2
MACp1 MACp2 MACp3 MACt1 MACt2 MACt3 MACt6	Mr3 Mr4 Mr7	OE3
MACp4 MACp5 MACt4 MACt5 MACt6	Mr3 Mr4 Mr5 Mr6 Mr7	OE4
MACp4 MACp5	Mr5	OE5

Tabla N° 6: Mr Programas Oficiales

Campos, aspectos y sub-aspectos		Períodos			
		Prog.1	Prog.2	Prog.3	Prog.4
1.- Vigencia de la fuente		69-81	82-00	00-10	11-15
2.- Nivel de enseñanza media		2°	1°-3°	1°-3°	1°-2°
3.- Secuenciación de los contenidos	Potencia de exponente entero - raíz principal - Potencia de exponente racional				
	Raíz principal - Potencia de exponente entero - Potencia de exponente racional				
	Potencia de exponente entero - Potencia de exponente racional-raíz principal				
	Potencia de exponente entero - raíz o radical - Potencia de exponente racional	X	X	X	X
	Raíz o radical - Potencia de exponente entero - Potencia de exponente racional				
	Potencia de exponente entero - Potencia de exponente racional-raíz o radical				
4.- Introducción al concepto	Potencias:				
	Deductiva (de la potencia a la multiplicación iterada)	NI	NI		
	Inductiva (de la multiplicación iterada a la potencia)	NI	NI	X	X
	Como suma iterada	NI	NI	X	
	Otro (especificar al final)	NI	NI		
	Radicales:				
	Deductiva (del n-ésimo al cuadrado)	X	X		
	Inductiva (del cuadrado al n-ésimo)			X	X
Como inversa de la potenciación	X	X	X	X	
Como potencia de exponente fraccionario (o racional)					
Otro (especificar al final)					
5.- Tipos de representaciones que utiliza	Potencias:				
	Con uso de paréntesis	NI	NI	X	X
	Con notación científica	NI	NI	X	X
	Como multiplicación iterada	NI	NI		
	Otro (especificar al final)	NI	NI		
	Radicales:				
	Con el signo radical	X	X	X	X
	Con uso de valor absoluto			X	X
Con notación de potencia (exponente fraccionario)	X	X	X	X	
Notación funcional			X	X	
Otro (especificar al final)					

Campos, aspectos y sub-aspectos		Períodos				
		Prog.1	Prog.2	Prog.3	Prog.4	
6.- Propiedades	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	La demostración con errores lógicos	NI	NI	NI	
		La demostración correctamente	NI	NI	NI	
		No demuestra	NI	NI	NI	X
		Usa restricciones completas	NI	NI	NI	
		Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI	X
		No restringe	NI	NI	NI	
		Define unilateralmente	NI	NI	NI	
		Define bilateralmente	NI	NI	NI	
	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	La demostración con errores lógicos	NI	NI	NI	
		La demostración correctamente	NI	NI	NI	
		No demuestra	NI	NI	NI	X
		Usa restricciones completas	NI	NI	NI	
		Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI	X
		No restringe	NI	NI	NI	
		Define unilateralmente	NI	NI	NI	
		Define bilateralmente	NI	NI	NI	
	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	La demostración con errores lógicos	NI	NI	NI	
		La demostración correctamente	NI	NI	NI	
		No demuestra	NI	NI	NI	X
		Usa restricciones completas	NI	NI	NI	
		Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI	X
		No restringe	NI	NI	NI	
		Define unilateralmente	NI	NI	NI	
		Define bilateralmente	NI	NI	NI	
$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	La demostración con errores lógicos	NI	NI	NI		
	La demostración correctamente	NI	NI	NI		
	No demuestra	NI	NI	NI	X	
	Usa restricciones completas	NI	NI	NI		
	Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI	X	
	No restringe	NI	NI	NI		
	Define unilateralmente	NI	NI	NI		
	Define bilateralmente	NI	NI	NI		
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; n \geq m$	La demostración con errores lógicos	NI	NI	NI		
	La demostración correctamente	NI	NI	NI		
	No demuestra	NI	NI	NI	X	
	Usa restricciones completas	NI	NI	NI		
	Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI	X	
	No restringe	NI	NI	NI		
	Define unilateralmente	NI	NI	NI		
	Define bilateralmente	NI	NI	NI		
$\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{n-m}}; m > n$	La demostración con errores lógicos	NI	NI	NI		
	La demostración correctamente	NI	NI	NI		
	No demuestra	NI	NI	NI	X	
	Usa restricciones completas	NI	NI	NI		
	Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI	X	
	No restringe	NI	NI	NI		
	Define unilateralmente	NI	NI	NI		
	Define bilateralmente	NI	NI	NI		

Campos, aspectos y sub-aspectos		Períodos				
		Prog.1	Prog.2	Prog.3	Prog.4	
6.- Propiedades	$\sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k}$	La demostración con errores lógicos	NI	NI	NI	NI
		La demostración correctamente	NI	NI	NI	NI
		No demuestra	NI	NI	NI	NI
		Usa restricciones completas	NI	NI	NI	NI
		Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI	NI
		No restringe	NI	NI	NI	NI
		Define unilateralmente	NI	NI	NI	NI
		Define bilateralmente	NI	NI	NI	NI
	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	La demostración con errores lógicos				
		La demostración correctamente				
		No demuestra	X	X	X	X
		Usa restricciones completas	X			X
		Usa restricciones incompletas				
		No restringe		X	X	
		Define unilateralmente	NI	X	X	
		Define bilateralmente	NI			
	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[kn]{a^k b^n}$	La demostración con errores lógicos	NI	NI	NI	NI
		La demostración correctamente	NI	NI	NI	NI
		No demuestra	NI	NI	NI	NI
		Usa restricciones completas	NI	NI	NI	NI
		Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI	NI
		No restringe	NI	NI	NI	NI
		Define unilateralmente	NI	NI	NI	NI
		Define bilateralmente	NI	NI	NI	NI
$\sqrt[n]{a} : \sqrt[k]{b} = \sqrt[kn]{a^k : b^n}$	La demostración con errores lógicos					
	La demostración correctamente					
	No demuestra	X	X	X	X	
	Usa restricciones completas	X		X	X	
	Usa restricciones incompletas					
	No restringe		X			
	Define unilateralmente	NI	X	X		
	Define bilateralmente	NI				
$\sqrt[n]{a} : \sqrt[k]{b} = \sqrt[kn]{a^k : b^n}$	La demostración con errores lógicos	NI	NI	NI	NI	
	La demostración correctamente	NI	NI	NI	NI	
	No demuestra	NI	NI	NI	NI	
	Usa restricciones completas	NI	NI	NI	NI	
	Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI	NI	
	No restringe	NI	NI	NI	NI	
	Define unilateralmente	NI	NI	NI	NI	
	Define bilateralmente	NI	NI	NI	NI	
$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[kn]{a}$	La demostración con errores lógicos	NI	NI	NI	NI	
	La demostración correctamente	NI	NI	NI	NI	
	No demuestra	NI	NI	NI	NI	
	Usa restricciones completas	NI	NI	NI	NI	
	Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI	NI	
	No restringe	NI	NI	NI	NI	
	Define unilateralmente	NI	NI	NI	NI	
	Define bilateralmente	NI	NI	NI	NI	

Campos, aspectos y sub-aspectos			Períodos				
			Prog.1	Prog.2	Prog.3	Prog.4	
6.- Propiedades	$(\sqrt[n]{a})^n = a$	La demostración con errores lógicos	NI	NI	NI	NI	
		La demostración correctamente	NI	NI	NI	NI	
		No demuestra	NI	NI	NI	NI	
		Usa restricciones completas	NI	NI	NI	NI	
		Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI	NI	
		No restringe	NI	NI	NI	NI	
		Define unilateralmente	NI	NI	NI	NI	
		Define bilateralmente	NI	NI	NI	NI	
	$\sqrt[n]{a^n} = a$	La demostración con errores lógicos	NI	NI	NI	NI	
		La demostración correctamente	NI	NI	NI	NI	
		No demuestra	NI	NI	NI	NI	
		Usa restricciones completas	NI	NI	NI	NI	
		Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI	NI	
		No restringe	NI	NI	NI	NI	
		Define unilateralmente	NI	NI	NI	NI	
		Define bilateralmente	NI	NI	NI	NI	
	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	La demostración con errores lógicos	NI	NI	NI	NI	
		La demostración correctamente	NI	NI	NI	NI	
		No demuestra	NI	NI	NI	NI	
		Usa restricciones completas	NI	NI	NI	NI	
		Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI	NI	
		No restringe	NI	NI	NI	NI	
		Define unilateralmente	NI	NI	NI	NI	
		Define bilateralmente	NI	NI	NI	NI	
	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	La demostración con errores lógicos	NI	NI	NI	NI	
		La demostración correctamente	NI	NI	NI	NI	
		No demuestra	NI	NI	NI	NI	
		Usa restricciones completas	NI	NI	NI	NI	
		Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI	NI	
		No restringe	NI	NI	NI	NI	
		Define unilateralmente	NI	NI	NI	NI	
		Define bilateralmente	NI	NI	NI	NI	
	7. Aplicaciones	<b>Potencias:</b>					
		Notación Científica	NI	NI	X		
		Teorema de Pitágoras	NI	NI			X
		Polinomios	NI	NI	X	X	
Productos Notables		NI	NI			X	
<b>Radicales:</b>							
Racionalización		X	X			X	
Ecuaciones Cuadráticas	X	X	X				
Ecuaciones con Radicales	NI						

\*Obs: las restricciones a los literales y la nomenclatura utilizada en esta matriz, son aquellas que están especificadas en la caracterización de la misma.

Tabla N° 7: SaEp1

<b>Perfil del Saber a Enseñar Oficial del primer período (1969-1981)</b>		
<i>Variable Observada</i>	<i>Descripción</i>	<i>Porcentaje de determinación</i>
3.- Secuenciación de los contenidos	Utiliza la secuencia de potencia de exponente entero, raíz o radical y finaliza con potencia de exponente racional	100
4.- Introducción al concepto	<b>Potencia:</b> No hay información	100
	<b>Radicales:</b> Planteamiento deductivo. Como inversa de la potenciación	100
5.- Tipos de representaciones que utiliza	<b>Potencia:</b> No hay información	100
	<b>Radicales:</b> Utiliza el signo radical y la notación en potencia (con exponente fraccionario)	100
6.- Propiedades	<b>Potencia:</b> No hay información	100
	<b>Radicales:</b> Multiplicación y división de raíces de igual índice, las cuales no demuestra pero sí restringe completamente	100
7.- Aplicaciones	<b>Potencia:</b> No hay información	100
	<b>Radicales:</b> Racionalización y ecuaciones cuadráticas	100

Tabla N°8: SaEp2

Perfil del Saber a Enseñar Oficial del segundo período (1982-2000)		
Variable Observada	Descripción	Porcentaje de determinación
3.- Secuenciación de los contenidos	Utiliza la secuencia de potencia de exponente entero, raíz o radical y finaliza con potencia de exponente racional	100
4.- Introducción al concepto	<b>Potencia:</b> No hay información	100
	<b>Radicales:</b> Planteamiento deductivo y, como inversa de la potenciación	100
5.- Tipos de representaciones que utiliza	<b>Potencia:</b> No hay información	100
	<b>Radicales:</b> Utiliza el signo radical y como notación de potencia (con exponente fraccionario)	100
6.- Propiedades	<b>Potencia:</b> No hay información	100
	<b>Radicales:</b> Multiplicación y división de raíces de igual índice, las cuales no demuestra, no restringe y define de manera unilateral	100
7.- Aplicaciones	<b>Potencia:</b> No hay información	100
	<b>Radicales:</b> Racionalización y ecuaciones cuadráticas	100

Tabla N°9: SaEp3

Perfil del Saber a Enseñar Oficial del tercer período (2001-2010)		
Variable Observada	Descripción	Porcentaje de determinación
3.- Secuenciación de los contenidos	Utiliza la secuencia de potencia de exponente entero, raíz o radical y finaliza con potencia de exponente racional	100
4.- Introducción al concepto	<b>Potencia:</b> Planteamiento inductivo (comienza con la multiplicación iterada, para llegar a la notación de potencia). Como suma iterada	100
	<b>Radicales:</b> Planteamiento inductivo (del cuadrado al enésimo). Como inversa de la potenciación	100
5.- Tipos de representaciones que utiliza	<b>Potencia:</b> Con uso de paréntesis y, con notación científica	100
	<b>Radicales:</b> Con signo radical, con uso de valor absoluto, con notación de potencia (exponente fraccionario) y, notación funcional	100
6.- Propiedades	<b>Potencia:</b> No hay información	100
	<b>Radicales:</b> Multiplicación y división de raíces de igual índice, las cuales no demuestra y define unilateralmente. Sin embargo, en la división restringe de manera completa, mientras que en la multiplicación no restringe	100
7.- Aplicaciones	<b>Potencia:</b> Notación científica y polinomios	100
	<b>Radicales:</b> Ecuaciones cuadráticas	100

Tabla N°10: SaEp4

Perfil del Saber a Enseñar Oficial del cuarto período (2011-2015)		
Variable Observada	Descripción	Porcentaje de determinación
3.- Secuenciación de los contenidos	Utiliza la secuencia de potencia de exponente entero, raíz o radical y finaliza con potencia de exponente racional	100
4.- Introducción al concepto	<b>Potencia:</b> Planteamiento inductivo (comienza con la multiplicación iterada, para llegar a la notación de potencia)	100
	<b>Radicales:</b> Planteamiento inductivo (del cuadrado al enésimo). Como inversa de la potenciación	100
5.- Tipos de representaciones que utiliza	<b>Potencia:</b> Con uso de paréntesis y, con notación científica	100
	<b>Radicales:</b> Con signo radical, con uso de valor absoluto, con notación de potencia (exponente fraccionario) y, notación funcional	100
6.- Propiedades	<b>Potencia:</b> Multiplicación y división de potencias de igual base, las cuales no demuestra y restringe de manera incompleta. Multiplicación y división de potencias de igual exponente las que no son demostradas y restringe de manera incompleta. Potencia de una potencia la que tampoco está demostrada y no se restringe completamente	100
	<b>Radicales:</b> Multiplicación y división de raíces de igual índice, las cuales no demuestra pero restringe completamente	100
7.- Aplicaciones	<b>Potencia:</b> Pitágoras, polinomios y productos notables	100
	<b>Radicales:</b> Racionalización	100

Tabla N°11: CSaEp

Caracterización del Saber a Enseñar Oficial (1969-2015)		
Variable Observada	Descripción	Porcentaje de determinación
3.- Secuenciación de los contenidos	Sigue la secuencia potencia de exponente entero, raíz o radical y potencia de exponente racional	100
4.- Introducción al concepto	<b>Potencia:</b>	
	Inductiva (de la multiplicación iterada a la potencia)	100
	Como suma iterada	50
	<b>Radicales:</b>	
	Deductiva (del n-ésimo al cuadrado)	50
	Inductiva (del cuadrado al n-ésimo)	50
5.- Tipos de representaciones que utiliza	<b>Potencia:</b>	
	Con uso de paréntesis	100
	Con notación científica	100
	<b>Radicales:</b>	
	Con signo radical	100
	Con uso de valor absoluto	50
	Con notación de potencia (exponente fraccionario)	100
	Notación funcional	50
6.- Propiedades	<b>Potencia:</b>	
	Multiplicación y división de potencias de igual base	50
	No demuestra	50
	Restricción incompleta	50
	Potencia de una potencia	50
	No demuestra	50
	Restricción incompleta	50
	Multiplicación y división de potencias de igual exponente	50
	No demuestra	50
	Restricción incompleta	50
	<b>Radicales:</b>	
	Multiplicación raíces de igual índice	100
	No demuestra	100
	Usa restricciones completas	50
	No restringe	50
	Define unilateralmente	50
	División raíces de igual índice	100
	No demuestra	100
Usa restricciones completas	75	
No restringe	25	
Define unilateralmente	50	
7.- Aplicaciones	<b>Potencias:</b>	
	Notación científica	50
	Teorema de Pitágoras	50
	Polinomios	100
	Productos notables	50
	<b>Radicales:</b>	
	Racionalización	75
	Ecuaciones cuadráticas	75

Tabla N°19: Mr P1

Campos, aspectos y sub-aspectos		Periodo 1969 - 1981			
		Libro 1	Libro 2	Libro 3	
1.- Vigencia de la fuente		65	65	77	
2.- Nivel de enseñanza media		2º	-	-	
3.- Secuenciación de los contenidos	Potencia de exponente entero - raíz principal - Potencia de exponente racional				
	Raíz principal - Potencia de exponente entero - Potencia de exponente racional				
	Potencia de exponente entero - Potencia de exponente racional-raíz principal				
	Potencia de exponente entero - raíz o radical - Potencia de exponente racional		X	X	
	Raíz o radical - Potencia de exponente entero - Potencia de exponente racional				
	Potencia de exponente entero - Potencia de exponente racional-raíz o radical	X			
4.- Introducción al concepto	<b>Potencias:</b>				
	Deductiva (de la potencia a la multiplicación iterada)				
	Inductiva (de la multiplicación iterada a la potencia)	X	X	X	
	Como suma iterada				
	Otro (especificar al final)				
	<b>Radicales:</b>				
	Deductiva (del n-ésimo al cuadrado)				
	Inductiva (del cuadrado al n-ésimo)			X	
	Como inversa de la potenciación	X		X	
	Como potencia de exponente fraccionario (o racional)				
Otro (especificar al final)		X			
5.- Tipos de representaciones que utiliza	<b>Potencias:</b>				
	Con uso de parentesis	X	X	X	
	Con notación científica	X		X	
	Como multiplicación iterada	X	X	X	
	Otro (especificar al final)				
	<b>Radicales:</b>				
	Con el signo radical	X	X	X	
	Con uso de valor absoluto	X			
	Con notación de potencia (exponente fraccionario)	X	X	X	
	Notación funcional	X			
	Otro (especificar al final)				
6.- Propiedades	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	La demuestra con errores lógicos		X	
		La demuestra correctamente			X
		No demuestra	X		
		Usa restricciones completas			X
		Usa restricciones incompletas			
		No restringe	X	X	
		Define unilateralmente			
Define bilateralmente	X	X	X		

Campos, aspectos y sub-aspectos		Periodo 1969 - 1981			
		Libro 1	Libro 2	Libro 3	
6.- Propiedades	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	La demuestra con errores lógicos		X	
		La demuestra correctamente			X
		No demuestra	X		
		Usa restricciones completas			X
		Usa restricciones incompletas			
		No restringe	X	X	
		Define unilateralmente			
		Define bilateralmente	X	X	X
	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	La demuestra con errores lógicos		X	
		La demuestra correctamente			X
		No demuestra	X		
		Usa restricciones completas			X
		Usa restricciones incompletas			
		No restringe	X	X	
		Define unilateralmente			
		Define bilateralmente	X	X	X
	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	La demuestra con errores lógicos	X	X	X
		La demuestra correctamente			
		No demuestra			
		Usa restricciones completas			
Usa restricciones incompletas		X		X	
No restringe			X		
Define unilateralmente					
Define bilateralmente		X	X	X	
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, n \geq m$	La demuestra con errores lógicos		X	X	
	La demuestra correctamente				
	No demuestra	X			
	Usa restricciones completas				
	Usa restricciones incompletas		X	X	
	No restringe	X			
	Define unilateralmente				
	Define bilateralmente	X	X	X	
$\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{n-m}}, n > m$	La demuestra con errores lógicos	NI	X	NI	
	La demuestra correctamente	NI		NI	
	No demuestra	NI		NI	
	Usa restricciones completas	NI		NI	
	Usa restricciones incompletas	NI	X	NI	
	No restringe	NI		NI	
	Define unilateralmente	NI		NI	
	Define bilateralmente	NI	X	NI	

Campos, aspectos y sub-aspectos		Periodo 1969 - 1981			
		Libro 1	Libro 2	Libro 3	
6.- Propiedades	$\sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k}$	La demuestra con errores lógicos		NI	
		La demuestra correctamente		NI	
		No demuestra	X	NI	X
		Usa restricciones completas		NI	
		Usa restricciones incompletas		NI	
		No restringe	X	NI	X
		Define unilateralmente		NI	
		Define bilateralmente	X	NI	X
	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	La demuestra con errores lógicos			X
		La demuestra correctamente			
		No demuestra	X	X	
		Usa restricciones completas			
		Usa restricciones incompletas	X		X
		No restringe		X	
		Define unilateralmente			
		Define bilateralmente	X	X	X
	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k b^n}$	La demuestra con errores lógicos	NI	NI	NI
		La demuestra correctamente	NI	NI	NI
		No demuestra	NI	NI	NI
		Usa restricciones completas	NI	NI	NI
		Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI
		No restringe	NI	NI	NI
		Define unilateralmente	NI	NI	NI
		Define bilateralmente	NI	NI	NI
$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$	La demuestra con errores lógicos				
	La demuestra correctamente			X	
	No demuestra	X	X		
	Usa restricciones completas				
	Usa restricciones incompletas			X	
	No restringe	X	X		
	Define unilateralmente				
	Define bilateralmente	X	X	X	
$\sqrt[n]{a} : \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a:b}$	La demuestra con errores lógicos	NI	NI	NI	
	La demuestra correctamente	NI	NI	NI	
	No demuestra	NI	NI	NI	
	Usa restricciones completas	NI	NI	NI	
	Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI	
	No restringe	NI	NI	NI	
	Define unilateralmente	NI	NI	NI	
	Define bilateralmente	NI	NI	NI	

Campos, aspectos y sub-aspectos		Periodo 1969 - 1981			
		Libro 1	Libro 2	Libro 3	
6.- Propiedades	$\sqrt[n]{k\sqrt{a}} = k^n\sqrt{a}$	La demuestra con errores lógicos		X	X
		La demuestra correctamente			
		No demuestra	X		
		Usa restricciones completas			
		Usa restricciones incompletas			X
		No restringe	X	X	
		Define unilateralmente			
		Define bilateralmente	X	X	X
	$(\sqrt[n]{a})^n = a$	La demuestra con errores lógicos	X	X	
		La demuestra correctamente			
		No demuestra			X
		Usa restricciones completas			
		Usa restricciones incompletas			
		No restringe	X	X	X
		Define unilateralmente			
		Define bilateralmente	X	X	X
	$\sqrt[n]{a^n} = a$	La demuestra con errores lógicos	NI	NI	
		La demuestra correctamente	NI	NI	
		No demuestra	NI	NI	X
		Usa restricciones completas	NI	NI	
Usa restricciones incompletas		NI	NI		
No restringe		NI	NI	X	
Define unilateralmente		NI	NI		
Define bilateralmente		NI	NI	X	
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	La demuestra con errores lógicos	X	X	NI	
	La demuestra correctamente			NI	
	No demuestra			NI	
	Usa restricciones completas			NI	
	Usa restricciones incompletas			NI	
	No restringe	X	X	NI	
	Define unilateralmente			NI	
	Define bilateralmente	X	X	NI	
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	La demuestra con errores lógicos				
	La demuestra correctamente				
	No demuestra	X	X	X	
	Usa restricciones completas				
	Usa restricciones incompletas				
	No restringe	X	X	X	
	Define unilateralmente				
	Define bilateralmente	X	X	X	

Campos, aspectos y sub-aspectos		Periodo 1969 - 1981		
		Libro 1	Libro 2	Libro 3
7. Aplicaciones	<b>Potencias:</b>			
	Notación Científica	X	NI	X
	Teorema de Pitágoras		NI	
	Polinomios		NI	X
	Productos Notables		NI	
	<b>Radicales:</b>			
	Racionalización	X	X	X
	Ecuaciones Cuadráticas		X	
	Ecuaciones con Radicales	X	X	X



Tabla N°20: CSaEt P1

Perfil del Saber a Enseñar de los Libros de Texto del Primer Período (1969-1981)		
Variable Observada	Descripción	Porcentaje de determinación
3.- Secuenciación de los contenidos	Sigue la secuencia de potencia de exponente entero, raíz o radical y potencia de exponente racional	66,6
	Sigue la secuencia de potencia de exponente entero, potencia de exponente racional y raíz o radical	33,3
4.- Introducción al concepto	<b>Potencias</b>	
	Inductiva (de la multiplicación iterada a potencia)	100
	<b>Radicales</b>	
	Inductiva (del cuadrado al n-ésimo)	33,3
	Como inversa de la potenciación	66,6
5.- Tipos de representación	<b>Potencias</b>	
	Con uso de paréntesis	100
	Con notación científica	66,6
	Con multiplicación iterada	100
	<b>Radicales</b>	
	Con signo radical	100
	Con valor absoluto	33,3
	Con notación de potencia (exponente fraccionario)	100
Con notación funcional	33,3	
6.- Propiedades	La propiedad $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ es tratada	100
	Demuestra con errores lógicos	33,3
	Demuestra correctamente	33,3
	No demuestra	33,3
	No restringe	66,6
	Define bilateralmente	100
	La propiedad $(a^n)^m = a^{nm}$ es tratada	100
	Demuestra con errores lógicos	33,3
	Demuestra correctamente	33,3
	No demuestra	33,3
	Usa restricciones completas	33,3
	No restringe	66,6
	Define bilateralmente	100
	La propiedad $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ es tratada	100
	Demuestra con errores lógicos	33,3
	Demuestra correctamente	33,3
	No demuestra	33,3
	Usa restricciones completas	33,3
	No restringe	66,6
	Define bilateralmente	100
	La propiedad $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, b \neq 0$ es tratada	100
	Demuestra con errores lógicos	100
	Usa restricciones incompletas	66,6
	No restringe	33,3
	Define bilateralmente	100

Perfil del Saber a Enseñar de los Libros de Texto del Primer Período (1969-1981)		
Variable Observada	Descripción	Porcentaje de determinación
6.- Propiedades	La propiedad $\frac{a^n}{a^m} = (a)^{n-m}, a \neq 0, n \geq m$ es tratada	100
	Demuestra con errores lógicos	66,6
	No demuestra	33,3
	Usa restricciones incompletas	66,6
	No restringe	33,3
	Define bilateralmente	100
	La propiedad $\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{n-m}}, a \neq 0, m > n$ es tratada	33,3
	Demuestra con errores lógicos	33,3
	Usa restricciones incompletas	33,3
	Define bilateralmente	33,3
	La propiedad $\sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k}, n \in \mathbb{N}, a \geq 0$ es tratada	66,6
	No demuestra	66,6
	No restringe	66,6
	Define bilateralmente	66,6
	La propiedad $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}, n \in \mathbb{N}, a, b \geq 0$ es tratada	100
	Demuestra correctamente	33,3
	No demuestra	66,6
	Usa restricciones incompletas	66,6
	No restringe	33,3
	Define bilateralmente	100
	La propiedad $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}, n \in \mathbb{N}, a \geq 0, b > 0$ es tratada	100
	Demuestra correctamente	33,3
	No demuestra	66,6
	Usa restricciones incompletas	33,3
	No restringe	66,6
	Define bilateralmente	100
	La propiedad $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}; n, k \in \mathbb{N}; a \geq 0$ es tratada	100
	Demuestra con errores lógicos	66,6
	No demuestra	33,3
	Usa restricciones incompletas	33,3
	No restringe	66,6
	Define bilateralmente	100
	La propiedad $(\sqrt[n]{a})^n = a; n \in \mathbb{N}; a \geq 0$ es tratada	100
	Demuestra con errores lógicos	66,6
	No demuestra	33,3
	No restringe	100
	Define bilateralmente	100
	La propiedad $\sqrt[n]{a^n} = a; n \in \mathbb{N}; a \geq 0$ es tratada	33,3
	No demuestra	33,3
	No restringe	33,3
Define bilateralmente	33,3	

Perfil del Saber a Enseñar de los Libros de Texto del Primer Período (1969-1981)		
Variable Observada	Descripción	Porcentaje de determinación
6.- Propiedades	La propiedad $\frac{1}{a^n} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}; n \in N; a \geq 0$ es tratada	66,6
	Demuestra con errores lógicos	66,6
	No restringe	66,6
	Define bilateralmente	66,6
	La propiedad $\frac{m}{a^n} = \frac{m}{\sqrt[n]{a^m}}; n, m \in N; a \geq 0$ es tratada	100
	No demuestra	100
	No restringe	100
	Define bilateralmente	100
7.- Aplicaciones	<b>Potencias</b>	
	Notación científica	66,6
	Polinomios	33,3
	<b>Radicales</b>	
	Racionalización	100
	Ecuaciones cuadráticas	33,3
	Ecuaciones con radicales	100



Tabla N°28: Mr P2

Campos, aspectos y sub-aspectos		Período 1982 - 2000			
		Libro 1	Libro 2	Libro 3	
1.- Vigencia de la fuente		83	85	97	
2.- Nivel de enseñanza media		-	1º	1º	
3.- Secuenciación de los contenidos	Potencia de exponente entero - raíz principal - Potencia de exponente racional				
	Raíz principal - Potencia de exponente entero - Potencia de exponente racional				
	Potencia de exponente entero - Potencia de exponente racional-raíz principal				
	Potencia de exponente entero - raíz o radical - Potencia de exponente racional				
	Raíz o radical - Potencia de exponente entero - Potencia de exponente racional				
	Potencia de exponente entero - Potencia de exponente racional-raíz o radical	X			
4.- Introducción al concepto	<b>Potencias:</b>				
	Deductiva (de la potencia a la multiplicación iterada)	X			
	Inductiva (de la multiplicación iterada a la potencia)		X	X	
	Como suma iterada				
	Otro (especificar al final)				
	<b>Radicales:</b>				
	Deductiva (del n-ésimo al cuadrado)		NI	NI	
	Inductiva (del cuadrado al n-ésimo)	X	NI	NI	
	Como inversa de la potenciación		NI	NI	
	Como potencia de exponente fraccionario (o racional)		NI	NI	
Otro (especificar al final)		NI	NI		
5.- Tipos de representaciones que utiliza	<b>Potencias:</b>				
	Con uso de parentesis	X	X	X	
	Con notación científica		X		
	Como multiplicación iterada	X		X	
	Otro (especificar al final)				
	<b>Radicales:</b>				
	Con el signo radical	X	NI	NI	
	Con uso de valor absoluto		NI	NI	
	Con notación de potencia (exponente fraccionario)	X	NI	NI	
	Notación funcional		NI	NI	
Otro (especificar al final)		NI	NI		
6.- Propiedades	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	La demuestra con errores lógicos		X	X
		La demuestra correctamente			
		No demuestra	X		
		Usa restricciones completas			
		Usa restricciones incompletas			
		No restringe	X	X	X
		Define unilateralmente			
		Define bilateralmente		X	X
	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	La demuestra con errores lógicos		NI	X
		La demuestra correctamente		NI	
		No demuestra	X	NI	
		Usa restricciones completas		NI	
		Usa restricciones incompletas		NI	
		No restringe	X	NI	X
		Define unilateralmente		NI	
		Define bilateralmente		NI	X

Campos, aspectos y sub-aspectos			Período 1982 - 2000		
			Libro 1	Libro 2	Libro 3
6.- Propiedades	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	La demostración con errores lógicos	NI	NI	NI
		La demostración correctamente	NI	NI	NI
		No demuestra	NI	NI	NI
		Usa restricciones completas	NI	NI	NI
		Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI
		No restringe	NI	NI	NI
		Define unilateralmente	NI	NI	NI
		Define bilateralmente	NI	NI	NI
	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	La demostración con errores lógicos	NI	NI	NI
		La demostración correctamente	NI	NI	NI
		No demuestra	NI	NI	NI
		Usa restricciones completas	NI	NI	NI
		Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI
		No restringe	NI	NI	NI
		Define unilateralmente	NI	NI	NI
		Define bilateralmente	NI	NI	NI
	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, n \geq m$	La demostración con errores lógicos			X
		La demostración correctamente			
		No demuestra	X	X	
		Usa restricciones completas			
Usa restricciones incompletas					
No restringe		X	X	X	
Define unilateralmente					
Define bilateralmente			X	X	
$\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{n-m}}, n > m$	La demostración con errores lógicos	NI	NI	NI	
	La demostración correctamente	NI	NI	NI	
	No demuestra	NI	NI	NI	
	Usa restricciones completas	NI	NI	NI	
	Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI	
	No restringe	NI	NI	NI	
	Define unilateralmente	NI	NI	NI	
	Define bilateralmente	NI	NI	NI	
$\sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k}$	La demostración con errores lógicos		NI	NI	
	La demostración correctamente		NI	NI	
	No demuestra	X	NI	NI	
	Usa restricciones completas		NI	NI	
	Usa restricciones incompletas		NI	NI	
	No restringe	X	NI	NI	
	Define unilateralmente		NI	NI	
	Define bilateralmente		NI	NI	

Campos, aspectos y sub-aspectos			Periodo 1982 - 2000		
			Libro 1	Libro 2	Libro 3
6.- Propiedades	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	La demostración con errores lógicos	X	NI	NI
		La demostración correctamente		NI	NI
		No demuestra		NI	NI
		Usa restricciones completas		NI	NI
		Usa restricciones incompletas		NI	NI
		No restringe	X	NI	NI
		Define unilateralmente		NI	NI
		Define bilateralmente		NI	NI
	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k b^n}$	La demostración con errores lógicos		NI	NI
		La demostración correctamente		NI	NI
		No demuestra	X	NI	NI
		Usa restricciones completas		NI	NI
		Usa restricciones incompletas		NI	NI
		No restringe	X	NI	NI
		Define unilateralmente		NI	NI
		Define bilateralmente		NI	NI
	$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$	La demostración con errores lógicos	X	NI	NI
		La demostración correctamente		NI	NI
		No demuestra		NI	NI
		Usa restricciones completas		NI	NI
Usa restricciones incompletas			NI	NI	
No restringe		X	NI	NI	
Define unilateralmente			NI	NI	
Define bilateralmente			NI	NI	
$\sqrt[n]{a} : \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a:b}$	La demostración con errores lógicos		NI	NI	
	La demostración correctamente		NI	NI	
	No demuestra	X	NI	NI	
	Usa restricciones completas		NI	NI	
	Usa restricciones incompletas		NI	NI	
	No restringe	X	NI	NI	
	Define unilateralmente		NI	NI	
	Define bilateralmente		NI	NI	
$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[kn]{a}$	La demostración con errores lógicos	X	NI	NI	
	La demostración correctamente		NI	NI	
	No demuestra		NI	NI	
	Usa restricciones completas		NI	NI	
	Usa restricciones incompletas		NI	NI	
	No restringe	X	NI	NI	
	Define unilateralmente		NI	NI	
	Define bilateralmente		NI	NI	

Campos, aspectos y sub-aspectos			Período 1982 - 2000		
			Libro 1	Libro 2	Libro 3
6.- Propiedades	$(\sqrt[n]{a})^n = a$	La demuestra con errores lógicos	NI	NI	NI
		La demuestra correctamente	NI	NI	NI
		No demuestra	NI	NI	NI
		Usa restricciones completas	NI	NI	NI
		Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI
		No restringe	NI	NI	NI
		Define unilateralmente	NI	NI	NI
		Define bilateralmente	NI	NI	NI
	$\sqrt[n]{a^n} = a$	La demuestra con errores lógicos	NI	NI	NI
		La demuestra correctamente	NI	NI	NI
		No demuestra	NI	NI	NI
		Usa restricciones completas	NI	NI	NI
		Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI
		No restringe	NI	NI	NI
		Define unilateralmente	NI	NI	NI
		Define bilateralmente	NI	NI	NI
	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	La demuestra con errores lógicos	NI	NI	NI
		La demuestra correctamente	NI	NI	NI
		No demuestra	NI	NI	NI
		Usa restricciones completas	NI	NI	NI
		Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI
		No restringe	NI	NI	NI
		Define unilateralmente	NI	NI	NI
		Define bilateralmente	NI	NI	NI
	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	La demuestra con errores lógicos	NI	NI	NI
		La demuestra correctamente	NI	NI	NI
		No demuestra	NI	NI	NI
		Usa restricciones completas	NI	NI	NI
Usa restricciones incompletas		NI	NI	NI	
No restringe		NI	NI	NI	
Define unilateralmente		NI	NI	NI	
Define bilateralmente		NI	NI	NI	
7. Aplicaciones	<b>Potencias:</b>				
	Notación Científica		X		
	Teorema de Pitágoras				
	Polinomios		X		
	Productos Notables	X	X	X	
	<b>Radicales:</b>				
	Racionalización	X	NI	NI	
	Ecuaciones Cuadráticas		NI	NI	
Ecuaciones con Radicales	X	NI	NI		

Tabla N°29: CSaEt P2

Perfil del Saber a Enseñar de los Libros de Texto del Segundo Período (1982-2000)		
Variable Observada	Descripción	Porcentaje de determinación
3.- Secuenciación de los contenidos	Sigue la secuencia de potencia de exponente entero, potencia de exponente racional y raíz o radical	100
4.- Introducción al concepto	<b>Potencias</b>	
	Deductiva (de la potencia a la multiplicación iterada)	33,3
	Inductiva (de la multiplicación iterada a potencia)	66,6
	<b>Radicales</b>	
	Inductiva (del cuadrado al n-ésimo)	100
5.- Tipos de representación	<b>Potencias</b>	
	Con uso de paréntesis	100
	Con notación científica	33,3
	Con multiplicación iterada	66,6
	<b>Radicales</b>	
	Con signo radical	100
	Con notación de potencia (exponente fraccionario)	100
6.- Propiedades	La propiedad $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ es tratada	100
	Demuestra con errores lógicos	66,6
	No demuestra	33,3
	No restringe	100
	Define bilateralmente	100
	La propiedad $(a^n)^m = a^{nm}$ es tratada	33,3
	Demuestra con errores lógicos	33,3
	No restringe	33,3
	Define bilateralmente	33,3
	La propiedad $\frac{a^n}{a^m} = (a)^{n-m}, a \neq 0, n \geq m$ es tratada	100
	Demuestra con errores lógicos	33,3
	No demuestra	66,6
	No restringe	100
	Define bilateralmente	100
	La propiedad $\sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k}, n \in \mathbb{N}, a \geq 0$ es tratada	100
	No demuestra	100
	No restringe	100
	Define bilateralmente	100
	La propiedad $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}, n \in \mathbb{N}, a, b \geq 0$ es tratada	100
	Demuestra con errores lógicos	100
	No restringe	100
	Define bilateralmente	100
	La propiedad $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k \cdot b^n}; n, k \in \mathbb{N}, a, b \geq 0$ es tratada	100
	No demuestra	100
No restringe	100	
Define bilateralmente	100	

Perfil del Saber a Enseñar de los Libros de Texto del Segundo Período (1982-2000)		
Variable Observada	Descripción	Porcentaje de determinación
6.- Propiedades	La propiedad $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$ ; $n \in \mathbb{N}, a \geq 0, b > 0$ es tratada	100
	Demuestra con errores lógicos	100
	No restringe	100
	Define bilateralmente	100
	La propiedad $\sqrt[n]{a} + \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k + b^n}$ ; $n, k \in \mathbb{N}, a \geq 0, b > 0$ es tratada	100
	No demuestra	100
	No restringe	100
	Define bilateralmente	100
	La propiedad $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ ; $n, k \in \mathbb{N}; a \geq 0$ es tratada	100
	Demuestra con errores lógicos	100
	No restringe	100
	Define bilateralmente	100
	7.- Aplicaciones	<b>Potencias</b>
Notación científica		33,3
Polinomios		33,3
Productos Notables		100
<b>Radicales</b>		
Racionalización		100
Ecuaciones con radicales		100

Tabla N° 39: Mr P3

Campos, aspectos y sub-aspectos		Periodo 2001 - 2010				
		Libro 1	Libro 2	Libro 3	Libro 4	
1.- Vigencia de la fuente		03-04	08-09	02	01	
2.- Nivel de enseñanza media		1º	3º	3º	1º	
3.- Secuenciación de los contenidos	Potencia de exponente entero - raíz principal - Potencia de exponente racional					
	Raíz principal - Potencia de exponente entero - Potencia de exponente racional					
	Potencia de exponente entero - Potencia de exponente racional-raíz principal					
	Potencia de exponente entero - raíz o radical - Potencia de exponente racional					
	Raíz o radical - Potencia de exponente entero - Potencia de exponente racional					
	Potencia de exponente entero - Potencia de exponente racional-raíz o radical					
4.- Introducción al concepto	<b>Potencias:</b>					
	Deductiva (de la potencia a la multiplicación iterada)		NI			
	Inductiva (de la multiplicación iterada a la potencia)		NI			
	Como suma iterada		NI			
	Otro (especificar al final)	X	NI	X	X	
	<b>Radicales:</b>					
	Deductiva (del n-ésimo al cuadrado)		NI		NI	
	Inductiva (del cuadrado al n-ésimo)		NI	X	X	
	Como inversa de la potenciación		NI		NI	
	Como potencia de exponente fraccionario (o racional)		NI		NI	
Otro (especificar al final)		NI		NI		
5.- Tipos de representaciones que utiliza	<b>Potencias:</b>					
	Con uso de parentesis	X	NI	X	X	
	Con notación científica		NI		X	
	Como multiplicación iterada	X	NI	X		
	Otro (especificar al final)		NI			
	<b>Radicales:</b>					
	Con el signo radical		NI	X	X	
	Con uso de valor absoluto		NI	X	NI	
	Con notación de potencia (exponente fraccionario)		NI		X	
	Notación funcional		NI	X	NI	
Otro (especificar al final)		NI		NI		
6.- Propiedades	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	La demuestra con errores lógicos		NI		
		La demuestra correctamente		NI		
		No demuestra	X	NI	X	X
		Usa restricciones completas		NI	X	X
		Usa restricciones incompletas		NI		
		No restringe	X	NI		
		Define unilateralmente		NI		
Define bilateralmente	X	NI	X	X		

Campos, aspectos y sub-aspectos		Periodo 2001 - 2010				
		Libro 1	Libro 2	Libro 3	Libro 4	
6.- Propiedades	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	La demuestra con errores lógicos	NI	NI		NI
		La demuestra correctamente	NI	NI		NI
		No demuestra	NI	NI	X	NI
		Usa restricciones completas	NI	NI	X	NI
		Usa restricciones incompletas	NI	NI		NI
		No restringe	NI	NI		NI
		Define unilateralmente	NI	NI		NI
		Define bilateralmente	NI	NI	X	NI
	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	La demuestra con errores lógicos	NI	NI		NI
		La demuestra correctamente	NI	NI		NI
		No demuestra	NI	NI	X	NI
		Usa restricciones completas	NI	NI	X	NI
		Usa restricciones incompletas	NI	NI		NI
		No restringe	NI	NI		NI
		Define unilateralmente	NI	NI		NI
		Define bilateralmente	NI	NI	X	NI
	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	La demuestra con errores lógicos	NI	NI		
		La demuestra correctamente	NI	NI		
		No demuestra	NI	NI	X	X
		Usa restricciones completas	NI	NI	X	X
Usa restricciones incompletas		NI	NI			
No restringe		NI	NI			
Define unilateralmente		NI	NI			
Define bilateralmente		NI	NI	X	X	
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, n \geq m$	La demuestra con errores lógicos		NI	NI	NI	
	La demuestra correctamente		NI	NI	NI	
	No demuestra	X	NI	NI	NI	
	Usa restricciones completas		NI	NI	NI	
	Usa restricciones incompletas	X	NI	NI	NI	
	No restringe		NI	NI	NI	
	Define unilateralmente		NI	NI	NI	
	Define bilateralmente	X	NI	NI	NI	
$\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{n-m}}, n > m$	La demuestra con errores lógicos	NI	NI	NI	NI	
	La demuestra correctamente	NI	NI	NI	NI	
	No demuestra	NI	NI	NI	NI	
	Usa restricciones completas	NI	NI	NI	NI	
	Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI	NI	
	No restringe	NI	NI	NI	NI	
	Define unilateralmente	NI	NI	NI	NI	
	Define bilateralmente	NI	NI	NI	NI	

Campos, aspectos y sub-aspectos			Periodo 2001 - 2010			
			Libro 1	Libro 2	Libro 3	Libro 4
6.- Propiedades	$\sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k}$	La demuestra con errores lógicos	NI	NI	NI	NI
		La demuestra correctamente	NI	NI	NI	NI
		No demuestra	NI	NI	NI	NI
		Usa restricciones completas	NI	NI	NI	NI
		Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI	NI
		No restringe	NI	NI	NI	NI
		Define unilateralmente	NI	NI	NI	NI
		Define bilateralmente	NI	NI	NI	NI
	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	La demuestra con errores lógicos	NI	X		NI
		La demuestra correctamente	NI			NI
		No demuestra	NI		X	NI
		Usa restricciones completas	NI	X	X	NI
		Usa restricciones incompletas	NI			NI
		No restringe	NI			NI
		Define unilateralmente	NI			NI
		Define bilateralmente	NI	X	X	NI
	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k b^n}$	La demuestra con errores lógicos	NI	NI	NI	NI
		La demuestra correctamente	NI	NI	NI	NI
		No demuestra	NI	NI	NI	NI
		Usa restricciones completas	NI	NI	NI	NI
Usa restricciones incompletas		NI	NI	NI	NI	
No restringe		NI	NI	NI	NI	
Define unilateralmente		NI	NI	NI	NI	
Define bilateralmente		NI	NI	NI	NI	
$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$	La demuestra con errores lógicos	NI			NI	
	La demuestra correctamente	NI			NI	
	No demuestra	NI	X	X	NI	
	Usa restricciones completas	NI	X	X	NI	
	Usa restricciones incompletas	NI			NI	
	No restringe	NI			NI	
	Define unilateralmente	NI			NI	
	Define bilateralmente	NI	X	X	NI	
$\sqrt[n]{a} : \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a:b}$	La demuestra con errores lógicos	NI	NI	NI	NI	
	La demuestra correctamente	NI	NI	NI	NI	
	No demuestra	NI	NI	NI	NI	
	Usa restricciones completas	NI	NI	NI	NI	
	Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI	NI	
	No restringe	NI	NI	NI	NI	
	Define unilateralmente	NI	NI	NI	NI	
	Define bilateralmente	NI	NI	NI	NI	

Campos, aspectos y sub-aspectos		Periodo 2001 - 2010				
		Libro 1	Libro 2	Libro 3	Libro 4	
6.- Propiedades	$\sqrt[n]{k\sqrt{a}} = k\sqrt[n]{a}$	La demuestra con errores lógicos	NI	NI	NI	NI
		La demuestra correctamente	NI	NI	NI	NI
		No demuestra	NI	NI	NI	NI
		Usa restricciones completas	NI	NI	NI	NI
		Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI	NI
		No restringe	NI	NI	NI	NI
		Define unilateralmente	NI	NI	NI	NI
		Define bilateralmente	NI	NI	NI	NI
	$(\sqrt[n]{a})^n = a$	La demuestra con errores lógicos	NI	NI	NI	NI
		La demuestra correctamente	NI	NI	NI	NI
		No demuestra	NI	NI	NI	NI
		Usa restricciones completas	NI	NI	NI	NI
		Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI	NI
		No restringe	NI	NI	NI	NI
		Define unilateralmente	NI	NI	NI	NI
		Define bilateralmente	NI	NI	NI	NI
	$\sqrt[n]{a^n} = a$	La demuestra con errores lógicos	NI		NI	NI
		La demuestra correctamente	NI		NI	NI
		No demuestra	NI	X	NI	NI
		Usa restricciones completas	NI	X	NI	NI
Usa restricciones incompletas		NI		NI	NI	
No restringe		NI		NI	NI	
Define unilateralmente		NI		NI	NI	
Define bilateralmente		NI	X	NI	NI	
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	La demuestra con errores lógicos	NI	NI		NI	
	La demuestra correctamente	NI	NI		NI	
	No demuestra	NI	NI	X	NI	
	Usa restricciones completas	NI	NI		NI	
	Usa restricciones incompletas	NI	NI		NI	
	No restringe	NI	NI	X	NI	
	Define unilateralmente	NI	NI		NI	
	Define bilateralmente	NI	NI	X	NI	
$\frac{m}{n} = \sqrt[n]{a^m}$	La demuestra con errores lógicos	NI	NI	NI	NI	
	La demuestra correctamente	NI	NI	NI	NI	
	No demuestra	NI	NI	NI	NI	
	Usa restricciones completas	NI	NI	NI	NI	
	Usa restricciones incompletas	NI	NI	NI	NI	
	No restringe	NI	NI	NI	NI	
	Define unilateralmente	NI	NI	NI	NI	
	Define bilateralmente	NI	NI	NI	NI	

Campos, aspectos y sub-aspectos		Periodo 2001 - 2010			
		Libro 1	Libro 2	Libro 3	Libro 4
7. Aplicaciones	<b>Potencias:</b>				
	Notación Científica		NI		X
	Teorema de Pitágoras		NI	X	
	Polinomios		NI		
	Productos Notables	X	NI		X
	<b>Radicales:</b>				
	Racionalización	NI			NI
	Ecuaciones Cuadráticas	NI	X	X	NI
	Ecuaciones con Radicales	NI		X	NI



Tabla N°40: CSaEt P3

Perfil del Saber a Enseñar de los Libros de Texto del Tercer Período (2001-2010)		
Variable Observada	Descripción	Porcentaje de determinación
3.- Secuenciación de los contenidos	Sigue la secuencia de potencia de exponente entero, raíz o radical y potencia de exponente racional.	100
4.- Introducción al concepto	<b>Potencias</b>	
	Otros: Planteamiento de una situación de la vida cotidiana	66,6
	Otros: Solo se entrega propiedades, sin contenido	33,3
	<b>Radicales</b>	
	Inductiva (del cuadrado al n-ésimo)	100
5.- Tipos de representación	<b>Potencias</b>	
	Con uso de paréntesis	100
	Con notación científica	33,3
	Con multiplicación iterada	66,6
	<b>Radicales</b>	
	Con signo radical	100
	Uso de valor absoluto	50
	Notación de potencia	50
Notación funcional	50	
6.- Propiedades	La propiedad $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ es tratada	100
	No demuestra	100
	Usa restricciones completas	66,6
	No restringe	33,3
	Define bilateralmente	100
	La propiedad $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ es tratada	33,3
	No demuestra	33,3
	Usa restricciones completas	33,3
	Define bilateralmente	33,3
	La propiedad $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ es tratada	33,3
	No demuestra	33,3
	Usa restricciones completas	33,3
	Define bilateralmente	33,3
	La propiedad $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, b \neq 0$ es tratada	66,6
	No demuestra	66,6
	Usa restricciones completas	66,6
	Define bilateralmente	66,6
	La propiedad $\frac{a^n}{a^m} = (a)^{n-m}, a \neq 0, n \geq m$ es tratada	33,3
	No demuestra	33,3
	Usa restricciones incompletas	33,3
	Define bilateralmente	33,3
	La propiedad $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}, n \in \mathbb{N}, a, b \geq 0$ es tratada	100
	Demuestra con errores lógicos	50
	No demuestra	50
	Usa restricciones completas	100
	Define bilateralmente	100

Perfil del Saber a Enseñar de los Libros de Texto del Tercer Período (2001-2010)		
Variable Observada	Descripción	Porcentaje de determinación
6.- Propiedades	La propiedad $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}, n \in \mathbb{N}, a \geq 0, b > 0$ es tratada	100
	No demuestra	100
	Usa restricciones completas	100
	Define bilateralmente	100
	La propiedad $\sqrt[n]{a^n} = a, n \in \mathbb{N}, a \geq 0$ es tratada	50
	No demuestra	50
	Usa restricciones completas	50
	Define bilateralmente	50
	La propiedad $\frac{1}{a^n} = \sqrt[n]{a}, n \in \mathbb{N}, a \geq 0$ es tratada	50
	No demuestra	50
	No restringe	50
	Define bilateralmente	50
7.- Aplicaciones	<b>Potencias</b>	
	Notación científica	33,3
	Teorema de Pitágoras	33,3
	Productos notables	66,6
	<b>Radicales</b>	
	Ecuaciones cuadráticas	100
	Ecuaciones con radicales	50

Tabla N°46: Mr P4

Campos, aspectos y sub-aspectos		Periodo 2011 - 2015	
		Libro 1	Libro 2
1.- Vigencia de la fuente		14	11
2.- Nivel de enseñanza media		2º	1º
3.- Secuenciación de los contenidos	Potencia de exponente entero - raíz principal - Potencia de exponente racional		
	Raíz principal - Potencia de exponente entero - Potencia de exponente racional		
	Potencia de exponente entero - Potencia de exponente racional-raíz principal		
	Potencia de exponente entero - raíz o radical - Potencia de exponente racional		
	Raíz o radical - Potencia de exponente entero - Potencia de exponente racional		
	Potencia de exponente entero - Potencia de exponente racional-raíz o radical		
4.- Introducción al concepto	<b>Potencias:</b>		
	Deductiva (de la potencia a la multiplicación iterada)		
	Inductiva (de la multiplicación iterada a la potencia)		X
	Como suma iterada		
	Otro (especificar al final)	X	
	<b>Radicales:</b>		
	Deductiva (del n-ésimo al cuadrado)		NI
	Inductiva (del cuadrado al n-ésimo)		NI
	Como inversa de la potenciación		NI
	Como potencia de exponente fraccionario (o racional)		NI
Otro (especificar al final)	X	NI	
5.- Tipos de representaciones que utiliza	<b>Potencias:</b>		
	Con uso de parentesis	NI	X
	Con notación científica	NI	X
	Como multiplicación iterada	NI	X
	Otro (especificar al final)	NI	
	<b>Radicales:</b>		
	Con el signo radical	X	NI
	Con uso de valor absoluto		NI
	Con notación de potencia (exponente fraccionario)	X	NI
	Notación funcional		NI
	Otro (especificar al final)		NI
6.- Propiedades	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	La demuestra con errores lógicos	NI
		La demuestra correctamente	NI
		No demuestra	NI
		Usa restricciones completas	NI
		Usa restricciones incompletas	NI
		No restringe	NI
		Define unilateralmente	NI
		Define bilateralmente	NI

Campos, aspectos y sub-aspectos			Periodo 2011 - 2015	
			Libro 1	Libro 2
6.- Propiedades	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	La demuestra con errores lógicos	NI	
		La demuestra correctamente	NI	X
		No demuestra	NI	
		Usa restricciones completas	NI	X
		Usa restricciones incompletas	NI	
		No restringe	NI	
		Define unilateralmente	NI	
		Define bilateralmente	NI	X
	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	La demuestra con errores lógicos	NI	NI
		La demuestra correctamente	NI	NI
		No demuestra	NI	NI
		Usa restricciones completas	NI	NI
		Usa restricciones incompletas	NI	NI
		No restringe	NI	NI
		Define unilateralmente	NI	NI
		Define bilateralmente	NI	NI
	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	La demuestra con errores lógicos	NI	NI
		La demuestra correctamente	NI	NI
		No demuestra	NI	NI
		Usa restricciones completas	NI	NI
		Usa restricciones incompletas	NI	NI
		No restringe	NI	NI
		Define unilateralmente	NI	NI
		Define bilateralmente	NI	NI
	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, n \geq m$	La demuestra con errores lógicos	NI	
		La demuestra correctamente	NI	
		No demuestra	NI	X
		Usa restricciones completas	NI	X
Usa restricciones incompletas		NI		
No restringe		NI		
Define unilateralmente		NI		
Define bilateralmente		NI	X	
$\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{n-m}}, n > m$	La demuestra con errores lógicos	NI	NI	
	La demuestra correctamente	NI	NI	
	No demuestra	NI	NI	
	Usa restricciones completas	NI	NI	
	Usa restricciones incompletas	NI	NI	
	No restringe	NI	NI	
	Define unilateralmente	NI	NI	
	Define bilateralmente	NI	NI	

Campos, aspectos y sub-aspectos			Periodo 2011 - 2015	
			Libro 1	Libro 2
6.- Propiedades	$\sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k}$	La demuestra con errores lógicos	X	NI
		La demuestra correctamente		NI
		No demuestra		NI
		Usa restricciones completas		NI
		Usa restricciones incompletas		NI
		No restringe	X	NI
		Define unilateralmente		NI
		Define bilateralmente	X	NI
	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	La demuestra con errores lógicos		NI
		La demuestra correctamente		NI
		No demuestra	X	NI
		Usa restricciones completas	X	NI
		Usa restricciones incompletas		NI
		No restringe		NI
		Define unilateralmente		NI
	Define bilateralmente	X	NI	
	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k b^n}$	La demuestra con errores lógicos	NI	NI
		La demuestra correctamente	NI	NI
		No demuestra	NI	NI
		Usa restricciones completas	NI	NI
		Usa restricciones incompletas	NI	NI
		No restringe	NI	NI
		Define unilateralmente	NI	NI
	Define bilateralmente	NI	NI	
$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$	La demuestra con errores lógicos		NI	
	La demuestra correctamente		NI	
	No demuestra	X	NI	
	Usa restricciones completas	X	NI	
	Usa restricciones incompletas		NI	
	No restringe		NI	
	Define unilateralmente		NI	
Define bilateralmente	X	NI		
$\sqrt[n]{a} : \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a:b}$	La demuestra con errores lógicos	NI	NI	
	La demuestra correctamente	NI	NI	
	No demuestra	NI	NI	
	Usa restricciones completas	NI	NI	
	Usa restricciones incompletas	NI	NI	
	No restringe	NI	NI	
	Define unilateralmente	NI	NI	
Define bilateralmente	NI	NI		

Campos, aspectos y sub-aspectos			Periodo 2011 - 2015	
			Libro 1	Libro 2
6.- Propiedades	$\sqrt[n]{k\sqrt{a}} = k\sqrt[n]{a}$	La demostración con errores lógicos	X	NI
		La demostración correctamente		NI
		No demuestra		NI
		Usa restricciones completas		NI
		Usa restricciones incompletas		NI
		No restringe	X	NI
		Define unilateralmente		NI
		Define bilateralmente	X	NI
	$(\sqrt[n]{a})^n = a$	La demostración con errores lógicos	NI	NI
		La demostración correctamente	NI	NI
		No demuestra	NI	NI
		Usa restricciones completas	NI	NI
		Usa restricciones incompletas	NI	NI
		No restringe	NI	NI
		Define unilateralmente	NI	NI
		Define bilateralmente	NI	NI
	$\sqrt[n]{a^n} = a$	La demostración con errores lógicos	NI	NI
		La demostración correctamente	NI	NI
		No demuestra	NI	NI
		Usa restricciones completas	NI	NI
		Usa restricciones incompletas	NI	NI
		No restringe	NI	NI
		Define unilateralmente	NI	NI
		Define bilateralmente	NI	NI
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	La demostración con errores lógicos		NI	
	La demostración correctamente		NI	
	No demuestra	X	NI	
	Usa restricciones completas	X	NI	
	Usa restricciones incompletas		NI	
	No restringe		NI	
	Define unilateralmente		NI	
	Define bilateralmente	X	NI	
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	La demostración con errores lógicos		NI	
	La demostración correctamente		NI	
	No demuestra	X	NI	
	Usa restricciones completas		NI	
	Usa restricciones incompletas		NI	
	No restringe	X	NI	
	Define unilateralmente		NI	
	Define bilateralmente	X	NI	

Campos, aspectos y sub-aspectos		Periodo 2011 - 2015	
		Libro 1	Libro 2
7. Aplicaciones	<b>Potencias:</b>		
	Notación Científica	NI	X
	Teorema de Pitágoras	NI	X
	Polinomios	NI	
	Productos Notables	NI	X
	<b>Radicales:</b>		
	Racionalización	X	NI
	Ecuaciones Cuadráticas		NI
	Ecuaciones con Radicales	X	NI



Tabla N° 47: CSaEt P4

Perfil del Saber a Enseñar de los libros de texto del Cuarto período (2011-2015)		
Variable Observada	Descripción	Porcentaje de determinación
3.- Secuenciación de los contenidos	Sigue la secuencia de potencia de exponente entero, raíz y potencia de exponente racional	100
4.- Introducción al concepto	<b>Potencia</b>	
	Inductiva (de la multiplicación iterada a potencia)	50
	Otros: Planteamiento de situación contingente	50
	<b>Radicales</b>	
	Otros: Planteamiento de situación contingente	100
5.- Tipos de representaciones que utiliza	<b>Potencia</b>	
	Con uso de paréntesis	100
	Con notación científica	100
	Con multiplicación iterada	100
	<b>Radicales</b>	
	Con signo radical	100
	Con notación de potencia (exponente fraccionario)	100
6.- Propiedades	La propiedad $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ es tratada	100
	Demuestra correctamente	100
	Usa restricciones completas	100
	Define bilateralmente	100
	La propiedad $(a^n)^m = a^{nm}$ es tratada	100
	Demuestra correctamente	100
	Usa restricciones completas	100
	Define bilateralmente	50
	La propiedad $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, a \neq 0, n \geq m$ es tratada	100
	No demuestra	100
	Usa restricciones completas	100
	Define bilateralmente	100
	La propiedad $\sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k}; k, n \in \mathbb{N}; a \geq 0$ es tratada	100
	Demuestra con errores lógicos	100
	No restringe	100
	Define bilateralmente	100
	La propiedad $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}; n \in \mathbb{N}; a, b \geq 0$ es tratada	100
	No demuestra	100
	Usa restricciones completas	100
	Define bilateralmente	100
	La propiedad $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}; n \in \mathbb{N}; a, b \geq 0$ es tratada	100
	No demuestra	100
	Usa restricciones completas	100
	Define bilateralmente	100

Perfil del Saber a Enseñar de los libros de texto del Cuarto período (2011-2015)		
Variable Observada	Descripción	Porcentaje de determinación
6.- Propiedades	La propiedad $\sqrt[n]{k\sqrt{a}} = \sqrt[n]{n^k a}$ ; $n, k \in \mathbb{N}; a \geq 0$ es tratada	100
	Demuestra con errores lógicos	100
	No restringe	100
	Define bilateralmente	100
	La propiedad $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ; $n \in \mathbb{N}; a \geq 0$ es tratada	100
	No demuestra	100
	Usa restricciones completas	100
	Define bilateralmente	100
	La propiedad $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ; $n \in \mathbb{N}; a \geq 0$ es tratada	100
	No demuestra	100
	No restringe	100
	Define bilateralmente	100
7.- Aplicaciones	<b>Potencias</b>	
	Notación científica	100
	Teorema de Pitágoras	100
	Productos Notables	100
	<b>Radicales</b>	
	Racionalización	100
	Ecuaciones con radicales	100

Tabla N°48: Triangulación de los 4 perfiles del saber a enseñar por período

Perfil del Saber a Enseñar de los Libros de Texto (1969-2015)					
Variable Observada	Descripción	Porcentaje de determinación P1	Porcentaje de determinación P2	Porcentaje de determinación P3	Porcentaje de determinación P4
3.- Secuenciación de los contenidos	Sigue la secuencia de potencia de exponente entero, raíz o radical y potencia de exponente racional	66,6	0	100	100
	Sigue la secuencia de potencia de exponente entero, potencia de exponente racional y raíz o radical	33,3	100,0	0	0
4.- Introducción al concepto	<b>Potencia</b>				
	Deductiva (de la potencia a la multiplicación iterada)	0	33,3	0	0
	Inductiva (de la multiplicación iterada a potencia)	100	66,6	0	50
	Otro (especificar al final)	0	0	100	50
	<b>Radicales</b>				
	Inductiva (del cuadrado al n-ésimo)	33,3	100	100	0
	Como inversa de la potenciación	66,6	0	0	0
Otro (especificar al final)	0	0	0	100	
5.- Tipos de representaciones que utiliza	<b>Potencia</b>				
	Con uso de paréntesis	100	100	100	100
	Con notación científica	66,6	33,3	33,3	100
	Con multiplicación iterada	100	66,6	66,6	100
	<b>Radicales</b>				
	Con signo radical	100	100	100	100
	Con uso de valor absoluto	33,3	0	50	0
	Con notación de potencia (exponente fraccionario)	100	100	50	100
Notación funcional	33,3	0	50	0	
6.- Propiedades	La propiedad $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ es tratada	100	100	100	100
	Demuestra con errores lógicos	33,3	66,6	0	0
	La demuestra correctamente	33,3	0	0	100
	No demuestra	33,3	33,3	100	0
	Usa restricciones completas	66,6	0	66,6	100
	Usa restricciones incompletas	100	0	0	0
	No restringe	66,6	100	33,3	0
Define bilateralmente	100	100	100	100	

Perfil del Saber a Enseñar de los Libros de Texto (1969-2015)					
Variable Observada	Descripción	Porcentaje de determinación	Porcentaje de determinación	Porcentaje de determinación	Porcentaje de determinación
		P1	P2	P3	P4
6.- Propiedades	La propiedad $(a^n)^m = a^{nm}$ es tratada	100	33,3	33,3	100
	Demuestra con errores lógicos	33,3	33,3	0	0
	La demuestra correctamente	33,3	0	0	100
	No demuestra	33,3	0	33,3	0
	Usa restricciones completas	33,3	0	33,3	100
	No restringe	66,6	33,3	0	0
	Define bilateralmente	100	33,3	33,3	100
	La propiedad $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ es tratada	100	0	33,3	0
	Demuestra con errores lógicos	33,3	0	0	0
	La demuestra correctamente	33,3	0	0	0
	No demuestra	33,3	0	33,3	0
	Usa restricciones completas	33,3	0	33,3	0
	No restringe	66,6	0	0	0
	Define bilateralmente	100	0	33,3	0
	La propiedad $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, b \neq 0$ es tratada	100	0	66,6	0
	Demuestra con errores lógicos	100	0	0	0
	No demuestra	0	0	66,6	0
	Usa restricciones completas	0	0	66,6	0
	Usa restricciones incompletas	66,6	0	0	0
	No restringe	33,3	0	0	0
	Define bilateralmente	100	0	66,6	0
	La propiedad $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, a \neq 0, n \geq m$ es tratada	100	100	33,3	100
	Demuestra con errores lógicos	66,6	33,3	0	0
	No demuestra	33,3	66,6	33,3	100
	Usa restricciones completas	0	0	0	100
	Usa restricciones incompletas	66,6	0	33,3	0
	No restringe	33,3	100	0	0
	Define bilateralmente	100	100	33,3	100

Perfil del Saber a Enseñar de los Libros de Texto (1969-2015)					
Variable Observada	Descripción	Porcentaje de determinación	Porcentaje de determinación	Porcentaje de determinación	Porcentaje de determinación
		P1	P2	P3	P4
6.- Propiedades	La propiedad $\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{n-m}}, a \neq 0, m > n$ es tratada	33,3	0	0	0
	Demuestra con errores lógicos	33,3	0	0	0
	Usa restricciones incompletas	33,3	0	0	0
	Define bilateralmente	33,3	0	0	0
	La propiedad $\sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k}, k, n \in \mathbb{N}; a \geq 0$ es tratada	66,6	100	0	100
	Demuestra con errores lógicos	0	0	0	100
	No demuestra	66,6	100	0	0
	No restringe	66,6	100	0	100
	Define bilateralmente	66,6	100	0	100
	La propiedad $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, n \in \mathbb{N}; a, b \geq 0$ es tratada	100	100	100	100
	Demuestra con errores lógicos	0	100	50	0
	La demuestra correctamente	33,3	0	0	0
	No demuestra	66,6	0	50	100
	Usa restricciones completas	0	0	100	100
	Usa restricciones incompletas	66,6	0	0	0
	No restringe	33,3	100	0	0
	Define bilateralmente	100	100	100	100
	La propiedad $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}, n \in \mathbb{N}; a \geq 0; b > 0$ es tratada	100	33,3	100	100
	La demuestra correctamente	33,3	0	0	0
	No demuestra	66,6	33,3	100	100
	Usa restricciones completas	0	0	100	100
	Usa restricciones incompletas	33,3	0	0	0
	No restringe	66,6	33,3	0	0
	Define bilateralmente	100	33,3	100	100
	La propiedad $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[nk]{a^k \cdot b^n}, a \geq 0; b > 0$ es tratada	0	100	0	0
	No demuestra	0	100	0	0
	No restringe	0	100	0	0
	Define bilateralmente	0	100	0	0

Perfil del Saber a Enseñar de los Libros de Texto (1969-2015)					
Variable Observada	Descripción	Porcentaje de determinación P1	Porcentaje de determinación P2	Porcentaje de determinación P3	Porcentaje de determinación P4
6.- Propiedades	La propiedad $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nk]{a}; n, k \in \mathbb{N}; a \geq 0$ es tratada	100	100	0	100
	Demuestra con errores lógicos	66,6	100	0	100
	No demuestra	33,3	0	0	0
	Usa restricciones completas	33,3	0	0	0
	No restringe	66,6	100	0	100
	Define bilateralmente	100	100	0	100
	La propiedad $(\sqrt[n]{a})^n = a; n \in \mathbb{N}; a \geq 0$ es tratada	100	0	0	0
	Demuestra con errores lógicos	66,6	0	0	0
	No demuestra	33,3	0	0	0
	No restringe	100	0	0	0
	Define bilateralmente	100	0	0	0
	La propiedad $\sqrt[n]{a^n} = a; n \in \mathbb{N}; a \geq 0$ es tratada	33,3	0	50	0
	No demuestra	33,3	0	50	0
	Usa restricciones completas	0	0	50	0
	No restringe	33,3	0	0	0
	Define bilateralmente	33,3	0	50	0
	La propiedad $\frac{1}{a^n} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}}; n, k \in \mathbb{N}; a \geq 0$ es tratada	66,6	0	50	100
	Demuestra con errores lógicos	66,6	0	0	0
	No demuestra	0	0	50	100
	Usa restricciones completas	0	0	0	100
	No restringe	66,6	0	50	0
	Define bilateralmente	66,6	0	50	100
	La propiedad $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[n]{a^m}; n \in \mathbb{N}; a \geq 0$ es tratada	100	0	0	100
	No demuestra	100	0	0	100
No restringe	100	0	0	100	
Define bilateralmente	100	0	0	100	
7.- Aplicaciones	<b>Potencias</b>				
	Notación científica	66,6	33,3	33,3	100
	Teorema de Pitágoras	0	0	33,3	100
	Polinomios	33,3	33,3	0	0
	Productos Notables	0	100	66,6	100
	<b>Radicales</b>				
	Racionalización	100	100	0	100
	Ecuaciones cuadráticas	33,3	0	100	0
	Ecuaciones con radicales	100	100	50	100

Tabla N°49: Caracterización del Saber a Enseñar en los Libros de Texto (1969-2015)

Variable Observada	Descripción	% Promedio de determinación
3.- Secuenciación de los contenidos	Sigue la secuencia de potencia de exponente entero, raíz o radical y potencia de exponente racional	66,65
4.- Introducción al concepto	<b>Potencia</b>	
	Inductiva (de la multiplicación iterada a potencia)	54,15
	<b>Radicales</b>	
5.- Tipos de representaciones que utiliza	Inductiva (del cuadrado al n-ésimo)	58,325
	<b>Potencia</b>	
	Con uso de paréntesis	100
	Con notación científica	58,3
	Con multiplicación iterada	83,3
	<b>Radicales</b>	
6.- Propiedades	Con signo radical	100
	Con notación de potencia (exponente fraccionario)	87,5
	La propiedad $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ es tratada	100
	No demuestra	41,65
	Usa restricciones completas	58,3
6.- Propiedades	No restringe	49,975
	Define bilateralmente	100
	La propiedad $(a^n)^m = a^{nm}$ es tratada	66,65
	Usa restricciones completas	41,65
	Define bilateralmente	66,65
	La propiedad $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, b \neq 0$ es tratada	41,65
	Define bilateralmente	41,65
	La propiedad $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, a \neq 0, n \geq m$ es tratada	83,325
	No demuestra	58,3
	Define bilateralmente	83,325
6.- Propiedades	La propiedad $\sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k}; k, n \in \mathbb{N}; a \geq 0$ es tratada	66,65
	No demuestra	41,65
	No restringe	66,65
	Define bilateralmente	66,65
	La propiedad $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}; n \in \mathbb{N}; a, b \geq 0$ es tratada	100
	No demuestra	54,15
	Usa restricciones completas	50
	Define bilateralmente	100
	La propiedad $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}; n \in \mathbb{N}; a \geq 0; b > 0$ es tratada	83,325
	No demuestra	74,975
	Usa restricciones completas	50
	Define bilateralmente	83,325
6.- Propiedades	La propiedad $\sqrt[n]{k \sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{ka}; n, k \in \mathbb{N}; a \geq 0$ es tratada	75
	Demuestra con errores lógicos	66,65
	No restringe	66,65
	Define bilateralmente	75
	La propiedad $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}; n, k \in \mathbb{N}; a \geq 0$ es tratada	54,15
	Define bilateralmente	54,15
	La propiedad $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}; n \in \mathbb{N}; a \geq 0$ es tratada	50
	No demuestra	50
No restringe	50	
Define bilateralmente	50	
7.- Aplicaciones	<b>Potencias</b>	
	Notación científica	58,3
	Productos Notables	66,65
	<b>Radicales</b>	
	Racionalización	75
Ecuaciones con radicales	87,5	



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN  
CAMPUS LOS ÁNGELES  
ESCUELA DE EDUCACIÓN  
PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA Y ED. TECNOLÓGICA



# ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO EN EL CONTENIDO DE POTENCIAS Y RAÍCES: SUS CAMBIOS Y EVOLUCIONES (1969-2015)

Seminaristas: Natalia Durán  
Marietta Gutiérrez

Profesor Guía: Mg. Jorge Cid

Comisión: Ricardo Alzugaray – Sixto Martínez

# Problemática:

- *¿Cómo es el tratamiento que se le da al contenido de Potencias y Raíces, en los libros de textos, utilizados en Chile entre los años 1969 y 2015?*

Existen diferencias en la estructuración del saber matemático en el contenido de Potencias y Raíces entre los años 1969 y 2015

Las propiedades de potencias y raíces varían en cada reforma en cuanto a su presentación y tratamiento.

En el tratamiento de Potencias y Raíces en los libros de texto, no se sigue una secuencia conceptual, lo cual impide la realización de demostraciones algebraicas.

El tratamiento de Potencias y Raíces en los libros de texto, comunica errores conceptuales y procedimentales, evidenciándose rupturas epistemológicas con el saber matemático

Existen modificaciones referentes a las representaciones simbólicas tanto de potenciación como radicación en cada reforma o cambio curricular

# Objetivos

Detectar cuáles son las propiedades de potencias y raíces que se trabajan en los libros de texto en relación a cada reforma curricular y cómo son tratadas

Establecer las principales diferencias entre los marcos curriculares producidos por las reformas o ajustes educativos, específicamente en el contenido de potencias y raíces

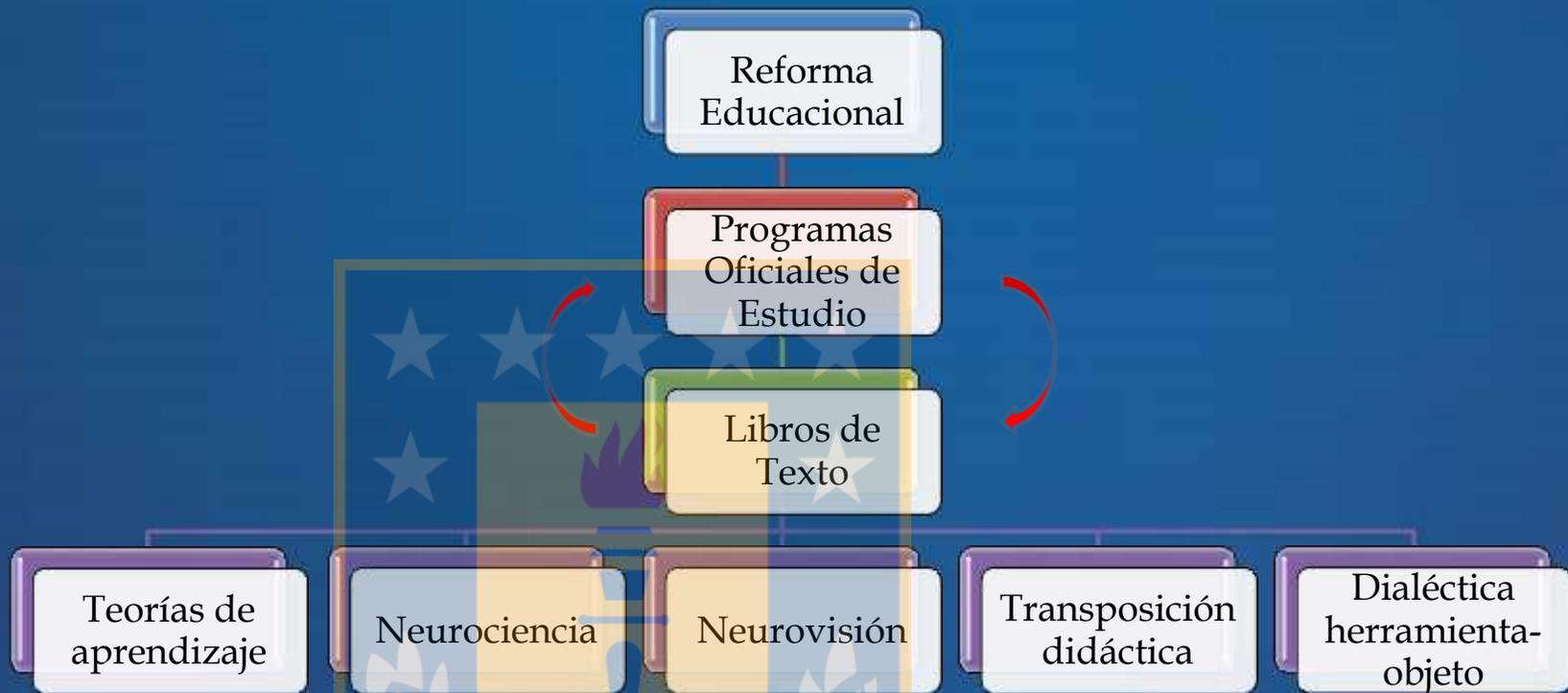
Analizar los tipos de representaciones simbólicas que se utilizan en el tratamiento de potencias y raíces

Describir y analizar la organización conceptual de los contenidos con los cuales se relacionan, que permita establecer la existencia de rupturas epistemológicas

Evidenciar errores conceptuales y procedimentales en los libros de textos en el contenido de potencias y raíces

Identificar y caracterizar el tratamiento de potencias y raíces en los libros de texto mediante un análisis conceptual, de contenido y su adaptación al currículum durante el período 1969-2015 en Chile.

# Marco Teórico:



# Marco Metodológico



# Marco Metodológico



# Marco Metodológico



# Marco Metodológico

Campos genéricos MIGp(i), con i =1, 2, 3, 4	Programa
MIGp1: Decreto	
MIGp2: Características Generales de los Programas Oficiales	
MIGp3: Programa Seleccionado y sus referencias identificatorias	
MIGp4: Secciones del Programa	

Campos genéricos MIGt(i), con i = 1, 2, 3, 4	Libro de texto
MIGt1: Título y Procedencia	
MIGt2: Datos de Autoría	
MIGt3: Edición y Tipo de Obra	
MIGt4: Presentación física	

# Marco Metodológico



# Marco Metodológico

Campos genéricos MACp(i), con i = 1, 2, 3, 4, 5	Programa
MACp1: Lugar oficial de potenciación y radicación en el saber a enseñar	
MACp2: Propósitos explicitados para el contenido de potencias y raíces	
MACp3: Organización de los contenidos	
MACp4: Orientaciones didácticas	
MACp5: Actividades o ejemplos propuestos	

Campos genéricos MACt(i) con i=1,2,3,4,5	Libro de texto
MACt1: Organización de los contenidos	
MACt2: Tipo de presentación de los contenidos	
MACt3: Ecología de las potencias y raíces en los libros de texto	
MACt4: Presentación de potencia y raíces	
MACt5: Tratamiento de las propiedades de las potencias y raíces.	
MACt6: Aplicaciones del Álgebra de potencias y raíces.	

# Marco Metodológico



Campos, aspectos y sub-aspectos		Periodos			
		Prog.1	Prog.2	Prog.3	Prog.4
1.- Vigencia de la fuente					
2.- Nivel de enseñanza media					
3.- Secuenciación de los contenidos	Potencia de exponente entero - raíz principal - Potencia de ex...				
	Raíz principal - Potencia de exponente entero - Potencia de ex...				
	Potencia de exponente entero - Potencia de exponente racion...				
4.- Introducción al concepto	Potencias:				
	Deductiva (de la potencia a la multiplicación iterada)				
	Inductiva (de la multiplicación iterada a la potencia)				
	Como suma iterada				
	Otro (especificar al final)				
	Radicales:				
	Deductiva (del n-ésimo al cuadrado)				
	Inductiva (del cuadrado al n-ésimo)				
	Como inversa de la potenciación				
	Como potencia de exponente fraccionario (o racional)				
Otro (especificar al final)					
5.- Tipos de representaciones que utiliza	Potencias:				
	Con uso de parentesis				
	Con notación científica				
	Como multiplicación iterada				
	Otro (especificar al final)				
	Radicales:				
	Con el signo radical				
	Con uso de valor absoluto				
	Con notación de potencia (exponente fraccionario)				
	Notación funcional				
Otro (especificar al final)					
6.- Propiedades	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	La demuestra con errores lógicos			
		La demuestra correctamente			
		No demuestra			
		Usa restricciones completas			
		Usa restricciones incompletas			
	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	No restringe			
		Define unilateralmente			
		Define bilateralmente			
		La demuestra con errores lógicos			
		La demuestra correctamente			
	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	No demuestra			
		Usa restricciones completas			
		Usa restricciones incompletas			
		No restringe			
		Define unilateralmente			

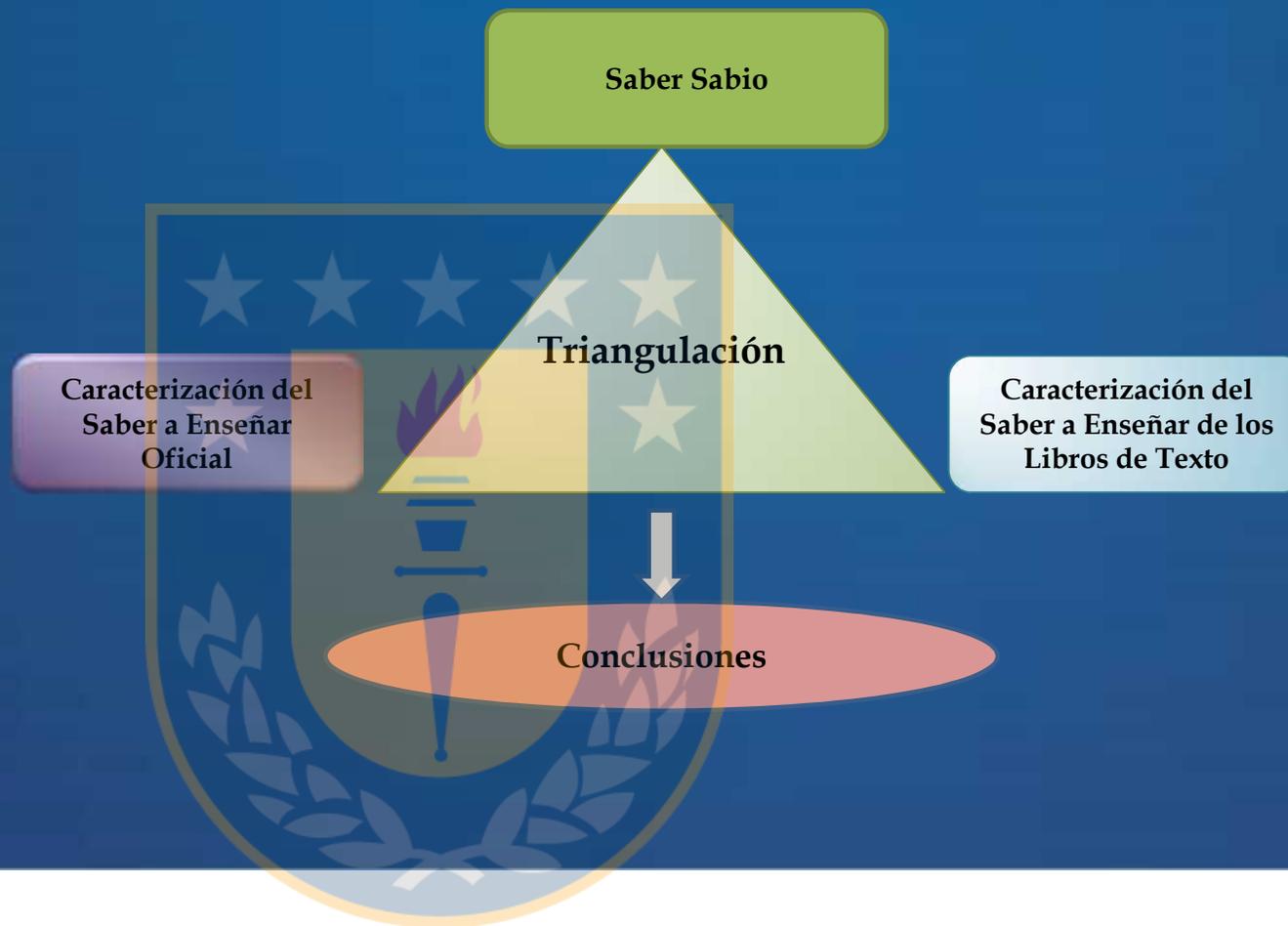
Campos, aspectos y sub-temas		Evaluación				
		Prog.1	Prog.2	Prog.3	Prog.4	
6. Propiedades	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	La demuestra con errores lógicos				
		La demuestra correctamente				
		No demuestra				
	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, n \geq m$	Use restricciones completas				
		Use restricciones incompletas				
		No restringe				
	$\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}}, m > n$	Define unilateralmente				
		Define bilateralmente				
		La demuestra con errores lógicos				
	$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^n}$	La demuestra correctamente				
		No demuestra				
		Use restricciones completas				
	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	Use restricciones incompletas				
		No restringe				
		Define unilateralmente				
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^k b^k}$	Define bilateralmente					
	La demuestra con errores lógicos					
	La demuestra correctamente					
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^k b^k}$	No demuestra					
	Use restricciones completas					
	Use restricciones incompletas					
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^k b^k}$	No restringe					
	Define unilateralmente					
	Define bilateralmente					
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^k b^k}$	La demuestra con errores lógicos					
	La demuestra correctamente					
	No demuestra					
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^k b^k}$	Use restricciones completas					
	Use restricciones incompletas					
	No restringe					
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^k b^k}$	Define unilateralmente					
	Define bilateralmente					
	La demuestra con errores lógicos					

Campos, aspectos y sub-aspectos		Periodos				
		Prog.1	Prog.2	Prog.3	Prog.4	
6. Propiedades	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^k \cdot b^n}$	La demuestra con errores lógicos				
		La demuestra correctamente				
		No demuestra				
	$\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n^2]{a}$	Usa restricciones completas				
		Usa restricciones incompletas				
		No restringe				
	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$	Define unilateralmente				
		Define bilateralmente				
		La demuestra con errores lógicos				
	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	La demuestra correctamente				
		No demuestra				
		Usa restricciones completas				
$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m}$	Usa restricciones incompletas					
	No restringe					
	Define unilateralmente					
$\frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \sqrt[n]{a}$	Define bilateralmente					
	La demuestra con errores lógicos					
	La demuestra correctamente					
$\frac{m}{a^{\frac{1}{n}}} = \sqrt[n]{a^m}$	No demuestra					
	Usa restricciones completas					
	Usa restricciones incompletas					
7. Aplicaciones	No restringe					
	Define unilateralmente					
	Define bilateralmente					
Potencias:						
Notación Científica						
Teorema de Pitágoras						
Polinomios						
Productos Notables						
Radicales:						
Racionalización						
Ecuaciones Cuadráticas						
Ecuaciones con Radicales						

# Marco Metodológico



# Marco Metodológico



# Resultados



OE1: Establecer las principales diferencias entre los marcos curriculares producidos por las reformas o ajustes educativos, específicamente en el contenido de potencias y raíces

- Directrices dadas al docente
- Estructura del contenido y actividades
- Teoría de aprendizaje

OE2: Detectar cuáles son las propiedades de potencias y raíces que se trabajan en los libros de texto en relación a cada reforma curricular y cómo son tratadas

- Multiplicación de potencias de igual base
- Multiplicación y división de raíces de igual índice

OE3: Describir y analizar la organización conceptual de los contenidos con los cuales se relacionan, que permita establecer la existencia de rupturas epistemológicas

- Diferencia en niveles de enseñanza

OE4: Evidenciar errores conceptuales y procedimentales en los libros de textos en el contenido de potencias y raíces

- Restricción de los literales
- Doble signo

OE5: Analizar los tipos de representaciones simbólicas que se utilizan en el tratamiento de potencias y raíces

- Paréntesis
- Signo radical

Los programas oficiales de estudio, no son cubiertos en su totalidad por los libros de texto

Se visualiza que pese a que el ministerio de educación cuenta con un protocolo riguroso para hacer la revisión de los libros de texto, se pueden encontrar en ellos errores



