



Universidad de Concepción
Departamento de Física

Teoría Cinética de Inestabilidades Paramétricas en Plasmas

TESIS PRESENTADA A LA DIRECCIÓN DE POSTGRADO DE LA
UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN,
COMO PARTE DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN FÍSICA

Autor:
Patricio A. Muñoz Sepúlveda

Prof. Guía:
Dr. Jaime Araneda

Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción
Concepción, Chile.

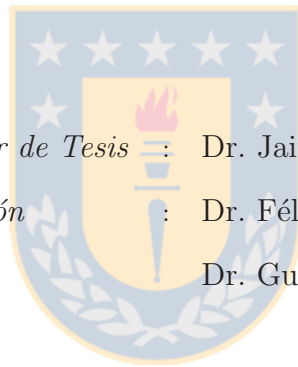
ABRIL 2011



Director de Tesis : Dr. Jaime Araneda Sepúlveda

Comisión : Dr. Félix Borotto Chávez

Dr. Guillermo Rubilar Alegría





Agradecimientos

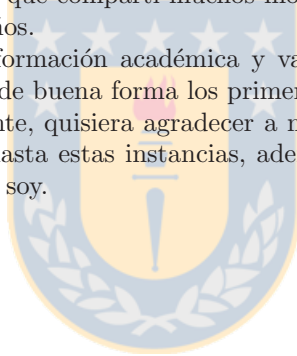
En primer lugar, deseo agradecer a mi director de tesis profesor Jaime Araneda, por todos los consejos y ayuda que me ha brindado a lo largo del desarrollo de este trabajo. Fue realmente un privilegio el que un profesor tan capacitado por sus conocimientos de física, como también por su gran calidad humana, me hubiese aceptado como estudiante tesista.

Agradezco también a los profesores Félix Borotto y Guillermo Rubilar, por haber aceptado ser parte de la comisión evaluadora de esta tesis, y por toda la ayuda que he recibido de ellos en varios ámbitos académicos durante los últimos años.

Además, en general, quiero agradecer a todos los profesores del departamento de Física de la Universidad de Concepción que me hicieron clases, entregándome una sólida formación en las diferentes áreas de la Física, capacitándome así para enfrentar de buena manera el desarrollo de esta tesis. También agradezco a todos los compañeros y amigos de carrera con los que compartí muchos momentos y conversaciones sobre física y varios otros temas, a lo largo de todos estos años.

Por otro lado, quiero agradecer la formación académica y valórica que recibí en el Colegio Salesiano de Concepción, que me permitió enfrentar de buena forma los primeros años de universidad.

Por último, pero no menos importante, quisiera agradecer a mi familia, por todo el apoyo que he recibido de ellos y que me ha permitido llegar hasta estas instancias, además de la paciencia que han tenido conmigo desde siempre, y de soportarme tal cual soy.





Índice general

Resumen	10
1. Introducción	12
1.1. Características y descripción general de los plasmas	12
1.1.1. Un plasma como gas de partículas cargadas	12
1.1.2. Descripción microscópica: Teoría Cinética	12
1.1.3. Descripción macroscópica: Teoría de Fluidos	15
1.1.4. Cantidades características	17
1.2. Ondas en plasmas y relaciones de dispersión	18
1.2.1. Linealización y ondas de pequeña amplitud	18
1.2.2. Algunos modos característicos de plasmas	19
1.2.3. Solución sistema Vlasov-Maxwell: Transformada de Fourier-Laplace	20
1.3. Interacciones onda-partícula	21
1.3.1. Amortiguamiento Landau	21
1.3.2. Inestabilidad beam cinéticas	23
1.3.3. Resonancia ciclotrónica	24
1.4. Contexto observacional: Propiedades del viento solar	26
1.4.1. Aspectos generales del viento solar y su generación	26
1.4.2. Características no térmicas en el viento solar y beams	29
1.5. Ondas de Alfvén	31
1.5.1. Descripción general	31
1.5.2. Relación de dispersión en el rango ión-ciclotrón: Teoría de fluidos	32
1.5.3. Ondas de gran amplitud: Solución de Sonnerup	37
2. Inestabilidades Paramétricas	42
2.1. Introducción	42
2.1.1. Motivación: un ejemplo conceptual	42
2.2. Clasificación y ejemplos para plasmas no magnetizados	43
2.2.1. Clasificación general	43
2.2.2. Ejemplos detallados	44
2.3. Inestabilidades en plasmas magnetizados cerca de Ω_P	45
2.3.1. Reseña Histórica de las Inestabilidades de Ondas de Alfvén	45
2.4. Relación de dispersión: Modelo de Hollweg	48
2.4.1. Método perturbativo: Relaciones básicas	48
2.4.2. Ecuación de momentum	49
2.4.3. Ecuación de Ampère	52
2.4.4. Relación de Dispersión	53
2.5. Resultados numéricos: Modelo de fluidos de Hollweg	54
2.5.1. Método	54
2.5.2. Comportamiento general	54
2.5.3. Efectos de la variación de la amplitud	58
2.5.4. Efectos de la variación de beta	60
2.5.5. Efectos de la variación de la frecuencia de la pump	65
2.6. Modelo cinético en dirección longitudinal	69

2.6.1.	Función de distribución longitudinal	69
2.6.2.	Estado de equilibrio	69
2.6.3.	Linealización y función de distribución perturbada	70
2.6.4.	Ecuación de continuidad	71
2.6.5.	Momento 1 de la ecuación de Vlasov	71
2.6.6.	Relación cinética para coeficiente politrópico	72
2.7.	Modelo cinético en dirección longitudinal: Resultados numéricos	75
2.7.1.	Método y caso límite de amplitud nula	75
2.7.2.	Caso estándar	76
2.7.3.	Efectos cinéticos en β	78
2.7.4.	Efectos en los umbrales de beta total	81
2.7.5.	Efectos en los umbrales de amplitud	84
2.7.6.	Efectos de la frecuencia de la pump	85
2.8.	Simulaciones Híbridas	86
2.8.1.	Método: Código Híbrido	86
2.8.2.	Diagramas de dispersión y Espectros de potencia	88
2.8.3.	Caso estándar y evolución de las inestabilidades paramétricas	90
3.	Efectos de un beam de iones	96
3.1.	Plasma protón + beam de iones: teoría de fluidos	96
3.1.1.	Sistema en equilibrio: onda pump	96
3.1.2.	Método perturbativo: Relaciones básicas	102
3.1.3.	Ecuación de momentum	103
3.1.4.	Ecuación de Ampère	104
3.1.5.	Relación de dispersión	105
3.2.	Plasma de fluidos protón-protón: Resultados numéricos	106
3.2.1.	Comportamiento general sin onda pump	106
3.2.2.	Caso particular: Velocidad de drift nula	110
3.2.3.	Caso genérico: Efectos de la velocidad de drift	114
3.2.4.	Caso genérico: Efectos de la densidad del beam	119
3.2.5.	Caso genérico: Efectos del parámetro beta del beam	121
3.2.6.	Umbrales para beta del core y electrones	123
3.2.7.	Caso genérico: Umbrales de amplitud	127
3.2.8.	Caso genérico: Frecuencia de la onda pump	129
3.3.	Modelo cinético en dirección longitudinal	132
3.3.1.	Función de distribución longitudinal	132
3.3.2.	Estado de equilibrio	132
3.3.3.	Linealización y función de distribución perturbada	132
3.3.4.	Ecuación de continuidad	132
3.3.5.	Momento 1 de la ecuación de Vlasov	132
3.3.6.	Relación cinética para coeficiente politrópico	133
3.4.	Plasma cinetico-híbrido protón-protón: Resultados numéricos	134
3.4.1.	Caso límite de amplitud nula	134
3.4.2.	Caso límite de velocidad U nula	135
3.4.3.	Variando la velocidad de drift	136
3.4.4.	Variando la densidad del beam	139
3.4.5.	Variando beta del beam	139
3.4.6.	Umbrales para beta del core y electrones	141
3.4.7.	Caso genérico: Umbrales de amplitud	145
3.4.8.	Caso genérico: Frecuencia de la onda pump	145
3.5.	Simulaciones Híbridas	148
3.5.1.	Caso amplitud nula	148
3.5.2.	Caso estándar: Efectos de la velocidad de drift.	149
3.6.	Resumen y discusión de resultados	160
3.6.1.	Parámetros del beam	160

3.6.2. Parámetro de una especie	161
4. Relación de dispersión cinética	164
4.1. Estado de equilibrio	164
4.1.1. Trayectorias no perturbadas	164
4.1.2. Ecuación de Vlasov y función de distribución en equilibrio	170
4.2. Función de distribución perturbada: Método de Matsuda	174
4.2.1. Linealización de ecuación de Vlasov	174
4.3. Momentos de la función de distribución	180
4.3.1. Densidad de carga	180
4.3.2. Densidad de corriente longitudinal	181
4.3.3. Densidad de corriente transversal	181
4.4. Relación de dispersión cinética	183
4.4.1. Ley de Ohm generalizada	183
4.4.2. Ecuación de dispersión longitudinal	184
4.4.3. Ecuaciones de dispersión transversales	185
4.4.4. Relación de dispersión	186
4.5. Modelo completamente cinético: Resultados numéricos	187
4.5.1. Límite de amplitud nula	187
4.5.2. Caso estándar	189
4.5.3. Discusión de problemas de la relación de dispersión	192
5. Conclusiones y trabajo futuro	196
A. Polarización de ondas de Alfvén	200
A.1. Convención para ondas circularmente polarizadas	200
A.1.1. Representación de ondas circularmente polarizadas	200
A.2. Polarización de ondas hijas en plasmas protón-protón	201
B. Teorema de Floquet	202
C. Función Z de Plasma	204
C.1. Propiedades	205
C.1.1. Ecuación diferencial	205
C.1.2. Expansión asintótica de la función Z	205
C.1.3. Propiedades de simetría	207
C.2. Función zeta y método de resolución de relaciones de dispersión	207
D. Modelo cinético: Cálculo de velocidad de drift	209
D.1. Trayectorias perturbadas por la velocidad de drift \bar{v}^{d1}	209
D.2. Solución del sistema de ecuaciones	210
E. Modelo cinético: Simplificaciones de integrales varias	212
E.1. Integrales temporales	212
E.2. Integrales de la función Z	213
E.2.1. Independientes de la amplitud	213
E.2.2. Dependientes de la amplitud	215
F. Normalizaciones	220
F.1. Plasma electrón-protón	220
F.1.1. Modelo cinético híbrido	221
F.2. Plasma electrón-protón-beam	221
F.2.1. Modelo cinético híbrido	222
F.3. Plasma electrón-protón: Modelo cinético	223
F.3.1. Argumentos de la función Z	223
F.3.2. Cantidades dependientes de la función Z	224
F.4. Términos de relación de dispersión	225

F.4.1. Ecuación de dispersión longitudinal 226
F.4.2. Ecuación de dispersión transversal 227



Resumen

En la presente tesis se abordará el problema de interacción no lineal onda-onda de inestabilidades paramétricas en plasmas, describiendo con modelos cinéticos el decaimiento de una onda de Alfvén en el rango de frecuencias ión-ciclotrón, circularmente polarizada y de propagación paralela a lo largo de un campo magnético estático de fondo. El sistema a considerar será en primera instancia un plasma electrón-protón en donde, por el rango de frecuencias considerado y la diferencia entre la masa de dichas partículas, los primeros siempre se considerarán como un fluido sin masa. Dicho problema ha sido estudiado analíticamente durante mucho tiempo mediante modelos de fluidos (MHD, ver [Hollweg, 1994]) y cinéticos híbridos (con ecuación de Vlasov, ver [Araneda, 1998]) que incorporan amortiguamiento Landau (para los protones) en dirección longitudinal (al campo magnético de fondo), logrando identificar que la onda madre (o pump) de Alfvén decae en ondas hijas que son inestables para ciertos parámetros, generando así las tres clásicas inestabilidades llamadas modulacional, de batido (*beat*) y de decaimiento. Ellas son de suma importancia para entender la fenomenología relacionada con la propagación de ondas de Alfvén en ambientes de plasmas espaciales, tales como la generación de turbulencia en el viento solar. Estas inestabilidades paramétricas y su contexto serán discutidas en el capítulo 2 de esta tesis, en donde además se resolverá con modelos conocidos las relaciones de dispersión para poder establecer comparaciones con las mejoras posteriores; mientras que las definiciones básicas de física de plasmas y las características de ondas de Alfvén serán dadas en el capítulo 1.

Es en este contexto que el objetivo principal (y original) de esta tesis es extender los modelos de fluidos y cinéticos-híbridos para este plasma electrón-protón, incluyendo los efectos del amortiguamiento ión-ciclotrón en la dirección transversal (al campo magnético de fondo), mediante la obtención de una relación de dispersión completamente cinética que describa el decaimiento de la onda de Alfvén mencionada. Para ello, se adaptará el método desarrollado en [Matsuda, 1986] para este rango de frecuencias, esperando identificar nuevos efectos sobre las inestabilidades paramétricas mediante una comparación con los resultados de modelos previos, además de establecer los regímenes de parámetros en que ellos serán más importantes. Estos resultados serán validados también con simulaciones híbridas, que describen mucho más fielmente el plasma real que cualquier cálculo analítico. Todo este análisis será realizado en el capítulo 4 de esta tesis.

Como complemento a lo anterior, el objetivo secundario será investigar los efectos de añadir, al plasma anterior, un beam de iones con cierta velocidad relativa respecto a la población de protones, tal como es frecuentemente observado en plasmas del viento solar (ver [Marsch, 2006]). Este sistema será estudiado, principalmente, con el modelo cinético-híbrido antes mencionado, tratando de buscar ciertos efectos y fenómenos no hallados en estudios previos sobre el tema. Dichos resultados serán validados también con simulaciones híbridas. Todo este estudio será realizado en el capítulo 3 de esta tesis.



Capítulo 1

Introducción

1.1. Características y descripción general de los plasmas

1.1.1. Un plasma como gas de partículas cargadas

Un plasma es un gas de partículas ionizadas que exhibe un comportamiento colectivo. La interacción básica que experimenta es de origen electromagnético, siendo descrita entonces por los campos eléctrico $\vec{E}(\vec{x}, t)$ y magnético $\vec{B}(\vec{x}, t)$, que obedecen las ecuaciones de Maxwell en el vacío:

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{\rho(\vec{x}, t)}{\epsilon_0} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{x}, t) = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{x}, t) = \mu_0 \vec{J}(\vec{x}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad (1.4)$$

en donde $\rho(\vec{x}, t)$ y $\vec{J}(\vec{x}, t)$ son las fuentes del campo electromagnético. Los fenómenos que serán descritos en esta tesis se desarrollarán en el rango de bajas frecuencias $\omega \sim \Omega_p \ll \Omega_e = eB/m_e$ ¹ y de velocidades no relativistas $v \ll c$, por lo que en la ecuación de Ampère es posible despreciar el término de corriente de desplazamiento así:

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{x}, t) = \mu_0 \vec{J}(\vec{x}, t) \quad (1.5)$$

Para más detalles de las consecuencias de esta restricción, ver sección 2.8.1. Además, cada partícula experimenta la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F}_L = m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \left[\vec{E}(\vec{x}, t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{x}, t) \right] \quad (1.6)$$

Usualmente, cuando se observa desde una distancia suficientemente lejana (ver (1.28) para una definición más precisa), un plasma contiene una carga total nula, por lo que deben existir tanto partículas con carga positiva como negativa (electrones e iones). Esta situación se denomina cuasineutralidad, y se produce en estado estacionario por consideraciones de simetría: una distribución aleatoria de partículas cargadas siempre producirán campos eléctricos que tienden a cancelarse.

Por otra parte, es posible modelar un plasma a varios niveles descriptivos, los que serán resumidos brevemente a continuación:

1.1.2. Descripción microscópica: Teoría Cinética

Los fundamentos de la descripción cinética de plasma se basan en considerar un método eficiente para modelar la posición \vec{r} y velocidad \vec{v} de cada una de las N partículas presentes en el plasma y su evolución

¹ B es el campo magnético característico del sistema y Ω_e es la frecuencia ciclotrónica de los electrones (ver (1.31))

temporal, sin tener que recurrir a resolver simultáneamente las leyes de Newton básicas por cada partícula, que, aunque en principio resolvería el problema, es prácticamente imposible de implementar debido a su alto costo computacional.

Función de distribución

Uno de los métodos más usados para resolver el problema anterior es introducir una función de distribución $f_j = f_j(\vec{x}, \vec{v}, t)$, definida como la densidad de partículas para la especie j del plasma en el espacio fase 6-D (\vec{x}, \vec{v}) , esto es, el número de partículas en un elemento infinitesimal de volumen $d^3v d^3x = dv_x dv_y dv_z dx dy dz$ en torno al punto (\vec{x}, \vec{v}) en el tiempo t . De aquí se desprende inmediatamente que el número total de partículas N_j de la especie j del plasma vendrá dado por:

$$N_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_j(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3v d^3x \quad (1.7)$$

A partir de lo anterior, es posible definir los llamados *momentos* de la función de distribución integrando apropiadamente $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ en el espacio de velocidades con un cierto peso [Baumjohann and Treumann, 1997]. Ellos son cantidades macroscópicas, y como tales, sólo pueden depender del espacio y el tiempo, pero no de las velocidades de las partículas. Así, el momento de orden 0 se puede identificar como la densidad numérica:

$$n_j(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_j(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3v \quad (1.8)$$

con lo que la densidad de carga total en el plasma será la suma de las contribuciones de cada especie:

$$\rho(\vec{x}, t) = \sum_j q_j \int d^3v f_j(\vec{x}, \vec{v}, t) \quad (1.9)$$

en donde la sumatoria corre sobre cada una de las “ j ” especies de partículas que componen el plasma. Por otra parte, el momento de orden 1 se identifica como la velocidad macroscópica de conjunto (*bulk*, promedio), siendo definida por:

$$V_j(\vec{x}, t) = \frac{1}{n_j(\vec{x}, t)} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{v} f_j(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3v \quad (1.10)$$

con lo que la densidad de corriente total en el plasma será la suma de las contribuciones de cada especie:

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = \sum_j q_j \int d^3v \vec{v} f_j(\vec{x}, \vec{v}, t) = \sum_j q_j n_j(\vec{x}, t) V_j(\vec{x}, t) \quad (1.11)$$

Además, el momento de orden 2 es proporcional al tensor de presión,

$$P_j^{ik}(\vec{x}, t) = m \int_{-\infty}^{\infty} (v_i - V_j^i(\vec{x}, t))(v_k - V_j^k(\vec{x}, t)) f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3v \quad (1.12)$$

Esta cantidad describe las fluctuaciones de las velocidades microscópicas con respecto a su promedio, lo que queda un poco más claro al introducir la velocidad *aleatoria* o *peculiar* $\vec{v}'(z, t)$:

$$\vec{v} = \vec{v}'(\vec{x}, t) + \vec{V}_j(\vec{x}, t) + \vec{U}_j \quad (1.13)$$

Es importante notar que la variable microscópica \vec{v} es independiente de \vec{x} y t , mientras que \vec{v}' no lo es, pero aún se mantiene $d^3v' = d^3v$ (ver [Cravens, 1997]). Aunque en principio se puede continuar construyendo indefinidamente momentos de orden superior de esta forma, estos son los más relevantes físicamente.

Si el plasma es isotrópico, entonces el tensor de presión sólo tendrá componentes no nulas en la diagonal, y cada una de ellas representará la presión escalar p_j que satisface la usual relación de gas ideal $p_j = n_j k_B T_j$ (ver

(1.21)). Luego, existirá la siguiente relación con la traza del tensor de presión $p_j = P_j^{ii}/3$, de donde se puede definir la llamada temperatura cinética:

$$T_j(\vec{x}, t) = \frac{p_j(\vec{x}, t)}{k_B n_j(\vec{x}, t)} = \frac{P_j^{ii}(\vec{x}, t)}{3k_B n_j(\vec{x}, t)} = \frac{m}{3k_B n_j(\vec{x}, t)} \int_{-\infty}^{\infty} (\vec{v} - \vec{V}_j(\vec{x}, t))^2 f_j(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3v \quad (1.14)$$

Cabe destacar que no es una temperatura en el sentido termodinámico, sino que una medida del ensanchamiento de la función de distribución en el espacio fase. Además, si en el plasma hay una dirección privilegiada, tal como sucede por ejemplo con un campo magnético estático aplicado en una cierta dirección (\parallel), entonces es posible definir dos tipos de temperatura cinética, una paralela y otra perpendicular:

$$T_{\parallel}(\vec{x}, t) = \frac{m}{k_B n(\vec{x}, t)} \int_{-\infty}^{\infty} (v_z - V_z(\vec{x}, t))^2 f d^3v, \quad T_{\perp}(\vec{x}, t) = \frac{m}{2k_B n(\vec{x}, t)} \int_{-\infty}^{\infty} (v_{\perp} - V_{\perp}(\vec{x}, t))^2 f d^3v, \quad (1.15)$$

en donde, si $v_{\parallel} = v_z$, entonces $v_{\perp}^2 = v_x^2 + v_y^2$.

Ecuación de Vlasov

De la teoría básica de Mecánica Estadística, es conocido que la función de distribución de cada especie de un plasma interactuando a través de sus campos electromagnéticos autoconsistentes (i.e.: generados por el movimiento de las mismas partículas cargadas y/o impuestos externamente, siendo funcionales de la función de distribución. Ver [Kirk et al., 1994] para más detalles) satisface la ecuación de Boltzmann (ver [Baumjohann and Treumann, 1997]). Ésta posee un término colisional que describe las correlaciones entre las partículas, aunque en este contexto de interacciones de larga distancia, una “colisión” es bastante difícil de definir (a diferencia de lo que ocurre en un gas neutro, por ejemplo, donde es un evento bien definido que implica una cercanía física entre partículas). En lenguaje poco riguroso, las interacciones electromagnéticas a una distancia lo “suficientemente grande” generadas por una función de distribución “suave”, pueden ser tomadas en cuenta completamente a través de la fuerza de Lorentz (1.6) cuando el plasma es “suficientemente caliente” (ver sección 8.7 de [Stix, 1992] y capítulo 8 de [Somov, 2006]), despreciando así todo el término colisional, una muy buena aproximación en muchos de los plasma espaciales tales como los del viento solar. En este caso, un plasma (“sin colisiones”) es gobernado por la llamada ecuación de Vlasov, que describe la evolución de la función de distribución en el espacio fase:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} + \frac{q_j}{m_j} \left(\vec{E}(\vec{x}, t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{x}, t) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \right] f_j(\vec{x}, \vec{v}, t) = 0 \quad (1.16)$$

con $\rho(\vec{x}, t)$ y $\vec{J}(\vec{x}, t)$ las fuentes del campo electromagnético autoconsistente siendo definidas por (1.9) y (1.11). La interpretación de esta ecuación se basa en el siguiente argumento: si se sigue la trayectoria de una partícula en el espacio fase (*órbita*), la razón observada de cambio en la función de distribución será:

$$\frac{df(t, \vec{x}, \vec{v})}{dt} = \frac{\partial f_j}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \vec{x}} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \vec{x}} + \vec{a} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \vec{v}} \quad (1.17)$$

con $\vec{v} = d\vec{x}/dt$, $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ y en donde la aceleración es de origen electromagnético, siendo dada por la fuerza de Lorentz (1.6): $\vec{a} = \vec{F}_L/m_j$, recuperándose el lado izquierdo de la ecuación de Vlasov anterior. Entonces, (1.16) representa una ecuación de conservación: f_j es constante a lo largo de un sistema de referencia comóvil con la trayectoria de una partícula.

El conjunto de la ecuación de Vlasov más las ecuaciones de Maxwell y las definiciones de densidad de carga y corriente conforma un sistema de ecuaciones no lineales íntegro-diferenciales, que posee muy pocas soluciones analíticas exactas conocidas. En la mayoría de los casos se resuelve mediante aproximaciones que involucran varias suposiciones y/o soluciones numéricas, tal como en el caso de uno de los objetivos de esta tesis. En particular, se aprovecha el hecho antes mencionado sobre la constancia de la función de distribución en la ecuación de Vlasov: es posible escoger f_j de modo que dependa de cualquier cantidad (por ej., la energía) que sea constante a lo largo de una órbita (Teorema de Liouville o Jeans, ver por ej. [Bellan, 2006]).

Por último, es digno de destacar el siguiente hecho: la función de distribución para un plasma en equilibrio termodinámico, en donde se consideren efectos colisionales, es una Maxwelliana (ver pág 226 de [Choudhuri, 1998]):

$$f_j(\vec{v}) = n_{0j} \left(\frac{m}{2\pi k_B T_j} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_j(\vec{v} - \vec{U}_j)^2}{2k_B T_j} \right) \quad (1.18)$$

en donde \vec{U}_j es la velocidad promedio macroscópica (de *drift*). Entonces, un plasma que no esté en equilibrio termodinámico (la situación más recurrente en el mundo real) tenderá a relajarse hacia esta distribución. Sin embargo, esto *no* puede ser modelado por la ecuación de Vlasov debida a la ausencia de colisiones. Esto debe ser tenido en consideración en el resto de esta tesis en donde se trabaja con la ecuación de Vlasov: a pesar de suponer por simplicidad que un plasma está en equilibrio termodinámico debido a relajación colisional y por tanto ser descrito por la distribución (1.18) (ó alguna variante apropiada de ella), las colisiones se desprecian para estudiar los procesos aquí analizados mediante la ecuación (1.16).

1.1.3. Descripción macroscópica: Teoría de Fluidos

Usando las definiciones previas de momentos de función de distribución y la ecuación de Vlasov, es posible deducir ecuaciones bastante más manejables para muchos plasmas espaciales en donde sólo se usan las cantidades macroscópicas, denominados momentos de la ecuación de Vlasov. Éstas son las conocidas relaciones de la teoría de fluidos neutros modificadas por términos que dan cuenta de su carga, y por ende, interactúan a través de las ecuaciones de Maxwell. El procedimiento es bastante estándar y se describe, por ej, en la sección 7.3 de [Chen, 1984], en la 2.4 de [Cravens, 1997], ó en la 5.8 de [Parks, 2004]. En efecto, para el momento de orden 0 se integra en el espacio de velocidades (1.16) y tomando en consideración las definiciones de (1.9) y (1.11), se obtiene la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial(n_j)(\vec{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (n_j \vec{V}_j)(\vec{x}, t) = 0 \quad (1.19)$$

Por otra parte, multiplicando por la velocidad microscópica \vec{v} e integrando nuevamente en el todo espacio de velocidades, y considerando esta vez la definición de presión (1.12), se tendrá la ecuación de momentum:

$$\frac{d\vec{V}_j}{dt} = \frac{\partial\vec{V}_j}{\partial t} + \vec{V}_j \cdot \frac{\partial\vec{V}_j}{\partial\vec{x}} = \frac{q_j}{m_j} \left(\vec{E} + \vec{V}_j \times \vec{B} \right) - \frac{\nabla P_j}{n_j m_j}. \quad (1.20)$$

Nótese que el momento de orden 0 contiene una cantidad, la corriente \vec{J} , que debe ser determinada del momento de orden 1 (recordar la proporcionalidad con V_j). Pero, a su vez, esta última ecuación contiene la presión P_j que en principio debe ser determinada del momento de orden 2 (ecuación de energía), la cual requiere multiplicar por el tensor $v_i v_j$ la ecuación de Vlasov para posteriormente integrar en velocidad. Y la situación continúa para los momentos de orden superior, de donde es posible continuar definiendo momentos y así tener un conjunto infinito de ecuaciones, denominado jerarquía BBGKY (por Bogoliubov, Born, Green, Kirkwood, Yvon (ver [Baumjohann and Treumann, 1997] y [Choudhuri, 1998]), aunque es impráctico en la mayoría de los casos.

Ecuación de estado

En cambio, el procedimiento más común es truncar el sistema anterior de ecuaciones en ρ_j , \vec{J}_j y P_j introduciendo una ecuación de estado, que relaciona la presión con la densidad (y así tener la misma cantidad de ecuaciones que incógnitas, además de evitar considerar el momento de orden 2 de la ec. de Vlasov). Cabe señalar que este procedimiento funciona sólo si el sistema está cercano al equilibrio termodinámico, y su dependencia exacta depende de las características particulares del plasma en cuestión. Hay dos ecuaciones de uso común en situaciones (generalmente) opuestas. Una de ellas es la ecuación de estado de gas ideal:

$$P_{0j} = n_{0j} k_B T_j \quad (1.21)$$

que es válida para el caso *isotérmico*, en donde las variaciones temporales son tan lentas que flujo de calor es dominante, manteniendo así una temperatura uniforme ([Baumjohann and Treumann, 1997], [Bellan, 2006]).

Esto sucede si la velocidad térmica de una especie del plasma (1.30) es mucho mayor que una velocidad característica V (ver para el caso cinético la sección C.1.2 y la desigualdad opuesta a (C.8)). Por otro lado, en el llamado caso *adiabático*, se tiene la siguiente ecuación del mismo nombre:

$$P_j = P_{0j} \left(\frac{n_j}{n_{0j}} \right)^{\gamma_j} \quad (1.22)$$

en donde 0 indica cantidades en equilibrio y γ_j es el índice politrópico. Es válida en situaciones caracterizadas por variaciones temporales tan rápidas que el flujo de calor es despreciable y así la entropía específica es constante (isentrópico), con la velocidad térmica mucho menor que V (ver desigualdad, para el caso cinético, (C.8)). Sin embargo, el índice γ de esta relación se puede adaptar a otras situaciones distintas de la original y más generales, pues si $\gamma = 1$ se recupera el caso isotérmico, mientras que para $\gamma = 0$ se tiene el caso isobárico (presión constante) y con $\gamma = \infty$ el caso isométrico (densidad constante).

En el caso particular de un plasma descrito por una distribución maxwelliana (1.18), es posible verificar que cada entrada diagonal del tensor de presión (1.12) se relaciona con la densidad en equilibrio mediante la ecuación de estado (1.21). Además, calculando el momento de orden 2 de la ecuación de Vlasov, es posible demostrar que también satisface la ecuación (1.22) con un índice adiabático $\gamma = 5/3$, de donde se concluye que un plasma Maxwelliano (en 3D) se comporta como un gas ideal adiabático ([Parks, 2004]. Por completitud, cabe mencionar que en plasmas monoatómicos 1D, se tendrá $\gamma_j = 3$, mientras que para plasmas 2D el índice es $\gamma_j = 2$ ([Baumjohann and Treumann, 1997]).

Por otro lado, de (1.22) se desprende:

$$\nabla P_j = \gamma_j K_j n_j^{\gamma_j - 1} \nabla n_j = \frac{\gamma_j P_{0j}}{n_{0j}} \nabla n_j \quad (1.23)$$

lo que será un resultado útil a la hora de linealizar posteriormente.

MHD y Ley de Ohm

Cabe señalar también que con una determinada ecuación de estado, se obtiene la llamada teoría de multifluidos, en el sentido que se tiene una ecuación de cada una de las anteriores por cada especie presente en el plasma. Es posible simplificar aún más este sistema introduciendo promedios de densidad de carga ρ , de partículas n , de corriente \vec{J} y de velocidad macroscópica \vec{V} para todas las especies iónicas, mientras que despreciando la inercia del fluido electrónico ($m_e/m_i \rightarrow 0$). Así se obtiene, además de la ecuación de estado y en condiciones de cuasineutralidad, una sola ecuación de continuidad y de momentum para las cantidades promedio de los iones:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\vec{V}) = 0, \quad (1.24)$$

$$\frac{d(nm\vec{V})}{dt} = \vec{J} \times \vec{B} - \nabla P, \quad (1.25)$$

(con P igual a la suma de presiones parciales de todos los iones más los electrones) mientras que la ecuación de momentum para los electrones sin masa se reduce a la llamada Ley de Ohm:

$$\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = 0 \quad (1.26)$$

que es válida siempre que se desprecien efectos resistivos o colisionales. Estas ecuaciones conforman la llamada magnetohidrodinámica ideal ó teoría MHD. En este modelo simplificado del plasma, se supone que los electrones e iones están tan fuertemente magnetizados que el plasma se comporta como si las líneas de campo magnéticos estuviesen atadas ("*frozen-in*") a él, lo que equivale a considerar frecuencias de interés mucho menores que las ciclotrónicas (1.31) de cada especie: $\omega \ll \omega_i, \omega_e$.

Una mejora del modelo anterior, que se usará en el capítulo 4 de esta tesis, es el llamado modelo Hall-MHD ó de dos fluidos, que permite incorporar los así llamados efectos ión-ciclotrón (inexistentes en MHD ideal). Aquí igual se considerarán frecuencias mucho menores que la ciclotrónica de electrones $\omega \ll \omega_e$ (electrones completamente magnetizados), pero se levantará la restricción sobre la frecuencia ciclotrónica de los iones permitiendo ondas con frecuencias comparables $\omega \sim \Omega_i$. Esta suposición se manifiesta en un cambio en la Ley de Ohm de la expresión (1.26) a, en el caso más simple:

$$\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = \frac{1}{ne} \vec{J} \times \vec{B} \quad (1.27)$$

en donde el lado derecho se denomina término de Hall, que desacopla el movimiento de electrones e iones en escalas del giroradio de los protones (para una interpretación detallada, ver pág 7 de [Cramer, 2001]). Dependiendo del tipo de fenómenos que se quieran describir, esta Ley de Ohm generalizada se puede extender en varios sentidos (págs 142-143 de [Baumjohann and Treumann, 1997]), añadiéndole los términos apropiados. Para tener una idea de las condiciones en las que es válido considerar cada término extra en la ley de Ohm generalizada, ver pág 155-158 de [Baumjohann and Treumann, 1997] y la extensa discusión del capítulo 10 de [Somov, 2006]). Sin embargo, la forma de la ley de Ohm que se usará aquí será derivada directamente en la sección donde se usará (4.4.1).

1.1.4. Cantidades características

En un plasma es útil definir algunas cantidades características, tales como:

- la longitud de Debye por

$$\lambda_{Dj}^2 = \frac{\epsilon_0 k_B T_j}{n_0 q_j^2}, \quad (1.28)$$

Ésta representa la distancia característica por encima de la cual el plasma es cuasineutral en estado estacionario y a escala macroscópica, en un elemento de volumen de tamaño apropiado. Por debajo de dicha distancia las cargas asociadas a cada partícula son identificables. Se obtiene como la longitud de balance entre la energía térmica de las partículas, que tiende a perturbar cuasineutralidad, y la energía potencia electrostática, que tiene a restaurar la cancelación de cargas debidos a cualquier separación entre ellas (denominado a veces "apantallamiento")

- la frecuencia de plasma de la especie "j":

$$\omega_{pj}^2 = \frac{n_0 q_j^2}{\epsilon_0 m_j} \quad (1.29)$$

Representa la frecuencia típica de oscilaciones de electrones en un plasma (completamente ionizado) frente a una perturbación local en su cuasineutralidad (considerando un fondo de iones positivos estáticos debido a su mayor masa). También representa el inverso del tiempo que tarda un electrón, moviéndose a su velocidad térmica característica, en recorrer una longitud de Debye.

- la velocidad térmica por:

$$v_{Tj}^2 = \frac{2k_B T_j}{m_j} \quad (1.30)$$

en donde T_j es la temperatura de la especie j , que se obtiene, de acuerdo a la discusión previa, de una ecuación de estado en teoría de fluidos y mediante una integral de la función de distribución en teoría cinética. Representa la velocidad típica del movimiento aleatorio de una partícula en el plasma, y es la velocidad más probable de la distribución Maxwelliana (1.18).

- la frecuencia ciclotrónica de la especie j :

$$\Omega_j = \frac{q_j B_s}{m_j} \quad (1.31)$$

con B el módulo del campo magnético en torno al cual las partículas giran, debido a la fuerza de Lorentz que siempre apunta en dirección perpendicular a su movimiento.

- la velocidad de Alfvén:

$$V_A = \frac{B_s}{\sqrt{\mu_0 n_0 m_p}} \quad (1.32)$$

Es la velocidad de propagación del modo normal más característico de la teoría MHD en el rango de bajas frecuencias (ver sección 1.5 para más detalles).

- la velocidad del sonido en teoría de fluidos por:

$$c_{sj}^2 = \frac{\gamma_e k_b T_j}{m_j} \quad (1.33)$$

cantidad que es el factor de proporcionalidad entre las variaciones de presión y densidad cuando se considera una ecuación de estado de gas ideal (1.21) adiabática (1.22) (ver (1.23)). Representa por tanto la velocidad de propagación de perturbaciones en la densidad, situación bastante ubicua que ocurre en cualquier medio compresible.

Plasma beta

Para la normalización de ciertas cantidades más adelante se requiere definir otro de los parámetros básicos de un plasma, el llamado plasma beta β_j , cuya expresión dependerá de la teoría utilizada.

- *Cinético* Es conveniente introducir la presión magnética en un plasma con un campo magnético de fondo B_s :

$$P_{\text{mag}} := \frac{2\mu_0}{B_s^2} \quad (1.34)$$

mediante la cual se puede definir el parámetro β_j como la razón entre la presión térmica de cada especie (1.21) y la magnética (con el superíndice K enfatizando su definición cinética):

$$\beta_j^K := \frac{P_{0j}}{P_{\text{mag}}} = n_{0j} k_B T_j \frac{2\mu_0}{B_s^2} = \frac{2\mu_0 n_{0j} k_B T_j}{B_s^2} = \frac{2k_B T_j}{m_p} \frac{\mu_0 n_0 m_p}{B_s^2} = \frac{2k_B T_j}{m_p V_A^2} \quad (1.35)$$

Es conveniente también definir la razón entre las velocidades térmica y de Alfvén como un parámetro beta reducido $\tilde{\beta}_p$, que en un plasma de protones y electrones es igual que β_p^K :

$$\tilde{\beta}_p = \frac{v_{Tp}^2}{V_A^2} = \frac{2\mu_0 n_0 k_B T_p}{B_s^2} = \beta_p^K \quad (1.36)$$

- *Fluido* En teoría de fluidos (superíndice F), será la razón entre la velocidad del sonido y la de Alfvén:

$$\beta_j^F := \frac{c_{sj}^2}{V_A^2} = \frac{\gamma_j k_B T_j}{m_p} \frac{\mu_0 n_0 m_p}{B_s^2} = \frac{\mu_0 n_0 \gamma_j k_B T_j}{B_s^2} = \frac{\gamma_j \tilde{\beta}_j}{2} \quad (1.37)$$

Esta definición es la que se usará en esta sección (y la que fue usada originalmente en varios papers de inestabilidades paramétricas con teoría de fluido, ver [Hollweg, 1994]). Notar que hay un factor $\gamma_j/2$ de diferencia con respecto a la definición cinética.

En todo caso, la interpretación del parámetro beta yace en determinar si es el comportamiento térmico (mediante la fuerza generada de los gradientes de presión) o magnético (a través de la fuerza de Lorentz) es el predominante en el plasma. En el primer caso $\beta > 1$, el movimiento del plasma es el que determina la dirección de las líneas de campo, mientras que en el segundo caso $\beta < 1$ la situación es opuesta: el plasma es guiado por el campo magnético. El análisis de los capítulos 3 y 4 de esta tesis se basará fundamentalmente en plasmas con $\beta \lesssim 1$, tales como los del viento solar rápido cercano al Sol y ciertas regiones coronales (ver sección 1.4.1).

1.2. Ondas en plasmas y relaciones de dispersión

1.2.1. Linealización y ondas de pequeña amplitud

Uno de los procesos más fundamentales que se pueden desarrollar en plasmas, al igual que en muchos otros medios, es la excitación de ondas, pues representan uno de los mecanismos básicos de transmisión de energía e información. En este contexto, y sólo de modo formal para teoría de fluidos, una onda es simplemente una solución de onda plana (modo normal) de la ecuación de onda, derivada de las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones de movimiento macroscópicas mediante transformadas de Fourier espacio-temporales. Éstas cambian la dependencia de las variables involucradas desde el espacio real (t, \vec{x}) al espacio recíproco de Fourier (ω, \vec{k}) , en donde ω es la frecuencia angular de la onda y \vec{k} la dirección de propagación, normal al frente de onda.

En primera aproximación, estos modos pueden describirse de forma lineal (subíndice 1) cuando las amplitudes son infinitesimales (despreciando todas las cantidades a segundo orden ó superior) y considerarlos mutuamente independientes, un método conveniente para conocer la respuesta del medio a las perturbaciones locales y campos

externos. Cabe destacar que la linealización se debe realizar en torno a un estado de equilibrio (subíndice 0) conocido. El resultado que se obtiene finalmente es, por ejemplo, un conjunto de tres ecuaciones para una variable dada como puede ser la velocidad macroscópica ó el campo eléctrico:

$$\Lambda_{ij}(\omega, \vec{k}) E_j(\omega, \vec{k}) = 0 \quad (1.38)$$

Sus soluciones no triviales requieren que el siguiente determinante se anule:

$$\det [\Lambda_{ij}(\omega, \vec{k})] = 0 \quad (1.39)$$

de donde se obtiene la llamada *relación de dispersión*

$$\omega = \omega(\vec{k}) \quad (1.40)$$

Cada uno de los posibles valores de ω y \vec{k} que satisface la relación anterior representa un modo de onda específico, que en general son discretos y muy pocos para la mayoría de situaciones

1.2.2. Algunos modos característicos de plasmas

Los plasmas, en particular cuando están magnetizados, se caracterizan por soportar una ingente cantidad de modos electrostáticos y electromagnéticos (Ver [Swanson, 2003]). Algunos de ellos que serán de relevancia para propósitos ilustrativos en esta tesis, y sus respectivas relaciones de dispersión, serán

Plasmas no magnetizados

- *Ondas Electromagnéticas*: Son caracterizadas por la relación de dispersión

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2 \quad (1.41)$$

con ω_{pe} la frecuencia de plasma electrónica. Puede interpretarse como si la partícula asociada fuese un fotón. Representa simplemente una onda ordinaria electromagnética (con relación de dispersión $\omega = kc$ en el vacío) modificada por la presencia del plasma. De aquí surge un importante efecto: no cualquier onda electromagnética con frecuencia arbitraria se puede desplazar en un plasma (página 2 del texto [Liu and Tripathi, 1994]). En efecto, aquellas sólo se pueden propagar si $\omega_{pe} < \omega$, mientras que se reflejarán si $\omega_{pe} = \omega$ y serán absorbidas si $\omega_{pe} > \omega$. Esta condición se puede aplicar de mejor forma en términos de la densidad crítica del plasma n_c , que es aquella en la se satisface que la frecuencia de plasma es igual a la frecuencia de la onda madre: $\omega_{pe} = \omega_0$, de modo que por (1.29):

$$n_c = \frac{\epsilon_0 m_e \omega_0^2}{e^2} \quad (1.42)$$

- *Ondas ión-acústicas*: La pseudo-partícula o excitación cuántica asociada es un fonón.

$$\omega^2 = \frac{k^2 c_s^2}{1 + k^2 \lambda_{De}^2} \quad (1.43)$$

Es una simple perturbación de densidad (sonido, ver (1.33)) modificada por efectos térmicos debidos a los electrones, pero en donde la inercia es proporcionada por los iones. Son los modos fundamentales de baja frecuencia, que se desplazan a la misma velocidad c_s para longitudes de onda grandes.

- *Ondas de Langmuir*: La pseudo-partícula o excitación cuántica asociada es un plasmón.

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 (1 + 3k^2 \lambda_{De}^2) \quad (1.44)$$

Es válida para un plasma de iones y electrones en donde éstos últimos pueden ser modelados por una presión térmica con ecuación de estado adiabática. Representan, simplemente, las oscilaciones fundamentales del plasma de alta frecuencia ω_{pe} (1.29) antes descritas, modificadas por efectos térmicos al tornarlas dispersivas.

Plasmas magnetizados

Usualmente, los plasmas poseen un campo magnético estático de fondo, lo que incrementa y complica enormemente el tipo de ondas propagantes. Aquí sólo se mencionará, sin duda, la más importante:

- *Ondas de Alfvén*: Son ondas electromagnéticas lentas sin dispersión, propagándose a frecuencias mucho menores que la ión ciclotrón Ω_p , y cuya relación de de dispersión es:

$$\omega = V_A k \quad (1.45)$$

con V_A la velocidad de Alfvén definida en (1.32). Para más detalles, ver sección 1.5.

1.2.3. Solución sistema Vlasov-Maxwell: Transformada de Fourier-Laplace

En plasmas sin colisiones, el procedimiento para resolver el sistema Vlasov-Maxwell que se usará se basa, de la misma forma que en fluidos, en linealizar todas las ecuaciones y variables asociadas (en particular la función de distribución f_j) con respecto a un estado de equilibrio, aunque con una diferencia sutil: el método directo de usar superposición de ondas planas mediante transformada de Fourier espacio-temporales no funciona adecuadamente. Para ilustrar el problema adecuadamente, sea el caso particular de ondas electrostáticas propagantes en plasmas, esto es, aquellas sólo con un campo eléctrico paralelo \vec{E}_{\parallel} (al campo magnético de fondo). En dicho caso, es posible demostrar (ver pág 118 de [Somov, 2006]) que la (transformada de Fourier de la) perturbación en la densidad de carga ρ_1 vendrá dada por:

$$\tilde{\rho}_1 = -i\tilde{E}_{\parallel} \sum_j \frac{e_j^2}{m_j} \int_{v_{\parallel}} \frac{\partial f_{0j}/\partial v_{\parallel}}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}} dv_{\parallel} \quad (1.46)$$

en donde f_0 es la función de distribución en equilibrio de la especie j . Consecuentemente, la relación de dispersión final involucrará una integral en velocidad del mismo tipo (ver sección 5.2 de [Bellan, 2006]). Esta integral está mal definida puesto que posee una singularidad (polo) en el eje real (contorno de integración) para $v_{\parallel} = \omega/k_{\parallel}$, y en el caso general no puede ser evaluada sin un método apropiada para sortear esta dificultad. Este problema fue tratado por primera vez en su forma apropiada en [Landau, 1946], quien corrigió el primer intento por resolver el sistema de ecuaciones antes mencionado debido a A. Vlasov en 1945, quien usó erróneamente sólo un simple análisis de Fourier. Landau propuso que, en vez de tratar de solucionar el problema como uno de modos normales, debería ser tratado como un problema de valor inicial utilizando una transformada de Laplace para la parte temporal, en donde ésta y su inversa se definen para la cantidad ψ como:

$$\tilde{\Psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \Psi(t) e^{i\omega t} dt \quad \Rightarrow \quad \Psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\beta}^{\infty+i\beta} \tilde{\Psi}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (1.47)$$

en donde la transformada inversa se efectúa a lo largo del llamado contorno de integración de Bromwich (ver sección 5.2.2 de [Bellan, 2006]). La propiedad clave que hace la diferencia al utilizar esta transformada integral es la de su derivada:

$$\mathcal{L}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right) = -i\omega\mathcal{L}(\Psi) - \Psi(0) \quad (1.48)$$

pues involucra el valor inicial de la función (a diferencia de la transformada de Fourier que no lo incluye). El resultado final, luego de un largo y detallado análisis del sistema Vlasov-Maxwell (ver sección 10.1 de [Baumjohann and Treumann, 1997], sección 5.2 de [Bellan, 2006] ó sección 8.4 de [Krall and Trivelpiece, 1973]) es que la relación de dispersión con transformada de Laplace igualmente involucra una integral como la (1.46), pero sólo en el límite asintótico para tiempos largos, en donde el plasma esté en estado estacionario (despreciando el periodo transiente, bastante difícil de describir con este método). Además, ahora el problema de la singularidad se suprime debido a que el camino de integración está bien prescrito, siendo un contorno de Bromwich deformado y extendido (por continuación analítica) para incluir convenientemente la posible ubicación del polo en $v_{\parallel} = \frac{\omega}{k}$ con una pequeña parte imaginaria negativa, y así poder usar el método de los residuos (ver sección 5.2.4 de [Bellan, 2006] y diagrama correspondiente en el apéndice C). La forma estándar para lograr esto es suponer que la frecuencia es compleja, en donde:

$$\omega = \omega_r + i\gamma \quad \text{con} \quad \omega_r = \Re(\omega) \quad \text{y} \quad \gamma = \Im(\omega) \quad (1.49)$$

Esto puede interpretarse apelando al resultado obtenido con el procedimiento de Landau: para $t \rightarrow \infty$ todas las cantidades oscilantes poseerán la siguiente dependencia temporal asintótica:

$$\exp(-i\omega t) = \exp(\gamma t) \exp(-i\omega_r t) \quad (1.50)$$

es decir, son oscilaciones armónicas con una modulación exponencial $\exp(\gamma t)$. Si $\gamma > 0$, las oscilaciones serán crecientes, denominándose tal modo una *inestabilidad*. En cambio, si $\gamma < 0$, las oscilaciones serán decrecientes en el tiempo, con lo que las ondas estarán *amortiguadas*. Esto permite finalmente encontrar una relación de dispersión como (1.40), aunque generalmente en forma implícita, y válida sólo para tiempos asintóticamente largos.

Además, el hecho de considerar frecuencias complejas tiene como consecuencia que una relación de dispersión como la originada por (1.39) tenga infinitas raíces (ω, k) , que surgen como residuos en torno a los polos del contorno de integración, aunque muchas de ellas se encuentran muy amortiguadas ($\gamma \ll 0$) y así no fácilmente observables físicamente (ver pág 253 de [Baumjohann and Treumann, 1997]). En el caso de una función de distribución maxwelliana, éstos vendrán dadas por las raíces de la función zeta, tal como se ilustra en el apéndice C). Los modos armónicos característicos de fluidos solamente son los menos amortiguados y, cabe enfatizar, sólo surgen para tiempos asintóticamente largos.

1.3. Interacciones onda-partícula

Uno de los fenómenos más característicos que logra describir la teoría cinética (y netamente intrínsecos a ella) son las interacciones entre ondas y partículas. Bajo ciertas condiciones, existe la posibilidad de un intercambio de energía entre ellas (en ambos sentidos). Dado que los objetivos de esta tesis serán analizar las consecuencias de estos efectos en una cierta configuración de un plasma, se hará una breve descripción de ellos.

1.3.1. Amortiguamiento Landau

Una de las interacciones onda-partícula más características de plasmas no colisionales es el llamado amortiguamiento Landau, predicho teóricamente en [Landau, 1946]² (y sucintamente revisado en el volumen 10 (secciones 29-31) de su famosa serie de libros [Lifshitz and Pitaevskii, 1981]). Éste surge como otra consecuencia del procedimiento de Landau que predice frecuencias complejas en la forma (1.50) para las ondas linealizadas del sistema Vlasov-Maxwell, tal como fue brevemente explicado en la sección anterior. En particular, permite que $\gamma < 0$ y así un comportamiento aparentemente contradictorio: la existencia de ondas amortiguadas a pesar que el sistema modelado por la ecuación de Vlasov es sin colisiones y por tanto no disipativo (conserva la entropía y es reversible temporalmente al cambiar $t \rightarrow -t$ y $v \rightarrow -v$, ver pág 364 de [Krall and Trivelpiece, 1973]), es decir, una onda no puede perder energía convirtiéndola a un movimiento aleatorio térmico de partículas, como ocurre en otros sistemas con ondas amortiguadas debido a efectos viscosos. La solución de esta aparente paradoja es la existencia de una transferencia de energía de las ondas a las partículas. Ello surge del denominador de la integral (1.46), en donde se produce la llamada condición de resonancia de Landau:

$$\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} = 0 \quad (1.51)$$

es decir, cuando la partícula con velocidad paralela al campo eléctrico v_{\parallel} iguala la velocidad de fase de la onda. Es posible demostrar que una partícula satisfaciendo la condición anterior experimenta, en su sistema de referencia comóvil, que el campo eléctrico de la onda es estático (ver pág 118 de [Somov, 2006]). Además, si la función de distribución de velocidades tiene una pendiente $\partial f / \partial v_{\parallel} < 0$ (ver numerador de (1.46)), tal como ocurre con una Maxwelliana, existirán ligeramente más partículas con velocidades inferiores (las cuales obtendrán energía de la onda, acelerando) que superiores a la velocidad de fase $v = \omega/k$ de la onda (las cuales perderán energía, transfiriéndola a la onda y desacelerando), por lo que el efecto neto de la transferencia de energía será que las partículas del plasma ganen a energía a expensas de la onda, amortiguándola.

² En los años siguientes a esta publicación se produjo un intenso debate acerca de la validez de este resultado, hasta que fue confirmado experimentalmente en 1965, por Malmberg y Wharton (ver pág 262 de [Chen, 1984] para una descripción del experimento). Sin embargo, la discusión sobre su interpretación física continuó durante mucho tiempo, proponiéndose muchas explicaciones físicamente atractivas pero con frecuencia técnicamente incorrectas, que incluso continúan hasta la actualidad. Ver un resumen en [Rytov, 1999] y sobre todo en [Mouhot and Villani, 2010].

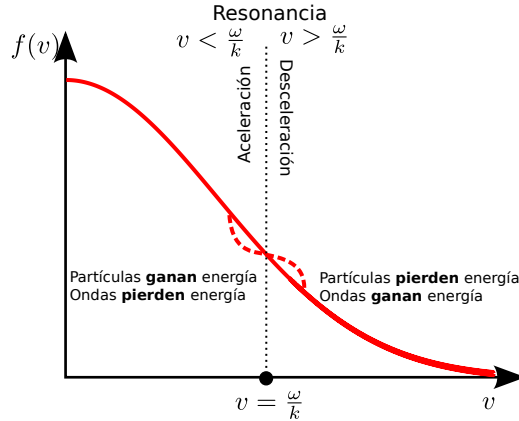


Figura 1.1: La función de distribución original está en línea roja continua, representando un plasma en que se propaga una onda con velocidad de fase ω/k . Luego de un cierto tiempo, la función se deforma del modo esquematizado en líneas punteadas, debido a la transferencia neta de energía de ondas a partículas. Adaptada de la figura 10.3 de [Baumjohann and Treumann, 1997].

Una interpretación alternativa del amortiguamiento Landau (ver pág 257 de [Baumjohann and Treumann, 1997]), es considerarlo análogo a la colisión entre dos partículas: una de ellas será un ión o electrón del plasma, y la otra será la onda considerada como partícula neutra con energía $\hbar\omega$ y momentum $\hbar k$. Debido a la naturaleza no colisional del plasma, esta colisión es elástica, por lo que una partícula con menor velocidad que la onda siempre acelerará, disminuyendo la velocidad de esta última, simplemente por conservación del momentum. Exactamente lo opuesto ocurre para partículas con mayor velocidad que la onda.

Un par de ejemplos

Como un ejemplo concreto del amortiguamiento Landau, considérese las ondas de Langmuir mencionadas en (1.44). Mediante (1.46) y el uso del procedimiento de Landau para efectuar correctamente la integración en torno al polo de resonancia Landau en el plano complejo (ver sección 1.2.3), es posible demostrar que, bajo la suposición del límite adiabático $\omega/k_{\parallel} \gg v_{Te}$ (ver figura (C.2)), la parte imaginaria de la frecuencia de estas ondas vendrá dada por:

$$\Im(\omega) = \gamma = \frac{\pi \omega_p^3}{2 k_{\parallel}^2} \left. \frac{\partial f_{0j}}{\partial v_{\parallel}} \right|_{v_{\parallel}=\omega/k_{\parallel}} = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_p}{(k \lambda_{De})^3} \exp\left(-\frac{1}{2(k \lambda_{De})^2} - \frac{3}{2}\right) \quad (1.52)$$

(ver pág 247 de [Choudhuri, 1998] ó 385 de [Krall and Trivelpiece, 1973]) en donde la última igualdad es válida para una distribución maxwelliana, de la cual se obtiene una parte imaginaria siempre negativa, conduciendo al amortiguamiento de estas ondas. En todo caso, este será muy pequeño si la longitud de onda es mucho más grande que la de Debye 1.28, recuperándose así el comportamiento de la onda de Langmuir como un modo normal de plasma, característico de fluidos. De la misma forma, también se puede hallar, para grandes longitudes de onda, la tasa de amortiguamiento aproximada para las ondas ión-acústicas, cuya frecuencia real ω_r fue dada en (1.43):

$$\Im(\omega) = \gamma = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_r}{(1 + k^2 \lambda_{De}^2)^{3/2}} \left[\left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{-T_e/T_i}{2(1 + k^2 \lambda_{De}^2)}\right) + \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \right] \quad (1.53)$$

(ver pág 390 de [Krall and Trivelpiece, 1973]) en donde "e" indica cantidades referidas a electrones e "i" a iones, siendo válida en el rango $v_{Ti} < \omega/k < v_{Te}$ (ó, en unidades normalizadas del apéndice F, $1 < \xi_p < v_{Te}/v_{Tp}$). Estas ondas son ligeramente amortiguadas sólo cuando los electrones son mucho más calientes que los iones $T_e \gg T_i$, pudiendo entonces propagarse libremente en el plasma y considerarse como un modo normal de él.

Cabe destacar que el amortiguamiento Landau es el mecanismo predominante para la absorción de ondas longitudinales, tales como las antes mencionadas, en plasmas en equilibrio térmico. Ello es debido a que está asociado a campos eléctricos paralelos, y en caso que el plasma esté magnetizado, este proceso difundirá partículas en la dirección paralela al campo magnético de fondo.

También merece ser mencionado que las fórmulas y explicaciones anteriores sólo son válidas dentro del formalismo conocido como amortiguamiento Landau lineal. Pero también existe el llamado *amortiguamiento Landau no lineal*, que cambia cualitativamente el comportamiento del sistema en ciertas situaciones, sobre todo por su predicción del *atrapamiento* ("trapping") de partículas dentro del pozo de potencial de la onda en resonancia. Ello tiene como consecuencia que ondas de gran amplitud afectas de este proceso, ya no decaen monótonamente según (1.50), sino con un amplitud fluctuante conforme las partículas rebotan hacia adelante y atrás en el pozo de potencial de dicha onda (ver pág 249 de [Chen, 1984]).

Una breve digresión: Amortiguamiento Landau en otros sistemas físicos

Otros sistemas físicos también pueden ser modelados por la ecuación de Vlasov (enfaticando su naturaleza no colisional), y por tanto el amortiguamiento Landau también puede surgir en ellos. Por ejemplo, las estrellas en una galaxia pueden considerarse como átomos en un plasma interactuando a través de interacción gravitacional en vez de electromagnética. Los brazos de estas galaxias se generan por inestabilidades del gas de estrellas, pero este proceso está limitado precisamente por el amortiguamiento Landau (ver pág 246 de [Chen, 1984]). Además de sistemas gravitacionales, el amortiguamiento Landau también ha sido descrito y observado en ondas generadas por el viento en aguas superficiales, haces de partículas de altas energías, superfluidos, quarks e incluso en sistemas biológicos. En este último caso, está involucrado en la sincronización de osciladores como los que surgen al modelar los flash de luz de las luciérnagas, ó el ritmo periódico de los marcapasos que controlan los latidos del corazón (ver [Sagan, 1993], [Vekstein, 1998] y referencias allí). Sin embargo, la explicación en dichos sistemas tiene que ver más con la interpretación alternativa, no tratada aquí, del amortiguamiento Landau como un desfase de osciladores cuando cada uno de ellos tiene diferentes frecuencias resonantes, que conduce al llamado *phase mixing*.

1.3.2. Inestabilidad beam cinéticas

Una fuente de energía libre propicia para el crecimiento de (micro)inestabilidades es un sistema con una función de distribución que posea pendiente positiva $\partial f_0 / \partial v_{\parallel} > 0$ (además de un mínimo local), esto es, que en un cierto rango de velocidades exista mayor cantidad de partículas a velocidades superiores que inferiores. De (1.46) ó (1.52), esto es simplemente la condición opuesta para que se satisfaga el amortiguamiento Landau, por lo que a veces se le llama *amortiguamiento Landau inverso*³. Un sistema con esta características es un plasma con dos componentes, una de las cuales tiene menor densidad y se mueve con una cierta velocidad de deriva (*drift*) con respecto a la componente principal, denominado *beam*. Estos tipos de sistema se presentan en una multitud de ambientes, tales como el plasma del viento solar. De acuerdo al análisis anterior del amortiguamiento Landau, si hay una onda con una velocidad de fase $v_{\phi} = \omega/k$ en la región de la función de distribución con $\partial f / \partial v > 0$, y dado que ahora hay *más* partículas en el plasma con velocidades superiores que inferiores a v_{ϕ} , entonces existirá una transferencia neta de energía de las partículas en resonancia a la *onda*, generándose una inestabilidad (tasa de crecimiento $\gamma > 0$) conocida como *bump-in-tail* (ver pág 119 de [Somov, 2006]):

³El amortiguamiento Landau inverso también puede ser interpretado, relativística y/ó cuánticamente (semiclásico), como un proceso de emisión de Cherenkov, mientras que el amortiguamiento Landau usual sería el correspondiente proceso de absorción por partículas térmicas, debido al inverso de la emisión de Cherenkov. Esta equivalencia fue indicada por Ginzburg y Zheleznyakov, en 1958 (ver pág 124 de [Kirk et al., 1994] ó 119 de [Somov, 2006]).

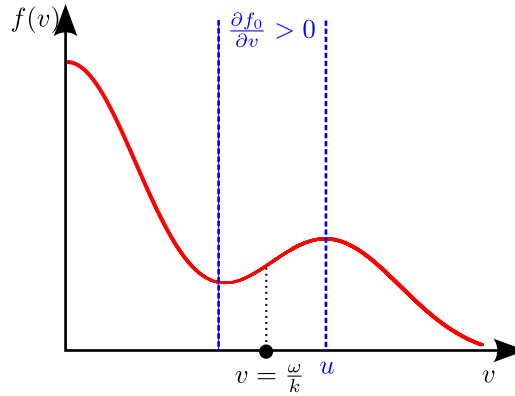


Figura 1.2: En rojo se muestra una función de distribución con dos componentes: una maxwelliana de similares características a la de 1.1, y la otra un beam de menor densidad y con una velocidad de deriva u . La región con pendiente positiva se muestra entre líneas paralelas azules, que es donde una onda con una velocidad de fase $v = \omega/k$ como la mostrada generará una inestabilidad. Adaptado de figura 3.3.2 de [Davidson, 1984].

Esperablemente, esta misma situación se produce cuando una corriente de plasma con una cierta velocidad se introduce en otro plasma en reposo, de modo tal que la energía cinética del movimiento relativo entre ambos es usada para provocar el crecimiento de una onda con una velocidad de fase apropiada. Esta inestabilidad, del mismo origen que la anterior, y en el caso en que las funciones de distribución sean muy frías (i.e: la mayor parte de las partículas poseyendo la misma velocidad), se denomina comúnmente *two stream* (ver pág 450 de [Krall and Trivelpiece, 1973]). Tiene como consecuencia que una corriente de plasma no pueda pasar a través de otra libremente, sino que es detenida dando origen a ondas de plasma en el proceso. Es una característica que surge netamente de las interacciones de larga distancia: un plasma de muy baja densidad y no colisional puede actuar casi como un obstáculo sólido, previniendo que otra corriente de plasma penetre muy profundo en él (pa 249 de [Choudhuri, 1998]).

Condiciones generales de estabilidad

Es posible generalizar la condición sobre la función de distribución que predice un cambio de comportamiento frente a las inestabilidades. Ello está condensado en el llamado *Teorema de Newcomb* para funciones dependientes de v^2 : Si en un plasma espacialmente uniforme inmerso en un campo magnético estático $B_s \hat{z}$, se cumple para todas las componentes j del plasma:

$$\frac{\partial f_{0j}(v^2)}{\partial v^2} < 0, \quad (1.54)$$

entonces el equilibrio será estable frente a perturbaciones electromagnéticas tanto lineales como no-lineales (ver pág 249 de [Davidson, 1984]). Ello surge como consecuencia natural de la conservación de la energía y del volumen en el espacio fase (ver pág 447 de [Krall and Trivelpiece, 1973]). Sin embargo, este teorema es sólo una *condición suficiente* para estabilidad, mas no necesaria. Existen otros resultados que extienden los anteriores en casos particulares, tal como el Teorema de Penrose, que establece una *condición necesaria y suficiente* para estabilidad frente a inestabilidades electrostáticas de una función de distribución arbitraria $f(\vec{v})$ (ver pág 259 de [Davidson, 1984] y el mucho más extenso capítulo 9 de [Krall and Trivelpiece, 1973]).

1.3.3. Resonancia ciclotrónica

En un plasma con ondas propagándose a lo largo de un campo magnético estático \vec{B}_c se puede producir un fenómeno similar al amortiguamiento Landau pero de una naturaleza fundamentalmente "transversal". En efecto, si se tiene una onda propagándose paralela al campo magnético estático de fondo (en dirección z), cuyo campo eléctrico y magnético sean perpendiculares a él, es posible demostrar (ver pág 120 de [Somov, 2006]) que la (transformada de Fourier de la) perturbación en la densidad de corriente vendrá dada por:

$$\tilde{J}_{1\perp} = -i(\tilde{E}_x - i\tilde{E}_y) \sum_j \frac{e_j^2}{m_j} \int_{\vec{v}} \frac{\left(1 - \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega}\right) \frac{\partial f_{0j}}{\partial v_{\perp}} + \frac{k_{\parallel} v_{\perp}}{\omega} \frac{\partial f_{0j}}{\partial v_{\parallel}}}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - s\Omega_p} v_{\perp} d^3v \quad (1.55)$$

En donde s es un entero positivo o negativo. Luego, para el caso más relevante $s = 1$ (máxima interacción entre onda e iones positivos), existirá la llamada condición de giroresonancia ó resonancia ciclotrónica:

$$\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - \Omega_p = 0 \quad (1.56)$$

Esto indica que la interacción ocurre cuando la frecuencia ω' de la onda, vista en el sistema de referencia de una partícula, es igual a su frecuencia ciclotrónica Ω_p de giro alrededor de un campo magnético estático de fondo. Por una simple transformación galileana no relativista, se tendrá que esta frecuencia observada de la onda, en el sistema de referencia (del "laboratorio") en el que dicha partícula se desplaza con velocidad paralela al campo magnético v_{\parallel} , vendrá dada por la expresión Doppler⁴ $\omega' = \omega - k_{\parallel} v_{\parallel}$ (ver [Liemohn and Duane, 1976]). Además, se tiene que satisfacer que el sentido de giro de la partícula tiene que ser en el mismo sentido que la polarización de la onda (condición dada por $s > 0$ en (1.55) para iones. Ver apéndice A para la convención usada). Dada estas condiciones, existirá una transferencia significativa de energía entre la onda y las partículas, debido a que éstas experimentarán una aceleración o desaceleración en su movimiento ciclotrónico en torno al campo magnético estático, dependiendo de su fase relativa con respecto al campo de la onda. Esto se puede entender considerando que una partícula resonante experimenta la misma fase de la onda sobre un periodo prolongado de tiempo, permitiendo así una interacción fuerte, mientras que las partículas no resonantes experimentarán un campo rápidamente variante, de modo que la fuerza promedio sobre la partícula sea muy pequeña (ver pág 82 de [Cravens, 1997]). En muchas situaciones, la situación final será una transferencia neta de energía de la onda a las partículas en dirección transversal (para una justificación física, ver pág. 272 de [Chen, 1984]), configurando el así llamado *amortiguamiento ciclotrónico*.

También merece ser destacado lo siguiente (ver pág 438 de [Krall and Trivelpiece, 1973]) en vista del denominador de (1.55): si bien tanto la teoría cinética y de fluidos predicen oscilaciones en torno a la frecuencia ciclotrónica Ω_p , sólo la primera predice la existencia de ondas en los *armónicos* de la frecuencia ciclotrónica $\omega \approx s\Omega_p$, con $s > 1$ (por ej., las llamadas ondas de Bernstein). Ello se debe, en la teoría microscópica, a la existencia de partículas con velocidad distinta de la promedio, descritas por una función de distribución de velocidades, algo completamente ajeno a la teoría de fluidos. Esto se avala tanto por las observaciones experimentales de este tipo de ondas, como en las simulaciones numéricas (que serán realizadas en los capítulos posteriores de esta tesis).

Scattering en el pitch-angle

El quizás principal efecto de la resonancia ciclotrónica es el cambio del ángulo α con el que se desplaza la partícula con respecto al campo magnético de fondo (en el sistema de referencia de la onda):

$$\alpha = \arctan \left(\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} \right), \quad (1.57)$$

llamado "*pitch angle*". Ello puede ser entendido recordando que en el sistema de referencia comóvil a la onda, su velocidad de fase ω'/k_{\parallel} es nula, y así el numerador de (1.55) será proporcional a v_{\perp}/v_{\parallel} .

Ahora bien, en un plasma magnetizado con ondas de frecuencia lo suficientemente bajas (lejos de efectos dispersivos), puede existir un *significativa transferencia de momentum* entre una onda y partículas que provoca un cambio en su ángulo α , pero con una casi *despreciable transferencia de energía* (manteniendo, así mismo, la magnitud del momentum casi-constante). Este proceso que afecta a las partículas resonantes⁵ se denomina scattering en el pitch angle (ver pág 132 de [Kirk et al., 1994]), y en general es producido por ondas generadas por las mismas partículas en resonancia. La trayectoria que siguen las partículas siendo scattereadas en el pitch-angle, es un semicírculo en el espacio de velocidades $v_{\perp} - v_{\parallel}$ centrada en la velocidad de fase de la onda en resonancia (en el límite en que la magnitud del momentum es constante, en caso contrario son trayectorias parabólicas), con múltiples desplazamientos de ida y vuelta conforme son aceleradas o desaceleradas por la onda en resonancia.

Todo esto tiene como consecuencia una *difusión* en el espacio de velocidades: un grupo de partículas localizado inicialmente en una acotada región en torno a un cierto \vec{v} , se ensanchará cubriendo una zona cada

⁴En el caso general $s \neq 1$, las resonancias con $s > 0$ se producen por el denominado efecto Doppler normal, mientras que aquellas con $s < 0$ por efecto Doppler anómalo, siendo esto último posible sólo para ondas con índices refractivos $n = kc/\omega > 1$ (ver pág 125 de [Kirk et al., 1994]).

⁵Usualmente, esta interacción resonante afecta sólo a los iones con velocidades un tanto mayores que la de Alfvén.

vez mayor. Notar la diferencia con el amortiguamiento Landau, en donde existe una difusión en la componente *paralela* de la velocidad de las partículas, y por ende, en la *energía* de ellas.

Por otra parte, al igual que la condición de resonancia Landau puede generar inestabilidades cuando la función de distribución satisface ciertas restricciones (como (1.54)), la condición de giroresonancia (1.56) producirá algo similar en situaciones donde existan *anisotropías en el pitch angle* de las partículas que conforman f_{0j} , esto es:

$$\frac{\partial f_{0j}(v, \alpha)}{\partial \alpha} \neq 0 \quad (1.58)$$

Las ondas generadas por el scattering en el pitch angle provocan que la función de distribución tienda a ser isotrópica en α , es decir, que la desigualdad $\neq 0$ pase a ser $= 0$ (ver pág 134 de [Kirk et al., 1994] y 418 de [Parks, 2004]). Por último, cabe mencionar que todos estos procesos difusivos que involucran un cambio temporal en la función de distribución, pueden ser modelados por la llamada teoría cuasilineal (QLT, ver pág 129 de [Kirk et al., 1994] ó capítulo 7 de [Swanson, 2003]).

1.4. Contexto observacional: Propiedades del viento solar

Debido a que la motivación del trabajo de esta tesis es tratar de explicar ciertos fenómenos que ocurren en plasmas como los de viento solar, a ser explicados en el capítulo siguiente, es útil explicar las características generales de él y los parámetros apropiados.

1.4.1. Aspectos generales del viento solar y su generación

El sol y su corona

Hace poco más de medio siglo se descubrió que el Sol tenía una atmósfera extendida, denominada corona solar y visible sólo durante los eclipses, compuesta de un plasma muy caliente con una densidad de unos $5 \cdot 10^7 \text{ cm}^{-3}$ (pág 159 de [Baumjohann and Treumann, 1997]) y a más de 10^6 K . Una de las preguntas sin responder más importante dentro de la física solar es justamente explicar cómo la corona solar logra calentarse a temperaturas tan altas que superan en tres órdenes de magnitud a las de la fotosfera ($T \approx 6000 \text{ K}$), que es la capa inferior y la superficie visible del Sol. La fuerte dependencia de la temperatura con la distancia al Sol se muestra en la siguiente figura:

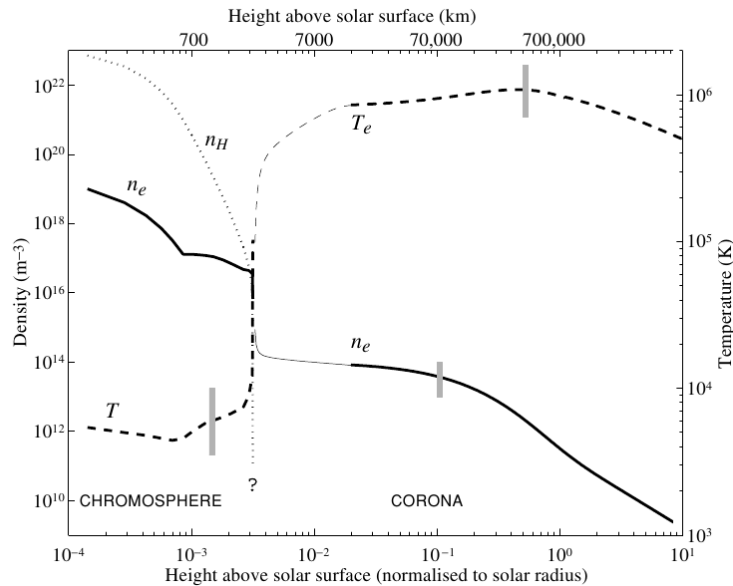


Figura 1.3: Densidad (de electrones n_e e hidrógeno n_h) y temperatura sobre la superficie solar *v/s* la altura normalizada $r/R_\odot - 1$ inferido de modelos empíricos. Las líneas delgadas representan la interpolación entre modelos interiores y exteriores. Extraído de la figura 4.1 de [Meyer-Vernet, 2007].

Existen muchas explicaciones alternativas al misterio de este calentamiento coronal, que van desde calentamiento por disipación de corrientes eléctricas vía reconexión (mecanismos DC) hasta producción de ondas y calentamiento via la disipación de su energía asociada (mecanismos AC). Para más detalles sobre estos procesos, ver por ejemplo, sección 4.6 de [Meyer-Vernet, 2007] ó capítulo 9 de [Aschwanden, 2004] y referencias allí.

La corona solar también está permeada por campos magnéticos, con una intensidad de unos $10^{-2} T$ en su parte inferior. En su mayor parte, estas líneas de campo son cerradas, manteniendo así la atmósfera solar confinada, pero hay regiones con líneas de campo abiertas hacia el medio interplanetario, denominadas hoyos coronales, que son la fuente del viento solar a ser discutido a continuación. (Para una completa discusión de los aspectos de la corona solar que involucran la generación del viento solar, ver el capítulo 5 de [Meyer-Vernet, 2007] ó el texto [Aschwanden, 2004])

El viento solar

El viento solar es un flujo de plasma solar ionizado⁶, que emanan desde los hoyos coronales hacia el espacio interplanetario, extendiéndose hasta el punto en que su presión térmica y magnética se igualan con las del medio interplanetario cerca de 160 U.A. (unidades astronómicas). Surge por la enorme diferencia de presión entre el plasma de la corona y el del medio interplanetario. El primer modelo (dinámico) exitoso en explicarlo fue el de Parker en 1958, en términos de un flujo de partículas que es acelerado suavemente desde pequeñas velocidades en la base de la corona, a velocidades supersónicas conforme se alejan de él (ver parámetros más adelante), debidos al gradiente de presión (ver detalles en sección 6.6 de [Parks, 2004], sección 8.1 de [Baumjohann and Treumann, 1997]). En una primera aproximación, se puede considerar que el flujo del viento solar determina completamente el comportamiento del campo magnético (está congelado ó "*frozen in*"), de modo que es capaz de transportarlo en dirección radial hacia fuera del Sol, hacia el medio interplanetario. Pero debido a la rotación de él, estas líneas de campo magnético interplanetario (IMF) se curvarán adoptando la forma de una espiral de Arquímedes, llamada con frecuencia espiral de Parker (ver pág 163 de [Baumjohann and Treumann, 1997]).

En general, el viento solar se compone de electrones, protones, partículas alfa He^{++} y en una mucho menor proporción otros iones más pesados. Los parámetros macro y microscópicos del viento solar, han sido medidos detalladamente en el entorno terrestre por varias misiones espaciales en los últimos 50 años, y sus valores medios se muestran a continuación:

⁶Si bien hubo pequeños indicios con anterioridad, la existencia del viento solar fue bien establecida sólo hacia 1950 por L. Biermann, en base a las observaciones de las colas cometarias (antes habían sido interpretadas como debidas únicamente a la presión de radiación solar). El concepto moderno del viento solar como un flujo saliente de la corona solar fue presentado por E. Parker en 1958, y fue detectado por las sondas *Explorer 10* y *Mariner 2* junto con las primeras mediciones del plasma interplanetario, en 1961 y 1963, respectivamente (ver sección 1.2 de [Cravens, 1997]).

n_p	6.6 cm^{-3}
n_e	7.1 cm^{-3}
$n_{He^{++}}$	0.25 cm^{-3}
Velocidad de flujo V (radial)	450 km/s
T_p	$1.2 \cdot 10^5 \text{ K}$
T_e	$1.4 \cdot 10^5 \text{ K}$
B_s (radial)	7 nT

Tabla 1.1: *Parámetros (típicos) medidos en el viento solar a 1 U.A. Extraído de la tabla 4.1 de [Kivelson and Russell, 1995]. Las abreviaciones son las mismas introducidas en la sección 1.1.4.*

λ_D	7 m
ω_{pe}	30 kHz
P_{th}	30 pPa
c_s	60 km/s
P_{mag}	19 pPa
V_A	40 km/s
v_{Tp}	35 km/s
v_{Te}	1500 km/s
Radio de Larmor de protones	80 km
Radio de Larmor de electrones	1 km
Ω_p /Giroperiodo $\tau_p = 2\pi/\Omega_p$	$0.6 \text{ Hz} / 10.4 \text{ s}$
Ω_e /Giroperiodo $\tau_e = 2\pi/\Omega_e$	$1200 \text{ Hz} / 5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$
V_A/Ω_p	67 km
Tiempo de colisión proton-protón	$\sim 46 \text{ días} = 4 \cdot 10^6 \text{ s}$
Tiempo de colisión electrón-electrón	$\sim 3.5 \text{ días} = 3 \cdot 10^5 \text{ s}$
Tiempo del viento en fluir de la corona a 1 U.A.	$\sim 4 \text{ días} = 3.5 \cdot 10^5 \text{ s}$

Tabla 1.2: *Parámetros derivados del viento solar a 1 U.A. Adaptado y expandido de la tabla 4.3 de [Kivelson and Russell, 1995].*

De los resultados anteriores se pueden inferir varias cosas. Primero, el flujo del viento solar es altamente supersónico al tener $c_s \ll V$, y también súper-Alfvénico por $V_A \ll V$. Segundo, dado que la presión magnética es del mismo orden de magnitud que la magnética (y así mismo sus efectos), se tendría que su razón, dada por (1.35), será del orden de $\beta \sim 1$.

Los valores de las tablas anteriores son sólo los más probables o típicos. Ellos varían con la distancia al Sol. Por ejemplo, tanto la densidad como la temperatura disminuyen progresivamente. Pero aún a la misma distancia de 1 U.A, las propiedades del viento solar pueden variar ampliamente en muchas escalas temporales distintas, tal como se ve a continuación

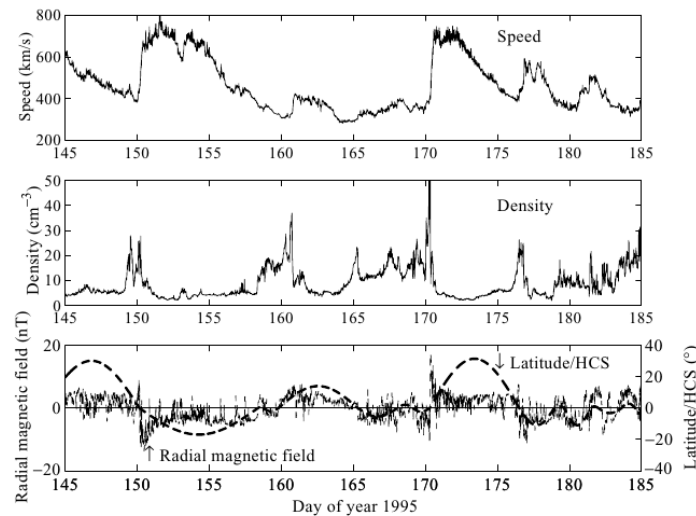


Figura 1.4: Datos del viento solar medidos por la sonda WIND en 1995 a 1 U.A. del Sol, en el plano de la eclíptica. Arriba: Velocidad media de protones. Centro: Densidad media de electrones. Abajo: Componente radial del campo magnético. Notar el indicio del periodo de rotación solar de 27 días. Extraído de la figura 1.18 de [Meyer-Vernet, 2007].

Estas mediciones también han demostrado que el viento solar está compuesto de, al menos, tres componentes bien individualizados (ver capítulos 1-2 de [Marsch, 2006]):

- *Viento solar rápido*

Tiene una velocidad típica de unos 750 km/s y temperaturas $8 \cdot 10^5 \text{ K}$ (ver [Feldman et al., 2005]). Su composición se asemeja mucho a la de la fotosfera solar, surgiendo probablemente de los hoyos coronales en altas latitudes y con poca variabilidad en función del ciclo solar. Es relativamente poco turbulento y está permeado por una gran cantidad de ondas coherentes de gran amplitud: las llamadas ondas de Alfvén (ver evidencia observacional en la sección 1.5.1). Este tipo de sistemas es el paradigma de los plasma no colisionales, ya que el giroperiodo de las partículas (en escala de segundos) es muchísimo menor que su tiempo medio de colisión (de días). Así queda completamente justificado el uso de la ecuación de Vlasov en el análisis de los capítulos posteriores que se hará de las ondas de Alfvén en este tipo de viento.

- *Viento solar lento*

Tiene una velocidad de unos 400 km/s y una temperatura de un orden de magnitud mayor que el viento solar rápido: $1.4 \cdot 10^6 \text{ K}$. Su composición se asemeja mucho a la de la corona, surgiendo probablemente en las regiones coronales activas ó en los loops coronales con líneas de campo magnético abiertas en forma transiente. Además, depende fuertemente del ciclo solar de 11 años, surgiendo de preferencia durante el mínimo solar en latitudes cercanas a los 30° , mientras que en el máximo solar sus fuentes de origen son más uniformes en latitud, apareciendo también cerca de los polos. Es de una naturaleza más compleja que el viento solar rápido, en el sentido que presenta grandes variaciones de intensidad de B , es mucho más turbulento y también exhibe muchas estructuras a gran escala. A diferencia del viento solar rápido, las colisiones aquí desempeñan un papel ligeramente más importante, aunque de todos modos muy débil.

- *Viento solar transiente*

Está asociado con eventos característicos de las regiones activas del Sol durante los periodos de máxima actividad, tales como las flaras y las eyecciones coronales de masa (CME), que evolucionan hacia el medio interplanetario en la forma de nubes magnéticas. Ellas provocan súbitos cambios en las propiedades locales del viento solar, pero con una duración de unos pocos días.

1.4.2. Características no térmicas en el viento solar y beams

El modelo de fluidos de Parker y todos las modificaciones posteriores a él, que describen el viento solar a gran escala, fallan en la predicción de fenómenos a escalas pequeñas (radio de Larmor de protones), donde

priman efectos cinéticos tales como interacciones onda-partícula descritas en 1.3 y procesos de transporte de calor que dominan el comportamiento del plasma no colisional. Por dicha razón, observaciones *in situ* desde los primeros días de la exploración espacial, han mostrado que las distribuciones de electrones y iones en el viento solar pueden llegar a tener una gran riqueza de comportamientos y morfologías no térmicas (i.e.: apartadas de una maxwelliana ideal). En líneas generales (ver sección 6.7 de [Parks, 2004] y capítulo 2 de [Marsch, 2006]), los electrones exhiben funciones de distribución con un componente isotrópico casi maxwelliano y otro provisto de una “cola” de alta energía (halo). En cambio, los protones presentan un “core” anisotrópico (en el espacio de velocidades $v_{\perp} - v_{\parallel}$) descrito por una bi-maxwelliana con $T_{\perp} > T_{\parallel}$, además de un componente beam (tal como el ejemplificado en la sección 3) con velocidad relativa de drift en torno a la velocidad local de Alfvén V_A (con respecto al core), tal como puede ser observado en el siguiente diagrama:

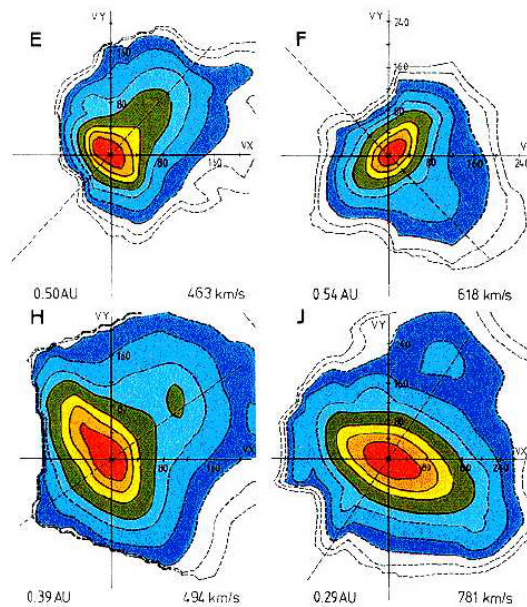


Figura 1.5: Funciones de distribución de protones medidas a las distancias indicadas del Sol. Notar la anisotropía del core y la presencia de un beam. Extraído de la figura 3 de [Marsch, 2006].

Las consecuencias y efectos de este beam de protones tiene en las inestabilidades generadas por las ondas de Alfvén será analizado teóricamente en el capítulo 3 de esta tesis. Para tener una idea de las densidades y velocidades típicas de este componente del viento solar, en función del parámetro β_c del core de protones, se reproducirá un par de gráficos mostrando mediciones espaciales de ellos.

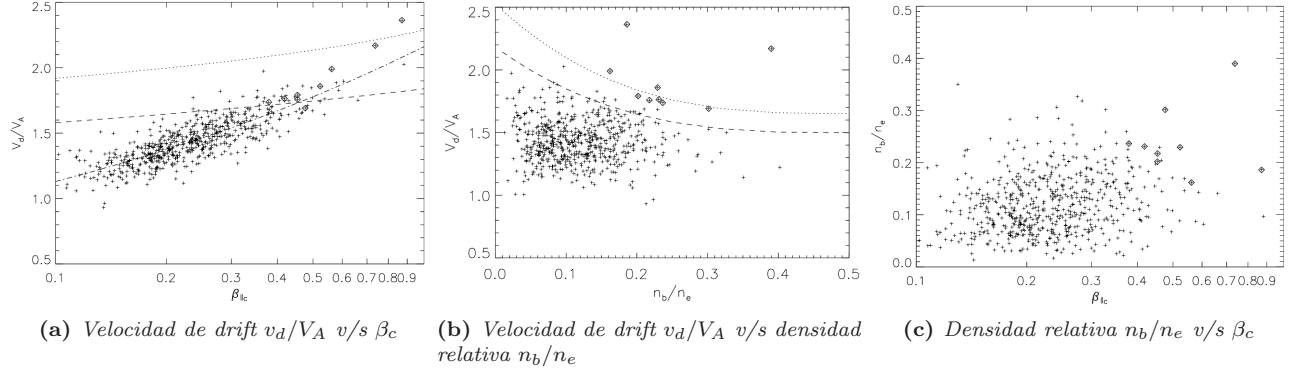


Figura 1.6: Mediciones de los parámetros (del beam) velocidad de drift v_d y densidad relativa n_b/n_e en función de β_c , para protones en el viento solar rápido (con velocidad de 600 km/s) a 0.3 U.A., por la sonda Helios 2 en 1976. Las líneas punteadas y discontinuas representan el umbral para una inestabilidad lineal protón-protón de ondas de Alfvén ión-ciclotrón compresivas en dos casos característicos. Extraído de las figuras 2-4 de [Tu et al., 2004].

(Otras mediciones dan densidades típicas del beam más grandes, entre $0.3 < n_b/n_e < 0.5$, tales como indicadas en la figura 2 de [Goldstein et al., 2000]). Se han propuestos múltiples procesos físicos para explicar el origen de este beam (ver [Araneda et al., 2008] y referencias allí). Por último, cabe destacar que las funciones de distribución medidas (in-situ) en el viento solar a distancia del Sol, portan información distintiva sobre el microestado del plasma coronal en su región de origen, siendo en este sentido una forma de percepción remota de él (ver [Marsch, 2006]). Ello permitiría, eventualmente, inferir los mecanismos físicos que podrían estar involucrados en el calentamiento coronal.

1.5. Ondas de Alfvén

Esta tesis se basará prioritariamente sobre las propiedades de ondas producidas por las de Alfvén, por lo que es conveniente revisar en detalle sus propiedades, a la vez que extender la relación de dispersión aproximada mencionada en (1.45), con el objetivo de que sea útil para estos propósitos.

1.5.1. Descripción general

Una onda de Alfvén (ver [Chen, 1984]) es uno de los modos normales de un plasma más característicos e importantes, y que puede considerarse como una onda electromagnética de baja frecuencia capaz de propagarse a lo largo de las líneas de campo magnético en un plasma modelado como un fluido altamente conductor, una aproximación muy realista para gran parte del entorno solar y planetario. Fue predicha teóricamente recién en 1942 por Hannes Alfvén, y observada en un fluido de mercurio conductor por Lundquist en 1949 (ver capítulo 1 de [Cramer, 2001]). La relevancia de esta clase de ondas en el ambiente astrofísico es debida a que diversos estudios las señalan como responsables del mecanismo de calentamiento de la corona solar, del transporte de energía magnética y turbulencia en los vientos solares y estelares, de la transferencia de momentum angular en las nubes interestelares durante la formación de estrellas, de jugar un rol en las pulsaciones magnéticas en la magnetósfera terrestre y de proveer mecanismos de scattering para la aceleración de rayos cósmicos en ondas de choques astrofísicas. Además, una onda de Alfvén circularmente polarizada de amplitud finita que se propaga a lo largo de un campo magnético estático de fonde B_0 tiene la notable propiedad que es una solución exacta del conjunto de ecuaciones (no lineales) de dos de los modelos más utilizados para describir a los plasmas: la magnetohidrodinámica ideal MHD (ver subsección 1.5.2), y el modelo cinético no colisional (ver subsección 1.5.3 basada en [Sonnerup and Su, 1967]).

Observación de ondas de Alfvén en el viento solar

Como ya fue indicado con anterioridad, el viento solar rápido porta consigo ondas de Alfvén con un amplio espectro de frecuencias y de gran amplitud. Ellas han sido observadas comúnmente desde hace unas cuatro

décadas en el entorno planetario [Belcher and Davis Jr, 1971], aunque sólo recientemente se han observado también en la corona solar [Erdelyi and Fedun, 2007].

Este tipo de ondas se logra detectar (y diferenciar de otros tipos) debido a la existencia de una fuerte correlación entre las perturbaciones de velocidad y campo magnético, dada en el límite MHD de bajas frecuencias $\omega \ll \Omega_p$ por:

$$\frac{\vec{v}_1}{V_A} = \pm \frac{\vec{B}_1}{B_s} \quad (1.59)$$

(en donde las componentes de \vec{B} varían mucho más que el módulo del valor promedio de B). Esta correlación (manifestación de la condición de líneas de campo congeladas en el plasma del viento solar) es ubicua en el viento solar y mucho más fuerte y con menores frecuencias conforme la distancia heliocéntrica de observación disminuye (ver sección 3.1 de [Bruno and Carbone, 2005]). Ello sugiere el origen solar de estas ondas, que se propagan predominantemente hacia fuera del Sol, mediante mecanismos aún no muy entendidos (ver capítulo 5 de [Meyer-Vernet, 2007] para un panorama general y el artículo [Hollweg and Isenberg, 2002] con énfasis en la resonancia ciclotrónica). Cabe destacar que estas ondas de Alfvén, son, por lejos, las más frecuentemente observadas en el viento solar, debido a su poco amortiguamiento por su naturaleza no compresiva. Otros modos, tales como los acústicos, no son fácilmente detectados debidos a que por su naturaleza compresiva son rápidamente amortiguados poco tiempo después de su generación.

La correlación Alfvénica (1.59) disminuye dramáticamente a distancias grandes del Sol, en la forma de fluctuaciones a pequeña escala del campo magnético y velocidad, pero con un amplitud del mismo orden de magnitud que el campo medio B . Ello es un indicio de la generación de turbulencia en el viento solar, con una cascada de energía transfiriéndose desde las grandes escalas MHD, a pequeñas distancias comparables con el radio de Larmor de los protones. Para más detalles sobre este amplísimo tópico, ver una breve descripción en la sección 6.4 de [Meyer-Vernet, 2007] y la detallada discusión del artículo [Bruno and Carbone, 2005]. Además de lo anterior, cabe mencionar que a grandes distancias del Sol también se detectan ondas que se propagan *hacia* el Sol, generadas localmente por mecanismos tales como los de interacción onda-onda (inestabilidades paramétricas) debido a ondas de Alfvén de gran amplitud, como los que serán presentados en el próximo capítulo.

1.5.2. Relación de dispersión en el rango ión-ciclotrón: Teoría de fluidos

La relación de dispersión que satisface una onda de Alfvén ión-ciclotrón (esto es, en el rango de frecuencias cercano a Ω_p) de *amplitud finita*, cuyas cantidades serán denotadas con el subíndice 0 (al conformar el estado en equilibrio del plasma sobre el cual se realizará la teoría perturbativa posteriormente desarrollada), se basa en un plasma que posee las siguientes propiedades [Hollweg, 1994]:

- Compuesto de protones (subíndice p) y electrones (subíndice e) sin masa $m_e = 0$, debido a que se considerarán frecuencias características ω bajas, del orden de la frecuencia ciclotrónica de los protones Ω_p . En efecto, esta última condición justifica la primera en una muy buena aproximación debido a:

$$\omega \sim \Omega_p \ll \Omega_e \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m_e}{m_p} \approx \frac{1}{1836} \ll 1 \quad (1.60)$$

Esto implica que la ecuación de Gauss para el campo eléctrico no aporta información adicional, siendo redundante (ver detalles adicionales en la discusión de (2.103).)

- Con un campo magnético estático: $\vec{B} = B_s \hat{z}$. La onda de Alfvén se propagará en esta dirección⁷, por lo que la derivada convectiva y el gradiente se podrán escribir como

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \nabla = \vec{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.61)$$

en donde se ha usado el hecho que la velocidad de deriva macroscópica en la dirección z es nula por cada especie $j = e, p$ (porque siempre se puede escoger un sistema de referencia en que así lo sea, sin pérdida

⁷Todas las cantidades físicas en la dirección z se denominarán paralelas o longitudinales (al campo magnético estático B_s), mientras que las con componentes x e y se denominarán perpendiculares o transversales.

de generalidad). Así mismo, los campos escalares presión y densidad de cada especie del plasma, además del campo eléctrico longitudinal, se suponen nulos:

$$P_{0j} = 0, \quad n_{0j} = 0, \quad E_{0z} = 0, \quad V_{0z,j} = 0 \quad (1.62)$$

Por la misma razón, todas las magnitudes físicas sólo podrán tener una dependencia espacial de la posición longitudinal z . De aquí se deduce que el campo de velocidades de esta onda de Alfvén es incompresible: $\nabla \cdot \vec{V}_{0j} = 0$.

- Cuasineutral, de modo que las densidades de protones y electrones sean iguales:

$$\sum_j q_j n_{0j} = -en_{0e} + en_{0p} = 0 \quad \Rightarrow n_0 := n_{0e} = n_{0p} \quad (1.63)$$

- Esta onda de Alfvén será circularmente polarizada a la izquierda⁸, con número de onda k_0 y frecuencia ω_0 , de modo que su velocidad de fase sea $v_{\phi 0} = \omega_0/k_0$ en este sistema de referencia. Así, el campo magnético de esta onda poseerá una dependencia sinusoidal del tipo:

$$B_0^x = B_0 \cos(k_0 z - \omega_0 t) \quad (1.64)$$

$$B_0^y = B_0 \sin(k_0 z - \omega_0 t) \quad (1.65)$$

y de este modo se tenga para el campo magnético total

$$\vec{B}(z, t) = B_0 [\cos(k_0 z - \omega_0 t)\hat{x} + \sin(k_0 z - \omega_0 t)\hat{y}] + B_s \hat{z} \quad (1.66)$$

También se puede definir convenientemente para la suma de sus componentes transversales, la siguiente cantidad compleja (que es simplemente un cambio a un sistema de referencia rotante, ver apéndice A.1.1)

$$B_0^\pm := B_0^x \pm iB_0^y = B_0 e^{\pm i(k_0 z - \omega_0 t)} \quad (1.67)$$

- Los campos eléctrico y de velocidad macroscópica de cada especie del plasma tendrán la dependencia:

$$\vec{V}_{0j}(z, t) = V_{0j}^x \hat{x} + V_{0j}^y \hat{y} \quad (1.68)$$

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0(z, t) + \vec{E}_c = E_0^x \hat{x} + E_0^y \hat{y} \quad (1.69)$$

y así mismo los campos transversales complementarios poseerán la misma dependencia sinusoidal que el campo magnético, pero cuyas amplitudes denotadas con tilde no serán necesariamente reales:

$$E_0^\pm := E_0^x \pm iE_0^y = \tilde{E}_0^\pm e^{\pm i(k_0 z - \omega_0 t)} \quad (1.70)$$

$$J_{0j}^\pm := J_{0j}^x \pm iJ_{0j}^y = \tilde{J}_{0j}^\pm e^{\pm i(k_0 z - \omega_0 t)} \quad (1.71)$$

$$:= q_j n_j V_{0j}^\pm = q_j n_{0j} (V_{0j}^x \pm iV_{0j}^y) = \tilde{V}_{0j}^\pm e^{\pm i(k_0 z - \omega_0 t)} \quad (1.72)$$

El objetivo ahora es que los campos asociados a esta onda satisfagan las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones de momentum de fluido, es decir, que esta onda sea *autoconsistente*.

Ec. de Faraday

Con la idea de relacionar los campos eléctrico y magnético de la onda, se usa la ecuación de Faraday en la forma:

$$\hat{z} \times \left(\frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \times \vec{E}_0(z, t) \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\hat{z} \times \vec{B}_0(z, t) \right) \quad (1.73)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} [E_0^x(z, t)\hat{x} + E_0^y(z, t)\hat{y}] = \frac{\partial}{\partial t} [-B_0^y(z, t)\hat{x} + B_0^x(z, t)\hat{y}] \quad (1.74)$$

⁸Una razón física para que se escoja esta onda circularmente polarizada es que así la magnitud del campo magnético es constante [Goldstein, 1978]. Para más detalles sobre el sentido de esta polarización, ver apéndice A

Sumando las componentes transversales: $(\text{Ec X}) \pm i (\text{Ec Y})^9$, y usando la forma explícita de (1.67) y (1.70), se tiene:

$$\frac{\partial E_0^\pm(z, t)}{\partial z} = \pm i \frac{\partial B_0^\pm(z, t)}{\partial t} \quad (1.75)$$

$$(\pm i k_0) \tilde{E}_0 = \pm i (\mp i \omega_0) B_0^\pm \quad (1.76)$$

Así, las amplitudes de los campos satisfacen:

$$\tilde{E}_0^\pm = \mp i \frac{\omega_0}{k_0} B_0 \quad (1.77)$$

o en forma equivalente, a partir de (1.66)¹⁰:

$$\vec{E}_0(z, t) = \frac{B_0 \omega_0}{k_0} [\text{sen}(k_0 z - \omega_0 t) \hat{x} - \text{cos}(k_0 z - \omega_0 t) \hat{y}] \quad (1.79)$$

Ec. de momentum transversal

Cada especie j satisfará también la ecuación de conservación del momentum (1.20), de modo que en general:

$$\frac{d\vec{V}_{0j}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}_{0j}}{\partial t} = \frac{q_j}{m_j} \left(\vec{E}_0 + \vec{V}_{0j} \times (\vec{B}_0 + \vec{B}_c) \right) \quad (1.80)$$

Separando las componentes transversales¹¹ para posteriormente sumarlas en la forma $(\text{Ec X}) \pm i (\text{Ec Y})$, y notando que \vec{B}_0 no aporta, se tiene que usando la relación de Faraday (1.77):

$$\frac{\partial}{\partial t} (V_{0j}^x \pm V_{0j}^y) = \frac{q_j}{m_j} [(E_0^x \pm i E_0^y) + B_s (V_{0j}^y \mp i V_{0j}^x)] \quad (1.82)$$

$$\frac{\partial V_{0j}^\pm}{\partial t} = \mp i \frac{q_j}{m_j} \frac{\omega_0}{k_0} B_0^\pm \mp i \Omega_j V_{0j}^\pm \quad (1.83)$$

Aplicando la dependencia sinusoidal $e^{\pm i(k_0 z - \omega_0 t)}$ para la velocidad y campo eléctrico transversales, se obtiene una relación entre las amplitudes de dichos campos:

$$\tilde{V}_{0j}^\perp := \tilde{V}_{0j}^\pm = \tilde{V}_{0j}^x = \frac{\omega_0/k_0}{1 - \frac{\omega_0}{\Omega_j}} \left(-\frac{B_0}{B_s} \right) \quad (1.84)$$

en donde el superíndice \pm se cambia a \perp debido a que esta velocidad transversal no depende de signos alternantes¹². Para los protones la relación se particulariza simplemente cambiando al subíndice p . Pero, para los

⁹El signo \pm es en realidad superfluo en este punto. Sólo se usa para citar, posteriormente, las ecuaciones necesarias al derivar la relación de dispersión linealizada calculada en la sección 2.4.1.

¹⁰Esto también se puede obtener directamente de (1.74), pues al derivar cada expresión:

$$E_0^x = \frac{\omega_0}{k_0} B_0^y, \quad E_0^y = -\frac{\omega_0}{k_0} B_0^x. \quad (1.78)$$

¹¹ Cabe señalar que la componente longitudinal de la ecuación de momentum es

$$\frac{\partial V_{0j}^z}{\partial t} = \frac{q_j}{m_j} (V_0^x B_0^y - V_0^y B_0^x) \quad (1.81)$$

que se satisface idénticamente reemplazando cada cantidad correspondiente (ambos lados son nulos), por lo cual es redundante.

¹² Para comparaciones posteriores, conviene escribir las componentes reales de esta velocidad transversal a partir de sus definiciones:

$$V_{0j}^\pm = V_{0j}^x \pm i V_{0j}^y = \tilde{V}_{0j}^\pm e^{\pm i(k_0 z - \omega_0 t)} = \frac{\omega_0/k_0}{1 - \frac{\omega_0}{\Omega_j}} \left(-\frac{B_0}{B_s} \right) (\text{cos}(k_0 z - \omega_0 t) \pm i \text{sen}(k_0 z - \omega_0 t)) \quad (1.85)$$

de modo que:

$$V_{0j}^x = \frac{\omega_0/k_0}{1 - \frac{\omega_0}{k_0}} \left(-\frac{B_0}{B_s} \right) \text{cos}(k_0 z - \omega_0 t) \quad (1.86)$$

$$V_{0j}^y = \frac{\omega_0/k_0}{1 - \frac{\omega_0}{k_0}} \left(-\frac{B_0}{B_s} \right) \text{sen}(k_0 z - \omega_0 t) \quad (1.87)$$

electrones, notamos que al considerarlos sin masa $m_e = 0$, se tiene que $1/\Omega_e = m_e/(eB_s) \rightarrow 0$, por lo que se anula la correspondiente expresión en el denominador, quedando:

$$\tilde{V}_{0e}^\perp = -\frac{\omega_0}{k_0} \frac{B_0}{B_s} \quad (1.88)$$

Ec. de Ampère

El último paso es incorporar las relaciones anteriores en la ecuación de Ampère en la forma:

$$\hat{z} \times \frac{\partial \vec{B}_0}{\partial z} = \mu_0 \sum_j \vec{J}_{0j} \quad (1.89)$$

Sumando componentes transversales¹³ en la forma (Ec X) $\pm i$ (Ec Y), y usando las definiciones apropiadas:

$$\pm i \frac{\partial B_0^\pm}{\partial z} = \mu_0 \sum_j J_{0j}^\pm = \mu_0 \sum_j q_j n_{0j} V_{0j}^\pm \quad (1.91)$$

Explicitando la sumatoria sobre especies, y recurriendo a las relaciones entre \tilde{V}_{0j}^\pm y B_0 (1.88) y (1.84) antes halladas, es posible eliminar esta última cantidad, de modo que¹⁴:

$$-k_0 B_0 = \mu_0 (-en_{0e} \tilde{V}_{0e}^\perp + en_{0p} \tilde{V}_{0p}^\perp) \quad (1.93)$$

$$k_0^2 = \frac{\mu_0 en_0}{\Omega_p B_s} \frac{\omega_0^2}{1 - \frac{\omega_0}{\Omega_p}} \quad (1.94)$$

Normalizando de acuerdo a (F.1), tenemos la conocida relación de dispersión, en un plasma electrón-protón, para una onda de Alfvén ión-ciclotrón de amplitud finita, con propagación paralela al campo magnético estático \vec{B}_c y de polarización izquierda:

$$Y_0^2 = \frac{X_0^2}{1 - X_0} \quad (1.95)$$

(ver figura 1.7) Se debe notar que esta relación de dispersión coincide con la de ondas de Alfvén de pequeña amplitud para bajas frecuencias $\omega \ll \Omega_p$ [Chen, 1984], pues en dicho caso el denominador anterior $(1 - X_0) \rightarrow 1$, recuperándose la relación lineal $k_0 = V_A \omega_0$ donde no hay efectos dispersivos (con V_A la velocidad de Alfvén definida en (1.32)). Notar que esta relación posee una resonancia en $\omega_0 = \Omega_p$ para $k_0 \rightarrow \infty$ ¹⁵, debido a que la onda y el movimiento ciclotrónico de los protones se realiza en el mismo sentido (ver apéndice A.1).

Por otra parte, reemplazando la relación de dispersión (1.94) en la amplitud de velocidad macroscópica transversal para protones (1.84), se obtiene:

$$\tilde{V}_{0p}^\perp = -\frac{B_s^2}{\mu_0 n_0 m_p} \frac{B_0 k_0}{\omega_0}, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\tilde{V}_{0p}^\perp}{V_A} = -\frac{B_0/B_s}{v_{\phi 0}/V_A} \quad (1.96)$$

¹³El lado izquierdo de la componente z de esta ecuación se anula, implicando que la densidad total de corriente longitudinal es nula (*current-free plasma*):

$$\sum_j J_{0j}^z = en_0 (V_{0e}^z - V_{0p}^z) = 0 \quad (1.90)$$

de donde se desprende que las velocidades macroscópicas paralelas son iguales para electrones y protones: $V_{0e}^z = V_{0p}^z$. Como se escogió $V_{0p}^z = U_z = 0$, esta condición es irrelevante en este caso, aunque será importante posteriormente cuando se analicen plasmas con varias especies.

¹⁴La suma de \tilde{V}_{0j}^\pm para electrones y protones implica el uso de la identidad:

$$-1 + \frac{1}{1 - \frac{\omega_0}{\Omega_p}} = \frac{\omega_0/\Omega_p}{1 - \frac{\omega_0}{\Omega_p}} \quad (1.92)$$

¹⁵En una resonancia de este tipo (ver pág 18 [Cramer, 2001] y 126 de [Chen, 1984]), donde el índice de refracción $n = ck/\omega \rightarrow \infty$ y la longitud de onda $\lambda \rightarrow 0$, la velocidad de grupo se anula y la energía de la onda se acumula. Esto se debe físicamente a que la onda comienza a “resolver” partículas individuales, a lo largo de una longitud de onda, y afectar violentamente sus órbitas existiendo una muy fuerte interacción onda-partícula (ver pág 230 de [Baumjohann and Treumann, 1997]). Aquí puede suceder que la onda entre energía a las partículas, amortiguándose, ó el proceso inverso, denominados respectivamente: absorción resonante o amplificación resonante de la onda.

que es conocida como relación de Walen (ver [Goldstein, 1978]), en donde $v_{\phi 0}$ es la velocidad de fase de esta onda. Por otra parte, también se debe notar que el flujo de fluido es incompresible, ya que la densidad ρ es constante además que V_{0z} es nulo, por lo que en la ecuación de continuidad (1.19) cada término se anula.

Onda de Alfvén de polarización derecha

Sea ahora una onda pump de polarización derecha, definida, en vez de (1.64), por el campo magnético:

$$B_0^x = B_0 \cos(k_0 z - \omega_0 t) \quad (1.97)$$

$$B_0^y = -B_0 \sin(k_0 z - \omega_0 t) \quad (1.98)$$

El cálculo que continúa es muy similar al descrito, con la excepción que la dependencia de las cantidades B_0^\pm , E_0^\pm y V_{0j}^\pm es $\exp(\mp i(k_0 z - \omega_0 t))$, por lo que:

$$\frac{\partial V_{0j}^\pm}{\partial t} = \pm i \omega_0 V_{0j}^\pm, \quad y \quad \frac{\partial B_0^\pm}{\partial z} = \pm i \omega_0 V_{0j}^\pm \quad (1.99)$$

Esto tiene como consecuencia que el equivalente de la relación (1.84) tenga un signo distinto en el denominador:

$$\tilde{V}_{0j}^\perp := \tilde{V}_{0j}^\pm = \frac{\omega_0/k_0}{1 + \frac{\omega_0}{\Omega_j}} \left(-\frac{B_0}{B_s} \right) \quad (1.100)$$

y también, la ecuación (1.93) cambie de signo a:

$$k_0 B_0 = \mu_0 (-en_{0e} \tilde{V}_{0e}^\perp + en_{0p} \tilde{V}_{0p}^\perp) \quad (1.101)$$

$$(1.102)$$

con lo cual se tendrá, en vez de (1.95), la relación de dispersión para una onda de Alfvén de polarización derecha:

$$Y_0^2 = \frac{X_0^2}{1 + X_0} \quad (1.103)$$

Soluciones numéricas

Las relaciones de dispersión obtenidas en (1.95) y (1.103) se muestran en el siguiente gráfico, junto con las velocidades de fase respectivas.

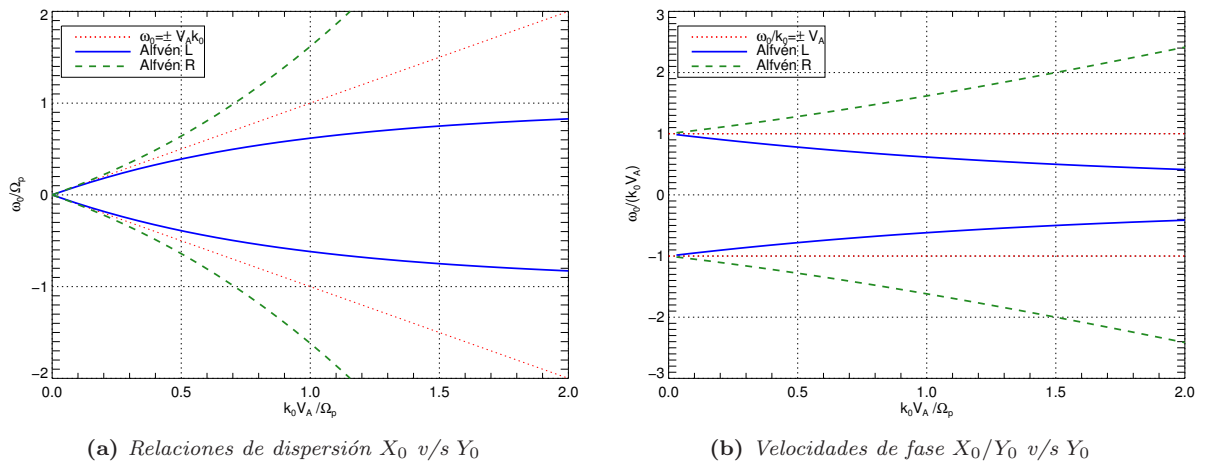


Figura 1.7: Diagramas para ondas de Alfvén de polarización izquierda L y derecha R en el rango $\omega_0 \sim \Omega_p$. También se muestra el límite MHD de la relación de dispersión $\omega_0 = \pm V_A k_0$ (para $\omega_0 \ll \Omega_p$)

Las curvas del primer cuadrante en la figura 1.7a poseen velocidades de fase positiva, mientras que aquellas en el segundo representan el mismo tipo de ondas pero en dirección opuesta, con velocidad de fase negativa. Igualmente hay soluciones de (1.95) y (1.103) que están el tercer y cuarto cuadrante, pero debido a la simetría $Y_0 \rightarrow -Y_0$ son simplemente una reflexión en torno al eje de las ordenadas, además de ser redundantes por poseer la misma velocidad de fase que las curvas mostradas. Notar también que la onda L posee la resonancia iónica antes mencionada $X_0 = \pm 1$, al tender asintóticamente a ese valor para $Y_0 \rightarrow \infty$, alcanzando, a la vez, una velocidad de fase nula. Por dicha razón, a esta onda de Alfvén se le denomina frecuentemente *ión-ciclotrón*. En cambio, la onda R no presenta este tipo de restricciones, mostrando solamente el valor absoluto de su velocidad de fase creciente, siempre mayor que la velocidad de Alfvén, denominándosele con frecuencia modo *magnetosónico rápido*

1.5.3. Ondas de gran amplitud: Solución de Sonnerup

En esta subsección se presentará brevemente el resultado obtenido en [Sonnerup and Su, 1967]: la relación de dispersión (1.95) obtenida con teoría de fluidos, también es válida en teoría cinética para una onda de Alfvén ión ciclotrón de amplitud finita.

Ecuación de movimiento de una partícula

En efecto, considérese primero la ecuación de la aceleración de un protón con velocidad \vec{v} bajo la acción de la fuerza de Lorentz debida al campo electromagnético de la onda de Alfvén y el campo magnético estático de fondo: (1.66) y (1.79):

$$\frac{d\vec{v}^L}{dt} = \frac{e}{m_p} \left(\vec{E}_0^L + \vec{v}^L \times (\vec{B}_s^L + \vec{B}_0^L) \right) \quad (1.104)$$

en donde todos los campos vectoriales se han denotado explícitamente con un superíndice L para recalcar el hecho que están determinados en el sistema de referencia del laboratorio, ó, equivalentemente, en aquel asociado al campo magnético estático. Notar que en donde $\omega_0^L = \omega_0$ y $k_0^L = k_0$. Pero, para el siguiente análisis, es conveniente transformar al sistema de referencia comóvil a la onda (W), en el que ésta posee una velocidad de fase nula $v_{\phi 0}^W = 0$. Es decir, las velocidades en ambos sistemas de referencias están relacionadas mediante las transformaciones no relativistas (ver [Liemohn and Duane, 1976]):

$$\vec{v}^W = \vec{v}^L - v_{\phi 0} \hat{k}, \quad \Rightarrow \quad z^W = z^L - v_{\phi 0} t \quad (1.105)$$

con esto, el argumento de las funciones trigonométricas de las componentes transversales de la onda pump dependerá sólo de la posición en el sistema de referencia W :

$$k_0 z^L - \omega_0 t = k_0 z^W \quad (1.106)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B}^L = B[\cos(k_0 z^L - \omega_0 t)\hat{x} + \sin(k_0 z^L - \omega_0 t)\hat{y}] = \vec{B}^W = B[\cos(k_0 z^W)\hat{x} + \sin(k_0 z^W)\hat{y}] \quad (1.107)$$

y cada componente del paréntesis del lado derecho de (4.2), invocando las formas explícitas de (1.66) y (1.79), transformará así:

$$X : \quad E_{0x}^L - v_z^L B_y^L = \frac{B_0 \omega_0}{k_0} \sin(k_0 z^L - \omega_0 t) - \left(v_z^W + \frac{\omega_0}{k_0} \right) B_0 \sin(k_0 z^L - \omega_0 t) \quad (1.108)$$

$$Y : \quad E_{0y}^L + v_z^L B_x^L = -\frac{B_0 \omega_0}{k_0} \cos(k_0 z^L - \omega_0 t) + \left(v_z^W + \frac{\omega_0}{k_0} \right) B_0 \cos(k_0 z^L - \omega_0 t) \quad (1.109)$$

$$Z : \quad v_x^L B_y^L - v_y^L B_x^L + B_s = v_x^W B_y^W - v_y^W B_x^W + B_s \quad (1.110)$$

con lo cual se tendrá que en el sistema de referencia comóvil a la onda se elimina la dependencia explícite del campo eléctrico $\vec{E}_0^W = 0$, por lo que la ecuación de movimiento en este caso será:

$$\frac{d\vec{v}^W}{dt} = \frac{e}{m_p} \vec{v}^W \times (\vec{B}_s + \vec{B}_0^W) = \frac{e}{m_p} \vec{v}^W \times \vec{B}^W \quad (1.111)$$

Constantes del movimiento

Esta forma es apropiada para encontrar fácilmente dos de las constantes del movimiento del protón. La primera de ellas se encuentra multiplicando escalarmente por \vec{v}^W (1.111):

$$\vec{v}^W \cdot \frac{d\vec{v}^W}{dt} = \frac{e}{m_p} \vec{v}^W \cdot (\vec{v}^W \times \vec{B}^W) = 0 \quad (1.112)$$

con lo cual la energía cinética de la partícula dividida entre su masa es conservada:

$$\epsilon^W = \frac{(\vec{v}^W)^2}{2} = \text{cte}_1^W, \quad (1.113)$$

un resultado evidente si se nota que el campo magnético no cambia la magnitud de la velocidad de la partícula. La otra constante del movimiento se halla multiplicando escalarmente por $(\vec{B}^W + \vec{B}_s)$ (1.111):

$$\vec{B}^W \cdot \frac{d\vec{v}^W}{dt} = \frac{e}{m_p} \vec{B}^W \cdot (\vec{v}^W \times \vec{B}^W) = 0 \quad (1.114)$$

Para encontrar la constante del movimiento se debe agrupar todo el término anterior bajo una derivada temporal, manipulando un poco los términos. Reescribiendo el lado izquierdo mediante la definición de derivada convectiva en este sistema de referencia: $d/dt = \partial/\partial t + v_j^W \partial/\partial x_j^W$, se tiene

$$\vec{B}^W \cdot \frac{d\vec{v}^W}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{B}^W \cdot \vec{v}^W) - \vec{B}^W \cdot \frac{d\vec{v}^W}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{B}^W \cdot \vec{v}^W) - v_j^W v_z^W \partial/\partial z^W B_j^W \quad (1.115)$$

el último término se puede simplificar en base a la forma explícita del campo magnético (1.107), notando que:

$$\frac{\partial \vec{B}^W}{\partial z^W} = B_0 k_0 [-\sin(k_0 z^W) \hat{x} + \cos(k_0 z^W) \hat{y}] = k_0 \hat{z}^W \times \vec{B}^W \quad (1.116)$$

con lo cual:

$$\vec{B}^W \cdot \frac{d\vec{v}^W}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{B}^W \cdot \vec{v}^W) - k_0 v_z^W \vec{v}^W \cdot (\hat{z}^W \times \vec{B}^W) \quad (1.117)$$

Pero de la componente z de la ecuación de trayectoria (1.111):

$$\frac{dv_z^W}{dt} = \frac{e}{m_p} (v_x^W B_y^W - v_y^W B_x^W) = -\frac{e}{m_p} \vec{v} \cdot (\hat{z} \times \vec{B}^W) \quad (1.118)$$

y así se obtiene:

$$\vec{B}^W \cdot \frac{d\vec{v}^W}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{B}^W \cdot \vec{v}^W) + \frac{m_p k_0}{2e} \frac{d(v_z^W)^2}{dt} = 0 \quad (1.119)$$

con lo que, usando además (1.113), la segunda constante del movimiento será:

$$\text{cte}_2^W = \frac{\vec{B}^W \cdot \vec{v}^W}{B_s} - \frac{k_0}{2\Omega_p} ((v_x^W)^2 + (v_y^W)^2) \quad (1.120)$$

Ahora que calculamos dos constantes del movimiento en el sistema de referencia W , se debe retornar al sistema coordenado original del laboratorio mediante (1.105) y (1.107). Para la primera constante, se tiene:

$$\epsilon^W = \frac{(\vec{v}^W)^2}{2} = \frac{1}{2} [(\vec{v}^L)^2 - 2v_z^L v_{\phi_0} + (v_{\phi_0})^2] \quad (1.121)$$

y dado que la velocidad de fase de la onda es fija, se tendrá la constante del movimiento:

$$C_1^L = \epsilon^L - v_z^L v_{\phi_0} \quad (1.122)$$

De forma completamente análoga, la segunda constante del movimiento en el sistema L será:

$$C_2^L = \frac{\vec{B}^L \cdot \vec{v}^L}{B_s} - \frac{k_0}{2\Omega_p} ((v_x^L)^2 + (v_y^L)^2) \quad (1.123)$$

Función de distribución y relaciones básicas

El siguiente paso es invocar el teorema de Liouville: dado que la función de distribución f_p obedece a la ecuación de Vlasov (1.16) (reemplazando los campos electromagnéticos por los apropiados a esta onda de Alfvén), ella se mantiene constante a lo largo de una trayectoria en el espacio fase, y por tanto puede ser expresada en función de las constantes del movimiento de una partícula (ver página 361 de [Krall and Trivelpiece, 1973]). Pero más que suponer una dependencia arbitraria de las constantes antes halladas C_1^L (1.122) y C_2^L (1.123), aquí se seguirá a [Sonnerup and Su, 1967] al suponer que la función de distribución posee la dependencia

$$f_p = f_p[C_1^L + (v_{\phi_0} - U_z)C_2^L] \quad (1.124)$$

en donde U_z es otra constante (ver más adelante su interpretación). En forma explícita, y eliminando el superíndice L al sobreentenderse de aquí en adelante que todas las cantidades estarán calculadas en el sistema de referencia del laboratorio, se tiene:

$$C_1 + (v_{\phi_0} - U_z)C_2 = \epsilon - v_z v_{\phi_0} + (v_{\phi_0} - U_z) \left[\frac{\vec{B} \cdot \vec{v}}{B_s} - \frac{k_0}{2\Omega_p} (v_x^2 + v_y^2) \right] \quad (1.125)$$

$$= \frac{1}{2} \left[v_z^2 - 2v_z U_z + (v_x^2 + v_y^2)\alpha + 2\frac{v_{\phi_0} - U_z}{B_s} (B_0^x v_x + B_0^y v_y) \right] \quad (1.126)$$

en donde se ha definido (ver más adelante su interpretación):

$$\alpha := 1 - \frac{\omega_0 - k_0 U_z}{\Omega_p} = 1 - \frac{k_0}{\Omega_p} (v_{\phi_0} - U_z) \quad (1.127)$$

Para escribir la combinación anterior en una forma más reveladora, es conveniente sumar un par de términos también constantes, de modo que:

$$C_1 + (v_{\phi_0} - U_z)C_2 + \frac{1}{2} \left[U_z^2 + \frac{B_0^2}{\alpha B_s^2} (v_{\phi_0} - U_z)^2 \right] \quad (1.128)$$

$$= \frac{1}{2} \left[(v_z^2 - 2v_z U_z + U_z^2) \right] + \frac{\alpha}{2} \left[(v_x^2 + v_y^2) + 2\frac{v_{\phi_0} - U_z}{\alpha B_s} (B_0^x v_x + B_0^y v_y) + \frac{(v_{\phi_0} - U_z)^2}{\alpha^2 B_s^2} (B_0^{x2} + B_0^{y2}) \right] \quad (1.129)$$

Definiendo las cantidades:

$$U_x^S = -(v_{\phi_0} - U_z) \frac{B_0}{\alpha B_s} \cos(k_0 z - \omega_0 t) = \frac{\Omega_p B_0}{k_0 B_s} \zeta_+^S \cos \phi_0 \quad (1.130)$$

$$U_y^S = -(v_{\phi_0} - U_z) \frac{B_0}{\alpha B_s} \sin(k_0 z - \omega_0 t) = \frac{\Omega_p B_0}{k_0 B_s} \zeta_+^S \sin \phi_0 \quad (1.131)$$

que incluyen:

$$\zeta_+^S = \frac{\omega_0 - k_0 U_z}{\omega_0 - k_0 U_z - \Omega_p} = \frac{1 - \frac{k_0 U_z}{\omega_0}}{1 - \frac{\Omega_p}{\omega_0} - \frac{k_0 U_z}{\omega_0}}, \quad (1.132)$$

se tendrá finalmente que una función de distribución consistente con la onda de Alfvén y con la ecuación de Vlasov, adoptará la dependencia:

$$f_p(\vec{v}, z, t) = f_p \left[\alpha (v_x - U_x^S)^2 + \alpha (v_y - U_y^S)^2 + (v_z - U_z)^2 \right] \quad (1.133)$$

Notar que, aún en el límite en que la amplitud de la onda $B_0 \rightarrow 0$, esta función de distribución seguirá dependiendo de la frecuencia de la onda a través de α .

En esta tesis, y para propósitos de comparación, conviene explicitar esta función de distribución de modo que adopte la forma de una Maxwelliana (1.18) con drift sólo en la dirección transversal al campo magnético: $\vec{U} = U_x \hat{x} + U_y \hat{y}$, por lo que $U_z = 0$ y $\zeta_+^S = \omega_0 / (\omega_0 - \Omega_p)$, de modo que:

$$f_{0p}(\vec{v}, z, t) = C_N \exp \left(- \frac{\alpha (v_x - U_x^S)^2 + \alpha (v_y - U_y^S)^2 + v_z^2}{v_T^2} \right) \quad (1.134)$$

(el subíndice 0 es para enfatizar el hecho que describe al plasma de forma consiste con la onda de Alfvén) en donde C_N es una constante de normalización que quedará ajustada mediante la definición de densidad (1.8). En efecto, mediante el cambio de variable:

$$x = \sqrt{\alpha} \frac{v_x - U_x^S}{v_T}, \quad y = \sqrt{\alpha} \frac{v_y - U_y^S}{v_T}, \quad z = \frac{v_z}{v_T} \quad (1.135)$$

tendremos que la densidad será:

$$n_{0p} = C_N \int d^3v \exp \left(-\frac{\alpha(v_x - U_x^S)^2 + \alpha(v_y - U_y^S)^2 + v_z^2}{v_T^2} \right) \quad (1.136)$$

$$= \frac{C_N v_T^3}{\alpha} \int dx dy dz \exp(-x^2 - y^2 - z^2) = \frac{C_N \pi^{3/2} v_T^3}{\alpha} \quad (1.137)$$

que es constante tanto espacial como temporalmente. Así, la versión completa de la función de distribución propuesta será:

$$f_p(\vec{v}, z, t) = \frac{\alpha n_{0p}}{\pi^{3/2} v_T^3} \exp \left(-\frac{\alpha(v_x - U_x^S)^2 + \alpha(v_y - U_y^S)^2 + v_z^2}{v_T^2} \right) \quad (1.138)$$

A modo de verificación, la velocidad macroscópica, según (1.10), será:

$$\vec{V}_{0p} = \frac{1}{n_{0p}} \int d^3v (v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}) C_N \exp \left(-\frac{\alpha(v_x - U_x^S)^2 + \alpha(v_y - U_y^S)^2 + v_z^2}{v_T^2} \right) \quad (1.139)$$

$$= \frac{\alpha}{\pi^{3/2} v_T^3} \int dx dy dz \frac{v_T^3}{\alpha} \left[\left(\frac{xv_T}{\sqrt{\alpha}} + U_x^S \right) \hat{x} + \left(\frac{yv_T}{\sqrt{\alpha}} + U_y^S \right) \hat{y} \right] \exp(-x^2 - y^2 - z^2) \quad (1.140)$$

$$= \frac{1}{\pi^{3/2}} \int dx dy dz (U_x^S \hat{x} + U_y^S \hat{y}) \exp(-x^2 - y^2 - z^2) = (U_x^S \hat{x} + U_y^S \hat{y}) \quad (1.141)$$

dado que U_x^S y U_y^S son independientes de cualquier componente de la velocidad. Así se comprueba que ellas efectivamente son las componentes de la velocidad macroscópica o drift transversal inducido por la onda de Alfvén, que además concuerdan precisamente (considerando $U_z = 0$) con el cálculo de fluidos (1.86) (ya que ambos métodos dan la misma relación de dispersión, como se verá a continuación). Además, es concordante que la velocidad de drift U_z es nula debido a la suposición hecha al pasar de (1.133) a (1.134). Por otra parte, también podemos calcular la temperatura de la función de distribución en la dirección paralela según (1.15):

$$T_{\parallel} = \frac{m_p}{k_B n_{0p}} \int v_z^2 f_p d^3v \quad (1.142)$$

$$= \frac{m_p}{k_B n_{0p}} \frac{\alpha n_{0p}}{\pi^{3/2} v_T^3} \int d^3v v_z^2 \exp \left(-\frac{\alpha(v_x - U_x^S)^2 + \alpha(v_y - U_y^S)^2 + v_z^2}{v_T^2} \right) \quad (1.143)$$

$$= \frac{m_p}{k_B n_{0p}} \frac{\alpha n_{0p} v_T^2}{\pi^{3/2} \alpha} \int dx dy dz z^2 \exp(-x^2 - y^2 - z^2) = \frac{m_p v_T^2}{2k_b} \quad (1.144)$$

Mientras que la temperatura perpendicular será:

$$T_{\perp} = \frac{m_p}{2k_B n_{0p}} \int (v_{\perp}^2 - V_{\perp}^2) f_p d^3v \quad (1.145)$$

$$= \frac{m_p}{2k_B n_{0p}} \frac{\alpha n_{0p}}{\pi^{3/2} v_T^3} \int d^3v [(v_x - U_x^S)^2 + (v_y - U_y^S)^2] \exp \left(-\frac{\alpha(v_x - U_x^S)^2 + \alpha(v_y - U_y^S)^2 + v_z^2}{v_T^2} \right) \quad (1.146)$$

$$= \frac{m_p}{2k_B n_{0p}} \frac{\alpha n_{0p} v_T^2}{\pi^{3/2} \alpha^2} \int dx dy dz (x^2 + y^2) \exp(-x^2 - y^2 - z^2) = \frac{m_p v_T^2}{2k_b} \frac{1}{\alpha} \quad (1.147)$$

De modo que podremos interpretar la constante α como la razón entre las temperaturas paralela y perpendicular:

$$\frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} = \alpha = 1 - \frac{\omega_0}{\Omega_p} \quad (1.148)$$

Cabe destacar que esta anisotropía de temperaturas es sólo aparente, siendo inducida por la presencia de la onda pump en la función de diistribución mencionada, que en ausencia de ella sería una maxwelliana isotrópica.

Relación de dispersión

Ahora se introducirá la función de distribución (1.134) y los campos asociados de la onda de Alfvén en las ecuaciones de Maxwell, para encontrar la relación que satisface. En primer lugar, se toma la derivada temporal de la ecuación de Ampère para bajas frecuencias (1.5), y mediante la ecuación de Faraday se obtiene una ecuación de onda inhomogénea:

$$\nabla \times \frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial \vec{J}_0}{\partial t} \quad (1.149)$$

$$\nabla^2 \vec{E}_0 - \nabla(\nabla \cdot \vec{E}_0) = \mu_0 \frac{\partial \vec{J}_0}{\partial t} \quad (1.150)$$

Recordando (1.61), la divergencia del campo eléctrico (1.79) será nula, y además:

$$\nabla^2 \vec{E}_0 = -k_0^2 \frac{B_0 \omega_0}{k_0} [\text{sen}(k_0 z - \omega_0 t) \hat{x} - \cos(k_0 z - \omega_0 t) \hat{y}] = -k_0^2 \vec{E}_0 \quad (1.151)$$

Luego, sumando componentes transversales en la forma $(E_c X) \pm i (E_c Y)$, se tendrá que la ecuación de onda será:

$$-k_0 E_0^\pm = -k_0^2 \left(\mp i \frac{B_0 \omega_0}{k_0} e^{\pm i \phi_0} \right) = \mu_0 \frac{\partial J_0^\pm}{\partial t} \quad (1.152)$$

La densidad de corriente de los protones (definida en teoría cinética mediante (1.11)) se puede obtener a través de la velocidad macroscópica transversal antes calculada:

$$J_{0p}^\pm = e \int d^3 v v_\pm f_p = e n_{0p} V_{0p}^\pm = e n_0 (U_x^S \pm i U_y^S) = e n_0 \frac{\Omega_p B_0}{k_0 B_s} \zeta_+^S e^{\pm i \phi_0} \quad (1.153)$$

mientras que la densidad de corriente electrónica se calcula a partir (1.88):

$$J_{0e}^\pm = -e n_0 \vec{V}_{0e} = -e n_0 \left(-\frac{\omega_0}{k_0} \frac{B_0}{B_s} e^{\pm i \phi_0} \right) \quad (1.154)$$

Sumando ambos resultados, obtenemos la densidad de corriente total:

$$J_0^\pm = J_{0p}^\pm + J_{0e}^\pm = \frac{e n_0 B_0}{k_0 B_s} (\Omega_p \zeta_+^S + \omega_0) e^{\pm i \phi_0} \quad (1.155)$$

$$= -\frac{e n_0 \Omega_p B_0}{k_0 B_s} \frac{(\omega_0 / \Omega_p)^2}{1 - \frac{\omega_0}{\Omega_p}} e^{\pm i \phi_0} \quad (1.156)$$

Tomando la derivada temporal y reemplazando en (1.152), se tendrá:

$$-k_0^2 \left(\mp i \frac{B_0 \omega_0}{k_0} e^{\pm i \phi_0} \right) = -\frac{\mu_0 e n_0 \Omega_p B_0}{k_0 B_s} \frac{(\omega_0 / \Omega_p)^2}{1 - \frac{\omega_0}{\Omega_p}} (\mp i \omega_0 e^{\pm i \phi_0}) \quad (1.157)$$

con lo cual tendremos, al simplificar, exactamente la misma relación de dispersión obtenida en el contexto de teoría de fluidos (1.94). Notar que al reemplazar esto en la razón de temperaturas (1.148), se tiene alternativamente:

$$\alpha = \frac{\mu_0 e n_0}{\Omega_p B_s} v_{\phi 0}^2 \quad (1.158)$$

que es siempre positivo, como se espera de un comportamiento físicamente razonable para la función de distribución (1.134): en los bordes del espacio de velocidades $|v| \rightarrow \infty$, siempre se debe tener $f_{0p} \rightarrow 0$.

Cabe destacar que, si bien se ha demostrado que la relación de dispersión de fluidos (1.94) es exacta y no lineal en teoría cinética mediante el análisis de Sonnerup anterior, ella en rigor no debiera considerarse como tal. Más bien, es simplemente una relación directa entre la frecuencia real y número de onda de la pump, sin tomar en consideración las tasas de crecimiento que pudiesen estar eventualmente asociadas.

Capítulo 2

Inestabilidades Paramétricas

2.1. Introducción

De acuerdo a lo mencionado en el capítulo previo, las ondas desarrolladas en plasmas pueden describirse de forma lineal si su amplitud es infinitesimal. Sin embargo, esta situación cambia radicalmente al considerar ondas de amplitud finita, pues esto conduce al acoplamiento de modos, siendo por tanto capaces de intercambiar energía y momentum entre sí a través de interacciones no lineales. Es en este contexto que el problema principal a abordar en esta tesis tratará sobre un tipo de interacción onda-onda: la respuesta de un plasma a la presencia de una onda madre o *pump* de amplitud finita, ya que en general, ésta interactuará con otros modos normales produciendo ondas hijas (decaimiento de la onda *pump*) con ciertas características distintivas, tal como su amortiguamiento o inestabilidad, dependiendo del factor γ definido en (1.50). El fenómeno no lineal descrito, conocido como *inestabilidad paramétrica* (Ver [Chen, 1984], [Bellan, 2006] y [Swanson, 2003]), puede darse en cualquier sistema resonante variando periódicamente algún parámetro de él, comenzando éste a oscilar cuando se satisfacen algunas condiciones, que en general son dos:

1. Las ondas involucradas en el decaimiento deben satisfacer restricciones sobre sus frecuencias y números de onda, que deben cumplirse debido a la conservación de energía y momentum lineal, respectivamente. Por ejemplo, si la onda *pump* posee frecuencias y números de onda ω_0 y \vec{k}_0 , mientras que las dos ondas hijas en que decae se caracterizan por (ω_1, \vec{k}_1) y (ω_2, \vec{k}_2) , entonces:

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 \quad \text{y} \quad \vec{k}_0 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \quad (2.1)$$

Esta situación puede entenderse desde el punto de vista de Mecánica Cuántica como una interacción (scattering) entre fotones y excitaciones cuánticas con energía $\hbar\omega$ y momentum lineal $\hbar\vec{k}$.

2. La onda *pump* tiene que superar un cierto umbral crítico de amplitud para que alguna o todas las ondas hijas en que decaiga sean inestables, en cuyo caso sus amplitudes crecen a expensas de la energía de la onda *pump*, hasta un nivel de saturación determinado por otros tipos de procesos no lineales. Cabe destacar que si bien las ondas hijas pueden satisfacer una relación de dispersión lineal en un plasma, éste no es siempre el caso. Es frecuente la situación en que éstas no son modos normales, sino que se originan debido al forzamiento externo, en cuyo caso se les denomina cuasimodos u ondas virtuales.

2.1.1. Motivación: un ejemplo conceptual

Para introducir de un modo gráfico las características distintivas de las inestabilidades paramétricas, se considerará un experimento pensado¹: un plasma de laboratorio en el que existe una antena conectada a un generador de onda sinusoidal ajustado en una frecuencia determinada de, digamos, unos 500 MHz:

¹Adaptado del texto de [Bellan, 2006], capítulo 15, página 428.

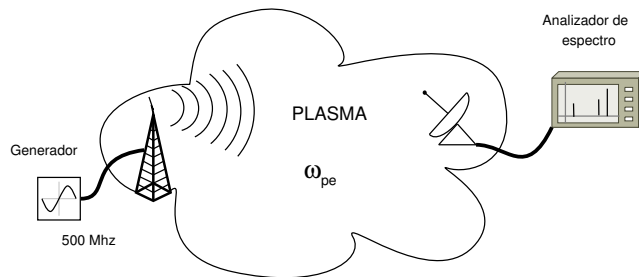


Figura 2.1: Diagrama del experimento pensado

Si la frecuencia de plasma electrónica ((1.29)) es de unos $\omega_{pe}/2\pi = 100$ MHz, entonces la antena excitará una onda electromagnética con relación de dispersión $\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2$ (Ver (1.41) para mayores detalles), que se propaga en el plasma hasta que es detectada por un sensor analizador de espectro, que es capaz de mostrar la amplitud de la señal v/s la frecuencia. Para una potencia del generador relativamente baja, dicho detector mide un peak en la amplitud a la misma frecuencia que la onda generadora: 500 MHz (figura 2.2a). Si se incrementa un poco la amplitud del generador de onda, entonces correspondientemente aumentará linealmente el peak de la señal indicando la mayor fuerza de la señal original (figura 2.2b). Pero, si la amplitud del generador supera un cierto *umbral crítico* (figura 2.2c), entonces se observa un extraño comportamiento: además del peak principal de los casos anteriores, aparecen dos peaks secundarios a diferentes frecuencias muy separadas entre sí; que representan a las ondas hijas y que por (2.1) sus frecuencias suman 500 MHz.

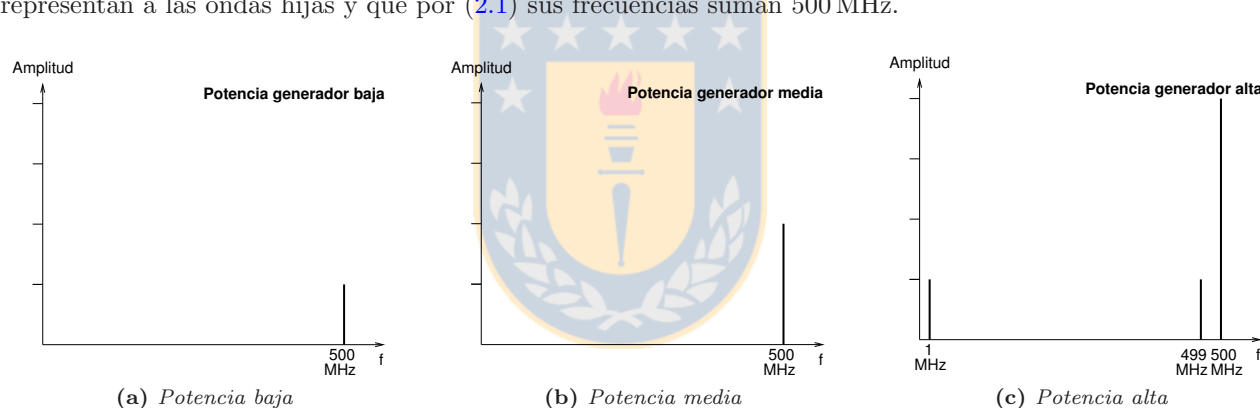


Figura 2.2: Respuesta del plasma a la presencia de una onda madre electromagnética

2.2. Clasificación y ejemplos para plasmas no magnetizados

En general, las inestabilidades paramétricas se presentan en una multitud de ambientes. En el laboratorio, por ejemplo, son relevantes para los dispositivos de láser por fusión y calentamiento mediante radio frecuencias de plasmas magnéticamente confinados (Ver [Liu and Tripathi, 1986] y [Porkolab and Chang, 1978]). En dicho caso, los esfuerzos van dirigidos a disminuir al máximo la energía drenada de la onda pump (un láser, que es una onda electromagnética) por las ondas hijas, pues es energía desperdiciada que no es absorbida por el objetivo de esos experimentos.

Es posible entender de una manera más clara los procesos que ocurren en la situación antes descrita, ejemplificando para tres tipos de ondas características que se propagan en un plasma uniforme no magnetizado: una onda electromagnética, ión acústica y de Langmuir, descritas en la sección 1.2.2.

2.2.1. Clasificación general

En general, el proceso de inestabilidad paramétrica en un plasma uniforme no magnetizado involucra el decaimiento de una onda madre (pump de frecuencia ω_0) en dos ondas hijas: una de baja (ω_2) y otra alta

frecuencia (ω_1), satisfaciendo por tanto $\omega_0 > \omega_1 > \omega_2$. Así, se tienen varios casos que se explicitan a continuación ²:

Onda madre (ω_0)	Onda hija de alta frec. (ω_1)	Onda hija de alta frec. (ω_2)	Nombre
Electromagnética	Electromagnética	Langmuir	Scattering estimulado de Raman
Electromagnética	Electromagnética	Ión-acústica	Scattering estimulado de Brillouin
Electromagnética	Electromagnética	Frecuencia nula	Autofocalización (<i>self-focusing</i>)
Electromagnética	Langmuir	Langmuir	Decaimiento de dos plasmones
Electromagnética	Langmuir	Ión-acústica	Decaimiento paramétrico
Langmuir	Langmuir	Ión-acústica	Decaimiento electrónico
Langmuir	Langmuir	Frecuencia nula	Cavitón

Tabla 2.1: Algunos inestabilidades paramétricas comunes

Es posible probar que en todos los casos el acople no-lineal que actúa sobre la onda pump y la hija de alta frecuencia (los dos modos de mayores frecuencias) involucra una modulación efectiva de la densidad experimentada por la onda pump, mientras que el correspondiente proceso de acople entre las ondas hijas (las de menor frecuencia) proviene de una fuerza ponderomotiva que modula la temperatura de los electrones asociada al modo de más baja frecuencia (Ver sección 15.3.2 del texto [Bellan, 2006]).

2.2.2. Ejemplos detallados

Aquí se explicarán con un poco más de detalle tres de las inestabilidades paramétricas antes listadas. Los esquemas se han extraído de la figura 8.14 de la página 312 del texto [Chen, 1984].

Scattering Brillouin

Se representarán en un diagrama en el plano (ω, k) las relaciones de dispersión para ondas electromagnética (1.41) e ión-acústicas (1.43), además de tres puntos sobre ellos que indican las frecuencias y números de onda de una posible combinación de onda madre (ω_0) y ondas hijas (ω_1 y ω_2) que satisfacen las reglas de selección (2.1), de modo de formar un paralelogramo así:

²Este listado está extraído del texto [Bellan, 2006], sección 15.3.2, pág. 438

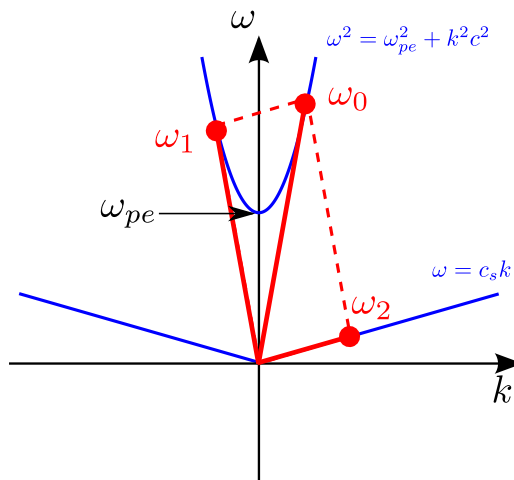


Figura 2.3: *Scattering Brillouin.* Las líneas azules indican las relaciones de dispersión de una onda electromagnética y dos ondas de sonido (con la misma velocidad pero desplazándose en direcciones opuestas). Los puntos rojos indican la frecuencia y número de ondas de las ondas involucradas. Ver explicación en texto.

Nótese que tanto la onda electromagnética madre (fotón) como la onda hija ión-acústica (fonón) se desplazan hacia adelante ($\omega, k > 0$), por lo que necesariamente la otra onda hija electromagnética se debe desplazar hacia atrás por conservación del momentum, tal como lo manifiesta el hecho que $\omega > 0, k < 0$. Es claro que esto debe ocurrir en cualquier proceso en el que estén involucradas tres ondas. Notar que los fonones se producen debido a que las ondas ión-acústicas son débilmente amortiguadas en plasmas no-isotérmicos con $T_e \gg T_i$ (Ver sección 7.6, página 119 del texto [Liu and Tripathi, 1994]).

Este proceso ocurre usualmente en plasmas con densidad por debajo de la crítica $n_0 \leq n_c$ (ver (1.42)). (Ver sección 7.3, página 109 del texto [Liu and Tripathi, 1994]).

Scattering Raman

En este caso se requiere la relación de dispersión electromagnética (onda madre e hija) (1.41) y la de ondas de Langmuir (la otra onda hija).

Este proceso ocurre usualmente a densidades por debajo de un cuarto de la crítica $n_0 \leq n_c/4$.

Decaimiento paramétrico

En este caso se requieren además de (1.41) y (1.43) la relación de dispersión para ondas de Langmuir (1.44), de modo que el fotón que decae en un plasmón que se desplaza hacia adelante y un fonón que se desplaza hacia atrás, se puede representar así: Nótese que la onda electromagnética tiene una alta velocidad de fase, ya que $\omega/k \approx c$, y dado que su número de onda es pequeño $k_0 \approx 0$, tendremos que $|k_1| \approx -|k_2|$. Por último, y a diferencia de los dos ejemplos anteriores, este proceso ocurre para densidades cercanas a la crítica.

2.3. Inestabilidades en plasmas magnetizados cerca de Ω_P

Los casos idealizados de inestabilidades paramétricas presentados poseen una aplicabilidad dirigida principalmente a los plasma de laboratorio. Pero el objetivo de este trabajo es analizar estos procesos en plasmas espaciales, en donde la onda madre será una onda de Alfvén, para lo cual se bosquejará un pequeño resumen histórico con los avances en el entendimiento de estos fenómenos.

2.3.1. Reseña Histórica de las Inestabilidades de Ondas de Alfvén

Etapa 1: Modelo de Fluidos

Las ondas de Alfvén (recordar sección 1.5) circularmente polarizadas que actúan como ondas pump, son conocidas por ser inestables decayendo en otras ondas hijas con $\gamma > 0$. Los primeros estudios sobre este tema se

remontan a la década de los 60' ([Galeev and Oraevskii, 1963] [Sagdeev and Galeev, 1969]), quienes mostraron que una onda coherente de las características anteriores decae (genera) una onda ión acústica y otra onda de Alfvén propagándose hacia atrás (en dirección contraria a la onda pump). Las fluctuaciones del campo magnético asociado a esta onda poseen frecuencias y número de onda $\omega_+ = \omega + \omega_0$ y $k_+ = k + k_0$, respectivamente, en donde ω y k (con $k > k_0$) caracterizan las fluctuaciones de densidad, razón por la cual se denominan de la *sideband* superior. Hay indicios que tal inestabilidad paramétrica de decaimiento debida al acople de tres ondas (*decay*) ocurre en el viento solar, manifestada a través de un parámetro conocido como *cross-helicity*³ que determina la dirección en la que se propagan las ondas de Alfvén. A pequeñas distancias del Sol, dicho parámetro indica que las ondas de Alfvén que inician su recorrido se propagan hacia el exterior del Sol (adelante), mientras que más lejos el signo de la *cross-helicity* se vuelve indefinido, lo cual es evidencia que hay tanto ondas que se siguen propagando hacia fuera del Sol como también otras que se mueven en dirección contraria (atrás), avalando cualitativamente la existencia de la inestabilidad mencionada. Además, debido a la generación por parte de esta inestabilidad de ondas propagándose hacia atrás, se cree que desempeña un papel importante papel en el desarrollo de turbulencia Alfvénica en el viento solar (ver [Hollweg, 1994]). El análisis de estos autores se basó en obtener la relación de dispersión linealizada $\omega = \omega(k)$ con un modelo MHD de un fluido, es decir, suponiendo que el plasma se compone de electrones y iones pero en donde la inercia de los primeros se desprecia, obteniendo resultados válidos para el rango de frecuencias mucho menores que las frecuencias ciclotrónica (1.31) de iones y electrones $\omega \ll \Omega_i, |\Omega_e|$. Además, se restringieron al caso en que la velocidad de las ondas acústicas es mucho menor que la velocidad de Alfvén: $\beta = c_s^2/V_A^2 \ll 1$ (ver (1.37)). Es con el mismo modelo de un fluido, pero no restringido a β pequeño, que en 1978 los trabajos [Goldstein, 1978] [Derby, 1978] estudiaron otro tipo de acople denominado inestabilidad *modulacional*, en donde la onda pump de Alfvén involucra cuatro ondas: una de sonido (con frecuencia ω y propagándose hacia adelante) y dos ondas de Alfvén (una dirigida hacia adelante y la otra hacia atrás) cuyas frecuencias están en la banda lateral $\omega \pm \omega_0$ (cercasas a las de la onda pump, dado que se cumple $\omega \ll \omega_0$), y con un rango de k extendido hasta 0, es decir, con una longitud de onda muy larga. Cabe destacar que estas ondas hijas son cuasimodos, reduciéndose a simples modos MHD en el límite de $\beta \rightarrow 0$ y recuperándose los resultados del decaimiento paramétrico.

En los años posteriores se continuó estudiando ambas inestabilidades desde el punto de vista de la teoría de fluidos, añadiendo suposiciones más realistas para el modelamiento del plasma en el viento solar conforme las capacidades de cálculo computacional se fueron incrementando. Es en este contexto que el artículo [Sakai and Sonnerup, 1983] realizó un análisis de dos fluidos (también conocido como teoría Hall-MHD) que permitía valores del parámetro β arbitrarios además de incluir, a través de un término Hall en la ecuación de momentum, efectos de frecuencia comparables a la ciclotrónica de iones $\omega \sim \Omega_i$ (pero aún mucho menor que la frecuencia ciclotrónica de electrones $\omega \ll |\Omega_e|$), lo que introduce los así llamados efectos dispersivos en las ondas al inducir que las características de las inestabilidades generadas sean altamente dependientes del sentido de polarización circular de la onda pump, una distinción antes inexistente. Esto se debe a que ahora entran en juego efectos de resonancia que dependen de la carga de las partículas de las que se compone un plasma, así por ejemplo, una onda izquierda entrará en resonancia con iones que poseen carga Ze a la frecuencia ciclotrónica Ω_i . Sin embargo, su análisis se restringió al estudio de inestabilidades modulacionales en donde los efectos dispersivos causados por la onda pump son débiles, $k \ll k_0$ y $\omega \ll \omega_0$. Estas restricciones fueron eliminadas, en parte por [Longtin and Sonnerup, 1986], y más completamente por [Wong and Goldstein, 1986] al permitir efectos dispersivos finitos, con lo que se pudo describir de manera unificada ambos tipos de inestabilidades *decay* y modulacional sobre un amplio rango de parámetros, además de descubrir un nuevo tipo de inestabilidad en un rango muy estrecho de valores de k en torno a $\beta \sim 1$ denominada de batido (*beat*). Esta inestabilidad ya había sido encontrada en un contexto de interacciones láser-plasma en [Forslund et al., 1972]. Extensivos estudios analíticos y numéricos de los rangos en que estas inestabilidades paramétricas -dependientes del sentido de polarización de la onda, del parámetro β y de la amplitud de la onda pump- pueden desarrollarse, fueron efectuados en [Hollweg, 1994] usando también la misma teoría Hall-MHD.

Etapa 2: Teoría Cinética y Simulaciones

En general, las inestabilidades producidas por la onda pump son más importantes (su tasa de crecimiento γ es mayor) cuanto menor sea el parámetro β , que es precisamente el rango en el cual la teoría de fluidos posee mayor validez. Sin embargo, en el viento solar $\beta \sim 1$, indicando que los efectos térmicos son importantes y

³La *cross-helicity* h_c es una cantidad cuadrática conservada en las ecuaciones MHD de un fluido ideal y resistiva. Se define por $\frac{\partial h_c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{v} \cdot \vec{B} dV$

comparables a los magnéticos, dejando de ser válida la suposición de plasma frío presente en los modelos MHD antes descritos y requiriendo para su correcta descripción un modelo cinético que tome en cuenta la distribución de velocidades de las partículas. Es natural esperar que las predicciones de fluidos para el comportamiento de las inestabilidades mencionadas se alteren dramáticamente, lo que tendría importantes consecuencias relacionadas con la propagación de ondas de Alfvén en el ambiente interplanetario del Sistema Solar. Debido a las dificultades tanto analíticas como computacionales que requiere un análisis completamente cinético usando la ecuación de Vlasov, el modelamiento con esta teoría se ha desarrollado más lentamente que con fluidos. Los primeros intentos fueron desarrollados en [Lee and Kaw, 1972], cuyos autores utilizaron la usual integración de la función de distribución de equilibrio en torno a las características (recordar discusión posterior a (1.17)), aunque considerando correcciones de orden bajo ($k \gg k_0$) que hacen el tratamiento válido sólo para amplitudes moderadas de esta onda madre. Este modelo fue aplicado en Ling y [Abraham-Shrauner and Feldman, 1977] para estimar tasas de crecimiento de las inestabilidades.

Los trabajos anteriores fueron extendidos a principios de la década de los 90' en [Inhester, 1990], quien usó una descripción intermedia entre MHD y la formulación de Vlasov conocida como teoría drift-cinética, aplicable para amplitudes arbitrarias de la onda pump pero, por otra parte, restringida a longitudes de onda grandes de la misma y a frecuencias muy por debajo de la ión-ciclotrón $\omega \ll \Omega_i$. Esto tiene como consecuencia despreciar los efectos dispersivos y excluir de su descripción las inestabilidades modulacionales y la beat. Los efectos cinéticos aquí presentes incluyen el amortiguamiento Landau (sección 1.3.1), manifestándose principalmente a través de la energía térmica de iones dada por β_p , que afecta a la inestabilidad decay reduciendo su tasa de crecimiento γ y ensanchando el rango de números de onda k en que se presenta en comparación con la teoría de fluidos. Este comportamiento fue avalado por los resultados de simulaciones efectuadas en [Terasawa et al., 1986] y [Vasquez, 1995]. Otras investigaciones que complementan la anterior fueron realizadas en [Mjølhus and Wyller, 1988] y [Spangler, 1989], quienes usaron un modelo de fluidos caracterizado por una ecuación DNLS (*Derivative Non Linear Schrödinger equation*) cinética, que permite estudiar la inestabilidad modulacional pero no la decay. Ellos mostraron que la primera es independiente de β y del modo de polarización del plasma.

Es en este ámbito que en el trabajo de [Araneda et al., 2007] (basado en [Araneda, 1998]) se diseña un método que consiste en incluir en las ecuaciones Hall-MHD un tratamiento completamente cinético para obtener la relación entre presión P y densidad ρ , en vez de suponer una ecuación de estado politrópica como es estándar en dicho modelo. Así se logra incorporar el amortiguamiento Landau (en la dirección longitud), pero a diferencia del utilizado por Inhester, este modelo permite además la descripción de los tres tipos de inestabilidades mencionadas al posibilitar el análisis de frecuencias del orden de Ω_i (incorporando el término Hall dispersivo), siendo por tanto capaz de modelar cinéticamente efectos resonantes de ondas con partículas que es una de las situaciones en donde la teoría de fluidos es completamente inadecuada. Como resultado, ellos notaron que los efectos cinéticos son importantes no sólo en el rango esperado de $\beta \sim 1$, sino que también para β_p pequeño, conduciendo a un desfase entre la presión del plasma y las fluctuaciones de densidad. Además, ellos encontraron que la inestabilidad beat, a pesar de ver reducida su tasa de crecimiento γ para β_p grande, es capaz de excitar eficientemente ondas de Alfvén propagándose hacia atrás, lo que de acuerdo a la discusión anterior tendría un importante rol para el entendimiento de los procesos de transferencia de energía que ocurren en el viento solar que han sido observados.

Sin embargo, las simulaciones efectuadas en el artículo anterior (que incorporan muchos otros fenómenos no incluidos en los modelos analíticos) discrepan un tanto en cuanto a las tasas de crecimiento de las inestabilidades que predice la teoría analítica híbrida de fluidos y Vlasov utilizada. Esto se debe probablemente a que en dicha teoría no se considera el amortiguamiento ión-ciclotrón (ver sección (1.3.3)), por lo que se retiene parcialmente la descripción tipo fluido en el movimiento ciclotrónico perpendicular de los iones. Dicho proceso que eventualmente afecta a las inestabilidades paramétricas podría describirse correctamente si se considera una formulación cinética más general que permita la inclusión de ambos tipos de amortiguamiento. Es precisamente en este punto que dos décadas atrás y en otro contexto, el artículo de [Matsuda, 1986] desarrolla una relación de dispersión no lineal completamente cinética que incluye ambos efectos para un sistema orientado a la descripción de interacciones de ondas electromagnética de alta frecuencia, como las presentes en láseres de alta potencia en plasmas de laboratorio destinados a la fusión nuclear. Él extendió el trabajo mencionado [Lee and Kaw, 1972] para incluir amplitudes finitas de la onda pump, además de ser válido para cualquier rango de frecuencia (de donde es posible considerar en particular ondas de Alfvén y estudiar los tres tipos de inestabilidades mencionadas). Debido a esto es que el punto de partida para desarrollar un modelo cinético de las inestabilidades paramétricas de ondas de Alfvén, se basará en el trabajo de Matsuda, siendo desarrollado en el capítulo 4 de

esta tesis.

2.4. Relación de dispersión: Modelo de Hollweg

Por su importancia como base de la teoría que se intentará extender en esta tesis, en esta sección se discutirá la derivación de relación de dispersión obtenida por [Hollweg, 1994] para un plasma electrón-protón en donde la onda pump sea una onda de Alfvén ión-ciclotrón de propagación paralela, en el marco de la teoría de dos fluidos.

2.4.1. Método perturbativo: Relaciones básicas

Las suposiciones básicas para derivar de este resultado son las mismas utilizadas para la obtención de la relación de dispersión (1.95) de la onda de Alfvén ión-ciclotrón de amplitud finita en la subsección 1.5.2. De hecho, el estado de equilibrio (orden 0) del plasma electrón-protón se considerará como áquel en el que existe un campo magnético estático $\vec{B}_s = B_s \hat{z}$ y la onda antes mencionada. De este modo, las perturbaciones infinitesimales de las siguientes cantidades físicas (denotadas con subíndice 1), serán:

$$\vec{V}(z, t) = \vec{V}_0 + \vec{V}_1(z, t) \quad (2.2)$$

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 + \vec{E}_1(z, t) \quad (2.3)$$

$$\vec{B}(z, t) = \vec{B}_0 + \vec{B}_s + \vec{B}_1(z, t) \quad (2.4)$$

$$n_j(z, t) = n_{0j} + n_{1j}(z, t) \quad (2.5)$$

$$P_j(z, t) = P_{0j} + P_{1j}(z, t) \quad (2.6)$$

Además, definiendo la frecuencia y número de onda según el teorema de Floquet en la forma (B.4), se tiene que los campos longitudinales satisfarán la siguiente expansión de Fourier del mismo tipo de (B.3):

$$V_{1j}^z(z, t) = \sum_l \tilde{V}_{1j,l}^z(k, \omega) e^{i(\omega_l t - k_l z)} \quad (2.7)$$

$$E_1^z(z, t) = \sum_l \tilde{E}_{1,l}^z(k, \omega) e^{i(\omega_l t - k_l z)} \quad (2.8)$$

$$n_{1j}(z, t) = \sum_l \tilde{n}_{1j,l}(k, \omega) e^{i(\omega_l t - k_l z)} \quad (2.9)$$

$$P_{1j}(z, t) = \sum_l \tilde{P}_{1j,l}(k, \omega) e^{i(\omega_l t - k_l z)} \quad (2.10)$$

y, definiendo para la suma de componentes perpendiculares a la dirección de propagación la cantidades complejas:

$$V_1^\pm = V_1^x \pm V_1^y, \quad E_1^\pm = E_1^x \pm E_1^y, \quad B_1^\pm = B_1^x \pm B_1^y \quad (2.11)$$

se tiene para los campos transversales:

$$V_{1j}^\pm(z, t) = \sum_l \tilde{V}_{1j,l}^\pm(k, \omega) e^{i(\omega_l t - k_l z)} \quad (2.12)$$

$$E_1^\pm(z, t) = \sum_l \tilde{E}_{1,l}^\pm(k, \omega) e^{i(\omega_l t - k_l z)} \quad (2.13)$$

$$B_1^\pm(z, t) = \sum_l \tilde{B}_{1,l}^\pm(k, \omega) e^{i(\omega_l t - k_l z)} \quad (2.14)$$

El objetivo es reemplazar todas estas definiciones en las ecuaciones de Maxwell y de fluido, de modo de despreciar cantidades perturbadas (subíndice 1) a segundo orden, proceso denominado *linealización*.

Ec. de continuidad y relación longitudinal

Por cada especie j , se puede linealizar la ecuación de continuidad (1.19) mediante las definiciones anteriores:

$$\frac{\partial n_{1j}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(n_{0j} V_{1j}^z) = 0 \quad (2.15)$$

Reemplazando la dependencia explícita, se tiene la siguiente igualdad para cada coeficiente l-ésimo de Fourier:

$$\tilde{n}_{1j,l} = n_{0j} \frac{k_l}{\omega_l} \tilde{V}_{1j,l}^z \quad (2.16)$$

Por la condición de cuasineutralidad (1.63) aplicada en este caso, las densidades numéricas de protones y electrones deben ser iguales, tanto en equilibrio como para los coeficientes de Fourier de las densidades perturbadas, por lo que las velocidades macroscópicas longitudinales para cada especie serán iguales:

$$\tilde{V}_{1,l}^z := \tilde{V}_{1e,l}^z = \tilde{V}_{1p,l}^z \quad (2.17)$$

de modo que:

$$\tilde{n}_{1,l} = n_0 \frac{k_l}{\omega_l} \tilde{V}_{1,l}^z \quad (2.18)$$

Ec. de estado

Linealizando la ecuación de estado (1.23), se tiene:

$$\frac{\partial P_{1j}}{\partial z} = \frac{\gamma_j P_{0j}}{n_0} \frac{\partial n_{1j}}{\partial z} \quad (2.19)$$

Reemplazando las definiciones explícitas, y usando (1.21), se encuentra para el coeficiente de Fourier l :

$$\tilde{P}_{1j,l} = \gamma_j k_B T_j \tilde{n}_{1j,l} = m_j c_{sj}^2 \tilde{n}_{1j,l} \quad (2.20)$$

Alternativamente, de 2.18, se tiene la relación:

$$\tilde{P}_{1j,l} = \gamma_j n_{0j} k_B T_j \frac{k_l}{\omega_l} \tilde{V}_{1j,l}^z = m_j n_{0j} c_{sj}^2 \frac{k_l}{\omega_l} \tilde{V}_{1j,l}^z \quad (2.21)$$

Ec. de Faraday y relación transversal

Reemplazando las definiciones de cantidades linealizadas en la ecuación de Faraday (1.3) se obtiene una relación análoga a (1.77) entre los campos eléctrico y magnético transversales, de manera que por cada coeficiente l-ésimo:

$$\tilde{E}_{1,l}^\pm = \mp i \frac{\omega_l}{k_l} \tilde{B}_{1,l}^\pm \quad (2.22)$$

Ley de Gauss para el campo magnético

Es importantes notar que, aplicando transformada de Fourier a la ley de Gauss para el campo magnético (1.2), se tendrá:

$$ik_l \tilde{B}_{1,l}^z = 0 \quad (2.23)$$

y así, la componente z del campo magnético perturbado será nula: $\tilde{B}_{1,l}^z = 0$.

2.4.2. Ecuación de momentum

Linealizando la ecuación de momentum (1.20) con las definiciones anteriores para cada especie del plasma, y usando la forma explícita de la derivada convectiva, se tiene:

$$\frac{\partial \vec{V}_{1j}}{\partial t} + V_{1j}^z \frac{\partial \vec{V}_{0j}}{\partial z} = \frac{q_j}{m_j} \left[\vec{E}_1 + \vec{V}_{0j} \times \vec{B}_1 + \vec{V}_{1j} \times (\vec{B}_0 + \vec{B}_s) \right] - \frac{1}{n_{0j} m_j} \frac{\partial P_{1j}}{\partial z} \hat{z} \quad (2.24)$$

Componentes transversales

Para las componentes transversales, recordando que por $B_{1z} = 0$ el término $\vec{V}_{0j} \times \vec{B}_1$ no contribuye, se tiene:

$$X : \quad \frac{\partial V_{1j}^x}{\partial t} + V_{1j}^z \frac{\partial V_0^x}{\partial z} = \frac{q_j}{m_j} (E_1^x + V_{1j}^y B_s - V_{1j}^z B_0^y) \quad (2.25)$$

$$Y : \quad \frac{\partial V_{1j}^y}{\partial t} + V_{1j}^z \frac{\partial V_0^y}{\partial z} = \frac{q_j}{m_j} (E_1^y + V_{1j}^z B_0^x - V_1^x B_s) \quad (2.26)$$

Sumando (Ec X) $\pm i$ (Ec Y) y recordando (2.17) además de definiciones transversales (2.11), se tiene:

$$\frac{\partial V_{1j}^\pm}{\partial t} \pm i\Omega_j V_{1j}^\pm = \frac{q_j}{m_j} E_1^\pm + V_{1j}^z \left(\pm i \frac{q_j}{m_j} B_0^\pm - \frac{\partial V_{0j}^\pm}{\partial z} \right) \quad (2.27)$$

Aplicando las dependencias explícitas espacio-temporales para todas las cantidades y las relaciones (1.84) y (1.84), se tiene la siguiente ecuación de coeficientes de Fourier:

$$i \sum_l (\omega_l \pm \Omega_j) \tilde{V}_{1j,l}^\pm e^{i(\omega_l t - k_l z)} = \frac{q_j}{m_j} \sum_l \left(\mp i \frac{\omega_l}{k_l} \tilde{B}_{1,l}^\pm \right) e^{i(\omega_l t - k_l z)} \quad (2.28)$$

$$+ \sum_l \tilde{V}_{1,l}^z e^{i(\omega_{l\mp 1} t - k_{l\mp 1} z)} \left(\pm i \frac{q_j B_0}{m_j} \mp (ik_0) \frac{\omega_0/k_0}{1 - \frac{\omega_0}{\Omega_j}} \left(-\frac{B_0}{B_s} \right) \right) \quad (2.29)$$

en donde se ha usado, a partir de su definición (B.4):

$$\omega_l \pm \omega_0 = \omega_\alpha + l\omega_0 \pm \omega_0 = \omega_j + (l \pm 1)\omega_0 = \omega_{l\pm 1} \quad (2.30)$$

$$k_l \pm k_0 = k_\alpha + lk_0 \pm k_0 = k_j + (l \pm 1)k_0 = k_{l\pm 1} \quad (2.31)$$

Estas representan las bandas laterales superior en inferior, respectivamente, en relación a una cierta frecuencia ω_l y número de onda k_l tal como en B.5 y B.6. Luego, si χ_l es una cantidad genérica, entonces es posible notar lo siguiente:

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_l t - k_l z)} e^{\pm i(k_0 z - \omega_0 t)} \chi_l = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_{l\mp 1} t - k_{l\mp 1} z)} \chi_l = \sum_{l'=-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_{l'} t - k_{l'} z)} \chi_{l'\pm 1} \quad (2.32)$$

en donde se ha cambiado a la variable $l' = l \mp 1$ (los límites de integración no cambian porque son infinitos). Renombrando $l' = l$, se tendrá la relación útil para muchas simplificaciones posteriores:

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_l t - k_l z)} e^{\pm i(k_0 z - \omega_0 t)} \chi_l = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_l t - k_l z)} \chi_{l\pm 1} \quad (2.33)$$

Mediante ello, se obtiene una ecuación para cada coeficiente l -ésimo de Fourier factorizando $e^{i(\omega_l t - k_l z)}$:

$$i(\omega_l \pm \Omega_j) \tilde{V}_{1j,l}^\pm = \mp i\Omega_j \frac{\omega_l}{k_l} \frac{\tilde{B}_{1,l}^\pm}{B_s} \pm i\tilde{V}_{1,l\pm 1}^z \left(\Omega_j + \frac{\omega_0}{1 - \frac{\omega_0}{\Omega_j}} \right) \left(\frac{B_0}{B_s} \right) \quad (2.34)$$

y así, la velocidad transversal perturbada de la especie j será:

$$\tilde{V}_{1j,l}^\pm = \frac{1}{1 \pm \frac{\omega_l}{\Omega_j}} \left[-\frac{\omega_l}{k_l} \frac{\tilde{B}_{1,l}^\pm}{B_s} + \frac{B_0}{B_s} \frac{1}{1 - \frac{\omega_0}{\Omega_j}} \tilde{V}_{1,l\pm 1}^z \right] \quad (2.35)$$

En las aplicaciones posteriores, se ocupará el coeficiente $l \mp 1$ de esta relación, obteniendo para los protones:

$$\tilde{V}_{1p,l\mp 1}^\pm = \frac{1}{1 \pm \frac{\omega_{l\mp 1}}{\Omega_p}} \left[-\frac{\omega_{l\mp 1}}{k_{l\mp 1}} \frac{\tilde{B}_{1,l\mp 1}^\pm}{B_s} + \frac{B_0}{B_s} \frac{1}{1 - \frac{\omega_0}{\Omega_j}} \tilde{V}_{1,l}^z \right] \quad (2.36)$$

y para los electrones de masa nula, al considerar $1/\Omega_e \rightarrow 0$:

$$\tilde{V}_{1e,l\mp 1}^\pm = -\frac{\omega_{l\mp 1}}{k_{l\mp 1}} \frac{\tilde{B}_{1,l\mp 1}^\pm}{B_s} + \frac{B_0}{B_s} \tilde{V}_{1,l}^z \quad (2.37)$$

Una relación útil a continuación será la diferencia de velocidades transversales, pues:

$$\left(\tilde{V}_{1j,l-1}^+ - \tilde{V}_{1j,l+1}^- \right) = \frac{-1}{1 + \frac{\omega_{l-1}}{\Omega_j}} \frac{\omega_{l-1}}{k_{l-1}} \frac{\tilde{B}_{1,l-1}^+}{B_s} + \frac{1}{1 - \frac{\omega_{l+1}}{\Omega_j}} \frac{\omega_{l+1}}{k_{l+1}} \frac{\tilde{B}_{1,l+1}^-}{B_s} + \left(\frac{1}{1 + \frac{\omega_{l-1}}{\Omega_j}} - \frac{1}{1 - \frac{\omega_{l+1}}{\Omega_j}} \right) \frac{B_0/B_s}{1 - \frac{\omega_0}{\Omega_j}} \tilde{V}_{1,l}^z \quad (2.38)$$

Componente paralela

Por otra parte, la linealización de la componente \hat{z} de ecuación de momentum (1.20), recordando (2.17) y (1.63), será:

$$\frac{\partial V_1^z}{\partial t} = \frac{q_j}{m_j} (E_1^z + V_{0j}^x B_1^y - V_{0j}^y B_1^x + V_{1j}^x B_0^y - V_{1j}^y B_0^x) - \frac{1}{n_0 m_j} \frac{\partial P_{1j}}{\partial z} \quad (2.39)$$

Invirtiendo las definiciones complejas (2.11), se puede expresar lo anterior en la forma:

$$\frac{\partial V_1^z}{\partial t} = \frac{q_j}{m_j} \left[E_1^z + \frac{i}{2} (V_{0j}^+ B_1^- - V_{0j}^- B_1^+ + V_{1j}^+ B_0^- - V_{1j}^- B_0^+) \right] - \frac{1}{n_0 m_j} \frac{\partial P_{1j}}{\partial z} \quad (2.40)$$

Reemplazando la descomposición explícita de cada cantidad:

$$\sum_l i\omega_l \tilde{V}_{1,l}^z e^{i(\omega_l t - k_l z)} = \frac{q_j}{m_j} \left[\sum_l \tilde{E}_{1,l}^z e^{i(\omega_l t - k_l z)} + \frac{i}{2} \sum_l e^{i(\omega_l t - k_l z)} \left(\tilde{V}_{0j}^\perp e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \tilde{B}_{1,l}^- - \tilde{V}_{0j}^\perp e^{-i(k_0 z - \omega_0 t)} \tilde{B}_{1,l}^+ \right. \right. \quad (2.41)$$

$$\left. \left. + \tilde{V}_{1j,l-1}^+ B_0 e^{-i(k_0 z - \omega_0 t)} - \tilde{V}_{1j,l}^- B_0 e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \right) \right] - \frac{1}{n_0 m_j} \sum_l (-ik_l) \tilde{P}_{1j,l} e^{i(\omega_l t - k_l z)} \quad (2.42)$$

y, usando (2.33), se llega a una expresión para cada coeficiente de Fourier l factorizando $e^{i(\omega_l t - k_l z)}$:

$$i\omega_l \tilde{V}_{1,l}^z = \frac{q_j}{m_j} \left[\tilde{E}_{1,l}^z - \frac{iB_0}{2B_s} \frac{\omega_0/k_0}{1 - \frac{\omega_0}{\Omega_j}} \left(\tilde{B}_{1,l+1}^- - \tilde{B}_{1,l-1}^+ \right) + \frac{iB_0}{2} \left(\tilde{V}_{1j,l-1}^+ - \tilde{V}_{1j,l+1}^- \right) \right] + \frac{ik_l}{n_0 m_j} \tilde{P}_{1j,l} \quad (2.43)$$

en donde se ha dejado expresado la velocidad no perturbada en términos del campo eléctrico según (1.84).

Mediante la ecuación de estado, se puede expresar la presión en términos de cantidades conocidas, por lo que:

$$\left(\frac{\omega_l}{\Omega_j} - \frac{\gamma_j k_B T_j}{q_j B_s} \frac{k_l^2}{\omega_l} \right) \tilde{V}_{1,l}^z = \frac{1}{B_s} \left[-i\tilde{E}_{1,l}^z - \frac{\omega_0/k_0}{1 - \frac{\omega_0}{\Omega_j}} \frac{B_0}{2B_s} \left(\tilde{B}_{1,l+1}^- - \tilde{B}_{1,l-1}^+ \right) + \frac{B_0}{2} \left(\tilde{V}_{1j,l-1}^+ - \tilde{V}_{1j,l+1}^- \right) \right] \quad (2.44)$$

Notemos también que el segundo paréntesis redondo del lado derecho se puede simplificar en virtud de (2.38) y de este modo, al reemplazar y recolectar términos semejantes en las variables $\tilde{V}_{1j,l}^z$ y $\tilde{B}_{1,l+1}^-$, se tendrá:

$$\left\{ -\frac{\gamma_j k_B T_j}{q_j B_s} \frac{k_l^2}{\omega_l} + \frac{\omega_l}{\Omega_j} \left[1 + \frac{(B_0/B_s)^2}{\left(1 - \frac{\omega_0}{\Omega_j}\right) \left(1 + \frac{\omega_{l-1}}{\Omega_j}\right) \left(1 - \frac{\omega_{l+1}}{\Omega_j}\right)} \right] \right\} \tilde{V}_{1,l}^z = -i \frac{\tilde{E}_{1,l}^z}{B_s} \quad (2.45)$$

$$+ \tilde{B}_{1,l+1}^- \frac{B_0}{2B_s^2} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{\omega_{l+1}}{\Omega_j}} \frac{\omega_{l+1}}{k_{l+1}} - \frac{1}{1 - \frac{\omega_0}{\Omega_j}} \frac{\omega_0}{k_0} \right\} - \tilde{B}_{1,l-1}^+ \frac{B_0}{2B_s^2} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{\omega_{l-1}}{\Omega_j}} \frac{\omega_{l-1}}{k_{l-1}} - \frac{1}{1 - \frac{\omega_0}{\Omega_j}} \frac{\omega_0}{k_0} \right\} \quad (2.46)$$

Eliminación de variables electrónicas

Especializando lo anterior para el caso de electrones $j = e$ (con $1/\Omega_e \rightarrow 0$), el paréntesis cuadrado en el lado izquierdo y todos los denominadores tienden a 1, de modo que es posible despejar el campo eléctrico longitudinal en función de variables conocidas:

$$-i \frac{\tilde{E}_{1,l}^z}{B_s} = \frac{\gamma_e k_B T_e}{e B_s} \frac{k_l^2}{\omega_l} \tilde{V}_{1,l}^z - \tilde{B}_{1,l+1}^- \frac{B_0}{2B_s^2} \left\{ \frac{\omega_{l+1}}{k_{l+1}} - \frac{\omega_0}{k_0} \right\} + \tilde{B}_{1,l-1}^+ \frac{B_0}{2B_s^2} \left\{ \frac{\omega_{l-1}}{k_{l-1}} - \frac{\omega_0}{k_0} \right\} \quad (2.47)$$

De este modo, reemplazando lo anterior en (2.46) para el caso de protones, podemos eliminar el campo eléctrico longitudinal y las variables de los electrones, obteniendo una relación entre $\tilde{V}_{1,l}^z$ y $\tilde{B}_{1,l\mp 1}^\pm$:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{1,l}^z & \left\{ \left(\omega_l - \frac{(\gamma_p k_B T_p + \gamma_e k_B T_e) k_l^2}{m_p \omega_l} \right) \frac{2m_p}{e B_0} - \frac{B_0/B_s}{\frac{1}{\Omega_p} \left(1 - \frac{\omega_0}{\Omega_p} \right)} \left[\frac{1}{\omega_{l-1} + \Omega_p} + \frac{1}{\omega_{l+1} - \Omega_p} \right] \right\} \\ & = \tilde{B}_{1,l+1}^- \left\{ -\frac{1}{B_s} \left(\frac{\omega_{l+1}}{k_{l+1}} - \frac{\omega_0}{k_0} \right) - \frac{1}{B_s \left(1 - \frac{\omega_0}{\Omega_p} \right)} \frac{\omega_0}{k_0} - \frac{e}{m_p} \frac{1}{\omega_{l+1} - \Omega_p} \frac{\omega_{l+1}}{k_{l+1}} \right\} \\ & + \tilde{B}_{1,l-1}^+ \left\{ \frac{1}{B_s} \left(\frac{\omega_{l-1}}{k_{l-1}} - \frac{\omega_0}{k_0} \right) + \frac{1}{B_s \left(1 - \frac{\omega_0}{\Omega_p} \right)} \frac{\omega_0}{k_0} - \frac{e}{m_p} \frac{1}{\omega_{l-1} + \Omega_p} \frac{\omega_{l-1}}{k_{l-1}} \right\} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Ahora debemos notar que, por el teorema de Floquet discutido en la sección B.4 y debido a que existe un acople entre los coeficientes de Fourier l con $l \pm 1$, se puede definir la frecuencia ω y número de onda k fijando $l = 0$ en la forma dada en (B.5) y (B.6). Luego, usando las normalizaciones de F.1, se puede obtener de la ecuación de momentum paralela (2.48) la siguiente relación:

$$\boxed{\frac{\tilde{V}_{1,l}^z}{V_A} = \frac{B_+ \tilde{B}_{1,l+1}^- + B_- \tilde{B}_{1,l-1}^+}{2DB_0}} \quad (2.49)$$

2.4.3. Ecuación de Ampère

Linealizando las componentes transversales⁴ de la ecuación de Ampère (1.5), y usando las formas explícitas de los campos, se tiene:

$$\pm i \frac{\partial B_{1\pm}}{\partial z} = \mu_0 \sum_j J_{1\pm j} = \mu_0 \sum_j q_j (n_{0j} V_{1\pm j, l} + n_{1j} V_{0\pm j}) \quad (2.51)$$

$$\pm i \sum_l (-ik_l) \tilde{B}_{1\pm, l} e^{i(\omega_l t - k_l z)} = \mu_0 \sum_j q_j \left(n_0 \sum_l \tilde{V}_{1j, l}^\pm e^{i(\omega_l t - k_l z)} + \sum_l \tilde{n}_{1, l} e^{i(\omega_l t - k_l z)} \tilde{V}_{0j}^\pm e^{\pm i(k_0 z - \omega_0 t)} \right) \quad (2.52)$$

$$\pm k_{l\mp 1} \tilde{B}_{1\pm, l\mp 1} = \mu_0 \sum_j q_j \left(n_0 \tilde{V}_{1\pm j, l\mp 1} + \tilde{n}_{1, l} \tilde{V}_{0j}^\pm \right) = \mu_0 \sum_j \tilde{J}_{1j, l\mp 1}^\pm \quad (2.53)$$

en donde se ha usado (2.33) para simplificar la segunda sumatoria en l del lado derecho y se ha escogido el coeficiente de Fourier $l \mp 1$. Ahora se debe notar que las corrientes perturbadas se obtienen reemplazando las velocidades transversales (2.36) para $\tilde{V}_{1j, l\mp 1}^\pm$, (2.18) para $\tilde{n}_{1j, l}$, y también (1.84) para \tilde{V}_{0j}^\pm , de donde:

$$\tilde{J}_{1j, l\mp 1}^\pm = \frac{q_j n_0}{B_s} \left\{ \tilde{B}_{1, l\mp 1}^\pm \left[\frac{-1}{1 \pm \frac{\omega_{l\mp 1}}{\Omega_j}} \frac{\omega_{l\mp 1}}{k_{l\mp 1}} \right] + \tilde{V}_{1, l}^z \frac{B_0}{1 - \frac{\omega_0}{\Omega_j}} \left[\frac{1}{1 \pm \frac{\omega_{l\mp 1}}{\Omega_j}} - \frac{k_l \omega_0}{k_0 \omega_l} \right] \right\} \quad (2.54)$$

⁴ La componente longitudinal de la ecuación de Ampère linealizada da lugar a la relación:

$$\sum_j J_{1j}^z = en_0 \sum_j V_{1e}^z - V_{1p}^z = 0 \quad (2.50)$$

que proporciona la misma condición (2.17) encontrada con la ecuación de continuidad.

Usando las normalizaciones previas, se tiene que en el caso de protones,

$$\tilde{J}_{1p,l\mp 1}^{\pm} = \frac{en_0V_A B_0}{B_s} \left[\frac{-1}{1 \pm X_{l\mp 1}} \frac{X_{l\mp 1}}{Y_{l\mp 1}} \frac{\tilde{B}_{1,l\mp 1}^{\pm}}{B_0} + \left(\frac{1}{1 \pm X_{l\mp 1}} - \frac{Y_l X_0}{Y_0 X_l} \right) \frac{1}{1 - X_0} \frac{\tilde{V}_{1,l}^z}{V_A} \right] \quad (2.55)$$

mientras que para electrones se usa el límite acostumbrado $1/\Omega_e \rightarrow 0$, obteniendo:

$$\tilde{J}_{1e,l\mp 1}^{\pm} = -\frac{en_0V_A B_0}{B_s} \left[-\frac{X_{l\mp 1}}{Y_{l\mp 1}} \frac{\tilde{B}_{1,l\mp 1}^{\pm}}{B_0} + \left(1 - \frac{Y_l X_0}{Y_0 X_l} \right) \frac{\tilde{V}_{1,l}^z}{V_A} \right] \quad (2.56)$$

Sumando ambas contribuciones a la corriente total y reemplazando en la ecuación de Ampère, se obtiene la relación:

$$\pm k_{l\mp 1} \tilde{B}_{1,l\mp 1}^{\pm} = \frac{B_0 \Omega_p}{V_A} \left\{ \left(\frac{\pm X_{l\mp 1}^2}{Y_{\mp} \psi_{\mp}} \right) \frac{\tilde{B}_{1,l\mp 1}^{\pm}}{B_0} - \frac{1}{\psi_0} \left(X_0 - \frac{Y_l X_0^2}{Y_0 X_l} \mp \frac{X_{l\mp 1}}{\psi_{\mp}} \right) \frac{\tilde{V}_{1,l}^z}{V_A} \right\} \quad (2.57)$$

de donde, agrupando términos semejantes y usando las definiciones de cantidades normalizadas previas, se llega a:

$$\boxed{2R_{\mp} \frac{\tilde{V}_{1,l}^z}{V_A} + L_{\mp} \frac{\tilde{B}_{1,l\mp 1}^{\pm}}{B_0} = 0} \quad (2.58)$$

2.4.4. Relación de Dispersión

Ahora se dispone de tres ecuaciones para las 3 variables $\tilde{B}_{1,l\mp 1}^{\pm}$ y $\tilde{V}_{1,l}^z$, dadas por (2.49) y (2.58). Inmediatamente es posible eliminar esta última incógnita reemplazando la primera ecuación en la segunda, de modo que:

$$2R_{\mp} \frac{B_+ \tilde{B}_{1,l+1}^- + B_- \tilde{B}_{1,l-1}^+}{2DB_0} + L_{\mp} \frac{\tilde{B}_{1,l\mp 1}^{\pm}}{B_0} = 0 \quad (2.59)$$

Así, se obtiene un sistema de dos ecuaciones, cuyas soluciones no triviales requieren que el siguiente determinante sea nulo:

$$\begin{vmatrix} R_- B_+ & R_- B_- + DL_- \\ R_+ B_+ + DL_+ & R_+ B_- \end{vmatrix} = 0 \quad (2.60)$$

De donde se obtiene finalmente la relación de dispersión

$$\boxed{L_- (L_+ D + R_+ B_+) + L_+ R_- B_- = 0} \quad (2.61)$$

Esta es un polinomio de 6° grado tanto en la frecuencia X como el número de onda Y ([Hollweg, 1994]). En el caso límite en que la amplitud de la onda pump $A \rightarrow 0$, los términos B_{\pm} se anulan quedando simplemente la relación de dispersión:

$$L_- L_+ D = 0 \quad (2.62)$$

2.5. Resultados numéricos: Modelo de fluidos de Hollweg

En esta sección se presentarán, a modo de ilustración, algunos resultados numéricos para ejemplificar el comportamiento de la relación de dispersión (2.61) y las inestabilidades que predice, usando un método gráfico desarrollado por [Longtin and Sonnerup, 1986]. También servirá como base de comparación para los resultados de un plasma electrón-protón-beam mostrado posteriormente (ver capítulo 3). El procedimiento que se seguirá está inspirado en el presentado originalmente en el artículo [Hollweg, 1994].

2.5.1. Método

Nótese, en primer lugar, que los parámetros que presenta la relación de dispersión a resolver (2.61) son de dos tipos: uno global, el beta total β (ver (F.12)); y otros 3 asociados a la onda pump: su amplitud A , número de onda Y_0 y frecuencia X_0 . Estos dos últimos deberán satisfacer (1.95). Una vez fijados estos parámetros, se escoge un valor dado de número de onda Y , quedando por tanto la relación de dispersión como un polinomio de 6° grado en X . Las raíces de éste pueden ser reales, en cuyo caso se grafican directamente proporcionando 6 puntos de la relación de dispersión ω v/s k . Pero también pueden venir como pares complejos conjugados, en cuyo caso se grafica igualmente la parte real ω_r v/s k , pero además de la parte compleja γ v/s k (ver (1.49)), la cual será simétrica con respecto al eje k . Esto representa un comportamiento característico de fluidos: los modos amortiguados ($\gamma < 0$) e inestables ($\gamma > 0$) siempre se presentan de a pares con la misma magnitud de su tasa de crecimiento, mientras que su parte real coincidirá exactamente. Por ello, la rama asociada a cada uno de los modos amortiguado ó inestable no puede ser distinguida.

Digno de mención es el hecho que el punto (Y_0, X_0) siempre será solución de la relación de dispersión, puesto que allí L_- y R_- se anulan. Esto será indicado con un rombo negro en todos los gráficos de dispersión posteriores. Así mismo, también estará indicado el punto $(Y_0, X_0/Y_0)$ para las velocidades de fase.

2.5.2. Comportamiento general

Caso $A = 0$

Primero se analizará el caso límite de amplitud de la onda pump nula $A = 0$, en que la relación de dispersión se reduce a (2.62). Esto servirá para identificar los modos normales del plasma que no requieren la energía libre provista por la onda pump, puesto que sus 6 raíces (todas reales, no hay amortiguamientos ni inestabilidades) se pueden agrupar en tres conjuntos de 2 c/u:

$$D = 0 \quad \Rightarrow \quad X = \pm\sqrt{\beta}Y \quad (2.63)$$

Representan modos acústicos con relación de dispersión lineal. Una de ellas tiene velocidad de fase positiva, desplazándose en la misma dirección que la onda pump⁵, y así se denotará por $+s$. La que se desplaza en dirección contraria se denotará consiguientemente por $-s$.

$$L_+ = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_0 + Y = \pm \frac{(X_0 + X)^2}{1 - (X_0 + X)} \quad (2.64)$$

Representan ondas transversales de la banda lateral superior (*upper sideband*), al involucrar ω_+ y k_+ (ver (F.3) y (F.4)). La que se propaga hacia delante se denotará como $+f$, mientras que la que va en dirección contraria a la onda pump será $+b$.

$$L_- = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_0 - Y = \pm \frac{(X_0 - X)^2}{1 - (X_0 - X)} \quad (2.65)$$

Estas soluciones representan dos ondas transversales de la banda lateral inferior *lower sideband*, involucrando ω_- y k_- . Una de ellas se propaga hacia adelante, $-f$, y la otra hacia atrás, $-b$.

⁵Desde ahora se adoptará la siguiente convención: “hacia adelante” significará en la misma dirección que la onda pump con $\omega/k > 0$, mientras que “hacia atrás” indicará, obviamente, lo opuesto

Es fácilmente visible que las bandas laterales (soluciones de L_{\pm}) se obtienen simplemente de un desplazamiento apropiado de la relación conocida de la onda pump (1.95) (ver figura 2.4 y comparar con 1.7). Ahora se escogen apropiadamente los parámetros β , X_0 e Y_0 para que, en la posterior subsección, aparezcan las inestabilidades mencionadas (y también en base al paper [Araneda et al., 2007]). X_0 se fija primero (i.e.: con dicho valor se calcula Y_0) ya que es más fácil visualizar el efecto dispersivo involucrado a partir de la cercanía con la resonancia ciclotrónica en $X_0 = 1$. Además, X_0 e Y_0 se escogen ambos positivos para que la onda pump tenga polarización izquierda y se desplace hacia delante (primer cuadrante en la figura 2.4).

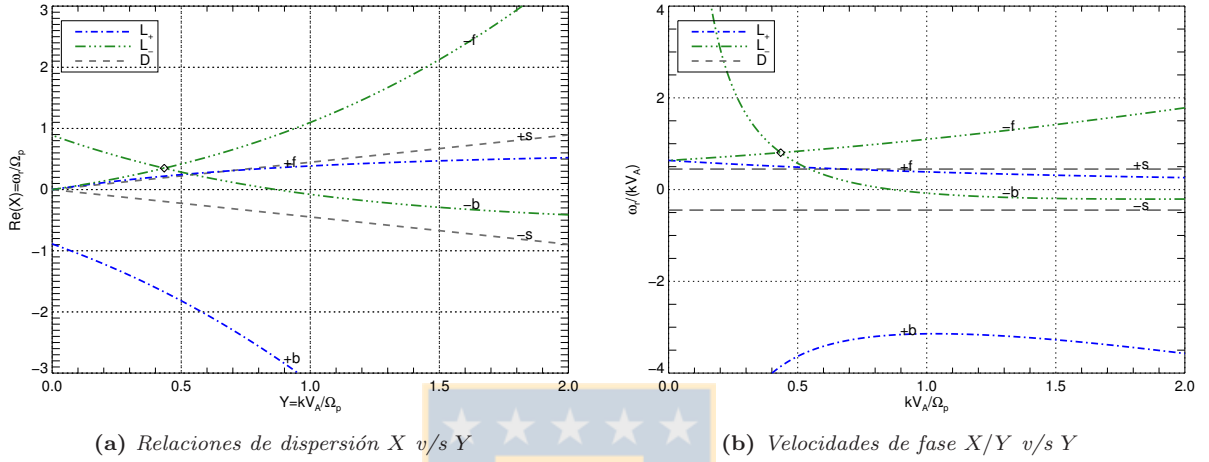


Figura 2.4: Diagramas para relación de dispersión de fluidos en el límite $A = 0$ (2.62), con $X_0 = 0.35$, $Y_0 = X_0/\sqrt{1 - X_0} = 0.434$ y $\beta = 0.2$. Cada par de soluciones de la relación de dispersión se ha identificado con el código de colores indicado. L_+ se obtiene de la onda L del 1° cuadrante y de la onda R del 2° de 1.7a, desplazando el origen a $(-Y_0, -X_0)$. Así mismo, L_- se obtiene de la onda L del 2° cuadrante y de la onda R del 1° de la misma figura mencionada, desplazando el origen a (Y_0, X_0) .

Las ondas que provienen de aquellas con polarización izquierda L de la figura 1.7a, $+f$ y $-b$, poseen resonancias en $X = \pm|1 - X_0|$ y una velocidad de fase asintótica pequeña y cercana a 0. En particular, $+f$ tiene una velocidad de fase positiva decreciente pero con muy poca variación en todo el rango mostrado, y bastante cercana a la onda acústica $+s$ que es constante. Otro rasgo peculiar es que al tener una frecuencia no nula en el origen $Y = 0$, los modos que se desplazan hacia atrás $\pm b$ tienden a una velocidad de fase infinita para longitudes de onda grandes ($k \rightarrow 0$)

Por último, cabe destacar que, aunque se ha mantenido la nomenclatura de designar la dirección de las ondas en base a las curvas de la onda pump 2.4, sus velocidades de fase ya no son un buen indicador de la dirección en que se propagan, puesto que muchas de las ondas tienen rangos en k donde ésta cambia de signo. Una cantidad que es más útil para caracterizar el sentido de propagación de las ondas es la velocidad de grupo $\partial\omega/\partial k$, ya que no cambia de signo al efectuarse la traslación para obtener las curvas de (2.4a) a partir de 1.7a, como puede verificarse a partir de la comparación de las siguientes figuras:

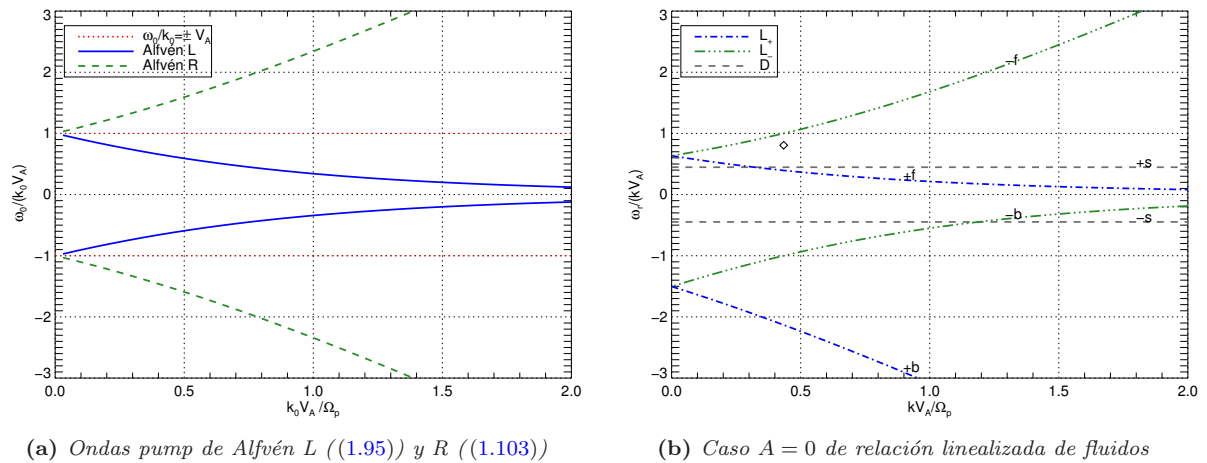


Figura 2.5: Velocidades de grupo dX/dY v/s Y para la onda pump y la relación de dispersión de fluidos con $A = 0$. Las bandas laterales que se desplazan hacia adelante $\pm f$, provenientes de las respectivas curvas L y R de la onda pump con $\partial\omega/\partial k > 0$, mantienen el signo de esta cantidad. Lo mismo sucede para las ondas que se desplazan hacia atrás $\pm b$ con $\partial\omega/\partial k < 0$.

Caso genérico

Ahora se ilustrará un caso particular con la onda pump presente efectivamente, en donde $A = 0.09$ ($B_0/B_s = 0.3$) y la relación de dispersión es (2.61), mostrando por separado las partes real e imaginaria de la frecuencia para los 6 modos previamente identificados. Precisamente para este propósito, es que en cada uno de los casos que se mostrará posteriormente (diagramas de X y X/Y v/s Y), se graficará también en líneas discontinuas las curvas de la relación de dispersión en el límite $A \rightarrow 0$, con los mismos colores de la figura 2.4a y 2.4b. Esto es necesario debido a que las ramas con $A \neq 0$ tienen múltiples brechas e intersecciones, por lo cual su identificación no es para nada simple, sólo tendiendo a las ramas conocidas del límite $A = 0$ para valores grandes de Y .

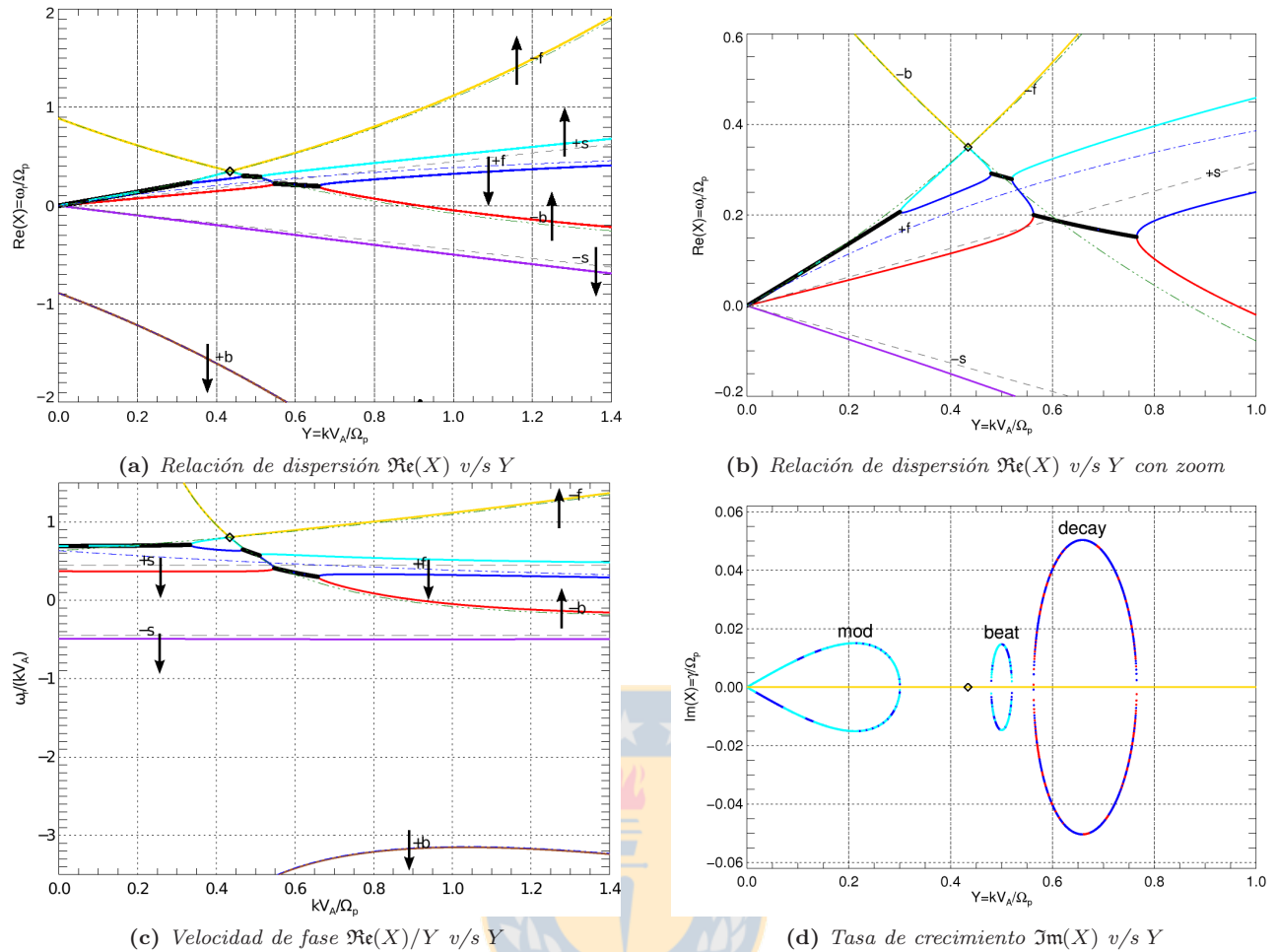


Figura 2.6: Diagramas de relación de dispersión para $A = 0.09$ y $\beta = 0.1$. Los demás parámetros son los mismos que en la figura 2.4. Cada color representa uno de los 6 modos. Las inestabilidades se indican en líneas negras, en donde la parte real de la frecuencia de dos ramas se superponen. Las direcciones hacia las cuales se desplazan las curvas (aunque sea ligeramente) con respecto al caso $A = 0$ de la figura 2.4, se muestran con flechas.

La energía libre de la onda pump provoca el surgimiento de tres tipos de inestabilidades ($\gamma > 0$) claramente identificadas y conocidas desde hace algunas décadas (ver sección 2.3.1), cuyas propiedades dentro del marco de teoría de fluidos se reseñan en [Hollweg, 1994]. Aquí cabe recalcar que éstas se producen en las zonas en donde la parte real de la frecuencia de dos curvas se fusionan (ya que el polinomio de dispersión en X posee raíces complejas y conjugadas allí), lo que implica su generación, usualmente, por la interacción entre los siguientes pares de modos (no siempre son los mismos, ver aclaración en la figura 2.11)

- Inestabilidad modulacional (*mod*): interacción entre $+f$ y $-f$. Se ubica en $k < k_0$ y se extiende hasta $k \rightarrow 0$. Como aparece debido a efectos dispersivos (ver [Longtin and Sonnerup, 1986]), se espera que posea mayores tasas de crecimiento conforme ω_0 aumente.
- Inestabilidad de decaimiento (*decay*): interacción entre $+s$ y $-b$. Es dominante en este caso y se ubica en $k > k_0$. Es la única que involucra ondas acústicas y es la que tiene menor velocidad de fase.
- Inestabilidad de batido (*beat*): interacción entre $+f$ y $-b$. Posee un rango estrecho de k y se sitúa también para $k > k_0$, aunque muy contiguo a k_0 .

Para tener una idea del orden de magnitud e importancia de estas inestabilidades, realizaremos una pequeña estimación. Las tasas de crecimiento de estas inestabilidades, como se verá para muchos otros casos, están en torno a $\gamma \approx 0.02$. Ello implica, de acuerdo a (1.50), que una onda hija duplicará su amplitud en un tiempo

equivalente a $\tau = \ln 2/\gamma \sim 34.6$ giroperiodos. Consistentemente, una amortiguación de la misma magnitud, implicará que la onda verá reducida a la mitad su amplitud en el mismo tiempo.

En vez de mostrar los diagramas anteriores para cada combinación distinta de parámetros, es (mucho) más eficiente confeccionar gráficos que muestran la variación de cada inestabilidad en función de algún parámetro dado. Para ello, se caracterizará cada inestabilidad por su tasa de crecimiento máximo γ_{max} , el número de onda en el cual se produce k_{max} y la velocidad de fase $v_{\phi,max}$ allí. Estas cantidades son representativas puesto que cada inestabilidad conserva, a grosso modo, la morfología mostrada en el gráfico previo

2.5.3. Efectos de la variación de la amplitud

Así, por ejemplo, se puede variar la amplitud A de la onda pump, notando que mientras mayor sea esta cantidad, más grande será la separación de cada rama con respecto a los modos del caso límite $A = 0$. De este modo, se obtendrá los siguientes gráficos que resumen este comportamiento:

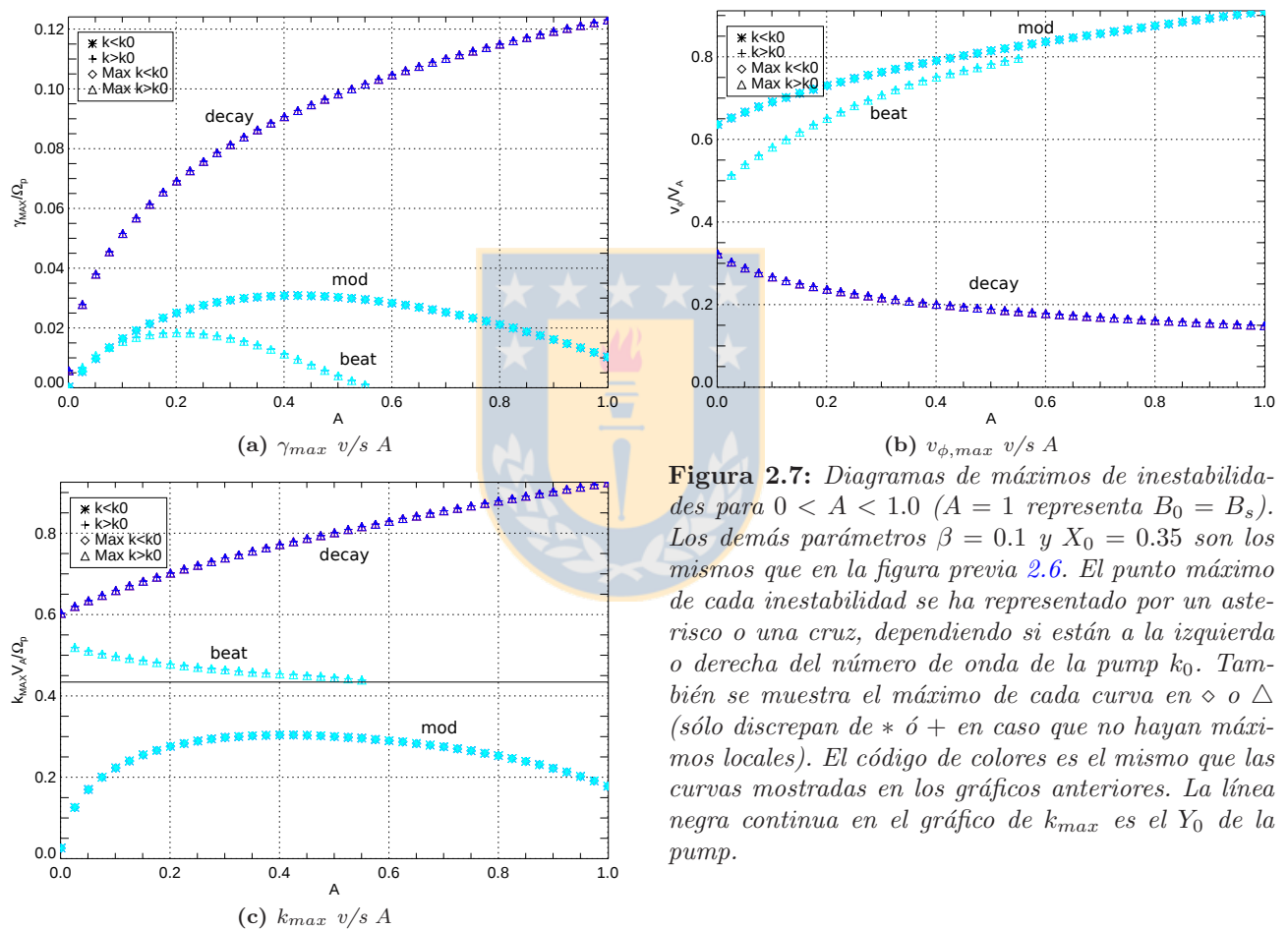


Figura 2.7: Diagramas de máximos de inestabilidades para $0 < A < 1.0$ ($A = 1$ representa $B_0 = B_s$). Los demás parámetros $\beta = 0.1$ y $X_0 = 0.35$ son los mismos que en la figura previa 2.6. El punto máximo de cada inestabilidad se ha representado por un asterisco o una cruz, dependiendo si están a la izquierda o derecha del número de onda de la pump k_0 . También se muestra el máximo de cada curva en \diamond o \triangle (sólo discrepan de \ast ó $+$ en caso que no hayan máximos locales). El código de colores es el mismo que las curvas mostradas en los gráficos anteriores. La línea negra continua en el gráfico de k_{max} es el Y_0 de la pump.

- Curvas γ_{max} v/s A : Para bajas amplitudes, se nota el incremento de las γ_{max} de las inestabilidades modulacional y beat al aumentar A , un resultado esperable debido a que este parámetro representa la fuente de energía libre de donde surgen. Ambas tienen γ_{max} similares para A pequeños, aunque para amplitudes más grandes modulacional es más importante. Sin embargo, después de una cierta amplitud máxima, sus tasas de crecimiento comienzan a disminuir hasta que ambas inestabilidades desaparecen totalmente en $A \approx 0.5$ para beat y $A \approx 1$ para modulacional (puntos denominados desde ahora *umbral de amplitud*).

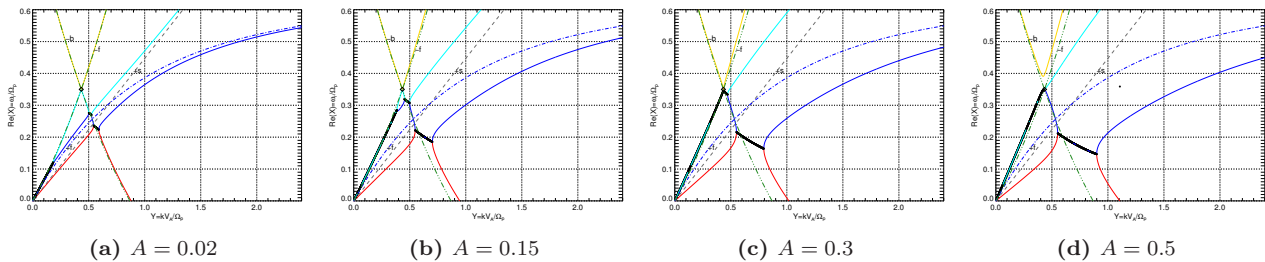


Figura 2.8: Diagramas de dispersión X v/s Y para $\beta = 0.2$, $X_0 = 0.35$ y A variable

En forma gráfica (ver diagramas anteriores ω v/s k) para beat, esto ocurre porque conforme aumenta A , la rama $+f$ (curva celeste que forma beat) se mueve hacia arriba tendiendo a (X_0, Y_0) , haciendo cada vez más estrecha y débil dicha inestabilidad, hasta que al cruzar por ese punto se estabiliza completamente (a la vez que las curvas amarillas superiores $-b$ y $-f$ se separan de las celestes, formando una brecha (gap)). En cambio, para modulacional, su estabilización tiene que ver con que las ramas $-f$ y $+f$ se “despegan” al desplazarse con distinta rapidez al crecer A . De paso, nótese también que las ramas que son más afectadas por el incremento de A , con respecto al caso $A = 0$ marcado en líneas discontinuas, son en primer lugar $+s$ y $+f$, y después $-b$ para $Y > Y_0$; mientras que las ramas $-f$ y $-b$ para $Y > Y_0$ son sólo mínimamente afectadas. Cabe mencionar que este fenómeno fue hallado y descrito hace algún tiempo en [Hollweg, 1994].

- Por otra parte, el γ_{max} de la inestabilidad de decaimiento siempre es monótonamente creciente con respecto a A , siendo dominante para todos los valores de estos parámetros.
- Curvas $v_{\phi, max}$ v/s A : Aquellas correspondientes a las inestabilidades modulacional y beat son crecientes con respecto a la amplitud, mientras que la de decaimiento es decreciente.
- Curvas k_{max} v/s A : El lugar k_{max} de los máximos de la inestabilidad de decaimiento es monótonamente creciente con respecto a A (su rango aumenta igualmente), mientras que la beat es decreciente y tendiendo a k_0 en el rango en la cual está activa (y siempre muy cerca de dicho punto). El k_{max} de la inestabilidad modulacional posee un máximo local en $A \approx 0.4$, tendiendo a anularse en los extremos $A = 0$ y $B_0 = B_s$. Su rango sigue un patrón similar.

Ahora se obtendrán gráficos similares a los anteriores para dos β 's distintos, con el objetivo de visualizar cómo varían las características de la inestabilidades debido a efectos térmicos:

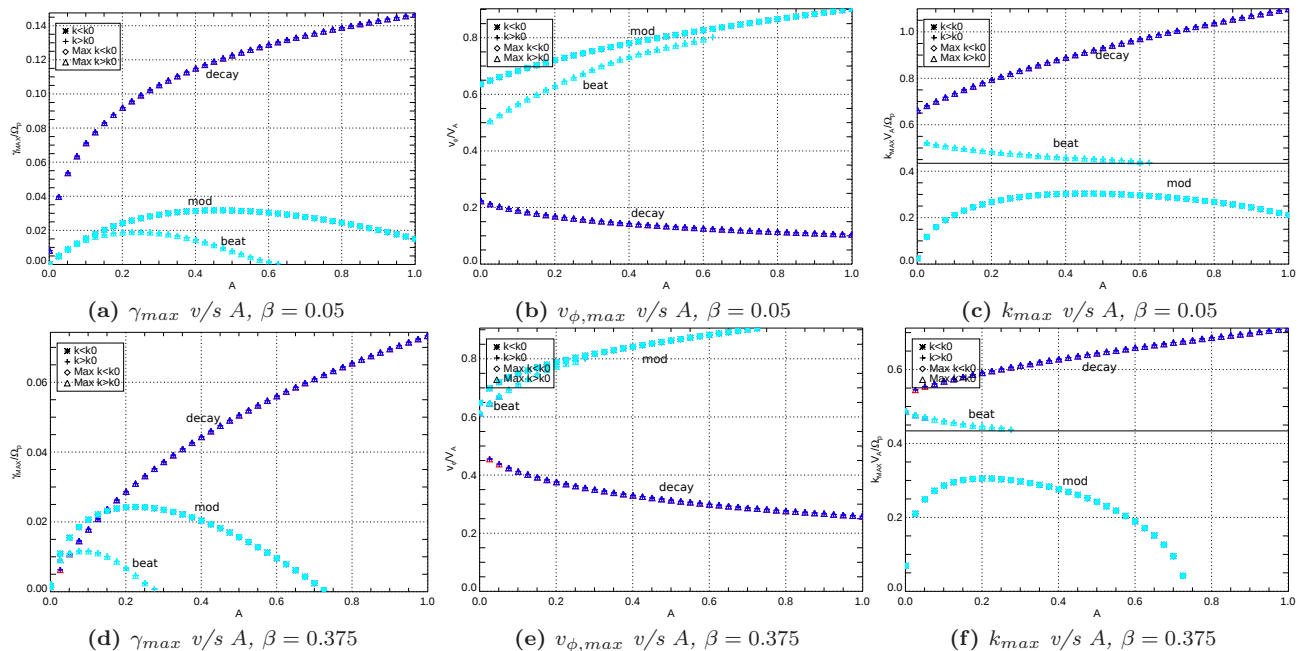


Figura 2.9: Diagramas de máximos de inestabilidades para $0 < A < 1.0$. Izquierda: $\beta = 0.05$, Derecha: $\beta = 0.375$. Los demás parámetros son los mismos que en la figura previa 2.7.

De aquí se nota:

- *Curvas $\gamma_{max} v/s A$:* La amplitud crítica umbral de la pump que suprime las inestabilidad mod y beat, se incrementa conforme β disminuye. En particular, la inestabilidad beat siempre es más débil que la mod, por lo que se requiere un A menor para suprimirla en comparación con aquella, y para β relativamente grandes es casi imperceptible, excepto para amplitudes muy pequeñas. En forma gráfica (diagrama $\omega v/s k$), este fenómeno sucede por una razón similar a la antes descrita (figura 2.8): el aumento de β desplaza a la curva celeste que forma beat hacia arriba (ver figura 2.11), acercándola a (X_0, Y_0) , estrechándola y debilitándola a la vez.
- *Decay incrementa su γ_{max} notoriamente conforme β disminuye, siendo la más afectada por el cambio de β (ver siguiente subsección para una explicación).*
- *Curvas $v_{\phi,max} v/s A$:* La inestabilidad decay incrementa su $v_{\phi,max}$ conforme β aumenta, aunque sólo ligeramente y en forma notoria para β 's pequeños. Las inestabilidades beat y mod también presentan el mismo comportamiento, aunque más notorio para β 's grandes.
- *Curvas $k_{max} v/s A$:* La inestabilidad decay aumenta sus k_{max} conforme β disminuye, es decir, su máximo se desplaza más a la derecha en los diagramas $\gamma v/s k$. La inestabilidad modulacional no presenta máximos locales en estas curvas $k_{max} v/s A$ para β grandes, sino que es monótonamente decreciente partiendo desde un valor $k \neq 0$ para $A \rightarrow 0$.

2.5.4. Efectos de la variación de beta

Los efectos térmicos están contenidos en este parámetro, del cual la pendiente de la rama acústica depende según 2.63, por lo que su variación debe afectar prioritariamente la inestabilidad de decaimiento que se genera en esta rama. Los valores escogidos de β son entre 0.01 y 1, con los más bajos siendo realizables físicamente en los hoyos coronales cercanos a la fotosfera solar, mientras que los más altos se pueden dar en las regiones coronales ó en el viento solar ([Hollweg et al., 1993]).

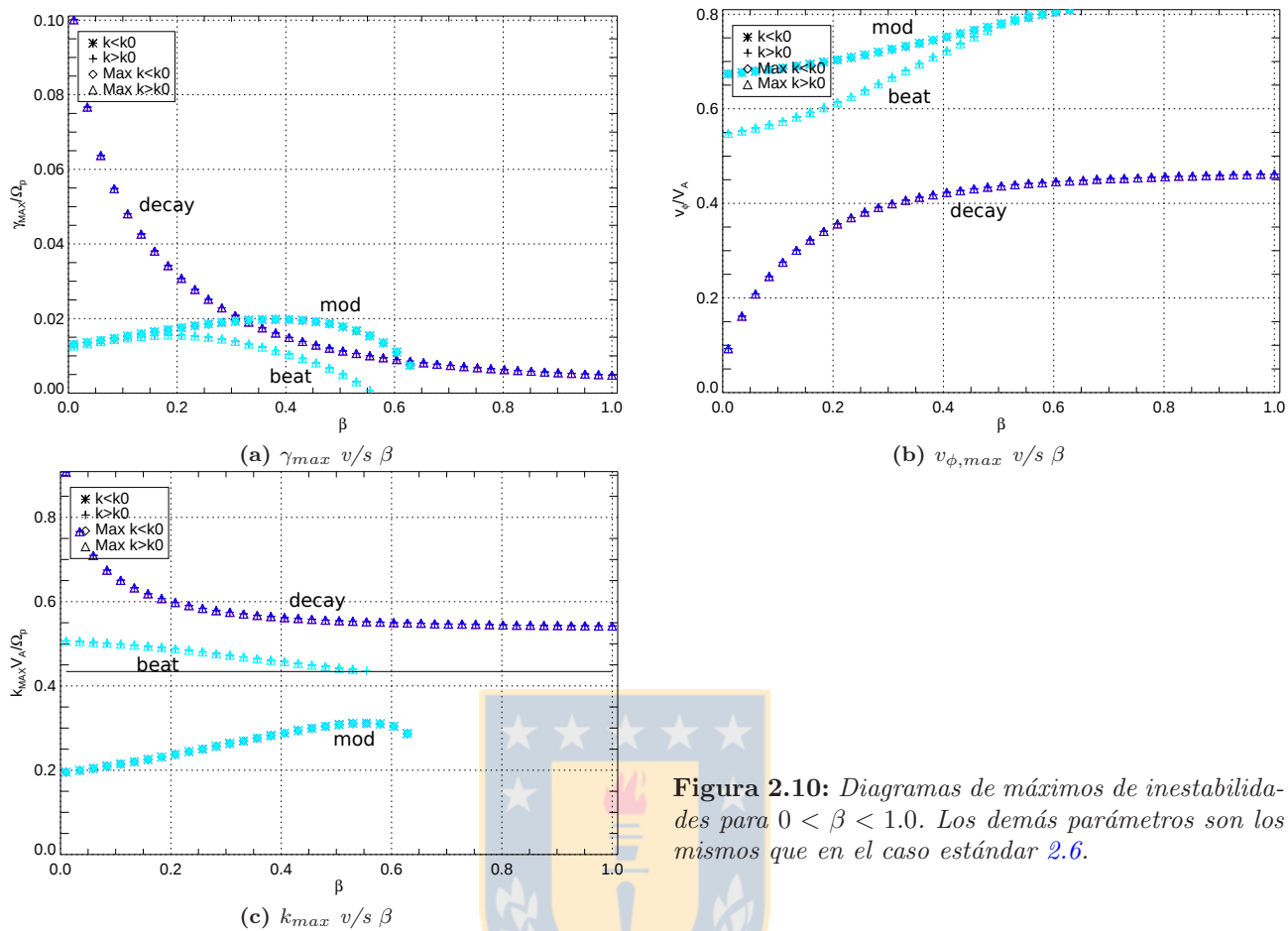


Figura 2.10: Diagramas de máximos de inestabilidades para $0 < \beta < 1.0$. Los demás parámetros son los mismos que en el caso estándar 2.6.

- Efectivamente se produce una notoria dependencia de la inestabilidad de decaimiento con respecto a este parámetro: su tasa de crecimiento es monótonamente decreciente con respecto a β de forma muy pronunciada, tendiendo a valores muy grandes de γ_{max} conforme el plasma se hace frío $\beta \rightarrow 0$. Esto ya se había notado en la sección anterior, en los gráficos $\gamma_{max} v/s A$ para dos β 's distintos
- En cambio, los γ_{max} de las inestabilidades beat y modulacional crecen débilmente con la temperatura hasta un cierto umbral en β tras el cual desaparecen (es menor el requerido para anular la beat)
- Es posible precisar un poco la afirmación dada en [Hollweg, 1994], en donde se encontró que para β grande la inestabilidad modulacional involucra una onda $-f$ y $+s$, mostrando algunos casos de curvas $\omega v/s k$:

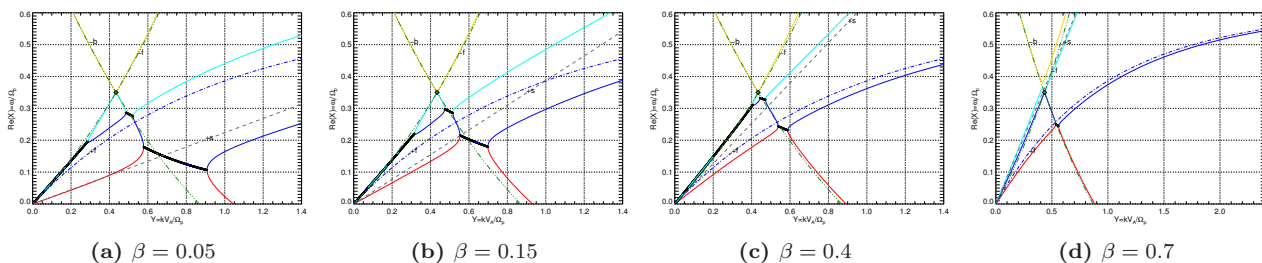


Figura 2.11: Diagramas de dispersión $X v/s Y$ para $A = 0.09$, $X_0 = 0.35$ y β variable.

Notar como el incremento de β tiende a subir a la rama $+s$ y bajar la $+f$ (para $A = 0$), cruzándose en el entorno de $\beta \approx 0.15$.

Al guiarse por las curvas discontinuas del límite $A = 0$, es posible notar que la inestabilidad modulacional, además de $-f$, pasa de estar conformada claramente por $+f$ para β 's bajos ($\beta = 0.05$), a una situación mixta en que no fácil etiquetar si se compone de $+f$ ó $+s$, debido al cruce de sus respectivas ramas de $A = 0$ ($\beta = 0.15$). Incrementando más beta, por ej. para $\beta = 0.4$, es fácilmente distinguible que modulacional es generada por $+s$, para después desaparecer completamente (como en $\beta = 0.7$) al “despegarse“ de la rama $-f$ (en las cercanías de su supresión, esta inestabilidad modulacional no se extiende hasta $k \rightarrow 0$, tal como fue hallado por [Hollweg, 1994]. Ver, por ej, figura 2.17d).

Con las mismas figuras anteriores, es posible afirmar también que la inestabilidad decay sufre el mismo tipo de comportamiento: pasa de estar conformada (además de $-b$) por $+s$ para β bajos, a $+f$ para β 's altos. La beat experimenta algo similar pero con las ramas intercambiadas: pasa de estar conformada (además de $-b$) por $+f$ para β bajos, a $+s$ para β 's altos (ver resumen de este comportamiento en la discusión de figura 2.17)

- La $v_{\phi,max}$ de la inestabilidad decay también tiene un comportamiento singular: partiendo de cero crece hasta mantenerse constante, para $\beta \approx 0.5$, en torno a $v_{\phi,max} \approx 0.5$.

Ahora se intentará establecer el comportamiento de los β umbrales en los cuales estas inestabilidades desaparecen, cuando se varía las propiedades de la onda pump, tal como su amplitud A :

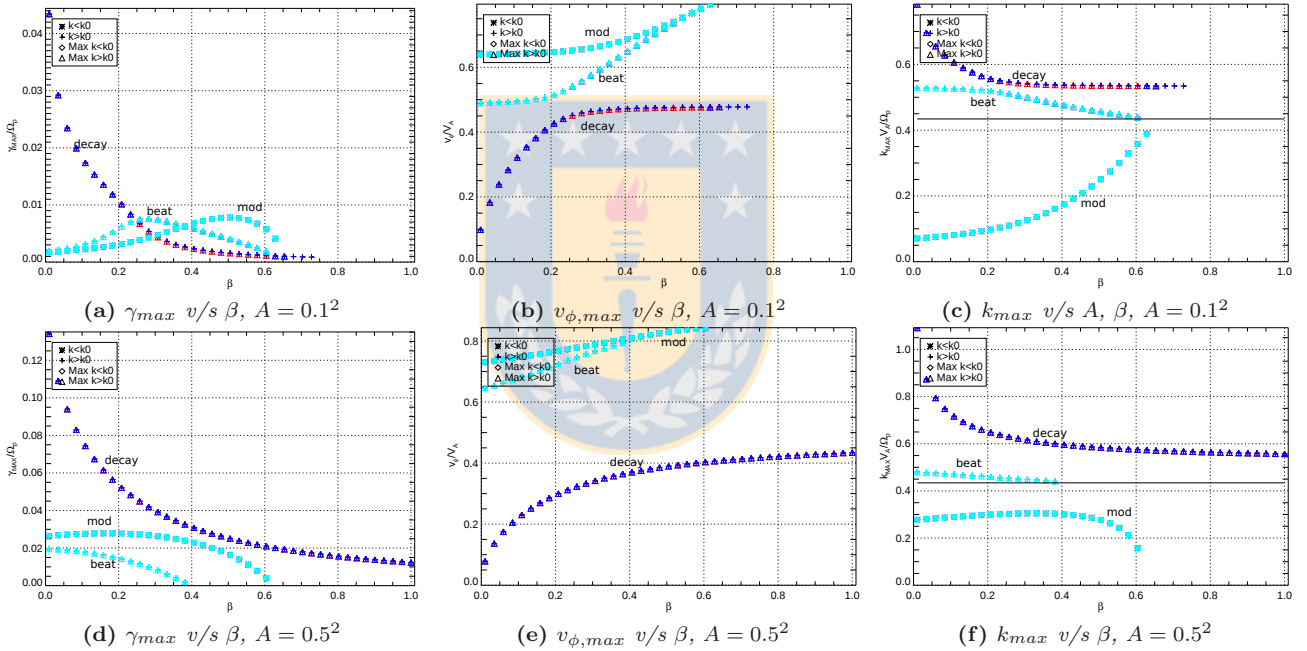


Figura 2.12: Diagramas de máximos de inestabilidades para $0 < \beta < 1.0$. Izquierda: $A = 0.1^2$, Derecha: $A = 0.5^2$. Los demás parámetros son los mismos que en la figura anterior

De aquí se nota:

- *Curvas γ_{max} v/s β :* Como se podría esperar, la inestabilidad decay incrementa sus γ_{max} al aumentar A , aunque cada vez con menor pendiente. Las otras inestabilidades también muestran este comportamiento, pero en una forma poco marcada. El β umbral de la inestabilidad beat disminuye con el aumento de A ⁶, mientras que el asociado a la inestabilidad modulacional no se ve afectado. Para el caso de amplitud pequeña, $A = 0.1^2$, incluso la inestabilidad decay posee un β umbral (aprox. en 0.7), aunque muy difuso (más adelante se verá que no es en rigor así, sino que sólo decae asintóticamente). La superposición de máximos en color rojo en la curva de la inestabilidad decay para $A = 0.1^2$, se debe a un intercambio en las ramas que la componen, de $-b$ con $+s$ para $\beta \lesssim 0.25$, a $-b$ con $+f$ para valores mayores que ese beta. Consistentemente, la inestabilidad beat cambia sus ramas constituyentes de forma opuesta.

⁶ya que el incremento de cualquiera de estos parámetros tiene el mismo efecto de desplazar la curva celeste superior que forma el beat, hacia arriba, acercándola a (Y_0, X_0) , tal como en 2.8 y 2.11.

- *Curvas $v_{\phi,max}$ v/s β* : En todos los casos, la inestabilidad decay tiende a una $v_{\phi,max}$ constante para β grandes, aunque cada vez con menor pendiente a medida que aumenta A . Además, la velocidad de fase de la inestabilidad beat se incrementa con la amplitud A .
- *Curvas k_{max} v/s β* : La curva de la inestabilidad modulacional tiende a k_0 por debajo para amplitudes pequeñas, como en el caso mostrado de $A = 0.1^2$.

Efectos combinados de Amplitud y beta

Los diagramas anteriores pueden ser resumidos en gráficos de contorno de γ_{max} , al considerarlos como función de las dos variables A y β^7 , para cada una de las tres inestabilidades.

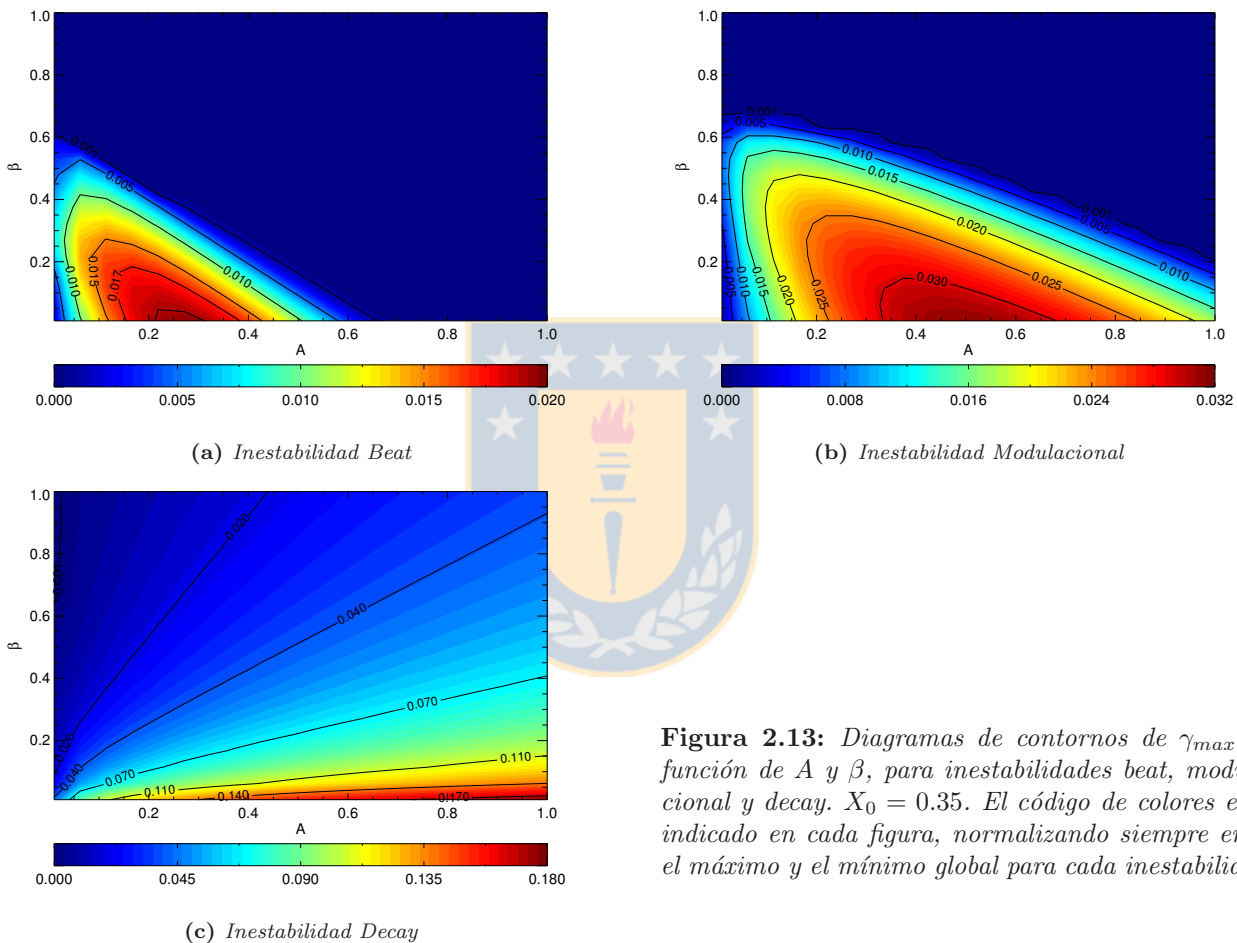


Figura 2.13: Diagramas de contornos de γ_{max} en función de A y β , para inestabilidades beat, modulacional y decay. $X_0 = 0.35$. El código de colores es el indicado en cada figura, normalizando siempre entre el máximo y el mínimo global para cada inestabilidad.

Además de confirmar las aseveraciones anteriores, de aquí se ve claramente:

- La inestabilidad beat está acotada a una estrecha zona triangular en el plano de parámetros β y A , no existiendo para $\beta \gtrsim 0.6$ ni $A \gtrsim 0.6$. Sus mayores γ_{max} se alcanzan en $A = 0.25$ y $\beta \rightarrow 0$. Esto es otra prueba a favor de que el aumento de A ó β tiene el mismo efecto de estrechar y debilitar esta inestabilidad, tal como fue antes discutido en los diagramas ω v/s k .
- Si bien la inestabilidad modulacional tampoco se presenta para $\beta \gtrsim 0.6$, se mantiene en todo el rango de amplitudes A presentados para β pequeños. Sus mayores γ_{max} se alcanzan en $A = 0.5$ y $\beta \rightarrow 0$. Notar que la zona de existencia de esta inestabilidad en el plano $\beta - A$ tiene una forma similar a la de beat pero extendida, siendo una señal que la generación de ambas está relacionada con el mismo tipo de ramas que se intercambian con el aumento de β : $+s$ y $+f$.

⁷Se escogen primero estos parámetros puesto que son los que imponen umbrales críticos, en los cuales las inestabilidades se suprimen.

- La inestabilidad de decaimiento existe en prácticamente todo el rango mostrado, alcanzando sus mayores γ_{max} en el extremo inferior derecho ($A \rightarrow 1$ y $\beta \rightarrow 0$) y sus mínimos en el extremo inferior izquierdo ($A \rightarrow 0$ y $\beta \rightarrow 1$). Su forma y naturaleza difiere radicalmente de las dos inestabilidades anteriores, siendo la más resistente frente al cambio de estos parámetros, no teniendo umbrales de supresión (sólo decaimiento suave). (Explicación?).
- Notar que para un A fijo, todas las inestabilidades disminuyen sus γ_{max} conforme β se incrementa.

De forma completamente análoga, también se puede obtener los gráficos de contorno para las velocidades de fase máximas $v_{\phi,max}$ en función de los parámetros A y β :

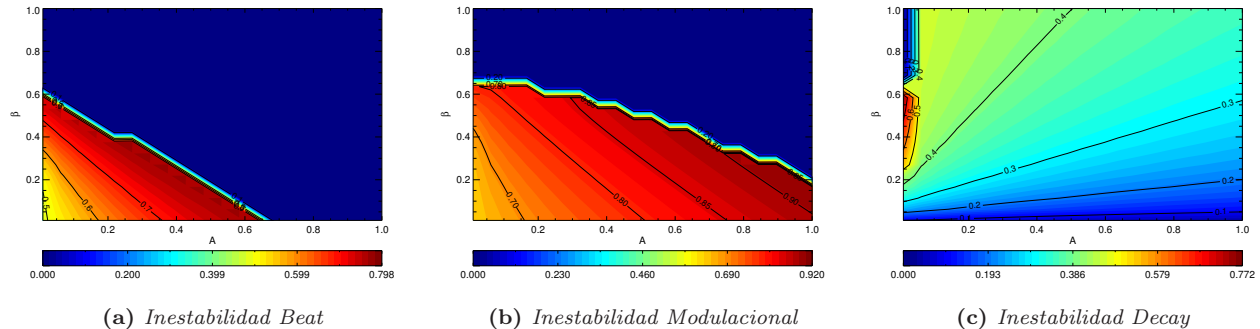


Figura 2.14: Diagramas de contornos de $v_{\phi,max}$ en función de A y β , para inestabilidades beat, modulacional y decay. $X_0 = 0.35$

- Cerca de la zona umbral en β y A en donde las inestabilidades beat y modulacional se suprimen, aquellas alcanzan su velocidad de fase $v_{\phi,max}$ máxima (0.8 y 0.9, respectivamente). Sin embargo, esta no varía mucho para el resto de parámetros considerado en donde existan estas inestabilidades (no disminuye menos de $v_{\phi,max} \approx 0.5$).
- El comportamiento de la inestabilidad decay es más regular: siempre incrementa sus $v_{\phi,max}$, para un A fijo, conforme β aumenta. La excepción a esto ocurre para amplitudes menores a $A = 0.01$, pues allí las velocidades de fase presentan un máximo local en torno a $\beta = 0.5$ entre dos mínimos para $\beta \rightarrow 0$ y $\beta \rightarrow 1$, respectivamente.

Para visualizar los efectos de la frecuencia de la pump en estas inestabilidades, es conveniente comparar los mismos tipos de diagramas anteriores para dos casos extremos de X_0 :

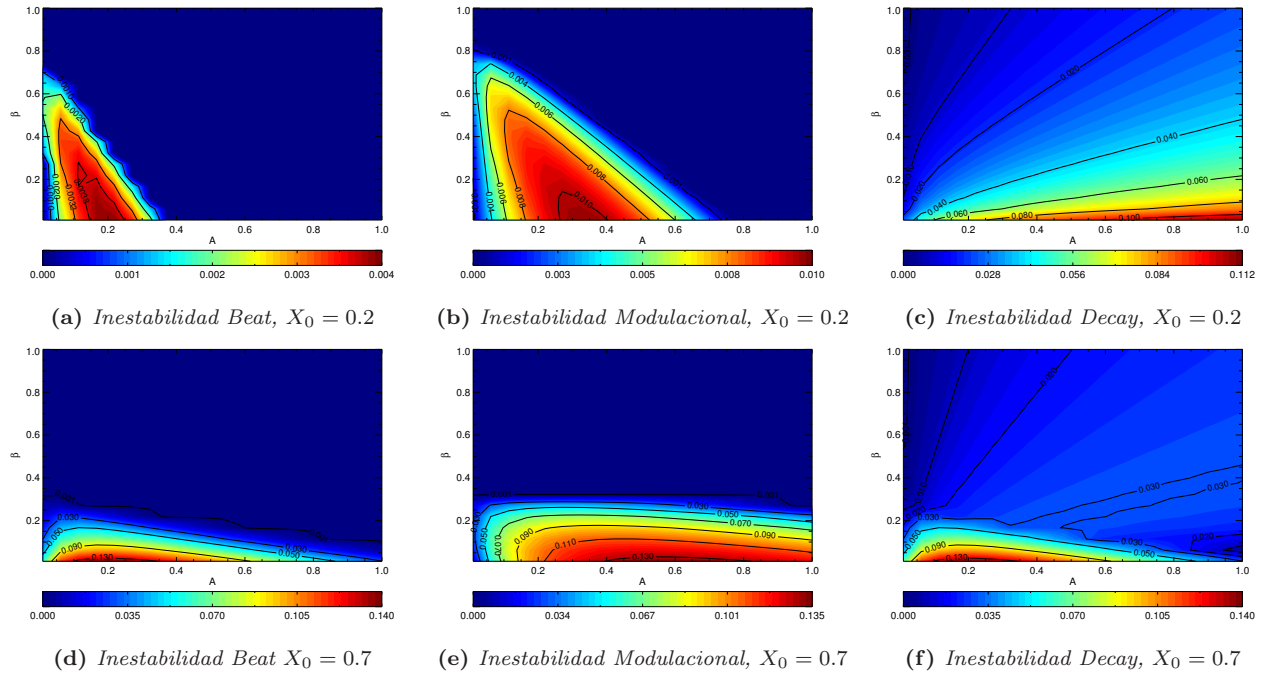


Figura 2.15: Diagramas de contornos de γ_{max} en función de A y β , para inestabilidades beat, modulacional y decay. Arriba: $X_0 = 0.2$, Abajo: $X_0 = 0.6$

- El aumento en la frecuencia de la pump ocasiona, en términos generales, un incremento en las tasas máximas de crecimiento γ_{max} para las inestabilidades beat y modulacional (de un orden de magnitud entre los casos extremos presentados. Ver explicación en siguiente subsección). En particular, la inestabilidad beat es prácticamente imperceptible para frecuencias pequeñas como para la mostrada de $X_0 = 0.2$.
- X_0 mayores cambian la región en que se desarrollan las inestabilidades beat y modulacional, "aplanándolas" en el plano $\beta - A$, es decir, tendiendo a extender los umbrales de supresión en A , a la vez que reduciendo los de β (comparar la línea superior de diagramas con la inferior).
- La inestabilidad decay se ve poco afectada por el incremento de X_0 , ya que sus γ_{max} también aumentan pero de forma poco significativa. La diferencia más notoria es el cambio del sector donde se presentan los máximos γ_{max} en el espacio $\beta - A$, de $A \rightarrow 1$ para $X_0 = 0.2$, a $A \approx 0.25$ para $X_0 = 0.7$

2.5.5. Efectos de la variación de la frecuencia de la pump

Al aumentar X_0 (y correspondiente Y_0) los efectos dispersivos aumentan debido a la cercanía de la asíntota en $\omega_0 = \Omega_p$, por lo que la inestabilidad modulacional debe cobrar mayor importancia. En efecto, eso es precisamente lo que se observa en los siguientes gráficos

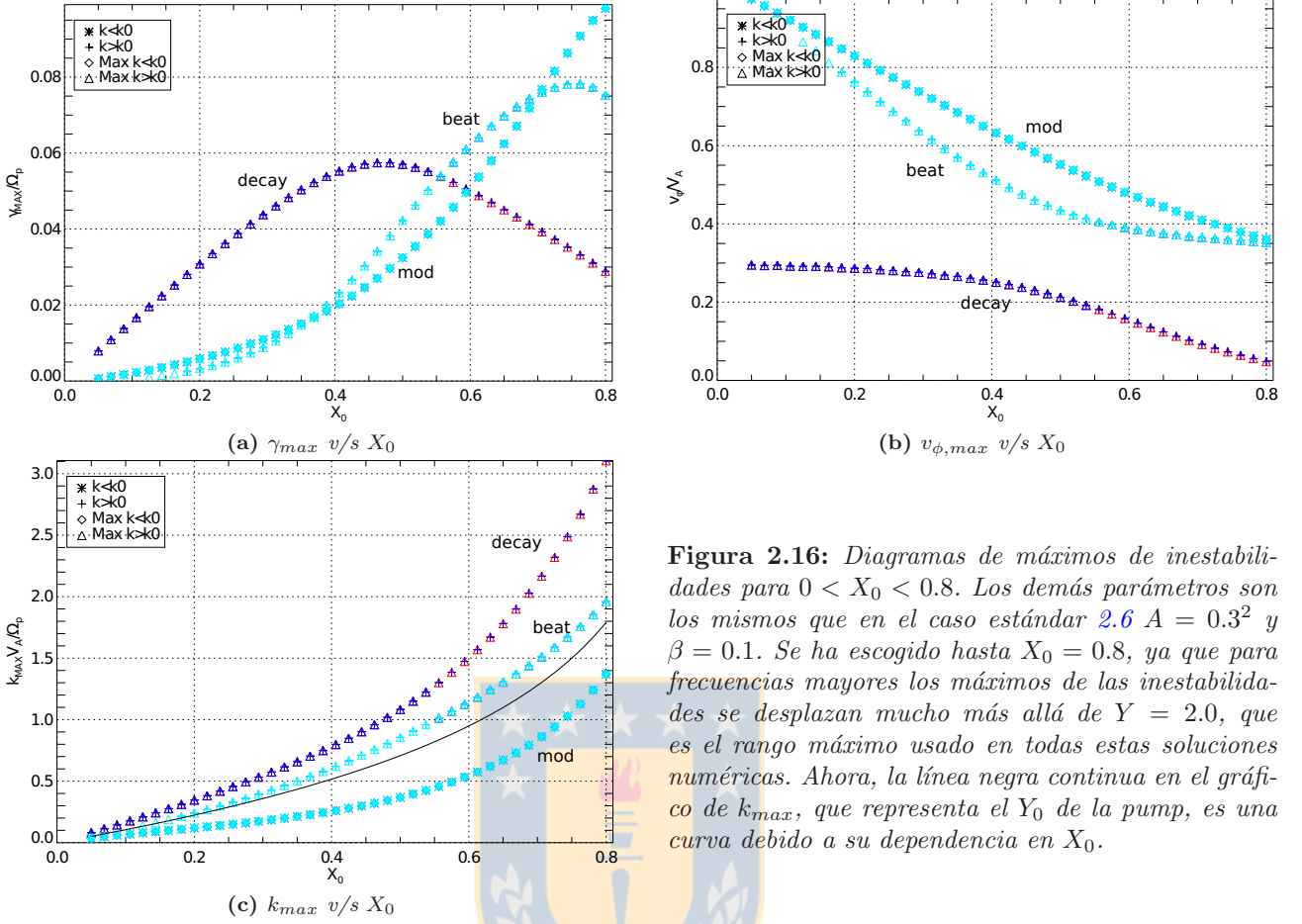


Figura 2.16: Diagramas de máximos de inestabilidades para $0 < X_0 < 0.8$. Los demás parámetros son los mismos que en el caso estándar 2.6 $A = 0.3^2$ y $\beta = 0.1$. Se ha escogido hasta $X_0 = 0.8$, ya que para frecuencias mayores los máximos de las inestabilidades se desplazan mucho más allá de $Y = 2.0$, que es el rango máximo usado en todas estas soluciones numéricas. Ahora, la línea negra continua en el gráfico de k_{max} , que representa el Y_0 de la pump, es una curva debido a su dependencia en X_0 .

Algunas observaciones:

- Tanto la inestabilidad beat como la modulacional son monótonamente crecientes con respecto a X_0 . Para X_0 bajas ambas tiene similar γ_{max} , pero para frecuencias muy altas la inestabilidad modulacional es más importante, considerando además que cubre todo el rango $0 < k < k_0$.
- El γ_{max} de la inestabilidad decay crece hasta un máximo cerca de $X_0 = 0.4$, tras lo cual decrece lentamente. Su k_{max} se desplaza rápidamente a la derecha de k , tomando cada vez más distancia con Y_0 .
- Todas las velocidades de fase $v_{\phi,max}$ son decrecientes con respecto a la frecuencia X_0 .
- Al igual que lo ocurrido con β (ver figura 2.11), las tres inestabilidades cambian las ramas que la conforman continuamente, entre $+s$ y $+f$ conforme X_0 aumenta, tal cual se muestra en las siguientes figuras:

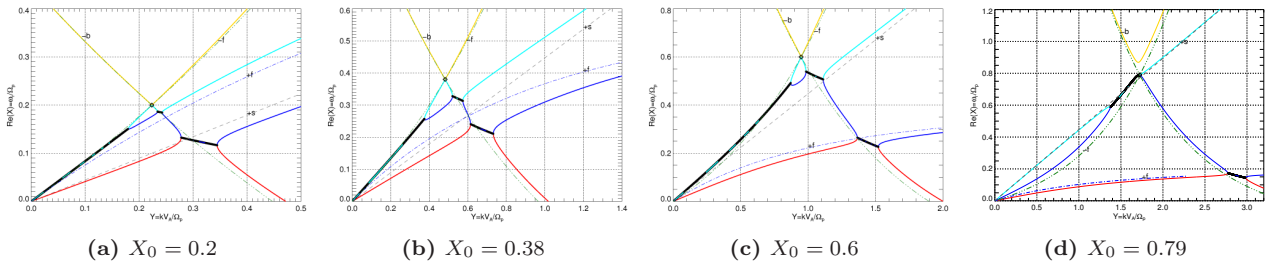


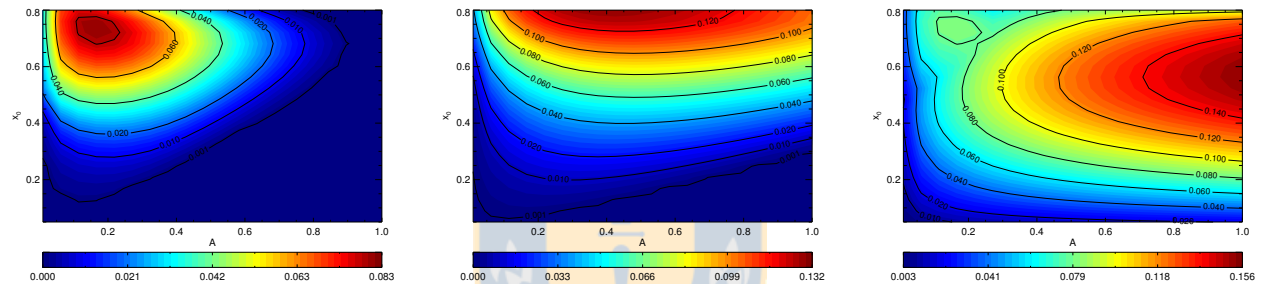
Figura 2.17: Diagramas de dispersión $X v/s Y$ para $A = 0.09$, $\beta = 0.2$ y X_0 variable.

Notar como el incremento de X_0 tiende a subir a la rama $+s$ y bajar la $+f$ para $A = 0$, cruzándose en el

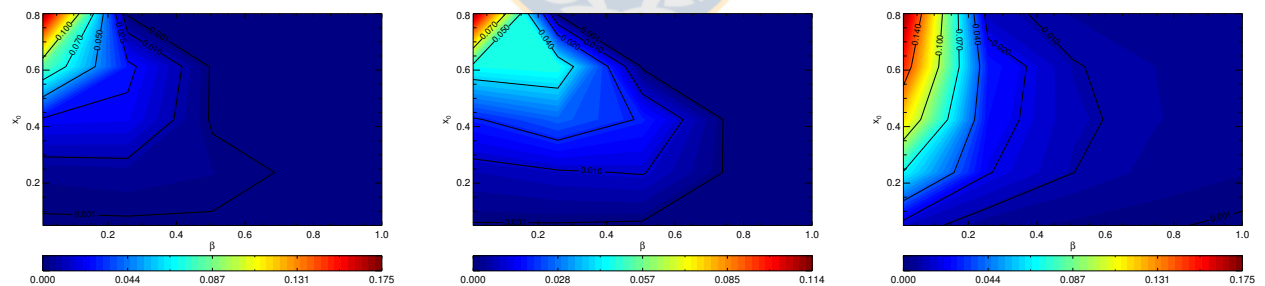
entorno de $X_0 \approx 0.38$ (es el mismo efecto de aumentar β). De aquí, y de las conclusiones anteriores para β variable (discusión de figura 2.11), se deduce que:

- No es posible asignar la generación de las inestabilidades debido a la intersección de un único par de ondas (por cada una), sino que el movimiento de las ramas $+s$ y $+f$, al variar β y/o X_0 , provoca un cambio continuo entre ellas como la segunda rama generadora de dichas inestabilidades.
- Las ramas que siempre caracterizan a cada inestabilidad son: modulacional $-f$, beat $-b$ y decay $-b$
- Estos modos son los que precisamente siempre se intersectan en (Y_0, X_0) , como ya se había notado en [Hollweg, 1994].
- La otra rama de modulacional y de beat es siempre la que está más cerca de (Y_0, X_0) entre $+s$ y $+f$. Para X_0 y β bajos es la segunda, mientras que para valores de cualquiera de esos parámetros más grandes, es la primera
- La otra rama de decay es siempre la que está más alejada de (Y_0, X_0) entre $+s$ y $+f$. Es decir, satisface la regla opuesta de la recién dada.

Finalmente, para visualizar de mejor forma todo el rango de parámetros en que se pueden presentar estas inestabilidades (enfazando el rol de la frecuencia de la pump X_0) se mostrarán gráficos de contornos de los γ_{max} de cada una de ellas en el espacio de parámetros X_0 v/s A y X_0 v/s β , respectivamente:



(a) Inestabilidad Beat, X_0 v/s A . $\beta = 0.1$ (b) Inestabilidad Modulacional, X_0 v/s A . $\beta = 0.1$ (c) Inestabilidad Decay, X_0 v/s A . $\beta = 0.1$



(d) Inestabilidad Beat, X_0 v/s β . $A = 0.3^2$ (e) Inestabilidad Modulacional, X_0 v/s β . $A = 0.3^2$ (f) Inestabilidad Decay, X_0 v/s β . $A = 0.3^2$

Figura 2.18: Diagramas de contornos de γ_{max} para inestabilidades beat, modulacional y decay. Arriba: espacio X_0 v/s A con $\beta = 0.2$. Abajo: espacio X_0 v/s β con $A = 0.3^2$.

Observaciones:

- Todas las inestabilidades desaparecen para frecuencias de la pump X_0 muy bajas, aunque pueden ser importantes si X_0 no es tan bajo, tal como en la primera línea de figuras.
- En el espacio X_0 v/s β , las inestabilidades tienden a ser más importantes en el extremo superior izquierdo, esto es, para β pequeño (ya conocido de antes) y también para frecuencias X_0 cercanas a la resonancia en $X_0 = 1$

- En el espacio X_0 v/s β , se puede verificar fácilmente el alcance de la afirmación de [Hollweg, 1994], acerca que el signo de $\beta - 1 + X_0$ y $\beta - 1 + 3X_0$ gobiernan el comportamiento de las inestabilidades beat y decay. En dichos diagramas, se ve claramente que las rectas correspondientes a esas cantidades no tienen relación directa con las curvas de nivel de $\gamma_{max} = cte$, y por consiguiente, tampoco sobre los umbrales precisos de supresión de ambas (aunque, por supuesto, es un punto de transición entre las diferentes topologías en el espacio X v/s Y , tal como fue indicado en dicha referencia).
- En el espacio X_0 v/s A , la inestabilidad beat se encuentra muy acotada, existiendo en las cercanías de $X_0 \approx 0.6$ y para amplitudes en torno a $A \approx 0.15$.
- En el espacio X_0 v/s A , la inestabilidad modulacional sólo se anula en un estrecho sector del espacio de parámetros del extremo inferior derecho, esto es, para amplitudes grandes y frecuencias bajas de la pump. Alcanza sus máximos valores de γ_{max} muy cerca de donde la inestabilidad beat lo hace.
- Los umbrales de amplitud A para que las inestabilidades beat y modulacional se supriman, aumentan sostenidamente con la frecuencia X_0 hasta $X_0 \approx 0.6 - 0.65$, para después decaer suavemente.
- Los umbrales en β para que las inestabilidades beat y modulacional se supriman, disminuyen sostenidamente con la frecuencia X_0 en todo el rango mostrado.
- La inestabilidad decay presenta un comportamiento distinto al resto en el espacio X_0 v/s A : el incremento de amplitud de la pump A no ocasiona una disminución o anulación de ella, sino que un aumento sostenido, alcanzando sus máximos valores en torno a $X_0 \approx 0.55$.



2.6. Modelo cinético en dirección longitudinal

La relación de dispersión de Hollweg de fluidos (2.61) no puede dar cuenta de efectos cinéticos, tales como interacciones onda-partícula, en el decaimiento paramétrico de la onda pump de Alfvén. Una forma de mejorar esta situación, que incluye la interacción onda-partícula quizás más característica de los plasmas: el amortiguamiento Landau, se basa en el procedimiento originalmente desarrollado en [Araneda, 1998] y [Araneda et al., 2007], que se esquematizará a continuación.

2.6.1. Función de distribución longitudinal

La idea central es considerar efectos cinéticos sólo a lo largo de la dirección longitudinal, para lo cual los protones⁸ se representarán por una función de distribución $f_p(z, \vec{v}, t)$ que se comportará como fluido en la dirección transversal al campo magnético estático, esto es, representados por la delta de Dirac:

$$f_p(\vec{x}, \vec{v}) = \delta(\vec{v}^\perp - \vec{V}_p^\perp) f_p^\parallel(z, v_z, t) \quad (2.66)$$

en donde $\vec{v}^\perp = v_x \hat{x} + v_y \hat{y}$ representa velocidades microscópicas en el espacio fase y $\vec{V}_p^\perp = V_p^x \hat{x} + V_p^y \hat{y}$ es la velocidad transversal macroscópica de la especie p en el estado de equilibrio autoconsistente con la onda pump, siendo descrita por la ecuación de momentum de fluidos. Esta función de distribución debe satisfacer la condición de normalización transversal

$$\int \delta(\vec{v}^\perp - \vec{V}_p^\perp) dv_x dv_y = \int \delta(v_x - V_p^x) \delta(v_y - V_p^y) dv_x dv_y \stackrel{!}{=} 1 \quad (2.67)$$

y su evolución temporal será descrita por la ecuación de Vlasov (1.16), con el gradiente $\nabla = \partial/\partial z$ debido a que F_p sólo depende de dicha coordenada espacial. En esta última ecuación, es posible eliminar la dependencia en la función de distribución (2.66) de las velocidades transversales v_x y v_y , mediante la integración en esas variables. En efecto, siguiendo este procedimiento se obtienen tres integrales a determinar:

$$\int dv_x dv_y \left\{ \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} [\delta(\vec{v}^\perp - \vec{V}_p^\perp) f_p^\parallel]}_{:=I_1} + v_z \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} [\delta(\vec{v}^\perp - \vec{V}_p^\perp) f_p^\parallel]}_{:=I_2} + \frac{e}{m_p} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial \vec{v}} [\delta(\vec{v}^\perp - \vec{V}_p^\perp) f_p^\parallel]}_{:=I_3} \right\} = 0 \quad (2.68)$$

Las primeras dos son bastante evidentes, mientras que para la tercera se debe separar en componentes y usar una propiedad de la delta de Dirac⁹, obteniendo así la ecuación de Vlasov longitudinal (involucrando únicamente f_p^\parallel):

$$\frac{\partial f_p^\parallel}{\partial t} + v_z \frac{\partial f_p^\parallel}{\partial z} + \frac{e}{m_p} [E^z + V_p^x B^y - V_p^y B^x] \frac{\partial f_p^\parallel}{\partial v_z} = 0. \quad (2.70)$$

2.6.2. Estado de equilibrio

Para poder efectuar la posterior linealización, se debe encontrar el estado de equilibrio a orden 0, caracterizado por una función de distribución espacialmente uniforme:

$$f_{0p}(\vec{x}, \vec{v}) = n_{0p} \hat{f}_{0p}(\vec{v}) \quad (2.71)$$

⁸Los electrones siguen siendo descritos como partículas sin masa dentro del marco de la teoría de fluidos.

⁹Si $\delta'(x)$ es la derivada de la delta de Dirac, entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta'(x-a) dx = -f'(a) \quad (2.69)$$

en donde \hat{f}_{0j} representa la función de distribución reducida que es adimensional y satisface la condición de normalización ([Davidson, 1984]):

$$\int d^3v \hat{f}_{0p} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dv_x dv_y dv_z \hat{f}_{0p} = \int_{v_z=-\infty}^{v_z=\infty} \int_{v_{\perp}=0}^{v_{\perp}=\infty} \int_{v_{\theta}=0}^{V_{\theta}=2\pi} v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\theta} dv_z \hat{f}_{0p} \quad (2.72)$$

$$= 2\pi \int_{v_{\perp}=0}^{v_{\perp}=\infty} dv_{\perp} v_{\perp} \int_{v_z=-\infty}^{v_z=\infty} dv_z \hat{f}_{0p} = 1 \quad (2.73)$$

que se ha escrito en esa forma debido a la simetría cilíndrica presente en el plasma (dirección preferencial en \hat{z} a lo largo del campo magnético externo B_s). Notar que (2.67) es totalmente compatible con esto. Ahora, debido al requisito (2.66) que debe satisfacer la función de distribución, se tendrá

$$f_{0p}(\vec{v}) = n_{0p} \delta(\vec{v}^{\perp} - \vec{V}_{0p}^{\perp}) \hat{f}_{0p}^{\parallel}(v_z) \quad (2.74)$$

en donde la expresión para \vec{V}_{0p}^{\perp} es conocida de las expresiones de fluidos que la relacionan con el campo magnético de la onda pump según (1.84) y \hat{f}_{0p}^{\parallel} satisface, según (2.73), la condición:

$$\int \hat{f}_{0p}^{\parallel} dv_z = 1 \quad (2.75)$$

Esta función de distribución debe ser autoconsistente con la onda pump, y por tanto satisfacer la misma relación de dispersión previamente obtenida en (1.95). Por esta razón, se escoge que \hat{f}_{0p}^{\parallel} sea una Maxwelliana 1D (ver (1.18))

$$\hat{f}_{0p}^{\parallel}(v_z) = \frac{1}{\sqrt{\pi} v_{Tp}} e^{-\left(\frac{v_z}{v_{Tp}}\right)^2} \quad (2.76)$$

con la velocidad térmica dada por (1.30). En efecto, y en primer lugar, es fácil verificar que satisface la ecuación de Vlasov (2.70) apelando a las definiciones de los campos \vec{V}_{0p} y \vec{B}_0 . Además, dado que la densidad de corriente para los protones (1.11) está dada por la misma expresión de fluidos \vec{V}_{0p} (1.84) después de integrar, al reemplazar en la ecuación de Ampère se obtendrá la misma relación de dispersión (1.94) pues los procedimientos son idénticos. En resumen, (2.76) cumple todos los requisitos de consistencia dentro del marco de la teoría usada.

2.6.3. Linealización y función de distribución perturbada

Al igual que en el caso de fluido, ahora se requiere considerar perturbaciones infinitesimales (subíndice 1) a la función de distribución en torno al equilibrio descrito:

$$f_p(z, \vec{v}, t) = f_{0p}(\vec{v}) + f_{1p}(z, \vec{v}, t) \quad (2.77)$$

$$\Rightarrow f_p^{\parallel}(z, v_z, t) = n_{0p} \hat{f}_{0p}^{\parallel}(v_z) + f_{1p}^{\parallel}(z, v_z, t) \quad (2.78)$$

Efectuando la perturbación lineal de la ecuación de Vlasov longitudinal (2.70) con las correspondientes definiciones de cada una de las magnitudes dadas en las secciones 1.5.2 y 2.4.1, se obtiene:

$$\frac{\partial f_{1p}^{\parallel}}{\partial t} + v_z \frac{\partial f_{1p}^{\parallel}}{\partial z} + \frac{en_{0p}}{m_p} [V_{1p}^x B_0^y - V_{1p}^y B_0^x + V_{0p}^x B_1^y - V_{0p}^y B_1^x] \frac{\partial \hat{f}_{0p}^{\parallel}}{\partial v_z} + \frac{en_{0p}}{m_p} [V_{0p}^x B_0^y - V_{0p}^y B_0^x] \frac{\partial \hat{f}_{1p}^{\parallel}}{\partial v_z} = 0 \quad (2.79)$$

Notar que el último término en paréntesis cuadrados se anula al reemplazar las formas explícitas de las cantidades involucradas: (1.72), (1.84) y B_0^{\pm} (1.67). Suponiendo que la perturbación de la función de distribución satisface la siguiente expansión de Fourier análoga a las realizadas en 2.4.1:

$$\hat{f}_{1p}^{\parallel}(z, t, \vec{v}) = \sum_l \tilde{f}_{1p,l}^{\parallel}(k_l, \omega_l, \vec{v}) e^{i(\omega_l t - k_l z)} \quad (2.80)$$

y reemplazando las expansiones correspondientes para los campos de velocidad y electromagnéticos de la misma forma que en teoría de fluidos, se obtiene directamente del coeficiente l-ésimo de dicha expansión la siguiente expresión para la función de distribución perturbada:

$$\tilde{f}_{1p,l}^{\parallel} = i \frac{en_{0p}}{m_p} \left[\tilde{E}_{1,l}^z + i \frac{\tilde{V}_{0p}}{2} \left(\tilde{B}_{1,l+1}^- - \tilde{B}_{1,l-1}^+ \right) + i \frac{B_0}{2} \left(\tilde{V}_{1,l-1}^+ - \tilde{V}_{1,l+1}^- \right) \right] \frac{\partial \hat{f}_{0p}^{\parallel} / \partial v_z}{\omega_l - k_l v_z} \quad (2.81)$$

Densidad perturbada

Reemplazando la función de distribución (2.66) en la definición de densidad (1.8), es fácil notar que su parte transversal se integra directamente, por lo que linealizando, usando la función de distribución perturbada hallada en (2.81) y las descomposiciones explícitas de cada campo según (2.4.1), se obtiene la integral:

$$n_{1p}(z, t) := \int f_{1p} d^3v = \int f_{1p}^{\parallel} dv_z \quad (2.82)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{n}_{1p,l} = \frac{en_{0p}}{m_p} \left[i\tilde{E}_{1,l}^z - \frac{\tilde{V}_{0p}}{2} (\tilde{B}_{1,l+1}^- - \tilde{B}_{1,l-1}^+) - \frac{B_0}{2} (\tilde{V}_{1,l-1}^+ - \tilde{V}_{1,l+1}^-) \right] \int \frac{\partial \hat{f}_{0p}^{\parallel} / \partial v_z}{\omega_l - v_z k_l} dv_z \quad (2.83)$$

en donde la integral sólo afecta al término fuera del paréntesis cuadrado debido a que el resto de las cantidades son macroscópicas y no dependen de la variable de integración microscópica v_z . Usando la forma explícita (2.76), es posible evaluar la integral anterior fácilmente:

$$I = \int \frac{\partial \hat{f}_{0p}^{\parallel} / \partial v_z}{\omega_l - k_l v_z} dv_z = \frac{-2}{\sqrt{\pi} v_{Tp}^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_z e^{-\left(\frac{v_z}{v_{Tp}}\right)^2}}{\omega_l - k_l v_z} dv_z \quad (2.84)$$

$$= \frac{2}{k_l v_{Tp}^2} (1 + \xi_p Z(\xi_p)) = -\frac{Z'(\xi_p)}{k_l v_{Tp}^2} \quad (2.85)$$

en donde se ha usado la definición de la función Z de plasma descrita en la sección C, con su argumento ξ_p normalizado según la sección F.1.1. De este modo:

$$\tilde{n}_{1p,l}(z, t) = -\frac{en_{0p}}{m_p} \left[i\tilde{E}_{1,l}^z - \frac{\tilde{V}_{0p}}{2} (\tilde{B}_{1,l+1}^- - \tilde{B}_{1,l-1}^+) - \frac{B_0}{2} (\tilde{V}_{1,l-1}^+ - \tilde{V}_{1,l+1}^-) \right] \frac{Z'(\xi_p)}{k_l v_{Tp}^2} \quad (2.86)$$

Como \tilde{V}_{0p} y $\tilde{V}_{1,l-1}^+$ son cantidades macroscópicas, éstas vendrán dadas por las conocidas relaciones de fluidos antes halladas.

2.6.4. Ecuación de continuidad

De las definiciones anteriores es fácil derivar la ecuación de continuidad perturbada obtenida con teoría de fluidos, en la misma forma que en la sección 1.1.3. En efecto, tomando el momento de orden 0 de la ecuación de Vlasov perturbada (2.79), se tendrá:

$$\int dv_z \left\{ \underbrace{\frac{\partial f_{1p}^{\parallel}}{\partial t}}_{:=I_1} + v_z \underbrace{\frac{\partial f_{1p}^{\parallel}}{\partial z}}_{:=I_2} + \underbrace{\frac{en_{0p}}{m_p} [E_1^z + V_{0p}^x B_1^y - V_{0p}^y B_1^x + V_{1p}^x B_0^y - V_{1p}^y B_0^x]}_{:=I_3} \frac{\partial \hat{f}_{0p}^{\parallel}}{\partial v_z} \right\} = 0 \quad (2.87)$$

Las dos primeras integrales se calculan fácilmente intercambiándolas por las respectivas derivadas, invocando las definiciones de momentos de orden 0 (1.8) y 1 (1.10). Por otro lado, la tercera integral sólo afecta a la derivada de f_{0p} , y al considerar que en los límites de integración $\hat{f}_{0p}^{\parallel}(v = \pm\infty) \rightarrow 0$, todo ese término se anula. Así obtenemos la misma ecuación de continuidad linealizada de teoría de fluidos (2.15).

2.6.5. Momento 1 de la ecuación de Vlasov

Usando las definiciones anteriores de momentos la función de distribución según (1.10), es posible calcular el momento de orden 1 de la ecuación de Vlasov (2.79):

$$\int dv_z v_z \left\{ \underbrace{\frac{\partial f_{1p}^{\parallel}}{\partial t}}_{:=I_1} + v_z \underbrace{\frac{\partial f_{1p}^{\parallel}}{\partial z}}_{:=I_2} + \underbrace{\frac{en_{0p}}{m_p} [E_1^z + V_{0p}^x B_1^y - V_{0p}^y B_1^x + V_{1p}^x B_0^y - V_{1p}^y B_0^x]}_{:=I_3} \frac{\partial \hat{f}_{0p}^{\parallel}}{\partial v_z} \right\} = 0 \quad (2.88)$$

Así se tienen tres integrales, de las cuales la primera se simplifica intercambiando con la derivada temporal y la tercera integrando por partes. En cambio, para la segunda, se usa la definición de presión (1.12):

$$I_2 = \int dv_z v_z^2 \frac{\partial f_{1p}^{\parallel}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \int dv_z v_z^2 f_{1p} = \frac{1}{m_p} \frac{\partial P_{1p}^{zz}}{\partial z} \quad (2.89)$$

en donde se identificará la componente zz como la presión escalar perturbada: $P_{1p} := P_{1p}^{zz}$. Luego,

$$n_{0p} \frac{\partial V_1^z}{\partial t} + \frac{1}{m_p} \frac{\partial P_{1p}}{\partial z} - \frac{en_{0p}}{m_p} [E_1^z + V_{0p}^x B_1^y - V_{0p}^y B_1^x + V_{1p}^x B_0^y - V_{1p}^y B_0^x] = 0 \quad (2.90)$$

Aplicando la misma dependencia sinusoidal de los campos utilizada en el análisis de fluidos, y escogiendo el coeficiente de Fourier l , se tiene finalmente la relación

$$\omega_l n_{0p} \tilde{V}_{1,l}^z - \frac{k_l \tilde{P}_{1p,l}}{m_p} = -\frac{en_{0p}}{m_p} \left[i \tilde{E}_{1,l}^z - \frac{\tilde{V}_{0p}}{2} (\tilde{B}_{1,l+1}^- - \tilde{B}_{1,l-1}^+) - \frac{B_0}{2} (\tilde{V}_{1,l-1}^+ - \tilde{V}_{1,l+1}^-) \right] \quad (2.91)$$

2.6.6. Relación cinética para coeficiente politrópico

Ahora se tiene los ingredientes necesarios para encontrar una relación bastante interesante, encontrada por primera vez en [Araneda, 1998]. En efecto, comparando (2.86) y (2.91), se puede notar que la cantidad del lado derecho en paréntesis cuadrado es idéntica en ambas expresiones, por lo que:

$$\omega_l n_{0p} \tilde{V}_{1,l}^z - \frac{k_l \tilde{P}_{1p,l}}{m_p} = \frac{\tilde{n}_{1p,l} k_l v_{Tp}^2}{Z'(\xi_p)} \quad (2.92)$$

Recordando la relación de fluidos entre $\tilde{V}_{1,l}^z$ y $\tilde{n}_{1,l}$ dada en (2.18), es posible eliminar la primera y obtener para la presión:

$$\tilde{P}_{1p,l} = m_p \tilde{n}_{1p,l} \left[\left(\frac{\omega_l}{k_l} \right)^2 - \frac{v_{Tp}^2}{Z'(\xi_p)} \right] \quad (2.93)$$

Ahora, podemos introducir un coeficiente politrópico cinético (denotado con superíndice K), en el sentido de suponer que la presión satisface una relación análoga a la de fluidos (2.20), pero con el coeficiente constante γ_p reemplazado por una función γ_p^K a determinar:

$$\tilde{P}_{1p,l} = \gamma_p^K k_B T_p \tilde{n}_{1p,l} = m_p \left[\left(\frac{\omega_{lp}}{k_l} \right)^2 - \frac{v_{Tp}^2}{Z'(\xi_p)} \right] \tilde{n}_{1p,l} \quad (2.94)$$

de donde se obtiene la relación cinética para el coeficiente politrópico (ver [Araneda, 1998] y [Araneda et al., 2007]):

$$\gamma_p^K = 2 \left[\xi_p^2 - \frac{1}{Z'(\xi_p)} \right] \quad (2.95)$$

Límite frío y caliente

Convendrá notar que es posible obtener un coeficiente politrópico explícito para los protones en el límite frío de fluidos $\omega/k \gg v_{Tp}$ ó $\xi_p \gg 1$. En efecto, usando los dos primeros términos de la expansión asintótica de la función Z (C.10):

$$Z'(\xi_p) \approx \frac{d}{d\xi_p} \left(-\frac{1}{\xi_p} - \frac{1}{2\xi_p^3} \right) = \frac{1}{\xi_p^2} + \frac{3}{2\xi_p^4} \quad (2.96)$$

y así, reemplazando en la expresión cinética para el coeficiente γ_p , se tiene:

$$\gamma_p^K \approx 2 \frac{3}{2 + \frac{3}{\xi_p^2}} \approx 3, \quad \text{para } \omega/k \gg v_{Tp} \quad (2.97)$$

pues en el límite de fluidos es seguro despreciar el término en el denominador $3/\xi_p^2$.

Por otro lado, dado que los electrones del plasma se consideran sin masa, ellos también serán isotérmicos, por lo que habría que considerarlos (en este modelo cinético) en el límite opuesto al usado antes: $\omega/k \ll v_{Tp}$ ó $\xi_p \gg 1$. Luego, usando el primer término de la expansión asintótica de la función Z (C.15), se tendrá:

$$Z'(\xi_e) \approx \frac{d}{d\xi_p} \left(-2\xi_e + \frac{4}{3}\xi_p^3 \right) = -2 + 4\xi_e^2 \quad (2.98)$$

y así, reemplazando en la expresión cinética para el coeficiente γ_e , se tiene:

$$\gamma_e^K \approx 2 \left(\xi_e^2 - \frac{1}{-2 + 4\xi_e^2} \right) \approx 1, \quad \text{para } \omega/k \ll v_{Te} \quad (2.99)$$

despreciando los términos de orden $\mathcal{O}(\xi_e^2)$.

Comportamiento del índice politrópico

Para el caso particular en que la frecuencia de las ondas es real, este índice politrópico es complejo, y sus valores que adopta se resumen en la siguiente figura:

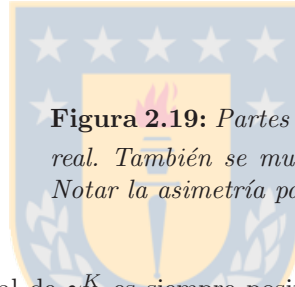
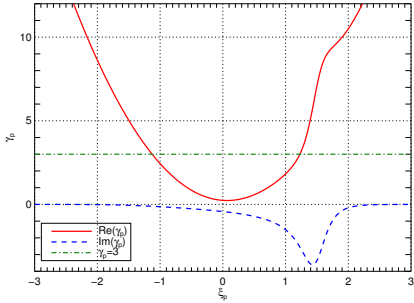
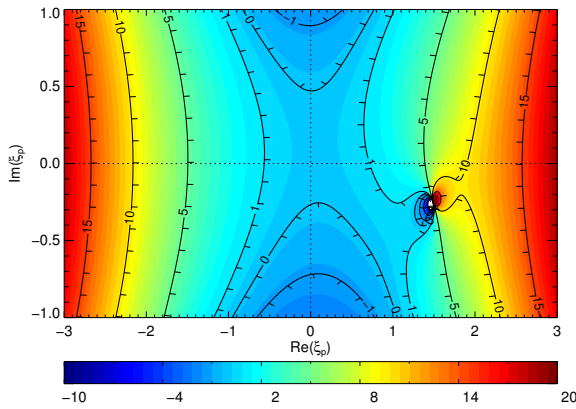
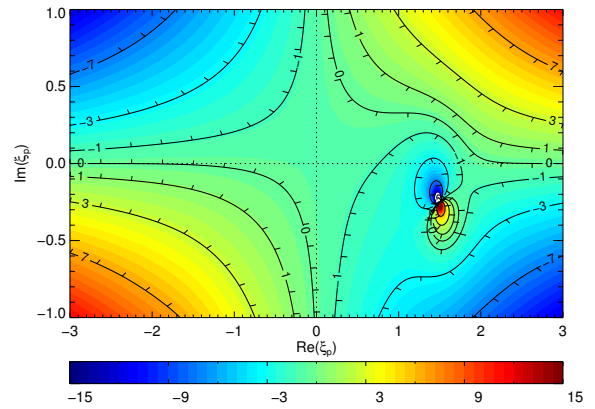


Figura 2.19: Partes real e imaginarias de γ_p^k para $\xi_p = X/(Y\sqrt{\tilde{\beta}_p})$ real. También se muestra el caso límite de fluido frío $\gamma_p^K = 3$. Notar la asimetría para $\xi_p > 0$ y $\xi_p < 0$.

en donde se aprecia que la parte real de γ_p^K es siempre positiva, concordando con lo conocido de termodinámica, pero que su parte imaginaria es manifiestamente negativa en las cercanías de $\xi_p \approx 1.4$. Notar que el límite frío antes usado se puede escribir en unidades normalizadas como $\xi_p \gg 1$, ubicado por tanto bien a la derecha en el gráfico anterior. Por otra parte, en el caso general en que esta velocidad de fase normalizada es compleja, el comportamiento de este índice politrópico puede llegar a ser bastante abrupto en ciertos puntos específicos (relacionados con los ceros de la función zeta), tal como se ejemplifica a continuación:



(a) Contornos de $Re(\xi_p)$



(b) Contornos de $Im(\xi_p)$

Figura 2.20: Gráficos de contorno de la parte real (izquierda) e imaginaria (derecha) de γ_p^K v/s $Re(\xi_p) = Re(X)/(Y\sqrt{\tilde{\beta}_p})$ y $Im(\xi_p) = Im(X)/(Y\sqrt{\tilde{\beta}_p})$.

Notar la singularidad con una violenta variación de valores infinitamente negativos a positivos, debido a una raíz de la función zeta (ver gráfico C.5). Se ha comprobado un mayor rango que el presentado en búsqueda de otras singularidades, pero todas ellas son más pequeñas y situadas en valores de $Im(\xi_p) > -1.5$, por lo que no son de mucho interés en lo aquí investigado. Pero a modo de ilustración, y también con el objetivo de determinar las intersecciones de las curvas de contorno a nivel cero de las partes real e imaginaria de γ_p^k a nivel 0, que conforman la base del método de resolución de relación de dispersión detallado en la siguiente sección, se mostrará el diagrama del valor absoluto de γ_p superpuesto a dichas curvas:

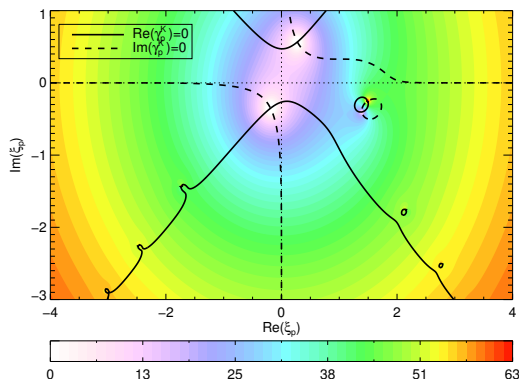


Figura 2.21: Valor absoluto $|\gamma_p^k(\xi_p)|$. También se muestran las curvas de los contornos a nivel 0 de las partes real e imaginaria de γ_p^k . El código de colores es logarítmico.

Comparar en primer lugar con el gráfico análogo para la función zeta C.5. Hay dos claros puntos en donde $Re(\gamma_p^K) = Im(\gamma_p^K) = 0$ situados cerca y simétricos al origen (primer y cuarto cuadrantes), además de otro par de intersecciones en la zona correspondiente a la singularidad antes mostrada. Pero también hay otras intersecciones, apenas perceptibles, situadas más abajo en el eje $Im(\xi_p)$, asociadas a otras raíces de la función zeta (recordar el gráfico de ella mencionado).

Ahora bien ¿En qué región aproximada de los diagramas anteriores están los ξ_p de las inestabilidades generadas en este plasma protón-protón? Para responder esto, sea, por ejemplo, el máximo de la inestabilidad beat del caso estándar a mostrar en la figura 2.25c. Ella posee $Re(X) = 0.301$, $Im(X) = 0.00957$ e $Y = 0.486$. Luego, dado que $\tilde{\beta}_p = 0.1$, se tendrá: $\xi_p = 1.959 + i0.0627$, y con ello $\gamma_p^K = 10.162 + i0.0818$. Las demás inestabilidades debieran tener valores similares, por lo que no se esperan comportamientos muy cambiantes por puntos situados cerca de las raíces de γ_p^k (no debería haber para las inestabilidades analizadas).

Obtención de relación de dispersión cinética-híbrida

Ahora bien, ¿Cómo obtener la relación de dispersión a partir de este índice politrópico? La ecuación (2.91) es formalmente idéntica que la obtenida en el caso de fluido (2.39), si se considera al coeficiente de Fourier de la presión igual al obtenido en ese modelo (2.21), pero con el índice politrópico dado por la expresión cinética (2.95). Así, podemos ver que el desarrollo que continúa desde dicho punto (ec. (2.39)) es el mismo que para el caso de fluido con la salvedad anterior, por lo que la relación de dispersión seguirá dada por (3.56). Esta única discrepancia se manifiesta en el cambio de β_p de fluidos de (1.37) a (1.35), y correspondientemente de la cantidad Δ que debe cambiar de (F.7) a cinética (F.15).

2.7. Modelo cinético en dirección longitudinal: Resultados numéricos

2.7.1. Método y caso límite de amplitud nula

Al igual que para fluidos, ahora se presentará la solución numérica de la relación de dispersión cinética híbrida en el caso límite $A = 0$ (ver figura (2.4)), con el mismo X_0 y beta total, aunque con varias combinaciones de los respectivos aportes de electrones y protones, para una comparación adecuada. Aquí conviene considerar un par de observaciones en relación a lo anterior:

- Para escoger una equivalencia apropiada entre los parámetros beta electrónicos de modelos de fluidos y cinético-híbridos, relacionados mediante (F.14), se seguirá los resultados obtenidos en [Araneda et al., 2007], donde se concluyó que una buena aproximación es considerar $\beta_e^F = \beta_e^K/2$. Por otro lado, dado que los electrones se consideran isotérmicos, se debe tener $\gamma_e = 1$ en concordancia con el límite apropiado del índice politrópico antes deducido: (2.99). Sin embargo, en realidad, no es posible asignar un índice politrópico electrónico único al comparar modelos cinéticos con fluidos, como ha sido discutido en, por ej, [Inhester, 1990]. Así que esto debería tomarse sólo como una primera aproximación.
- Dado que las definiciones de parámetros beta de protones en ambos modelos, β_p y $\tilde{\beta}_p$, son de distinta naturaleza, no se pueden comparar directamente, pero aún así se considerarán numéricamente iguales para estos efectos.

Ambas consideraciones han sido verificadas extensivamente en esta tesis, justificando a posteriori su utilización. Ahora bien, para resolver numéricamente la relación de dispersión (2.61), con γ_p cinético dado por (2.95), se escribe como una ecuación de la forma:

$$D(\omega_r + i\gamma, k) = \Re(D(\omega_r + i\gamma, k)) + i\Im(D(\omega_r + i\gamma, k)) = 0 \quad (2.100)$$

Luego, con un k fijo, se puede considerar $\Re(D)$ y $\Im(D)$ como dos funciones reales dependiente cada una del par de variables también reales ω_r y γ . Así, los puntos de la relación de dispersión serán aquellos en que los contorno a nivel 0 (curvas de nivel) de dichas funciones satisfagan simultáneamente:

$$\Re(D(\omega_r + i\gamma, k)) = 0 \quad (2.101)$$

$$\Im(D(\omega_r + i\gamma, k)) = 0 \quad (2.102)$$

Graficando estas relaciones en una región seleccionada del plano $\gamma - \omega_r$, se tendrá simplemente que cada punto de la relación de dispersión estará en la intersección entre dichas curvas (ver gráficos de la sección C.2 para las curvas asociadas a la función zeta). Éste se puede hallar mediante un algoritmo basado en el método de Newton-Raphson, a partir de una valor inicial de prueba. Finalmente, repitiendo el mismo procedimiento para un k muy cercano, en donde el valor de prueba para encontrar cada intersección (en una muy buena aproximación) se puede tomar como el hallado anteriormente, se tendrá finalmente una curva asociado a un modo de la relación de dispersión (por cada intersección). Mediante este método se obtienen las siguientes curvas de nivel para dos valores de k , cuya morfología se hereda claramente de gráficos similares para la función Z (C.5) y el índice γ_p^K (2.21):

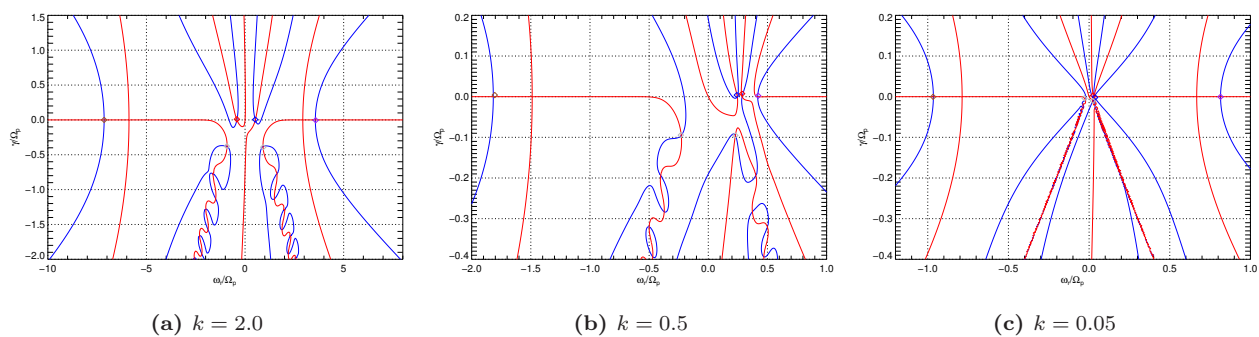


Figura 2.22: Curvas de nivel en azul (2.101) y en rojo (2.102) para los valores de k indicados. Parámetros: $A = 0$, $X_0 = 0.35$, $\beta_e^K = 0.1$, $\gamma_e = 1$ y $\widetilde{\beta}_p = 0.1$. La iteración en k va de valores mayores a menores. Cada intersección está indicada con un código de colores. Los grises indican modos acústicos.

Las curvas asociadas a las bandas laterales son fácilmente identificables, pero no así los modos acústicos debido a la gran cantidad de estos (infinitos, en rigor) y a su fuerte amortiguamiento (ubicados bien abajo en el eje γ). Por lo tanto, sólo se muestra el par menos amortiguado. Notar que para k cercano a 0 (figura derecha), casi todas las intersecciones menos amortiguadas se “acumulan” en torno al origen (sólo 2 de los 6 modos no tienden a $\omega \rightarrow 0$). En la figura de la derecha, se nota también que los modos acústicos son siempre simétricos con respecto a $\omega_r = 0$, existiendo una gran cantidad de ellos muy juntos, es decir, con una mínima variación en ω y γ . De este modo, con un número suficiente de estos diagramas para valores de k entre 2.0 a 0.01 (notar la singularidad en $k = 0$), se confecciona los siguientes diagramas de dispersión para los mismos parámetros del caso estándar de fluidos de la figura 2.4.

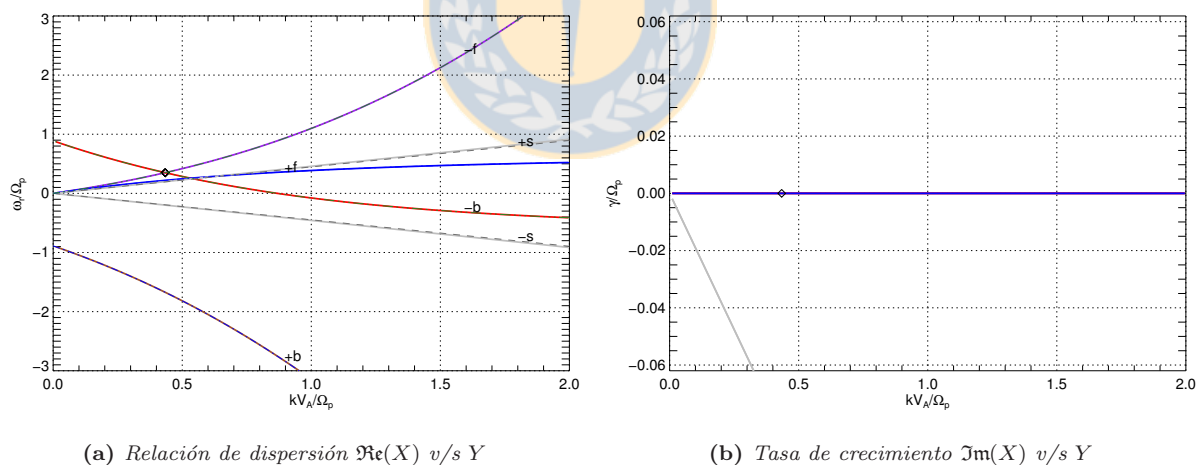


Figura 2.23: Soluciones de la relación de dispersión cinética híbrida. Mismos parámetros de la figura anterior

Por construcción, todas las bandas laterales (en colores distintos) coinciden exactamente con las soluciones tipo fluidos de la figura 2.4, incluyendo su tasa de amortiguamiento nula. En cambio, las ondas acústicas están fuertemente amortiguadas y sus curvas ω v/s k se distancian muy poco de las correspondientes al caso fluido.

2.7.2. Caso estándar

Aquí se muestran las soluciones para una amplitud $A = 0.3^2$. Tenemos las curvas de nivel análogas a 2.22:

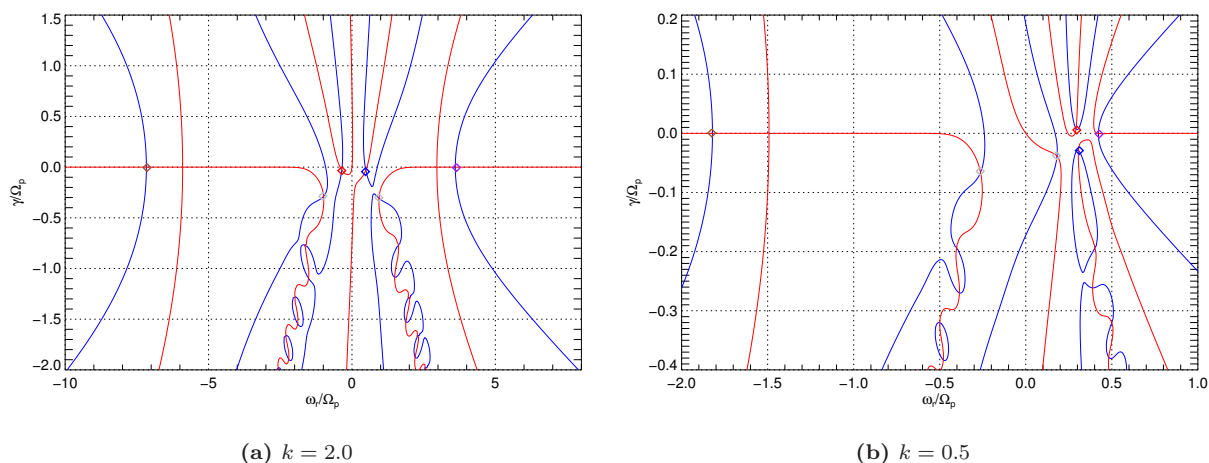


Figura 2.24: Curvas de nivel en azul (2.101) y rojo (2.102) para los valores de k indicados, en el caso $A = 0.3^2$. El resto de parámetros son iguales a los de las figuras previas.

Hay tres diferencias relevante con respecto al caso $A = 0$ 2.22: primero se nota un menor amortiguamiento del par de modos acústicos antes identificados (los con menor amortiguamiento); en segundo lugar, la simetría con respecto a $\omega_r = 0$ de los modos azul, rojo y los dos acústicos en el caso $A = 0$ desaparece notoriamente; y finalmente, conviene notar la inestabilidad ($\gamma > 0$) de la intersección marcada en rojo para $k = 0.5$. Mediante un número suficiente de estos diagramas, se logra obtener las siguientes curvas de dispersión:

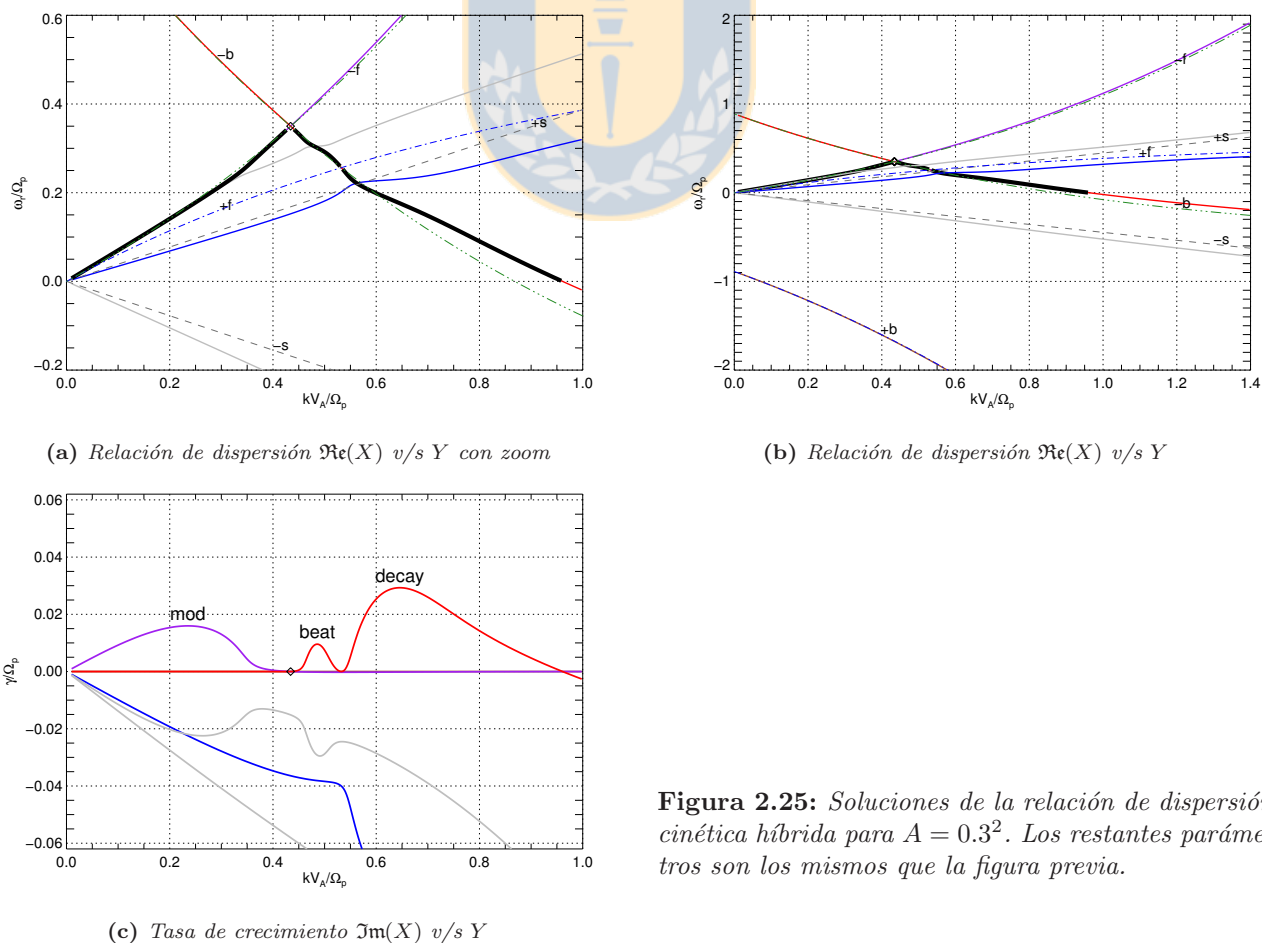


Figura 2.25: Soluciones de la relación de dispersión cinética híbrida para $A = 0.3^2$. Los restantes parámetros son los mismos que la figura previa.

Al comparar con el caso de fluido (figura 2.6), primero se nota que todas las curvas ω v/s k poseen una muy buena correspondencia, excepto en las zonas inestables. En efecto, es claramente visible que los modos amortiguados e inestables ya no aparecen juntos sino que son claramente distinguibles (se remueve la degeneración de las raíces complejas y conjugadas de fluidos, ver [Araneda et al., 2007]), es decir, de las dos ramas que en el caso de fluido interactuaban para formar una inestabilidad y tenían γ 's iguales en magnitud pero de signo opuesto, ahora una sólo de ellas presentará $\gamma > 0$ mientras que la otra hará lo contrario. Esto tiene las siguientes consecuencias para las tres inestabilidades:

- Las inestabilidades modulacional y decay tienen tasas de crecimiento ligeramente menores que las de fluido, mientras que la beat disminuyen notoriamente sus γ_{max} debido a los efectos cinéticos.
- La inestabilidad modulacional se ubica en la rama $-f$, mientras que la beat y la de decaimiento se ubican en $-b$. Notablemente, éstas son las mismas ramas que siempre caracterizan a cada una de las inestabilidades en el modelo de fluidos (ver discusión de la figura 2.17).
- Los γ_{max} de la inestabilidad beat, se producen donde $+f$ intersecta a $-b$ (las mismas ramas que lo conforman en fluidos. Comparar figuras 2.25a con 2.6b), además de estar acotada en su rango k por arriba con el punto (Y_0, X_0) , y por abajo con la intersección de $+f$ con la rama $-b$. La inestabilidad decay, consecuentemente, se encuentra debajo de esta última intersección.
- Todas las inestabilidades, pero de forma más notoria en la decay, ensanchan notoriamente el rango de k en los que se presentan, siendo inestable casi todo el rango mostrado.

2.7.3. Efectos cinéticos en β

Ahora se explorará las consecuencias del parámetro $\tilde{\beta}_p$, que como se verá está asociado a los efectos del amortiguamiento Landau. Para ello, y de forma similar a [Araneda and Gomberoff, 2004], se presentarán las soluciones numéricas de dos casos extremos, manteniendo constante y del mismo valor que el caso estándar (2.25) la suma total de beta: $\beta^K = \tilde{\beta}_p + \beta_e^K = 0.2$. El primero se ellos será con un $\beta_e^K = 0.196$ ¹⁰ (y protones fríos) que deberá presentar un comportamiento predominantemente de fluido, mientras que el otro será con $\tilde{\beta}_p = 0.196$ (y electrones fríos) en donde deben predominar los efectos cinéticos:

¹⁰Se escoge este valor no tan cercano a 0.2, porque cantidades un poco menores para el $\tilde{\beta}_p$ provocan ciertos problemas en el algoritmo antes descrito para encontrar las relaciones de dispersión

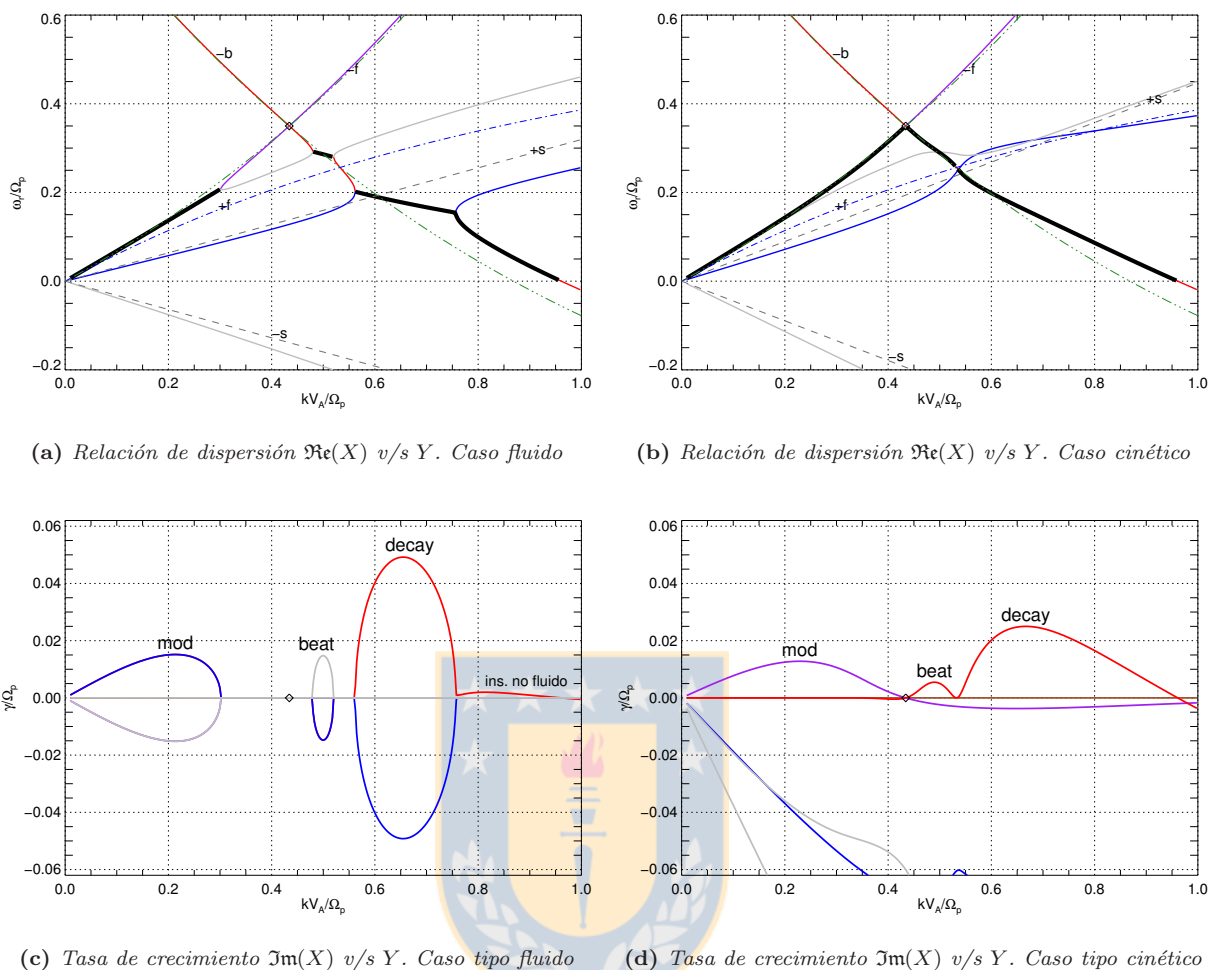


Figura 2.26: Diagramas de relación de dispersión. Izquierda: caso tipo fluidos con $\beta_e^K = 0.196$ y $\tilde{\beta}_p = 0.004$. Derecha: caso tipo cinético con $\beta_e^K = 0.004$ y $\tilde{\beta}_p = 0.196$. El resto de los parámetros se mantiene igual que los casos anteriores: $A = 0.3^2$ y $X_0 = 0.35$

De aquí se concluye, comparando además con el caso cinético con igual $\tilde{\beta}_p$ y β_e^K (figura 2.25c) y con el modelo puro de fluidos (figura 2.6), que:

- Los efectos cinéticos provocan una disminución en el γ_{max} de todas las inestabilidades con respecto al caso de fluidos puro, así como el ensanchamiento mencionado en el rango k de cada inestabilidad. Estos efectos son más notorios conforme el aporte de los protones $\tilde{\beta}_p$ al beta total se incrementa, tal como se puede comprobar para los k_{max} y γ_{max} de cada inestabilidad, resumidos en la siguiente tabla:

Ins.	Fluido $\beta = 0.1$	Cinético frío $\tilde{\beta}_p = 0.004$	Cinético mixto $\tilde{\beta}_p = 0.1$	Cinético $\tilde{\beta}_p = 0.196$
Mod	(0.2123, 0.01506)	(0.2135, 0.001515)	(0.2353, 0.01570)	(0.02289, 0.01280)
Beat	(0.5002, 0.01468)	(0.4998, 0.014760)	(0.4859, 0.009574)	(0.4899, 0.005474)
Decay	(0.65865, 0.05036)	(0.6548, 0.04919)	(0.6459, 0.02929)	(0.6667, 0.02499)

Tabla 2.2: Máximos de inestabilidades (k_{max}, γ_{max}) en modelo de fluido y cinético-híbrido (4 cifras sign.)

Notar la buena correspondencia del caso cinético tipo fluido con el modelo de fluidos puro. Extrañamente, el γ_{max} de mod no disminuye como todas las demás, sino que aumenta ligeramente entre $\tilde{\beta}_p = 0.04$ y $\tilde{\beta}_p = 0.1$. Esto será explicado en la siguiente figura.

- La inestabilidad decay presenta además una leve inestabilidad a su lado derecho (en la misma rama $-b$) *sin* una contraparte cinética, que no aparece en el gráfico al que debería asemejarse 2.6, siendo un efecto cinético remanente ya descrito en [Araneda et al., 2007].
- Notar que en el caso tipo fluidos (figura izquierda), las ramas en donde se desarrollan inestabilidades tienden a presentar la degeneración característica asociada a las raíces complejas y conjugadas, manifestada en una contraparte amortiguada con el mismo γ (en valor absoluto) de la inestabilidad correspondiente, una diferencia radical de lo que sucede en el comportamiento cinético de la figura derecha. Sin embargo, en el caso intermedio mostrado en 2.25c, se puede apreciar que la rama $+f$ tiende a presentar una ligera simetría con respecto a las inestabilidades modulacional y beat, indicando la correspondencia conocida del modelo de fluidos puro.
- La topología de las curvas X v/s Y del caso tipo cinético y el mixto 2.25a son muy similares, valiendo por tanto la explicación allí dada. Sólo se produce, para el caso con mayor $\tilde{\beta}_p$, el fenómeno mencionado de reducción de los γ_{max} de cada inestabilidad.

Variando β_p con beta total fijo

Una forma de visualizar el cambio de comportamiento de estas inestabilidades entre los casos extremos mostrados (además de verificar las aseveraciones anteriores en diferentes casos y complementar lo mencionado en [Araneda et al., 2007]), son los gráficos de γ_{max} v/s $\tilde{\beta}_p$ (análogos a los del caso fluido), manteniendo β total y el resto de parámetros constante.

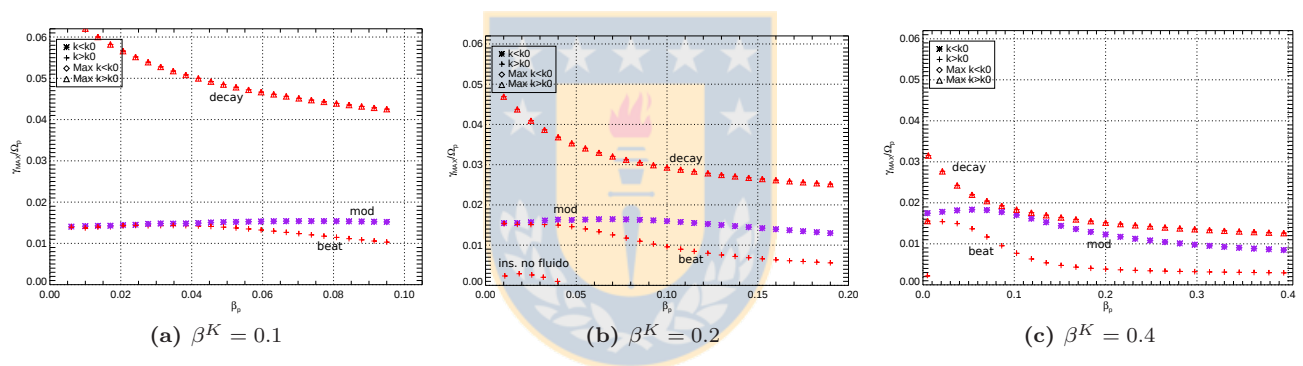


Figura 2.27: Diagramas de máximos de inestabilidades γ_{max} v/s $\tilde{\beta}_p$, para tres casos de beta total $\beta^K = \tilde{\beta}_p + \beta_e^K$ (valor constante para c/u). Los demás parámetros son los mismos que en los casos anteriores. Valores de $\tilde{\beta}_p$ pequeños, a la izquierda, implican un comportamiento tipo fluido, mientras que en el extremo derecho de cada gráfico el comportamiento es tipo cinético.

Observaciones:

- Nótese las curvas de γ_{max} de las inestabilidades beat y decay monótonamente decrecientes, siguiendo la tendencia general antes identificada. Aunque en forma más precisa, beat se mantiene casi constante para $\tilde{\beta}$ bajos (más cerca del límite de fluidos). Conforme aumenta el β total, la tendencia decreciente de las curvas de γ_{max} de estas inestabilidades será cada vez más marcada.
- Ahora se puede explicar el comportamiento aparentemente extraño del γ_{max} de la inestabilidad modulacional, identificado en la tabla previa. La curva de γ_{max} de mod tiene un máximo local hacia $\tilde{\beta}_p \approx 0.08$, decreciendo para beta de protones mayores y menores. Este punto se mantiene relativamente constante para diferentes casos de beta total.
- También se observa el efecto cinético remanente incluso en el caso en que la presión electrónica es el principal contribuyente al β^K total (límite frío, $\beta_p \approx 0$), manifestada en la existencia de la pequeña inestabilidad ya mencionada a la derecha de decay (ins. no fluido).
- Aunque no mostrado, se ha verificado que las velocidades de fase $v_{\phi,max}$ y k_{max} no muestran variación significativa para un beta total constante, señal que estas inestabilidades no se desplazan en k al variar sólo $\tilde{\beta}_p$.

- *Conclusión resumen 1:* No todas las inestabilidades disminuyen sus tasas de crecimiento al aumentar los efectos cinéticos (mayor $\tilde{\beta}_p$), manteniendo beta total constante, sino que incluso pueden aumentar sus γ_{max} en ciertos sectores (en particular, la ins. modulacional), en especial más cerca del límite de fluido ($\tilde{\beta}_p$ pequeño)
- *Conclusión resumen 2:* Entre más pequeño sea el beta total, la influencia de $\tilde{\beta}_p$ será cada vez menos marcada, manifestada en una escasa variación de las curvas de γ_{max} .

2.7.4. Efectos en los umbrales de beta total

Ahora se cambiará continuamente el beta total β^K , manteniendo igual proporción del beta de electrones y protones, y/o manteniendo constante alguno de ellos. Esto permitirá responder la siguiente pregunta: ¿Variará el umbral en beta, en donde las inestabilidades beat y modulacional se suprimen, en comparación al caso puro de fluidos (ver resumen en figura 2.13)?

Límite de fluido y perturbaciones

Dada la gran cantidad de posibles combinaciones de beta de electrones y protones que satisfacen el mismo beta total de fluidos, primero se responderá la pregunta anterior “perturbando” la solución conocida en el límite frío, es decir, variando el beta electrónico y agregando de a poco los efectos cinéticos en $\tilde{\beta}_p$:

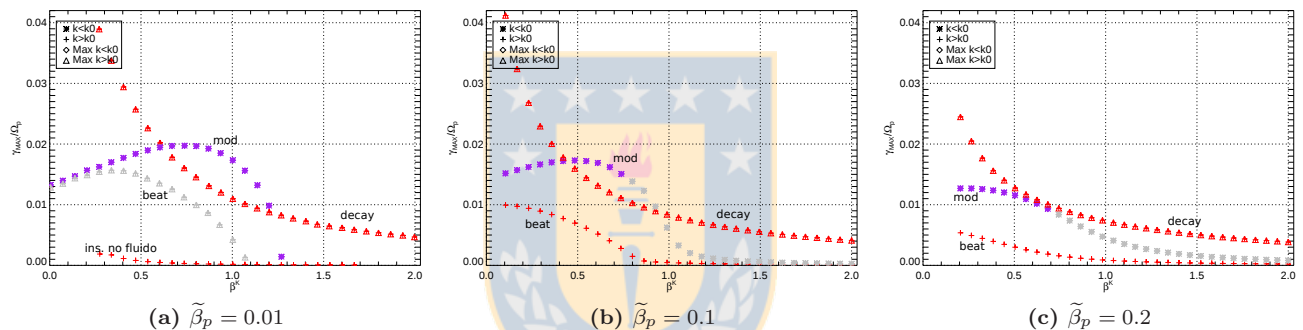


Figura 2.28: Diagramas de máximos de inestabilidades γ_{max} v/s $\beta^K = \tilde{\beta}_p + \beta_e^K$, para tres casos de $\tilde{\beta}_p$ constante (es decir, se varía sólo el beta electrónico). Los demás parámetros son los mismos que en los casos previos. Notar que, como la mayor contribución al beta total es electrónico, entonces se ha extendido el rango hasta $\beta^K = 2.0$, debido al factor 2 de diferencia con la definición de fluidos, para poder establecer una adecuada comparación.

- El caso izquierdo, con mínimos efectos cinéticos, tiene una excelente correspondencia con la figura análoga de fluidos 2.10a, incluyendo los umbrales característicos de supresión para beat y modulacional. Es importante enfatizar que, debido al factor 2 de diferencia en el parámetro β_e en modelo de fluidos y cinético, cada cantidad β^K se debe dividir por 2 para establecer una adecuada comparación con la figura de fluidos antes mencionada. Sólo debe notarse la aparición de una inestabilidad muy pequeña para k mayores que los de decay, inexistente en el límite de fluidos, y que ya había sido identificada en la figura 2.26c.
- Conforme se incrementa el beta de protones, más que cambiar el umbral de supresión en β_K para las inestabilidades beat y modulacional, se produce en cambio una disminución en la pendiente de las curvas con tendencia decreciente γ_{max} , “difuminando” un posible intento de fijar un umbral definido en el cual se suprimirían. En otras palabras, el umbral se hace cada vez más “difuso” gracias a la “persistencia cinética” (aunque con un γ marginal) de estas inestabilidades, conforme los efectos cinéticos son más importantes (mayor $\tilde{\beta}_p$).
- El aumento de $\tilde{\beta}_p$ también disminuye los γ_{max} de todas las inestabilidades, en especial para β total pequeño. Consistentemente con la suavización de curvas, para β^K más grande dicho parámetro tiende a aumentar los γ_{max} de beat y modulacional. Cabe mencionar que el cambio de color en la curva de la inestabilidad modulacional se debe a un cambio en la rama de dispersión donde se genera. Para valores de β_K menores que una cierta cantidad, modulacional se produce en $-f$ (muy cerca de $+f$), pero para valores mayores se generará en la rama $+s$ (y muy cerca de $+f$).

- En todos estos diagramas tipo fluidos, las inestabilidades modulacional y beat tienen tasas pequeñas y similares de γ_{max} para β^K grandes, siendo decay siempre dominante. Para visualizar de mejor forma esta situación, se mostrarán diagramas de γ v/s k en tres puntos relevantes del gráfico intermedio 2.28b:

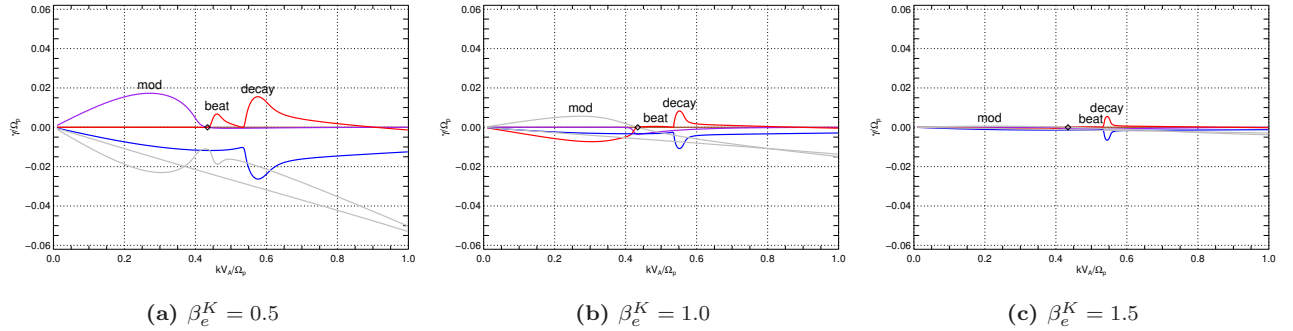


Figura 2.29: Tasas de crecimiento γ_{max} v/s k para $\tilde{\beta}_p = 0.1$ y tres valores de β_e^K equidistantes en la figura 2.28b. Los demás parámetros son los mismos que en los casos previos.

Nótese el violento cambio en la morfología de los γ de cada inestabilidad al variar β_e . Incluso en este caso en que los efectos cinéticos son un tanto débiles, de todas formas se aprecia el cambio de comportamiento con respecto al caso de fluido: las inestabilidades modulacional y beat se mantienen mucho más allá de su umbral de supresión en fluidos (ver figura derecha), aunque con tasas de crecimiento más bien marginales (ver diagramas y conclusiones similares en [Araneda, 1998] y [Araneda et al., 2007]). ¿Como se explica esto, sabiendo que los diagramas ω v/s k de la última figura debieran ser similares al modelo de fluidos mostrado en 2.11d? La respuesta es que las inestabilidades modulacional y beat (en particular) se desarrollan sólo en una rama: $-f$ y $-b$, respectivamente. Es decir, la situación es muy similar a la explicada en la figura 2.26b, con beat cubriendo todo el rango entre el punto (Y_0, X_0) y la intersección de $-b$ con $+f$, no requiriendo la rama $+s$ que sería esencial para el desarrollo de la inestabilidad en el caso de fluidos mencionado. Para modulacional la situación es completamente análoga.

Límite cinético y perturbaciones

¿Qué sucederá con los umbrales de beta total cuando la situación es fundamentalmente cinética?. Procediendo de forma similar al caso anterior, se partirá con el caso extremo en donde $\beta_e^K = 0.01$, variando sólo $\tilde{\beta}_p$, y de a poco se irá incrementando la importancia de los electrones.

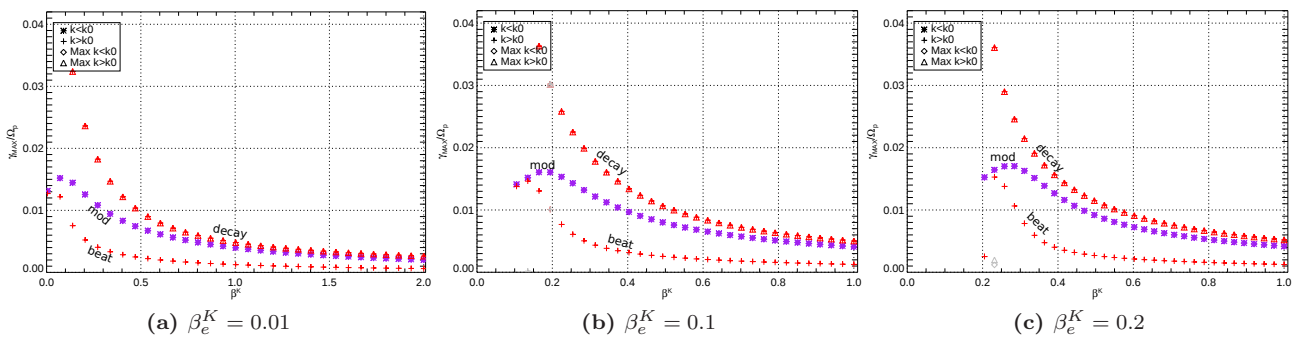


Figura 2.30: Diagramas de máximos de inestabilidades γ_{max} v/s $\beta^K = \tilde{\beta}_p + \beta_e^K$, para tres casos de β_e^K constante (es decir, se varía sólo el beta protónico). Los demás parámetros son los mismos que en los casos previos. Como la diferente definición de β_e no desempeña un papel relevante aquí, al ser mínima su presencia, el rango es sólo hasta $\beta^K = 1$.

- De la discusión del grupo de figuras previo, se podría haber inferido que en el diagrama izquierdo, que es el caso con mayores efectos cinéticos, todo intento de fijar algún umbral de supresión en β^K , para

las inestabilidades beat y modulacional, es completamente inútil. Esto se debe a que las curvas γ_{max} de ellas son decrecientes de una forma tan suave que permanecen para todo el rango observado (también se ha verificado que continúan mucho más allá de $\beta^K = 1$), en una especie de "persistencia cinética" completamente inexistente en fluidos.

- El incremento de los efectos tipo fluidos, debido a β_e , tienen como consecuencia el aumento de la pendiente decreciente de todas las curvas, que es precisamente lo opuesto de lo observado en la discusión de la figura 2.28. Consecuentemente, para beta total bajos, las tasas de crecimiento γ_{max} de todas las inestabilidades crecen. Sin embargo, todas ellas se mantienen a lo largo de todo el rango mostrado, debido a la predominancia de efectos cinéticos.
- Al comparar con la situación tipo fluido de la figura 2.28 para β^K grandes, se nota que la inestabilidad más afectada es la modulacional, pasando de tener tasas pequeñas y similares a beat en dicho caso, a mayores y similares a decay para la situación cinética aquí analizada. A modo de ejemplo, se mostrará el equivalente de la figura 2.29 para este caso cinético:

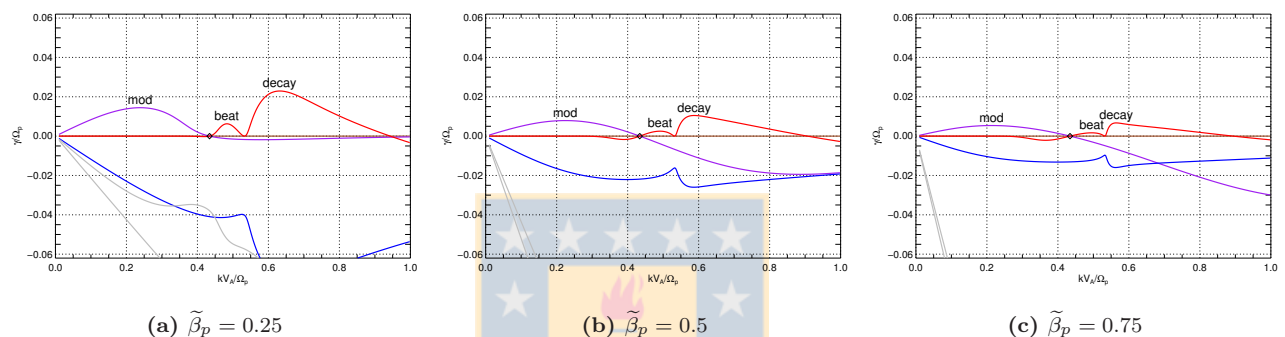


Figura 2.31: Tasas de crecimiento γ_{max} v/s k para $\beta_e = 0.1$ y tres valores de $\tilde{\beta}^p$ equidistantes en la figura 2.30b. Los demás parámetros son los mismos que en los casos previos.

A diferencia de 2.29, en donde la forma de las curvas γ de cada inestabilidad cambia radicalmente al variar β_e , el incremento del beta protónico no modifica radicalmente la morfología de las tasas de crecimiento, aunque sí sus valores precisos. Es decir, sólo se requiere un pequeño valor de $\tilde{\beta}^p$ para producir el típico comportamiento cinético de inestabilidades ensanchadas en k en una sola rama; pero su incremento adicional sólo produce un escalamiento de sus γ , sin variar apreciablemente su forma.

Caso intermedio fluido-cinético

Por completitud, merece ser mostrado el caso que está a mitad de camino entre los comportamientos tipo fluidos y cinético:

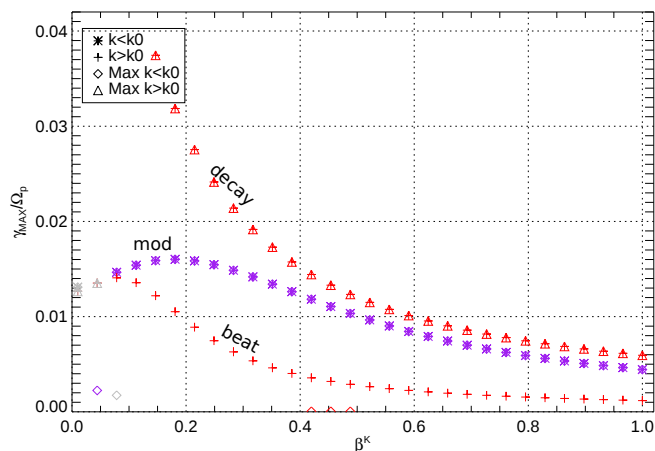


Figura 2.32: Diagrama de máximo de inestabilidades γ_{max} v/s $\beta^K = \tilde{\beta}^p + \beta_e^K$, para el caso mixto $\tilde{\beta}^p = \beta_e^K = \beta^K / 2$. Los demás parámetros son los mismos que en los casos previos.

Notar que los efectos cinéticos desempeñan un papel preponderante, a pesar de la igualdad de su beta protónico con el electrónico, en el sentido que el panorama general es muy similar al caso con $\beta_e^K = 0.1$ de la figura 2.30b, valiendo todas las explicaciones allí dadas.

Por otra parte, y al igual que se hizo con teoría de fluidos, es posible investigar cómo varía esta situación para amplitudes distintas de la onda pump. Sin embargo, se ha verificado que, en líneas generales, el panorama es similar a lo ya descrito en el modelo de fluidos por 2.12 (incluyendo el desplazamiento de los umbrales en la forma allí presentada), sobre todo en el caso en que el beta electrónico predomina. El caso cinético, con mayores presencia de $\tilde{\beta}_p$, adopta el mismo patrón aquí observado: "difuminación" de umbrales precisos y "persistencia" cinética de las inestabilidades. Debido a que dicho análisis no reportaría información adicional a la ya conocida, no será presentado en esta tesis.

2.7.5. Efectos en los umbrales de amplitud

¿Variarán el umbral en la amplitud A , en donde las inestabilidades beat y modulacional se suprimen, en comparación al caso de fluidos (figura 2.7)? Para responder lo anterior, se variará la amplitud de la onda A reproduciendo la figura antes mencionada, para tres casos representativos del parámetro β de electrones y protones:

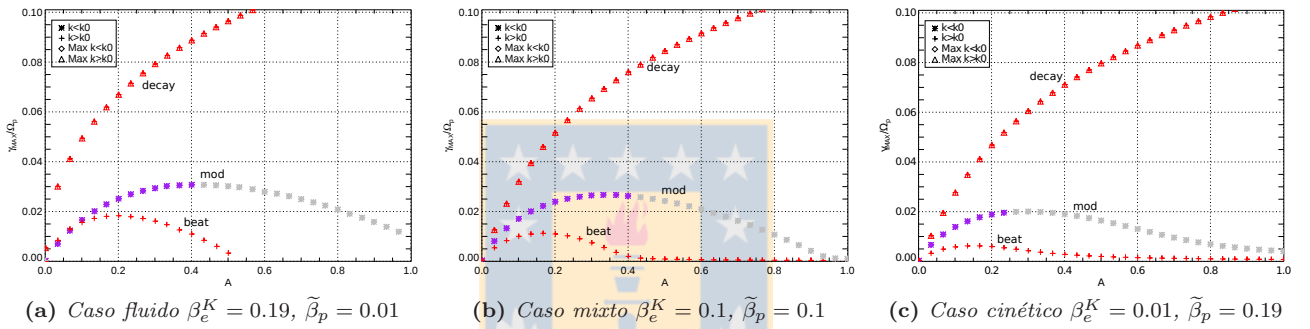


Figura 2.33: Diagramas de máximos de inestabilidades γ_{max} v/s A con un beta total constante $\beta^K = 0.2$ y los beta de electrones y protones indicados en cada figura. $X_0 = 0.35$

Al comparar entre ellas y con la figura de fluidos pura 2.7, se observa:

- Una reducción en los γ_{max} para todas las inestabilidades conforme mayor sea la proporción de $\tilde{\beta}_p$, tal cual ya se había notado antes. El cambio de color en la inestabilidad modulacional se debe a las mismas razones expuestas a continuación de la figura 2.28.
- A pesar de la reducción de γ_{max} de las inestabilidades beat y modulacional, el umbral en A (valor desde el cual se suprimen) no varía apreciablemente. Más bien, entre mayores sean los efectos cinéticos (mayor $\tilde{\beta}_p$), las curvas de inestabilidades beat y modulacional decaerán cada vez más suavemente, haciendo más "difuso" el umbral en A y manteniéndolas con γ_{max} marginales para un mayor rango de amplitudes. Esto es en contraposición al caso de fluidos, y es el mismo tipo de comportamiento antes descrito para los umbrales en β^K .
- Aunque no es mostrado, se ha verificado que las velocidades de fase máxima $v_{\phi,max}$ y los k_{max} no se ven mayormente afectadas entre los tres casos aquí presentados y el caso puro de fluidos.

A modo de verificación, se comprobará si las predicciones de fluido en los diagramas γ_{max} vs A para dos betas distintos (ver figura 2.9 y su posterior discusión), se satisfacen cuando los efectos cinético son tan importantes como los de fluido:

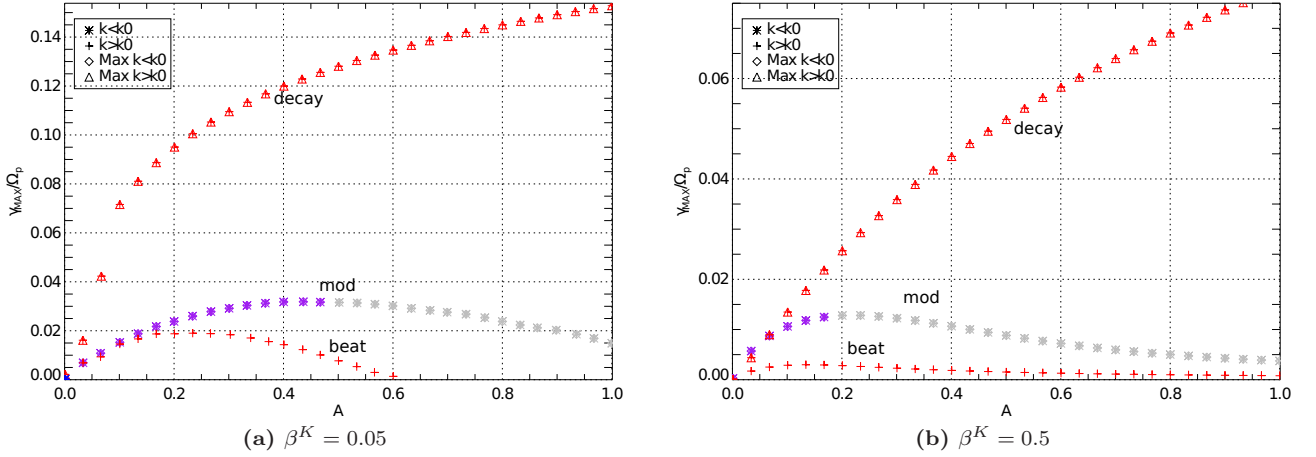


Figura 2.34: Diagramas de máximos de inestabilidades γ_{max} para $0 < A < 1.0$, con $\tilde{\beta}_p = \beta_e^K = \beta^K/2$. Izquierda: $\beta^K = 0.05$, Derecha: $\beta^K = 0.5$. $X_0 = 0.35$.

Al comparar con el antes mencionado caso de fluido (tomando en cuenta el factor 2 para las distintas definiciones de β_e), se puede inferir que:

- Para β^K total pequeño (figura izquierda), las características generales de las inestabilidades se mantienen (comparar, en particular, con 2.9a), en particular el aumento del A umbral de supresión de beat y decay.
- En cambio, los efectos cinéticos son mucho más notorios en el caso de β^K grandes (figura derecha), pues si bien también disminuyen los γ_{max} de las inestabilidades modulacional y beat, el decaimiento de sus respectivas curvas es lo suficientemente suave como para que se se mantengan apreciables incluso para amplitudes de $A = 1$, eliminando así el definido A umbral característico del caso fluido (comparar con 2.9d).

2.7.6. Efectos de la frecuencia de la pump

Ahora se mostrarán las (eventuales) diferencias, con respecto al caso de fluido de 2.16, que surgen de efectos cinéticos para diferentes frecuencias de la pump, con tres combinaciones distintas de beta.

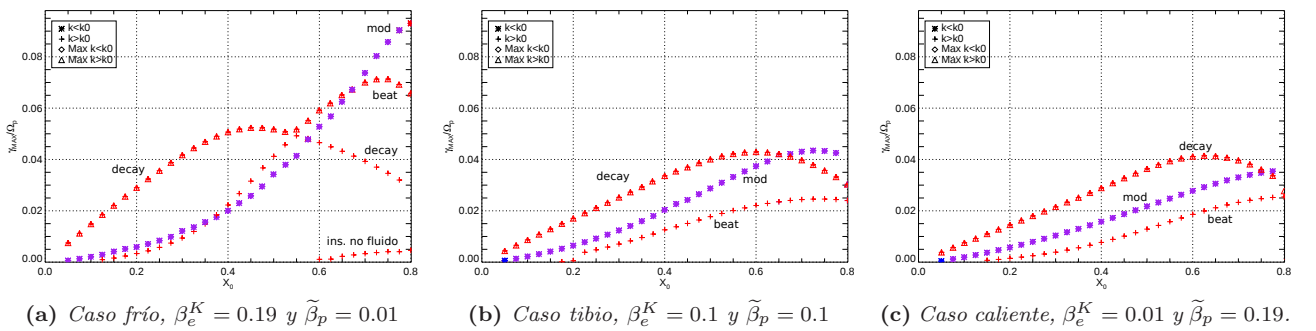


Figura 2.35: Máximos de inestabilidad γ_{max} v/s frecuencia de la pump X_0 variable, para $A = 0.3^2$ y varios combinaciones de beta's.

- En el caso frío (figura izquierda), la correspondencia con el caso puro de fluidos en general es buena, aunque con la esperable pequeña reducción de las tasas máximas de crecimiento debido al amortiguamiento Landau 2.16a. Pero, a pesar de lo anterior, hay otra inestabilidad pequeña netamente cinética que aparece para frecuencias altas, similar a la de la figura 2.26c, aunque surge entre los k de la inestabilidad beat y decay.
- Curiosamente, la inestabilidad decay alcanza aproximadamente el mismo γ_{max} en los tres casos presentados, aunque para X_0 mayores conforme mayor sea la presión de los protones $\tilde{\beta}_p$. Es decir, para un X_0

dado, los γ_{max} de cada una de ellas serán menores conforme crezca $\tilde{\beta}_p$. Dicho fenómeno es un indicio que dependen más del beta total que de su distribución entre protones y electrones.

- La inestabilidad modulacional es la más fuertemente afectada por la proporción relativa del beta protónico, en particular para X_0 grandes, reduciendo fuertemente sus γ_{max} conforme $\tilde{\beta}_p$ crece. Es decir, esta inestabilidad es en la que los efectos cinéticos se manifiestan con mayor intensidad, avalando lo afirmado en 2.30 (aunque con tendencia contraria).

2.8. Simulaciones Híbridas

Además de la teoría y el análisis de datos experimentales, y con el advenimiento de computadoras con crecientes capacidades de procesamiento cálculo, en los últimos años se ha agregado otro poderoso método para mejorar el entendimiento de la física de plasmas: la simulación numérica de los procesos que allí ocurren. Dependiendo de las escalas involucradas y los fenómenos de interés, estas simulaciones pueden ir desde las magnetohidrodinámicas (válidas para escalas espaciales grandes) hasta las de partículas (válidas para escalas espaciales muy pequeñas). Las simulaciones que se mostrarán en este apartado caen en el rango de escalas medias (a ser precisado a continuación), reteniendo características de ambas situaciones extremas, denominándose por tanto simulaciones *híbridas*.

Aquí *no* se intentará hacer un estudio detallado de los resultados de estas simulaciones, sino tan sólo mostrar un reducido número casos de interés, que sirvan para ejemplificar y validar ciertas conclusiones obtenidas mediante la relación de dispersión analítica de las secciones y capítulos previos. En este sentido, los gráficos de las simulaciones servirán como resultados “experimentales”, con los cuales contrastar la teoría desarrollada, en especial para mostrar las (pocas) características rescatables de la relación de dispersión completamente cinética a desarrollar en el capítulo 4.

2.8.1. Método: Código Híbrido

El código híbrido más usado en el contexto de física de plasmas espaciales, es una simulación en donde los iones son tratados cinéticamente mientras que los electrones se consideran como un fluido sin masa. En forma, más precisa, posee tres características fundamentales (ver capítulo 5 de [Matsumoto and Omura, 1993]):

- Se consideran frecuencias bajas $\omega \ll \Omega_e$, de modo de desprestigiar el término de corriente de desplazamiento en la ecuación de Ampère (1.5). Ello implica desprestigiar procesos que ocurren a escalas del giroradio, longitud de Debye, frecuencia ciclotrónica, ó frecuencia de plasma de los electrones. Esta imposición, a veces denominada aproximación de Darwin, no radiativa, ó magnetoinductiva (ver sección 15.14 de [Birdsall and Langdon, 1991]), implica que las ecuaciones de Maxwell eliminan la propagación de ondas electromagnéticas (debido a la eliminación del retardo), pero permiten las ondas electrostáticas, magnetostáticas y los campos eléctricos inductivos.

Sin embargo, las frecuencias pueden llegar a ser del orden de la ciclotrónica de los iones $\omega \sim \Omega_p$, por lo que se toman en consideración todos los procesos en torno a dicha frecuencia, como también a la escala del giroradio ó longitud inercial de ellos (ver tabla 1.2 para los valores de estas cantidades en el viento solar).

- Los electrones (e) se tratan como un fluido isotérmico sin masa, de modo que su ecuación de momentum sea, en vista de (1.20):

$$0 = -n_e e (\vec{E} + \vec{V}_e \times \vec{B}) - \nabla P_e \quad (2.103)$$

en donde $P_e = \gamma_e k_B T_e$, con $\gamma_e = 1$ para la condición isotérmica de acuerdo a la discusión de (1.21) y (1.22) (aunque la forma precisa de la ecuación de estado electrónica sólo tiene un pequeño efecto en la solución final de la simulación. Ver página 112 de [Matsumoto and Omura, 1993]). Además, se considera siempre cuasineutralidad (1.63) $n_e = \sum_i n_i$ (i.e.,: desprestigiar escalas más pequeñas que la longitud de Debye λ_{D_i} de los iones), lo que implica la redundancia de la ecuación de Gauus (Poisson) (1.1) dentro de este análisis. Por lo general, ella se usa para calcular el campo eléctrico longitudinal E_z , pero en este contexto dicha cantidad se obtiene directamente de la ecuación de momentum para electrones mencionada más la condición de cuasineutralidad.

- Cada especie iónica i se considera compuesta de partículas de un plasma no colisional, obedeciendo por tanto cada una de ellas a la ecuación de movimiento dada por la fuerza de Lorentz (1.6):

$$\frac{d\vec{x}_i}{dt} = \vec{v}_i \quad (2.104)$$

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = e \left(\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B} \right) \quad (2.105)$$

Estas ecuaciones se resuelven, de forma estándar, por los métodos conocidos como PIC (“*particle in cell*”), imponiendo una grilla espacial donde calcular las densidades de carga y corrientes, que son acumuladas allí mediante un esquema de interpolación. Las ecuaciones para los campos electromagnéticos también se resuelven sobre la grilla, mientras que las fuerzas sobre las partículas se obtienen interpolando de vuelta los campos en las posiciones de ellas. Este tipo de interpolación, llamado “peso” (*weighting*), implica normalmente que muchas partículas físicas reales se consideran agrupadas en “súperpartículas” para estos efectos. (Para más detalles sobre estos métodos, ver capítulo 1 de [Büchner et al., 2003], y capítulos 1 y 2 de [Birdsall and Langdon, 1991].). Por último, cabe destacar que usualmente se escogen condiciones de borde periódicas tanto para las partículas como para los campos.

Con estos tres supuestos, existen muchas variantes de códigos híbridos, que se diferencian en la forma específica de tratar a las partículas, el número de dimensiones involucradas, el método para obtener y avanzar en el tiempo los campos electromagnéticos, etc. Para una perspectiva general de algunos de ellos y los problemas que pueden tratarse, véase capítulo 5 de [Matsumoto and Omura, 1993], ó el 8 de [Büchner et al., 2003], ó la sección 15.15 de [Birdsall and Langdon, 1991], además de las referencias allí mencionadas.

Detalles numéricos

En particular, aquí se usará el código híbrido descrito en [Araneda and Gomberoff, 2004] y [Araneda et al., 2007], que es de 1 dimensión espacial (en la dirección longitudinal z donde está el campo magnético estático B_s) pero manteniendo las tres componentes de velocidad. La caja de simulación se escoge de un tamaño 32 veces la longitud de onda pump: $L = 32\lambda_0 = 32 * 2\pi/k_0$. Ésta se dividirá en 2048 celdas que conformarán la grilla en donde calcular los campos, con 200 partículas en cada una de ellas. El tamaño de paso temporal variará entre $0.005 < \Delta t \Omega_p < 0.05$. Las ecuaciones para cada partícula (2.104) son avanzadas mediante un método “*leapfrog*” (avanzando alternadamente las posiciones y velocidades), mientras que los momentos (densidad, corriente y velocidad macroscópica) son calculados con una interpolación con peso de segundo orden. Los campos son avanzados en tiempo explícitamente, y las derivadas son calculadas con un esquema de diferencias finitas de cuarto orden.

Para inicializar el sistema, se escoge como onda pump un tren uniforme de ondas de Alfvén de propagación paralela y polarización circular, de modo que su relación de dispersión exacta esté dada, de acuerdo a la discusión de 1.5.3, por (1.95) ó (3.25) dependiendo si el plasma está conformado sólo por protones ó también con un beam de protones, respectivamente. Debido a ello, la función de distribución que obedecerán los protones será la dada en 1.138, con las velocidades transversales \vec{V}_\perp en su argumento dadas explícitamente en 1.86, de modo que (en unidades adimensionales del apéndice F):

$$\frac{f_0 V_A}{n_0} = \frac{\alpha}{(\pi \beta_p)^{3/2}} \exp \left[-\frac{\alpha(v_x - U_x^s)^2 + \alpha(v_y - U_y^s)^2 + v_z^2}{\beta_p V_A^2} \right] \quad (2.106)$$

con

$$\frac{\vec{U}^s}{V_A} = \frac{\sqrt{A}}{Y_0} \zeta_+^s \{ \cos[Y_0(z\Omega_p/V_A) - X_0(t\Omega_p)] \hat{x} + \text{sen}[Y_0(z\Omega_p/V_A) - X_0(t\Omega_p)] \hat{y} \} \quad (2.107)$$

además de

$$\alpha = 1 - X_0 \quad \text{y} \quad \zeta_{+,s} = \frac{X_0}{X_0 - 1} \quad (2.108)$$

Para los otros iones, la expresión general de las velocidades transversales es 3.18 (la misma pero con las frecuencias desplazadas por efecto Doppler debido a $U_z \neq 0$). En resumen, la función de distribución es una

maxwelliana con un drift transversal dependiente de la fase de la onda pump (por lo general pequeño si la amplitud de la pump también lo es), además de una anisotropía aparente entre las temperaturas transversal y paralela dada por (1.148). Numéricamente para $t = 0$, las partículas se deben “cargar” aleatoriamente en el espacio fase de acuerdo a la función de distribución antes mencionada, para lo cual se debe seguir un procedimiento de inversión descrito en la página 118 de [Matsumoto and Omura, 1993], ó con más detalle en las secciones 16.2-5 de [Birdsall and Langdon, 1991].

Por último, cabe mencionar que consistentemente con las normalizaciones del apéndice F, el tiempo está en unidades del inverso de la frecuencia ciclotrónica de protones: $\Omega_p t$, mientras que longitud será normalizada a la longitud inercial de los protones $z\Omega_p/V_A$, de modo tal que todas las velocidades estarán en unidades de la de Alfvén \vec{v}/V_A . El campo magnético estará en unidades del campo magnético de fondo \vec{B}/B_s , mientras que el campo eléctrico se normalizará a $\vec{E}/(B_s V_A)$. La densidad, masa y carga de los iones (a utilizar en las simulaciones del siguiente capítulo) se normalizará igualmente con respecto a las de los protones.

2.8.2. Diagramas de dispersión y Espectros de potencia

Caso amplitud nula

En primer lugar, se mostrará los resultados de una simulación en el caso límite en que la amplitud de pump es nula, estableciendo el paralelo con el resultado del modelo cinético-híbrido 2.23. Se ha escogido un tiempo total relativamente largo, $\Omega_p t = 986$, y un tamaño de paso $\Delta t \Omega_p = 0.03$. También se han considerado 200 partículas por celda, haciendo un total de 409600.

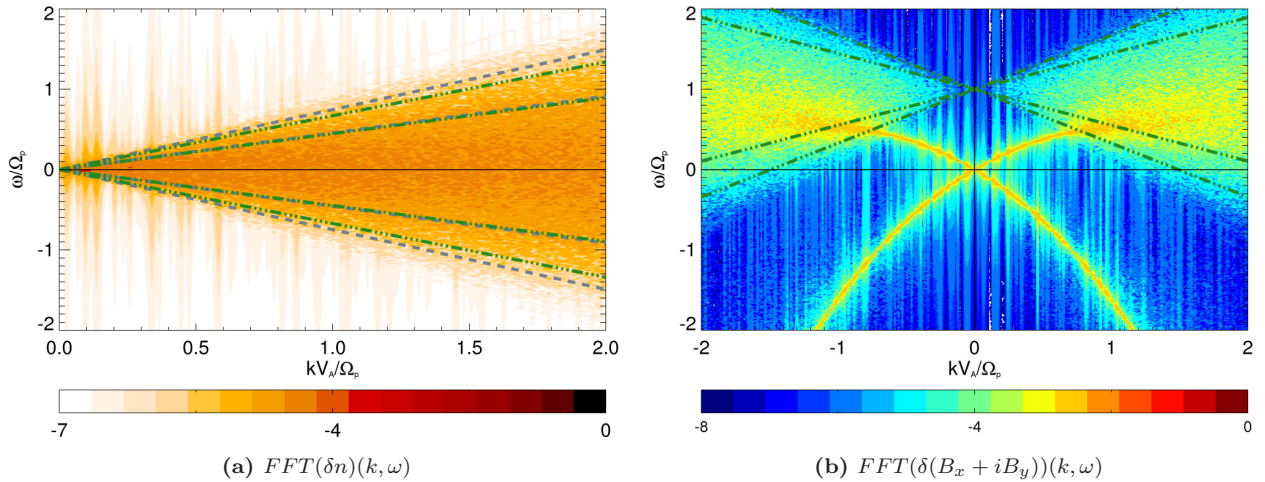


Figura 2.36: Espectros de potencias $\omega - k$ de fluctuaciones de densidad y campo magnético, sin onda pump ($A = 0$) y $\beta_e^K = \beta_p = 0.1$ (mismos parámetros físicos que la figura 2.23). Ambos diagramas son simétricos para $k < k_0$. Ver explicación de líneas punteadas en texto principal.

En el espectro de densidad, se han sobrepuesto las curvas ω v/s k (en líneas grises) de dos pares de modos acústicos (fuertemente amortiguados) obtenidos con la relación de dispersión cinético-híbrida. Sólo el par menos amortiguado se ha mostrado previamente en 2.23a (aunque los demás igual aparecen, aunque indirectamente, en las figuras 2.22), correspondiendo a los con menor apertura y gamma más negativo). Pero también, toda la zona triangular centrada en cero con mayor potencia espectral puede interpretarse de la siguiente forma: se trata de ondas que pueden entrar en resonancia Landau con los protones que poseen una velocidad longitudinal v_z apropiada, dada por la condición (1.51), que en la notación aquí usada, es:

$$\frac{\omega}{\Omega_p} = \frac{v_z}{V_A} \cdot \frac{kV_A}{\Omega_p} \quad (2.109)$$

Ahora bien, como es ampliamente conocido, el 95,4% del total de partículas tienen velocidades longitudinales v_z menores que dos desviaciones estándar $\sigma = 2\beta_p^2$, mientras que el 99.7% del total están a menos de tres σ

de $v_z = 0$. Estas velocidades se han graficado con líneas verdes ($\pm 2\sigma$ son aquellas de menor apertura), y su ubicación en la función de distribución se muestra a continuación:

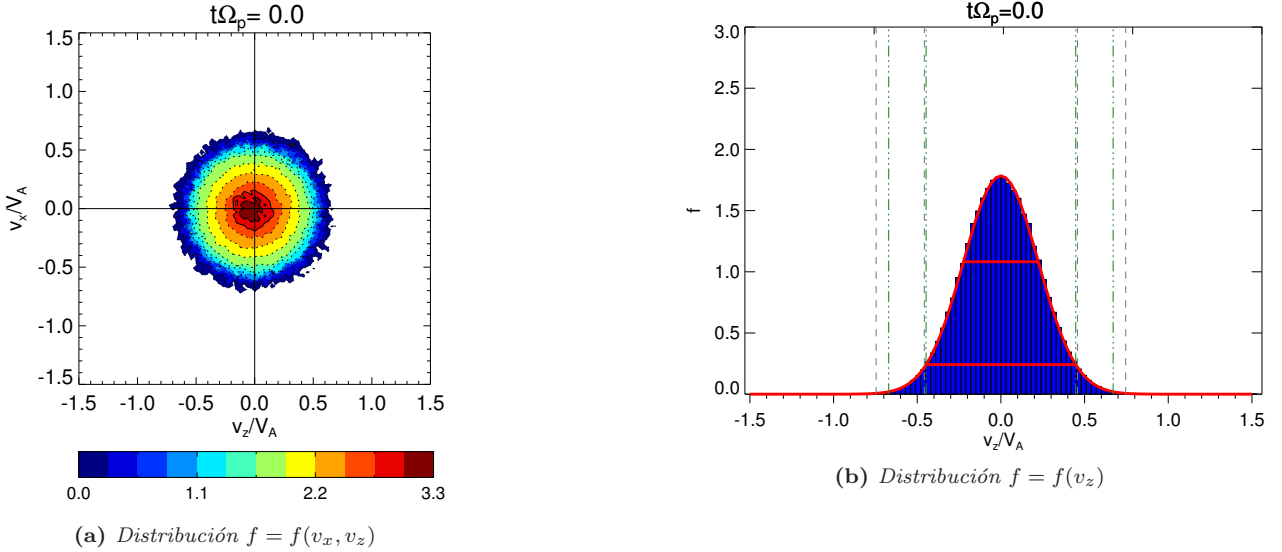


Figura 2.37: Distribución inicial ($t\Omega_p = 0$) de partículas en el espacio de velocidades para el caso $A = 0$ y con $\beta_p = 0.1$. En la función de distribución 1D, las líneas verdes indican $v_z = \pm 2\sigma, \pm 3\sigma$, mientras que las grises, la velocidad de fase longitudinal correspondiente al mismo par de modos acústicos mostrado en 2.36a. Además, la curva roja representa la función de distribución (2.106) y las líneas rojas horizontales las abscisas a 1 y 2 desviaciones estándar, respectivamente.

Luego, es claro que el par de modos acústico menos amortiguado, al estar prácticamente a dos desviaciones estándar del centro de la función de distribución, se produce entre las pocas partículas que están en la “cola” de ella. De este modo, y tal cual se ve en 2.36a, las rectas de resonancia Landau para la mayoría de las partículas se ubicarán en la región acotada por los modos acústicos, explicando así la mayor potencia espectral que en dicho diagrama sucede para velocidades de fase bajas.

Por otra parte, en el gráfico de las fluctuaciones del campo magnético, se ha escogido mostrar las asociadas a las coordenadas rotantes $B_x + iB_y$, ya que representan las ondas de Alfvén cuyo campo magnético presenta polarización izquierda (1.64) para $\omega > 0$ y $k > 0$, de acuerdo a la convención de A. De este modo, las curvas con mayor potencia en el gráfico anterior representan los modos normales de Alfvén del plasma, dados por la relación de dispersión para la onda pump (1.95) graficada en 1.7a, en el caso $k > k_0$. Análogamente, la zona $k < k_0$ (simétrica en este caso), representan los modos con el campo magnético de la onda pump con polarización derecha (1.97), cuya relación de dispersión es (1.103) y graficada en la misma figura 1.7a. Alternativamente, también se puede interpretar la zona $k < k_0$ como las mismas ondas de polarización izquierda (1.64), pero que se desplazan hacia atrás. El acuerdo entre las curvas teóricas y las obtenidas de la simulación es muy bueno, excepto por un detalle que se verá a continuación.

En la misma figura derecha para el campo magnético, también se nota la existencia de cierta potencia en ondas que tienen un patrón triangular similar a las ondas acústicas de la figura izquierda, pero centradas para $k \rightarrow 0$ en $\omega = \Omega_p$. Ellas representan las ondas que pueden entrar en resonancia ciclotrónica con las partículas de la función de distribución original (ver también figura 1 de [Hollweg, 2008]), ya que la condición (1.56), en las unidades normalizadas aquí usadas, es:

$$\frac{\omega}{\Omega_p} = 1 + \frac{v_z}{V_A} \cdot \frac{kV_A}{\Omega_p} \quad (2.110)$$

Dicha expresión se ha graficado (en líneas punteadas) para dos velocidades características de protones que están en la “cola” de la función de distribución original: en líneas verdes oscuro para $v_z = \sigma$, y en verde claro para $v_z = 2\sigma$ (las mismas que están representadas en la figura 2.37). La mayoría de las otras partículas poseerán rectas con menor pendiente, estando ubicadas entre las dos graficadas. Sin embargo, este efecto resonante será notorio sólo para las ondas de Alfvén ión-ciclotrón, que son las que tienen mayor potencia espectral y son modos

normales del sistema, por lo que la condición de resonancia se producirá predominante en la intersección de ambas curvas, que es donde precisamente la curva del modo de Alfvén L se difumina (y después de haber entrado a esa zona, es decir, para k mayores, es difícilmente distinguible). De este modo, si no hay onda pump presente, sólo las partículas con $v_z < 0$ podrían entrar en resonancia con dichas ondas de Alfvén, y preferentemente para kV_A/Ω_p grandes, ya que ello implica una intersección para partículas con menor velocidad en valor absoluto v_z , que son la mayoría (debido a que la función de distribución es isotrópica en v_z). Sólo muy pocas partículas, en la “cola” de la función de distribución y con $v_z < 0$, son capaces de entrar en resonancia para kV_A/Ω_p tan bajos como 0.7.

Por último, es necesario destacar que curvas similares las discutidas en el gráfico previo también son halladas con el modelo cinético del capítulo 4 (ver figuras 4.6, 4.9 y siguientes), demostrando que aunque dicha relación de dispersión no está totalmente correcta, al menos es capaz de describir cualitativamente ciertos aspectos de la resonancia ciclotrónica (que era el principal efecto que se pretendía modelar). Además, la onda pump de Alfvén graficada en 4.6a, exhibe un tasa de crecimiento negativa para $k \gtrsim 0.7$, que puede ser producto del amortiguamiento ciclotrónico que incorpora la relación de dispersión hallada.

2.8.3. Caso estándar y evolución de las inestabilidades paramétricas

Ahora se activará la pump con la misma amplitud y frecuencia que en el caso analítico 2.25. Ella inducirá una anisotropía aparente de la función de distribución en la dirección perpendicular de la velocidad, dada por 2.107 en (2.106), y que luce así:

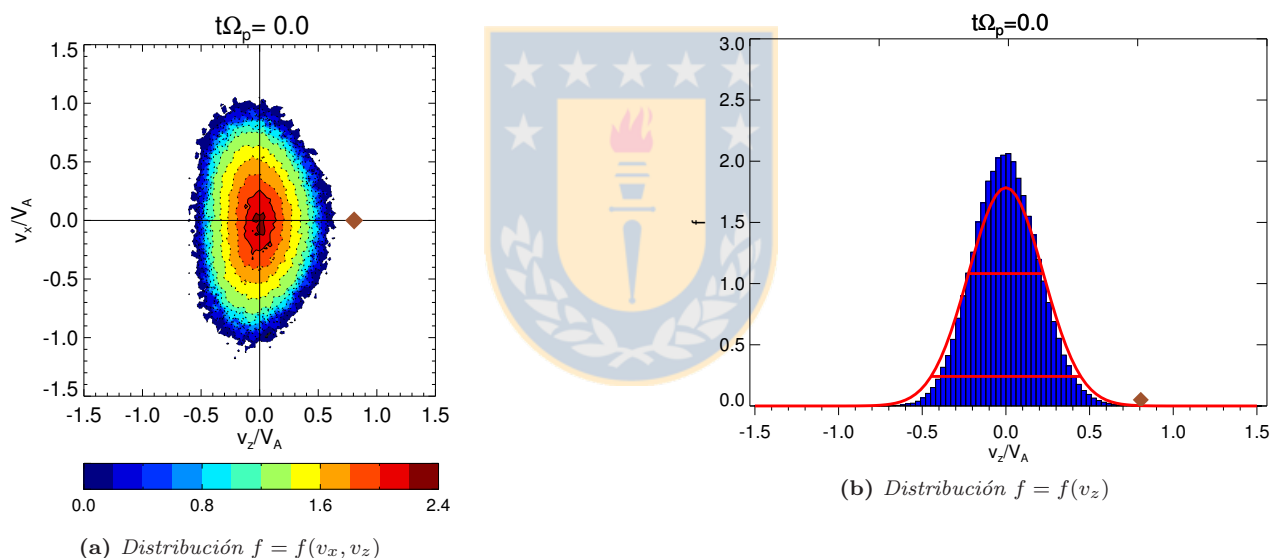


Figura 2.38: Distribución inicial ($t\Omega_p = 0$) de partículas en el espacio de velocidades para el caso $A = 0.3^2$. Mismos parámetros que para el caso sin pump 2.37, del cual se ha superpuesto (en el diagrama derecho) su función de distribución en líneas rojas. El rombo café indica la velocidad de fase longitudinal de la onda pump ω_0/k_0 .

Los diagramas de espectro correspondiente, junto con las curvas (menos amortiguadas) de la correspondiente relación de dispersión analítico-híbrida 2.25, son:

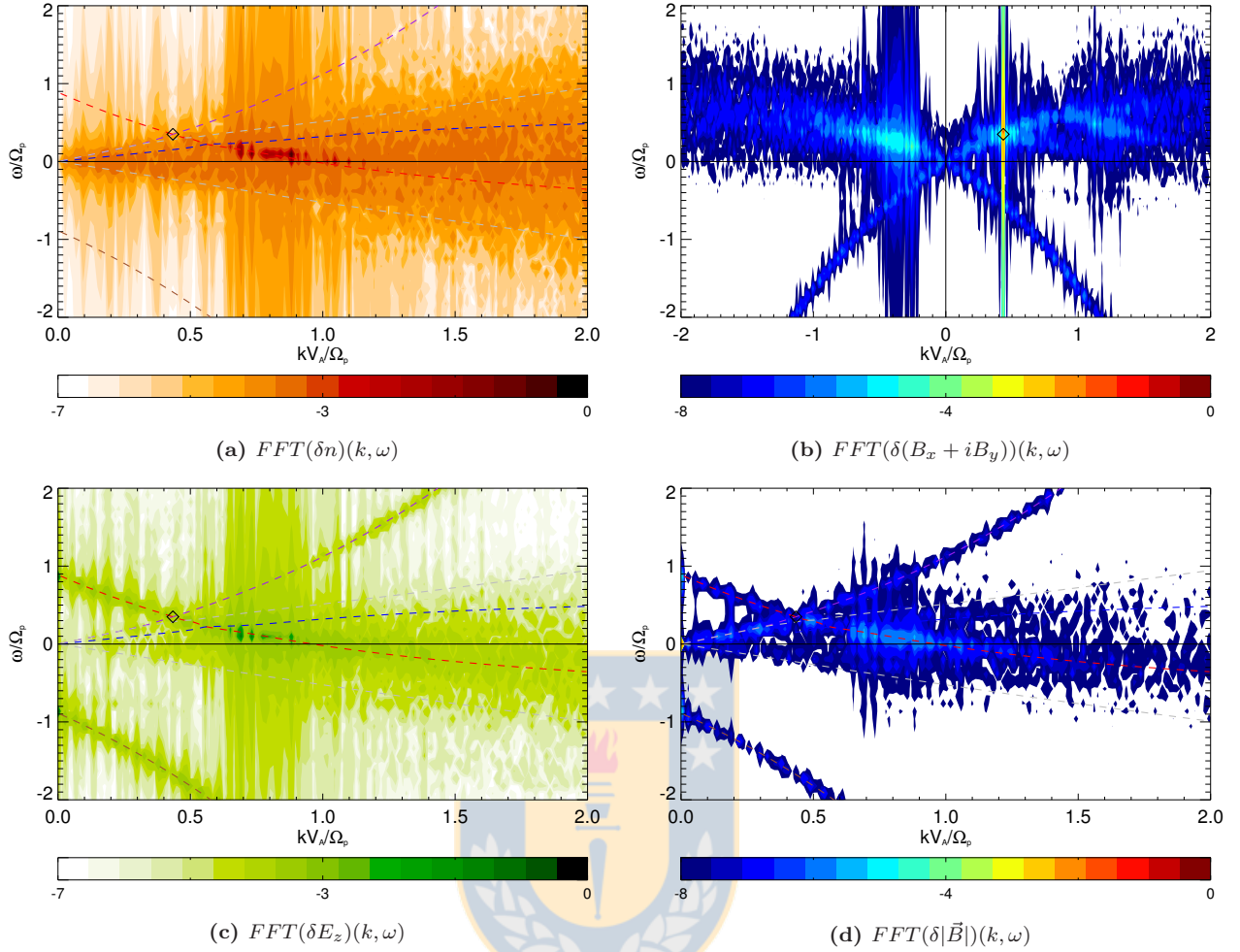


Figura 2.39: Espectros de potencias $\omega - k$ de fluctuaciones de densidad, campo magnético y eléctrico (i.e.: Doble transformada de Fourier en x y t) con la onda pump $A = 0.3^2$, $X_0 = 0.35$ (mismos parámetros físicos que la figura 2.25, cuyas curvas de dispersión se han sobrepuesto). La frecuencia y número de onda de la pump se ha indicado con un diamante negro. El código de potencia espectral es logarítmico. A diferencia del caso anterior con amplitud nula, aquí el único diagrama que no es simétrico para $k < k_0$ es el de $B_x + iB_y$, razón por la cual se muestra con un rango distinto al de los demás.

Para el espectro de densidad, existe una buena correspondencia sobre todo para la curva del modo $-b$ en la zona de la dominante inestabilidad decay, confirmando la predicción teórica (comparar con las tasas de crecimiento 2.25c) de ser producida por la rama acústica $+s$ que involucra únicamente fluctuaciones de densidad. Las demás bandas laterales no se aprecian mucho, sobre todo la $+f$ que está dentro de la región delimitada por los modos acústicos, confirmando así su amortiguamiento teórico, aunque no para las demás.

Sin embargo, todas las bandas laterales exhiben una buena correlación con sus respectivas curvas teóricas en las figuras inferiores que representan los espectros de las fluctuaciones del campo eléctrico longitudinal E_z y el campo magnético total $|\vec{B}| = |\vec{B}_\perp| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$ (recordar que no hay componente oscilante B_z). Esto se hace evidente sobre todo para las $-f$ y $+b$, en las cuales la teoría predice un amortiguamiento nulo. También se debe notar que, en la zona de la inestabilidad modulacional (comparar con 2.25b), hay mucha más potencia espectral en la figura para $|\vec{B}_\perp|$ que en E_z ó n , confirmando así la predicción teórica que se origina por una interacción entre bandas laterales $\pm f$ (que sólo poseen campos transversales). Algo completamente análogo ocurre para la más pequeña inestabilidad beat.

Por último, en el diagrama superior derecho para las fluctuaciones de $B_x + iB_y$, se muestra claramente la predominancia de potencia en la zona de la onda pump en $k = k_0$ (con polarización izquierda). También hay una acumulación de potencia en torno a ω_0 , pero con $k < k_0$, representando así ondas generadas por la pump

pero que se desplazan hacia atrás.

Cabe destacar que para obtener los diagramas anteriores, se ha corrido la simulación el tiempo necesario para mantenerse en la etapa lineal de evolución, evitando el régimen de turbulencia Alfvénica que continúa para tiempos más grandes. En este caso, dicho tiempo se ha escogido como $\Omega_p t = 65.5$ (y con un tamaño de paso temporal $\Delta\Omega_p = 0.004$). Tiempos algo menores no permiten la evolución suficiente de la inestabilidades mostradas. Esto se aprecia claramente en la figura 2.42 y también en los siguiente diagramas, que muestran la evolución de la potencia espectral en cada modo m , múltiplo del menor permitido por la longitud de la caja usada para la grilla espacial, que satisface la siguiente relación con el número de onda k :

$$k = \frac{2\pi}{L}m = \frac{k_0}{32}m \quad (2.111)$$

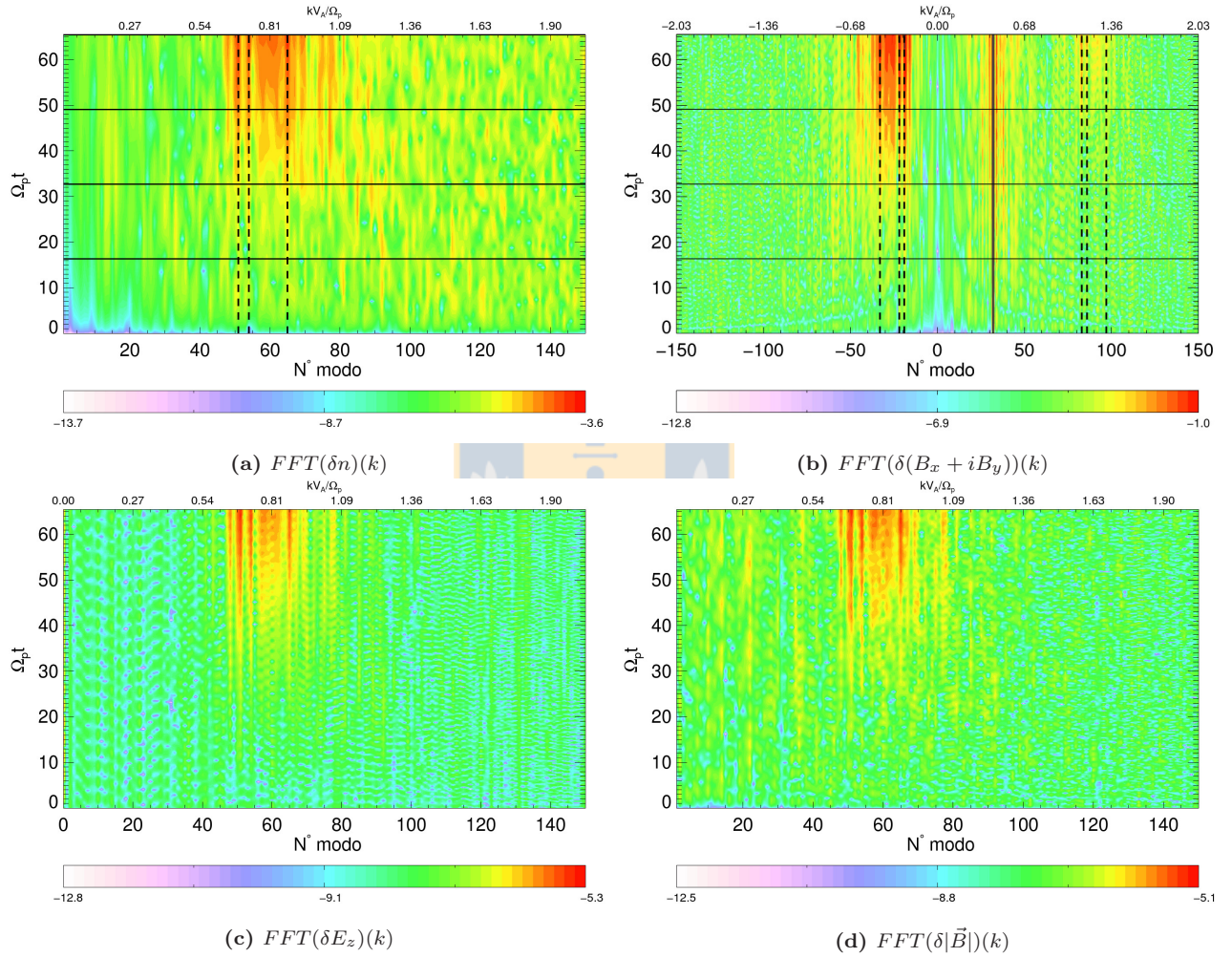


Figura 2.40: Evolución de la potencia espectral para las fluctuaciones de densidad, potencia y campo magnético (*i.e.*: Transformada de Fourier sólo en x). Mismos parámetros de la figura anterior. En el eje horizontal inferior se ha indicado el número de modo y en el superior el número de onda correspondiente, relacionados mediante (2.111). Las líneas horizontales continuas representan $\frac{1}{4}$ fracciones del tiempo total de simulación, que servirán como secciones transversales para la próximas figuras. Las líneas verticales punteadas indican los modos que dominan las regiones inestables para tiempos grandes.

Como ya se podía suponer, en el rango de k donde debiera estar teóricamente la inestabilidad decay, se aprecia un importante incremento en la potencia espectral de densidad, campo eléctrico longitudinal y campo magnético total que surge para tiempos mayores a $t\Omega_p > 30$, aumentando sostenidamente para tiempos más grandes. En cambio, la potencia espectral para el campo magnético de la figura superior derecha muestra una

creciente inestabilidad en una zona para $k > k_0$ (distinta de la anterior) y otra para k negativa, además de la onda pump que domina el modo $m_0 = 32$. Dado que es difícil analizar los modos precisos excitados por las inestabilidades mediante los gráficos anteriores, conviene más un diagrama que muestre la sección transversal de los espectros de densidad y campo magnético para ciertos tiempos, los que se han escogido como $T_{max}/4$, $T_{max}/2$, $3T_{max}/4$ y T_{max} , estando indicado en líneas horizontales continuas en las figuras superiores, y mostrados a continuación:

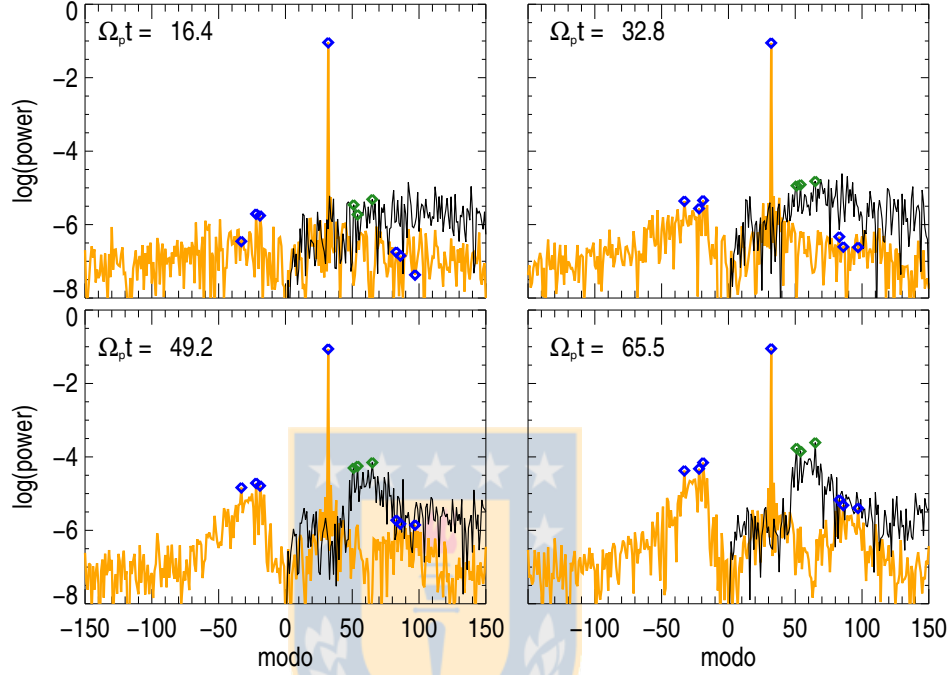


Figura 2.41: Espectros de potencia para los tiempos $T_{max}/4$, $T_{max}/2$, $3T_{max}/4$ y T_{max} . Líneas naranjas: Campo magnético $FFT(\delta(B_x + iB_y))(k)$; Líneas negras: Densidad $FFT(\delta n)(k)$. Con diamantes azules se han indicado las potencias de los máximos modos crecientes para el campo magnético, mientras que los diamantes verdes representan lo mismo pero para la densidad. El tiempo máximo T se ha escogido para mantenerse en la etapa lineal de simulación, ya que para tiempos mucho mayores el espectro de potencia está dominado por una cascada inversa, indicio del surgimiento de turbulencia.

Además de la onda pump¹¹, se han identificado 6 modos para el espectro del campo magnético (m_b , azul) y 3 para la densidad (m_d , verde), que dominan las regiones inestables correspondiéndose con las líneas punteadas de la figura anterior (2.40). Estos modos satisfacen las relaciones de conservación generales (2.1), que ligan en este caso a las bandas laterales $\omega_0 \pm \omega$ (fluctuaciones del campo magnético) con ω (fluctuaciones de densidad) de acuerdo a (2.30) y (2.31), resumidas a continuación:

- Modo (longitudinal, k) de densidad: $m_d = +51, 54, 65$. Bandas laterales (transversales, $k_0 \pm k$) de campo magnético inferior $m_b = m_0 - m_d = -19, -22, -33$ y superior $m_b = m_0 + m_d = 83, 86, 97$.

Ello da un fuerte indicio de la presencia de un inestabilidad de decaimiento con máximos en los k correspondientes a $m_d = 51, 54, 65$, esto es, entre $0.69 < k < 0.88$, que coincide aproximadamente con la predicción teórica de la figura 2.25c. Luego, la presencia de la banda lateral inferior con modos negativos y una gran potencia espectral para tiempos grandes, indica que la onda pump decae preferentemente en ondas Alfvén ión-ciclotrón que se propagan hacia atrás, llamadas $-b$. También genera ondas que se desplazan hacia adelante $+f$, aunque en

¹¹Notar que, en estos diagramas, la onda pump no disminuye apreciablemente su potencia en el corto tiempo analizado, a pesar que es de ella de donde proviene la energía para generar las inestabilidades paramétricas. Para tiempos mayores, efectivamente se aprecia la disminución en la potencia de la pump, aunque también el sistema se vuelve lo suficientemente inestable y turbulento para que las predicciones de la teoría se falseen un tanto por la predominancia de otros efectos no lineales. Un ejemplo de ello se muestra en la figura (2.42).

mucha menor importancia (la potencia de los modos de la banda lateral superior $m_b = 83, 86, 97$ es bastante inferior que los de la izquierda).

Por otro lado, las tasas de crecimiento de esta inestabilidad pueden ser obtenidas a partir de un ajuste lineal de la curvas de potencia espectral para la densidad, de cada modo m en función del tiempo durante la etapa de crecimiento lineal, obteniendo el análogo al resultado analítico de la figura 2.25c

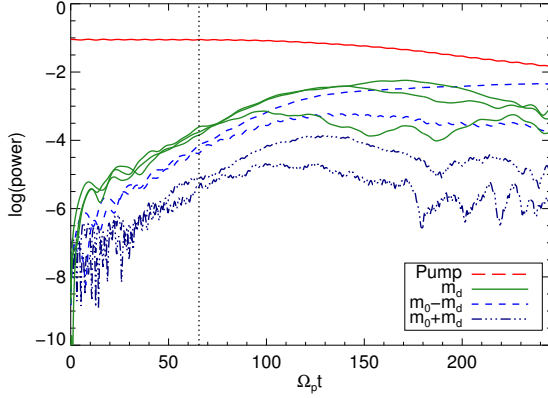


Figura 2.42: Serie temporal para la potencia espectral de la onda pump y los 3 modos de mayor crecimiento de densidad y las bandas laterales superior e inferiores, indicados en el párrafo previo. Corresponden a las secciones transversales, indicadas con líneas verticales discontinuas, de las figuras 2.40a y 2.40b. Sin embargo, aquí se muestra un tiempo de simulación más extenso que el usado en las figuras previas ($t\Omega_p = 65.5$, indicado en líneas punteadas).

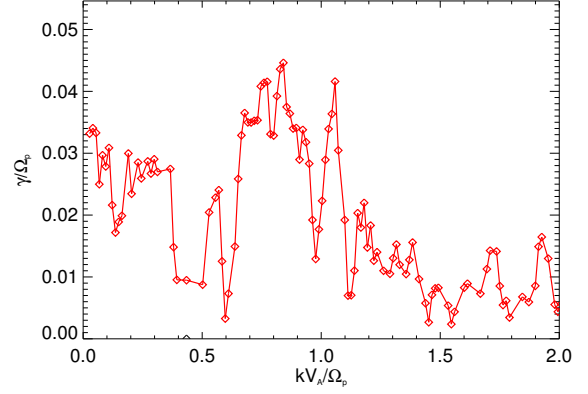


Figura 2.43: Tasas de crecimientos lineales γ v/s k para el plasma con los parámetros estudiados, calculadas mediante un ajuste lineal de la serie temporal para la potencia espectral de densidad, mostrada en la figura izquierda con líneas verdes continuas. Este ajuste se ha realizado sólo hasta la parte lineal de simulación $t\Omega_p \approx 65.5$.

Nótese que las 2.42 y 2.43 tasas así calculadas de la inestabilidad decay son un tanto mayores que las predicciones teóricas de la figura 2.25c. Lo mismo sucede para las inestabilidades modulacional y beat, aunque estas no han podido ser distinguidas en las figuras anteriores debido al nivel de ruido imperante. En cierto modo, ellas son más similares al caso tipo fluido de la figura 2.26c, siendo un indicio que el $\beta_e^K = 0.1$ escogido (el mismo del modelo cinético-híbrido) *no* es el más apropiado al comparar entre los resultados de simulaciones y las relaciones de dispersión analíticas. En otras palabras, el $\beta_e^K = 0.1$ de la simulación equivaldría a un valor $\beta_e \gtrsim 0.2^K$ en el modelo cinético híbrido (recordar que este problema surge de la no asignación de un índice politrópico único de fluidos γ_e al comparar entre distintos modelos, como ya había sido discutido en la sección (2.7.1)).

A pesar de lo anterior, se ha comprobado que el aumento de β_e no afecta mucho las tasas de crecimiento provenientes de la simulación. En cambio, el aumento de β_c disminuye significativamente todas las inestabilidades, en particular la decay, igualando sus γ_{max} con los de la inestabilidad modulacional para $\beta_p = 0.4$, tal cual lo predecía la figura resumen 2.28b (obtenida con el modelo cinético-híbrido).



Capítulo 3

Efectos de un beam de iones

3.1. Plasma protón + beam de iones: teoría de fluidos

Tal como fue mencionado en el primer capítulo, la introducción de otra especie de partículas con cierta velocidad relativa a la primera modifica apreciablemente la relación de dispersión, al ser una fuente de energía libre adicional para desencadenar inestabilidades, tal como la mencionada bump-on-tail a través del amortiguamiento Landau inverso (ver sección 1.3.2). Como primer paso para un análisis de estos sistemas, en la presente sección se obtendrá la relación de dispersión, dentro de la teoría de fluidos, para un plasma compuesto de electrones (subíndice e), un núcleo (*core*, con subíndice c) de protones y un tenue haz (*beam*, con subíndice b) de iones con número atómico Z (carga $q_b = Ze$) y número másico A_b (masa $m_b = A_B m_p$).

A pesar que el cálculo es general, las soluciones numéricas se restringirán, por simplicidad, al caso en que el beam se compone de protones con $Z = 1$ y $A_B = 1$.

3.1.1. Sistema en equilibrio: onda pump

El primer objetivo será encontrar las ecuaciones que determinan el sistema en equilibrio (subíndice 0), esto es, la relación de dispersión de la onda pump de Alfvén ión-ciclotrón. Se seguirá el desarrollo para el sistema electrón-protón de la sección 1.5.2, indicando sólo las diferencias que surgen al añadir el beam de iones. Así, el plasma se diferencia fundamentalmente en las siguientes propiedades:

- *Cuasineutral*, de modo que normalizando con respecto a la densidad de electrones:

$$\sum_j q_j n_{0j} = -en_{0e} + en_{0c} + q_b n_{0b} = 0 \quad (3.1)$$

$$\Rightarrow n_{0e} = n_{0c} + Z n_{0b} \quad (3.2)$$

$$\Rightarrow 1 = \eta_c + Z \eta_b \quad (3.3)$$

en donde se han definido las razones entre las densidades de los iones con respecto a la de los electrones:

$$\eta_c := \frac{n_{0c}}{n_{0e}}, \quad \eta_b := \frac{n_{0b}}{n_{0e}} \quad (3.4)$$

Además, es útil introducir la densidad relativa entre el beam de iones de iones y protones:

$$\eta := \frac{n_{0b}}{n_{0c}} \quad (3.5)$$

- El cálculo se realizará en el *sistema de referencia del centro de masa*, por lo que cada especie poseerá poseerán una cierta velocidad relativa de deriva (ó *drift*) $\vec{U} = U_j \hat{z}$ (con $j = e, c, b$) respecto a este sistema de referencia. Por definición, en este sistema de referencia, la velocidad del centro de masa \vec{V}_{cm} se debe anular:

$$\vec{V}_{cm} = \frac{m_p n_{0c} \vec{U}_c + m_b n_{0b} \vec{U}_b}{m_p n_{0c} + m_b n_{0b}} \stackrel{!}{=} \vec{0} \quad (3.6)$$

$$(3.7)$$

donde se ha usado la nulidad de masa de los electrones. Así, tendremos la siguiente relación entre las velocidades de drift:

$$\eta_c U_c = -A_b \eta_b U_b \quad (3.8)$$

Sin embargo, es más conveniente expresar todas las velocidades de drift en términos de la velocidad relativa entre la del beam y de los protones, definida por:

$$U := U_b - U_c \quad (3.9)$$

con lo cual:

$$U_c = -\frac{A_b \eta}{1 + A_b \eta} U \quad (3.10)$$

$$U_b = \frac{1}{1 + A_b \eta} U \quad (3.11)$$

En gran parte de la literatura previa (por ej., [Hollweg et al., 1993], [Gomberoff et al., 2002]), la relación de dispersión para dos especies se realiza, probablemente por simplicidad, en el sistema de referencia en que el core de protones está en reposo: $U_c = 0$ y $U_b = U$. Para poder establecer una comparación con dichos trabajos, se debe notar que las frecuencias de las relaciones de dispersión estarán ligadas por el siguiente desplazamiento Doppler:

$$\omega_{cp} = \omega_{cm} + v_{cp} k \quad (3.12)$$

en donde ω_{cm} indica las frecuencias calculadas en el sistema de referencia del centro masa (como las aquí usadas), ω_{cp} las frecuencias en el sistema de referencia con el core de protones en reposo y v_{cp} es la velocidad del centro de masa en este último sistema, siendo dada a partir de (3.6) por:

$$v_{cp} = \frac{\eta U}{1 + \eta} \quad (3.13)$$

Entonces, el cambio de sistema de referencia sólo desplazará de ubicación las ramas de la relación de dispersión el plano ω v/s k de acuerdo a la ecuación mostrada (y con ello las velocidades de fase), pero no afectará de ningún modo a las tasas de crecimiento γ (parte imaginaria de la frecuencia), ni por tanto a las inestabilidad paramétricas.

- El campo de velocidad tendrá, adicionalmente a (1.68) \vec{V}_{0j} , la velocidad de drift longitudinal antes mencionada, por lo que:

$$\vec{V}(z, t) = \vec{V}_{0j}(z, t) + U_j \hat{z} = V_{0j}^x \hat{x} + V_{0j}^y \hat{y} + U_j \hat{z} \quad (3.14)$$

Ec. de momentum transversal

Debido a la velocidad de drift, la ecuación de momentum transversal¹ en (1.80) cambia a:

$$\frac{\partial \vec{V}_{0j}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \vec{V}_{0j}}{\partial z} = \frac{q_j}{m_j} \left(\vec{E}_0 + (\vec{V}_{0j} + \vec{U}_j) \times (\vec{B}_0 + \vec{B}_c) \right) \quad (3.15)$$

Introduciendo las velocidades transversales y la dependencia explícita sinusoidal para cada campo,

$$\frac{\partial V_{0j}^\pm}{\partial t} + U_j \frac{\partial V_{0j}^\pm}{\partial z} = \frac{q_j}{m_j} E_0^\pm \mp i \Omega_j V_{0j}^\pm \pm i \frac{q_j}{m_j} U_j B_0^\pm \quad (3.16)$$

se nota que el efecto de introducir otra especie es desplazar la frecuencia por corrimiento Doppler en la cantidad:

$$\omega_{0j} := \omega_0 - k_0 U_j \quad (3.17)$$

¹De forma similar a (1.81), la componente longitudinal de la ecuación de momentum también se anula idénticamente (la única diferencia es un término extra $U_j \partial V_{0j}^z / \partial z$ en el lado izquierdo, que por supuesto es nulo.)

De este modo, la velocidad de los protones y el beam vendrán dadas por:

$$\tilde{V}_{0j}^\perp := \tilde{V}_{0j}^\pm = \frac{\omega_{0j}}{k_0} \frac{1}{1 - \frac{\omega_{0j}}{\Omega_j}} \left(-\frac{B_0}{B_s} \right) \quad (3.18)$$

mientras que para los electrones, usando el límite acostumbrado $1/\Omega_e \rightarrow 0$, se tiene:

$$\tilde{V}_{0e}^\perp = \frac{\omega_{0e}}{k_0} \left(-\frac{B_0}{B_s} \right) \quad (3.19)$$

Ec. de Ampère

Considérese en primer lugar la componente longitudinal de la ecuación de Ampère en la forma (1.89). Si bien se obtendrá la misma condición de nulidad para la corriente total que para el caso de plasma electrón-protón (1.90), su expresión explícita es no trivial y se diferenciará de ella en los términos originados por las velocidades de drift longitudinales $\vec{U}_j = U_j \hat{z}$:

$$\sum_j J_{0j}^z = \sum_j q_j n_{0j} U_j = -en_{0e} U_e + en_{0c} U_c + q_b n_{0b} U_b = 0 \quad (3.20)$$

En otras palabras, la condición de plasma libre de corrientes longitudinales permite expresar la velocidad de drift de los electrones en términos de cantidades conocidas:

$$U_e = \eta_c U_c + Z \eta_b U_b = \frac{Z - A_b}{1 + A_b \eta} \eta_b U \quad (3.21)$$

con lo que la frecuencia desplazada Doppler de los electrones (3.17), considerando (3.21) y (3.3), se puede escribir en términos de las cantidades asociadas a los protones y beam:

$$\omega_{0e} = \omega_0 (\eta_c + Z \eta_b) - k_0 U_e = \eta_c \omega_{0c} + Z \eta_b \omega_{0b} \quad (3.22)$$

Por otro lado, al incorporar las expresiones para \tilde{V}_{0j}^\perp en la componente perpendicular de la ecuación de Ampère (1.89), se obtiene una expresión que discrepa de (1.93) en un término adicional debido al beam:

$$-k_0 B_0 = \mu_0 (-en_{0e} V_{0e}^\perp + en_{0c} V_{0c}^\perp + Z en_{0b} V_{0b}^\perp) \quad (3.23)$$

$$k_0^2 = \frac{\mu_0}{B_s^2} \left[n_{0c} m_p \frac{\omega_{0c}^2}{1 - \frac{\omega_{0c}}{\Omega_p}} + Z n_{0b} m_b \frac{\omega_{0b}^2}{1 - \frac{\omega_{0b}}{\Omega_b}} \right] \quad (3.24)$$

Para normalizar se usan definiciones similares a (F.1) del caso electrón-protón, con la excepción de la velocidad de Alfvén que será definida, en vez de (1.32) que usa la densidad en equilibrio de los protones n_{0p} , con respecto a la densidad en equilibrio de los electrones n_{0e} según (F.18). Así, y en vista de las cantidades dadas en la sección F.2.1, la relación de dispersión de la onda pump en este plasma electrón-protón-beam será:

$$Y_0^2 = \eta_c \frac{X_{0c}^2}{1 - X_{0c}} + Z A_b \eta_b \frac{X_{0b}^2}{1 - \frac{A_b}{Z} X_{0b}} = \frac{1}{1 + Z \eta} \left(\frac{X_{0c}^2}{1 - X_{0c}} + Z A_b \eta \frac{X_{0b}^2}{1 - \frac{A_b}{Z} X_{0b}} \right) \quad (3.25)$$

Onda de Alfvén de polarización derecha

Si, al igual que para el caso de plasma electrón-protón, se considera ahora una onda pump de polarización derecha definida por (1.97), se tendrá que el cálculo que continúa es muy similar al anterior, con la excepción que la dependencia de las cantidades B_0^\pm , E_0^\pm y V_{0j}^\pm cambia a $\exp(\mp i(k_0 z - \omega_0 t))$, por lo que sus derivadas cambiarán de acuerdo a (1.99) y así se tendrá el equivalente a (3.18) con un signo positivo en el denominador:

$$\tilde{V}_{0j}^\perp := \tilde{V}_{0j}^\pm = \frac{\omega_{0j}/k_0}{1 + \frac{\omega_{0j}}{\Omega_j}} \left(-\frac{B_0}{B_s} \right) \quad (3.26)$$

La única diferencia con respecto a (1.100) radica en el cambio de ω_0 a ω_{0j} . Dado que la ecuación de Ampère (3.23) cambia a un signo negativo en analogía a (1.101), tendremos finalmente la relación de dispersión para una onda de Alfvén de polarización derecha en un plasma electrón-protón-beam:

$$Y_0^2 = \eta_c \frac{X_{0c}^2}{1 + X_{0c}} + Z A_b \eta_b \frac{X_{0b}^2}{1 + \frac{A_b}{Z} X_{0b}} \quad (3.27)$$

Para el caso protón-protón, ver [Gomberoff et al., 2002]. Notar que el cálculo se realizó allí en el sistema de referencia del core en reposo.

Soluciones numéricas

Previo a representar gráficamente las soluciones numéricas de la relación de dispersión de la onda pump, debe notarse que:

- A diferencia del caso de una especie, que posee simetría especular con respecto a Y_0 , la introducción del beam induce que la relación de dispersión de la onda pump cambie de polarización izquierda (3.25) a derecha (3.25) (y viceversa) cuando se cambia simultáneamente $Y_0 \rightarrow -Y_0$ y $X_0 \rightarrow -X_0$ (rotación de π con respecto al origen). Por lo tanto, bastará con restringirse sólo a las ramas que se situen en $k > k_0$ para representar las 4 combinaciones posibles: las dos polarizaciones de la onda pump y sus dos sentidos de propagación (para c/u).
- La relación de dispersión es un polinomio de tercer grado en X_0 e Y_0 , que se resolverá numéricamente para hallar sus raíces. A diferencia del caso de una especie de protones, aquí puede darse el caso en que existan raíces complejas y conjugadas, indicando la presencia de inestabilidades lineales debido a la presencia del beam (ver más adelante para un ejemplo).
- Hay dos parámetros libres en las ecuaciones mencionadas. Uno de ellos es la velocidad de drift normalizada, \mathcal{U} , mientras que el otro se puede escoger como la densidad relativa del beam de protones η_b (η_c se obtiene de (3.3)).

Teniendo presente lo anterior, notamos que para $\mathcal{U} = 0$ se recupera la relación de dispersión para ondas izquierda y derecha de una sola especie de protones mostrada en la figura 1.7a. Pero con una velocidad relativa, se puede obtener los siguientes diagramas de dispersión con un drástico cambio en la topología de las curvas soluciones

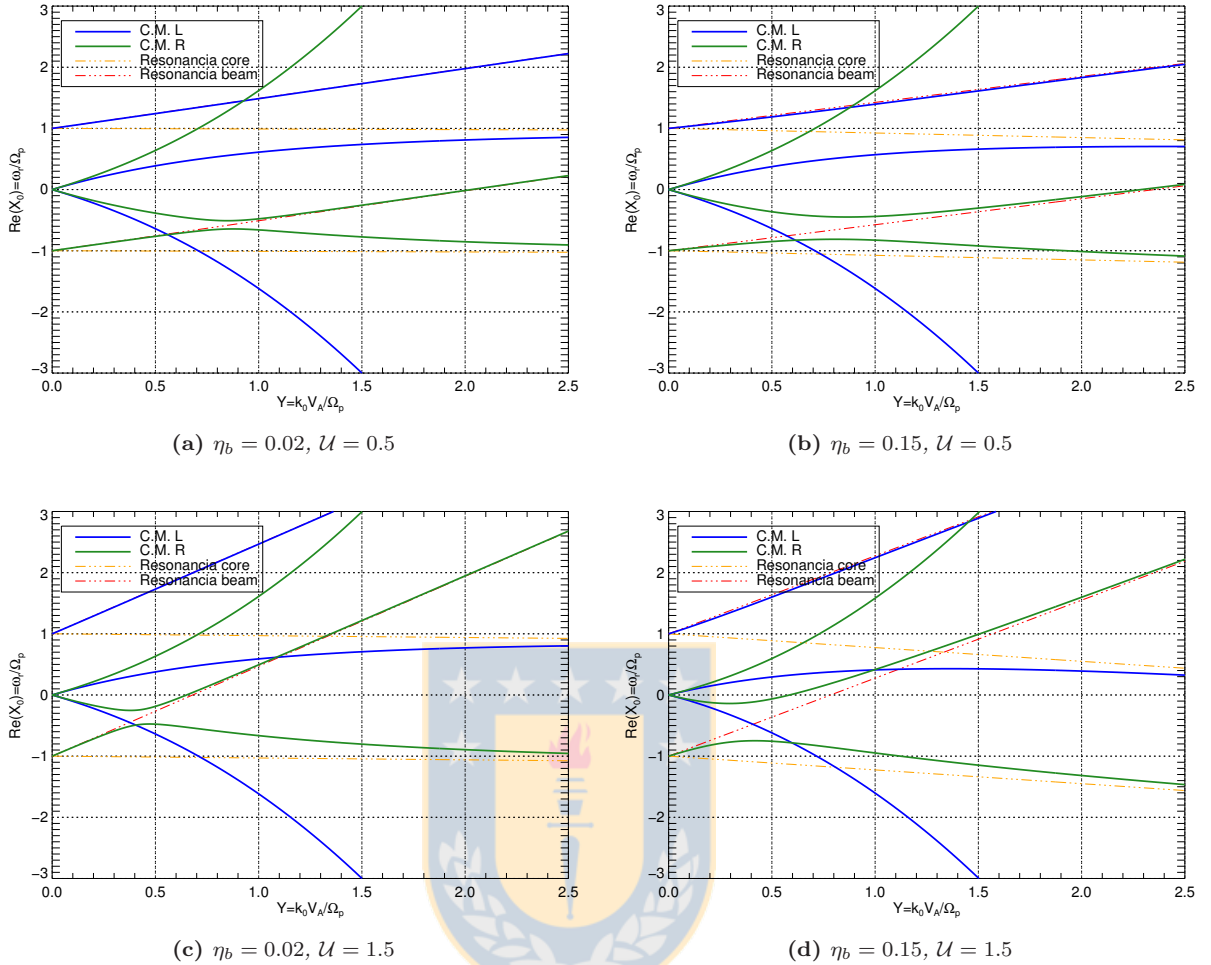


Figura 3.1: Relaciones de dispersión X_0 v/s Y_0 . Las curvas azules C.M. L (campo magnético de polarización izquierda dado por (1.64)) corresponde a las soluciones de (3.25), mientras que las curvas verdes C.M. R (campo magnético de polarización derecha dado por (1.97)) corresponde a las soluciones de (3.27). Lado izquierdo: Caso densidad baja, el beam es el 2% del total de protones. Lado derecho: Caso densidad alta, el beam es el 15% del total de protones. También se han indicado las líneas de resonancias en que los denominadores se anulan: la resonancia core corresponde a $X_{0c} = \pm 1$ (en amarillo) y la beam a $X_{0b} = \pm 1$ (en rojo).

La presencia de la velocidad de drift introduce un nuevo modo adicional a los dos conocidos (L y R) del caso de una especie (comparar con figura 1.7a), denotado desde ahora como B . Para el caso de las curvas azules (\vec{B}_0 de polarización L), este modo es muy cercano a la recta superior de resonancia del beam. Para las curvas verdes (\vec{B}_0 de polarización R) la situación es más compleja: el modo adicional B tiende a la recta de resonancia beam sólo para Y_0 muy grandes o muy pequeño, convirtiéndose exactamente en una recta en el límite $\eta_b \rightarrow 0$, la que además cruza al modo L (de velocidad de fase negativa). Pero en los casos η_b no nulos como los mostrados, el modo B forma una “brecha” (gap) al intersectar a L , haciendo ambigua la identificación de dichos modos en esa zona. La separación es, a primera vista, proporcional a la densidad del beam (comparar los gráficos izquierdos con los derechos).

Los dos modos B tienden asintóticamente (para $Y_0 \rightarrow \infty$) a una recta con pendiente común a la de la resonancia beam, mientras que los modos L tienden asintóticamente a una recta con la pendiente de la resonancia core (comparar con el caso de una especie donde éstos tienden a la línea horizontal $X_0 = \pm 1$, el equivalente de la resonancia core). Esto es fácilmente visualizable a partir de gráficos de la velocidad de grupo para dos casos de muestra:

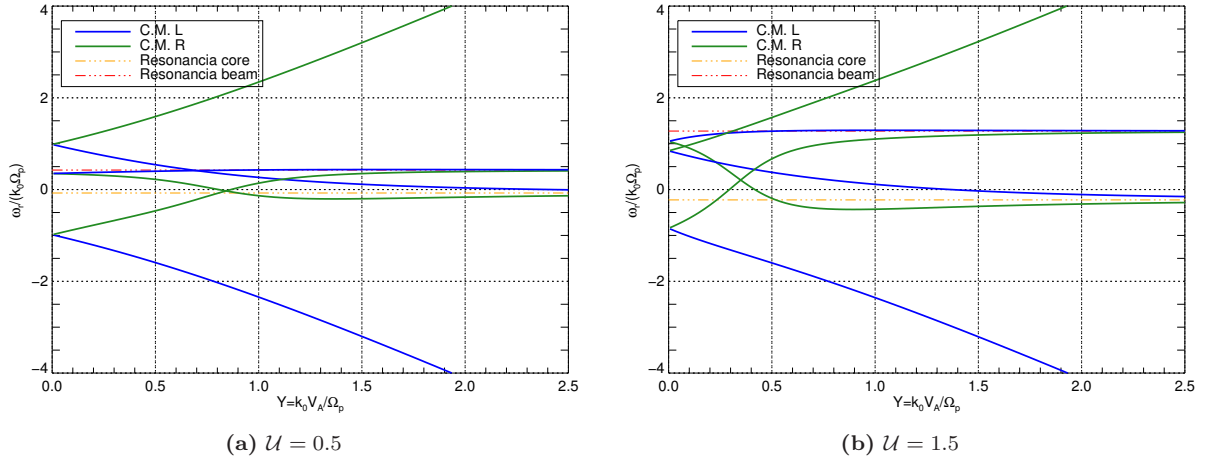


Figura 3.2: Velocidades de grupo dX_0/dY_0 v/s Y_0 para el caso de alta densidad $\eta_b = 0.15$. También se muestran las pendientes U_c (3.10) de la resonancia del core (negativa y asíntota a los modos L), y U_b (3.11) (positiva y asíntota a los modos beam). Notar la dependencia de estas asíntotas con la velocidad relativa U . Los modos R no sufren modificaciones aparente para ambas situaciones.

De los diagramas anteriores es posible conjeturar la siguiente afirmación: en el centro de la zona donde el modo B atraviesa a L, la velocidad de grupo de ambas curvas es idéntica (cruce de líneas verdes en el gráfico anterior). Esto permite identificar de mejor formas estas zonas para otros parámetros donde la relación de dispersión no permite una fácil visualización, tal como sucede para velocidades superiores a las mostradas:

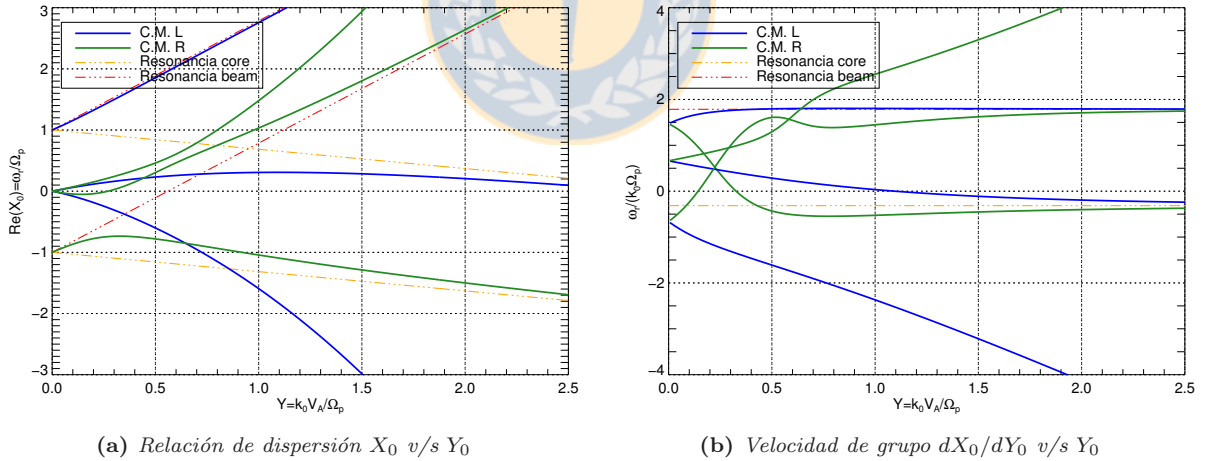


Figura 3.3: Diagramas de dispersión para $\eta_b = 0.15$ y $U = 2.1$. Notar los múltiples intersecciones de las curvas verdes.

Además de lo predicho antes, ahora se produce un nuevo fenómeno debido al incremento de la pendiente de la resonancia beam: hay otro par de intersecciones entre las curvas de velocidad de grupo para las líneas de color verde B y R (los que antes no interactuaban). En particular, este último modo se deforma notoriamente en relación a las soluciones de una especie. Por otra parte, incrementando sólo un poco más la velocidad relativa, por ejemplo para $U = 2.15$, en esta zona de nuevas intersecciones se genera una inestabilidad lineal mediante la fusión de las líneas verdes R y B:

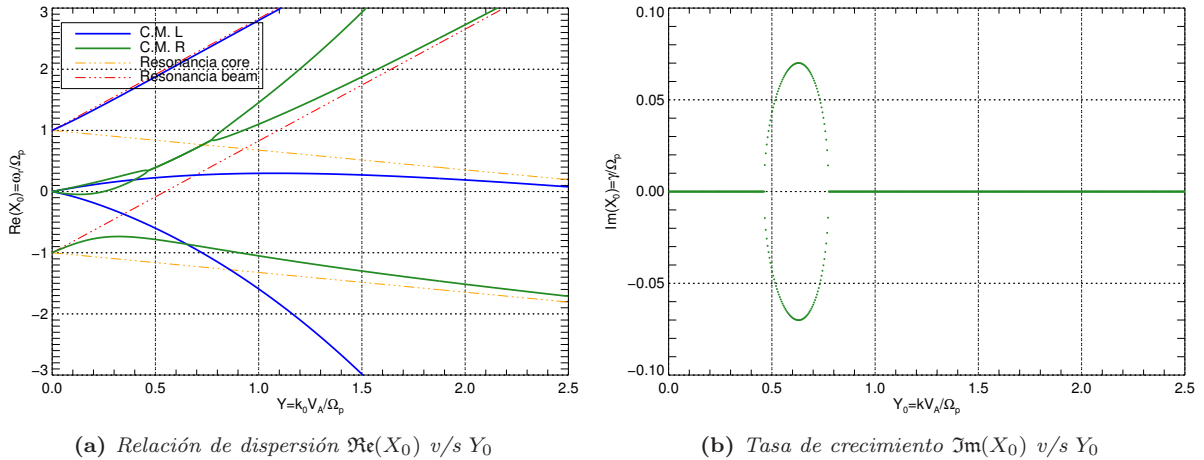


Figura 3.4: Diagramas de dispersión para $\eta_b = 0.15$ y $U = 2.15$.

La inestabilidad lineal, cuyo umbral preciso de aparición depende de la densidad relativa del beam η_b , posee γ_{max} relativamente importantes que enmascaran el efecto de las inestabilidades paramétricas mostradas posteriormente. Por esta razón, sistemas con inestabilidades lineales no serán el objetivo de tesis, no mostrándose más. Una buena descripción de este fenómeno en el marco de la teoría de fluidos, conocido popularmente como inestabilidad resonante ion-ion de sentido derecho (*ion/ion right-hand resonant instability*), ha sido dado en [Gomberoff, 2003]. Ver también el artículo [Gary, 1991] ó la pág 147 de [Gary, 1993], para una discusión cinética de ésta y otras muchas inestabilidades lineales.

Una última observación importante: en todos estos rangos de parámetros analizados, las curvas asociadas a las líneas azules (soluciones de (3.25)) no presentan deformación significativa al variar la velocidad de drift o la densidad (las curvas de la velocidad de grupo se trasladan "suavemente"). El modo *R* en línea verde comienza a deformarse sólo a partir de una cierta velocidad U crítica (aprox. para $U \gtrsim 1.3$ para este caso de alta densidad)

3.1.2. Método perturbativo: Relaciones básicas

Las perturbaciones sobre el estado de equilibrio serán caracterizadas por las mismas expresiones del caso electrón-protón 2.4.1.

Ec. de continuidad y condición de cuasineutralidad

Debido al drift de las especies, la ecuación de continuidad linealizada (2.15) tendrá un término extra, por lo que:

$$\frac{\partial n_{1j}}{\partial t} + n_{0j} \frac{\partial V_{1j}^z}{\partial z} + U_j \frac{\partial n_{1j}}{\partial z} = 0 \quad (3.28)$$

Luego, al reemplazar la dependencia explícita:

$$\tilde{n}_{1j,l} = n_{0j} \frac{k_l}{\omega_{j,l}} \tilde{V}_{1j,l}^z \quad (3.29)$$

en donde se ha definido el análogo a (3.17) para cada especie:

$$\omega_{j,l} := \omega_l - k_l U_j \quad (3.30)$$

Por la condición de cuasineutralidad perturbada (1.63) aplicada en este caso, ya no se tendrá la igualdad (2.17), pero, en cambio, es posible escribir $\tilde{V}_{1e,l}^z$ en términos de cantidades referidas a protones e iones:

$$\tilde{V}_{1e,l}^z = \omega_{e,l} \left(\frac{\eta_c}{\omega_{c,l}} \tilde{V}_{1c,l}^z + \frac{Z\eta_b}{\omega_{b,l}} \tilde{V}_{1b,l}^z \right) = \frac{\omega_{e,l}}{1 + Z\eta} \left(\frac{1}{\omega_{c,l}} \tilde{V}_{1c,l}^z + \frac{Z\eta}{\omega_{b,l}} \tilde{V}_{1b,l}^z \right) \quad (3.31)$$

3.1.3. Ecuación de momentum

La linealización de la ecuación de momentum tiene algunos términos extras con respecto a (2.24), debidos al drift:

$$\frac{\partial \vec{V}_{1j}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \vec{V}_{1j}}{\partial z} + V_{1j}^z \frac{\partial \vec{V}_{0j}}{\partial z} = \frac{q_j}{m_j} \left[\vec{E}_1 + (\vec{V}_{0j} + U_j \hat{z}) \times \vec{B}_1 + \vec{V}_{1j} \times (\vec{B}_0 + B_s \hat{z}) \right] - \frac{1}{n_{0j} m_j} \frac{\partial P_{1j}}{\partial z} \vec{\hat{z}} \quad (3.32)$$

Componentes transversales

Correspondientemente, las componentes transversales de la ecuación anterior serán:

$$\frac{\partial V_{1j}^\pm}{\partial t} + U_j \frac{\partial V_{1j}^\pm}{\partial z} \pm i \Omega_j V_{1j}^\pm = \frac{q_j}{m_j} [E_1^\pm \pm i U_j B_1^\pm] + V_{1j}^z \left(\pm i \frac{q_j}{m_j} B_0^\pm - \frac{\partial V_{0j}^\pm}{\partial z} \right) \quad (3.33)$$

Ambos términos extra producirán la aparición de $\omega_{j,l}$ (3.30) en lugar de ω_l , con lo cual se tendrá la relación análoga (2.36) entre los campos de velocidad y magnéticos transversales:

$$\tilde{V}_{1j,l\mp 1}^\pm = \frac{1}{1 \pm \frac{\omega_{j,l\mp 1}}{\Omega_j}} \left[-\frac{\omega_{j,l\mp 1}}{k_{l\mp 1}} \frac{\tilde{B}_{1,l\mp 1}^\pm}{B_s} + \frac{B_0}{B_s} \frac{1}{1 - \frac{\omega_{0j}}{\Omega_j}} \tilde{V}_{1j,l}^z \right] \quad (3.34)$$

con $j = p, b$. Y para electrones, lo anterior se reduce a:

$$\tilde{V}_{1e,l\mp 1}^\pm = -\frac{\omega_{j,l\mp 1}}{k_{l\mp 1}} \frac{\tilde{B}_{1,l\mp 1}^\pm}{B_s} + \frac{B_0}{B_s} \tilde{V}_{1j,l}^z \quad (3.35)$$

Componente longitudinal

De la misma forma, la linealización de la componente longitudinal de la ecuación de momentum originará la relación:

$$\frac{\partial V_{1j}^z}{\partial t} + U_j \frac{\partial V_{1j}^z}{\partial z} = \frac{q_j}{m_j} \left[E_1^z + \frac{i}{2} (V_{0j}^+ B_1^- - V_{0j}^- B_1^+ + V_{1j}^+ B_0^- - V_{1j}^- B_0^+) \right] - \frac{1}{n_{0j} m_j} \frac{\partial P_{1j}}{\partial z} \quad (3.36)$$

Siguiendo el mismo desarrollo previo, se llega a una expresión muy similar a (2.46) pero con las nuevas definiciones de frecuencias desplazadas por el drift (3.17) y (3.30):

$$\left\{ -\frac{\gamma_j k_B T_j}{q_j B_s} \frac{k_l^2}{\omega_{j,l}} + \frac{\omega_{j,l}}{\Omega_j} \left[1 + \frac{(B_0/B_s)^2}{\left(1 - \frac{\omega_{0j}}{\Omega_j}\right) \left(1 + \frac{\omega_{j,l-1}}{\Omega_j}\right) \left(1 - \frac{\omega_{j,l+1}}{\Omega_j}\right)} \right] \right\} \tilde{V}_{1j,l}^z = -i \frac{\tilde{E}_{1,l}^z}{B_s} \quad (3.37)$$

$$+ \tilde{B}_{1,l+1}^- \frac{B_0}{2B_s^2} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{\omega_{j,l+1}}{\Omega_j}} \frac{\omega_{j,l+1}}{k_{l+1}} - \frac{\omega_{0j}}{k_0} \frac{1}{1 - \frac{\omega_{0j}}{\Omega_j}} \right\} - \tilde{B}_{1,l-1}^+ \frac{B_0}{2B_s^2} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{\omega_{j,l-1}}{\Omega_j}} \frac{\omega_{j,l-1}}{k_{l-1}} - \frac{\omega_{0j}}{k_0} \frac{1}{1 - \frac{\omega_{0j}}{\Omega_j}} \right\} \quad (3.38)$$

Eliminación de las variables electrónicas

Al especializar lo anterior el caso de electrones, y considerando también (3.31), es posible despejar el campo eléctrico en términos de variables referidas a las especies de iones (*core* y *beam*) en analogía a (2.47)

$$-i \frac{\tilde{E}_{1,l}^z}{B_s} = \frac{\gamma_e k_B T_e}{e B_s} k_l^2 \left(\frac{\eta_c}{\omega_{c,l}} \tilde{V}_{1c,l}^z + \frac{Z \eta_b}{\omega_{b,l}} \tilde{V}_{1b,l}^z \right) - \tilde{B}_{1,l+1}^- \frac{B_0}{2B_s^2} \left\{ \frac{\omega_{j,l+1}}{k_{l+1}} - \frac{\omega_{0j}}{k_0} \right\} + \tilde{B}_{1,l-1}^+ \frac{B_0}{2B_s^2} \left\{ \frac{\omega_{j,l-1}}{k_{l-1}} - \frac{\omega_{0j}}{k_0} \right\} \quad (3.39)$$

donde se ha usado además:

$$\frac{\omega_{0e}}{k_0} - \frac{\omega_{l\pm 1e}}{k_{l\pm 1}} = \frac{\omega_{0j}}{k_0} - \frac{\omega_{l\pm 1j}}{k_{l\pm 1}} \quad (3.40)$$

para $j = c, b$. Consiguientemente, al reemplazar lo anterior en (3.38) especializada para protones y agrupar convenientemente, se tiene:

$$\left\{ -\frac{\gamma_c k_B T_c}{e B_s} \frac{k_l^2}{\omega_{c,l}} - \frac{\gamma_e k_B T_e}{e B_s} k_l^2 \frac{\eta_c}{\omega_{c,l}} + \frac{\omega_{c,l}}{\Omega_c} \left[1 + \frac{(B_0/B_s)^2}{\left(1 - \frac{\omega_{0c}}{\Omega_c}\right) \left(1 + \frac{\omega_{c,l-1}}{\Omega_c}\right) \left(1 - \frac{\omega_{c,l+1}}{\Omega_c}\right)} \right] \right\} \tilde{V}_{1c,l}^z - \frac{\gamma_e k_B T_e}{e B_s} k_l^2 \frac{Z \eta_b}{\omega_{b,l}} \tilde{V}_{1b,l}^z \quad (3.41)$$

$$= \tilde{B}_{1,l+1}^- \frac{B_0}{2\Omega_c B_s^2} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{\omega_{c,l+1}}{\Omega_c}} \frac{\omega_{c,l+1}^2}{k_{l+1}} - \frac{1}{1 - \frac{\omega_{0c}}{\Omega_c}} \frac{\omega_{0c}^2}{k_0} \right\} - \tilde{B}_{1,l-1}^+ \frac{B_0}{2\Omega_c B_s^2} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{\omega_{c,l-1}}{\Omega_c}} \frac{\omega_{c,l-1}^2}{k_{l-1}} - \frac{1}{1 - \frac{\omega_{0c}}{\Omega_c}} \frac{\omega_{0c}^2}{k_0} \right\} \quad (3.42)$$

mientras que para el beam de iones:

$$\left\{ -\frac{\gamma_b k_B T_b}{Z e B_s} \frac{k_l^2}{\omega_{b,l}} - \frac{\gamma_e k_B T_e}{e B_s} k_l^2 \frac{Z \eta_b}{\omega_{b,l}} + \frac{\omega_{b,l}}{\Omega_b} \left[1 + \frac{(B_0/B_s)^2}{\left(1 - \frac{\omega_{0b}}{\Omega_b}\right) \left(1 + \frac{\omega_{b,l-1}}{\Omega_b}\right) \left(1 - \frac{\omega_{b,l+1}}{\Omega_b}\right)} \right] \right\} \tilde{V}_{1b,l}^z - \frac{\gamma_e k_B T_e}{e B_s} k_l^2 \frac{\eta_c}{\omega_{c,l}} \tilde{V}_{1c,l}^z \quad (3.43)$$

$$= \tilde{B}_{1,l+1}^- \frac{B_0}{2\Omega_b B_s^2} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{\omega_{b,l+1}}{\Omega_b}} \frac{\omega_{b,l+1}^2}{k_{l+1}} - \frac{1}{1 - \frac{\omega_{0b}}{\Omega_b}} \frac{\omega_{0b}^2}{k_0} \right\} - \tilde{B}_{1,l-1}^+ \frac{B_0}{2\Omega_b B_s^2} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{\omega_{b,l-1}}{\Omega_b}} \frac{\omega_{b,l-1}^2}{k_{l-1}} - \frac{1}{1 - \frac{\omega_{0b}}{\Omega_b}} \frac{\omega_{0b}^2}{k_0} \right\} \quad (3.44)$$

Las dos últimas ecuaciones representan un sistema de dos ecuaciones en las variables $\tilde{V}_{1c,l}^z$ y $\tilde{V}_{1b,l}^z$ (a diferencia del caso de una especie de protones, en el que sólo está (2.48)). En este punto es conveniente introducir variables adimensionales de forma similar al caso electrón-protón, dadas en F.2. Así, resolviendo el sistema previo, se tendrá, en vez de (2.49), las soluciones:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\tilde{V}_{1c,l}^z}{V_A} &= \frac{\tilde{B}_{1,l+1}^- B_{+c} + \tilde{B}_{1,l-1}^+ B_{-c}}{2B_0 D} \\ \frac{\tilde{V}_{1b,l}^z}{V_A} &= \frac{\tilde{B}_{1,l+1}^- B_{+b} + \tilde{B}_{1,l-1}^+ B_{-b}}{2B_0 D} \end{aligned}} \quad (3.45)$$

3.1.4. Ecuación de Ampère

Ahora se debe encontrar las expresiones explícitas de las densidades de corriente perturbadas asociadas a cada una de las especies que van al lado derecho de la ecuación de Ampère transversal² en la forma (2.53). De manera análoga a (2.55) y (2.56), se tendrá para $j = c, b$:

$$\tilde{J}_{1j,l\mp 1}^\pm = \frac{\eta_j q_j B_s}{\mu_0 V_A m_p} \left\{ -\tilde{B}_{1,l\mp 1}^\pm \left[\frac{X_{j,l\mp 1}}{\psi_{\mp j} Y_{l\mp 1}} \right] + B_0 \frac{\tilde{V}_{1j,l}^z}{V_A} \frac{1}{\psi_{0j}} \left[\frac{1}{\psi_{\mp j}} - \frac{Y_l X_{0j}}{Y_0 X_{j,l}} \right] \right\} \quad (3.47)$$

Mientras que para electrones, es conveniente expresar las frecuencias $\omega_{e,l}$ en términos de las asociadas a los protones y el beam mediante (3.31), la identidad

$$1 - \frac{Y_l X_{0e}}{Y_0 X_{e,l}} = \frac{X_{j,l}}{X_{e,l}} \left[1 - \frac{Y_l X_{0,l}}{Y_0 X_{j,l}} \right] \quad (3.48)$$

y el análogo a (3.22)

$$\omega_{e,l} = \eta_c \omega_{c,l} + Z \eta_b \omega_{b,l} \quad (3.49)$$

² Análogamente al caso de plasma electrón-protón, la componente longitudinal de la ecuación de Ampère linealizada da lugar a una expresión con varios términos adicionales a (2.50), debidos al drift relativo entre las diferentes especies:

$$\sum_j J_{1j}^z = -e(n_{0e} V_{1e}^z + n_{1e} U_e) + e(n_{0c} V_{1c}^z + n_{1c} U_c) + Ze(n_{0b} V_{1b}^z + n_{1b} U_b) \quad (3.46)$$

que proporciona, en vez de la igualdad (2.17) del caso electrón-protón, la misma relación obtenida con la ecuación de continuidad (3.31). Notar que para llegar a esa conclusión se ha usado $1 + k_l U_j / \omega_{j,l} = \frac{\omega_l}{\omega_{j,l}}$ (para cada especie j).

con lo cual, escogiendo alternativamente $j = c, b$ y adimensionalizando:

$$\tilde{j}_{1e,l\mp 1}^{\pm} = \frac{\Omega_p}{\mu_0 V_A} \left\{ \tilde{B}_{1,l\mp 1}^{\pm} \left[\frac{X_{e,l\mp 1}}{Y_{l\mp 1}} \right] - B_0 \frac{\tilde{V}_{1e,l}^z}{X_{e,l} V_A} X_{j,l} \left[1 - \frac{Y_l X_{0,l}}{Y_0 X_{j,l}} \right] \right\} \quad (3.50)$$

$$= \frac{\Omega_p}{\mu_0 V_A} \left\{ \tilde{B}_{1,l\mp 1}^{\pm} \left[\frac{\eta_c X_{c,l\mp 1} + Z \eta_b X_{b,l\mp 1}}{Y_{l\mp 1}} \right] - B_0 \left[\frac{\eta_c \tilde{V}_{1c,l}^z}{V_A} \left(1 - \frac{Y_l X_{0c}}{Y_0 X_{c,l}} \right) + \frac{\tilde{V}_{1b,l}^z}{V_A} Z \eta_b \left(1 - \frac{Y_l X_{0b}}{Y_0 X_{b,l}} \right) \right] \right\} \quad (3.51)$$

Sumando las contribuciones de las tres especies a la corriente total y reemplazando en la ecuación de Ampère, se obtiene el análogo a (2.57):

$$\pm k_{l\mp 1} \tilde{B}_{1,l\mp 1}^{\pm} = \frac{\Omega_p}{V_A} \left\{ \pm \frac{\tilde{B}_{1,l\mp 1}^{\pm}}{Y_{l\mp 1}} \left[\frac{\eta_c X_{c,l\mp 1}^2}{\psi_{\mp c}} + A_b \eta_b \frac{X_{b,l\mp 1}^2}{\psi_{\mp b}} \right] \right. \quad (3.52)$$

$$\left. + B_0 \frac{\tilde{V}_{1c,l}^z}{V_A} \frac{\eta_c}{\psi_{0c}} \left[X_{0c} - \frac{Y_l X_{0c}^2}{Y_0 X_{c,l}} \mp \frac{X_{c,l\mp 1}}{\psi_{\mp c}} \right] + B_0 \frac{\tilde{V}_{1b,l}^z}{V_A} \frac{A_b \eta_b}{\psi_{0b}} \left[X_{0b} - \frac{Y_l X_{0b}^2}{Y_0 X_{b,l}} \mp \frac{X_{b,l\mp 1}}{\psi_{\mp b}} \right] \right\} \quad (3.53)$$

y mediante la normalización F.2, se llega a la expresión con dos casos de signo análoga a (2.58):

$$2B_0 R_{\mp p} \frac{\tilde{V}_{1c,l}^z}{V_A} + 2B_0 R_{\mp b} \frac{\tilde{V}_{1b,l}^z}{V_A} + L_{\mp} \tilde{B}_{1,l\mp 1}^{\pm} = 0 \quad (3.54)$$

3.1.5. Relación de dispersión

En vez de las tres relaciones del caso electrón-protón, ahora se tienen un sistema de cuatro ecuaciones en las variables $\tilde{B}_{1,l\mp 1}^{\pm}$, $\tilde{V}_{1c,l}^z$ y $\tilde{V}_{1b,l}^z$. Pero de la misma forma que en dicho caso, es posible eliminar éstas dos últimas reemplazando en las dos primeras, de donde se obtiene un sistema de dos por dos en las variables $\tilde{B}_{1,l\mp 1}^{\pm}$. El requerimiento de soluciones no triviales para el campo magnético implica la condición de nulidad del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} R_{+c} B_{+c} + R_{+b} B_{+b} + DL_{+} & R_{+c} B_{-c} + R_{+b} B_{-b} \\ R_{-c} B_{+c} + R_{-b} B_{+b} & R_{-c} B_{-c} + R_{-b} B_{-b} + DL_{-} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.55)$$

con lo cual se tiene, después de considerar por el teorema de Floquet (sección B.4) $l = 0$ y las definiciones de ω (B.5) y k (B.6), la relación de dispersión de 10º grado en X (ω).

$$L_{+} L_{-} D + L_{+} R_{-c} B_{-c} + L_{+} R_{-b} B_{-b} + L_{-} R_{+c} B_{+c} + L_{-} R_{+b} B_{+b} + \frac{(B_{-c} B_{+b} - B_{-b} B_{+c})(R_{-c} R_{+b} - R_{-b} R_{+c})}{D} = 0 \quad (3.56)$$

cuyo último término también puede escribirse como (ver [Hollweg et al., 1993]):

$$\frac{(B_{-c} B_{+b} - B_{-b} B_{+c})(R_{-c} R_{+b} - R_{-b} R_{+c})}{D} = (X_c X_b)^2 (B_{-b1} B_{+c1} - B_{-c1} B_{+b1}) \quad (3.57)$$

Al igual que para el caso de una especie, en el límite de amplitud nula $A \rightarrow 0$ los términos $B_{\pm b}$ y $B_{\pm c}$ se anulan, por lo que la relación se reduce igualmente a (2.62).

Esta relación de dispersión ha sido antes obtenida, en el caso particular de un *beam de partículas alphas* ($Z = 2, A_b = 4$) y con un procedimiento ligeramente distinto aunque preservando la misma notación, por [Hollweg et al., 1993]. Sin embargo, es importante mencionar que el cálculo allí realizado (y al igual que en muchos trabajos posteriores) se efectuó en el sistema de referencia donde el core de protones está en reposo: $U_c = 0$ y $U_b = 0$ (en vez de (3.10) y (3.11) aquí usado). Por otro lado, merece ser notado que la relación de dispersión anterior para el caso particular de un beam de protones ($Z = 1, A_b = 1$), que es la misma a utilizar para las soluciones numéricas a desarrollar en la siguiente sección, ha sido derivada en [Gomberoff et al., 2002].

3.2. Plasma de fluidos protón-protón: Resultados numéricos

Ahora se mostrarán las características más relevantes de la relación de dispersión para plasma protón-protón $Z = 1$, $A_b = 1$ (3.56), enfatizando las diferencias con respecto al caso de una especie mostrado en la sección 2.5. Los parámetros adicionales a este caso previamente analizado, son la densidad relativa del beam con respecto a la de electrones η_b (ó con respecto a la del core η), la velocidad relativa entre especies \mathcal{U} y el parámetro beta del beam $\tilde{\beta}_b$ (además que el parámetro $\tilde{\beta}_p$ de los protones del core cambia a $\tilde{\beta}_c$). Ellos serán escogidos en rangos que podrían ser apropiados para explicar inestabilidades paramétricas en el viento solar rápido, los que han sido brevemente discutidos en la sección 1.4.2.

3.2.1. Comportamiento general sin onda pump

Elección de la onda pump

Debido a que la topología de las relaciones de dispersión de la onda pump depende de η y \mathcal{U} (recordar (3.1.1)), resulta un poco ambigüo determinar un valor dado de X_0 e Y_0 que sirva cuando estos parámetros varían de acuerdo a (3.25) (es decir, ¿conviene mantener constante Y_0 ó X_0 ?). Además, sería útil poder establecer un criterio apropiado para la comparación entre ondas pump con el caso de una especie, en donde el valor X_0 (para ondas L) se escogió primero como un indicador de la lejanía con respecto a la resonancia $\omega_0 = V_A$, que da cuenta de los efectos dispersivos. Otro argumento a favor de una elección apropiada de estos parámetros, es poder establecer una comparación con el cálculo en el sistema de referencia del core de protones en reposo: $U_c = 0$ y $U_b = 0$ (en vez de (3.10) y (3.11) aquí usado), que es de amplio uso en la mayoría de los artículos referentes a inestabilidades paramétricas con varias especies. En esta situación, la resonancia core está dada simplemente por la misma expresión de un fluido $X_0 = 1$, de donde se infiere que los efectos dispersivos serán (prácticamente) iguales escogiendo el mismo X_0 en ambos casos, lo que no sucede con nuestro sistema de referencia del centro de masas.

En base a todos estos razonamientos, la distancia (perpendicular) entre un punto (Y_0, X_0) de la rama L de la relación de dispersión de la onda pump para *dos especies* (3.25) (hacia adelante) y la recta de resonancia core X_{0c} (ver definición en figura 3.1), dada por:

$$d_2 = \frac{|-U_c Y_0 + X_0 - 1|}{\sqrt{U_c^2 + 1}} \quad (3.58)$$

será *la misma* que la distancia entre un punto (Y'_0, X'_0) de la rama L de la relación de dispersión de la onda pump para *una especie* (1.95) (hacia adelante) y la recta horizontal de resonancia $X'_0 = 1$:

$$d_1 = 1 - X'_0 \quad (3.59)$$

Así, para la rama L mencionada, siempre se escogerá como onda pump un caso previamente analizado para una especie de protones caracterizado por X'_0 , de donde el X_0 e Y_0 a usar aquí (para dos especies) provendrán de imponer la condición:

$$d_1 = d_2 \quad (3.60)$$

La ventaja de este procedimiento es que la onda pump, en ambas situaciones, se ubicará en un punto donde los *efectos dispersivos (debidos al core) son idénticos*. La ilustración de ello se presenta en la siguiente figura:

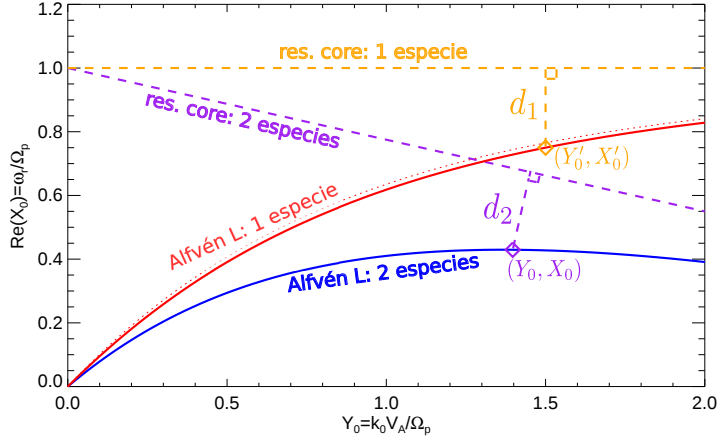


Figura 3.5: Curva azul: rama L de rel. de dispersión con beam de protones (3.25). Curva roja: rama L de rel. de dispersión de un fluido (1.95) (Aunque no se ha usado, también se indica en línea roja discontinua la rama L de la rel. de dispersión con beam, en el sistema de referencia con el core en reposo). En naranja y púrpura se indican las curvas de resonancia del core para el caso sin y con beam, respectivamente. Parámetros $X'_0 = 0.75$, $U = 1.5$, $\eta_b = 0.15$. Ver explicación en texto.

El equivalente a la pump de una especie (círculo naranja), donde es conocido X'_0 , se escoge imponiendo la igualdad de distancias a las curvas de resonancia d_1 y d_2 (3.60), de donde se obtiene la pump a usar (círculo púrpura) para el caso de dos especies (X_0, Y_0)

Caso $A = 0$

Al igual que para una especie (2.5.2), se analizará el caso límite de amplitud nula $A = 0$, en el que la relación de dispersión se reduce a la misma expresión (2.62). Esto implica igualmente tres conjuntos de 2 raíces c/u

$$D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (X_c X_b)^2 = \frac{\beta}{1 + \eta} \left(\eta \frac{r_b X_c^2}{\Delta_b} + \frac{r_c X_b^2}{\Delta_c} \right) \quad (3.61)$$

Si siguiendo el procedimiento de [Hollweg et al., 1993], una de las soluciones aproximadas de la ecuación anterior se halla en el límite de un beam poco denso $\eta \rightarrow 0$, donde es dominante el segundo término del paréntesis, obteniendo:

$$X_c^2 \approx (\beta_e^F + \beta_c^F) Y^2 \quad (3.62)$$

Esto representa simplemente el equivalente a los mismos modos acústicos de una especie $\pm s$ (2.63), notando que están soportados por el core de protones. Su representación gráfica, en el plano $\omega_r - k$, es simplemente un par de rectas simétricas con respecto a la línea $X = U_c Y$, y cuya apertura depende de los parámetros beta de electrones y el core. Otra solución aproximada a (3.61) se obtiene en la situación opuesta, donde el segundo término del paréntesis es dominante debido a la condición $\eta \sim \Delta_b / r_b$, por lo cual:

$$X_b^2 \approx \beta_b^F Y^2 \quad (3.63)$$

Esta relación puede ser interpretada como un modo acústico soportado únicamente por el beam de protones, denotándose por tanto como $\pm sB$ (en donde \pm indica igualmente desplazamiento hacia adelante y atrás, respectivamente, pero ahora con respecto al sistema de referencia en que el beam está en reposo). Análogamente a los modos $\pm s$, su representación gráfica es simplemente un par de rectas simétricas con respecto a la línea $X = U_b Y$, y cuya apertura depende del parámetro beta del core.

Se puede verificar, al resolver numéricamente, que el par de relaciones anteriores son una muy buena aproximación a las soluciones exactas de (3.61).

- Las bandas laterales $L_{\pm} = 0$ poseen expresiones análogas a (2.64) y (2.65), sustituyendo la correspondiente onda pump (3.25) que involucra igualmente ω_{\pm} y k_{\pm} . Pero debido a la presencia del beam, ahora existe un par de modos adicionales a los conocidos $\pm f$ y $\pm b$, denotados como $\pm B$ y surgidos de la traslación apropiada de la curva B de la onda pump (ver figura 3.1 y discusión posterior).

Con las consideraciones anteriores, se tiene ahora para los cuatro casos de parámetros presentados de la pump en 3.1

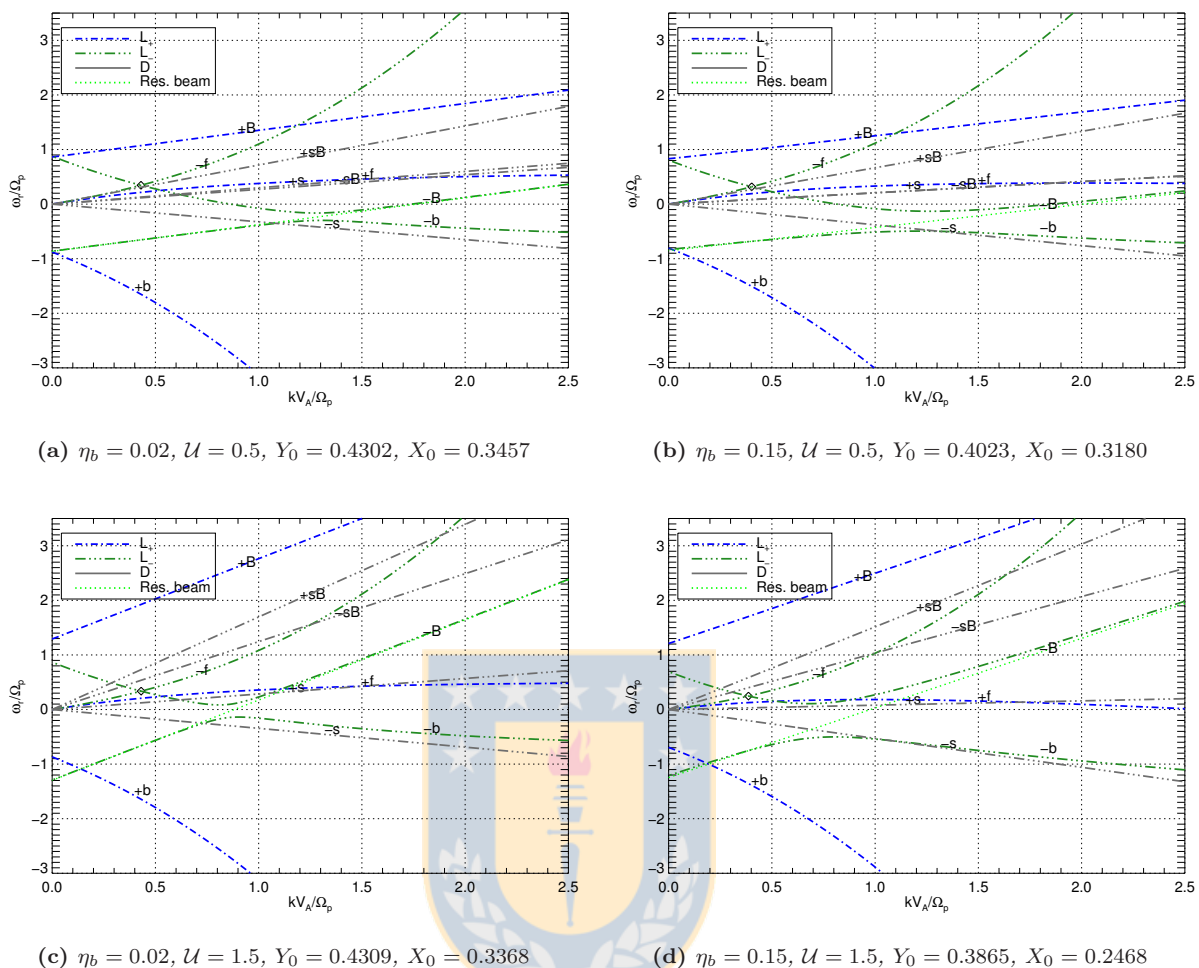


Figura 3.6: Relaciones de dispersión X v/s Y en el límite $A = 0$ (2.62), con $X'_0 = 0.35$ (el mismo usado en 2.4), $\beta_e^F = 0.05$, $\beta_c^F = 0.05$ y $\beta_b^F = 0.05$ (ver justificación de esta elección en la siguiente sección 3.2.2). Los parámetros de cada diagrama son los mismos que la figura de la pump 3.1, para enfatizar que las bandas laterales L_{\pm} se obtienen de una simple traslación de las respectivas curvas de dicho diagrama (similar al caso de una especie, ver figura 2.4). También se ha indicado la línea de resonancias del beam para L_- (zona del “gap”).

El aumento de U provoca que las ramas acústicas asociadas al beam $\pm sB$ giren en sentido antihorario (con respecto al origen), mientras que las $\pm s$ se desplazan en forma poco apreciable. En cambio, el aumento de la densidad η_b ocasiona precisamente el efecto contrario: un giro en sentido horario de las mismas ramas $\pm sB$ y también para las ramas $\pm s$ (aunque de forma más marcada para el caso de U alto).

Inestabilidad lineal acústica

Dentro del barrido de parámetros para este caso límite de amplitud nula $A = 0$, se ha hallado un comportamiento extraño para un estrecho rango de parámetros: se trata de una inestabilidad lineal generada por la fusión de los modos acústicos $-sB$ y $+s$ cuando sus velocidades de fase se igualan, de una naturaleza muy distinta a la conocida inestabilidad lineal de la onda pump para velocidades de drift grandes (ver 3.4), pues toda la zona $k > 0$ es inestable con γ creciente de forma lineal en k , tal como se aprecia a continuación:

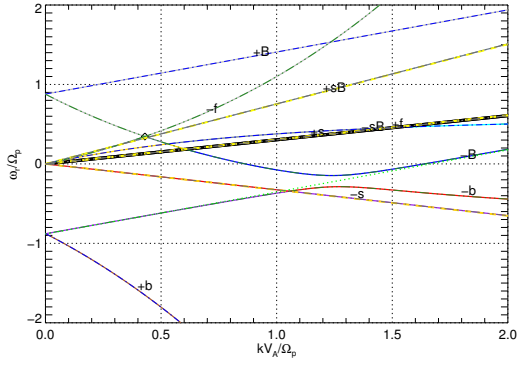
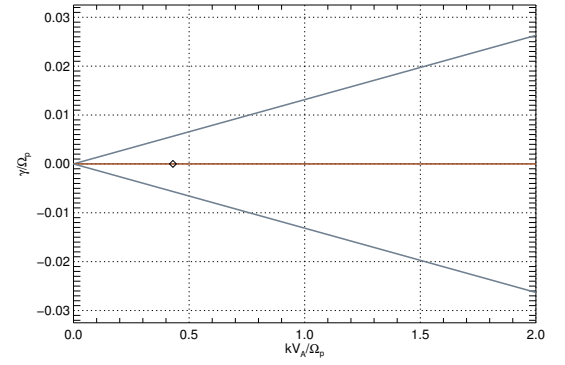
(a) Relación de dispersión $\Re(X)$ v/s Y (b) Tasa de crecimiento $\Im(X)$ v/s Y

Figura 3.7: Diagramas de dispersión para $\eta_b = 0.02$, $U = 0.54$. Mismos otros parámetros anteriores ($Y_0 = 0.430$, $X_0 = 0.345$) Notar que la inestabilidad lineal acústica generada por $-sB$ y $+s$ cubre todo el rango $k > 0$.

Cabe destacar que esta inestabilidad acústica fue hallada en [Hollweg et al., 1993] (ver su figura 5) en el contexto de un plasma con un beam de partículas alfas, y analizada con un poco más de detalle en [McKenzie et al., 1993] y [Jayanti and Hollweg, 1994], donde se le identificó como una inestabilidad (no paramétrica) del tipo *two stream*, esencialmente longitudinal. Aproximaciones del rango en β en el cual existe y sus máximas γ pueden ser halladas en las referencias anteriores.

Sus tasas de crecimiento pueden llegar a ser tan grandes que enmascaran muchas de las inestabilidades paramétricas estudiadas, por lo que en lo posible se evitará estudiar el entorno de ese rango (de paso, nótese que los parámetros de la figura 3.6b provocan que las ramas $+s$ y $-sB$ estén muy cerca, de modo que dicha situación está al borde de experimentar esta inestabilidad acústica). Sin embargo, para tener una noción de los valores de U en los cuales se desencadena, se mostrará unos cuantos gráfico de la variación del γ_{max} máximo de esta inestabilidad (que será en el extremo derecho del rango de números de onda, para $Y = 2.0$) en función de U , similar a los mostrados en el capítulo previo:

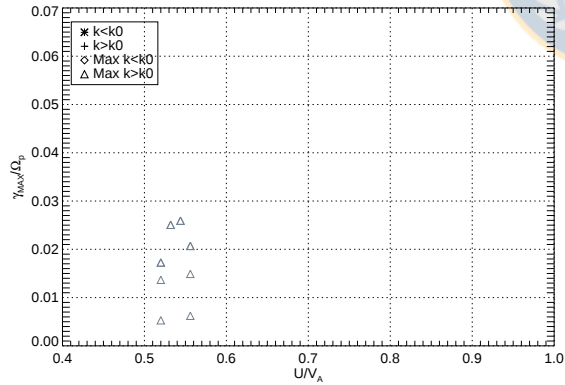
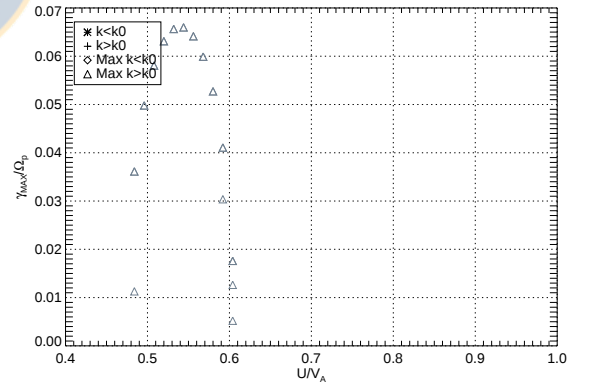
(a) $\eta_b = 0.02$ (b) $\eta_b = 0.15$

Figura 3.8: Tasas máximas de crecimiento γ_{max} de la inestabilidad lineal para U variable en $Y \leq 2.0$ y los valores de densidad indicados. Mismos otros parámetros anteriores.

De aquí se infiere que esta inestabilidad, conforme se incrementa la densidad, aumenta tanto los rangos de U en los que se activa como también los γ asociados, aunque la velocidad para la cual la tasa de crecimiento es máxima no se desplaza en U (una mención lateral: precisamente en dicho punto máximo, $U = 0.54$, es que se graficó 3.7). Por otro lado, ¿Qué efecto tiene el cambiar cada uno de los betas, en los rangos activos de esta inestabilidad?. Para ello, se mostrarán tres gráficos en los que se varían individualmente los β 's asociados a cada especie, para el caso de alta densidad:

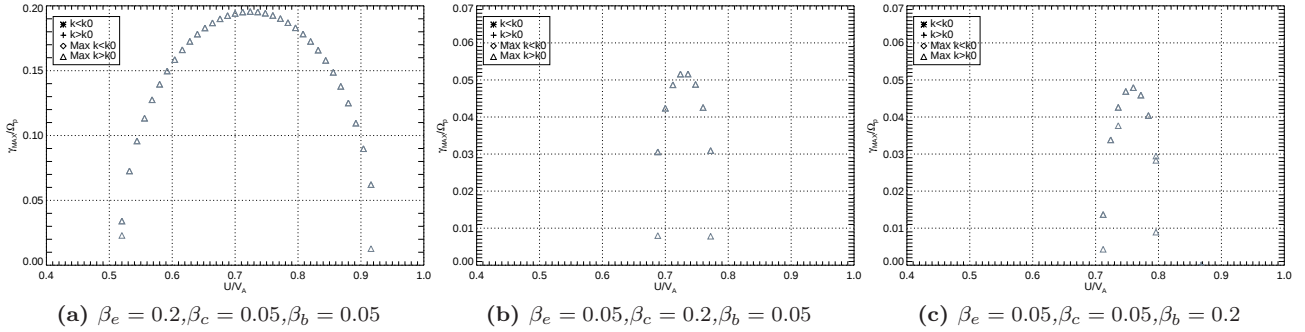


Figura 3.9: Tasas máximas de crecimiento γ_{max} de la inestabilidad lineal para U variable en $Y \leq 2.0$, $\eta_b = 0.15$ y los valores de beta's indicados. Mismos otros parámetros anteriores. Notar el diferente rango de ordenadas para el caso con $\beta_e = 0.2$, para establecer una apropiada comparación con 3.35b.

El máximo de cada curva de γ_{max} se desplaza para U más altos al aumentar cualquier β , aunque en la misma cantidad para β_e que β_c . En particular, incrementar β_e ensancha notoriamente el rango de posibles U 's en los cuales la inestabilidad está activa, además de aumentar el máximo de la curva de γ_{max} v/s U a casi el triple. Por otro lado, aumentar los betas asociados a los protones tiene el efecto precisamente opuesto: acorta el rango en U y disminuye los γ_{max} . El aumento de β_b tiene prácticamente los mismos efectos que el de β_c .

Por último, merece ser notado, como ya se discutió en la referencia previa [Hollweg et al., 1993], que al usar un $A \neq 0$, esta inestabilidad lineal cambia ligeramente los rangos de U en los cuales aparece, tendiendo además a amortiguarse.

3.2.2. Caso particular: Velocidad de drift nula

Es posible recuperar la misma estructura de las conocidas inestabilidades paramétricas de 1 especie (figura 2.6) en el caso límite de considerar un beam muy tenue $\eta_b \rightarrow 0$, ya que las tres inestabilidades, obviamente, conservan las mismas características independientemente del valor de U ó β_b . De paso, ahora puede ser justificado la elección de los parámetros beta en la figura 3.6, que se hizo precisamente para que este límite de una especie, en el marco de teoría de fluidos, fuera lo más consistente posible. En efecto, en dicho caso límite, los parámetros β_e y β_p son indistinguibles, en el sentido que sólo su suma $\beta = \beta_e + \beta_p = 0.1$ entra directamente en la relación de dispersión. Luego, en este caso de dos especies, es razonable escoger $\beta_e = \beta_p = 0.05$ para que su suma sea igual al valor anterior, además de no explicitar preferencia por los electrones o protones. En cuanto al beta del beam, simplemente se escoge igual al protónico $\beta_b = \beta_p = 0.05$, de modo que el beta total de ambas especies iónicas sea $\beta_b + \beta_p = 0.1$.

Por otra parte, también es interesante considerar el caso en que no hay velocidad diferencial de deriva entre especies ($U \rightarrow 0$), puesto para ciertos parámetros las inestabilidades son prácticamente iguales a las de una especie (ó límite $\eta_b \rightarrow 0$). A modo de ilustración, se mostrarán un ejemplo de estos casos con una amplitud de la onda pump $A = 0.3^2$ (el mismo del caso estándar de un fluido):

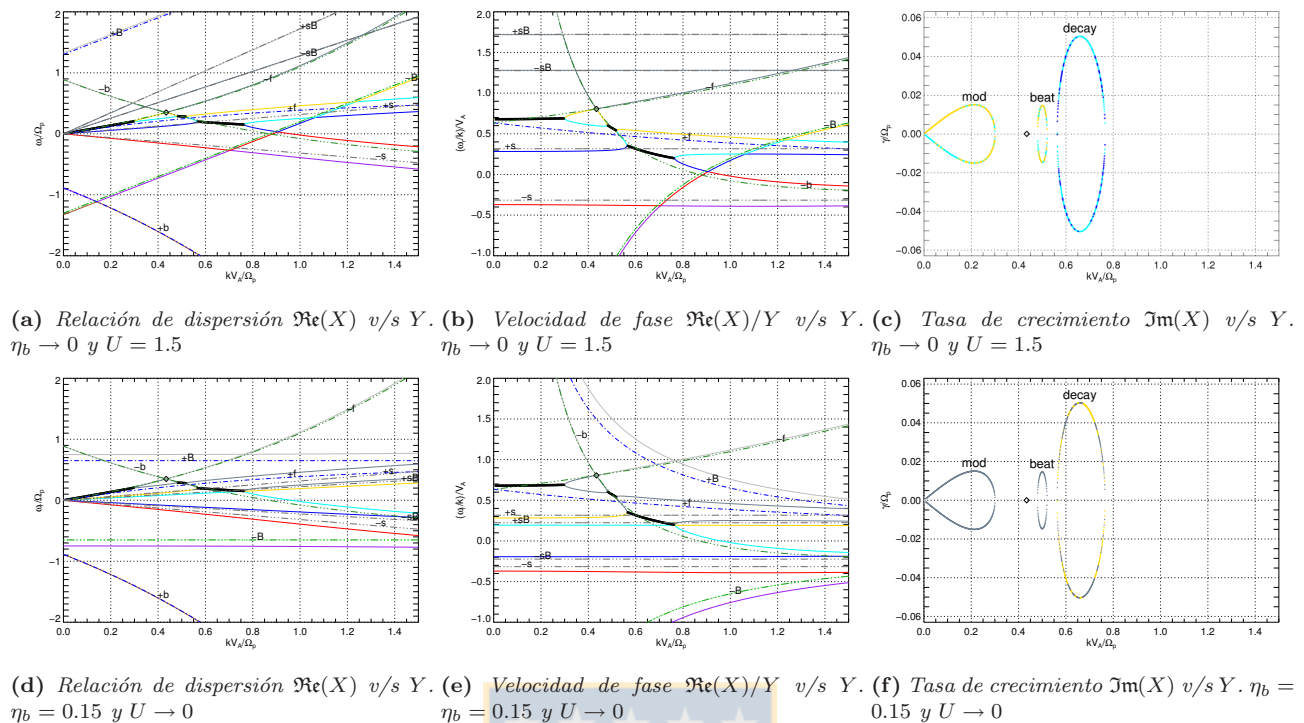


Figura 3.10: Diagramas de relación de dispersión para $A = 0.09$ y los demás parámetros son idénticos a los de la figura 3.6. Arriba: $\eta_b \rightarrow 0$ y $U = 1.5$. Abajo: $\eta_b = 0.15$ y $U \rightarrow 0$

La identificación de las inestabilidades decay, beat y modulacional del caso de una especie es evidente al comparar con la figura de fluidos 2.6. Cabe señalar que en estos casos la morfología de las ramas del beam cambia completamente en el plano ω_r v/s k , pero a pesar de ello las características de las inestabilidades (frecuencia, tasas de crecimiento y velocidad de fase) se mantienen constantes para cualquier valor de los cantidades asociadas al beam (excepto los efectos de la variación en el beta del beam β_b), y sólo dependen de los parámetros de una especie cuyos efectos ya fueron analizados en el capítulo previo. Obviamente, esto se produce porque las ramas que conforman las inestabilidades de una especie, se mantienen invariantes en ambos límites analizados.

Efectos del beta del beam

¿Qué ocurre con las inestabilidades anteriores, en este límite de velocidad de deriva nula $U \rightarrow 0$, al variar el parámetro térmico del beam β_b ? Aquí se nota que surge un par de nuevas inestabilidades asociadas a la mera presencia del beam, para ciertos valores de η_b . Para una visualización general de este comportamiento, primero se mostrará una gráfico de las características de los máximos de cada inestabilidad (γ_{max} , $v_{\phi,max}$, k_{max}) en función de β_b , de forma similar a lo realizado en el capítulo previo para el caso de una especie:

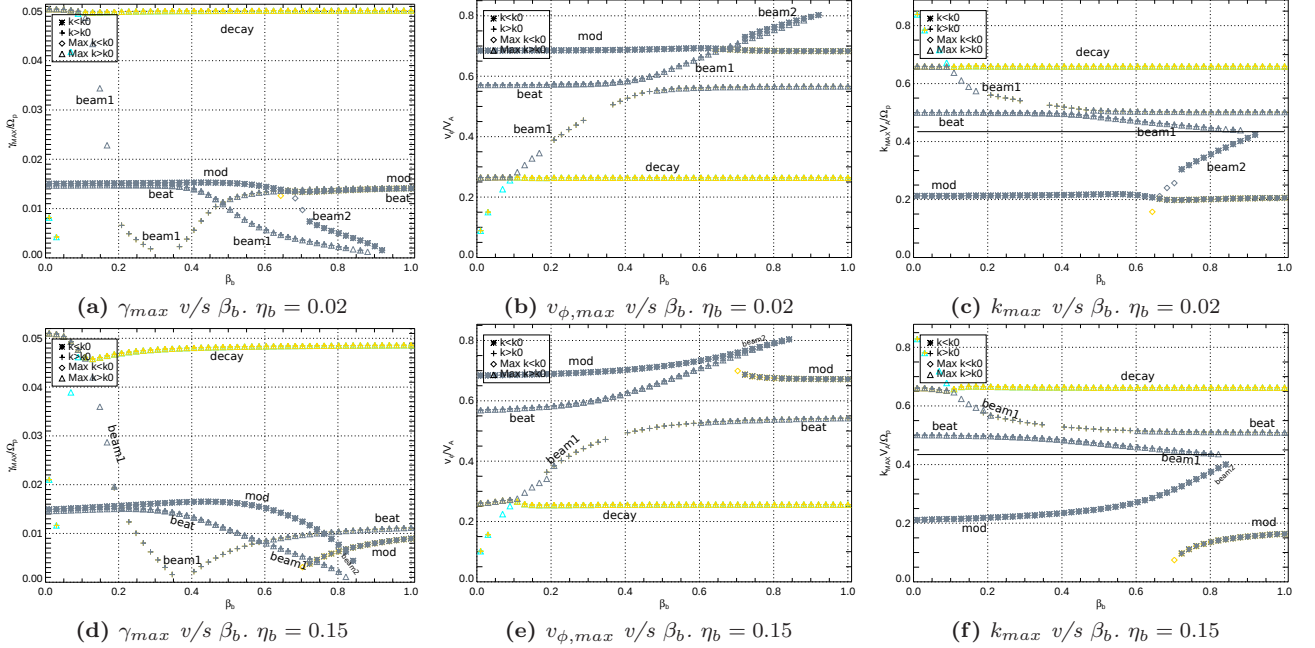


Figura 3.11: Máximos de inestabilidad para $0 < \beta_b < 1.0$. Arriba: caso de baja densidad $\eta_b = 0.02$. Abajo: caso de alta densidad $\eta_b = 0.15$. $X'_0 = 0.35 \approx X_0$, $Y_0 = 0.434$. Los demás parámetros son idénticos a los de la figura previa 3.6.

- Las tres inestabilidades conocidas de una especie sufren disminuciones en sus γ_{max} , precisamente en los sectores donde las inestabilidades del beam alcanzan tasas de crecimiento comparables a ellas. Este fenómeno es más notorio conforme la densidad del beam aumenta (diagramas inferiores). El incremento de la densidad del beam, para un β_b dado también aumenta los γ_{max} de la inestabilidades del beam (y sólo esas). Aunque no es mostrado, también se ha verificado que el γ_{max} de estas inestabilidades es monótonamente creciente con respecto a la amplitud de la onda pump A y a su frecuencia X_0 .
- Del diagrama de k_{max} se deduce que en realidad son dos inestabilidades distintas las asociadas al beam. La primera (denotada como *Beam 1*) se caracteriza por desplazarse hacia k menores conforme β_b aumenta, atravesando consecutivamente la inestabilidad decay y beat (que es los puntos donde alcanza sus máximos γ_{max}), hasta desaparecer cerca de $k = k_0$. En cambio, la segunda (denotada como *Beam 2*) surge en un β_b relativamente alto, cerca del k de la inestabilidad modulacional, desplazándose hacia k mayores y tendiendo igualmente a k_0 . Entre más lejos (mayor distancia en k) se situen las inestabilidades del beam de alguna de las inestabilidades de una especie, menor será su γ_{max} .
- Notar que tanto Beam 1 como 2 presentan el mismo umbral de supresión en U , que será menor conforme mayor sea la densidad del beam.
- Merece ser destacado el hecho que después (i.e: para β_b mayores) que la inestabilidad Beam 1 atraviesa la decay o beat, o después que la Beam 2 surge de la modulacional, estas inestabilidades de una especie no recuperan sus γ_{max} previos (los que tenían para β_b menores), sino que disminuyen un tanto, manteniéndose así. Esto será más marcado si la densidad del beam es mayor. En otras palabras, es como si las inestabilidades del beam "drenara" parte de la energía de alguna de las inestabilidades decay, beat ó modulacional cuando las atraviesa (mismo k), pero "devolviéndoles" sólo una parte después que se ha alejado (diferentes k).
- Notar que las inestabilidades asociada al beam puede reconocerse al tener velocidades de fase $v_{\phi,max}$ crecientes con respecto a β_b (y además las dos siguen la misma tendencia), a diferencia de la modulacional, beat y decay que no varían apreciablemente con este parámetro. Sin embargo, también hay zonas donde estas inestabilidades conocidas se fusionan con aquellas del beam, resultando características mixtas, como por ejemplo para $\beta \gtrsim 0.6$.

¿Por qué surgen estas inestabilidades asociadas al beam? Una manera de responder esta interrogante es mostrar los gráficos de la relación de dispersión para unos cuantos casos relevantes de β_b 's distintos, mostrando la forma en que la inestabilidad beam atraviesa la inestabilidad decay.

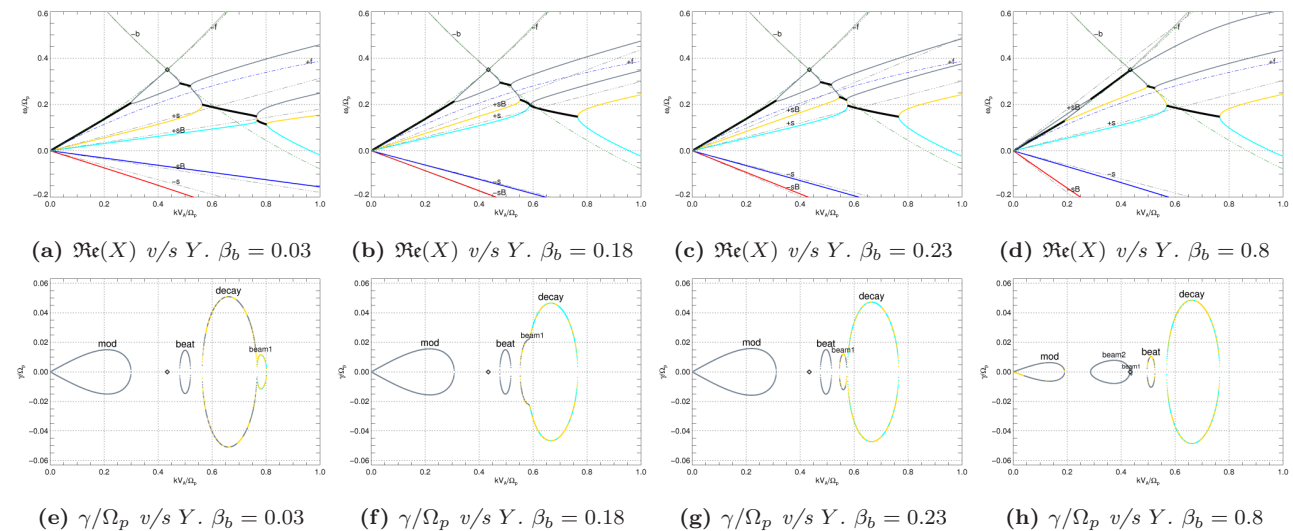


Figura 3.12: Diagramas de dispersión para varios β_b en el límite $U = 0$ para el caso de alta densidad $\eta_b = 0.15$. El resto de parámetros son idénticos a los de las figuras previas, en particular con los parámetros beta's de electrones y core constantes. Obsérvese como la inestabilidad del beam 1 se desplaza hacia k menores al incrementar β_b , fusionándose con decay para después aparecer a su izquierda.

De lo anterior, se infiere que es el movimiento de la rama acústica $+sB$ conforme β_b aumenta (en sentido antihorario), lo que ocasiona el cruce con la rama $-b$ en distintos puntos (siempre para k cada vez menores), generando la inestabilidad denotada como Beam 1. Por otra parte, para U bastante más altos (figura del extremo derecho), se genera la inestabilidad Beam 2 debido a la intersección de $+sB$ con $-f$, y como tal, se sitúa para $k < k_0$.

Efectos del beta de electrones y core de protones

En el caso de un fluido no había diferencia sustancial entre el aporte de electrones y protones al beta total, pues en la relación de dispersión sólo entraba su suma, a diferencia de lo que sucede aquí. Por lo tanto ¿Qué efectos tiene el beta del core de protones o de electrones en estas inestabilidades de una especie? Y en particular ¿Cómo se ve afectada las inestabilidades del beam frente al cambio de dichos parámetros? Para responder esto, mostraremos gráficos de los máximos de las inestabilidades similares a los de la figura 3.11, variando β_c y β_e

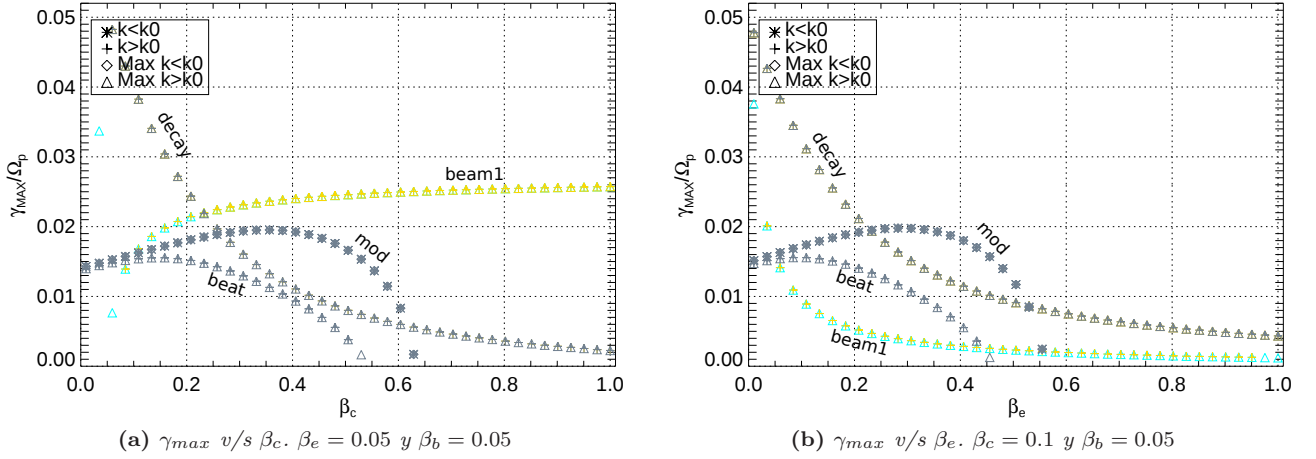


Figura 3.13: Máximos de inestabilidades γ_{max} para $0 < \beta_{(c,e)} < 1.0$, $\eta_b = 0.15$, y con los beta's indicados. Los demás parámetros son los mismos de los casos anteriores.

Comparando con el gráfico análogo del caso de una especie 2.10, se nota:

- Las tres inestabilidades de una especie mantienen un comportamiento muy similar al caso de un fluido, incluyendo los característicos umbrales en β para las cuales beat y modulacional se suprimen. Esto es un indicio que dichos umbrales sólo dependen del beta total, y no del aporte relativo de electrones o protones.
- La inestabilidad beam 1 es monótonamente creciente con respecto a β_c a partir de $\beta_b \approx 0.05$, siendo dominante para beta grandes. En cambio, ella es monótonamente decreciente con respecto a β_e , con un comportamiento similar a decay pero con menores γ_{max} . Es decir, betas de electrones y el core de protones provocan efectos opuestos sobre beam 1, aunque si para un β_c y β_b dados ella no existe, entonces cualquier variación de β_e no la hará aparecer (Ej: $\beta_c = \beta_b = 0.05$)
- Los gráficos $v_{\phi,max}$ y $k_{max} v/s \beta_{(e,c)}$ no se muestran debido a que son casi idénticos a los correspondientes de un fluido para las inestabilidades decay, beat y modulacional, mientras que la inestabilidad del beam no varía significativamente con estos parámetros (i.e.:se mantiene en el mismo k)

3.2.3. Caso genérico: Efectos de la velocidad de drift

Ahora se ilustrará un par de casos característicos de la relación de dispersión en donde tanto η_b como U son no nulos, y con la amplitud de la pump escogida igual que en el caso límite de 1 especie $A = 0.3^2$. Esto permitirá descubrir tanto las nuevas inestabilidades generadas por la velocidad relativa entre el core y el beam, como las modificaciones de las inestabilidades conocidas debido a este mismo efecto. Para ello, se variará \mathcal{U} , manteniendo constantes todos los demás parámetros (pero con X_0 y Y_0 variando acorde a la discusión previa), para dos casos de densidad del beam. El U máximo a considerar es el necesario para evitar la inestabilidad lineal (recordar figura 3.4), que en este caso sería. unas 2.4 veces la velocidad de Alfvén³

³Cabe destacar que, según [Gomberoff, 2003] y [Araneda and Gomberoff, 2004], la inestabilidad lineal puede estabilizarse con una onda pump de suficiente amplitud, por lo que sería posible escoger U mayores con un A lo bastante grande y seguir teniendo un sistema sin esta inestabilidad.

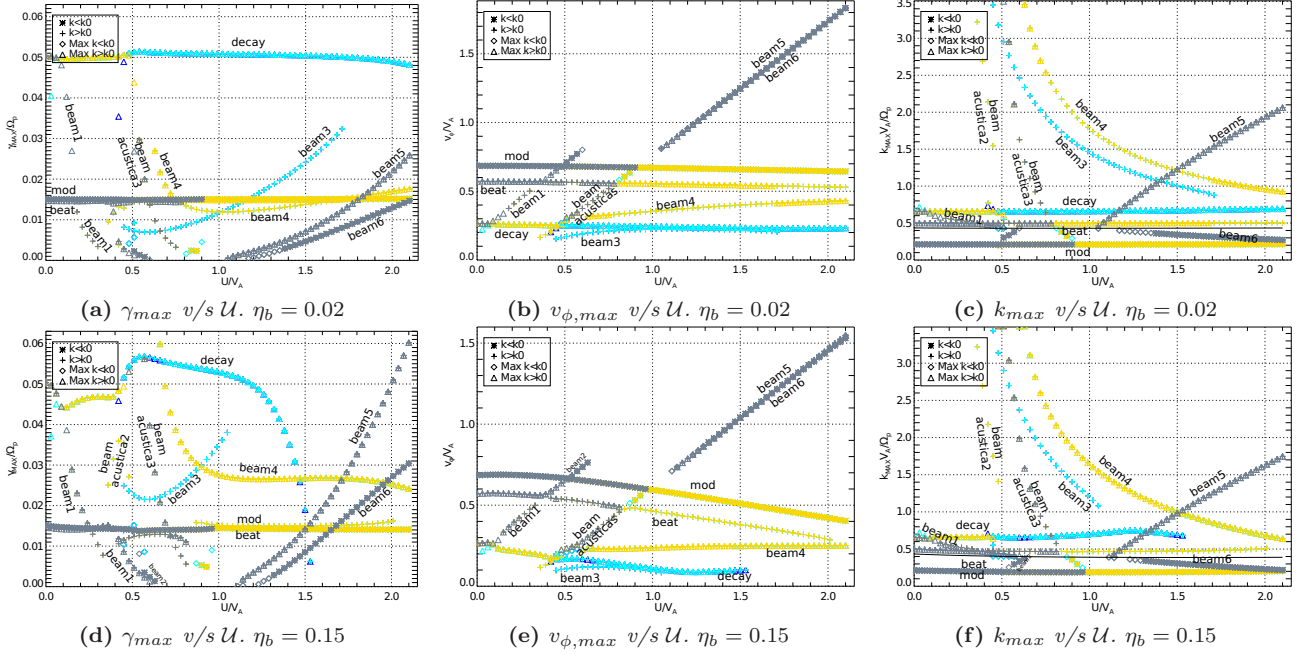


Figura 3.14: Diagramas de máximos de inestabilidades para $0 < U < 2.1$. Arriba: caso de baja densidad $\eta_b = 0.02$. Abajo: caso de alta densidad $\eta_b = 0.15$. Los demás parámetros son los antes usados: $\beta_e = 0.1$, $\beta_c = \tilde{\beta}_b = 0.05$, $A = 0.3^2$ y $X'_0 = 0.35$

Para entender los diagramas anteriores que a primera vista pueden parecer complejos, se caracterizarán las diferentes inestabilidades que allí se muestran, en el orden en que aparecen de menor a mayor U . Cabe destacar que la mayoría de las inestabilidades asociadas al beam ya han sido identificadas en trabajos previos, tal como en [Gomberoff et al., 2002]⁴ y [Hollweg et al., 1993]⁵, aunque sin la caracterización más completa aquí realizada. También recordar que sólo en el límite de amplitud nula y/o asintótico (k grandes) es posible designar inequívocamente cada modo, siendo tanto tanto ambigua su etiquetación en la zona de brechas (“gaps”. Ver discusión de figuras 3.1 y 2.11), por lo que las ramas que conforman cada inestabilidad a mencionar no siempre serán las mismas, sino que dependerán de los parámetros usados. Lo que se mantendrá siempre para todas las inestabilidades es la tendencia de c/u frente al cambio de parámetros.

- En general, las inestabilidades modulacional, beat y decay experimentan el mismo tipo de comportamiento que al variar β_b para el caso $U \rightarrow 0$ (ver figura 3.11): mantienen prácticamente constante su γ_{max} , k_{max} y $v_{\phi,max}$ a lo largo de todo el rango mostrado, excepto en las zonas en que se fusionan con otras inestabilidades. Sin embargo, desviaciones de este comportamiento son manifiestas para densidades del beam más altas, sobre todo para la inestabilidad decay que llega a desaparecer en el diagrama inferior (ver explicación más abajo). También nótese que, en el caso de alta densidad, las velocidades de fase $v_{\phi,max}$ de estas inestabilidades son decrecientes con respecto a U .
- En general, todas las inestabilidades asociadas al beam aumentan sus γ_{max} y su rango en k , para un U dado, al incrementar la densidad del beam η_b . De los diagramas resumen anteriores también se concluye que el aumento de densidad del beam no cambia ni genera nuevos tipos de inestabilidades, por lo que bastará analizar detalladamente el caso de alta densidad, en la cual estas inestabilidades son más importantes, para extraer las características generales sobre ellas.
- Para $U \lesssim 0.4$, sólo existen las tres inestabilidades de un fluido además de la (ya discutida en el caso límite $U = 0$) Beam 1, proveniente del cruce entre las ramas $+sB$ y $-b$. El aumento de la velocidad relativa del beam provoca un desplazamiento en sentido antihorario de la rama acústica $-sB$, produciendo el mismo efecto que el aumento de β_b antes discutido (ver figura 3.11 y su posterior discusión): un desplazamiento de esta inestabilidad hacia k cada vez menores, atravesando y fusionándose consecutivamente con decay y

⁴para las denominadas aquí como beam 3, 4, y 6; para un plasma protón-protón con onda pump de polarización derecha.

⁵para un plasma con beam de partículas alfas.

beat, hasta desaparecer cuando se ubica en las cercanías de k_0 . De este modo es observable esta inestabilidad, en circunstancias que con los parámetros β escogidos y $U = 0$ no sería posible. Por último, cabe recordar que Beam 1 puede ser reconocida por sus velocidades de fase crecientes con respecto a U .

- Para $U \gtrsim 0.4$, se produce una desestabilización producto de la fusión de las ramas $-sB$ y $+s$, generándose la inestabilidad no paramétrica identificada previamente como *two-stream* (ver figura 3.7), a denotarse como *Beam-acústica*. El hecho de tener $A \neq 0$ produce un efecto estabilizador en ella, pues ya no tendrá γ linealmente crecientes en k , sino que formará varias inestabilidades con un amplio rango en k en tres zonas distintas que irán apareciendo conforme U crezca. Una amplitud no nula también tiene el destacable efecto de disminuir el umbral en que surge esta inestabilidad con respecto al caso $A = 0$ (que sería en $U \gtrsim 0.475$ para el caso de alta densidad y $U \gtrsim 0.51$ para el de baja, ver figura 3.8b). A modo de ilustración, véase las siguientes figuras:

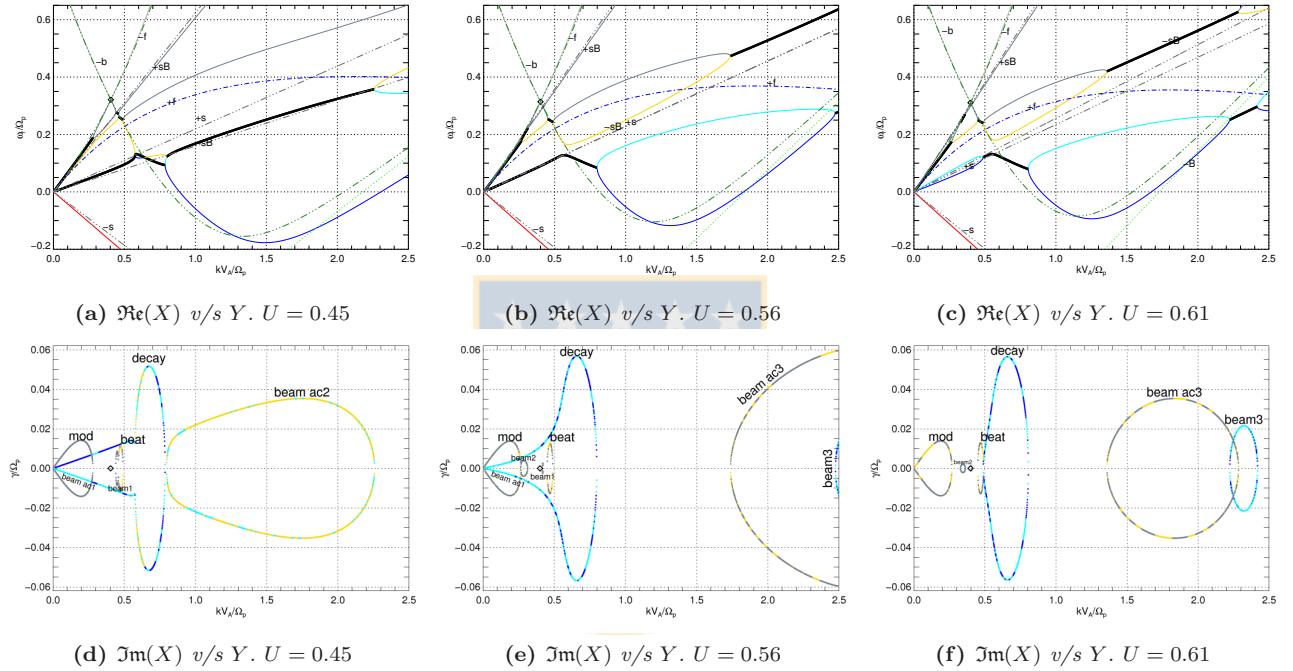


Figura 3.15: Diagramas de dispersión para varios U para el caso de alta densidad $\eta_b = 0.15$, en la zona de la inestabilidad beam acústica. El resto de parámetros son idénticos a los de las figuras 3.14. Obsérvese como la inestabilidad beam acústica aparece en tres zonas que van apareciendo y/o desapareciendo sucesivamente conforme se incrementa U

En la figura izquierda, la inestabilidad con tasa de crecimiento lineal que surge desde $k = 0$ será denotada como *Beam acústica 1*, no cambiando mucho sus γ_{max} que son similares a los de la modulacional. En la misma figura se observa otra amplia región inestable debido a la misma intersección de ramas mencionadas, denotada como *Beam acústica 2*. Ésta tiene la particularidad de surgir para k altos, y desplazarse rápidamente a k menores conforme U crece, a la vez que reduce sus γ_{max} hasta desaparecer hacia $U \approx 0.5$.

En la figura central y de la derecha, además de la *Beam acústica 1*, aparecer otro sector inestable de las mismas acústicas, a denotarse como *Beam acústica 3*. También aparece para k altos y se desplaza para k menores debilitándose conforme crece U , al igual que la *Beam acústica 2*, pero se mantiene por un intervalo mayor de U . Esto se debe a que para U un poco más altos, la rama $-sB$ se separa lo suficiente de $+s$ como para que esta inestabilidad pase a esta generada por $-sB$ con $+f$. Como tal, al aumentar la velocidad U , comienza a atravesar las inestabilidades que comparten $+f$, primero beat y por último fusionándose con modulacional hacia $U \approx 0.96$. Diremos que este es el comportamiento límite de esta inestabilidad para k bajos.

Merecer ser enfatizado que estas tres inestabilidades beam acústicas (no paramétricas), al ser generadas por la misma rama $-sB$, poseen la misma velocidad de fase creciente con respecto a U . También, como es

esperable de la discusión de la figura 3.9, estas inestabilidades beam acústicas son bastante más importantes para β_e mayores. Por último, como es esperable, en el caso de baja densidad estas inestabilidades beam-acústicas son mucho menos importantes y con un rango en k más estrecho que el mostrado (es difícil distinguir beam acústico 1 ó 2 en el diagrama 3.14a).

El ligero aumento (y cambio de color en los gráficos) en los γ_{max} de decay para $U \approx$ se debe a que para este punto, ella pasa de estar situada arriba a abajo de la rama $-sB$.

- En los gráficos anteriores también es distinguible una muy pequeña inestabilidad en la intersección de las ramas $+sB$ y $-f$, que ya había sido reconocida en el caso límite $U = 0$ como Beam 2 (en gris), justo a la derecha de la modulacional (y con una velocidad de fase ligeramente mayor a ésta última). Presenta el mismo tipo de comportamiento con respecto a U que el que posee con respecto a β_b (ver figura 3.11), existiendo en un muy estrecho rango de velocidades. Para el caso de baja densidad, es tan débil que es prácticamente imperceptible.
- En la figura derecha del diagrama anterior, 3.15f, se puede apreciar en el extremo derecho de k una inestabilidad producto de la fusión de la rama del beam $-B$ con $+s$, a denotarse como *Beam 3* (en azul y celeste). Igualmente se desplaza hacia k menores conforme U aumenta, aunque de forma mucho más lenta que la beam acústica 3, incrementando a la vez sus γ_{max} sostenidamente (ver diagrama resumen 3.14). A modo de ejemplo, véase lo siguiente:

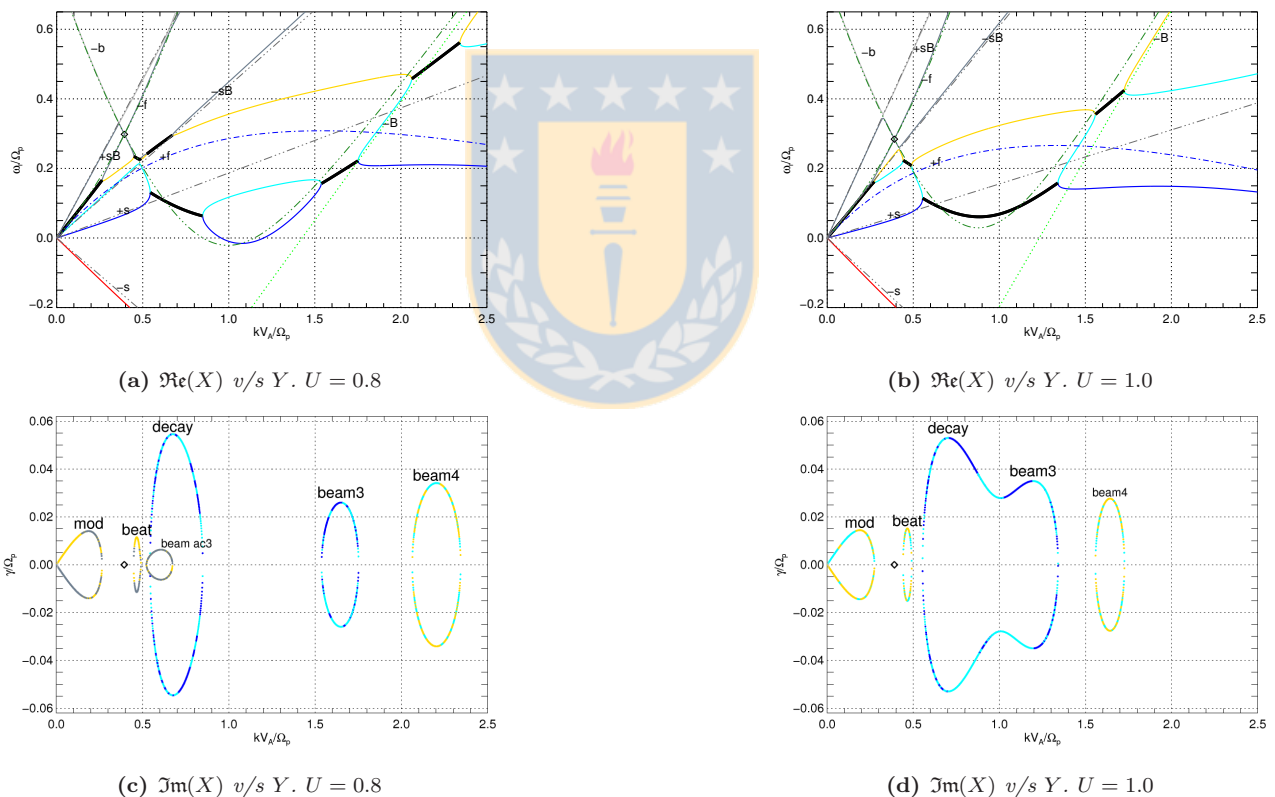


Figura 3.16: Diagramas de dispersión para varios U en el caso de alta densidad $\eta_b = 0.15$, en la zona de inestabilidades beam 3 y 4. El resto de parámetros son idénticos a los de las figuras 3.14.

En la figura derecha se observa el destino final de esta inestabilidad beam 3: termina fusionándose con decay (pues ambas comparten la rama $+s$), que según la figura 3.14 es hacia $U \approx 1.1$ en el caso de alta densidad y $U \approx 1.7$ en el de baja. Por ello, se dice que esta inestabilidad es de tipo decay.

Nótese que esta inestabilidad paramétrica es la primera identificada que se produce intrínsecamente por efectos de la velocidad de drift del beam.

- En los diagramas anteriores también se aprecia otra inestabilidad en la rama $-B$, esta vez en la intersección con $+f$, a denotarse como Beam 4 (en amarilla y celeste). Al igual que Beam 3, también se desplaza hacia k menores conforme U aumenta, aunque parte con una tasa de crecimiento muy importante y va disminuyendo sus γ_{max} hasta $U \approx 0.9$, después de lo cual se mantiene relativamente constante. En el próximo diagrama 3.17d se verá que el destino final de esta inestabilidad, para U altos, es fusionarse con beat debido a que comparten la rama $+f$. Por ello, se dice que esta inestabilidad es de tipo beat. No existe fusión para un U distingible en el caso de baja densidad, por lo menos antes que surja la inestabilidad lineal. De entre todas las inestabilidades asociadas al beam, se verá que esta es la única que es esencialmente electromagnética, en el sentido de no involucrar ondas acústicas (ver [Hollweg et al., 1993]).

Las dos inestabilidades Beam 3 y 4 comparten la rama $-B$, siendo por tanto producidas físicamente por un proceso dispersivo debido a la proximidad de la resonancia del beam (en líneas punteadas verdes). Recordar figura 3.1). Otra característica peculiar es que su velocidad de fase $v_{\phi,max}$ no es creciente con respecto a U como todas las otras inestabilidades asociadas al beam, sino que es prácticamente constante, aunque distinta para c/u .

- Para $U \gtrsim 1.1$ (ver diagrama resumen 3.14), surgen dos inestabilidades estrechamente emparentadas al compartir la rama $-sB$. La primera de ellas se produce por la interacción con $-f$, y será denotada como Beam 5. La segunda se produce por la interacción con $-b$, y será denotada como Beam 6. El γ_{max} de ambas crece rápidamente con U , tal como su velocidad de fase $v_{\phi,max}$, que es la misma para las dos y muy superior a todas las encontradas hasta ahora. Sin embargo, Beam 6 posee un estrecho rango en k y se ubica cerca de $k = k_0$ para U bajos, tendiendo al k_{max} de modulacional para velocidades mayores. En cambio, Beam 5 tiene un rango en k bastante más importante, y a diferencia de todas las inestabilidades analizadas, se desplaza hacia k y ω_r mayores conforme la velocidad de drift aumenta. Crece mucho más rápidamente con U que Beam 6, siendo por lejos la inestabilidad dominante para U altos en las proximidades del desencadenamiento de la inestabilidad lineal, pero sólo en el caso de alta densidad. A modo de ilustración de este comportamiento, véase la siguiente figura:

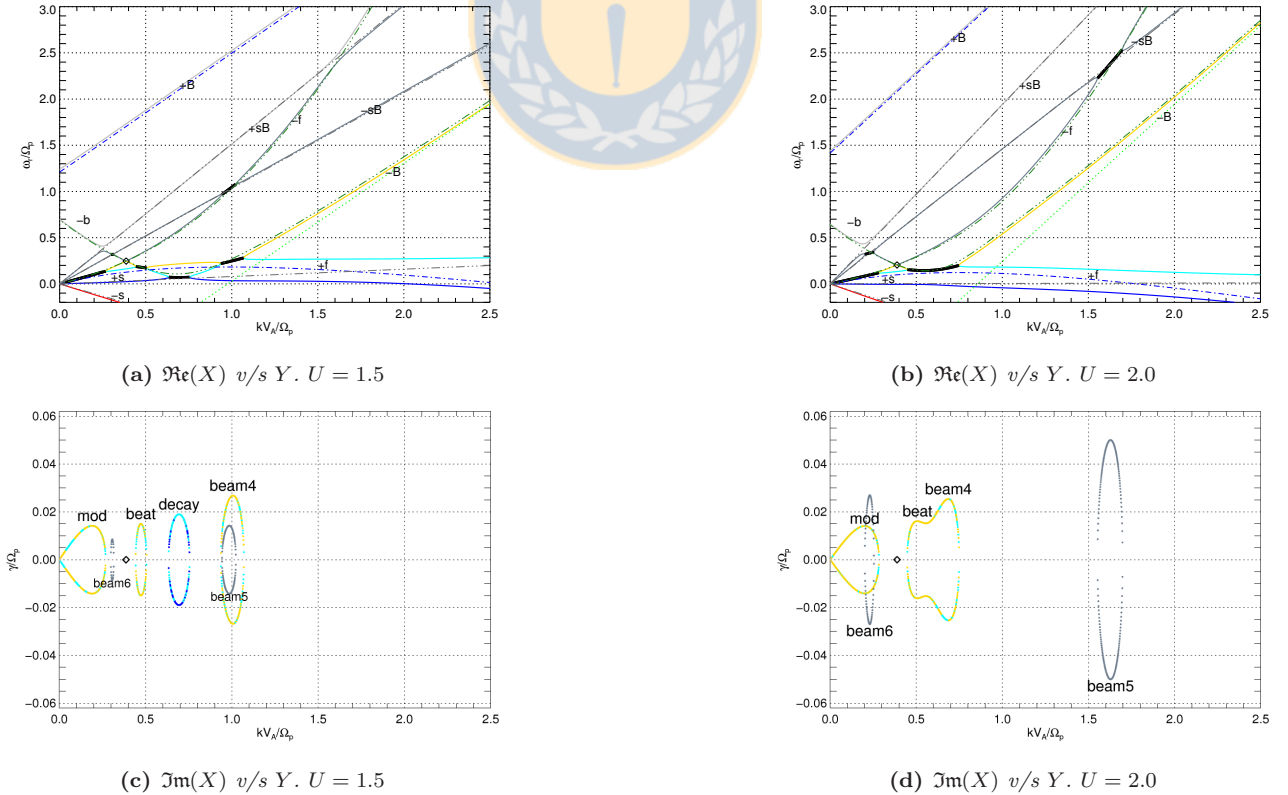


Figura 3.17: Diagramas de dispersión para varios U para el caso de alta densidad $\eta_b = 0.15$, en la zona de inestabilidades beam 5 y 6. El resto de parámetros son idénticos a los de las figuras 3.14.

En el diagrama para los γ v/s k de la figura izquierda, pueden identificarse consecutivamente, de menor a mayor k , las inestabilidades modulacional, Beam 6, beat, decay, Beam 5 y Beam 4. Para la figura derecha, se tiene análogamente: modulacional, Beam 6, beat, Beam 4 y Beam 5.

Notar que en la figura derecha la inestabilidad decay ya no existe ¿Por qué se produce este comportamiento? Comparando dicho diagrama con los previos, se infiere que debido al movimiento en sentido horario de la rama $+s$ con U creciente, existe una velocidad umbral ($U \approx 1.55$) tal que ella se “despega” de la rama $-b$, desapareciendo por tanto la conocida inestabilidad decay, que era la más ubicua para el caso de una especie. Este fenómeno también puede ser interpretado en términos del diagrama γ_{max} v/s U (3.14d): conforme U va creciendo, se llega a un punto en que la inestabilidad Beam 3 se fusiona con decay, y es precisamente a partir de allí en que decay disminuye súbitamente sus tasas de crecimiento hasta desaparecer, como si Beam 3 fuese “drenando” su energía. La desaparición de la inestabilidad decay para U y η_b relativamente altos es el comportamiento más drástico que la introducción del beam tiene sobre las inestabilidades de una especie.

3.2.4. Caso genérico: Efectos de la densidad del beam

Es útil verificar cómo cambian las inestabilidades antes identificadas al variar constantemente la densidad del beam η_b , para un U y el resto de los parámetros fijos. Debido a que existen zonas estrechas de este último parámetro en las cuales se presentan inestabilidades distintas, se escogen varios valores de U para tener el panorama completo. Se enfatizará sobre todo las inestabilidades beam 3, 4, 5 y 6, pues son las que aparecen también (obviamente además de las tres inestabilidades de un fluido) en el modelo cinético-híbrido (ver sección 3.2.3):



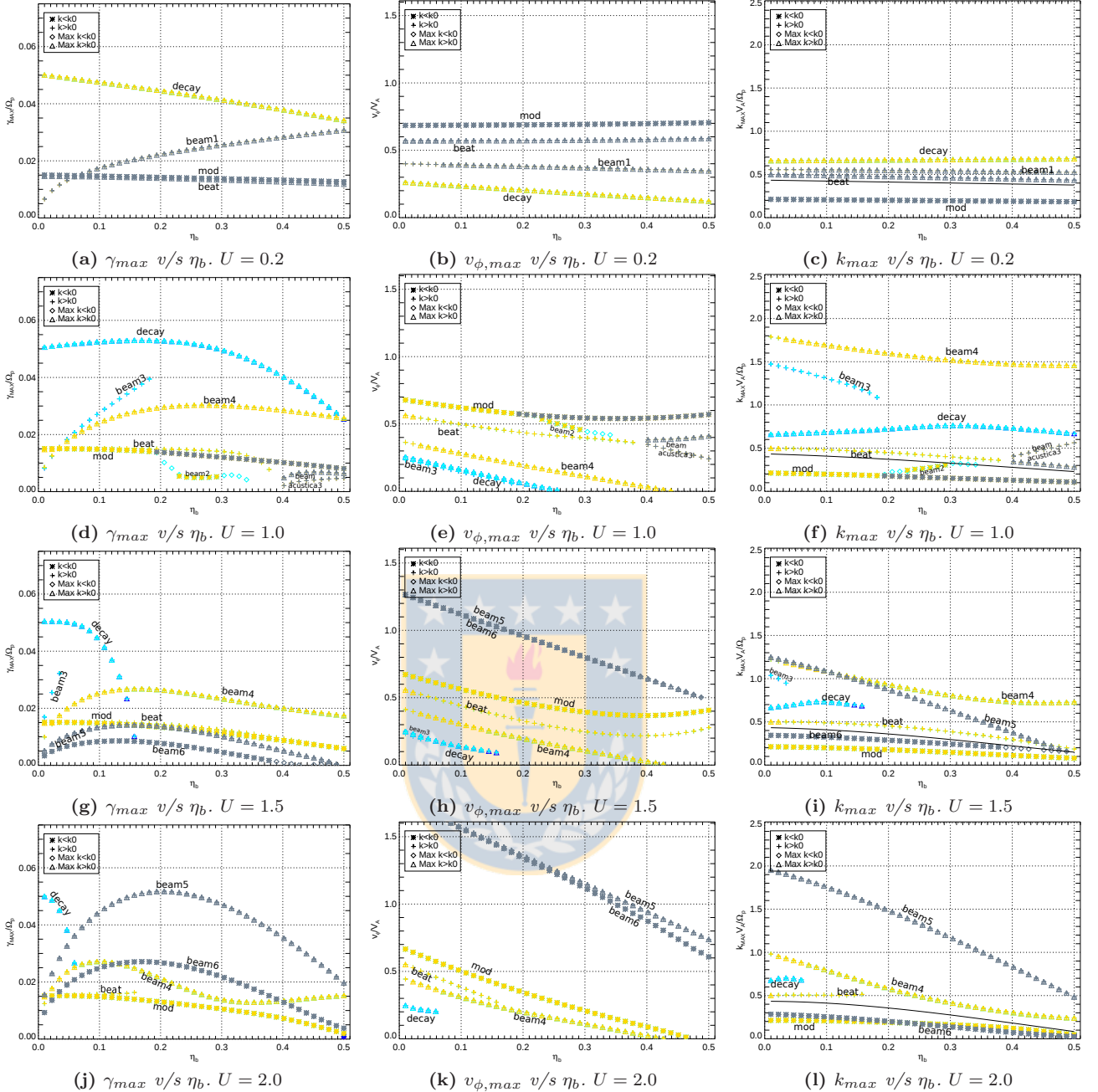


Figura 3.18: Máximos de inestabilidades en función de la densidad del beam η_b varios valores de U . Los demás parámetros son los mismos que en las figuras previa.

De aquí se deduce:

- Las inestabilidades de una especie se ven afectadas por la presencia del beam disminuyendo sus γ_{max} conforme su densidad sea mayor, aunque de forma más marcada para decay.
- Como ya era esperable en vista de la discusión para U variable, la inestabilidad decay presenta un umbral de supresión en η_b . Entre mayor sea la velocidad de drift, esta velocidad crítica en que desaparece será menor (comparar figuras 3.18g y 3.18g). Esto puede ser entendido en vista que la inestabilidad decay está conformada por una rama $+s$, la cual es afectada por el incremento en la densidad η_b girándola en sentido horario, y por lo tanto separándola de la otra rama que la conforma $-b$. También puede ser interpretado en término de beam 3, ya que al ir incrementando η_b , luego de que ella se fusione con decay, ésta última comienza a decrecer rápidamente hasta anularse

- Las inestabilidades beam 1 y 2 son siempre crecientes con respecto a la densidad del beam, tal como se ve en 3.18a
- Contrario a lo que podría esperarse, las inestabilidades beam 4, 5 y 6 no siempre se incrementan con η_b , sino que existe una densidad crítica de saturación, tras la cual disminuyen. Ella tomará valores más grandes conforme mayor sea la velocidad U .
- La velocidad de fase de todas las inestabilidades comienza a ser decreciente con respecto a la densidad del beam a partir de un cierto $U > 0.4$, y esta tendencia se hace cada vez más notoria para U mayores. Ello se debe a que hay una cierta tendencia de todas los máximos de inestabilidades a "acumularse" hacia k bajos, para velocidades U y densidades η_b altas.

No se han considerado las (escasas) nuevas inestabilidades que se producen a densidad muy altas, por no ser físicamente realizables en la mayoría de los ambientes espaciales.

3.2.5. Caso genérico: Efectos del parámetro beta del beam

Aquí se analizará los efectos de la variación en los parámetros térmicos $\beta_{b,c,e}$, teniendo presente los resultados obtenidos en el caso límite de un fluido de la sección 3.2.2. Se enfatizará sobre todo las inestabilidades beam que aparecen a altas velocidades de drift: 3, 4, 5 y 6, pues son las que aparecen también (obviamente además de las tres inestabilidades de un fluido) en el modelo cinético-híbrido (ver sección 3.2.3):

Beta del beam

Ahora se investigarán los efectos de la variación en el parámetro β_b , en el caso de alta densidad (simplemente porque las inestabilidades son más notorias). Se realizarán diagramas para varios U debido a la naturaleza intrínsecamente distinta de las inestabilidades que aparecen en cada zona.

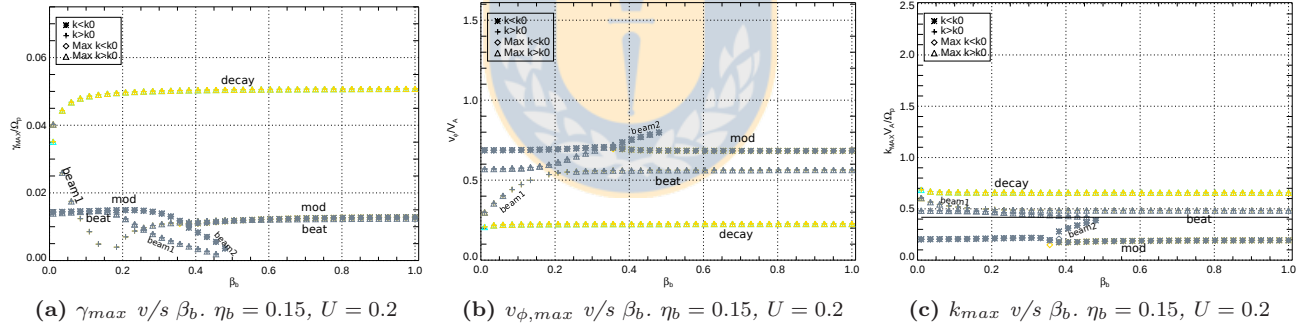


Figura 3.19: Máximos de inestabilidad para $\eta_b = 0.15$ y $U = 0.2$ y β_b variable. Los demás parámetros son idénticos a los de las figuras previas

- Al aumento de velocidad de drift provoca que los β_b requeridos para producir el comportamiento del caso límite esquematizado en la figura 3.11, para las inestabilidades Beam 1 y 2, se reduzcan considerablemente. Es decir, para este caso de $U = 0.2$, los umbrales de supresión de la inestabilidades Beam 1 (cruces grises) y Beam 2 (diamantes y asteriscos grises) es apenas $\beta_b \approx 0.5$ (casi la mitad que en el caso $U = 0$), y consistentemente el rang en que está activa esta última es bastante estrecho. Se ha verificado que esta tendencia se mantiene para otros valores de U bajos. Si bien las curvas de velocidad de fase $v_{\phi,max}$ de las inestabilidades Beam 1 y 2 incrementan su pendiente con respecto a β_b , esto no indica un incremento de esta magnitud para ellas, sino que es sólo un efecto lateral del fenómeno antes descrito.
- En todos los casos de U mostrados, las tres inestabilidades de una especie exhiben un γ_{max} y k_{max} prácticamente constantes frente a la variación de β_b . Sólo se perciben pequeñas variaciones para los rangos de parámetros en que algunas de estas inestabilidades está fusionada con alguna de las asociadas al beam, en especial la decay. Pero en este caso, también es clara la reducción en los γ_{max} de beat hacia $\beta_b \approx 0.27$ y de modulacional hacia $\beta_b \approx 0.35$

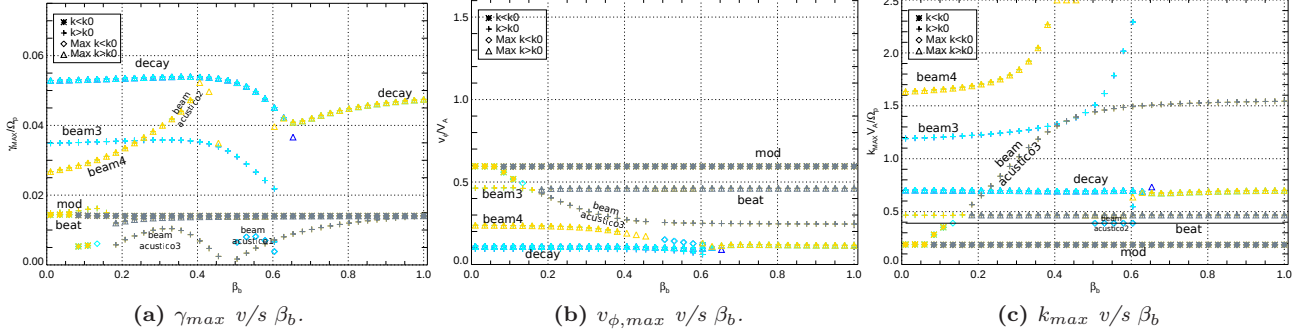


Figura 3.20: Máximos de inestabilidad para $\eta_b = 0.15$ y $U = 1.0$ y β_b variable. Los demás parámetros son idénticos a los de las figuras previas

- En los gráficos para $U = 1.0$, se puede apreciar con más importancia (mayores γ_{max}) la inestabilidad *Beam 4* (cruces celestes), apareciendo para $\beta_b \rightarrow 0$ en torno a $k \approx 1.35$ y desplazándose muy lentamente al variar beta del beam hasta $\beta_b \approx 0.5$, en donde comienza a moverse rápidamente *hacia k mayores* hasta desaparecer del rango observado, manteniendo siempre el mismo γ_{max} (la disminución después de $\beta_b \approx 0.5$ es sólo aparente debido a que sale del rango observado).
- El mínimo en decay para $U \approx 0.65$ (y el cambio de color de amarillo a celeste), se debe a que en ese punto esta inestabilidad pasa de estar ubicada arriba a abajo de de la rama $-sB$ en el plano ω_r v/s k , siendo consecuentemente el sector en que actúa la inestabilidad Beam acústica 1.
- En los mismos diagramas $U = 1.0$ está la inestabilidad *Beam 4* (triángulos amarillos), que, a diferencia de todas las demás, experimenta un sostenido *crecimiento de su γ_{max}* conforme aumenta β_b , superando inclusive las tasas de crecimiento de la inestabilidad decay. Apareciendo hacia $\beta_b \rightarrow 0$ en $k \approx 1.7$, también se desplaza *hacia k mayores* conforme β_b crece, en forma lenta primero, y más rápida después. Dicho cambio de comportamiento se debe a una transición continua en la naturaleza de esta inestabilidad, en el sentido que para β_b grandes pasa a estar conformada por las ramas $-sB$ y $+s$, identificándosele más apropiadamente como la inestabilidad two-stream Beam acústica 2.
- En el mismo diagrama para $U = 1.0$ se puede observar una inestabilidad Beam-acústica 3 (cruces grises) en el límite de k bajos, siendo generada consecuentemente por $-sB$ y $+f$. Surge de la modulacional y se desplaza a k mayores conforme β_b se incrementa, a la vez que su γ_{max} tiene el comportamiento oscilatorio graficado.

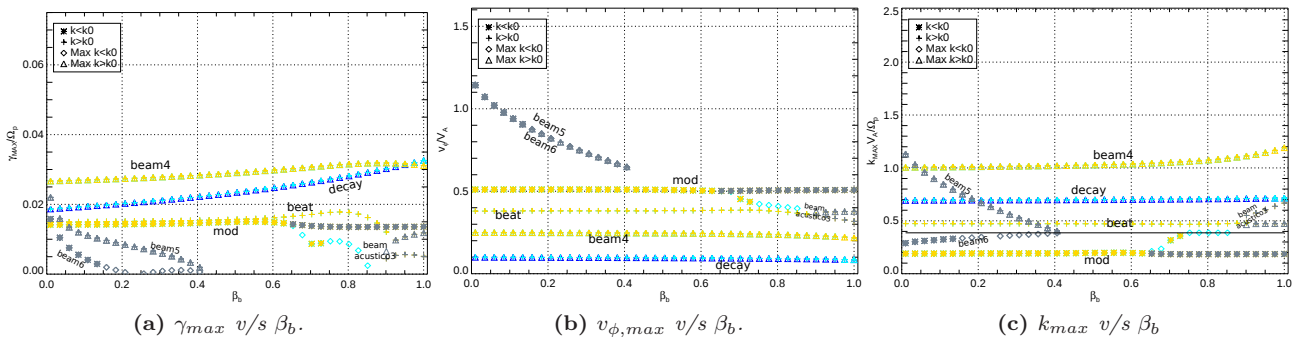


Figura 3.21: Máximos de inestabilidad para $\eta_b = 0.15$ y $U = 1.5$ y β_b variable. Los demás parámetros son idénticos a los de las figuras previas

- En el gráfico anterior para $U = 1.5$, aparecen las dos inestabilidades con la misma velocidad de fase (la cual es decreciente con respecto a β_b) *Beam 5* (triángulos y cruces grises) y *Beam 6* (diamantes y asteriscos grises), que poseen un comportamiento similar para sus curvas γ_{max} , pues ambas *disminuyen* en general conforme β_b aumenta, teniendo un umbral de supresión hacia $\beta_b \approx$. Por otro lado, ambas inestabilidades

tienden hacia $k = k_0$ al aumentar β_b , por la izquierda y derecha respectivamente (aunque el desplazamiento total en k es mucho más notorio para Beam 5). Todas estas características son precisamente las opuestas que experimentan estas inestabilidades en los diagramas con U variable (comparar con 3.14). Ello puede ser entendido en base recordando el comportamiento de las curvas acústicas $-sB$ en el plano ω_r v/s k : El aumento de U provoca un giro en sentido antihorario de dicha rama, mientras que el aumento de η_b tiene precisamente el efecto contrario (debido al aumento en la apertura del par $\pm sB$).

- Por otra parte, en la misma figura $U = 1.5$, la inestabilidad Beam 4 posee un comportamiento igualmente creciente como en $U = 1.0$, pero mucho más suave y con tasas de crecimiento menores, no llegando al límite de cambiar su comportamiento al de una inestabilidad beam acústica como en dicho caso. La Beam 3 ya no se observa al estar completamente fusionada con decay para este valor de U .
- Para β_b altos, y al igual que para $U = 1.0$, surge el límite de k bajo de la inestabilidad Beam acústica 3, desplazándose a la derecha al ir incrementando dicho parámetro, aunque con γ_{max} más bien débiles.

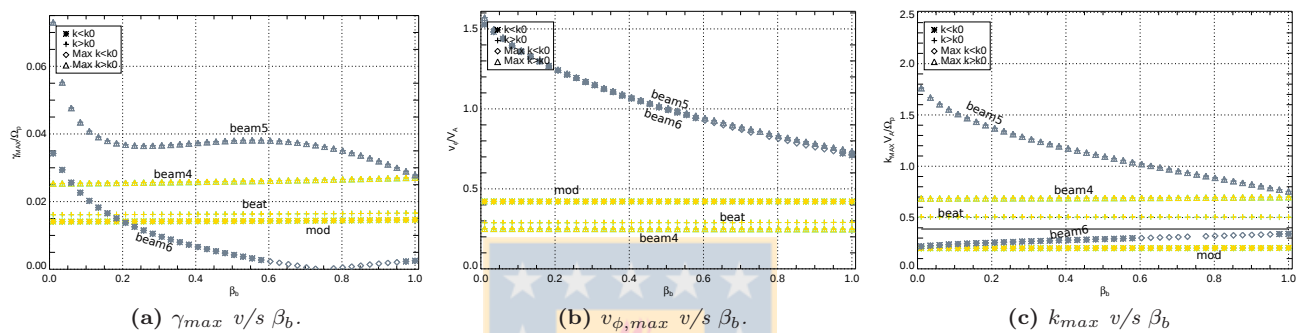


Figura 3.22: Máximos de inestabilidad para $\eta_b = 0.15$ y $U = 2.0$ y β_b variable. Los demás parámetros son idénticos a los de las figuras previas

- En las figuras para $U = 2.0$, la inestabilidad Beam 6 tiene el mismo comportamiento decreciente con β_b ya identificado previamente, con su umbral de supresión desplazando a la derecha, cerca de $\beta_p \approx 0.7$. Si bien Beam 5 sigue el mismo patrón para β_b pequeño, para mayores valores de dicho parámetro es prácticamente constante en un buen tramo, decreciendo tardíamente y anulándose para un valor bastante grande de $\beta_b \approx 1.43$ (no mostrado gráficamente). En todo el sector analizado, $\beta_p \lesssim 1.0$, Beam 5 es por lejos la inestabilidad dominante.

La otra inestabilidad que aparece en el último diagrama, Beam 4, se mantiene prácticamente invariante frente al cambio de β_b .

3.2.6. Umbrales para beta del core y electrones

Ahora se se presentará algunos gráficos para ejemplificar el comportamiento, principalmente, de las nuevas inestabilidades asociadas al beam frente a la variación de los parámetros beta del core β_c y de electrones β_e , extendiendo los resultados del caso límite $U = 0$ (ver figura 3.13 y discusión posterior). Por las razones antes mencionadas, se enfatizará el estudio de las inestabilidades beam 3, 4, 5 y 6:

β_c variable

Así, para el beta del core de protones se tiene:

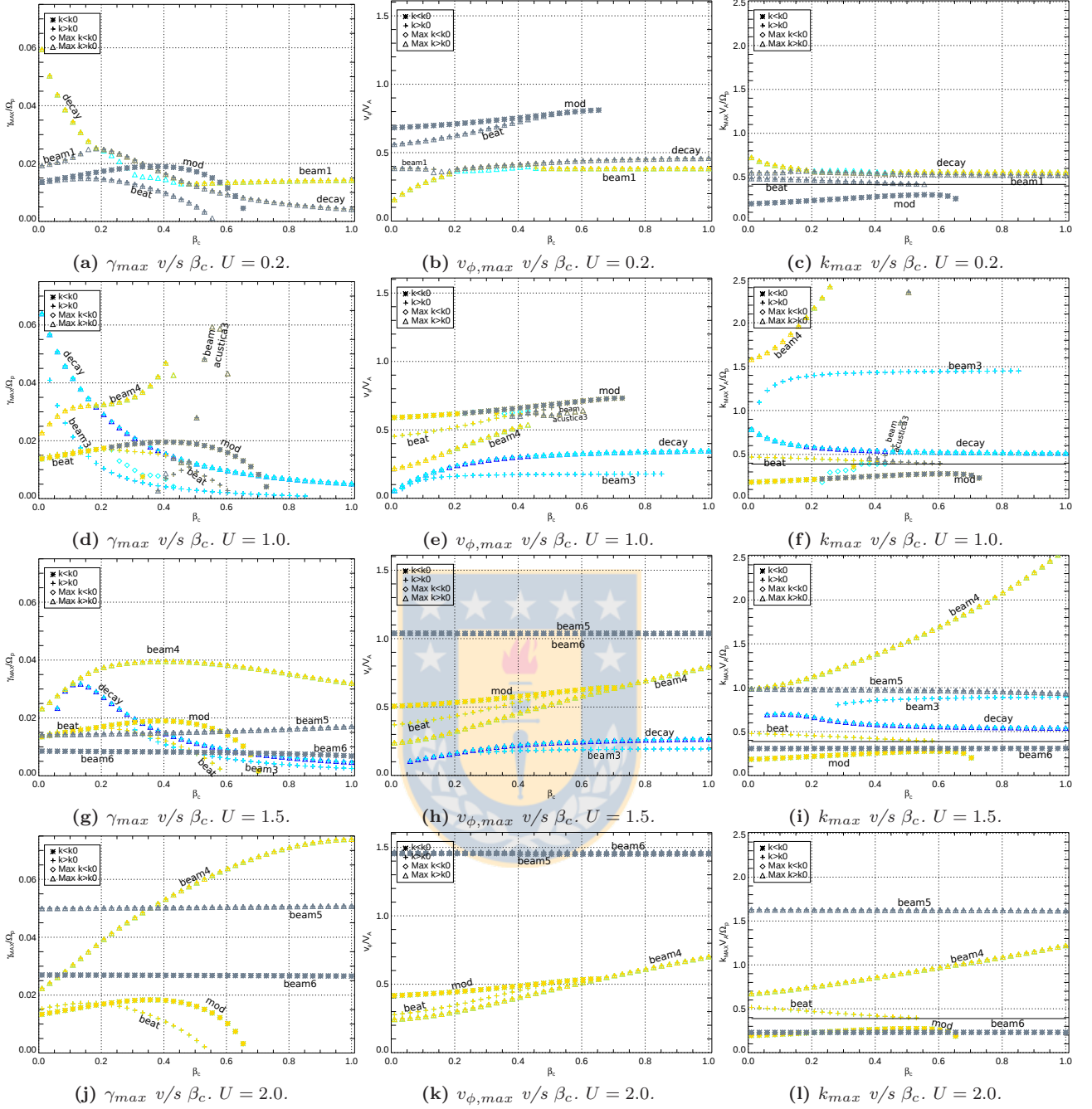


Figura 3.23: Máximos de inestabilidad para $\eta_b = 0.15$, varios U , $\beta_e = 0.05$, $\beta_b = 0.05$ y β_c variable. Los demás parámetros son idénticos a los de las figuras previas.

- En $U = 0.2$, tal como se podría suponer, el panorama para las tres inestabilidades de una especie es similar al caso límite de un fluido 3.13a, con los umbrales característicos de beat y modulacional. Al comparar los otros casos de U figuras, se observa que estos umbrales en β_c se desplazan un poco, pero sin una tendencia fácilmente identificable.
- Al comparar con 3.13, se infiere de la primera línea de figuras que el incremento de la velocidad de drift desplaza el mínimo de la curva de la inestabilidad Beam 1 (triángulos amarillos y celestes) de γ_{max} para β_c mayores ($\beta_c \approx 0.35$), a la vez que disminuye las tasas de crecimiento máximo que alcanza. Su k_{max} no varía apreciablemente.

- En los diagramas para $U = 1.0$, la inestabilidad Beam 4 tiene la misma dependencia con β_c que con β_b antes descrita (un γ_{max} y un k_{max} rápidamente crecientes), tornándose para k altos una inestabilidad beam acústica 2.

En cambio, la Beam 3 es notoriamente decreciente, y casi sin desplazamiento en k . Sin embargo, en el límite $\beta_c \rightarrow 0$, Beam 3 tiende a fusionarse con decay como puede observarse de la superposición de sus k_{max} .

Es destacable el hecho que beam 3 presenta la misma tendencia para sus γ_{max} v/s β_c que decay, mientras que lo mismo sucede para Beam 4 y beat (en el rango en que la primera está activas), justificándose aún más los apelativos antes mencionados.

Notar también que la fusión de ramas $-sB$ con $+s$ produce una inestabilidad beam acústica particularmente intensa entre $0.47 < \beta_c < 0.62$.

- En los diagramas para $U = 1.5$, la inestabilidad Beam 4, a pesar que su k_{max} igualmente se desplaza β_c , ya no lo hace tan rápido como en el caso anterior, manteniéndose acotada para $k < 2.5$. (de paso, notar que es la única inestabilidad entre todas estas analizadas que exhibe un claro desplazamiento en k frente a β_c) Su curva de γ_{max} v/s β_c sigue presentando la misma tendencia que beat, aunque de forma tan magnificada que de hecho es la inestabilidad dominante prácticamente para todo β_c .

Para $\beta_c \gtrsim 0.27$, la inestabilidad decay deja de estar fusionada con Beam 3, separándose para estar a un k un tanto mayor, aunque preservando su misma tendencia decreciente antes identificada. Entonces, a mayor U , la separación de la inestabilidades beam 3 y decay se produce para un β_c cada vez mayor, siempre que esta última este presente.

Beam 5 y 6 no se desplazan de su posición en k , manteniendo igualmente una velocidad de fase constante (igual para ambas). y prácticamente no exhiben variación en su γ_{max} en todo el rango mostrado.

- Para $U = 2.0$, las inestabilidades Beam 5 y 6 mantienen el comportamiento antes descrito. Pero la inestabilidad Beam 4 tiene un comportamiento notoriamente distinto aquí (en comparación con $U = 1.5$): tanto su γ_{max} como su k_{max} son crecientes con respecto a β_c . Notar también la ausencia de la característica curva decreciente de decay.

Por último, puede que sea necesario mencionar que, en los dos últimos casos de U analizados, igualmente se pueden desarrollar inestabilidades beam acústicas, aunque se requieren valores de temperaturas de protones mucho mayores que los mostrados gráficamente. En efecto, el umbral de desencadenamiento para $U = 1.5$ es $\beta_c > 1.37$, mientras que para $U = 2.0$ es $\beta_c > 2.85$

β_e variable

El mismo análisis anterior se puede efectuar para la presión de electrones, variando β_e :

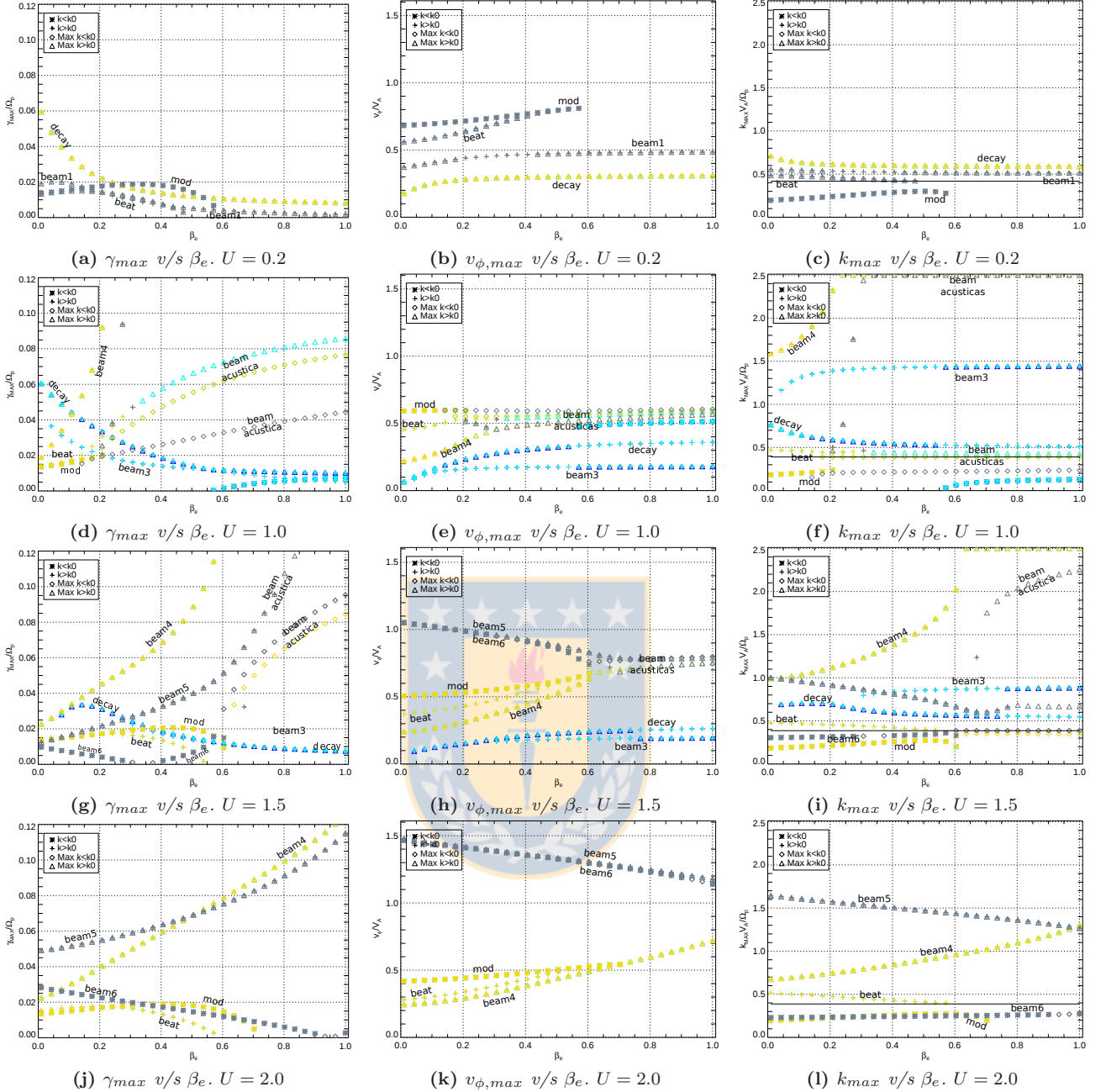


Figura 3.24: Máximos de inestabilidad para $\eta_b = 0.15$, varios U , $\beta_c = \beta_b = 0.05$ y β_e variable. Los demás parámetros son idénticos a los de las figuras previas.

- En $U = 0.2$, y al igual que para el caso de β_c variable 3.23a, el panorama para las tres inestabilidades de una especie es similar al caso de un fluido 3.13a. Y al igual que allí, no se distingue una tendencia (al comparar para varios U) en la ligera variación de los umbrales en β_e para las inestabilidades modulacional y beat.
- En el mismo diagrama para $U = 0.2$, la inestabilidad Beam 1 sigue un patrón similar de variancia con respecto a β_e que con respecto a β_c , aunque con menores γ_{max} en el extremo de beta's $\rightarrow 1$.
- Para $U = 1.0$, las inestabilidades Beam 3 y 4 siguen la misma tendencia con β_e que con β_c (indicio que no discriminan entre temperatura de electrones o protones): similar a decay y beat en los rangos en que están activas, respetivamente. Se observa la inestabilidad acústica para todo $\beta_e \gtrsim 0.25$ en forma combinada,

por lo que cualquier información referente a la inestabilidad modulacional o beat desde ese valor, no se muestra por estar oculta bajo las grandes tasas de crecimiento de esta inestabilidad. Esto explica las tres curvas crecientes para dichos valores.

- Para $U = 1.5$, Beam 5 tiene una rapidísima creciente γ_{max} con β_e , a diferencia de lo que ocurre con β_c , siendo de hecho la inestabilidad por lejos dominante para $\beta_e \gtrsim 0.2$. A diferencia de todas las situaciones anteriores, si bien Beam 5 es (rápidamente) creciente con respecto a β_e , Beam 6 es en cambio decreciente, siendo muy débil y estrecha cerca de $\beta_e \approx 0.3$ (aunque después empieza a crecer muy lentamente). Ambas inestabilidades tienen k_{max} que tienden a converger para β_e altos en k_0 , con Beam 5 por la derecha y Beam 6 por la izquierda.
- En el mismo diagrama $U = 1.5$ para $\beta_e \gtrsim 0.35$, ocurre el mismo fenómeno que para la variación de β_c : la inestabilidad decay origina la ya conocida Beam 3, cuyas tasas de crecimiento son iguales y siguen la misma tendencia que decay (estando superpuestas en el diagrama resumen). Otro comportamiento anormal ocurre para presiones térmica electrónicas muy bajas: la inestabilidad decay reduce sus γ_{max} hasta desaparecer para $\beta_e \lesssim 0.035$, lo opuesto al comportamiento creciente en dicho sentido para todos los demás casos analizados. Hay además, para el mismo caso, una inestabilidad acústica que se presenta muy grande y combinada para todo $\beta_e \gtrsim 0.68$, explicando las tres curvas crecientes.
- En los diagramas para $U = 2.0$, las inestabilidades Beam 6 y 7 siguen con la tendencia (en relación a $U = 1.5$) de un γ_{max} creciente y decreciente con β_e (aunque obviamente con mayores tasas de crecimiento), respectivamente, un comportamiento radicalmente diferente a la constancia de ambas frente a la variación de β_c . En particular, Beam 6 tiende a anularse para $\beta_e \rightarrow 1$, mientras que beam 7 alcanza tasas muy altas de crecimiento para los mismos valores, a la par que Beam 4.

Al igual que para U más bajos, también aquí se produce la inestabilidad beam acústica, aunque sólo para $U \gtrsim 1.14$, estando por tanto fuera del rango mostrado.

3.2.7. Caso genérico: Umbrales de amplitud

Ahora se investigará si las inestabilidades de una especie cambian sus umbrales de amplitud A en relación al análisis de un fluido antes realizado (ver figura 2.7), además de indagar posibles umbrales de amplitud para las inestabilidades beam. Con este objetivo, se mostrarán los correspondientes diagramas de máximos de inestabilidades $v/s A$, para varios valores de U .

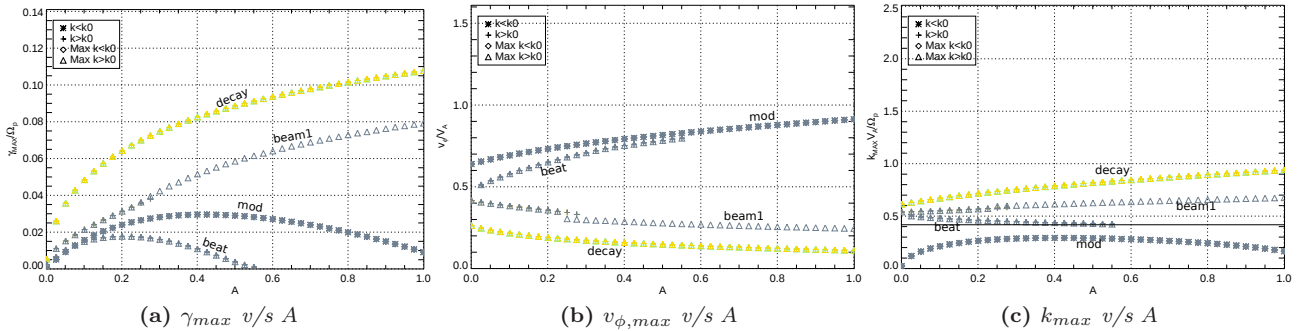


Figura 3.25: Máximos de inestabilidad para $\eta_b = 0.15$, $U = 0.2$ y A variable. Los demás parámetros son idénticos a los de las figuras previas

- $U = 0.2$. Las tres inestabilidades de una especie presentan un comportamiento prácticamente idéntico al caso límite de una especie (figura 2.7). La inestabilidad Beam 1, simplemente, crece monótonamente con la amplitud.

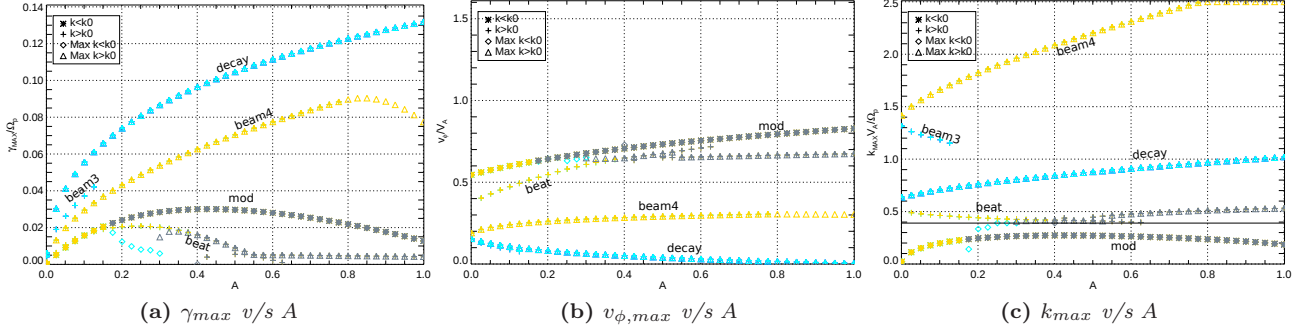


Figura 3.26: Máximos de inestabilidad para $\eta_b = 0.15$, $U = 1.0$ y A variable. Los demás parámetros son idénticos a los de las figuras previas

- $U = 1.0$. La inestabilidad Beam 3 es monótonamente creciente con A , aunque al desplazarse a k menores termina fusionándose con decay hacia $A \approx 0.3$, formando una inestabilidad muy ancha en k . Beam 4 es siempre creciente (en γ_{max} y k_{max}) con tasas muy similares a decay, aunque aparece decreciente en la figura para $A \gtrsim 0.7$ debido a que se sale del rango en $k = 2.5$. Hay otra inestabilidad para A alto, que corresponde con el límite de k bajos de la inestabilidad beam acústica 3.

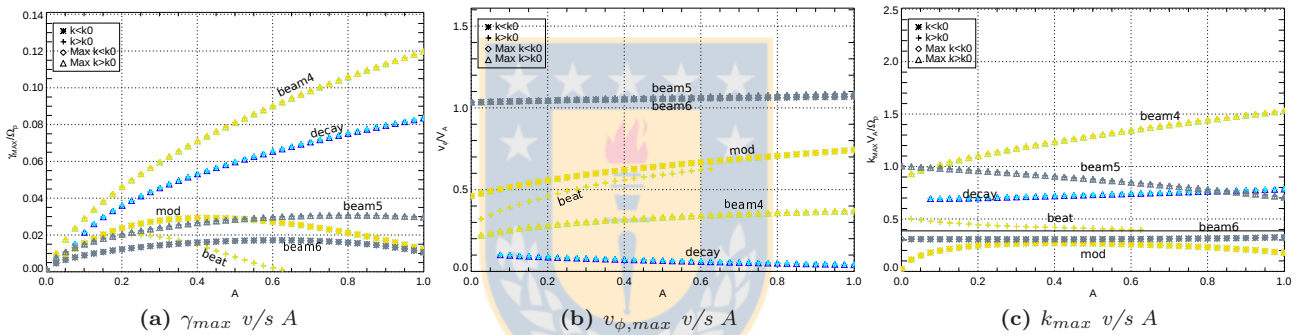


Figura 3.27: Máximos de inestabilidad para $\eta_b = 0.15$, $U = 1.5$ y A variable. Los demás parámetros son idénticos a los de las figuras previas

- $U = 1.5$. Beam 4 posee una muy rápida tasa de crecimiento de γ_{max} , mayor incluso que decay, y desplazándose hacia la derecha (igual que en el caso previo $U = 1.0$). Los γ_{max} de Beam 5 son igualmente crecientes respecto a A , a diferencia de Beam 6 que posee un máximo para después decrecer y anularse hacia $A \rightarrow 1$, con una tendencia similar a modulacional.

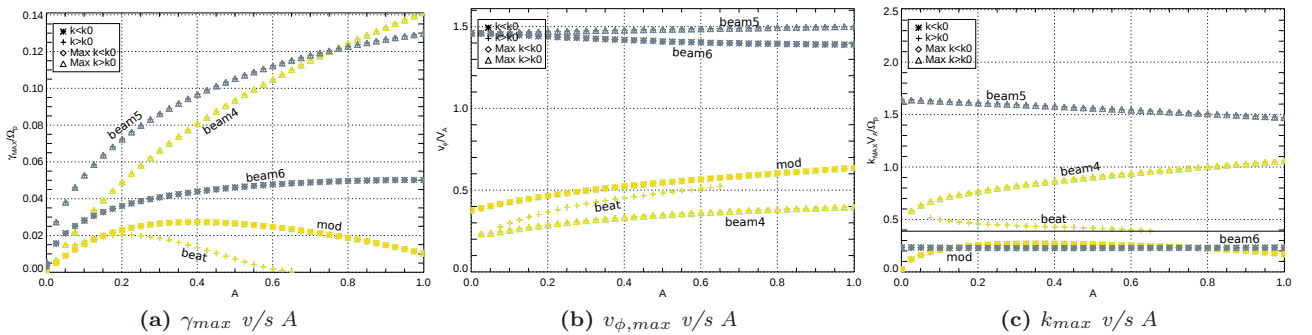


Figura 3.28: Máximos de inestabilidad para $\eta_b = 0.15$, $U = 2.0$ y A variable. Los demás parámetros son idénticos a los de las figuras previas

- $U = 2.0$. Las modestas tasas de crecimiento exhibidas por Beam 5 en el caso previo se incrementan tanto

al aumentar U , que para este caso esta inestabilidad es dominante para un amplio rango de amplitudes, superando inclusive a Beam 4. Beam 7, en cambio, igual es creciente pero tiende a estabilizarse en $\gamma \approx 0.45$ para $A \gtrsim 0.45$.

- En vista de todos los casos anteriores, se puede precisar la afirmación dada en [Nariyuki et al., 2009], donde se dice que el k_{max} de la inestabilidad decay converge a k_0 conforme la amplitud de la onda decrece, tal como podría suceder durante la evolución temporal de la onda pump y sus inestabilidades paramétricas asociadas. En vez de eso, sólo se puede decir que el k_{max} de decay se reduce conforme A disminuye, pero nunca llegando a k_0 , sino un tanto alejado de él. Además, la disminución es menos acentuada para velocidades de drift grandes, en donde el k_{max} de decay apenas si se desplaza con un cambio en la amplitud.

3.2.8. Caso genérico: Frecuencia de la onda pump

Ahora se realizará el mismo análisis por sector de U hecho anteriormente, pero esta vez variando únicamente la frecuencia de la pump X'_0 (recordar la diferencia con X_0 dada en la sección 3.2.1).

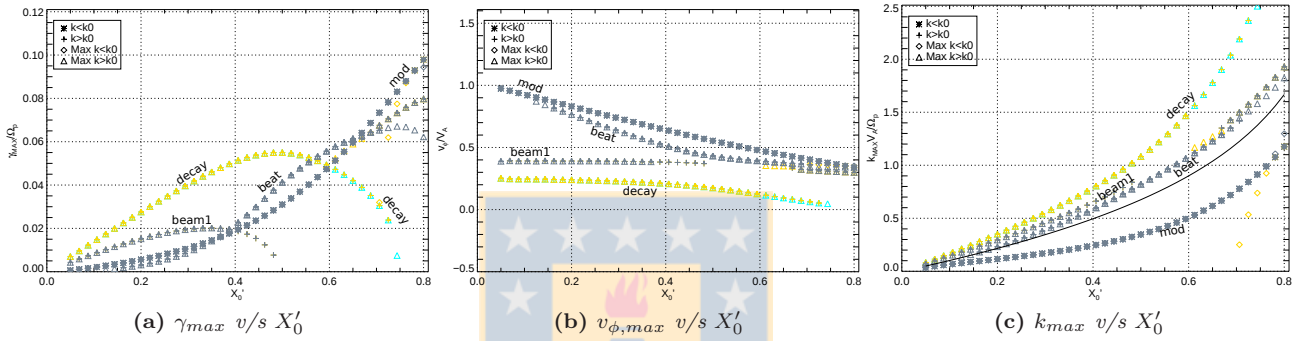


Figura 3.29: Máximos de inestabilidad para $\eta_b = 0.15$, $U = 0.2$ y X'_0 variable. Los demás parámetros son idénticos a los de las figuras previas

- $U = 0.2$. Comparando con el caso una especie de protones de la figura 2.16, notamos que el leve aumento de la velocidad de drift desplaza las curvas γ_{max} de las tres inestabilidades de una especie a valores de X'_0 mayores que allí. Por ejemplo, el máximo de cada curva se sitúa, aproximadamente, una unidad de X'_0 hacia la derecha. En cuanto a la inestabilidad Beam 1, su γ_{max} posee un máximo hacia $X_0 \approx 0.3$, tras lo cual decae hasta desaparecer en $X'_0 \approx 0.4$, para luego experimentar un sostenido incremento con la frecuencia.

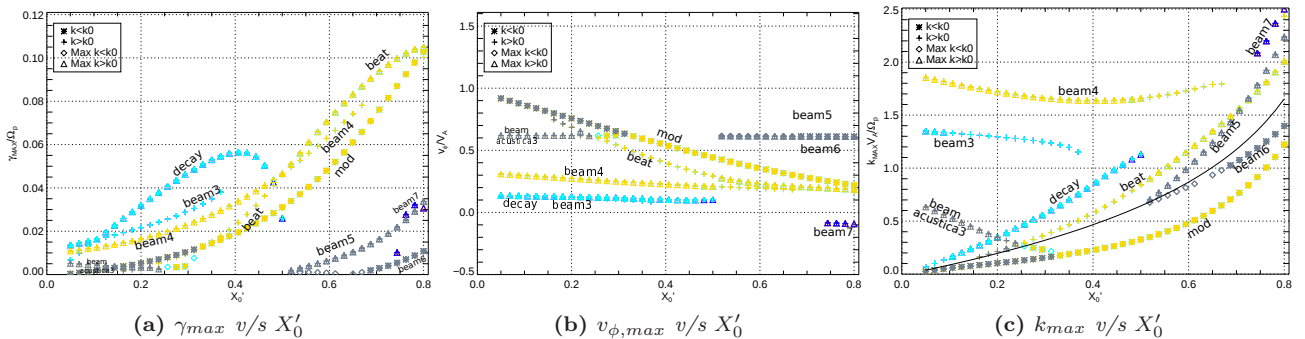


Figura 3.30: Máximos de inestabilidad para $\eta_b = 0.15$, $U = 1.0$ y X'_0 variable. Los demás parámetros son idénticos a los de las figuras previas

- $U = 1.0$. Beam 4 tiene un γ_{max} siempre creciente con la frecuencia, al igual que la modulacional, alcanzando tasas de crecimiento similares a ella hacia el límite superior del rango de X'_0 mostrado. Ella se fusiona con beat para $X'_0 \gtrsim 0.65$. Beam 3 igualmente es creciente, pero en $X'_0 \approx 0.4$ se fusiona con decay, para

después su combinación decrecer rápidamente, desapareciendo en $X'_0 \approx 0.51$. Nótese que este umbral de supresión es menor que para $U = 2.0$.

Para $X'_0 \lesssim 0.25$, surge el límite de bajos k de la inestabilidad beam acústica 3, cerca de la inestabilidad modulacional, desplazándose para k mayores y con γ_{max} mayores conforme menor sea la frecuencia de la pump.

Las acostumbradas inestabilidades Beam 5 y 6 aparecen también en este caso, aunque para frecuencias de la pump bastante grandes: $X'_0 \gtrsim 0.55$.

- Cabe destacar también una inestabilidad en el extremo derecho del rango analizado ($X'_0 \gtrsim 0.77$) producto de la fusión entre $-b$ y $+f$ para k muy altos, a denominar Beam 7, que tiene la particularidad de ser la única entre todas las hasta ahora analizadas que tiene velocidad de fase negativa, tal como se observa en el siguiente diagrama:

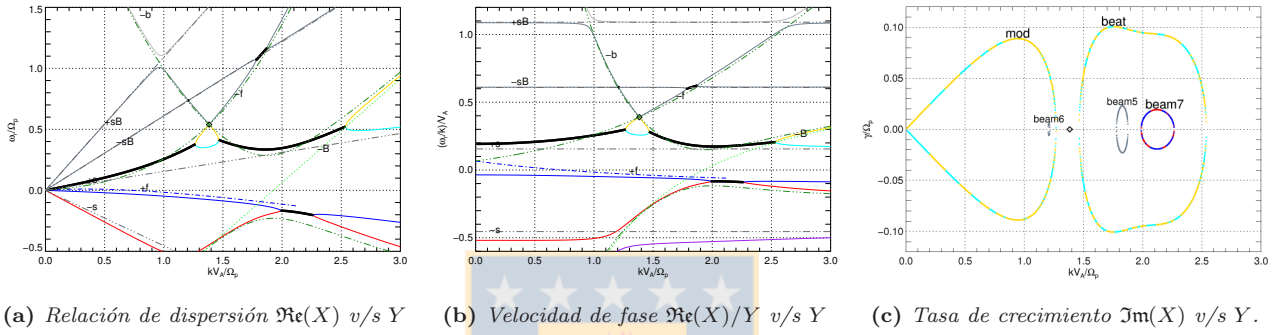


Figura 3.31: Diagramas de relación de dispersión para $X'_0 = 0.75$ y $U = 1.0$. Resto de los parámetros igual a las figuras anteriores

Esta inestabilidad es de la misma naturaleza que la beat, pero se diferencia en que está situada "al otro lado" de la resonancia del beam (con respecto a la usual beat para $U = 0$) y muy cerca de ella, por lo que los efectos dispersivos debe desempeñar un papel muy importante en su generación.

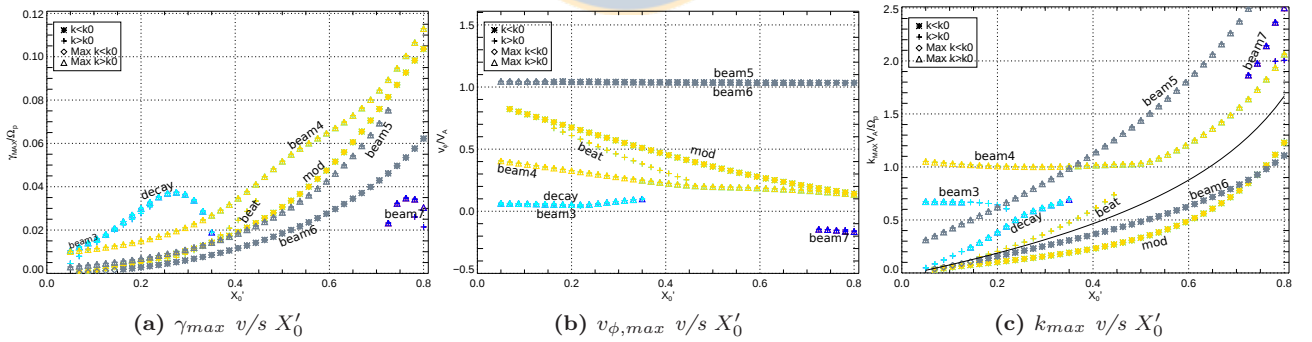


Figura 3.32: Máximos de inestabilidad para $\eta_b = 0.15$, $U = 1.5$ y X'_0 variable. Los demás parámetros son idénticos a los de las figuras previas

- $U = 1.5$. Las inestabilidades Beam 5 y 6 tienen un comportamiento similar: su γ_{max} es rápidamente creciente con la frecuencia, aunque la primera de una forma más marcada que la segunda. Beam 4 sigue con un patrón creciente de γ_{max} con respecto a X_0 , de una forma aún más notoria que para $U = 1.0$. Decay sigue una tendencia similar al caso previo, pero se anula aún antes, en $X'_0 \approx 0.38$. De ella surge, para $X_0 \lesssim 0.24$, la Beam 3. Para $X'_0 \gtrsim 0.47$, beat se fusiona con Beam 4. También aparece Beam 7 sólo para $X'_0 \gtrsim 0.75$, sin muchas diferencias con respecto a $U = 1.0$

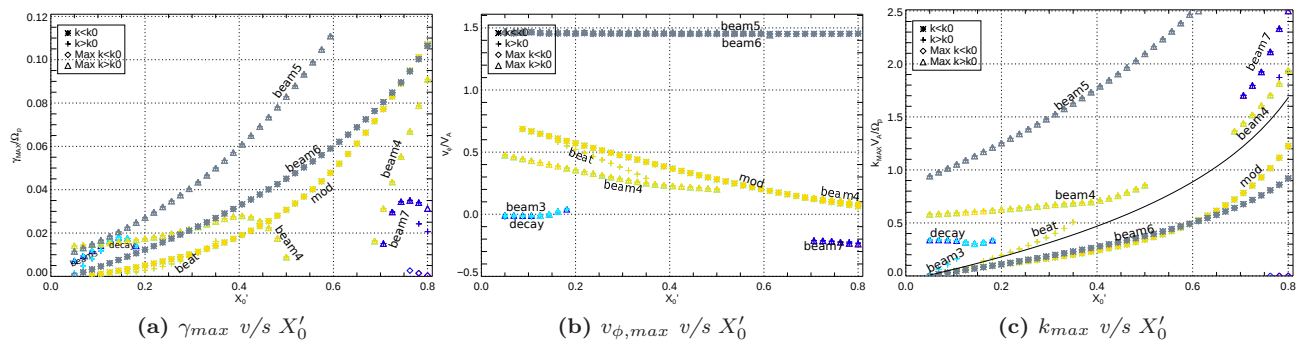


Figura 3.33: Máximos de inestabilidad para $\eta_b = 0.15$, $U = 2.0$ y X'_0 variable. Los demás parámetros son idénticos a los de las figuras previas

- $U = 2.0$. Las cuatro inestabilidades presentes exhiben el mismo comportamiento monótonamente creciente ya conocido del caso anterior, aunque más marcado y llegando a tasas de crecimiento mayores. Beam 4 se fusiona con beat poco después de $X'_0 \approx 0.35$. Desde $X'_0 \lesssim 0.23$, reaparece la inestabilidad decay, en la cual para $X'_0 \lesssim 0.13$ surge nuevamente la Beam 3. Notar que la velocidad de fase $v_{\phi,max}$ de Beam 5 y 6 es invariante con respecto al cambio de frecuencia de la pump, la cual aumenta conforme U crece. También aparece Beam 7 sólo para $X'_0 \gtrsim 0.75$, un poco más fuerte que en los casos anteriores.

Notar que en este caso, Beam 5 es por lejos la inestabilidad dominante.



3.3. Modelo cinético en dirección longitudinal

Al igual que para el caso de plasma electrón-protón, se puede desarrollar una teoría que incorpore efectos cinéticos en la dirección longitudinal tal como se mostró en la sección 2.6. A continuación se mostrarán sólo las diferencias del caso aquí analizado con respecto a los de la sección antes mencionada.

3.3.1. Función de distribución longitudinal

Se incorporarán efectos cinéticos en la dirección longitudinal para el core de protones y el beam de iones, lo que será representados por las funciones de distribución análoga a (2.66) con el subíndice p reemplazado por $j = c, b$:

$$f_j(\vec{x}, \vec{v}) = \delta(\vec{v}^\perp - \vec{V}_j^\perp) f_j^\parallel(z, v_z, t) \quad (3.64)$$

Notar que la función de distribución 1D f_j^\parallel satisfará la misma ecuación de Vlasov (2.70).

3.3.2. Estado de equilibrio

La función de distribución en equilibrio para el core y el beam satisfará igualmente la descomposición (2.71) con p reemplazado por $j = c, b$. Pero su forma explícita 1D cambiará, debido a la velocidad de deriva \vec{U} , de (2.76) a la Maxwelliana con drift:

$$\hat{f}_{0j}^\parallel(v_z) = \frac{1}{\sqrt{\pi} v_{Tj}} e^{-\left(\frac{v_z - U_j}{v_{Tj}}\right)^2} \quad (3.65)$$

con la velocidad térmica dada por (1.30) reemplazando igualmente p por j . Es fácil verificar que esta forma de f_{0j}^\parallel satisface todos los requerimientos de consistencia.

3.3.3. Linealización y función de distribución perturbada

Aplicando el mismo procedimiento de linealización para las funciones de distribución del core y beam, se obtiene una expresión análoga a (2.81) reemplazando p por $j = c, b$.

Densidad perturbada

De la misma forma, la densidad adopta una forma análoga a (2.83), y debido al drift que ahora posee la función de distribución, es evidente verificar que la densidad toma la misma forma que en (2.86) pero con el argumento de la función Z de plasma, ξ_j , conteniendo una frecuencia desplazada Doppler $\omega_{j,l} = \omega_l - k_l U_j$ según (F.35) (en vez de ω_l como en el caso del plasma electrón-protón):

$$\tilde{n}_{1j,l}(z, t) = -\frac{en_{0j}}{m_j} \left[i\tilde{E}_{1,l}^z - \frac{\tilde{V}_{0j}}{2} (\tilde{B}_{1,l+1}^- - \tilde{B}_{1,l-1}^+) - \frac{B_0}{2} (\tilde{V}_{1,l-1}^+ - \tilde{V}_{1,l+1}^-) \right] \frac{Z'(\xi_j)}{k_l v_{Tj}^2} \quad (3.66)$$

3.3.4. Ecuación de continuidad

Continuando con el mismo procedimiento, al tomar el momento de orden 0 de la ecuación de Vlasov, se obtiene la misma ecuación de continuidad linealizada de teoría de fluidos (3.28).

3.3.5. Momento 1 de la ecuación de Vlasov

Ahora, la linealización del momento 1 de la ecuación de Vlasov resulta en la misma expresión a determinar que para el caso electrón-protón (2.88), pero cada una de las integrales que la componen tendrá términos extras debido al drift de las especies. Así, para calcular I_1 se debe notar que al linealizarlo la definición de momento de orden 1 de la función de distribución según (1.10), se tendrá:

$$\int v_z f_{1j}^\parallel dv_z = n_{0j} V_{1j}^z + U_j n_{1j} \quad (3.67)$$

De la misma forma, para la segunda integral I_2 se usa, además de la presión (1.12), la definición de velocidad peculiar (1.13), de donde:

$$I_2 = \frac{\partial}{\partial z} \int (v'_z + V_{1j}^z + U_j)^2 f_{1j}^{\parallel} dv_z = \frac{1}{m_j} \frac{\partial P_{1j}^{zz}}{\partial z} + U_j^2 \frac{\partial n_{1j}}{\partial z} \quad (3.68)$$

Con estos resultados, y recordando que $I_3 \rightarrow 0$, se tendrá para el momentum de orden 1 de la ecuación de Vlasov:

$$n_{0j} \frac{\partial V_{1j}^z}{\partial t} + U_j \left(\frac{\partial n_{1j}}{\partial t} + U_j \frac{\partial n_{1j}}{\partial z} \right) + \frac{1}{m_j} \frac{\partial P_{1j}}{\partial z} - \frac{q_j n_{0j}}{m_j} [E_1^z + V_{0j}^x B_1^y - V_{0j}^y B_1^x + V_{1j}^x B_0^y - V_{1j}^y B_0^x] = 0 \quad (3.69)$$

A continuación, se debe usar la ecuación de continuidad perturbada (3.28). Aplicando la misma dependencia sinusoidal de los campos utilizada en el análisis de fluidos, y escogiendo el coeficiente de Fourier l , se tiene finalmente la relación idéntica a (2.91) excepto por la frecuencia ω_l que queda desplazada Doppler a $\omega_{j,l}$:

$$\omega_{j,l} n_{0j} \tilde{V}_{1j,l}^z - \frac{k_l \tilde{P}_{1j,l}}{m_j} = -\frac{q_j n_{0j}}{m_j} \left[i \tilde{E}_{1,l}^z - \frac{\tilde{V}_{0j}}{2} (\tilde{B}_{1,l+1}^- - \tilde{B}_{1,l-1}^+) - \frac{B_0}{2} (\tilde{V}_{1,l-1}^+ - \tilde{V}_{1,l+1}^-) \right] \quad (3.70)$$

3.3.6. Relación cinética para coeficiente politrópico

Ahora se comparará (3.66) con la ecuación recién obtenida (3.70), notando que el lado derecho es idéntico en ambas expresiones.

$$\omega_{j,l} n_{0j} \tilde{V}_{1j,l}^z - \frac{k_l \tilde{P}_{1j,l}}{m_j} = \frac{\tilde{n}_{1j,l} k_l v_{Tj}}{Z'(\xi_j)} \quad (3.71)$$

El único cambio relevante con respecto a la relación análoga del plasma electrón-protón es el desplazamiento a la frecuencia Doppler $\omega_{j,l}$. Continuando el mismo procedimiento, es fácil notar que usando la relación entre densidad y velocidad perturbada $\tilde{V}_{1j,l}^z$ y $\tilde{n}_{1j,l}$ (3.29), es posible eliminar la primera y obtener para la presión:

$$\tilde{P}_{1j,l} = m_j \tilde{n}_{1j,l} \left[\left(\frac{\omega_{j,l}}{k_l} \right)^2 - \frac{v_{Tj}^2}{Z'(\xi_j)} \right] \quad (3.72)$$

Y de manera completamente análoga al caso electrón-protón, ahora se introduce un coeficiente politrópico cinético γ_j^K por cada especie $j = c, b$, de modo que la presión satisfaga:

$$\tilde{P}_{1j,l} = \gamma_j^K k_B T_j \tilde{n}_{1j,l} = m_j \left[\left(\frac{\omega_{j,l}}{k_l} \right)^2 - \frac{v_{Tj}^2}{Z'(\xi_j)} \right] \tilde{n}_{1j,l} \quad (3.73)$$

de donde se obtiene la relación cinética para el coeficiente politrópico (misma que (3.74) pero reemplazando p por $j = c, b$):

$$\gamma_j^K = 2 \left[\xi_j^2 - \frac{1}{Z'(\xi_j)} \right] \quad (3.74)$$

Con lo cual la relación de dispersión en este modelo cinético híbrido adopta la misma forma que en fluidos (3.56), pero reemplazando en todas partes el índice politrópico de fluidos γ_j^F (para el core de protones y el beam de iones), por su contraparte cinética γ_j^K dada en (3.74). Esta única discrepancia se manifiesta en el cambio de β_p^F de fluidos de (1.37) a (1.35); y correspondientemente de la cantidad Δ_j , que debe cambiar de (F.30)-(F.31) a cinética (F.38)-(F.39). Esta relación de dispersión ha sido mostrada y usada explícitamente en [Nariyuki et al., 2009], aunquen en el sistema de referencia en donde el core de protones está en reposo.

3.4. Resultados numéricos: Modelo cinético híbrido para plasma protón-protón

Ahora se mostrarán los resultados numéricos de incluir los efectos cinéticos en la relación de dispersión de plasma protón-protón (3.56). El método es el mismo usado en el caso de una especie, por lo que la degeneración existente en las raíces complejas y conjugadas del polinomio de dispersión de fluido desaparece, provocando que en cada rama de las curvas de dispersión se pueda distinguir claramente las zonas inestables de las amortiguadas.

Un pequeño detalle técnico: para los parámetros beta electrónicos de modelos de fluidos y cinético-híbridos, relacionados mediante (F.14), se usará la misma receta del caso de una especie: $\beta_e^F = \beta_e^K / 2$ (recordar discusión de la sección 2.7.1.)

3.4.1. Caso límite de amplitud nula

Así, para el caso límite de amplitud nula $A = 0$, se puede obtener las curvas de nivel y a partir de ella los diagramas de dispersión análogos a los de, por ejemplo, la figura 3.6d (caso de alta densidad y alta velocidad de drift), pero incorporando ahora los efectos cinéticos.

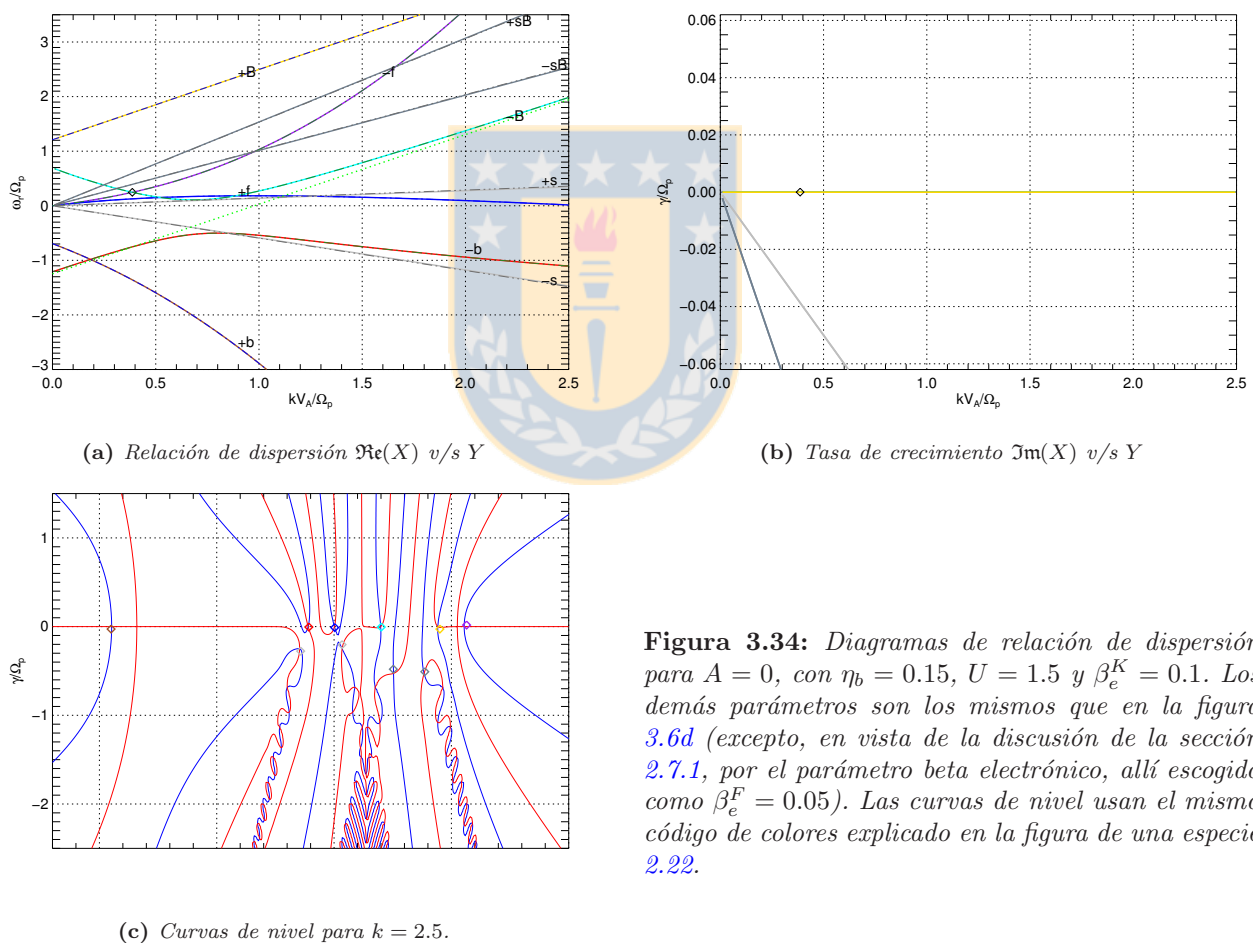


Figura 3.34: Diagramas de relación de dispersión para $A = 0$, con $\eta_b = 0.15$, $U = 1.5$ y $\beta_e^K = 0.1$. Los demás parámetros son los mismos que en la figura 3.6d (excepto, en vista de la discusión de la sección 2.7.1, por el parámetro beta electrónico, allí escogido como $\beta_e^F = 0.05$). Las curvas de nivel usan el mismo código de colores explicado en la figura de una especie 2.22.

Al igual que en el caso de una especie, las bandas laterales están sin amortiguamiento y hay una gran cantidad de modos acústicos fuertemente amortiguados. Los 4 con menor γ se pueden identificar con las correspondientes del caso de fluidos ($\pm s$ y $\pm sB$) para dos especies antes analizados (sus curvas ω_r v/s k coinciden muy precisamente), que son precisamente los mostrados aquí. Notar que los modos acústicos del beam $\pm sB$ siempre están más amortiguados que aquellos asociados al core de protones $\pm s$. En este límite de amplitud nula, los demás casos de la figura de fluidos 3.6 presentan un comportamiento similar.

Inestabilidad lineal acústica

¿Qué ocurre al incorporar los efectos cinéticos para una situación en la que esté presente la inestabilidad lineal acústica, según el modelo de fluidos? (discutida en la figura 3.7). En general, estos efectos tienden a amortiguar esta inestabilidad, estrechando los rangos de parámetros en los cuales se desarrolla, tal cual ha sido indicado en [McKenzie et al., 1993]. Por ejemplo, ni en la figura 3.7 ni en ningún caso de los mostrados de las figuras que siguen a ella se observa esta inestabilidad no paramétrica. Pero analizando cuidadosamente un gran rango de parámetros, se puede concluir que el parámetro clave que se debe cambiar para desencadenarla es el beta electrónico, ya que para $\beta_e = 0.3$, por ejemplo, se puede encontrar el rango de U en que esta inestabilidad está activa. Y al igual que se hizo en fluido, se puede verificar el efecto que tiene cambiar cada uno de los beta's en los rangos en que esta

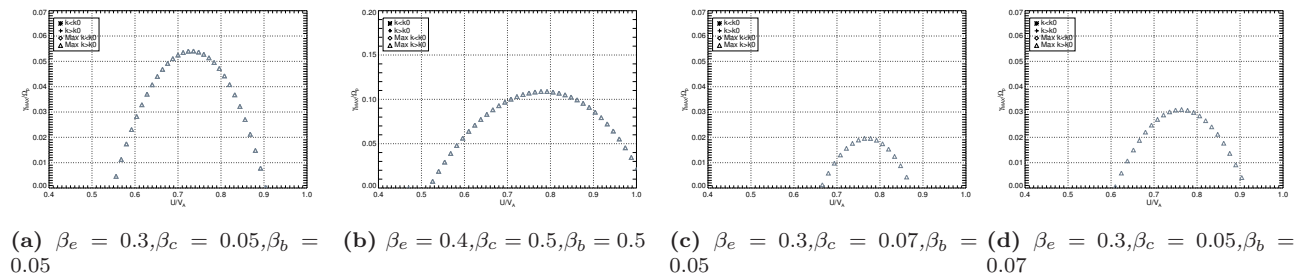


Figura 3.35: Tasas máximas de crecimiento γ_{max} de la inestabilidad lineal para U variable en $Y \leq 2.0$, $\eta_b = 0.15$ y los valores de beta's indicados. Mismos otros parámetros anteriores. Notar el diferente rango en las ordenadas del caso con $\beta_e^K = 0.4$, para poder establecer una apropiada comparación con 3.9a.

Estos gráficos se pueden considerar los equivalentes a los de fluidos 3.8b y los tres de 3.9. Al comparar con ellos, se observa que el aumento de β_e tiene los mismos efectos ya identificados del caso fluido (aunque, por supuesto, para β_e más altos que los allí usados). La diferencia fundamental de comportamiento se produce al incrementar β_c ó β_b : con tan sólo un ligero aumento (2 centésimas), se produce un drástico decremento de las tasas máximas de crecimiento. Esto reafirma lo mencionado anteriormente: el amortiguamiento Landau tiende a suprimir fuertemente esta inestabilidad lineal acústica, al aumentar sólo ligeramente los betas de los protones (de hecho, ya para $\beta_c = 0.08$, esta inestabilidad desaparece totalmente).

3.4.2. Caso límite de velocidad U nula

Considerando el caso límite sin velocidad relativa entre protones $U = 0$, es posible reproducir la figura de fluidos 3.10c aplicada a este caso cinético-híbrido:

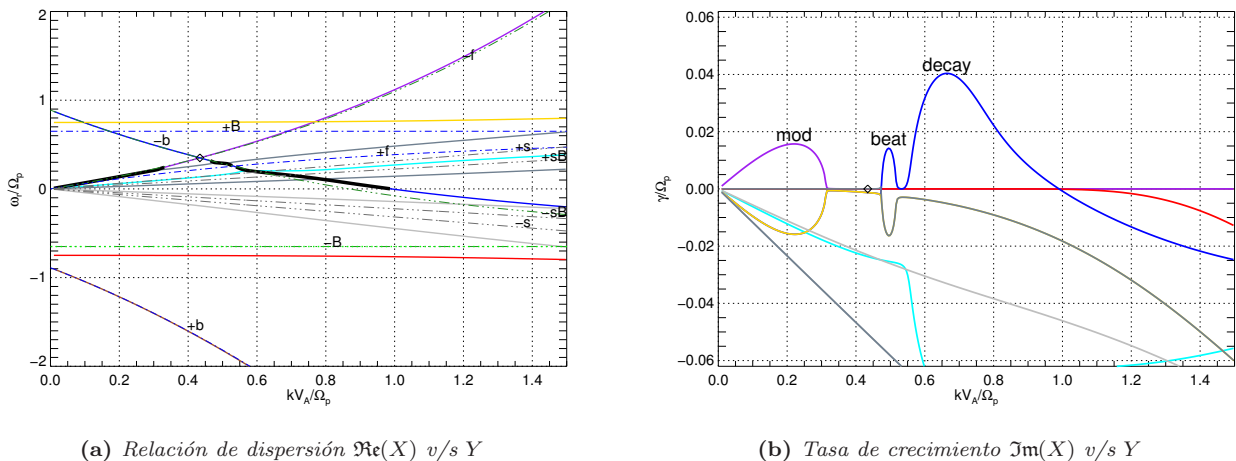


Figura 3.36: Diagramas de relación de dispersión para $U = 0$, $\eta_b = 0.15$ y $\beta_e^K = 0.1$. Los demás parámetros son los mismos que en la figura de fluidos 3.10.

Análogamente al caso de fluido (ver figura 3.10 y discusión posterior), se obtienen las mismas curvas γ_{max} en el límite de un fluido $\eta_b \rightarrow 0$ y para todo U , con los otros parámetros iguales, y a pesar que la morfología de las ramas cambie completamente en el plano ω_r vs k .

Comparando con el diagrama equivalente de fluidos antes mencionado, los cambios observados en las inestabilidades son similares a los ya descritos en el caso de una especie (ver figura 2.25 y discusión posterior), aunque los efectos cinéticos no están tan marcados como en dicho caso. En efecto, los γ_{max} de las tres inestabilidades son prácticamente iguales que los de fluidos, y además se puede identificar claramente la rama amortiguada asociada a las inestabilidades modulacional y beat (aunque no decay). Además, el ensanchamiento en k sólo es manifiesto para la inestabilidad decay.

3.4.3. Variando la velocidad de drift

Para determinar el panorama general de las inestabilidades presentes en este caso de dos especies con el modelo cinético-híbrido, se realizará un análisis de los máximos de las inestabilidades en función de U (manteniendo los demás parámetros constantes), análogo al de la sección de fluidos 3.2.3, enfatizando principalmente los cambios con lo allí mostrado. Así se tiene, para los casos de baja ($\eta_b = 0.02$) y alta ($\eta_b = 0.02$) densidad del beam respectivamente, el análogo cinético de la figura 3.14:

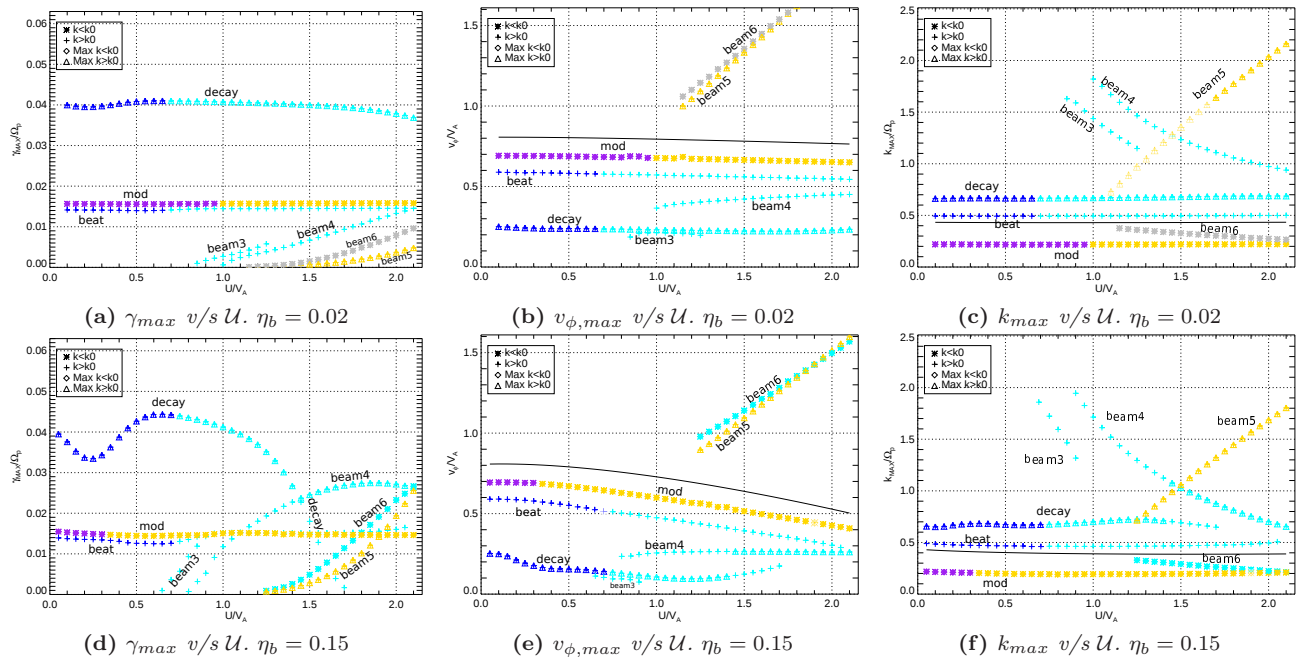


Figura 3.37: Diagramas de máximos de inestabilidades, en el modelo cinético-híbrido, para $0 < U < 2.1$. Izquierda: baja densidad $\eta_b = 0.02$. Derecha: alta densidad $\eta_b = 0.15$. Los demás parámetros son los mismo usados en la figura de fluidos 3.14.

Ahora se caracterizarán las diferentes inestabilidades encontradas en el diagrama anterior, en el orden en que aparecen de menor a mayor U . Para ejemplificar, sólo se mostrarán los casos de alta densidad, puesto que los efectos del beam son más marcados.

- El panorama para $U \lesssim 0.85$ en el caso de baja densidad, y de $U \lesssim 0.65$ en el caso de alta densidad, es prácticamente igual al límite $U = 0$ antes descrito: sólo están presentes las tres inestabilidades conocidas de una especie en una forma casi idéntica a la figura 3.36b. Sólo cabe mencionar que la inestabilidad decay varía un poco sus tasas de crecimiento, sobre todo en el caso de alta densidad. Esto se debe, para $U \lesssim 0.6$, a un débil deformación entre las inestabilidades beat y decay que se puede identificar, al comparar con el caso de fluido, a una débil y ancha inestabilidad Beam 1 (de difícil observación), que se va desplazando lentamente hacia k menores conforme U aumenta y va "drenando" el γ_{max} de decay con mayor eficacia entre más cerca esté de su k_{max} . Para $U \gtrsim 0.6$, la reducción en γ_{max} se debe a las mismas razones de fluido: la lenta fusión con la inestabilidad Beam 3 (siendo mucho más fácil su identificación que en el caso previo).

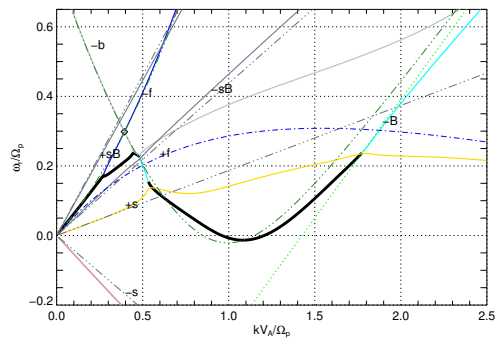
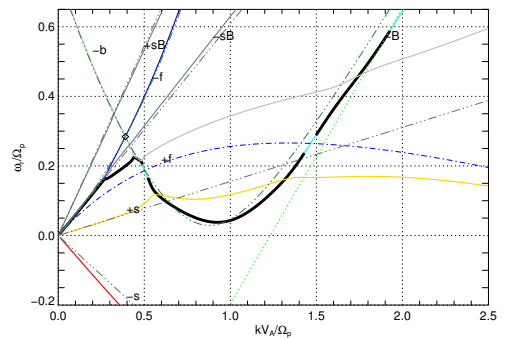
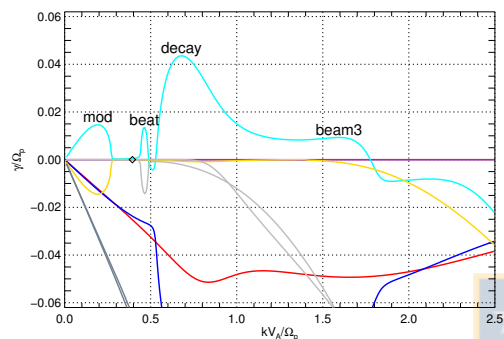
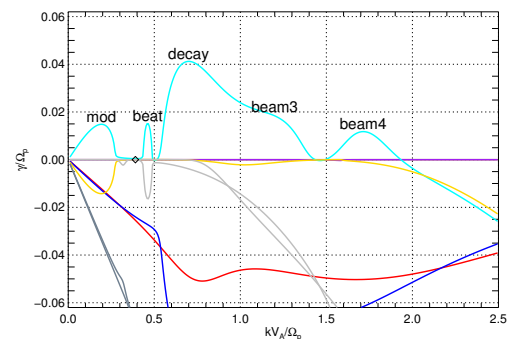
(a) Relación de dispersión $\Re(X)$ v/s Y . $U = 0.8$ (b) Relación de dispersión $\Re(X)$ v/s Y . $U = 1.0$ (c) Tasa de crecimiento $\Im(X)$ v/s Y . $U = 0.8$ (d) Tasa de crecimiento $\Im(X)$ v/s Y . $U = 1.0$

Figura 3.38: Diagramas de relación de dispersión para dos U 's y $\eta_b = 0.15$, mostrando las inestabilidades Beam 3 y 4. Los demás parámetros son los mismos de la figura análoga de fluidos 3.16, con el cambio consistente a $\beta_e^K = 0.1$.

- Comparando los diagramas anteriores con el caso de fluidos 3.38, se nota para $U = 0.8$ una inestabilidad ubicada cerca de la resonancia beam, en la rama $-B$, con su máximo en la intersección con $+s$ y con una gran rango en k , estando de hecho fusionada con decay. Por ello, se puede identificar con la *inestabilidad Beam 3* del caso de fluido. Debido a que se encuentra ya fusionada con decay, que era el destino final de Beam 3 para el caso de fluido, esta inestabilidad sólo será distinguible en un rango de U mucho más estrecho que en el caso de fluidos, pues al aumentar sólo un poco la velocidad de drift, su máximo se suavizará lo suficiente como para desaparecer (un comportamiento claramente cinético). Cabe notar que esta inestabilidad siempre se presentará combinada con decay, por lo que será ambigüo determinar los rangos en k asociados a cada una.
- Las ramas $-B$ y $+f$ se encuentran más separadas en este caso con efectos cinéticos incluidos, por lo que para $U = 0.8$ no se distingue la inestabilidad Beam 4, pero sí para $U = 1.0$, en donde ella tiene un máximo precisamente en la intersección con $+f$, en concordancia con el modelo de fluidos 3.16d. Sin embargo, la *tendencia* de esta inestabilidad es fuertemente afectada por efectos cinéticos: A pesar que sus γ_{max} tienen la usual reducción debido al amortiguamiento Landau, ellas siempre son crecientes con U , en completa oposición al modelo de fluidos en donde primero decrece y después se mantiene constante (comparar los diagramas resumen 3.14d y 3.37d). Otra diferencia es en el umbral en que esta inestabilidad aparece por primera vez al ir incrementando U : en fluidos surge para k y γ_{max} muy grandes, pero los efectos cinéticos hacen que aparezca para k menores y con γ_{max} marginalmente pequeños..

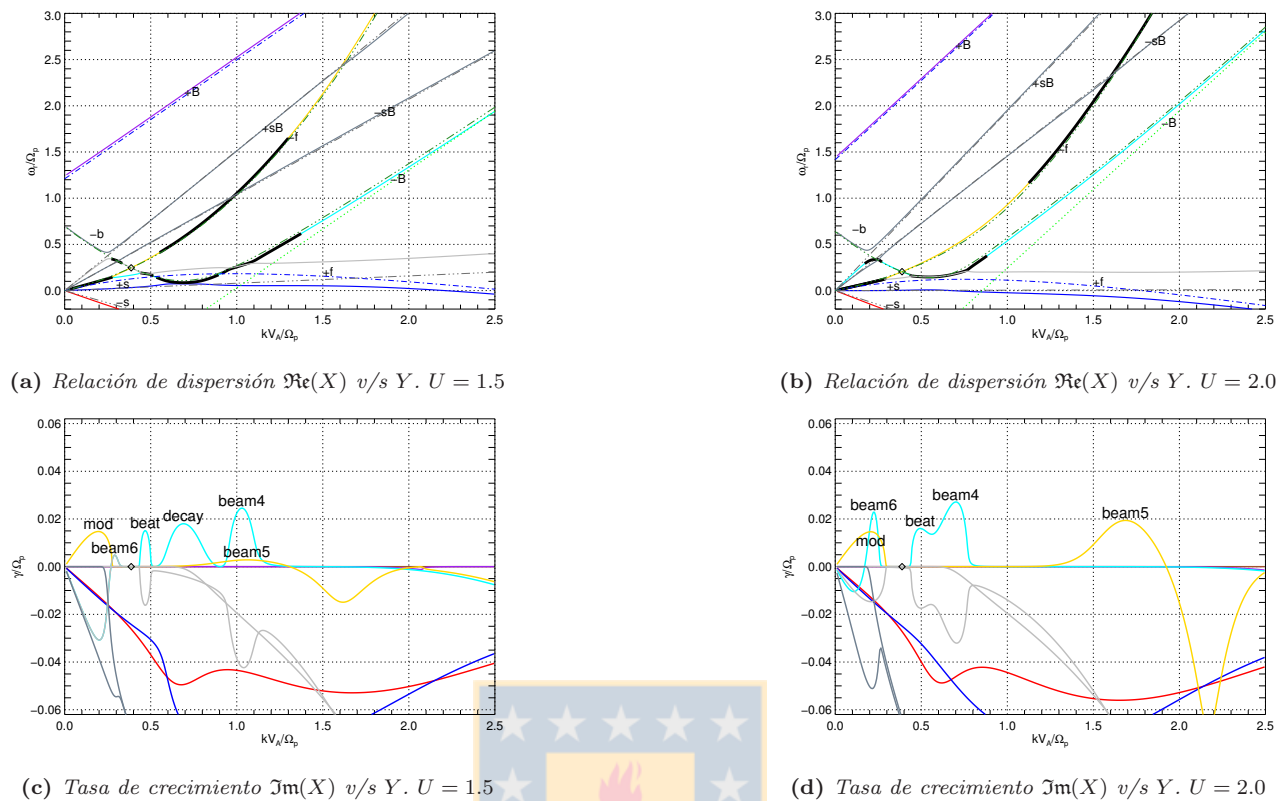


Figura 3.39: Diagramas de relación de dispersión para dos U 's y $\eta_b = 0.15$, mostrando las inestabilidades Beam 5 y 6. Los demás parámetros son los mismos de la figura análoga de fluidos 3.17, con el cambio consistente a $\beta_e^K = 0.1$.

- Comparando con el correspondiente diagrama de fluidos 3.17, se observa que para $U = 1.5$ y $U = 2.0$ se presentan las dos inestabilidades Beam 5 y 6, ya conocidas del modelo de fluidos. La primera de ellas se manifiesta en la rama $-f$, con un máximo en la intersección con $-sB$ y un amplio rango en k , mientras que la segunda se ubica en una desestabilización de la rama $-b$ centrada en la intersección con $-sB$. El amortiguamiento Landau disminuye fuertemente los γ_{max} de Beam 5 (Por ej., para $U = 2.0$, tiene un $\gamma_{max} = 0.019$ en este caso, mientras que en fluido $\gamma_{max} = 0.051$) y sólo ligeramente los de Beam 6, aunque ambos mantienen la misma tendencia creciente con U de fluidos.

3.4.4. Variando la densidad del beam

Se han reproducido los gráficos de variación de densidad del beam η_b de la sección 3.2.4 con el modelo cinético presentado, pero no se han encontrado cambios o variaciones dignos de mención. Todas las inestabilidades que aparecen en ambos modelos presentan las mismas tendencias (y umbrales de anulación en el caso de decay), con la ya acostumbrada reducción de los γ_{max} debido al amortiguamiento Landau, sobre todo para Beam 4 y 5. Por ello, no vale la pena mostrar los gráficos análogos a los de fluido 3.18.

3.4.5. Variando beta del beam

Aquí se comparará la diferencia que surgen de los efectos cinéticos al comparar con el caso de fluido en la sección 3.2.5, para los gráficos de los máximos de inestabilidades en función de β_b

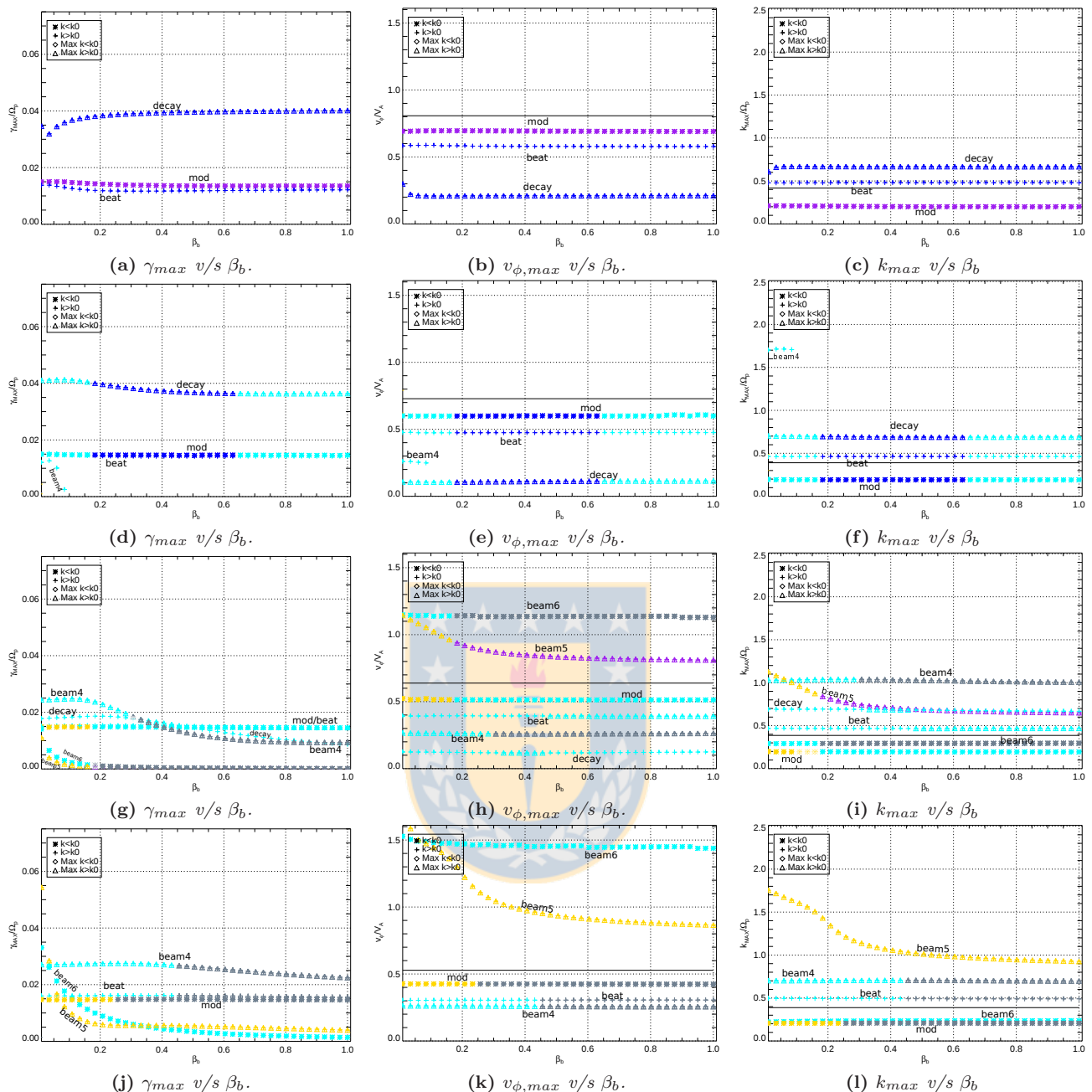


Figura 3.40: Máximos de inestabilidad para $\eta_b = 0.15$, varios U , $\beta_e = 0.1$, $\beta_c = 0.05$ y β_b variable. Los demás parámetros son idénticos a los de las figuras previas

- $U = 0.2$. Sólo hay un pequeño vestigio de la inestabilidad Beam 1 para $\beta_b \lesssim 0.1$, manifestada en una reducción de las tasas de crecimiento de decay en ese sector y una ligera "deformación" de su curva γ_{max} vs k . Tanto beat como modulacional son invariantes al variar β_b .
- $U = 1.0$. Sólo hay rastros una inestabilidad adicional a las conocidas de una especie: Beam 3, manifestada en un extendido rango de la inestabilidad decay en una forma muy similar a 3.38c. Aunque no se observe en este gráfico, se sienten sus efectos mediante la reducción de los γ_{max} de decay, en la zona donde sus curvas deberían estar más próximas según el modelo de fluidos.
- $U = 1.5$. Los efectos cinéticos se hacen sentir con toda su intensidad en la ahora débil inestabilidad Beam 5, con γ_{max} por debajo incluso de Beam 6. Como ya es usual, el definido umbral en β_b de fluidos para

la anulación de ambas inestabilidades se “difumina” lo bastante como para seguir detectándolas, aunque marginalmente, mucho más allá. En particular, a la par que disminuye su γ_{max} , Beam 5 también extiende enormemente su rango. Cabe destacar que estas inestabilidades ya no poseen la misma $v_{\phi,max}$ como en fluidos: Beam 6 posee una velocidad de fase constante con respecto a β_b , mientras que Beam 5 sigue la tendencia decreciente de fluidos (aunque más suave). Por otra parte, Beam 4 también se ve fuertemente afectado por el amortiguamiento Landau, tanto que cambia la tendencia de fluido (ver 3.21a) al ser su curva γ_{max} decreciente con respecto a β_b . Decay también sigue un comportamiento similar, e igual en oposición a fluidos.

- $U = 2.0$. Beam 5 sigue un patrón similar a fluidos, aunque su tasa de crecimiento es afectada notoriamente al mantenerse relativamente estacionaria en $\gamma_{max} \approx 0.05$ para $\beta_b \gtrsim 0.15$, un valor 8 veces menor que en el caso de fluido. Por otra parte, Beam 6 no sufre mayores variaciones con respecto a dicho modelo, mientras que la curva γ_{max} v/s k de Beam 4 es ligeramente decreciente, en oposición a su constancia en fluidos.

3.4.6. Umbrales para beta del core y electrones

Al igual que la subsección descrita con el modelo de fluidos 3.2.6, ahora se procederá a investigar las principales diferencias de los máximos de las inestabilidades en función de los parámetros térmicos del core de protones y los electrones.

β_c variable

Así, para el beta del core de protones se tiene, en comparación con el caso de fluidos 3.23 los siguientes diagramas, Cabe notar que en esta situación los efectos de fluidos están contenidos en β_e que es una pequeña proporción del β total para la mayor parte del diagrama, por lo que será una situación con efectos netamente cinéticos.



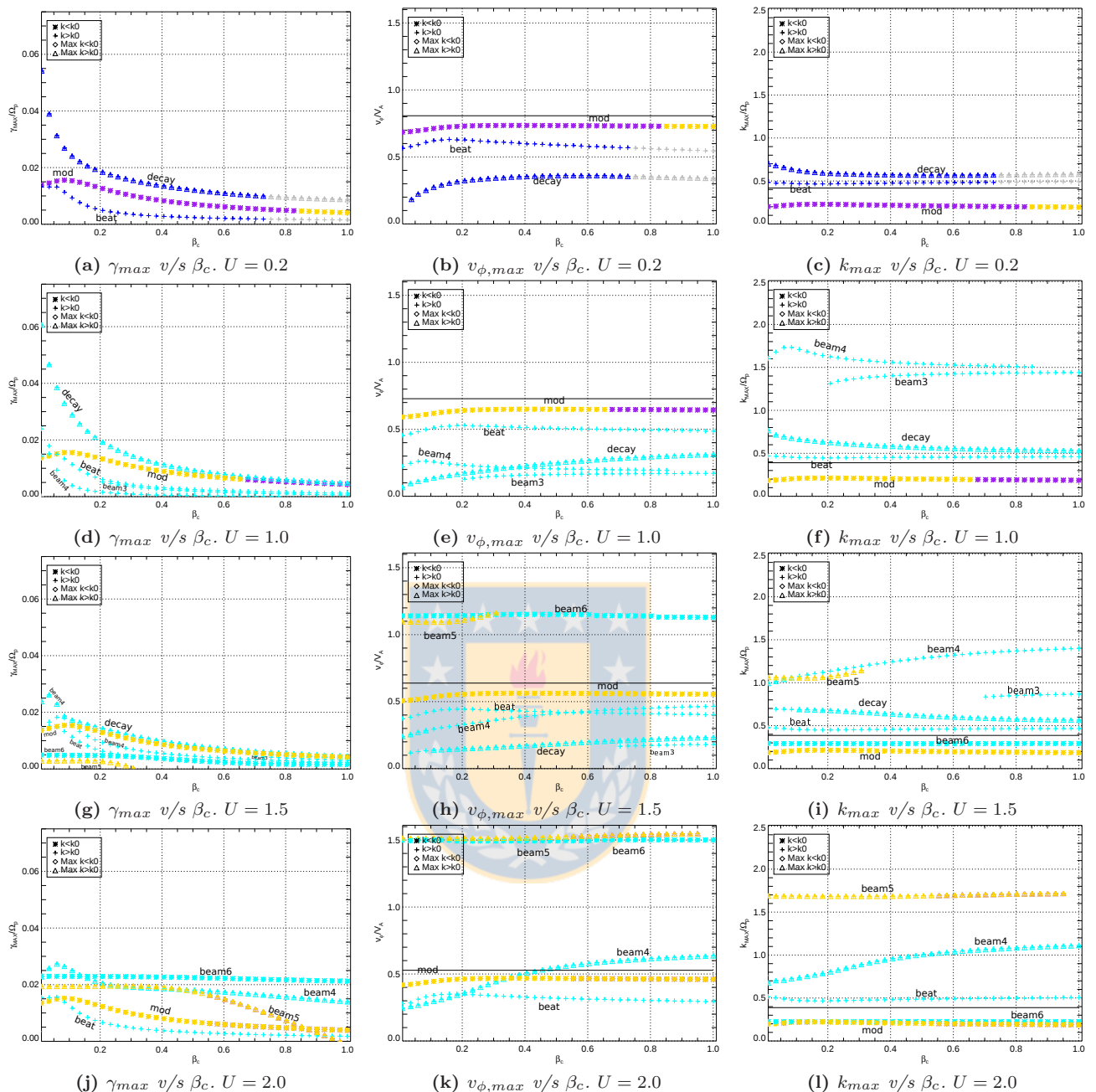


Figura 3.41: Máximos de inestabilidad para $\eta_b = 0.15$, varios U , $\beta_e = 0.1$, $\beta_b = 0.05$ y β_c variable. Los demás parámetros son idénticos a los de las figuras previas

- $U = 0.2$. Aquí sólo se observan las tres inestabilidades de una especie, modificadas cinéticamente de una forma casi idéntica a la ya discutida en la figura para variación de β_p en un plasma de una especie 2.30b (los umbrales para modulacional y beat desaparecen suavemente). No hay rastro alguno de la inestabilidad Beam 1 de fluidos.
- $U = 1.0$. Las tres inestabilidades de una especie se diferencian del modelo de fluidos en la misma forma que en el caso previo. Aquí Beam 4 es fuertemente afectada por el amortiguamiento Landau, pues tiene un comportamiento decreciente de su γ_{max} y k_{max} c/r a $\tilde{\beta}_p$ similar a decay, en completa contraposición a fluidos. Por otra parte, para $\tilde{\beta}_c \gtrsim 0.2$, es posible distinguir Beam 3 de decay al encontrarse lo suficientemente separado de ella (recordar lo junto y extendido que estaban en la figura 3.38c), cuyo γ_{max} tendrá un comportamiento igualmente decreciente.

- $U = 1.5$. La presión térmica cinética de los protones del core cambia radicalmente el comportamiento de Beam 5 con respecto al caso de fluidos: ahora es tan débil que posee incluso un umbral de suprsión para $\beta_c \approx 0.3$. Beam 6, en cambio, disminuye sólo un poco sus tasas de crecimiento, manteniendo la misma tendencia frente a la variación de β_c que en dicho modelo y siendo algo más importante que Beam 5.

Por otra parte, Beam 4 tiene un comportamiento similar al analizado para $U = 1.0$ (y opuesto al de fluido), aunque con mayores tasas de crecimiento. Beam 3 se distingue al separarse de Decay sólo para $\beta_c \gtrsim 0.7$ (observado en fluido pero para un valor mucho menor: $\beta_c \approx 0.25$), aunque de todas formas con tasas muy bajas

- $U = 2.0$. El comportamiento de las inestabilidades con la misma velocidad de fase Beam 5 y 6 se mantiene aquí pero con γ_{max} mayores. Ello implica que el umbral de supresión de Beam 5 se desplace a la derecha con U creciente, siendo en este caso $\beta_c \approx 1.0$. Beam 6, en cambio, al poseer el mismo comportamiento (casi) constante de fluidos, es la inestabilidad dominante para $\beta_c \gtrsim 0.15$. Notablemente, ella es la inestabilidad del beam menos afectada por efectos cinéticos, en circunstancias que era una de las menos importantes según fluidos.

Beam 4 sigue, a grandes rasgos, el mismo comportamiento decreciente antes notado pero fortificado, y es por mucho la inestabilidad con el mayor rango en k , cubriendo una amplia zona de la rama $-B$ entre mayor sea β_c .

β_e variable

El mismo análisis anterior se puede hacer para el beta electrónico, en forma análoga al caso de fluidos 3.24. A diferencia de la situación anterior, este análisis se puede considerar predominantemente de tipo fluido ya que los parametros beta de protones son pequeños en relación a lla mayoría de los β_e presentados



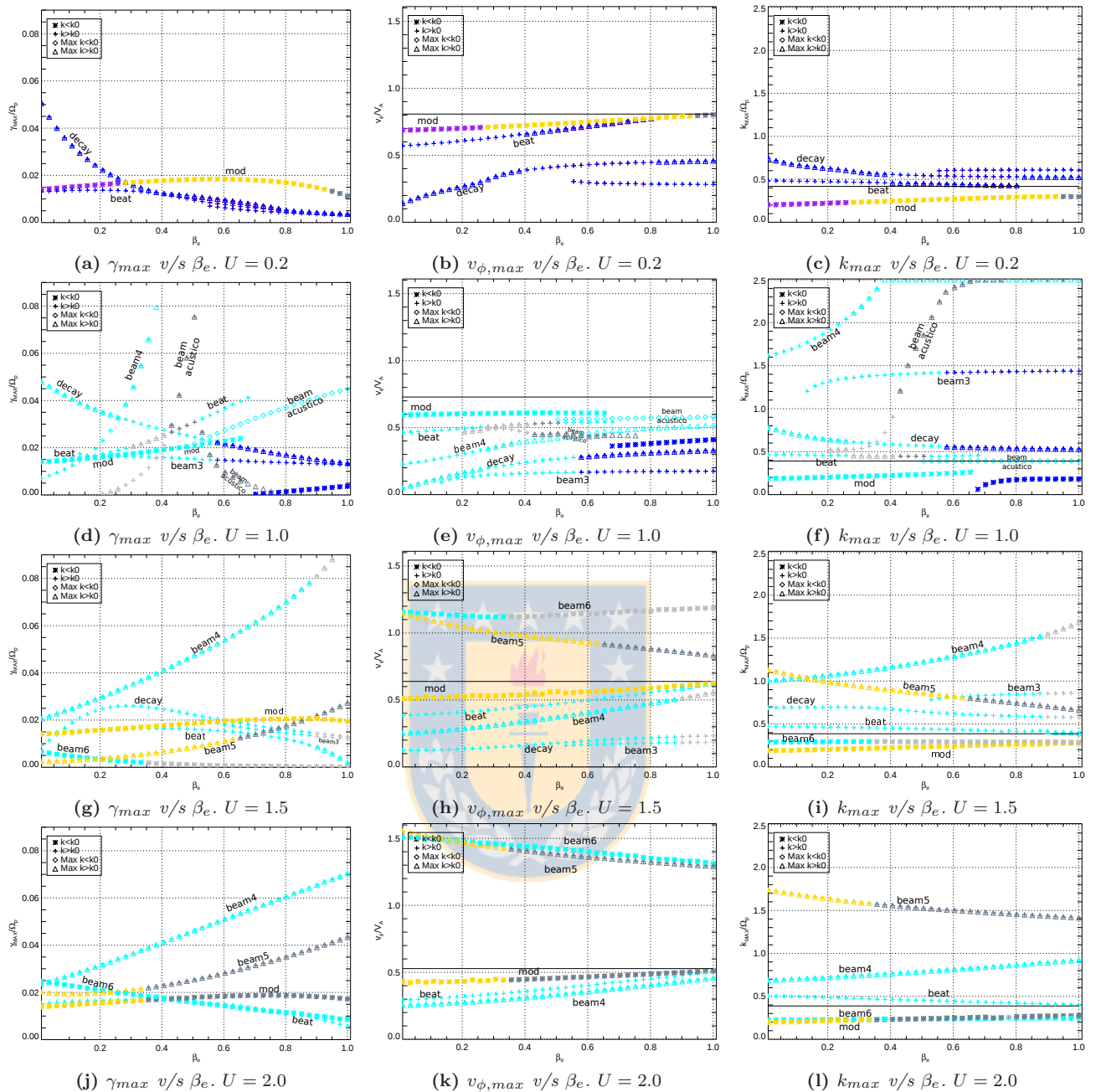


Figura 3.42: Máximos de inestabilidad para $\eta_b = 0.15$, varios U , $\beta_c = \beta_b = 0.05$ y β_e variable. Los demás parámetros son idénticos a los de las figuras previas

En todos estos gráficos con β_e variable, se debe hacer la salvedad que el rango en dicho parámetro debe ser el doble que en los correspondientes gráficos de fluidos, debido a la diferencia en un factor 2 entre β_e^F de fluidos con el β_e^K cinético según lo mencionado en

- $U = 0.2$. De forma similar al gráfico con β_c variable, aquí sólo se observan las inestabilidades de una especie, modificadas por efectos cinéticos de una forma similar al límite frío de una especie, ya discutida en la figura de β_e variable 2.28.
- $U = 1.0$. Como era esperable, la inestabilidad Beam 4 presenta el mismo tipo de comportamiento de rápido crecimiento de γ_{max} y k_{max} frente a β_e como en el modelo de fluidos, saliendo del rango observado hacia $\beta_e^K \approx 0.4$ ($\beta_e^F \approx 0.2$). Beam 3 se comporta casi igual que en fluidos.

Por primera vez, es posible detectar una inestabilidad beam acústica en este modelo cinético al igual que en el de fluido, a partir de $\beta_e \gtrsim 0.38$, enmascarando así cualquier información de inestabilidad modulacional o beat.

- $U = 1.5$. Beam 4 sigue la misma tendencia de fluidos, aunque creciendo más lentamente y con γ_{max} un poco menores, aunque siempre es la inestabilidad dominante. Las tasas de crecimiento de Beam 5 y Beam 6 siguen también un comportamiento similar al de fluidos, aunque de forma más suave: la primera aumenta con β_e de una forma lenta y la segunda decrece de la misma manera. Pero en todo caso, la que al final es más amortiguada por efectos cinéticos, es Beam 5. Notar también que Beam 5 no tiene una velocidad de fase constante como Beam 7.
- En el mismo diagrama, y análogamente a fluidos, Beam 3 comienza a ser distinguible de Decay hacia $\beta_e \approx 0.55$, siguiendo su misma tendencia decreciente. Para β_e muy bajos, decay también decrece de la misma forma que fluidos, aunque suavemente y no llegando a anularse
- $U = 2.0$. Beam 5 y 6 mantienen las mismas tendencias de γ_{max} c/r a β_e con respecto al caso de fluidos, aunque, por supuesto, con la usual reducción cinética de sus valores. Estas reducciones son mucho más notorias para Beam 5, de modo que para β_e altos, Beam 4, que mantiene un comportamiento muy similar a fluidos, es dominante.

3.4.7. Caso genérico: Umbrales de amplitud

Se han reproducido los gráficos de máximos de inestabilidades en función de la amplitud de la pump A con el modelo cinético, pero no se han encontrado diferencias adicionales a las ya conocidas, con respecto al caso de fluidos 3.2.7. Esto es, al ser los betas cinéticos de protones tan bajos, los umbrales de amplitud para las inestabilidades de una especie modulacional y beat presentan muy poca “difuminación cinética”, además de la ya usual reducción de todas sus tasas de crecimiento debido al amortiguamiento Landau (al igual que las inestabilidades beam). Lo único que vale la pena mencionar es que las inestabilidades Beam 4 y Beam 5, en concordancia a lo hallado anteriormente, muestran una fuerte reducción de sus γ_{max} en relación al modelo de fluidos, de una forma mucho más marcada que para el resto de inestabilidades.

3.4.8. Caso genérico: Frecuencia de la onda pump

Ahora se mostrarán los gráficos de máximos de inestabilidades en función de la frecuencia de la pump X'_0 (recordar la diferencia con X_0 dada en la sección 3.2.1), para mostrar la forma en que los efectos cinéticos afectan a las inestabilidades de fluidos mostradas en la sección 3.4.8.

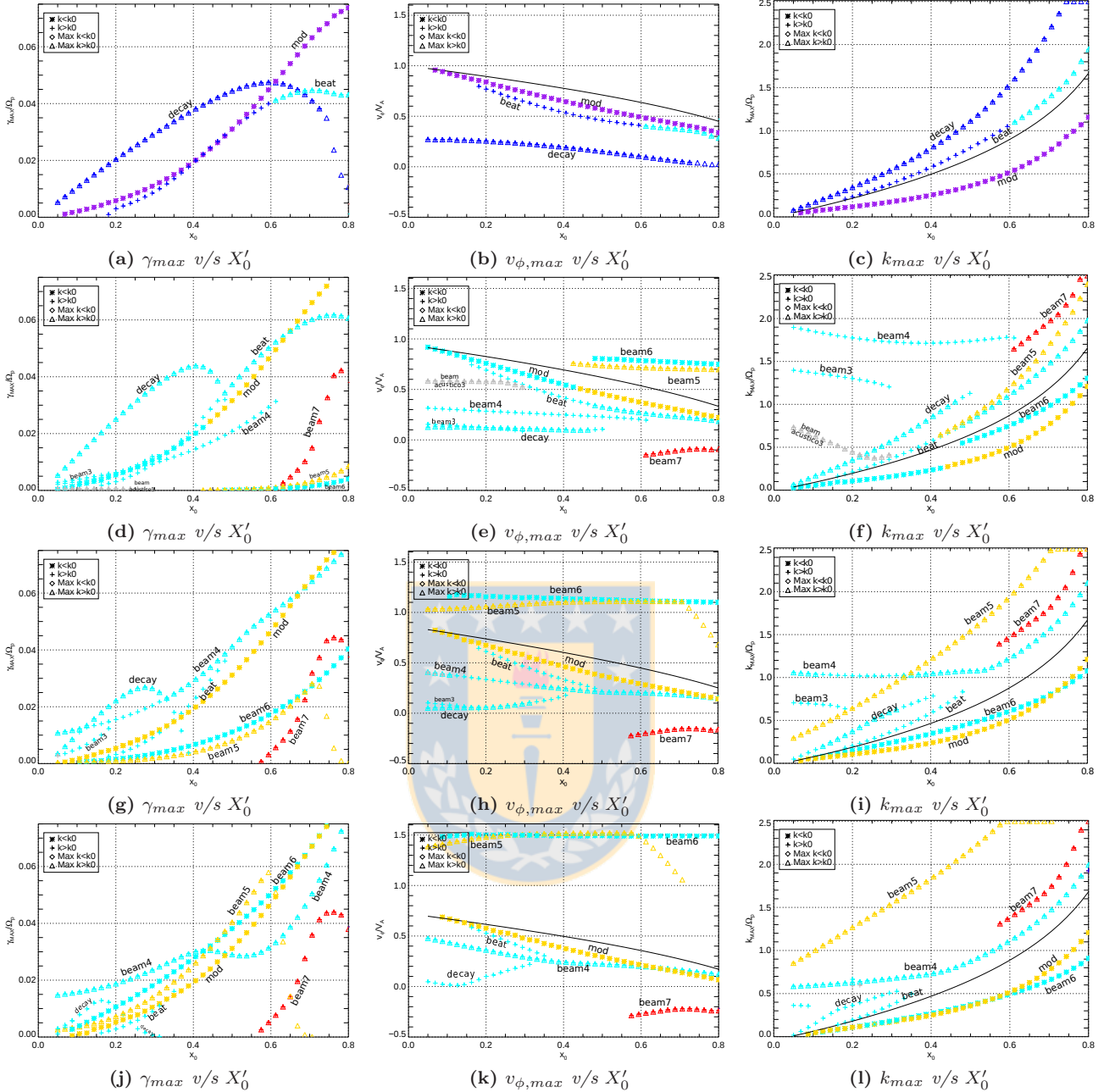
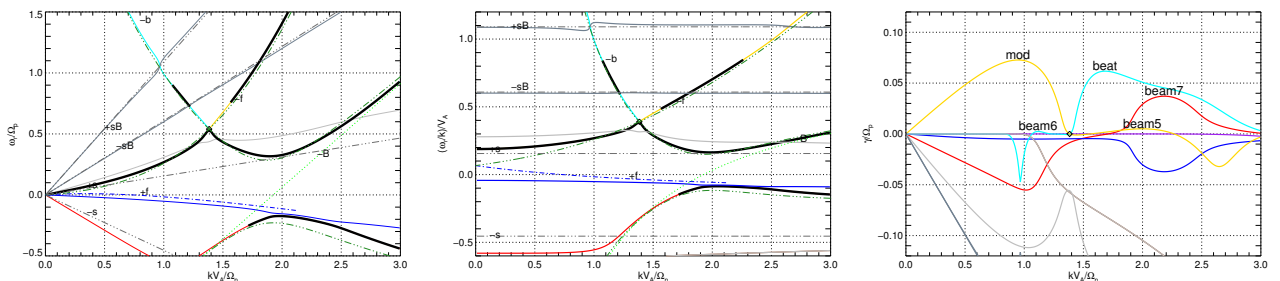


Figura 3.43: Máximos de inestabilidad para $\eta_b = 0.15$, $U = 0.2$ y X'_0 variable. Los demás parámetros son idénticos a los de las figuras previas

- $U = 0.2$. Las inestabilidades de una especie exhiben un comportamiento general similar al caso de fluidos, con los correspondientes comentarios allí realizados. Pero cabe señalar que el máximo de decay se desplaza aún más a la derecha, en torno a $X'_0 \approx 0.6$, pero conservando sus γ_{max} . No hay rastros de inestabilidad asociadas al beam.
- $U = 1.0$. Las inestabilidades más fuertemente amortiguadas por los efectos cinéticos son Beam 3 y 4, pero manteniendo la misma tendencia de γ_{max} creciente c/r a: si para fluidos tenían tasas similares a decay, ahora son menores inclusive que las de modulacional, al menos para X'_0 pequeños (comparar con 3.30a). Por otra parte, Decay mantiene el umbral de supresión en X'_0 característico de fluidos para este U . Beat y modulacional no sufren grandes variaciones con respecto al modelo antes comparado. Nótese que Beam 7 ahora aparece mucho antes que fluidos, $X'_0 \gtrsim 0.6$, y con tasas de crecimiento mayores

y rápidamente crecientes con la frecuencia, en contraposición a fluidos. A modo de ilustración, véase la siguiente figura, análogo cinético de 3.31:



(a) Relación de dispersión $\Re(X)$ v/s Y (b) Velocidad de fase $\Re(X)/Y$ v/s Y (c) Tasa de crecimiento $\Im(X)$ v/s Y .
 $\eta_b \rightarrow 0$ y $U = 1.5$

Figura 3.44: Diagramas de relación de dispersión para $X'_0 = 0.75$ y $U = 1.0$. Resto de los parámetros igual a las figuras anteriores

- $U = 1.5$. Como ya es usual, beam 5 se encuentra lo bastante debilitada (en comparación a fluidos) como para que sus tasas de crecimiento sean ligeramente inferiores incluso que la de beam 6, aunque manteniendo su misma tendencia creciente. Beam 4 está sólo ligeramente disminuido en relación a fluidos, al igual que las inestabilidades de una especie.

Decay mantiene su característico umbral de fluidos en X'_0 . Beam 7 incrementa sus γ_{max} con respecto a $U = 1.0$, en contraste con fluidos en donde es apreciablemente menos importante.

- $U = 2.0$. Beam 5 mantiene la usual reducción de γ_{max} , aunque de forma menos acentuada que para velocidades menores, igualando las tasas de crecimiento de Beam 6. Además, dicha inestabilidad experimenta un desplazamiento mucho más rápido en $k c/r$ a X'_0 , saliendo del rango observado prontamente. Las demás inestabilidades siguen el patrón ya conocido: son todas crecientes en una forma similar a fluidos aunque con tasas de crecimiento un poco menores, con la clara excepción de Beam 7 que es mucho más importante aquí y presente desde X'_0 bastante menores que los predichos por fluidos (compara con figura 3.33a. Esta es la única inestabilidad de todas las presentadas en donde los efectos cinéticos amplifican la inestabilidad en vez de amortiguarla.

3.5. Simulaciones Híbridas

Al igual que para el caso de una especie, aquí se mostrarán los resultados de simulaciones híbridas en algunos casos de interés, que servirán principalmente para validar unos cuantos resultados antes hallados referente a los efectos de variar la velocidad de drift. Estas simulaciones se han efectuado en el sistema de referencia del centro de masa, al igual que los cálculos analíticos previos. La función de distribución que se ha usado para inicializar las simulaciones es la discutida en el caso de una especie (2.106), con el correspondiente término adicional debido al beam:

$$\frac{f_0 V_A}{n_e} = \frac{\alpha}{\pi^{3/2}} \left\{ \frac{\eta_c}{\beta_c^{3/2}} \exp \left[-\frac{\alpha_c (v_x - U_{x,c}^s)^2 + \alpha_c (v_y - U_{y,c}^s)^2 + v_z^2}{\beta_c V_A^2} \right] + \frac{\eta_b}{\beta_b^{3/2}} \exp \left[-\frac{\alpha_b (v_x - U_{x,b}^s)^2 + \alpha_b (v_y - U_{y,b}^s)^2 + v_z^2}{\beta_b V_A^2} \right] \right\} \quad (3.75)$$

con

$$\frac{\vec{U}_j^s}{V_A} = \frac{\sqrt{A}}{Y_0} \zeta_{+,j}^s \{ \cos[Y_0(z\Omega_p/V_A) - X_0(t\Omega_p)] \hat{x} + \sin[Y_0(z\Omega_p/V_A) - X_0(t\Omega_p)] \hat{y} \} \quad (3.76)$$

además de

$$\alpha_j = 1 - (X_0 - Y_0(U_j/V_A)) \quad \text{y} \quad \zeta_{+,j}^s = \frac{X_0 - Y_0 U_j/V_A}{X_0 - Y_0 U_j/V_A - 1} \quad (3.77)$$

3.5.1. Caso amplitud nula

Al igual que para el caso de una especie 2.8, se mostrará primero los espectros de potencia de una simulación sin onda pump, para el caso de alta densidad $\eta_b = 0.15$ y velocidad de drift $U = 1.5$ (frecuentemente usado de ejemplo para las relaciones de dispersión analíticas)

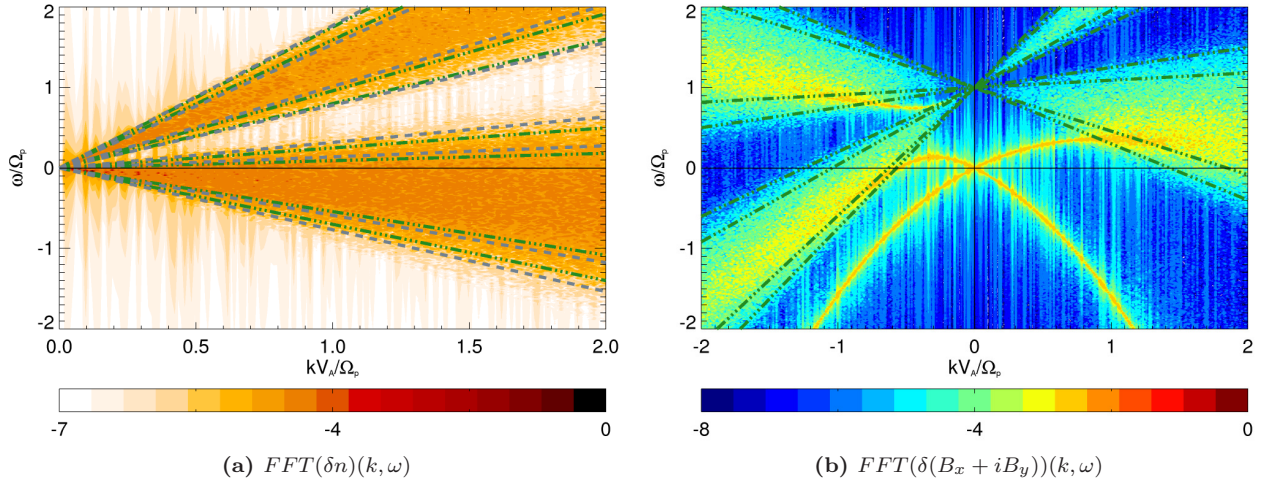


Figura 3.45: Espectros de potencias $\omega - k$ de fluctuaciones de densidad y campo magnético, sin onda pump ($A = 0$) y para los mismos parámetros físicos que la figura 3.34. Tiempo de simulación $T_{max}\Omega_p = 491.5$ y tamaño de paso $\Delta t\Omega_p = 0.03$. La explicación de líneas punteadas es la misma del caso de una especie 2.36, pero añadiendo las rectas asociadas al beam.

De acuerdo a la discusión del caso de una especie mencionado, la zona con mayor potencia espectral en la figura izquierda (espectro de densidad) representa los modos del sistema que pueden entrar en resonancia Landau 2.109 con los protones. Y al igual que en la figura 2.36a, se han sobrepuesto las rectas de resonancia (en líneas verdes) para partículas que están a dos y tres desviaciones estándar de la velocidad longitudinal media ($U_{z,j} \pm 2/3\sigma_j$) para la población del core ($j = c$) y el beam ($j = b$). Así, y tal como fue hallado en el caso de una especie, los modos acústicos analíticos menos amortiguados de la figura 3.34 (en líneas grises) estarán muy cerca de dichas rectas, afectando así a los protones que están en la "cola" de las funciones de distribución del core y el beam (ver figura 3.46).

En el espectro del campo magnéticos, la zona con mayor potencia reproduce el diagrama para la onda pump de Alfvén modificada por el beam 3.1d, con la salvedad que allí los modos aquí mostrados con $k > k_0$ aparecen

en los dos primeros cuadrantes, después de una rotación de 180° en torno al origen (ver explicación detallada en la discusión de dicha figura 3.6d). Sin embargo, la curva predicha teóricamente en el primer cuadrante, debida al beam y propagándose hacia adelante (recta azul superior en 3.1d), prácticamente no se observa aquí. También aparecen las rectas en líneas verdes que representan modos que pueden entrar en resonancia ciclotrónica con partículas de velocidad v_z apropiada, tanto con las de los protones del beam o del core (recordar discusión y comparar con el caso de una especie 2.36b). Para mostrar ello, se ha sobrepuesto (2.110) para las mismas cuatro velocidades v_z en la cola de las poblaciones del core y beam graficadas en el espectro de densidad. La ubicación de estas velocidades en la función de distribución se muestra en el siguiente diagrama, junto con la deformación de ésta última debido al beam:

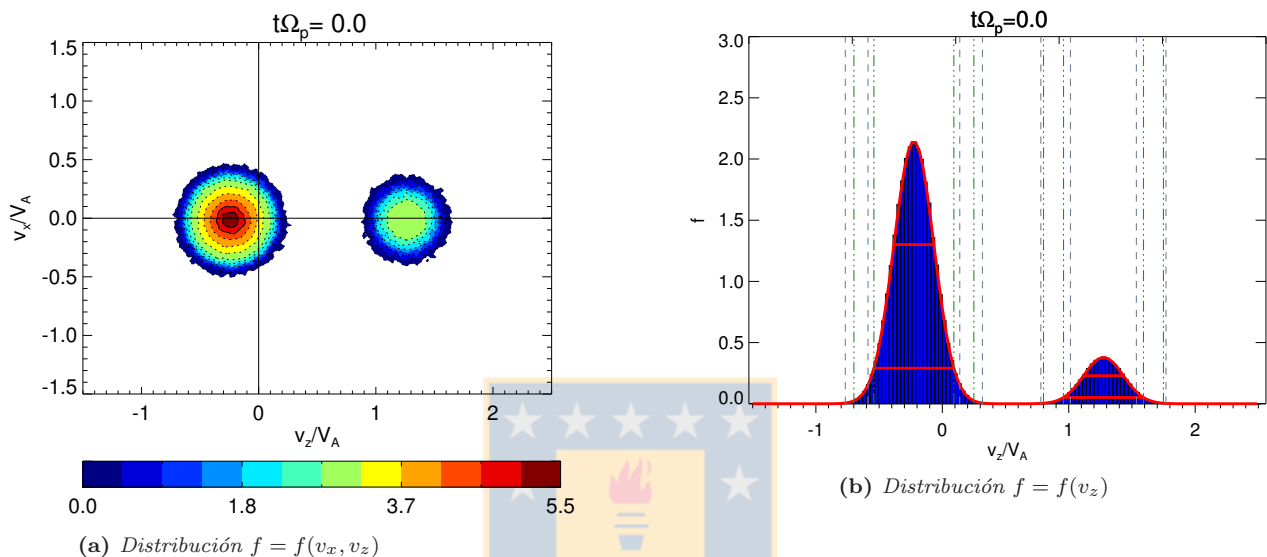


Figura 3.46: Distribución inicial ($t\Omega_p = 0$) de partículas en el espacio de velocidades para el caso $A = 0$ y con $\tilde{\beta}_c = \tilde{\beta}_b = 0.05$. Al igual que en el caso de una especie, las líneas verdes indican $v_z = U_{z,j} \pm 2\sigma_j, v_z = U_{z,j} \pm 3\sigma_j$, mientras que las grises, la velocidad de fase longitudinal correspondiente a cuatro pares de modos acústicos mostrados en 3.45a. Además, la curva roja representa la función de distribución (3.75) y las líneas rojas horizontales las abscisas a 1 y 2 desviaciones estándar, respectivamente. El core está en la izquierda y el beam a la derecha. El core no está centrado en $v_z = 0$ debido a que la simulación, al igual que el cálculo analítico, está en el sistema de referencia del centro de masa (recordar ec. (3.10)).

3.5.2. Caso estándar: Efectos de la velocidad de drift.

Ahora se mostrarán los resultados de simulaciones en donde se varía la velocidad de drift, de forma similar a lo desarrollado en la sección (3.4.3), para así poder validar los resultados allí obtenidos. La densidad del beam será alta $\eta_b = 0.15$, mientras que los parámetros beta se mantendrán constantes en $\beta_e^K = 0.1, \beta_c^K = \beta_b^K = 0.05$, como también la amplitud en $A = 0.3^2$ y $X'_0 = 0.35$.

Velocidades bajas

Ahora se analizarán los casos para la velocidad de drift $U = 0.5$ y $U = 1.0$, cuyas relaciones de dispersión analíticas según el modelo cinético-híbrido se muestran en las figuras 3.38. En primer lugar, los espectros de potencia con doble transformada de Fourier espacio-temporal son:

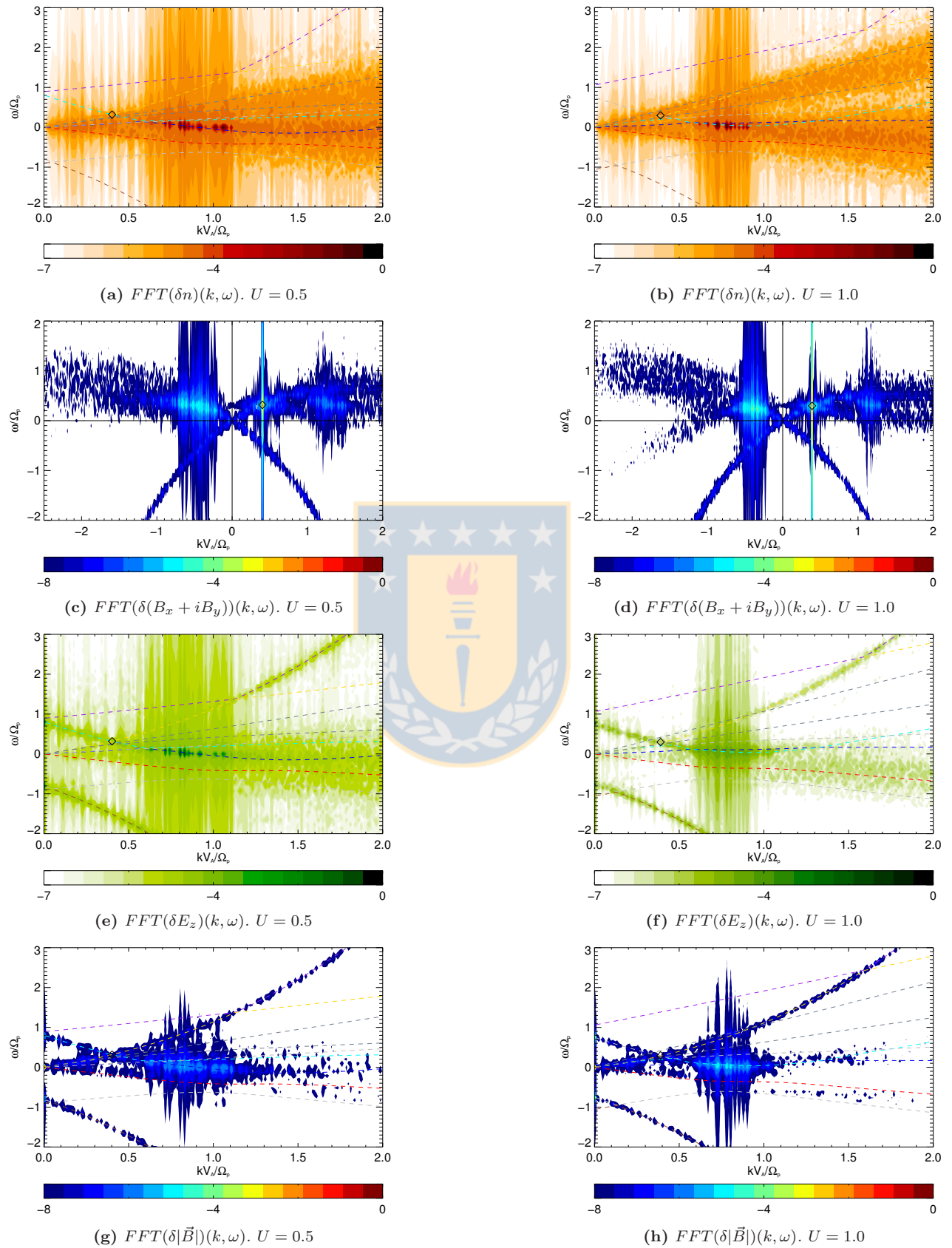


Figura 3.47: Espectros de potencias $\omega - k$ de fluctuaciones de densidad, campo magnético y eléctrico (i.e.: Doble transformada de Fourier en x y t) para los casos $U = 0.5$ (izquierda) y $U = 1.0$ (derecha). Mismos otros parámetros que 3.38, cuyas curvas de dispersión se han sobrepuesto.

En seguida se nota que en la zona de la inestabilidad decay está gran parte de la potencia espectral del sistema, precisamente en la rama $-b$ predicha por el modelo cinético-híbrido (i.e.: generando preferentemente ondas hacia atrás). Si bien las ramas $-f$ y $+b$ se corresponden muy bien con la figura analítica 3.38 para el espectro del campo magnético total y el campo eléctrico longitudinal, casi no hay potencia apreciable en la rama $+B$. Las otras ramas se corresponden relativamente bien con la teoría. Notar que las ramas acústicas del beam que aparecen en el espectro de densidad, están completamente ausentes en el espectro de E_z (a pesar que ambos campos se relacionan al ser longitudinales). Ahora, para poder identificar de mejor forma las zonas inestables en que aparecen las inestabilidades, además de caracterizar los tiempos en los cuales se desencadenan, se mostrará la evolución de la potencia espectral, de los mismos campos anteriores, en cada modo m :



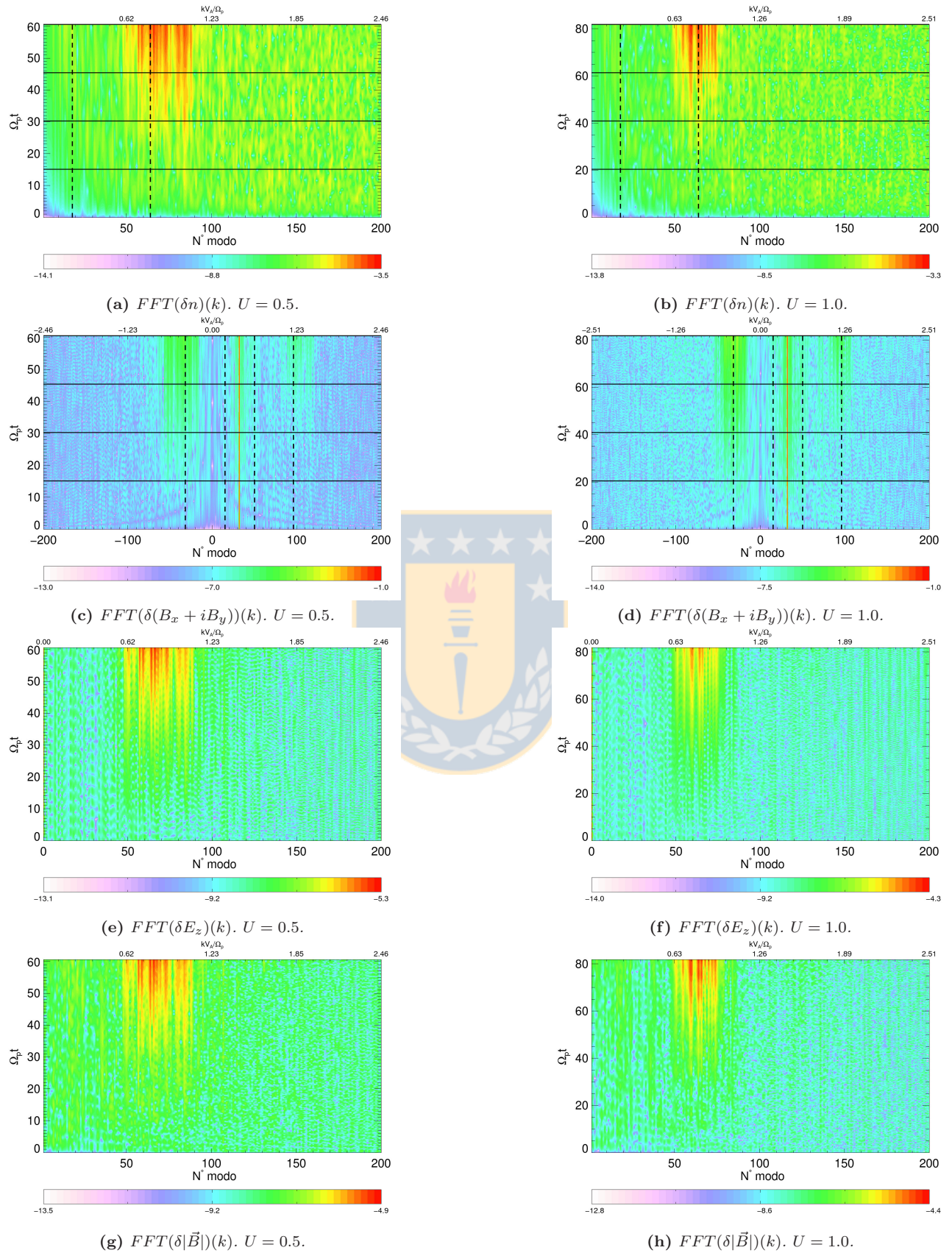


Figura 3.48: Evolución de la potencia espectral para las fluctuaciones de densidad, potencia y campo magnético (i.e. Transformada de Fourier sólo en x), en los casos $U = 0.5$ y $U = 1.0$. Mismos parámetros de la figura anterior. Mismas explicaciones que en el caso de una especie (2.40).

De los diagramas anteriores, se concluye que las inestabilidades surgen para tiempos (ligeramente) mayores conforme la velocidad de drift aumenta, al menos en este régimen de U relativamente bajos. En otras palabras, la onda pump es menos propensa a decaer paraméricamente vía inestabilidades, para $U \approx 1.0$ que para $U \approx 0.5$.

Por otra parte, al igual que para el caso de una especie, en líneas punteadas se han mostrado los modos más inestables para la densidad y campo magnético. Luego, la sección transversal de ellos, que representan cuatro tiempos característicos de la evolución de potencia espectral anterior, será:

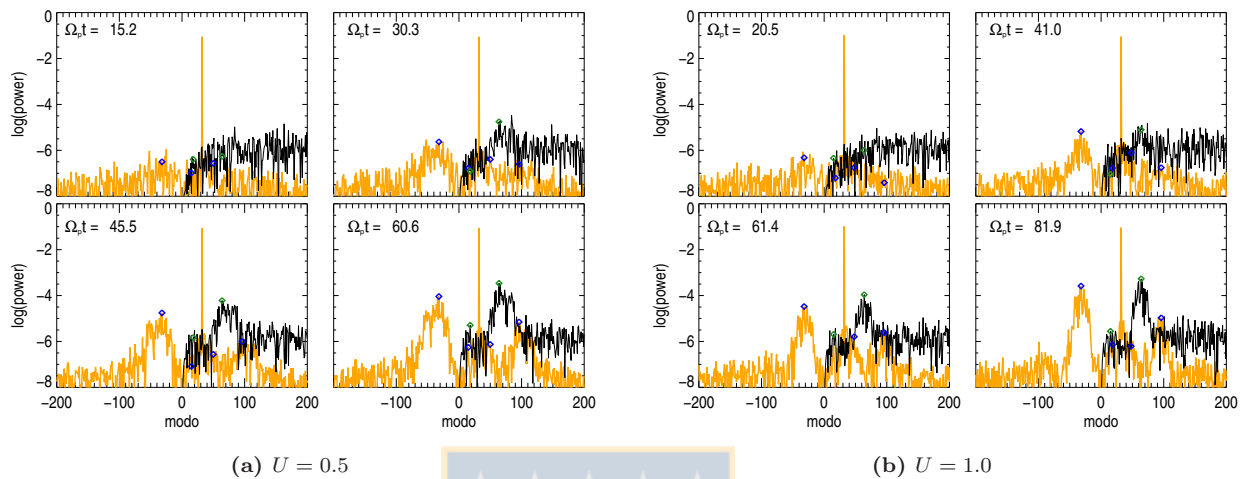


Figura 3.49: Espectros de potencia de densidad (negro) y densidad (naranja), para los tiempos $T_{max}/4$, $T_{max}/2$, $3T_{max}/4$ y T_{max} . Mismos parámetros anteriores, y mismas explicaciones que 2.41.

Además de la onda pump, ahora se puede identificar fácilmente las inestabilidades marcadas para cada caso, conformadas por fluctuaciones de densidad que producen bandas laterales en su decaimiento, de acuerdo a las reglas de selección (2.30) y (2.31). Con la misma notación que para el caso de una especie, notamos que el mismo tipo de inestabilidades se producen para ambos casos de velocidad mostrados, a saber:

- Modo de densidad: $m_d = +15$. Banda lateral inferior $m_b = m_0 - m_d = 17$ (-f) y superior $m_b = m_0 + m_d = 47$ (+f). Inestabilidad modulacional. Peak de densidad y del módulo de campo magnético, pero no del campo eléctrico longitudinal.
- Modo de densidad: $m_d = +64$. Banda lateral inferior $m_b = m_0 - m_d = -32$ (-b) y superior $m_b = m_0 + m_d = 64$ (+f). Inestabilidad decay. Peak para todos los campos involucrados. Genera preferentemente ondas L hacia atrás (-b).

En otras palabras, estas son las mismas inestabilidades que surgen en el caso de una especie. La usual beat no se distingue individualmente, debido a que decay es tan dominante que queda oculta dentro de su amplio rango inestable, de forma análoga para la simulación de una especie.

Finalmente, también se pueden encontrar las tasas de crecimientos lineales mediante el método explicado para el caso de una especie.

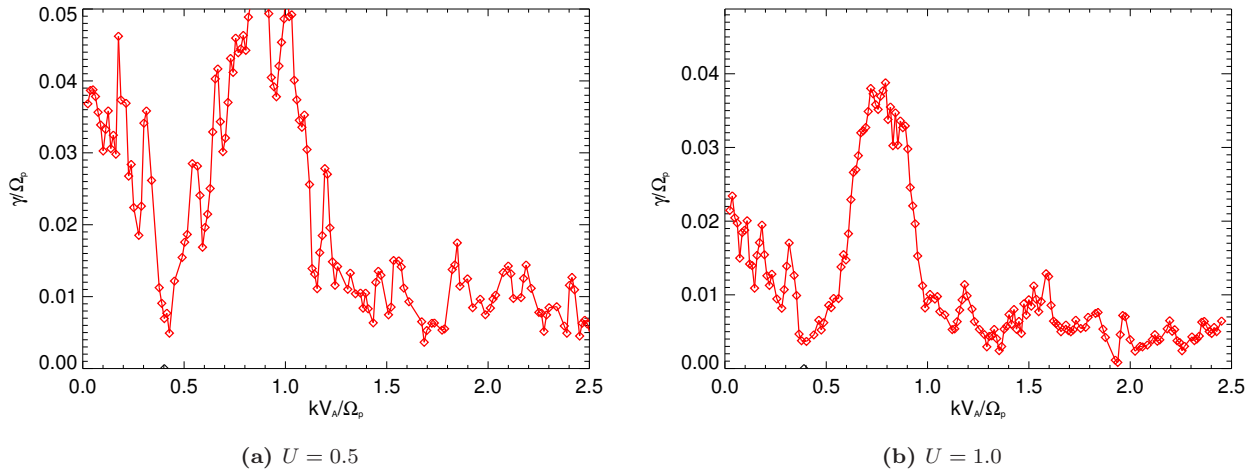


Figura 3.50: Tasas de crecimientos lineales $\gamma v/s k$ obtenidas del espectro de densidad.

Al comparar con los resultados numéricos analíticos 3.38, se nota un acuerdo general para el caso de $U = 1.0$, aunque la región inestable de decay es más restringida aquí, además de no notarse la inestabilidad beam 4. Por otra parte, para $U = 0.5$, sorprendentemente el sistema es más inestable que para el caso anterior de velocidad, con tasas de crecimiento bastante más altas que lo predicho por la teoría.

Velocidades altas

Ahora se analizarán los casos para la velocidad de drift $U = 1.5$ y $U = 2.0$, cuyas relaciones de dispersión analíticas según el modelo cinético-híbrido se muestran en las figuras 3.39. En primer lugar, los espectros de potencia con doble transformada de Fourier espacio-temporal son:

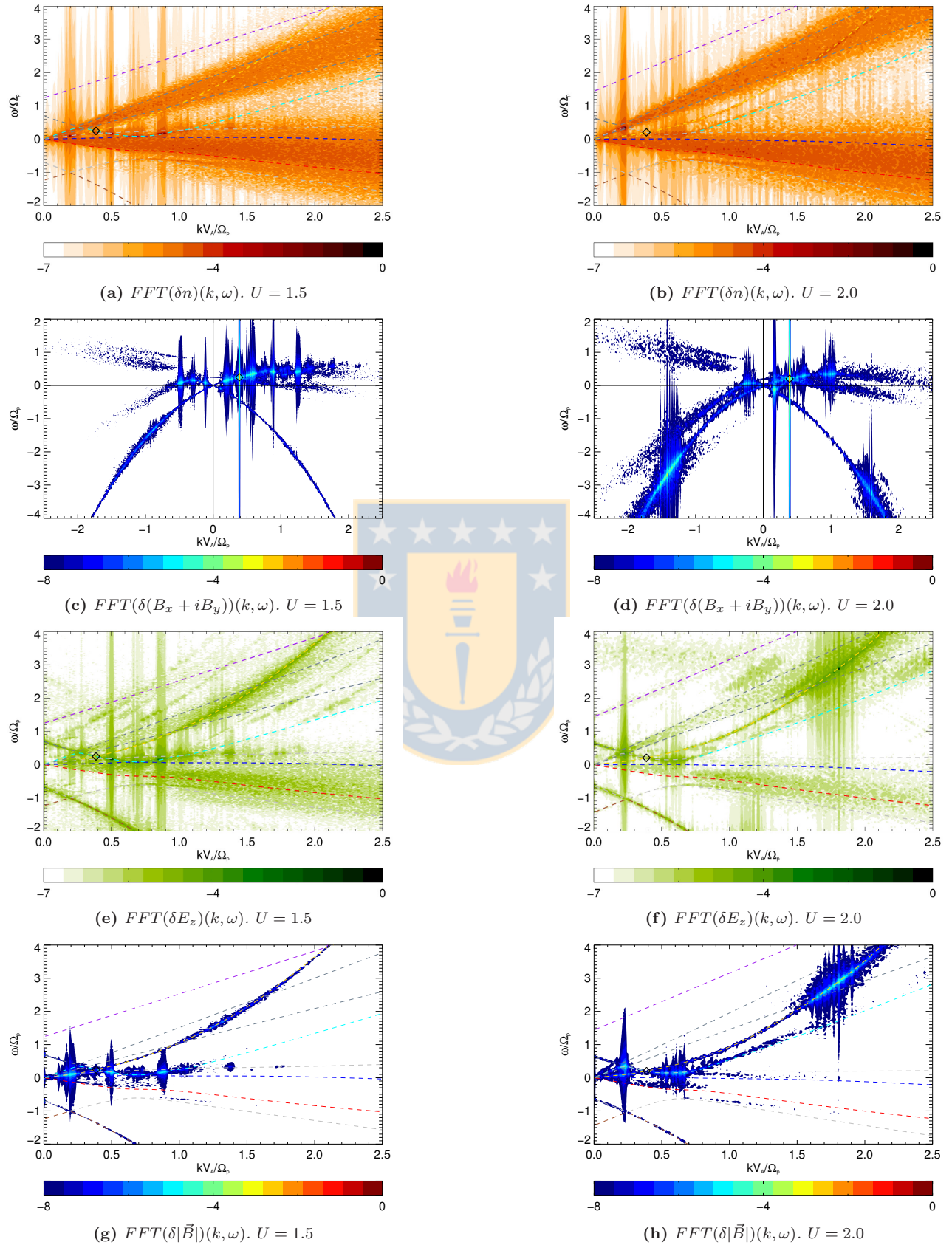


Figura 3.51: Espectros de potencias $\omega - k$ de fluctuaciones de densidad, campo magnético y eléctrico (i.e.: Doble transformada de Fourier en x y t) para los casos $U = 1.5$ (izquierda) y $U = 2.0$ (derecha). Mismos otros parámetros que 3.39, cuyas curvas de dispersión se han superpuesto.

Aquí se aprecian claramente cuatro inestabilidades (zonas con mayor potencia) bien acotadas y definidas en el espectro de densidad, correspondiendo precisamente a las intersecciones de los modos que predice la teoría de fluidos y cinética-híbrida. Para el caso de más alta velocidad, $U = 2.0$, hay clara predominancia de una inestabilidad para ω y k grandes, en la intersección de las ramas $-f$ con $-sB$ (identificada como Beam 5 según los resultados previos). La curva de beam $+B$ casi no se aprecia para el espectro de ningún campo, discrepando así de la predicción teórica de tasa de crecimiento nula, a diferencia de $-B$ que es notoria para las fluctuaciones de los campos eléctrico longitudinal y magnético transversal en la región inestable $k < 1.2$. Ahora, para poder identificar de mejor forma estas inestabilidades, además de caracterizar los tiempos en los cuales se desencadenan, se mostrará la evolución de la potencia espectral, de los mismos campos anteriores, en cada modo m :



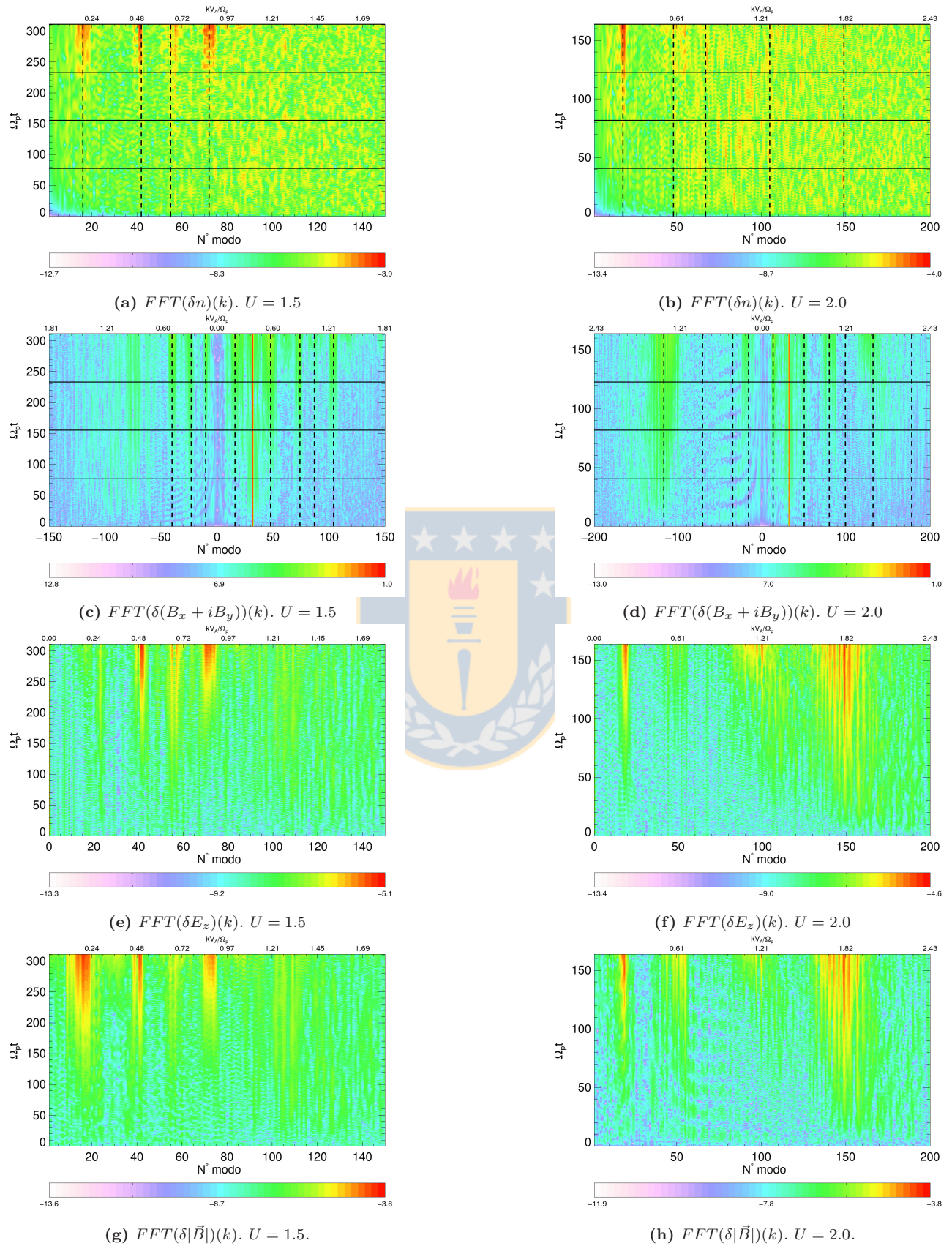


Figura 3.52: Evolución de la potencia espectral para las fluctuaciones de densidad, potencia y campo magnético (i.e. Transformada de Fourier sólo en x), en los casos $U = 1.5$ (izquierda) y $U = 2.0$ (derecha). Mismos parámetros de la figura anterior. Mismas explicaciones que en el caso de una especie (2.40).

Como podría ser esperable, las inestabilidades paramétricas se desencadenan para tiempos menores a mayor velocidad de drift, ya que el sistema es más inestable y pasa, por tanto, a la etapa turbulenta más pronto. Nótese también que todos los modos se vuelven inestables, en cada caso, aproximadamente al mismo tiempo. Por otra parte, y como ya es costumbre, en líneas punteadas se han mostrado los modos más inestables para la densidad y campo magnético. Luego, la sección transversal de ellos, para cuatro tiempos característicos de la potencia espectral anterior, será:

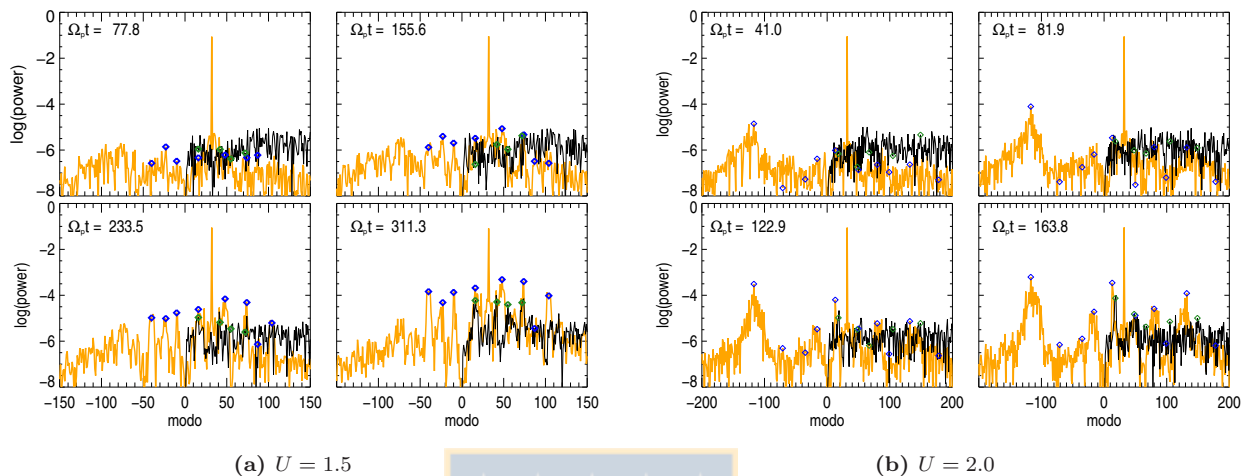


Figura 3.53: Espectros de potencia de densidad (negro) y densidad (naranja), para los tiempos $T_{max}/4$, $T_{max}/2$, $3T_{max}/4$ y T_{max} . Mismos parámetros anteriores, y mismas explicaciones que 2.41.

Además de la onda pump, ahora se puede identificar fácilmente las inestabilidades marcadas para cada caso, conformadas por fluctuaciones de densidad que producen bandas laterales en su decaimiento, de acuerdo a las reglas de selección (2.30) y (2.31). Con la misma notación que para el caso de una especie, para $U = 1.5$, éstas son:

- Modo de densidad: $m_d = +16$. Banda lateral inferior $m_b = m_0 - m_d = 16$ (-f) y superior $m_b = m_0 + m_d = 48$ (+f). Inestabilidad modulacional. Peak de densidad y del módulo de campo magnético, pero no del campo eléctrico longitudinal.
- Modo de densidad: $m_d = +42$. Banda lateral inferior $m_b = m_0 - m_d = -10$ (-b) y superior $m_b = m_0 + m_d = 83$ (+f). Inestabilidad beat. Peak para los tres campos representados (densidad, módulo de campo magnético y campo eléctrico longitudinal).
- Modo de densidad: $m_d = +55$. Banda lateral inferior $m_b = m_0 - m_d = -23$ (-b) y superior $m_b = m_0 + m_d = 87$ (+f). Inestabilidad decay. Peak para densidad y campo eléctrico longitudinal, siendo muy débil el módulo del campo magnético, y en general menos importante que beat.
- Modo de densidad: $m_d = +72$. Banda lateral inferior $m_b = m_0 - m_d = -40$ (-B) y superior $m_b = m_0 + m_d = 104$ (+f). Inestabilidad Beam 4. Peak para los tres campos representados, siendo la inestabilidad dominante junto con beam.

Las únicas inestabilidades que no se distinguen al comparar con la relación de dispersión cinética-híbrida 3.39a, son la Beam 5 y 6, aunque es razonable esperar eso debido a que la teoría predice bajas tasas de crecimiento según 3.39a. En cambio, para $U = 2.0$ se distinguen las siguientes inestabilidades y sus características:

- Modo de densidad: $m_d = +18$. Banda lateral inferior $m_b = m_0 - m_d = 14$ (-f) y superior $m_b = m_0 + m_d = 50$ (+f). Inestabilidad modulacional. Peak de densidad y del módulo de campo magnético, pero no del campo eléctrico longitudinal.
- Modo de densidad: $m_d = +48$. Banda lateral inferior $m_b = m_0 - m_d = -16$ (-b) y superior $m_b = m_0 + m_d = 80$ (+f). Inestabilidad beat. Peak para los tres campos representados (densidad, módulo de campo magnético y campo eléctrico longitudinal).

- Modo de densidad: $m_d = +67$. Banda lateral inferior $m_b = m_0 - m_d = -35$ (-b) y superior $m_b = m_0 + m_d = 99$ (+f). Inestabilidad Beam 4. Peak para densidad y campo eléctrico longitudinal, siendo muy débil el módulo del campo magnético, y en general más débil que beat.
- Modo de densidad: $m_d = +105, 149$. Banda lateral inferior $m_b = m_0 - m_d = -71, -117$ (-B) y superior $m_b = m_0 + m_d = 132, 181$ (+f). Inestabilidad Beam 5. Peak para los tres campos representados, siendo la inestabilidad dominante junto con beam. Genera predominantemente ondas desplazándose hacia atrás, con un amplio rango en k y ω , lo que explica la existencia de dos máximos bien distinguibles.

Finalmente, también se pueden encontrar las tasas de crecimientos lineales mediante el método antes explicado:

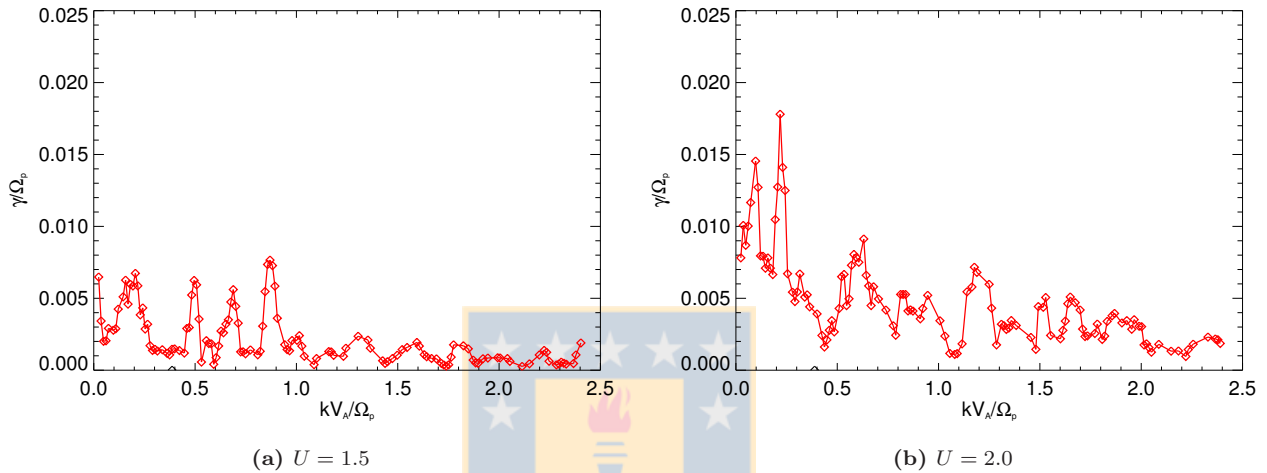


Figura 3.54: Tasas de crecimientos lineales γ v/s k obtenidas del espectro de densidad.

Al comparar con los resultados numéricos analíticos 3.39, se nota una reducción general en las tasas de crecimiento aquí obtenidas, debida probablemente a otros efectos cinéticos no considerados en el modelo (tal como resonancias ciclotrónicas). Además, para $U = 2.0$, existe una notoria tasa de crecimiento para $k < k_0$ (mayor que la predicha con el modelo cinético-híbrido), en la zona de la inestabilidad beam 4, aunque no sea distinguible fácilmente en los gráficos de espectros anteriores.

3.6. Resumen y discusión de resultados

Ahora se recapitularán y sintetizarán los resultados más relevantes obtenidos en este capítulo, estableciendo una apropiada comparación entre el modelo de fluidos, el cinético-híbrido, y también con el plasma de una especie. Algunos de estos resultados ya han sido identificados en la literatura, pero prioritariamente con el modelo de fluidos (ver [Jayanti and Hollweg, 1994] y [Gomberoff et al., 2002]). En primer lugar, se resumirán las inestabilidades halladas:

Nombre	Ramas inestables en fluidos	Rama inestable cinéticamente	Comentario
Beam 1	+sB y -b	No hay	sólo deformación de decay
Beam 2	+sB y -f	No hay	No obs.
Beam 3	-B con +s	-B (Res. Beam)	Tipo decay
Beam 4	-B con +f	-B (Res. Beam)	Tipo beat
Beam 5	-sB con -f	-f	En fluidos, misma $v_{\phi, max}$ que Beam 6. Para $k > k_0$ y de gran rango en k .
Beam 6	-sB con -b	-b	En fluidos, misma $v_{\phi, max}$ que Beam 5. Para $k < k_0$ y de estrecho rango en k .
Beam 7	-f con +b	-b	Es beat, pero en res. beam

Tabla 3.1: *Inestabilidades paramétricas asociadas al beam*

Ahora se mostrarán las principales consecuencias en las inestabilidades del beam (y, lateralmente, también de las de una especie) al cambiar cada uno de los parámetros de los cuales dependen las relaciones de dispersión estudiadas, enfatizando las diferencias entre el modelo de fluidos y el cinético. Estas conclusiones se establecen para variaciones en torno a los parámetros del caso estándar de la figura 3.11.

3.6.1. Parámetros del beam

Velocidad de drift U

- En el modelo de fluidos, las (en general) débiles inestabilidades beam 1 y 2 se generan debido a la mera presencia del beam. El aumento de U las debilita, haciéndolas desaparecer. En el modelo cinético-híbrido, ellas no se logran distinguir separadamente, sino sólo como ligeras deformaciones en las inestabilidades de una especie.
- Beam 3 y 4 surgen intrínsecamente debido a la velocidad de drift del beam, para U intermedios. Ambas se producen en las cercanías de la resonancia beam (en la rama $-B$). Al aumentar U , el γ_{max} de Beam 3 es creciente y eventualmente se fusiona con decay, mientras que Beam 4 es casi constante fusionándose con beat, aunque para velocidades mucho mayores (notar también que es la única inestabilidad-beam esencialmente electromagnética, en el sentido de no involucrar ondas acústicas). Beam 4 es fuertemente afectado por efectos cinéticos en el sentido de cambiar su tendencia a γ_{max} creciente con U , pero partiendo muy débil para U bajos. Beam 3 es afectada por el amortiguamiento Landau estando siempre fusionada con beat, formando una ancha inestabilidad, aunque con un máximo distinguible.
- Para velocidades de drift mayores, surge el par de inestabilidades beam 5 y 6 generados por la misma rama acústica debida al beam $-sB$, con un pronunciado crecimiento con respecto a U . Beam 5 siempre es más importante (mayores γ_{max} y rangos en k) que Beam 6 en fluidos, pero el amortiguamiento cinético lo afecta más que cualquier otra inestabilidad del beam, de modo que tal afirmación cambia de sentido en este modelo.
- La inestabilidad de una especie más afectada por el beam es Decay. La principal razón es que desaparece para un U lo suficientemente alto (dicho umbral de supresión será menor para un beam más denso). En segundo lugar, sus γ_{max} aumentan al atravesar, en el espacio ω_r v/s k , la rama $-sB$.

- Las inestabilidades beam acústicas que existen en estrechos rangos de U 's intermedios, son estabilizadas totalmente por efectos cinéticos.

Densidad del beam η_b

- Decay es la inestabilidad más afectada por el cambio en la densidad del beam, en el sentido de exhibir umbrales de supresión para un cierto η_b (que será menor para mayores U). Ello se debe, probablemente, a que se produce en la zona del "gap" cuya apertura es proporcional a η y cercana a la resonancia beam.
- Las inestabilidades del Beam 4, 5 y 6. no siempre crecen al aumentar η_b , sino que tiene densidades críticas de saturación tras las cuales decrecen
- Los efectos cinéticos no tienen consecuencias adicionales a las ya mencionadas para el comportamiento de las inestabilidades frente al cambio de η_b .

Beta del beam β_b

- En modelo de fluidos, las inestabilidades Beam 1 y 2 tienen umbrales de supresión en β_b , que disminuyen a medida que U crece.
- Beam 3 no cambia mucho sus γ_{max} en todo su rango de existencia hasta su fusión con decay.
- Beam 4 crece rápidamente con β_b para U bajos, pero tendiendo a suavizarse para velocidades mayores y llegando hasta la constancia para un U lo suficientemente alto. Los efectos cinéticos afectan notablemente esta tendencia, haciéndola decreciente c/r a β_b .
- Beam 5 y 6 son más importantes con un beam frío, esto es, su γ_{max} es decreciente con β_b , hasta que para un cierto beta del beam umbral desaparecen (el que será mayor para U grandes). Nuevamente, Beam 5 es la más afectada por efectos cinéticos, siendo incluso más débil que Beam 6. Es la única inestabilidad cuyo máximo se desplaza a k (menores) conforme crece β_b .
- De nuevo, Decay es la inestabilidad más afectada por el cambio en el beta del beam, debido a que se debilita cuando la rama $-sB$ pasa a estar arriba de ella en el plano ω_r v/s k .
- El modelo de fluidos predice inestabilidades dominantes para β_b altos que están lo suficientemente amortiguadas con el modelo cinético como para cambiarlas radicalmente. Esto es particularmente relevante para Beam 4 y 5.

3.6.2. Parámetro de una especie

Amplitud de la pump A

- Las características de las inestabilidades modulacional y beat, en particular sus conocidos umbrales de supresión en A , se ven mínimamente afectadas por la presencia del beam, aún para velocidades de drift y densidades altas. Dado que los efectos cinéticos no son muy grandes, éstos umbrales no están muy "difuminados".
- Todas las inestabilidades asociadas al beam son, simplemente, monótonamente crecientes con respecto a la amplitud A . Para un U dado, el incremento de A no produce más inestabilidades asociadas al beam que las presentes en el límite de bajas amplitudes, tal como ha sido mencionado en la literatura previa (ver, por ej, [Nariyuki et al., 2009]).
- A pesar de la poca importancia relativa de los efectos cinéticos, éstos disminuyen fuertemente las inestabilidades Beam 4 en el rango intermedio de U y a beam 5 en el rango alto de U , en circunstancias que en fluidos ellas serían las dominantes en sus respectivos zonas (en el modelo cinético, las inestabilidades dominantes pasan a ser decay y beam 4, respectivamente).

Beta del core y electrones $\beta_{c,e}$

Aquí se debe notar, para efectos de comparación, que el aumento de β_e induce un comportamiento predominante de fluidos, mientras que el incremento de β_c hará más notorios los efectos cinéticos.

- En modelo de fluidos y para velocidades U bajas, la inestabilidad Beam 1 es decreciente con respecto a β_c pero creciente con β_e .
- En modelo de fluidos, los umbrales de supresión característicos en beta del caso de una especie para las inestabilidades modulacional y beat, prácticamente no distinguen entre el aporte de electrones o protones (son iguales), siendo un indicio de que dependen sólo de su suma total. Además, dichos umbrales de supresión son mínimamente afectados al variar la velocidad U . Estas conclusiones se mantienen con efectos cinéticos.
- Los γ_{max} de Beam 3 tiene la misma tendencia decreciente que decay con respecto a la variación de tanto β_e como β_c .
- Si bien en fluidos Beam 4 es creciente con respecto a β_c y β_e , los efectos cinéticos inducen el comportamiento precisamente contrario, al tornarla decreciente con respecto a β_c . Siempre que ella esté presente, será la dominante en modelo de fluidos, pero no en cinético. Por otro lado, ella es la única inestabilidad que se desplaza significativamente (hacia k mayores) debido al incremento de β_e ó β_c (aunque no en el último caso con el modelo cinético-híbrido).
- En fluidos, las inestabilidades Beam 5 y 6 son invariantes frente al cambio de β_c . Si bien los efectos cinéticos no afectan mucho a Beam 6, sí lo hacen con Beam 5, pues la hacen desaparecer para un cierto β_c umbral, el que será mayor para velocidades de drift más grandes.
En cambio, Beam 5 es creciente con respecto a β_e y Beam 6 decreciente con respecto a ese mismo parámetro, tanto en modelo de fluidos como cinético. Notar que estas son las únicas inestabilidades que distinguen entre beta's de electrones y protones en modelos de fluidos. A pesar de la poca importancia de efectos cinéticos al aumentar β_e , beam 5 sigue siendo la más afectada por la fuerte reducción de sus γ_{max} .
- En general, el aumento de β_c y con él del amortiguamiento Landau, tiende a suprimir todas las inestabilidades desarrolladas (en particular las del beam), en tendencia contraria al aumento de la velocidad de drift U que las hace más fuertes. La menos afectada es la Beam 6, manteniendo notablemente una tendencia casi constante frente al incremento del beta del core.
- Las inestabilidades beam acústicas se producen en un estrecho rango de β_c . Conforme crece U , el punto en el que se desencadenan se desplaza a β_c mayores. En cambio, ellas existen para todo β_e más grande que un valor crítico, cuyo valor se desplaza a β_e mayores conforme crece U . Consecuentemente, para valores de velocidad U intermedios, el plasma protón-protón se encuentra dominado por estas inestabilidades no-paramétricas cuando los electrones están lo suficientemente calientes. Dado que para β_e grandes el comportamiento es netamente de fluidos, incluso el modelo cinético-híbrido predice este tipo de inestabilidades en estas situaciones.

Frecuencia de la pump X_0

- Todas las inestabilidades Beam son crecientes con respecto a la frecuencia X_0 , tendiendo a fusionarse con alguna de las inestabilidades de una especie a medida que ella aumenta (específicamente, con beat y decay). Consecuentemente, a menor frecuencia de la pump, existirán más tipos de inestabilidades distintas.
- Al igual que para las variaciones de otros parámetros, aquí se reafirma lo ya identificado varias veces: Beam 4 y 5 son las más fuertemente amortiguadas por efectos cinéticos.
- Las inestabilidades de una especie beat y modulacional tienen una tendencia creciente para sus γ_{max} (c/r a X_0) cada vez más marcada para U mayores.
- El umbral de la inestabilidad Decay (que es después de su fusión con beam 3) para la cual se suprime, se desplaza a X'_0 menores conforme U aumenta. Ello no cambia al incluir efectos cinéticos.

- La inestabilidad Beam 7, que se presenta para frecuencias grandes en el modelo de fluido, posee una velocidad de fase negativa y se ubica contigua a la resonancia del beam, tiene un comportamiento radicalmente diferente en relación al amortiguamiento Landau: Es la única inestabilidad que los efectos cinéticos la amplifican en vez de amortiguarla (...?).



Capítulo 4

Relación de dispersión cinética: Intento y problemas

En este capítulo se adaptará el método desarrollado en el paper [Matsuda, 1986], usado originalmente para derivar una relación de dispersión completamente cinética en plasmas de altas frecuencias, para el caso aquí analizado de ondas de Alfvén ión-ciclotrón en el rango de frecuencias $\omega \sim \Omega_p$. Será completamente cinética en el sentido de incluir tanto el usual amortiguamiento Landau, en la dirección longitudinal al campo magnético, como el amortiguamiento ciclotrónico en la dirección transversal a él. Las condiciones del plasma electrón-protón son las mismas que fueron usadas para el caso de fluidos (ver sección 1.5.2) y cinético-híbrido (sección 2.6), enfatizando el hecho que los protones se considerarán cinéticamente mientras que los electrones sin masa obedecerán las conocidas ecuaciones de fluido.

4.1. Estado de equilibrio del plasma (orden 0)

Para efectuar la posterior linealización, se debe encontrar el estado de equilibrio a orden 0, caracterizado por el movimiento de los protones en el campo de la onda pump de propagación paralela al campo magnético estático. Con este objetivo, se determinarán tanto las trayectorias que siguen estas partículas, como la función de distribución que satisfacen.

4.1.1. Trayectorias no perturbadas

Una caracterización útil del plasma a orden 0 consiste en determinar las ecuaciones de movimiento de una partícula de prueba (protón) en el estado de equilibrio, esto es, bajo la fuerza de Lorentz debida al campo magnético estático de fondo además de los campos de la onda pump (1.66) y (1.77):

$$\frac{d\vec{v}'}{dt'} = \frac{e}{m_p} \left(\vec{E}_0 + \vec{v}' \times (\vec{B}_s + \vec{B}_0) \right) \quad (4.1)$$

$$\frac{d\vec{x}'}{dt'} = \vec{v}' \quad (4.2)$$

en donde las trayectorias a determinar $\vec{v}'(t')$ y $\vec{x}'(t')$ poseen como condiciones iniciales:

$$\vec{v}'(t' = t) = \vec{v}, \quad \vec{x}'(t' = t) = \vec{x} \quad (4.3)$$

Nótese que estas ecuaciones de movimiento están escritas en el sistema de referencia del campo magnético estático B_s . Separando en componentes la ecuación para la velocidad (4.1) y expresando el campo eléctrico en

función del magnético mediante (1.79), se tendrá explícitamente:

$$\frac{dv'_x}{dt'} = \Omega_p v'_y + \frac{eB_0}{m_p k_0} (\omega_0 - k_0 v'_z) \text{sen}(k_0 z' - \omega_0 t') \quad (4.4)$$

$$\frac{dv'_y}{dt'} = -\Omega_p v'_x - \frac{eB_0}{m_p k_0} (\omega_0 - k_0 v'_z) \text{cos}(k_0 z' - \omega_0 t') \quad (4.5)$$

$$\frac{dv'_z}{dt'} = \frac{eB_0}{m_p} [v'_x \text{sen}(k_0 z' - \omega_0 t') - v'_y \text{cos}(k_0 z' - \omega_0 t')] \quad (4.6)$$

Este sistema de ecuaciones en \vec{v}' es no lineal y sus soluciones exactas, si bien son conocidas, son muy poco manipulables debido a su complejidad. Es por ello que aquí se usará la aproximación usada en el paper de Matsuda antes mencionado, que consiste en suponer la componente z de la velocidad (4.6) como una constante, es decir:

$$\frac{dv'_z}{dt'} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad v'_z = v_z = \text{cte} \quad (4.7)$$

Esto permite integrar directamente la componente anterior entre $t' = t$ a $t' = t'$, con lo cual:

$$z' = z + v_z \tau \quad (4.8)$$

en donde se ha definido convenientemente la nueva variable temporal desplazada que permite redefinir en $\tau = 0$ las condiciones iniciales anteriores:

$$\tau = t' - t \quad \Rightarrow \quad \vec{v}'(\tau = 0) = \vec{v}, \quad \vec{x}'(\tau = 0) = \vec{x} \quad (4.9)$$

La simplificación lograda con este procedimiento es notable: los argumentos de las funciones trigonométricas ya no dependen de la incógnita del sistema de ecuaciones z' , sino que sólo de la variable independiente τ a través de:

$$\phi'_0 = k_0 z' - \omega_0 t' = \phi_0 + (k_0 v_z - \omega_0) \tau \quad (4.10)$$

en donde se han usado las abreviaciones

$$\phi'_0 = k_0 z' - \omega_0 t' \quad (4.11)$$

$$\phi_0 = k_0 z - \omega_0 t \quad (4.12)$$

Con ello, las soluciones para v'_x y v'_y se obtienen a partir del siguiente sistema de dos ecuaciones lineales no homogéneas:

$$\frac{dv'_x}{d\tau} = \Omega_p v'_y + \frac{\Omega_p B_0}{k_0 B_s} (\omega_0 - k_0 v_z) \text{sen} \phi'_0 \quad (4.13)$$

$$\frac{dv'_y}{d\tau} = -\Omega_p v'_x - \frac{\Omega_p B_0}{k_0 B_s} (\omega_0 - k_0 v_z) \text{cos} \phi'_0 \quad (4.14)$$

La solución de la parte homogénea del sistema evidentemente da lugar al conocido movimiento ciclotrónico, mientras que la solución particular se puede hallar, por ejemplo, a través del método de variación de parámetros. Imponiendo también las condiciones iniciales, definiendo las constantes dependientes de ellas:

$$\begin{aligned} V_x &= v_x - \frac{\Omega_p B_0}{k_0 B_s} \zeta_+ \text{cos} \phi_0 \\ V_y &= v_y - \frac{\Omega_p B_0}{k_0 B_s} \zeta_+ \text{sen} \phi_0, \end{aligned} \quad (4.15)$$

además de la constante:

$$\zeta_+ = \frac{\left(1 - \frac{k_0 v_z}{\omega_0}\right)}{1 - \frac{\Omega_p}{\omega_0} - \frac{k_0 v_z}{\omega_0}} = 1 - \frac{\Omega_p/k_0}{v_z - \frac{\omega_0 - \Omega_p}{k_0}}, \quad (4.16)$$

(Notar el reemplazo de U_z por v_z con respecto a la constante ζ_+^S de la solución de Sonnerup (1.132)) se pueden hallar fácilmente las soluciones para las velocidades

$$v'_x(\tau) = V_x \cos(\Omega_p \tau) + V_y \sin(\Omega_p \tau) + \frac{\Omega_p B_0}{k_0 B_s} \zeta_+ \cos \phi'_0 \quad (4.17)$$

$$v'_y(\tau) = -V_x \sin(\Omega_p \tau) + V_y \cos(\Omega_p \tau) + \frac{\Omega_p B_0}{k_0 B_s} \zeta_+ \sin \phi'_0 \quad (4.18)$$

e integrando, también las soluciones para componentes x e y de las ecuaciones de movimiento (4.2):

$$x'(\tau) = x + \frac{V_x}{\Omega_p} \sin(\Omega_p \tau) + \frac{V_y}{\Omega_p} (1 - \cos(\Omega_p \tau)) + \frac{\Omega_p B_0}{k_0 B_s} \frac{\zeta_+}{k_0 v_z - \omega_0} (\sin \phi'_0 - \sin \phi_0) \quad (4.19)$$

$$y'(\tau) = y - \frac{V_x}{\Omega_p} (1 - \cos(\Omega_p \tau)) + \frac{V_y}{\Omega_p} \sin(\Omega_p \tau) - \frac{\Omega_p B_0}{k_0 B_s} \frac{\zeta_+}{k_0 v_z - \omega_0} (\cos \phi'_0 - \cos \phi_0) \quad (4.20)$$

Soluciones numéricas y validez de la aproximación

¿Qué tan buenas son las aproximaciones de las soluciones de las trayectorias no perturbadas halladas en (4.17) y (4.18), con respecto a las soluciones exactas del sistema de ecuaciones diferenciales 4.4-(4.6)?

- *Caso estándar:*

Para responder lo anterior, se mostrarán los siguientes diagramas donde se compara la solución exacta (obtenida con el clásico esquema Runge-Kutta de 4° orden) con la aproximada antes mencionada, en el mismo rango de los parámetros usados para el caso estándar de la relación de dispersión analizado con los tres modelos (fluido: 2.6, cinético-híbrido: 2.25, cinético: 4.10).

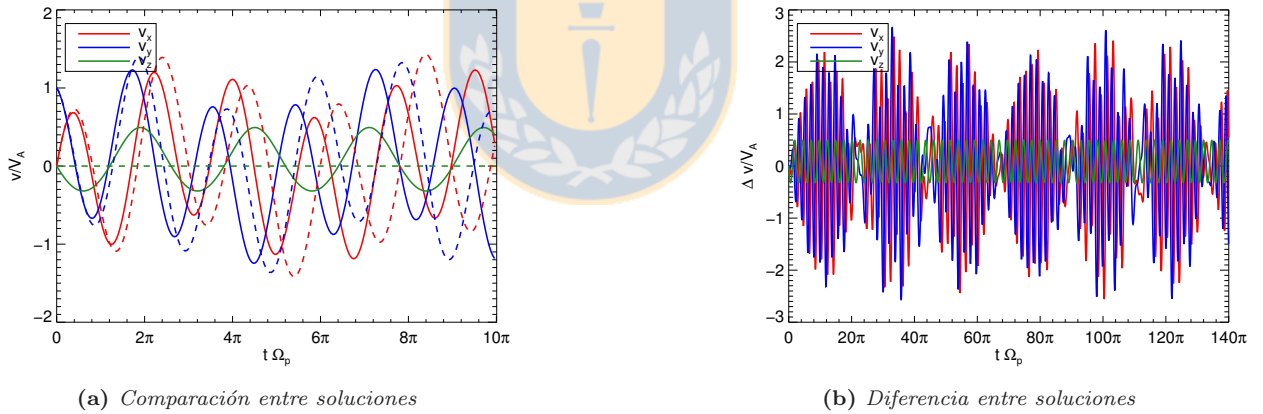


Figura 4.1: Izquierda: Comparación de las soluciones exactas (líneas continuas) y aproximadas (líneas discontinuas) para cada componente de velocidad \vec{v} de un protón en el campo no perturbado, en función del tiempo. Derecha: Diferencia $\Delta \vec{v}$ entre soluciones exactas y aproximadas, para un rango de giroperiodos mucho mayor que en la figura izquierda. Parámetros: $X_0 = 0.35$. $Y_0 = 0.434$. $A = 0.3^2$. Condiciones iniciales: $(v_x, v_y, v_z) = (0, 1, 0)$. Notar que en las unidades normalizadas usadas, el giroperiodo es $t\Omega_p = 2\pi$.

La concordancia entre la solución exacta y aproximada para las componentes transversales de la velocidad es buena para tiempos muy pequeños, aunque la discrepancia entre ambas va aumentando rápidamente para tiempos más grandes, lo que se representa muy bien en el diagrama derecho. Aquí notamos que la diferencia entre las soluciones llega a un máximo hacia 5 giroperiodos ($10\pi/\Omega_p$), para después volver a la situación inicial (soluciones exactas y aproximadas casi en fase) hacia $t\Omega_p = 20\pi$. Este patrón modulacional, debido a la perturbación del movimiento ciclotrónico por la onda pump, se repite periódicamente. También aquí se puede verificar (aunque a posteriori), la validez de la aproximación usada para obtener analíticamente la solución de la componente v_z según (4.7): su valor constante (líneas punteadas en verde) es precisamente la recta en torno al cual oscila sinusoidalmente la solución exacta, con una amplitud igual

a la mitad de la correspondiente a las componentes transversales, y no manifestando un cambio apreciable incluso después de muchos giroperiodos (ver comparación en la figura derecha).

Por completitud, y de forma similar a lo anterior, se pueden encontrar las soluciones para la trayectoria de los protones:

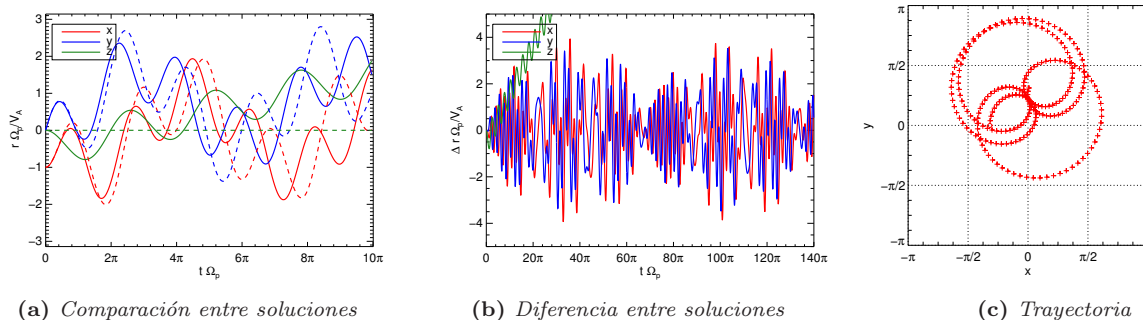


Figura 4.2: Izquierda: Comparación entre soluciones exactas (líneas continuas) y aproximadas (líneas discontinuas) para cada componente de la trayectoria \vec{r} de un protón en el campo no perturbado, en función del tiempo. Centro: Diferencia $\Delta\vec{r}$ entre soluciones exactas y aproximadas, para un rango de giroperiodos mucho mayor que en la figura izquierda. Derecha: Trayectoria en el espacio real para solución aproximada. Mismos parámetros anteriores. Condiciones iniciales: $(x, y, z) = (-1, 0, 0)$

Un comportamiento análogo al observado para las componentes de la velocidad se manifiesta aquí también. La componente z de la trayectoria oscila sinusoidalmente, a la vez que crece linealmente.

- *Efectos de la amplitud de la pump*

Obviamente, a menores amplitudes A de la onda pump, la discrepancia entre las soluciones exactas y aproximadas disminuirá, debido a que la distorsión de las trayectorias ciclotrónicas por la pump será menor, aproximándose mejor a las curvas sinusoidales exactas del caso límite $A = 0$. En particular, la curva exacta de v_z mostrará el mismo comportamiento sinusoidal 4.1a, pero de una amplitud cada vez menor, por lo que la aproximación constante será cada vez mejor. Por ej, para $A = 0.1^2$:

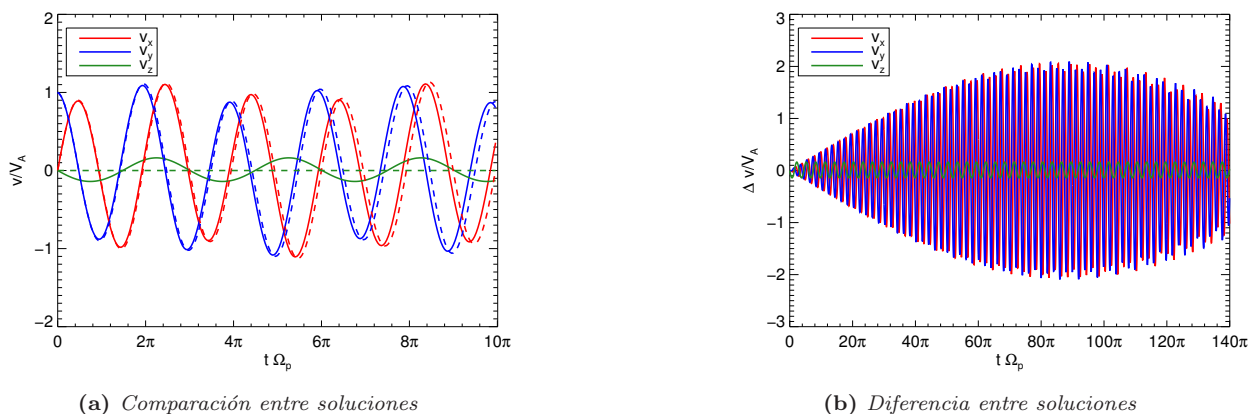


Figura 4.3: Comparación entre soluciones exactas y aproximadas para la velocidad. Mismas explicaciones y parámetros que en la figura 4.1, excepto por la amplitud de la pump disminuida a $A = 0.1^2$

Nótese que las curvas de diferencia entre soluciones exactas y aproximadas también presentan el mismo patrón modulacional antes hallado, pero con un periodo mucho mayor, indicando así que la distorsión periódica inducida por la onda pump tomará mayor tiempo en volver a estar en fase con las soluciones aproximadas.

- *Efectos de la frecuencia de la pump*

Al aumentar la frecuencia de la onda pump ω_0 , los efectos dispersivos aumentan al encontrarse cada vez más cerca de la resonancia en $X_0 = 1$. Esto tiene como consecuencia una distorsión y desfase mayor entre las curvas de velocidad aproximadas y exactas. Para poder apreciar este efecto mejor, se aumentará X_0 para el caso de baja amplitud $A = 0.1^2$ de 4.3:

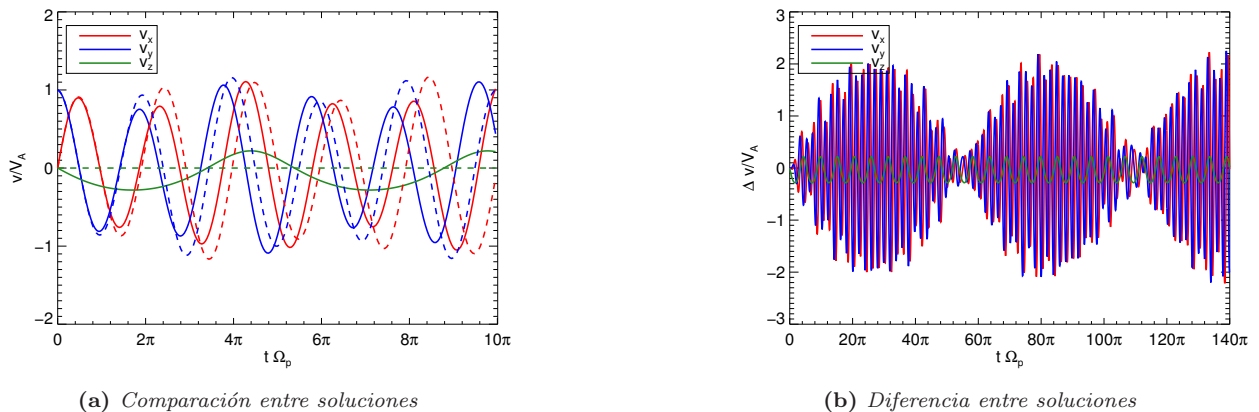


Figura 4.4: Comparación entre soluciones exactas y aproximadas para la velocidad. Mismas explicaciones y parámetros que en la figura 4.3 (con $A = 0.1^2$), excepto por la frecuencia de la pump incrementada a $X_0 = 0.6$

El patrón modulacional de diferencia entre soluciones exacta y aproximadas presenta un periodo menor al caso de baja frecuencia de pump 4.3, indicando la esperada indicando mayor distorsión y desfase inducido por la pump. En particular, nótese además que la amplitud de la oscilación de v_z es mucho más grande que 4.1, siendo por tanto peor la aproximación usada para valores grandes de ω_0 .

Notar también que, en todos estos casos, la máxima variación entre soluciones exactas y aproximadas es ligeramente mayor a ± 2 , no cambiando significativamente bajo variación de ninguno de los parámetros analizados.

- *Efectos de la condición inicial $v_z(t = 0)$: Resonancia ciclotrónica*

El caso analizado es muy particular por la elección de condiciones iniciales. En particular, dado que la función de distribución escogida es de naturaleza maxwelliana (4.44) en la componente v_z (lo mismo para la de Sonnerup (1.134)), se tendrá que es mucho más probable encontrar partículas con velocidad en torno a $v_z = 0$, por lo que la mayor parte del plasma responderá de un modo similar al mostrado. Sin embargo, cabe destacar que cerca del punto en que una partícula experimenta resonancia ciclotrónica (recordar (1.56) y sección 1.3.3), dada en este caso por $v_z = (\omega_0 - \Omega_p)/k_0 = -1.4972$, la trayectoria será violentamente alterada por el fuerte intercambio de energía onda-partícula (ver [Liemohn and Duane, 1976]). Por ejemplo, sea el siguiente caso en que $v_z(t = 0)$ se escoge en las cercanías de esta resonancia:

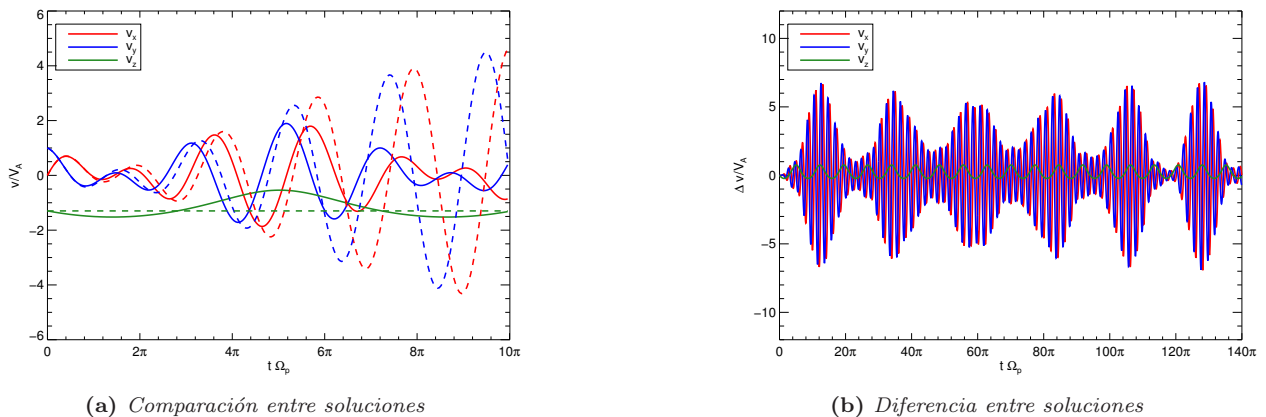


Figura 4.5: Comparación entre soluciones exactas y aproximadas para la velocidad. Mismas explicaciones y parámetros que en la figura 4.1, a excepción de la condición inicial $v_z(t=0) = 0.2 + (\omega_0 - \Omega_p)/k_0 = -1.2972$.

No sólo existe una fuerte desviación del suave comportamiento sinusoidal antes mostrado, sino que las soluciones aproximadas para \vec{v}^\perp divergen muchísimo más rápido de las soluciones exactas para t grandes, siendo pésimas predictoras del comportamiento real de las partículas. Ello se manifiesta en el diagrama derecho, donde la máxima diferencia entre soluciones exacta y aproximadas es más del triple que en los casos anteriores lejos de la resonancia ciclotrónica. A pesar de ello, la curva exacta de v_z mantiene un patrón sinusoidal no muy deformado, aunque discrepando un tanto de la aproximación constante utilizada. Afortunadamente, para estos valores usados, la resonancia ciclotrónica se encuentra en la “cola” de la función de distribución, existiendo muy poca proporción de partículas que experimentan estos efectos. En base a ello, sería esperable, y efectivamente se ha verificado, que a mayor diferencia del $v_z(t=0)$ de las partículas con respecto a la velocidad de resonancia ciclotrónica, tanto mejor será la aproximación aquí usada con respecto a los resultados exactos (y en particular, la constancia de v_z).

El origen de la mala calidad de la aproximación usada yace en el comportamiento divergente de las soluciones usadas (4.17)-(4.17) para velocidades v_z en resonancia ciclotrónica, debido al denominador de ζ_+ que se anula bajo esa condición. En efecto, se ha comprobado extensivamente que el máximo del patrón modulacional de diferencia entre soluciones exacta y aproximadas, 4.5b, crece monótonamente para v_z aún más cerca de la resonancia ciclotrónica.

- *Efectos de las demás condiciones iniciales* Como ya podía ser intuido a partir de la relación (4.10), se ha verificado que la forma específica de las distorsiones de las soluciones exactas y aproximadas para las velocidades, dependen de la condición inicial sobre la coordenada $z(t=0)$, es decir, de la fase relativa entre la onda y partícula (ver [Liemohn and Duane, 1976]). En cambio, las condiciones iniciales sobre x y y no desempeñan rol alguno en las soluciones para velocidad. Finalmente, en cuanto a las condiciones iniciales sobre la velocidad transversal v_x y v_y , éstas obviamente afectan la amplitud de sus variaciones temporales, y de forma lateral también cambian la amplitud de la oscilación de tipo sinusoidal de v_z . Además de ello, la variación de estas condiciones iniciales sólo incide cambiando la forma precisa de las curvas, pero no la tendencia ni el orden de magnitud de la discrepancia entre las soluciones exactas y aproximadas.

En conclusión, la aproximación usada para encontrar soluciones analíticas de las trayectorias de partículas en el campo de la onda pump, $v_z = cte$, es aceptable sólo para amplitudes y frecuencias bajas de la pump, además de partículas cuya velocidad inicial $v_z(t=0)$ (dada por la función de distribución inicial) se encuentren lejos de la resonancia ciclotrónica. Esto es, dicho punto debe quedar en la cola de f_0 para que sus efectos sobre la mayor parte de la función de distribución sean mínimos, siendo así mayor el rango de validez de la aproximación usada.

4.1.2. Ecuación de Vlasov y función de distribución en equilibrio

La ecuación de Vlasov (1.16) a orden 0, en donde $f_p = f_{0p}(z, t, \vec{v})$, es:

$$\frac{df_{0p}}{dt} = \frac{\partial f_{0p}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_{0p}}{\partial \vec{x}} + \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\partial f_{0p}}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial f_{0p}}{\partial t} + v_z \frac{\partial f_{0p}}{\partial z} + \frac{e}{m_p} \left(\vec{E}_0 + \vec{v} \times (\vec{B}_s + \vec{B}_0) \right) \cdot \frac{\partial f_{0p}}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (4.21)$$

Nótese que para la aceleración $d\vec{v}/dt$ se ha usado las trayectorias no perturbadas (4.1). La función de distribución que se escoge debe satisfacer la ecuación de Vlasov anterior. Si bien del análisis de la sección (1.5.3) se sabe que la función de distribución encontrada en [Sonnerup and Su, 1967] y presentada en (1.134) es una solución exacta del sistema Vlasov-Maxwell, lo cual satisface estos requerimientos, no es apropiada para usar directamente en la solución perturbada f_{1p} mediante el método de las características (presentado en la siguiente sección). La razón es que la aproximación usada al encontrar las órbitas no perturbadas ($v'_z = v_z = cte$), permite definir una función de distribución f_{0p} de manipulación relativamente simple en los cálculos posteriores, encontrada gracias a un apropiado cambio de sistema de referencia basado en la misma aproximación, lo que no sucede si se usa directamente la solución exacta de Sonnerup.

Cambio de sistema de referencia de ecuación de Vlasov en equilibrio

Así, el argumento con que se encontrará una forma de la función de distribución que satisface la ecuación de Vlasov a orden 0 (4.21) está basado en [Matsuda, 1986]. Se usa las trayectorias de las órbitas no perturbadas halladas en la sección previa 4.1.1 para efectuar el cambio de sistema de referencia:

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \longrightarrow \vec{V} = (V_x, V_y, V_z = v_z) \quad (4.22)$$

en donde V_x y V_y están dadas por (4.15), de modo tal que éste sistema sea comóvil a la onda pump. A su vez, de estas ecuaciones de transformación para velocidad es posible definir las correspondientes para la posición:

$$\vec{x} = (x, y, z) \longrightarrow \vec{\rho} = (\rho_x, \rho_y, \rho_z = z), \quad (4.23)$$

simplemente integrando en t :

$$\rho_x(x, z, v_z, t) = x + \frac{\Omega_p}{k_0 \omega_0} \frac{B_0}{B_s} \zeta_+ \sin \phi_0 \quad (4.24)$$

$$\rho_y(y, z, v_z, t) = y - \frac{\Omega_p}{k_0 \omega_0} \frac{B_0}{B_s} \zeta_+ \cos \phi_0 \quad (4.25)$$

Es de suma importancia notar que este cambio de sistema de referencia comóvil con la trayectoria a orden 0 de los protones en el campo de la onda pump, es válido sólo bajo el supuesto que v_z es constante (ver 4.1.1). Los restantes efectos despreciados por esta suposición serán incorporados posteriormente, al considerar los efectos de la velocidad de drift inducida por la onda pump \vec{v}_d .

En resumen, con el cambio de sistema de referencia escrito en la forma:

$$V_x = v_x - U_x \quad V_y = v_y - U_y \quad (4.26)$$

$$\rho_x = x - R_x \quad \rho_y = y - R_y \quad (4.27)$$

en donde

$$\vec{U} = \frac{\Omega_p}{k_0} \frac{B_0}{B_s} \zeta_+ (\cos(k_0 z - \omega_0 t) \hat{x} + \sin(k_0 z - \omega_0 t) \hat{y}) \quad (4.28)$$

$$\vec{R} = \frac{\Omega_p}{k_0 \omega_0} \frac{B_0}{B_s} \zeta_+ (-\sin(k_0 z - \omega_0 t) \hat{x} + \cos(k_0 z - \omega_0 t) \hat{y}) \quad (4.29)$$

con lo cual:

$$f_0 = f_0(t, \vec{x}, \vec{v}) \longrightarrow F_0 = F_0(t, \vec{\rho}, \vec{V}) \quad (4.30)$$

se puede cambiar cada derivada incolucrada en al ecuación de Vlasov a orden 0 (4.21) de la siguiente forma:

1. *Derivada temporal.*

$$\frac{\partial f_0(\vec{v}, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial F_0}{\partial V_x} \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial F_0}{\partial V_y} \frac{\partial V_y}{\partial t} = -\frac{\partial F_0}{\partial V_x} \frac{\partial U_x}{\partial t} - \frac{\partial F_0}{\partial V_y} \frac{\partial U_y}{\partial t} \quad (4.31)$$

$$= \frac{\Omega_p \omega_0}{k_0} \frac{B_0}{B_s} \zeta_+ \left[-\text{sen } \phi_0 \frac{\partial F_0}{\partial V_x} + \text{cos } \phi_0 \frac{\partial F_0}{\partial V_y} \right] \quad (4.32)$$

2. *Derivada espacial.* Considerando:

$$\frac{\partial f_0(\vec{v}, z, t)}{\partial z} = \frac{\partial F_0}{\partial V_x} \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial F_0}{\partial V_y} \frac{\partial V_y}{\partial z} = -\frac{\partial F_0}{\partial V_x} \frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial F_0}{\partial V_y} \frac{\partial U_y}{\partial z} \quad (4.33)$$

$$= -\Omega_p \frac{B_0}{B_s} \zeta_+ \left[-\text{sen } \phi_0 \frac{\partial F_0}{\partial V_x} + \text{cos } \phi_0 \frac{\partial F_0}{\partial V_y} \right] \quad (4.34)$$

se tiene:

$$\vec{v} \cdot \frac{\partial f_0(\vec{v}, z, t)}{\partial \vec{x}} = v_z \frac{\partial f_0}{\partial z} = v_z \Omega_p \frac{B_0}{B_s} \zeta_+ \left[\text{sen } \phi_0 \frac{\partial F_0}{\partial V_x} - \text{cos } \phi_0 \frac{\partial F_0}{\partial V_y} \right] \quad (4.35)$$

Agrupando este último resultado con la derivada anterior:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{x}} = \frac{\Omega_p B_0}{k_0 B_s} \zeta_+ \left[-\text{sen } \phi_0 \frac{\partial F_0}{\partial V_x} + \text{cos } \phi_0 \frac{\partial F_0}{\partial V_y} \right] [\omega_0 - k_0 v_z] \quad (4.36)$$

3. *Derivada en velocidad.* Usando las velocidades de las trayectorias no perturbadas (4.4) y (4.5), se tiene:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{m} \left[\vec{E}_0 + \vec{v} \times (\vec{B}_s + \vec{B}_0) \right] \quad (4.37)$$

$$= \left[\Omega_p v_y + \frac{\Omega_p B_0}{k_0 B_s} (\omega_0 - k_0 v_z) \text{sen } \phi_0 \right] \hat{x} + \left[-\Omega_p v_x - \frac{\Omega_p B_0}{k_0 B_s} (\omega_0 - k_0 v_z) \text{cos } \phi_0 \right] \hat{y} + \frac{dv_z}{dt} \hat{z} \quad (4.38)$$

De este modo, considerando que $(\omega_0 - k_0 v_z) + \Omega_p \zeta_+ = \zeta_+ (\omega_0 - k_0 v_z)$, se tiene:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\partial f_0(\vec{v}, z, t)}{\partial \vec{v}} = -\frac{\Omega_p B_0}{k_0 B_s} (\omega_0 - k_0 v_z) \left[-\text{sen } \phi_0 \frac{\partial F_0}{\partial V_x} + \text{cos } \phi_0 \frac{\partial F_0}{\partial V_y} \right] + \Omega_p \left[v_y \frac{\partial F_0}{\partial V_x} - v_x \frac{\partial F_0}{\partial V_y} \right] + \frac{dv_z}{dt} \frac{\partial F_0}{\partial v_z} \quad (4.39)$$

$$= (\vec{V} \times \vec{\Omega}) \cdot \frac{\partial F_0}{\partial \vec{V}} - \frac{\Omega_p B_0}{k_0 B_s} \zeta_+ (\omega_0 - k_0 v_z) \left[-\text{sen } \phi_0 \frac{\partial F_0}{\partial V_x} + \text{cos } \phi_0 \frac{\partial F_0}{\partial V_y} \right] + \frac{dv_z}{dt} \frac{\partial F_0}{\partial v_z} \quad (4.40)$$

Recopilando los resultados anteriores en la ecuación a Vlasov a orden 0 (4.21), se puede verificar que los términos proporcionales a la amplitud de la onda B_0 se anulan al considerar $dv_z/dt \sim 0$ (de acuerdo a (4.7)), obteniendo:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{x}} + \frac{e}{m} \left[\vec{E}_0 + \vec{v} \times (\vec{B}_s + \vec{B}_0) \right] \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = (\vec{V} \times \vec{\Omega}) \cdot \frac{\partial F_0}{\partial \vec{V}} = 0 \quad (4.41)$$

Función de distribución

Pero es conocido que la solución más general de esta última ecuación está dada por una función de la forma (ver, por ej., ec. 4.161 en [Swanson, 2003]):

$$F_{0p} = F_0(V_{\perp}^2, v_z) \quad (4.42)$$

con $V_{\perp}^2 = V_x^2 + V_y^2$. Es decir, la expresión general (4.30) no dependerá de t ni de $\vec{\rho}$. Luego, se puede escoger convenientemente la función de distribución, como:

$$F_{0p}(\vec{V}) = \frac{\alpha n_{0p}}{\pi^{3/2} v_{Tp}^3} \exp\left(-\frac{\alpha V_x^2 + \alpha V_y^2 + v_z^2}{v_{Tp}^2}\right) \quad (4.43)$$

$$\Leftrightarrow f_0(z, t, \vec{v}) = \frac{\alpha n_{0p}}{\pi^{3/2} v_T^3} \exp\left(-\frac{\alpha(v_x - U_x)^2 + \alpha(v_y - U_y)^2 + v_z^2}{v_T^2}\right) \quad (4.44)$$

en donde α es una constante, que se *escogerá igual a 1 en esta tesis* (es decir, se usará una función maxwelliana *isotrópica en el sistema \vec{V}*). Notar que la función anterior está inspirada en la solución exacta de Sonnerup (1.138). Por ello, comparten muchas propiedades, tal como la densidad constante e igual a n_{0p} para ambas (ver (1.137)) y que la razón entre temperaturas perpendicular y paralela es igual a (1.148). Pero su diferencia en el factor zeta ζ : comparar (1.132) (U_z es macroscópica) allí usado con (4.16) aquí usado (v_z es microscópica), tiene como consecuencia una velocidad macroscópica transversal que discrepa de la constante calculada en (1.141). En efecto, siguiendo el mismo procedimiento allí detallado, se tendrá que debido a la dependencia en v_z de U_x y U_y :

$$\vec{V}_{0p} = \frac{1}{n_{0p}} \int d^3v (v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}) \frac{\alpha n_{0p}}{\pi^{3/2} v_T^3} \exp\left(-\frac{\alpha(v_x - U_x)^2 + \alpha(v_y - U_y)^2 + v_z^2}{v_T^2}\right) \quad (4.45)$$

$$= \frac{1}{\pi^{3/2}} \int dx dy dz (U_x \hat{x} + U_y \hat{y}) \exp(-x^2 - y^2 - z^2) \quad (4.46)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Omega_p}{k_0} \frac{B_0}{B_s} (\cos \phi_0 \hat{x} + \sin \phi_0 \hat{y}) \int dz \zeta_+ \exp(-z^2) \quad (4.47)$$

$$= \frac{\Omega_p}{k_0} \frac{B_0}{B_s} (\cos \phi_0 \hat{x} + \sin \phi_0 \hat{y}) [1 - \xi_\Omega Z(\xi_0 - \xi_\Omega)] \quad (4.48)$$

en donde se ha introducido la función zeta (C.1) y sus argumentos según se detalla en la sección F.3.1. De lo anterior se desprende que para sus componentes transversales:

$$\tilde{V}_{0p}^\perp = \frac{\Omega_p}{k_0} \frac{B_0}{B_s} [1 - \xi_\Omega Z(\xi_0 - \xi_\Omega)] \quad (4.49)$$

Relación de dispersión de la onda pump

El hecho que V_{0p} sea diferente es precisamente el causante que ahora no se obtenga la misma relación de dispersión conocida y exacta (1.94) (ver última parte de sección 1.5.3). En efecto, ahora se tendrá que la corriente a orden 0 para protones será, en vez de (1.153),

$$J_{0p}^\pm = en_{0p} V_{0p}^\pm = en_{0p} \frac{\Omega_p B_0}{k_0 B_s} [1 - \xi_\Omega Z(\xi_0 - \xi_\Omega)] e^{\pm i\phi_0} \quad (4.50)$$

con lo cual la corriente transversal total será, en vez de (1.155):

$$J_0^\pm = J_{0p}^\pm + J_{0e}^\pm = \frac{en_0}{k_0 B_s} [\Omega_p (1 - \xi_\Omega Z(\xi_0 - \xi_\Omega)) + \omega_0] e^{\pm i\phi_0} \quad (4.51)$$

y consecuentemente, al reemplazar en la ecuación de onda inhomogénea (1.152) se obtendrá en vez de (1.94) la relación de dispersión:

$$k_0^2 = -\frac{\mu_0 en_0 \Omega_p}{B_s} \left[(1 - \xi_\Omega Z(\xi_0 - \xi_\Omega)) + \frac{\omega_0}{\Omega_p} \right] \quad (4.52)$$

ó, en forma adimensional:

$$\boxed{Y_0^2 = -1 - X_0 + \xi_\Omega Z(\xi_0 - \xi_\Omega)} \quad (4.53)$$

Cabe destacar que en el límite frío $T \rightarrow 0$, usando el límite de la función Z de (C.10), se tendrá:

$$k_0^2 = -\frac{\mu_0 en_0 \Omega_p}{B_s} \left[-\frac{\omega_0/\Omega_p}{1 - \omega_0/\Omega_p} + \frac{\omega_0}{\Omega_p} \right] \quad (4.54)$$

de modo que al simplificar se recupere la relación de dispersión que es conocida por ser solución exacta (1.94). Es decir, la relación de dispersión (4.53) encontrada con el método del paper de Matsuda (ó mejor dicho, inspirada en la función de distribución allí insinuada) se puede considerar como una aproximación a la solución exacta (1.94), válida sólo para plasmas fríos, tal como se muestra a continuación:

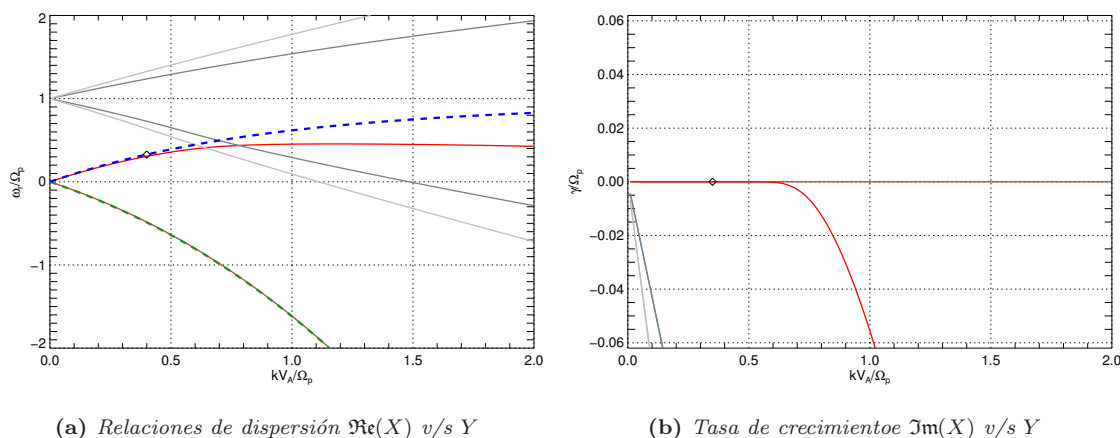


Figura 4.6: Diagramas de dispersión para la relación de dispersión de la onda pump (4.53), con $\beta_p = 0.1$. Se han sobrepuesto las curvas de la relación exacta (figura 1.7) como líneas discontinuas verdes (rama L, hacia adelante) y azules (rama R, hacia atrás). Los 4 modos acústicos menos amortiguados se muestran en líneas grises.

La rama derecha que se desplaza hacia atrás tiene idénticas propiedades que la solución exacta (1.103), mientras que la rama L que se desplaza hacia adelante tiene la misma curva de dispersión que la onda de Alfvén exacta sólo para Y pequeños. Para $Y \gtrsim 0.6$, comienza a ser fuertemente amortiguada a la vez que empieza a diverger de la solución exacta (línea discontinua azul), debido a los efectos cinéticos de la función zeta. Esto mismo también provoca que exista una infinidad de (cuasi)modos análogos a los acústicos del modelo cinético-híbrido, también fuertemente amortiguados, pero cuyas curvas de dispersión (con pendiente lineal constante) ahora están centradas en la resonancia ciclotrónica $X_0 = 1$. Nótese que el punto donde el modo de Alfvén L entra a la zona triangular delimitada por estas ramas de tipo acústicos, coincide muy precisamente con el Y a partir del cual comienza su amortiguamiento este modo. Ó en forma equivalente: la onda de Alfvén L comienza a amortiguarse cuando su velocidad de fase comienza a coincidir con las menores de entre estos modos tipo acústicos.

Una discusión de esta relación de dispersión de la pump no estaría completa sin considerar las consecuencias de cambiar el único parámetro libre que posee: $\tilde{\beta}_p$. Para ello, se comparará un par de casos relevantes:

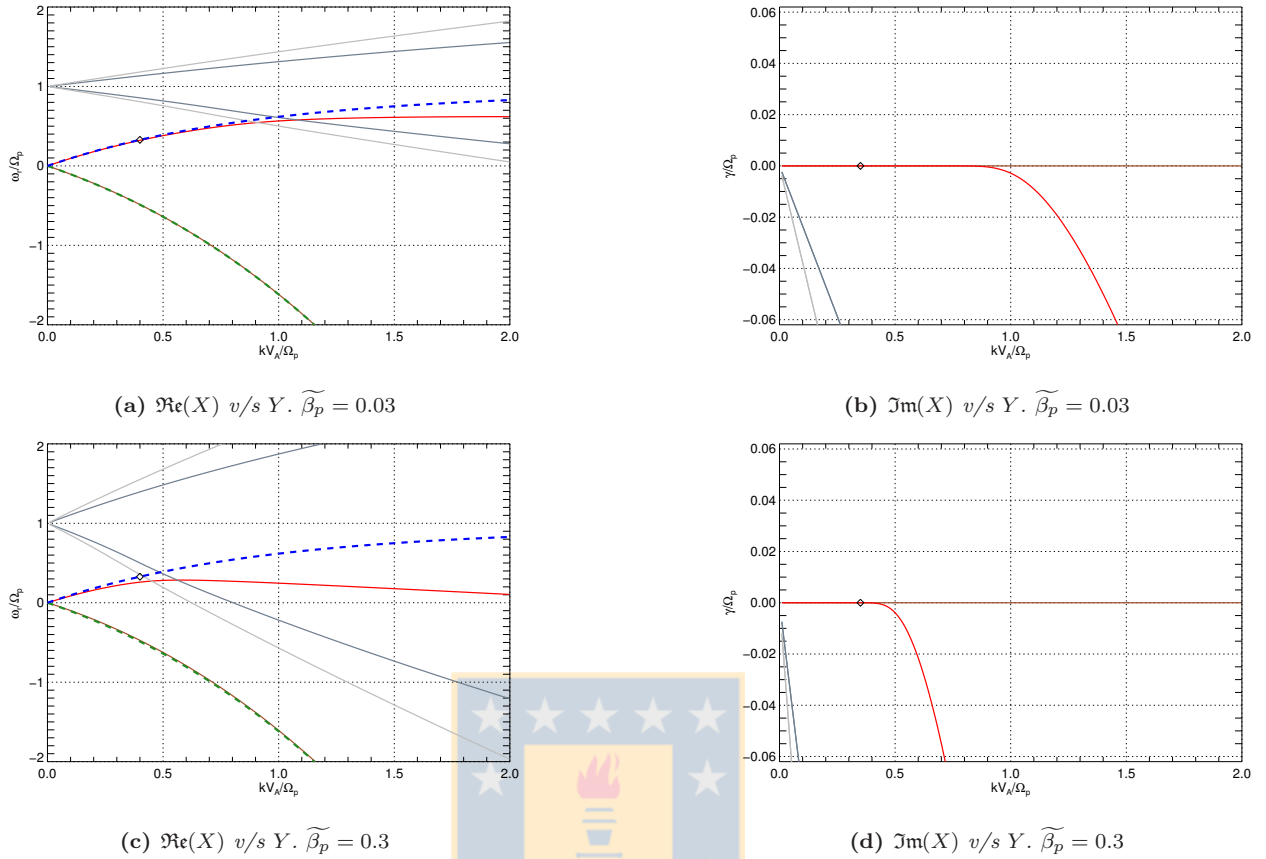


Figura 4.7: Diagramas de dispersión para la relación de dispersión de la onda pump (4.53), para los casos de beta indicados

Se deduce fácilmente que el aumento de la presión cinética de protones aumenta la apertura de las ramas amortiguadas en torno a $X_0 = 1$, con la consiguiente extensión hacia Y menores de la región en que la rama L de Alfvén se encuentra amortiguada. Por el contrario, conforme $\widetilde{\beta}_p$ se hace muy pequeño, dicha curva de Alfvén coincide con la solución exacta para un gran rango de Y con un $\gamma = 0$, recuperándose completamente la solución exacta para $\widetilde{\beta}_p \rightarrow 0$.

4.2. Función de distribución perturbada: Método de Matsuda

Como primer paso para encontrar las cantidades necesarias que serán necesarias en la relación de dispersión, se debe encontrar una expresión explícita para la función de distribución perturbada a primer orden asociada a los protones.

4.2.1. Linealización de ecuación de Vlasov

Ahora se considerarán perturbaciones infinitesimales (subíndice 1) a la función de distribución en torno al equilibrio descrito en la sección previa 4.1, caracterizado por la función f_{0p} dada en (4.44), de modo que:

$$f_p(\vec{x}, \vec{v}, t) = f_{0p}(z, \vec{v}, t) + f_{1p}(\vec{x}, \vec{v}, t) \quad (4.55)$$

y análogamente, los demás campos escalares y vectoriales involucrados satisfarán las mismas descomposiciones en su parte de equilibrio y linealizada de fluidos 2.4.1. Pero además, se supondrá también que la velocidad \vec{v} (de orden 0 en esta expansión) posee un drift \vec{v}_d (inducido por la perturbación) de orden 1 para los efectos de linealización, que incluye las correcciones de las trayectorias a orden 0. Es decir,

$$\vec{v} \rightarrow \vec{v} + \vec{v}_d \quad (4.56)$$

Luego, linealizando la ecuación de Vlasov (1.16), y usando (4.21) para simplificar apropiadamente, se tendrá:

$$\frac{\partial f_{1p}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_{1p}}{\partial \vec{x}} + \vec{v}_d \cdot \frac{\partial f_{0p}}{\partial \vec{x}} + \frac{e}{m_p} \left(\vec{E}_0 + \vec{v} \times (\vec{B}_s + \vec{B}_0) \right) \cdot \frac{\partial f_{1p}}{\partial \vec{v}} + \frac{e}{m_p} \left(\vec{E}_1 + \vec{v} \times \vec{B}_1 + \vec{v}_d \times (\vec{B}_0 + \vec{B}_s) \right) \cdot \frac{\partial f_{0p}}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (4.57)$$

Nótese que es posible interpretar los siguientes términos como las aceleraciones de una partícula debidas a la fuerza de Lorentz producida por los campos a orden 0 y 1, respectivamente:

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{F}_0^L}{m_p} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} = \frac{e}{m_p} \left(\vec{E}_0 + \vec{v} \times (\vec{B}_s + \vec{B}_0) \right) \quad (4.58)$$

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_1^L}{m_p} = \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \frac{e}{m_p} \left(\vec{E}_1 + \vec{v} \times \vec{B}_1 + \vec{v}_d \times (\vec{B}_0 + \vec{B}_s) \right) \quad (4.59)$$

El primer objetivo es encontrar la función de distribución perturbada *sin considerar* los efectos del drift \vec{v}_d , es decir, despreciando todos los términos que contienen dicha variable al resolver:

$$\frac{\partial f_{1p}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_{1p}}{\partial \vec{x}} + \frac{e}{m_p} \left(\vec{E}_0 + \vec{v} \times (\vec{B}_s + \vec{B}_0) \right) \cdot \frac{\partial f_{1p}}{\partial \vec{v}} + \frac{e}{m_p} \left(\vec{E}_1 + \vec{v} \times \vec{B}_1 \right) \cdot \frac{\partial f_{0p}}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (4.60)$$

Cambio de sistema de referencia de ecuación de Vlasov linealizada

Para encontrar una forma relativamente simple de f_{1p} se requiere simplificar la ecuación anterior, lo cual se logra mediante la transformación de sistema de referencia antes hallada (4.26)-(4.27). Entonces, cambiando a las variables \vec{V} y $\vec{\rho}$, en donde se denota:

$$f_p(\vec{x}, \vec{v}, t) = F_p(\vec{\rho}, \vec{V}, t) = F_{0p}(\vec{V}) + F_{1p}(\vec{\rho}, \vec{V}, t) \quad (4.61)$$

se obtiene para cada término de la ecuación de Vlasov (4.60):

1. *Derivada temporal.* Tenemos:

$$\frac{\partial f_1(\vec{v}, z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial F_1}{\partial V_x} \frac{\partial U_x}{\partial t} - \frac{\partial F_1}{\partial V_y} \frac{\partial U_y}{\partial t} - \frac{\partial F_1}{\partial \rho_x} \frac{\partial R_x}{\partial t} - \frac{\partial F_1}{\partial \rho_y} \frac{\partial R_y}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (4.62)$$

$$= \frac{\Omega_p}{k_0} \frac{B_0}{B_s} \zeta_+ \left\{ \omega_0 \left[-\sin \phi_0 \frac{\partial F_1}{\partial V_x} + \cos \phi_0 \frac{\partial F_1}{\partial V_y} \right] - \left[\cos \phi_0 \frac{\partial F_1}{\partial \rho_x} + \sin \phi_0 \frac{\partial F_1}{\partial \rho_y} \right] \right\} + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (4.63)$$

2. *Derivada espacial.* Considerando:

$$\frac{\partial f_1(\vec{v}, z, t)}{\partial z} = -\frac{\partial F_1}{\partial V_x} \frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial F_1}{\partial V_y} \frac{\partial U_y}{\partial z} - \frac{\partial F_1}{\partial \rho_x} \frac{\partial R_x}{\partial z} - \frac{\partial F_1}{\partial \rho_y} \frac{\partial R_y}{\partial z} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \quad (4.64)$$

$$= \frac{\Omega_p}{k_0} \frac{B_0}{B_s} \zeta_+ \left\{ -k_0 \left[-\sin \phi_0 \frac{\partial F_1}{\partial V_x} + \cos \phi_0 \frac{\partial F_1}{\partial V_y} \right] + \frac{k_0}{\omega_0} \left[\cos \phi_0 \frac{\partial F_1}{\partial \rho_x} + \sin \phi_0 \frac{\partial F_1}{\partial \rho_y} \right] \right\} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \quad (4.65)$$

y también:

$$\vec{v} \cdot \frac{\partial f_1(\vec{v}, z, t)}{\partial \vec{x}} = V_x \frac{\partial F_1}{\partial \rho_x} + V_y \frac{\partial F_1}{\partial \rho_y} + \frac{\Omega_p}{k_0} \frac{B_0}{B_s} \zeta_+ \left[\cos \phi_0 \frac{\partial F_1}{\partial \rho_x} + \sin \phi_0 \frac{\partial F_1}{\partial \rho_y} \right] + v_z \frac{\partial F_1}{\partial z} \quad (4.66)$$

Al combinar con la derivada temporal, los dos primeros términos del lado izquierdo de la ecuación de Vlasov (4.60) serán:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial F_1}{\partial t} + \vec{V} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \vec{\rho}} + \frac{\Omega_p}{k_0} \frac{B_0}{B_s} \zeta_+ \left\{ (\omega_0 - k_0 v_z) \left[-\sin \phi_0 \frac{\partial F_1}{\partial V_x} + \cos \phi_0 \frac{\partial F_1}{\partial V_y} \right] \right. \quad (4.67)$$

$$\left. + \frac{k_0 v_z}{\omega_0} \left[\cos \phi_0 \frac{\partial F_1}{\partial \rho_x} + \sin \phi_0 \frac{\partial F_1}{\partial \rho_y} \right] \right\} \quad (4.68)$$

3. *Derivada en velocidad.* El procedimiento es completamente análogo al del caso en equilibrio (4.40), reemplazando F_{0p} por F_{1p} , por lo que

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\partial f_1(\vec{v}, z, t)}{\partial \vec{v}} = -\frac{\Omega_p}{k_0} \frac{B_0}{B_s} (\omega_0 - k_0 v_z) \left[-\sin \phi_0 \frac{\partial F_{1p}}{\partial V_x} + \cos \phi_0 \frac{\partial F_{1p}}{\partial V_y} \right] + \Omega_p \left[v_y \frac{\partial F_{1p}}{\partial V_x} - v_x \frac{\partial F_{1p}}{\partial V_y} \right] + \frac{dv_z}{dt} \frac{\partial F_{1p}}{\partial v_z} \quad (4.69)$$

$$= (\vec{V} \times \vec{\Omega}) \cdot \frac{\partial F_{1p}}{\partial \vec{V}} - \frac{\Omega_p}{k_0} \frac{B_0}{B_s} \zeta_+ (\omega_0 - k_0 v_z) \left[-\sin \phi_0 \frac{\partial F_{1p}}{\partial V_x} + \cos \phi_0 \frac{\partial F_{1p}}{\partial V_y} \right] + \frac{dv_z}{dt} \frac{\partial F_{1p}}{\partial v_z} \quad (4.70)$$

De forma similar al caso a orden 0, al recopilar los resultados de este cambio de sistema de referencia en la ecuación Vlasov a orden 1 (4.60) (y recordando la aproximación $dv_z/dt \sim 0$), obtenemos una expresión independiente de B_0 (excepto algunos términos proporcionales además al gradiente de la función de distribución perturbada).

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{x}} + \frac{e}{m} \left[\vec{E}_0 + \vec{v} \times (\vec{B}_c + \vec{B}_0) \right] \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}} + \frac{e}{m_p} \left(\vec{E}_1 + \vec{v} \times \vec{B}_1 \right) \cdot \frac{\partial f_{0p}}{\partial \vec{v}} = \quad (4.71)$$

$$\frac{\partial F_{1p}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \frac{\partial F_{1p}}{\partial \vec{\rho}} + (\vec{V} \times \vec{\Omega}_p) \cdot \frac{\partial F_{1p}}{\partial \vec{V}} + \frac{e}{m_p} \left(\vec{E}_1 + \vec{v} \times \vec{B}_1 \right) \cdot \frac{\partial f_{0p}}{\partial \vec{v}} + \frac{\Omega_p}{k_0} \frac{B_0}{B_s} \zeta_+ \left\{ \frac{k_0 v_z}{\omega_0} \left[\cos \phi_0 \frac{\partial F_{1p}}{\partial \rho_x} + \sin \phi_0 \frac{\partial F_{1p}}{\partial \rho_y} \right] \right\} = 0 \quad (4.72)$$

Identificando los tres primeros términos como la derivada total de F_{1p} , se tiene

$$\frac{dF_{1p}^*}{dt}(t, \vec{\rho}, \vec{V}) = -\frac{e}{m_p} \left(\vec{E}_1 + \vec{v} \times \vec{B}_1 \right) \cdot \frac{\partial f_{0p}}{\partial \vec{v}} \quad (4.73)$$

y así se recupera la expresión conocida dentro de la teoría de Vlasov para un sistema sin onda pump (ver ec. 4.163 de [Swanson, 2003]). El asterisco en la función de distribución perturbada es para enfatizar el hecho que sólo representa la solución de la ecuación de Vlasov linealizada *sin* el término de drift \vec{v}^d (4.60), cuyos efectos serán incorporados más tarde

Integral temporal de F_1 a orden 0

Siguiendo el procedimiento estándar del método de las características¹, ahora se integra a lo largo de las trayectorias no perturbadas:

$$F_{1p}^*(t) = -\frac{e}{m_p} \int_{-\infty}^t dt' \left(\vec{E}_1(t') + \vec{v}(t') \times \vec{B}_1(t') \right) \cdot \frac{\partial F_{0p}(t')}{\partial \vec{V}(t')} \quad (4.74)$$

en donde prima ' indica variables que dependen de la de integración t' . En principio, el límite inferior de la integral sería desde un tiempo arbitrario t_0 , en donde es necesario tomar en cuenta los efectos de las condiciones iniciales. Sin embargo, del análisis de Landau del problema de Vlasov (ver sección 4.3.1 de [Swanson, 2003]), se sabe que si la frecuencia ω tiene una parte imaginaria positiva, esto implica ondas crecientes en el tiempo, por lo que necesariamente se tiene que las amplitudes de las ondas deben anularse conforme $t_0 \rightarrow -\infty$. Esto se puede hacer sin pérdida de generalidad. Ahora, se puede suponer que los campo eléctricos y magnéticos satisfacen una expansión análoga a la de fluidos (B.3), en la forma dictada por el teorema de floquet (ver sección B):

$$\vec{E}'_1 = \vec{E}_1(t') = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \vec{E}_{1,l} \exp[-i(k_l z' - \omega_l t')], \quad (4.75)$$

$$\vec{B}'_1 = \vec{B}_1(t') = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \vec{B}_{1,l} \exp[-i(k_l z' - \omega_l t')], \quad (4.76)$$

¹Ver sección 4.3 de [Swanson, 2003] ó sección 8.10 de [Krall and Trivelpiece, 1973]. En líneas generales, la idea es encontrar la perturbación de la función de distribución debido a la onda, siguiendo las órbitas de los protones en los campos electromagnéticos no perturbados, que en este caso sería el de la onda pump además del campo magnético estático de fondo. Este método es conveniente debido a que la función de distribución no perturbada, F_0 , es constante a lo largo de estas trayectorias, ya que siempre se puede considerar construida a partir de constantes del movimiento (recordar sección 1.5.3).

en donde k_l y ω_l satisfacen igualmente (B.4), y además conviene definir, en analogía a (4.10), las cantidades:

$$\phi_l^{(\prime)} := k_l z^{(\prime)} - \omega_l t^{(\prime)} \quad \text{y} \quad \dot{\phi}_l = (k_l v_z - \omega_l) \quad (4.77)$$

(en donde (\prime) indica que es válida tanto con prima como sin ella). Luego, es posible, mediante la ecuación de Faraday y el análogo a (1.78) para cantidades perturbadas, expresar los campos eléctricos transversales en función de los magnéticos:

$$\tilde{E}_{1,l}^x = \frac{\omega_l}{k_l} \tilde{B}_{1,l}^y, \quad \tilde{E}_{1,l}^y = -\frac{\omega_l}{k_l} \tilde{B}_{1,l}^x. \quad (4.78)$$

Por otro lado, se puede hacer un cambio de variable en forma análoga a (4.26) para las cantidades en t' , ó equivalentemente en τ según (4.9). En efecto, de las soluciones (4.17) y (4.18), se puede definir:

$$V'_x = V_x(\tau) = v'_x - U'_x \quad V'_y = V_y(\tau) = v'_y - U'_y \quad (4.79)$$

$$(4.80)$$

en donde

$$V'_x = V_x \cos(\Omega_p \tau) + V_y \sin(\Omega_p \tau) \quad (4.81)$$

$$V'_y = -V_x \sin(\Omega_p \tau) + V_y \cos(\Omega_p \tau) \quad (4.82)$$

y

$$\vec{U}' = \frac{\Omega_p}{k_0} \frac{B_0}{B_s} \zeta_+ (\cos(k_0 z' - \omega_0 t') \hat{x} + \sin(k_0 z' - \omega_0 t') \hat{y}) \quad (4.83)$$

$$(4.84)$$

Así, se puede explicitar cada componente de las cantidades que conforman el integrando para F_{1p}^* , por lo que haciendo el cambio de variable en velocidad mencionado, se tendrá:

$$F_{1p}^* = -\frac{e}{m_p} \sum_l \int_{-\infty}^t dt' \left\{ \frac{\tilde{B}_{1,l}^y}{k_l} (\omega_l - k_l v_z) \frac{\partial F_{0p}}{\partial V'_x} - \frac{\tilde{B}_{1,l}^x}{k_l} (\omega_l - k_l v_z) \frac{\partial F_{0p}}{\partial V'_y} \right. \\ \left. + \left[\tilde{E}_{1,l}^z + \tilde{B}_{1,l}^y (V'_x + U'_x) - \tilde{B}_{1,l}^x (V'_y + U'_y) \right] \frac{\partial F_{0p}}{\partial v_z} \right\} \quad (4.85)$$

Nótese que las derivadas de la función de distribución satisfacen:

$$\frac{\partial F_{0p}}{\partial V_i} = \frac{\partial F_{0p}}{\partial V^2} \frac{\partial V^2}{\partial V_i} = 2V_i \frac{\partial F_{0p}}{\partial V^2}. \quad (4.86)$$

y que además la derivada en velocidad de la función de distribución *no* depende de la variables de integración t' :

$$V(t')^2 = V_x'^2 + V_y'^2 + V_z^2 \quad (4.87)$$

$$= (V_x \cos(\Omega_p \tau) + V_y \sin(\Omega_p \tau))^2 + (-V_x \sin(\Omega_p \tau) + V_y \cos(\Omega_p \tau))^2 + v_z^2 \quad (4.88)$$

$$= V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = V^2 \quad (4.89)$$

con lo cual:

$$\frac{\partial F_{0p}([\vec{V}(t')]^2)}{\partial \vec{V}'^2} = \frac{\partial F_{0p}(V^2)}{\partial V^2} \quad (4.90)$$

Reemplazando estas cantidades en el integrando para F_{1p}^* , considerando además las formas explícitas (4.81), (4.82), y (4.83), y cambiando de variable de integración a τ^2 , se tiene:

$$F_{1p}^* = -\frac{e}{m_p} \sum_l e^{-i\phi_l} \int_0^\infty d\tau e^{i\phi_l \tau} \left\{ 2\tilde{B}_{1,l}^y \frac{\omega_l}{k_l} [V_x \cos(\Omega_p \tau) - V_y \sin(\Omega_p \tau)] \right. \\ \left. - 2\tilde{B}_{1,l}^x \frac{\omega_l}{k_l} [V_x \sin(\Omega_p \tau) + V_y \cos(\Omega_p \tau)] + 2v_z \tilde{E}_{1,l}^z + 2v_z \frac{\Omega_p}{k_0} \frac{B_0}{B_s} \zeta_+ \left[\tilde{B}_{1,l}^y \cos \phi'_0 - \tilde{B}_{1,l}^x \sin \phi'_0 \right] \right\} \frac{\partial F_{0p}}{\partial V^2} \quad (4.95)$$

en donde se ha usado (ver (4.10)):

$$-i\phi'_l = -i(k_l z' - \omega_l t') = -i(\omega_l - k_l v_z) \tau + i(\omega_l t - k_l z) = -i\phi_l + i\dot{\phi}_l \tau \quad (4.96)$$

$$\phi'_0 = (k_0 z - \omega_0 t) + (\omega_0 - k_0 v_z) \tau \quad (4.97)$$

Introduciendo las variables transversales (2.11), se tienen cinco integrales temporales para F_1 :

$$F_{1p}^* = -\frac{e}{m_p} \sum_l e^{-i\phi_l} \int_0^\infty d\tau e^{i\phi_l \tau} \left\{ i \frac{\omega_l}{k_l} \underbrace{e^{i\Omega_p \tau} \tilde{B}_{1,l}^-}_{:=I_{1+}} V_+ - i \frac{\omega_l}{k_l} \underbrace{e^{-i\Omega_p \tau} \tilde{B}_{1,l}^+}_{:=I_{1+}} V_- + \underbrace{2v_z \tilde{E}_{1,l}^z}_{:=I_2} \right. \\ \left. + i v_z \frac{\Omega_p}{k_0} \frac{B_0}{B_s} \zeta_+ \left[\underbrace{e^{i\phi'_0} \tilde{B}_{1,l}^-}_{:=I_{3+}} - \underbrace{e^{-i\phi'_0} \tilde{B}_{1,l}^+}_{:=I_{3-}} \right] \right\} \frac{\partial F_0}{\partial V^2} \quad (4.98)$$

Se debe imponer la siguiente condición para la convergencia de cada integral temporal:

$$\Im(\omega_l) = \gamma < 0, \quad (4.99)$$

lo que equivale físicamente a considerar sólo ondas amortiguadas ((1.49)). Aquellas con $\gamma > 0$ igualmente estarán permitidas después de realizar una continuación analítica de cada función resultante para $\Im(\omega_l) > 0$ (ver, por ej, sección 5.2.3 de [Bellan, 2006]). Así, calculando cada integral cuyo procedimiento se detalla en el apéndice E.1, se obtiene la expresión que depende sólo de la derivada de la función de distribución:

$$F_{1p}^* = \frac{en_{0p}}{m_p} \sum_l \left\{ \left[\frac{\omega_l}{k_l} \left(\frac{V_- \tilde{B}_{1,l}^+}{\omega_l + \Omega_p - k_l v_z} - \frac{V_+ \tilde{B}_{1,l}^-}{\omega_l - \Omega_p - k_l v_z} \right) + \frac{2iv_z \tilde{E}_{1,l}^z}{\omega_l - k_l v_z} \right] e^{i(\omega_l t - k_l z)} \right. \quad (4.100)$$

$$\left. + \frac{\Omega_p}{k_0} \frac{B_0}{B_s} v_z \zeta_+ \left[\frac{e^{i(\omega_{l+1} t - k_{l+1} z)}}{\omega_{l+1} - k_{l+1} v_z} \tilde{B}_{1,l}^+ - \frac{e^{i(\omega_{l-1} t - k_{l-1} z)}}{\omega_{l-1} - k_{l-1} v_z} \tilde{B}_{1,l}^- \right] \right\} \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial V^2} \quad (4.101)$$

En donde se ha usado también el hecho que F_{0p} es espacialmente uniforme (densidad constante, ver (4.44)) para denotar la función de distribución reducida \hat{F}_{0p} en analogía a (2.74). La última manipulación que se realizará a

² En forma precisa, primero se hace el cambio de variable de t' a τ según dada en (4.9).

$$t' = t \quad \Rightarrow \quad \tau = 0 \quad (4.91)$$

$$t' = -\infty \quad \Rightarrow \quad \tau = -\infty \quad (4.92)$$

de modo que la integral se pueda escribir simbólicamente como:

$$\int_{-\infty}^t dt' \dots = \int_{-\infty}^0 d\tau \dots \quad (4.93)$$

A continuación, se cambia a la variable $\tau^* = -\tau = t - t'$, de modo que:

$$\int_{-\infty}^0 d\tau \dots = - \int_{\infty}^0 d\tau^* \dots = \int_0^{\infty} d\tau^* \dots \quad (4.94)$$

después de lo cual se redefine $\tau := \tau^*$

esta función de distribución sin drift consiste en desplazar la sumatorias en l apropiadamente usando la identidad (2.33), de donde se obtendrá:

$$F_{1p}^* = \frac{\Omega_p n_{0p}}{B_s} \sum_l e^{-i\phi_l} \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial V^2} \left\{ \frac{\omega_l}{k_l} \left(\frac{V_- \tilde{B}_{1,l}^+}{\omega_l + \Omega_p - k_l v_z} - \frac{V_+ \tilde{B}_{1,l}^-}{\omega_l - \Omega_p - k_l v_z} \right) + \frac{2iv_z \tilde{E}_{1,l}^z}{\omega_l - k_l v_z} + \frac{\Omega_p B_0}{k_0 B_s} \frac{v_z \zeta_+}{\omega_l - k_l v_z} (\tilde{B}_{1,l-1}^+ - \tilde{B}_{1,l+1}^-) \right\} \quad (4.102)$$

Notar que se tiene tres coeficientes de Fourier de los campos electromagnéticos en la relación anterior: $\tilde{B}_{1,l}^\pm$ y $\tilde{E}_{1,l}^z$. El propósito de usar estas variables (en vez de $\tilde{E}_{1,l}^\pm$ y $\tilde{E}_{1,l}^z$ como se hizo originalmente en el artículo [Matsuda, 1986]), es tratar de proveer una comparación con los cálculos conocidos de Hollweg del capítulo 2.4.1 (donde se usan dichas variables).

Integral temporal de F1 con drift

Ahora se tiene que hallar el término faltante ΔF_{1p} que debe añadirse a la función de distribución F_{1p}^* calculada previamente, y que se debe a los efectos del término de velocidad de drift \vec{v}_d , de modo que considerando (4.73), se tenga la ecuación de Vlasov completa (4.57):

$$\frac{dF_{1p}^*}{dt} + \frac{d\Delta F_{1p}}{dt} = -\frac{e}{m_p} (\vec{E}_1 + \vec{v} \times \vec{B}_1) \cdot \frac{\partial f_{0p}}{\partial \vec{v}} - \frac{e}{m_p} (\vec{v}_d(t, z) \times (\vec{B}_s + \vec{B}_0(t, z))) \cdot \frac{\partial f_{0p}}{\partial \vec{v}} \quad (4.103)$$

Los dos primeros términos de cada lado fueron utilizados para determinar F_{1p} en la subsección previa (ver (4.73)). Luego, y en forma *aproximada*, se puede determinar $d\Delta F_{1p}/dt$ igualando al segundo término del lado derecho, para lo cual se requiere suponer que \vec{v}_d admite una descomposición análoga a (4.75)

$$\vec{v}_d(t, z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{v}_{d,l} e^{i(\omega_l t - k_l z)}, \quad (4.104)$$

Entonces, separando cada componente explícitamente:

$$\frac{d\Delta F_{1p}}{dt} = -\frac{e}{m_p} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-i\phi_l} \left\{ B_s \left(v_{d,l}^y \frac{\partial F_{0p}}{\partial V_x} - v_{d,l}^x \frac{\partial F_{0p}}{\partial V_y} \right) + v_{d,l}^z B_0 \left(-\sin \phi_0 \frac{\partial F_{0p}}{\partial V_x} + \cos \phi_0 \frac{\partial F_{0p}}{\partial V_y} \right) \right\} \quad (4.105)$$

$$+ B_0 \left(v_{d,l}^x \sin \phi_0 - v_{d,l}^y \cos \phi_0 \right) \frac{\partial F_{0p}}{\partial v_z} \quad (4.106)$$

$$= \frac{2\Omega_p B_0}{B_s} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-i\phi_l} \left\{ v_z \left(-v_{d,l}^x \sin \phi_0 + v_{d,l}^y \cos \phi_0 \right) + v_{d,l}^z (V_x \sin \phi_0 - V_y \cos \phi_0) \right\} \frac{\partial F_{0p}}{\partial V^2} \quad (4.107)$$

$$+ 2\Omega_p \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-i\phi_l} \left\{ -V_x v_{d,l}^y + V_y v_{d,l}^x \right\} \frac{\partial F_{0p}}{\partial V^2} \quad (4.108)$$

en donde se ha usado (4.86). Luego, siguiendo el usual método de las características, ΔF_{1p} se obtendrá integrando a lo largo de las trayectorias no perturbadas para \vec{V}' (sección 4.1.1). Así, efectuando el cambio de variable de t a τ según lo detallado en (4.91) y sgtes., además de usar (4.90) y expresar en términos de variables transversales según (2.11) y el análogo para la velocidad de drift:

$$v_{d,l}^\pm = v_{d,l}^x \pm iv_{d,l}^y \quad (4.109)$$

se tendrá:

$$\Delta F_{1p}(t) = i \frac{\Omega_p B_0}{B_s} \int_{-\infty}^0 d\tau \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-i\phi'_l} \left\{ v_z \underbrace{\left[-v_{d,l}^+ e^{-i\phi'_0} + v_{d,l}^- e^{i\phi'_0} \right]}_{:=D1} + v_{d,l}^z \underbrace{\left[V_+ e^{-i\phi'_0} - V_- e^{i\phi'_0} \right]}_{:=D2} \right\} \frac{\partial F_{0p}}{\partial V^2} \quad (4.110)$$

$$+ i\Omega_p \int_{-\infty}^0 d\tau \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-i\phi'_l} \left\{ -V_+ v_{d,l}^- + V_- v_{d,l}^+ \right\} \frac{\partial F_{0p}}{\partial V^2} \quad (4.111)$$

Notando que mediante las formas explícitas de las trayectorias no perturbadas (4.81) y (4.82) se tiene $V_{\pm}' = V_{\pm}e^{\pm i\Omega_p\tau}$, y recordando los resultados de las integrales temporales en el apéndice E.1, es posible efectuar las integrales, de modo que:

$$\Delta F_{1p} = \frac{\Omega_p n_{0p} B_0}{B_s} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-i\phi_l} \left\{ v_z \frac{-v_{d,l-1}^+ + v_{d,l+1}^-}{\omega_l - k_l v_z} + \frac{V_+ v_{d,l-1}^z}{\omega_l - \Omega_p - k_l v_z} - \frac{V_- v_{d,l+1}^z}{\omega_l + \Omega_p - k_l v_z} \right\} \frac{\partial F_{0p}}{\partial V^2} \quad (4.112)$$

$$+ \Omega_p n_{0p} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-i\phi_l} \left\{ -\frac{V_+ v_{d,l}^-}{\omega_l - \Omega_p - k_l v_z} + \frac{V_- v_{d,l}^+}{\omega_l + \Omega_p - k_l v_z} \right\} \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial V^2} \quad (4.113)$$

en donde se ha usado también la relación entre coeficientes de Fourier l y $l \pm 1$ dada por (2.33). Las expresiones concretas de las componentes de la velocidad de drift son calculadas en el apéndice D. Entonces, sumando lo anterior a la función de distribución F_{1p}^* según (4.102), se tendrá la forma final F_{1p} de la función de distribución a primer orden:

$$F_{1p}(t, z, \vec{V}) := F_{1p}^* + \Delta F_{1p} = \frac{\Omega_p n_{0p}}{B_s} \sum_l e^{-i\phi_l} \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial V^2} \left\{ \frac{\omega_l}{k_l} \left(\frac{V_- \tilde{B}_{1,l}^+}{\omega_l + \Omega_p - k_l v_z} - \frac{V_+ \tilde{B}_{1,l}^-}{\omega_l - \Omega_p - k_l v_z} \right) + \frac{2iv_z \tilde{E}_{1,l}^z}{\omega_l - k_l v_z} \right\} \quad (4.114)$$

$$+ \frac{\Omega_p B_0}{k_0 B_s} \frac{v_z \zeta_+}{\omega_l - k_l v_z} \left(\tilde{B}_{1,l-1}^+ - \tilde{B}_{1,l+1}^- \right) + B_0 \left[v_z \frac{-v_{d,l-1}^+ + v_{d,l+1}^-}{\omega_l - k_l v_z} + \frac{V_+ v_{d,l-1}^z}{\omega_l - \Omega_p - k_l v_z} - \frac{V_- v_{d,l+1}^z}{\omega_l + \Omega_p - k_l v_z} \right] \quad (4.115)$$

$$+ B_s \left\{ -\frac{V_+ v_{d,l}^-}{\omega_l - \Omega_p - k_l v_z} + \frac{V_- v_{d,l}^+}{\omega_l + \Omega_p - k_l v_z} \right\} \quad (4.116)$$

4.3. Momentos de la función de distribución

La forma final de la función de distribución F_{1p} permite calcular sus momentos macroscópicos, mediante la integración en velocidad con ciertos factores apropiados. En general, en todas las integrales estará involucrada la función Z de plasma (C.1) debido a la naturaleza maxwelliana de la función F_{0p} (4.44).

4.3.1. Densidad de carga

A través de la definición (1.9) se calcula la densidad de carga, y notando que se anulan todos los términos con V_{\pm} al integrar en velocidad (debido a su paridad), se puede ver que los términos sobrevivientes conforman el coeficiente de Fourier l -ésimo:

$$\tilde{\rho}_{1p,l} = \frac{en_{0p}\Omega_p}{B_s} \int d^3V \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial v_z} \left\{ \frac{i\tilde{E}_{1,l}^z}{\omega_l - k_l v_z} + \frac{\Omega_p B_0}{2k_0 B_s} \frac{\zeta_+}{\omega_l - k_l v_z} \left(\tilde{B}_{1,l-1}^+ - \tilde{B}_{1,l+1}^- \right) + \frac{B_0}{2} \frac{-v_{+,l-1}^d + v_{-,l+1}^d}{\omega_l - k_l v_z} \right\} \quad (4.117)$$

donde se ha usado la relación (4.86). Reemplazando la forma explícita de $-v_{+,l-1}^d + v_{-,l+1}^d$ según (D.24) y agrupando términos similares en las componentes longitudinal del campo eléctrico y transversales del campo magnético, se tendrá:

$$\tilde{\rho}_{1p,l} = \frac{en_{0p}\Omega_p}{B_s} \int d^3V \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial v_z} \left\{ i\tilde{E}_{1,l}^z \frac{(\omega_{l-1} - k_{l-1}v_z + \Omega_p)(\omega_{l+1} - k_{l+1}v_z - \Omega_p)}{\Delta_{+,l}} \right\} \quad (4.118)$$

$$+ \frac{\Omega_p B_0}{2B_s} \tilde{B}_{1,l-1}^+ \left[\frac{1}{k_0} \frac{\zeta_+}{\omega_l - k_l v_z} + \frac{\omega_{l-1} \omega_{l+1} - k_{l+1}v_z - \Omega_p}{k_{l-1} \Delta_{+,l}} \right] \quad (4.119)$$

$$+ \frac{\Omega_p B_0}{2B_s} \tilde{B}_{1,l+1}^- \left[-\frac{1}{k_0} \frac{\zeta_+}{\omega_l - k_l v_z} + \frac{\omega_{l+1} \omega_{l-1} - k_{l-1}v_z + \Omega_p}{k_{l+1} \Delta_{+,l}} \right] \left. \right\} \quad (4.120)$$

en donde se ha usado la equivalencia (para el términos asociado a $i\tilde{E}_{1,l}^z$):

$$\frac{1}{\omega_l - k_l v_z} + \left(\frac{\Omega_p B_0}{B_s} \right)^2 \frac{1}{\Delta_{+,l}} = \frac{(\omega_{l+1} - k_{l+1}v_z - \Omega_p)(\omega_{l-1} - k_{l-1}v_z + \Omega_p)}{\Delta_{+,l}} \quad (4.121)$$

Es útil notar que todas las cantidades que provienen de la corrección debido al término de drift portan el término $\Delta_{+,l}$.

4.3.2. Densidad de corriente longitudinal

De la definición (1.11), la densidad de corriente longitudinal sólo se diferencia en un factor v_z en el integrando con respecto a la densidad antes calculada, de modo que si $\{\dots\}$ representa este último, entonces se tendrá simplemente para la densidad de corriente longitudinal:

$$\tilde{J}_{1p,l}^z = \int d^3V v_z \{\dots\} \quad (4.122)$$

4.3.3. Densidad de corriente transversal

Mediante el cambio de sistema de referencia (4.26), la densidad de corriente transversal para protones vendrá dada por:

$$J_{\pm} = e \int d^3V \left(V_{\pm} + \frac{\Omega_p}{k_0} \frac{B_0}{B_s} \zeta_{\pm} e^{\pm i\phi_0} \right) F_{1p}(\vec{\rho}, \vec{V}, t) \quad (4.123)$$

Ahora se debe invocar nuevamente la función de distribución a primer orden (4.114) y las expresiones explícitas de la velocidad de drift en (D.24) y (D.26). Hay muchas integrales que se anulan debido a que son impares en V_x y/o V_y . Las que sobreviven serán:

$$J_{\pm} = \frac{e\Omega_p n_{0p}}{B_s} \sum_l e^{-i\phi_l} \left\{ \frac{\omega_l}{k_l} \int d^3V V_{\pm} \left(\frac{V_- \tilde{B}_{1,l}^+}{\omega_l + \Omega_p - k_l v_z} - \frac{V_+ \tilde{B}_{1,l}^-}{\omega_l - \Omega_p - k_l v_z} \right) \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial V^2} \right. \quad (4.124)$$

$$\left. + i\tilde{E}_{1,l}^z \frac{\Omega_p}{k_0} \frac{B_0}{B_s} \int d^3V \frac{\zeta_{\pm} e^{\pm i\phi_0}}{\omega_l - k_l v_z} \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial v_z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_p}{k_0} \frac{B_0}{B_s} \right)^2 \left(\tilde{B}_{1,l-1}^+ - \tilde{B}_{1,l+1}^- \right) \int d^3V \frac{\zeta_{\pm}^2 e^{\pm i\phi_0}}{\omega_l - k_l v_z} \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial v_z} \right. \quad (4.125)$$

$$\left. + B_0 \int d^3V V_{\pm} \left(\frac{V_+ v_{d,l-1}^z}{\omega_l - \Omega_p - k_l v_z} - \frac{V_- v_{d,l+1}^z}{\omega_l + \Omega_p - k_l v_z} \right) \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial V^2} + \frac{\Omega_p}{2k_0} \frac{B_0^2}{B_s} \int d^3V \frac{-v_{d,l-1}^+ + v_{d,l+1}^-}{\omega_l - k_l v_z} \zeta_{\pm} e^{\pm i\phi_0} \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial v_z} \right. \quad (4.126)$$

Nótese que

$$\sum_l e^{-i\phi_l} \frac{\omega_l}{k_l} V_{\pm} \left(\frac{V_- \tilde{B}_{1,l}^+}{\omega_l + \Omega_p - k_l v_z} - \frac{V_+ \tilde{B}_{1,l}^-}{\omega_l - \Omega_p - k_l v_z} \right) = \pm \sum_l e^{-i\phi_l} \tilde{B}_{1,l\mp 1}^{\pm} \frac{\omega_{l\mp 1}}{k_{l\mp 1}} \frac{V_{\pm}^2}{\omega_{l\mp 1} \pm \Omega_p - k_{l\mp 1} v_z} \quad (4.127)$$

$$\sum_l e^{-i\phi_l} V_{\pm} \left(\frac{V_+ v_{d,l-1}^z}{\omega_l - \Omega_p - k_l v_z} - \frac{V_- v_{d,l+1}^z}{\omega_l + \Omega_p - k_l v_z} \right) = \mp \sum_l e^{-i\phi_l} \frac{V_{\pm}^2 v_{d,l}^z}{\omega_{l\mp 1} \pm \Omega_p - k_{l\mp 1} v_z} \quad (4.128)$$

en donde se ha usado, debido a la simetría cilíndrica del sistema, las integrales:

$$\int d^3V \frac{V_x^2}{\omega_l \pm \Omega_p - k_l v_z} \frac{\partial F_{0p}}{\partial V^2} = \int d^3V \frac{V_y^2}{\omega_l \pm \Omega_p - k_l v_z} \frac{\partial F_{0p}}{\partial V^2} \quad (4.129)$$

Con las identidades anteriores, el coeficiente de Fourier ($l \mp 1$)-ésimo de la densidad de corriente transversal será, al factorizar $e^{-i\phi_{l\mp 1}}$ y usar apropiadamente (2.33):

$$\tilde{J}_{1p,l\mp 1}^{\pm} = \frac{e\Omega_p n_0}{B_s} \left\{ \pm \tilde{B}_{1,l\mp 1}^{\pm} \frac{\omega_{l\mp 1}}{k_{l\mp 1}} \int d^3V \frac{V_{\perp}^2 \partial \hat{F}_{0p} / \partial V^2}{\omega_{l\mp 1} \pm \Omega_p - k_{l\mp 1} v_z} \right. \quad (4.130)$$

$$\left. + \frac{\Omega_p B_0}{k_0 B_s} \left[i \tilde{E}_{1,l}^z \int d^3V \frac{\zeta_+ \partial \hat{F}_{0p} / \partial v_z}{\omega_l - k_l v_z} + \frac{\Omega_p B_0}{2k_0 B_s} (\tilde{B}_{1,l-1}^+ - \tilde{B}_{1,l+1}^-) \int d^3V \frac{\zeta_+^2 \partial \hat{F}_{0p} / \partial v_z}{\omega_l - k_l v_z} \right] \right. \quad (4.131)$$

$$\left. \pm \frac{\Omega_p B_0}{B_s} \int d^3V \left[i \tilde{E}_{1,l}^z \left(\frac{\omega_{l\pm 1} - k_{l\pm 1} v_z \mp \Omega_p}{\Delta_{+,l}} \right) \right] \right. \quad (4.132)$$

$$\left. + \frac{1}{2} \frac{\Omega_p B_0}{B_s} \frac{\tilde{B}_{1,l-1}^+ \frac{\omega_{l-1}}{k_{l-1}} (\omega_{l+1} - k_{l+1} v_z - \Omega_p) + \tilde{B}_{1,l+1}^- \frac{\omega_{l+1}}{k_{l+1}} (\omega_{l-1} - k_{l-1} v_z + \Omega_p)}{\Delta_{+,l} (\omega_{l\mp 1} \pm \Omega_p - k_{l\mp 1} v_z)} \right] V_{\perp}^2 \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial V^2} \quad (4.133)$$

$$+ \frac{1}{k_0} \left(\frac{\Omega_p B_0}{B_s} \right)^2 \int d^3V \left[\frac{\Omega_p B_0}{B_s} i \tilde{E}_{1,l}^z \right. \quad (4.134)$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left(\tilde{B}_{1,l-1}^+ \frac{\omega_{l-1}}{k_{l-1}} (\omega_{l+1} - k_{l+1} v_z - \Omega_p) + \tilde{B}_{1,l+1}^- \frac{\omega_{l+1}}{k_{l+1}} (\omega_{l-1} - k_{l-1} v_z + \Omega_p) \right) \right] \zeta_+ \frac{\partial \hat{F}_{0p} / \partial v_z}{\Delta_{+,l}} \left. \right\} \quad (4.135)$$

en donde se ha definido la velocidad perpendicular como $V_{\perp}^2 = V_x^2 + V_y^2$. Agrupando términos semejantes, para el primer caso de signo se tiene:

$$\tilde{J}_{1p,l-1}^+ = \frac{en_0\Omega_p}{B_s} \int d^3V \left\{ \frac{\Omega_p B_0}{k_0 B_s} i \tilde{E}_{1,l}^z \left[\left(\frac{1}{\omega_l - k_l v_z} + \left(\frac{\Omega_p B_0}{B_s} \right)^2 \frac{1}{\Delta_{+,l}} \right) \zeta_+ \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial v_z} \right. \right. \quad (4.136)$$

$$\left. + k_0 \frac{\omega_{l+1} - \Omega - k_{l+1} v_z}{\Delta_{+,l}} V_{\perp}^2 \frac{\partial \hat{F}_0}{\partial V^2} \right] \quad (4.137)$$

$$+ \tilde{B}_{1,l-1}^+ \left[\frac{\omega_{l-1}}{k_{l-1}} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_p B_0}{B_s} \right)^2 (\omega_{l+1} - k_{l+1} v_z - \Omega_p) \frac{1}{\Delta_{+,l}} \right) \frac{V_{\perp}^2}{\omega_{l-1} + \Omega_p - k_{l-1} v_z} \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial V^2} \right. \quad (4.138)$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_p B_0}{k_0 B_s} \right)^2 \left(\frac{\zeta_+^2}{\omega_l - k_l v_z} + \frac{k_0 \omega_{l-1}}{k_{l-1}} (\omega_{l+1} - k_{l+1} v_z - \Omega_p) \frac{\zeta_+}{\Delta_{+,l}} \right) \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial v_z} \right] \quad (4.139)$$

$$+ \tilde{B}_{1,l+1}^- \left[\frac{\omega_{l+1}}{2k_{l+1}} \left(\frac{\Omega_p B_0}{B_s} \right)^2 \frac{V_{\perp}^2}{\Delta_{+,l}} \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial V^2} \right. \quad (4.140)$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_p B_0}{k_0 B_s} \right)^2 \left(-\frac{\zeta_+^2}{\omega_l - k_l v_z} + \frac{k_0 \omega_{l+1}}{k_{l+1}} (\omega_{l-1} - k_{l-1} v_z + \Omega_p) \frac{\zeta_+}{\Delta_{+,l}} \right) \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial v_z} \right] \left. \right\} \quad (4.141)$$

mientras que el otro es:

$$\tilde{J}_{1p,l+1}^- = \frac{en_0\Omega_p}{B_s} \int d^3V \left\{ \frac{\Omega_p B_0}{k_0 B_s} i\tilde{E}_{1,l}^z \left[\left(\frac{1}{\omega_l - k_l v_z} + \left(\frac{\Omega_p B_0}{B_s} \right)^2 \frac{1}{\Delta_{+,l}} \right) \zeta_+ \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial v_z} \right. \right. \quad (4.142)$$

$$\left. \left. - k_0 \frac{\omega_{l-1} + \Omega_p - k_{l-1} v_z}{\Delta_{+,l}} V_\perp^2 \frac{\partial \hat{F}_0}{\partial V^2} \right] \right. \quad (4.143)$$

$$\left. + \tilde{B}_{1,l-1}^+ \left[- \frac{\omega_{l-1}}{2k_{l-1}} \left(\frac{\Omega_p B_0}{B_s} \right)^2 \frac{V_\perp^2}{\Delta_{+,l}} \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial V^2} \right. \right. \quad (4.144)$$

$$\left. \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_p B_0}{k_0 B_s} \right)^2 \left(\frac{\zeta_+^2}{\omega_l - k_l v_z} + \frac{k_0 \omega_{l-1}}{k_{l-1}} (\omega_{l+1} - k_{l+1} v_z - \Omega_p) \frac{\zeta_+}{\Delta_{+,l}} \right) \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial v_z} \right] \right. \quad (4.145)$$

$$\left. + \tilde{B}_{1,l+1}^- \left[\frac{\omega_{l+1}}{k_{l+1}} \left(-1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_p B_0}{B_s} \right)^2 (\omega_{l-1} - k_{l-1} v_z + \Omega_p) \frac{1}{\Delta_{+,l}} \right) \frac{V_\perp^2}{\omega_{l+1} - \Omega_p - k_{l+1} v_z} \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial V^2} \right. \right. \quad (4.146)$$

$$\left. \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_p B_0}{k_0 B_s} \right)^2 \left(- \frac{\zeta_+^2}{\omega_l - k_l v_z} + \frac{k_0 \omega_{l+1}}{k_{l+1}} (\omega_{l-1} - k_{l-1} v_z + \Omega_p) \frac{\zeta_+}{\Delta_{+,l}} \right) \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial v_z} \right] \right\} \quad (4.147)$$

Así mismo, también será necesario calcular la diferencia entre estas cantidades, para lo cual se nota que todos los términos con derivada longitudinal $\partial \hat{F}_{0p} / \partial v_z$ se cancelan mutuamente. Y si además se tiene presente la identidad (4.121), se obtiene:

$$\tilde{J}_{1p,l-1}^+ - \tilde{J}_{1p,l+1}^- = \frac{en_0\Omega_p}{B_s} \left\{ \frac{2\Omega_p B_0}{B_s} i\tilde{E}_{1,l}^z \left[\int d^3V \frac{\omega_l - k_l v_z}{\Delta_{+,l}} V_\perp^2 \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial V^2} \right] \right. \quad (4.148)$$

$$\left. + \tilde{B}_{1,l-1}^+ \frac{\omega_{l-1}}{k_{l-1}} \left[\int d^3V \frac{(\omega_l - k_l v_z)(\omega_{l+1} - k_{l+1} v_z - \Omega_p)}{\Delta_{+,l}} V_\perp^2 \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial V^2} \right] \right. \quad (4.149)$$

$$\left. + \tilde{B}_{1,l+1}^- \frac{\omega_{l+1}}{k_{l+1}} \left[\int d^3V \frac{(\omega_l - k_l v_z)(\omega_{l-1} - k_{l-1} v_z + \Omega_p)}{\Delta_{+,l}} V_\perp^2 \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial V^2} \right] \right. \quad (4.150)$$

4.4. Relación de dispersión cinética

4.4.1. Ley de Ohm generalizada

Para considerar a los electrones sin masa en la descripción del plasma, se buscará una ecuación que exprese el campo eléctrico longitudinal en función de variables asociadas a los protones, ya calculadas. Para ello, se debe considerar la ecuación de Ampère para bajas frecuencias (1.5) con la corriente total dada por $\vec{J} = \vec{J}_e + \vec{J}_p$, y en vista de (1.11), se satisfará:

$$\vec{J}_e = -en_e \vec{V}_e = \left(\frac{\nabla \times \vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}_p \right) \quad (4.151)$$

Por otra parte, dado que los electrones se comportan como un fluido sin masa (al igual que en la discusión del código híbrido de simulación (2.103)), se tiene también la ecuación de momentum (1.20) en el límite $m_e \rightarrow 0$:

$$0 = -n_e e (\vec{E} + \vec{V}_e \times \vec{B}) - \nabla P_e \quad (4.152)$$

Combinando ambas relaciones, se puede despejar el campo eléctrico en la forma:

$$\vec{E} = - \frac{\vec{J}_p \times \vec{B}}{en_e} + \frac{(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}}{\mu_0 en_e} - \frac{\nabla P_e}{en_e} \quad (4.153)$$

Es decir, se expresa el campo eléctrico en función de cantidades referidas únicamente a los protones, relación conocida como *Ley de Ohm generalizada* (ver discusión posterior a la ecuación (1.27) y el artículo [Araneda et al., 2007]).

Componente paralela

La componente z de la ley de Ohm será, en virtud de las definiciones de cantidades transversales (2.11):

$$en_e E^z = - (J_p^x B^y - J_p^y B^x) + \frac{1}{\mu_0} \left(-\frac{\partial B^y}{\partial z} B^y - \frac{\partial B^x}{\partial z} B^x \right) - \frac{\partial P_e}{\partial z} \quad (4.154)$$

$$= -\frac{i}{2} (J_p^+ B^- - J_p^- B^+) - \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial (B^+ B^-)}{\partial z} - \frac{\partial P_e}{\partial z} \quad (4.155)$$

Linealizando sobre el estado de equilibrio descrito en la sección 1.5.2, se tiene a orden 1:

$$en_0 e E_1^z = -\frac{i}{2} (J_{1p}^+ B_0^- - J_{1p}^- B_0^+) - \frac{i}{2} (J_{0p}^+ B_1^- - J_{0p}^- B_1^+) - \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} (B_0^+ B_1^- + B_1^+ B_0^-) - \frac{\partial P_{1e}}{\partial z} \quad (4.156)$$

Reemplazando la descomposición de Fourier de cada cantidad, y usando las relaciones (2.33) y (4.49), se tiene para el coeficiente l -ésimo la ecuación:

$$en_0 \tilde{E}_{1,l}^z = \frac{i}{2} \left[-B_0 (\tilde{J}_{1p,l-1}^+ - \tilde{J}_{1p,l+1}^-) - en_0 \tilde{V}_{0p}^\perp (\tilde{B}_{1,l+1}^- - \tilde{B}_{1,l-1}^+) + \frac{B_0 k_l}{\mu_0} (\tilde{B}_{1,l+1}^- + \tilde{B}_{1,l-1}^+) \right] + ik_l \tilde{P}_{1e,l} \quad (4.157)$$

Suponiendo una ecuación de estado adiabática para electrones, se puede escribir la presión en términos de la densidad de la densidad por (2.20). Luego, apelando a la cuasineutralidad perturbada y agrupando términos semejantes, se tiene:

$$i\tilde{E}_{1,l}^z = \frac{1}{2} \left[\tilde{B}_{1,l-1}^+ \left(-\tilde{V}_{0p}^\perp - \frac{k_l B_0}{\mu_0 en_0} \right) + \tilde{B}_{1,l+1}^- \left(\tilde{V}_{0p}^\perp - \frac{k_l B_0}{\mu_0 en_0} \right) + \frac{B_0}{en_0} (\tilde{J}_{1p,l-1}^+ - \tilde{J}_{1p,l+1}^-) \right] - k_l \gamma_e k_B T_e \frac{\tilde{\rho}_{1p,l}}{e^2 n_0} \quad (4.158)$$

Componente transversal

Sumando las componentes transversales de la Ley de Ohm (4.153) en la forma (Ec X) $\pm i$ (Ec Y):

$$en_e E^\pm = \pm i B^z J_p^\pm \mp i J_p^z B^\pm + \frac{B^z}{\mu_0} \frac{\partial B^\pm}{\partial z} \quad (4.159)$$

Linealizando sobre el estado de equilibrio mencionado, recordando la nulidad (2.23), se obtiene:

$$en_0 e E_1^\pm + en_{1e} E_0^\pm = \pm i B_s J_{1p}^\pm \mp i J_{1p}^z B_0^\pm + \frac{B_s}{\mu_0} \frac{\partial B_1^\pm}{\partial z} \quad (4.160)$$

Reemplazando cada términos por su expansión de Fourier, y seleccionando el coeficiente de Fourier $l \mp 1$, se tiene

$$en_0 \tilde{E}_{1\pm,l\mp 1} = -e \tilde{E}_0^\pm \tilde{n}_{1e,l} \pm i B_s \tilde{J}_{1p,l\mp 1}^\pm \mp i B_0 \tilde{J}_{1p,l}^z - i \frac{B_s}{\mu_0} k_{l\mp 1} \tilde{B}_{1,l\mp 1}^\pm \quad (4.161)$$

Escribiendo los campos eléctricos en función de los magnéticos mediante (1.77) y (2.22), apelando a la cuasineutralidad perturbada y reordenando, se tiene:

$$\tilde{B}_{1,l\mp 1}^\pm \left(1 \pm \frac{\mu_0 en_0 \omega_{l\mp 1}}{B_s k_{l\mp 1}^2} \right) = \pm \frac{\mu_0}{k_{l\mp 1}} \left[\frac{B_0}{B_s} \left(-\frac{\omega_0}{k_0} \tilde{\rho}_{1p,l} + \tilde{J}_{1p,l}^z \right) - \tilde{J}_{1p,l\mp 1}^\pm \right] \quad (4.162)$$

4.4.2. Ecuación de dispersión longitudinal

Considerando (4.158), sólo resta reemplazar las cantidades cinéticas calculadas previamente con la función de distribución para protones: la densidad de carga $\tilde{\rho}_{1p,l}$, la diferencia entre densidades de corrientes transversales $\tilde{J}_{1p,l-1}^+ - \tilde{J}_{1p,l+1}^-$ y también la velocidad macroscópica a orden 0: V_{0p} . De este modo, después de agrupar términos

semejantes, (4.158) es:

$$i\tilde{E}_{1z,l} = i\tilde{E}_{1z,l} \int d^3V \left\{ -\frac{\gamma_e k_B T_e}{m_p} k_l \left[\frac{1}{\omega_l - k_l v_z} + \left(\frac{\Omega_p B_0}{B_s} \right)^2 \frac{1}{\Delta_{+,l}} \right] \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial v_z} + \left(\frac{\Omega_p B_0}{B_s} \right)^2 \left[\frac{\omega_l - k_l v_z}{\Delta_{+,l}} V_\perp^2 \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial V^2} \right] \right\} \quad (4.163)$$

$$\frac{\tilde{B}_{1,l-1}^+}{2} \left\{ -\tilde{V}_{0p}^\perp - \frac{k_l B_0}{\mu_0 e n_0} - \frac{\gamma_e k_B T_e}{m_p} \frac{\Omega_p B_0}{B_s} k_l \int d^3V \left[\frac{1}{k_0} \frac{\zeta_+}{\omega_l - k_l v_z} + \frac{\omega_{l-1} \omega_{l+1} - k_{l+1} v_z - \Omega_p}{k_{l-1} \Delta_{+,l}} \right] \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial v_z} \right. \quad (4.164)$$

$$\left. + \frac{\Omega_p B_0}{B_s} \frac{\omega_{l-1}}{k_{l-1}} \int d^3V \frac{(\omega_l - k_l v_z)(\omega_{l+1} - k_{l+1} v_z - \Omega_p)}{\Delta_{+,l}} V_\perp^2 \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial V^2} \right\} \quad (4.165)$$

$$+ \frac{\tilde{B}_{1,l+1}^-}{2} \left\{ \tilde{V}_{0p}^\perp - \frac{k_l B_0}{\mu_0 e n_0} - \frac{\gamma_e k_B T_e}{m_p} \frac{\Omega_p B_0}{B_s} \int d^3V \left[\frac{-1}{k_0} \frac{\zeta_+}{\omega_l - k_l v_z} + \frac{\omega_{l+1} \omega_{l-1} - k_{l-1} v_z + \Omega_p}{k_{l+1} \Delta_{+,l}} \right] \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial v_z} \right. \quad (4.166)$$

$$\left. + \frac{\Omega_p B_0}{B_s} \frac{\omega_{l+1}}{k_{l+1}} \int d^3V \frac{(\omega_l - k_l v_z)(\omega_{l-1} - k_{l-1} v_z + \Omega_p)}{\Delta_{+,l}} V_\perp^2 \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial V^2} \right\} \quad (4.167)$$

Cada una de las integrales anteriores se calcula explícitamente en el apéndice E.2, quedando todas expresadas en términos de la función Z de plasma (C.1). Así, es posible reescribir la relación previa en la forma:

$$(\epsilon_s - M_{ss}) i\tilde{E}_{1,l}^z = M_{s+} V_A \tilde{B}_{1,l-1}^+ + M_{s-} V_A \tilde{B}_{1,l+1}^- \quad (4.168)$$

en donde cada término, apropiadamente normalizado, está dado en el apéndice (F.4). Nótese que ϵ_s se escoge independiente de la amplitud B_0 .

4.4.3. Ecuaciones de dispersión transversales

Análogamente al caso longitudinal, ahora sólo resta reemplazar las cantidades cinéticas calculadas previamente con la función de distribución para protones, notando primero que al sustituir $\tilde{J}_{1p,l}^z$ se puede factorizar $\tilde{\rho}_{1p,l}$. Luego, se debe reemplazar la expresión cinética para la densidad de carga $\tilde{\rho}_{1p,l}$ y corriente transversal $\tilde{J}_{1p,l}^\pm$. Así, notando que

$$(\omega_0 - k_0 v_z) + \Omega_p \zeta_+ = (\omega_0 - k_0 v_z) \zeta_+, \quad (4.169)$$

se tiene para el primer caso de signo transversal de (4.162):

$$\tilde{B}_{1,l-1}^+ \left(1 - \frac{\mu_0 e n_0}{B_s} \frac{\omega_{l-1}}{k_{l-1}^2} \right) = \frac{\mu_0 e n_0 \Omega_p}{B_s k_{l-1}} \int d^3V \left\{ -i\tilde{E}_{1,l}^z \frac{B_0}{B_s} \left[\Omega_p \frac{\omega_{l+1} - k_{l+1} v_z - \Omega_p}{\Delta_{+,l}} V_\perp^2 \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial V^2} \right. \right. \quad (4.170)$$

$$\left. + \frac{1}{k_0} \frac{(\omega_{l-1} - k_{l-1} v_z + \Omega_p)(\omega_{l+1} - k_{l+1} v_z - \Omega_p)}{\Delta_{+,l}} (\omega_0 - k_0 v_z) \zeta_+ \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial v_z} \right] \quad (4.171)$$

$$+ \tilde{B}_{l-1}^+ \left[-\frac{\Omega_p}{2k_0} \left(\frac{B_0}{B_s} \right)^2 \left(\frac{1}{k_0} \frac{\omega_0 - k_0 v_z}{\omega_l - k_l v_z} \zeta_+^2 + \frac{\omega_{l-1} \omega_{l+1} - k_{l+1} v_z - \Omega_p}{k_{l-1} \Delta_{+,l}} (\omega_0 - k_0 v_z) \zeta_+ \right) \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial v_z} \right. \quad (4.172)$$

$$\left. - \frac{\omega_{l-1}}{k_{l-1}} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_p B_0}{B_s} \right)^2 (\omega_{l+1} - k_{l+1} v_z - \Omega_p) \frac{1}{\Delta_{+,l}} \right) \frac{V_\perp^2}{\omega_{l-1} + \Omega_p - k_{l-1} v_z} \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial V^2} \right] \quad (4.173)$$

$$+ \tilde{B}_{l+1}^- \left[\frac{\Omega_p}{2k_0} \left(\frac{B_0}{B_s} \right)^2 \left(\frac{1}{k_0} \frac{\omega_0 - k_0 v_z}{\omega_l - k_l v_z} \zeta_+^2 - \frac{\omega_{l+1} \omega_{l-1} - k_{l-1} v_z + \Omega_p}{k_{l+1} \Delta_{+,l}} (\omega_0 - k_0 v_z) \zeta_+ \right) \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial v_z} \right. \quad (4.174)$$

$$\left. - \frac{\omega_{l+1}}{2k_{l+1}} \left(\frac{\Omega_p B_0}{B_s} \right)^2 \frac{V_\perp^2}{\Delta_{+,l}} \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial V^2} \right] \left. \right\} \quad (4.175)$$

Así, y de forma similar al caso longitudinal, la ecuación anterior puede quedar en la forma:

$$(\epsilon_+ - M_{+,+}) \tilde{B}_{1,l-1}^+ = M_{+,s} i \frac{\tilde{E}_{1,l}^z}{V_A} + M_{+,-} \tilde{B}_{1,l+1}^- \quad (4.176)$$

en donde cada término está dado en el apéndice F.4, con ϵ_+ independiente de la amplitud B_0 . Y de forma completamente análoga, se tiene para el segundo caso de signo:

$$\tilde{B}_{1,l+1}^- \left(1 + \frac{\mu_0 e n_0 \omega_{l+1}}{B_s k_{l+1}^2} \right) = -\frac{\mu_0 e n_0 \Omega_p}{B_s k_{l+1}} \int d^3V \left\{ -i \tilde{E}_{1,l}^z \frac{B_0}{B_s} \left[-\Omega_p \frac{\omega_{l-1} - k_{l-1} v_z + \Omega_p}{\Delta_{+,l}} V_\perp^2 \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial V^2} \right. \right. \quad (4.177)$$

$$\left. + \frac{1}{k_0} \frac{(\omega_{l-1} - k_{l-1} v_z + \Omega_p)(\omega_{l+1} - k_{l+1} v_z - \Omega_p)}{\Delta_{+,l}} (\omega_0 - k_0 v_z) \zeta_+ \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial v_z} \right] \quad (4.178)$$

$$+ \tilde{B}_{l-1}^+ \left[-\frac{\Omega_p}{2k_0} \left(\frac{B_0}{B_s} \right)^2 \left(\frac{1}{k_0} \frac{\omega_0 - k_0 v_z}{\omega_l - k_l v_z} \zeta_+^2 + \frac{\omega_{l-1}}{k_{l-1}} \frac{\omega_{l+1} - k_{l+1} v_z - \Omega_p}{\Delta_{+,l}} (\omega_0 - k_0 v_z) \zeta_+ \right) \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial v_z} \right. \quad (4.179)$$

$$\left. + \frac{\omega_{l-1}}{2k_{l-1}} \left(\frac{\Omega_p B_0}{B_s} \right)^2 \frac{V_\perp^2}{\Delta_{+,l}} \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial V^2} \right] \quad (4.180)$$

$$+ \tilde{B}_{l+1}^- \left[\frac{\Omega_p}{2k_0} \left(\frac{B_0}{B_s} \right)^2 \left(\frac{1}{k_0} \frac{\omega_0 - k_0 v_z}{\omega_l - k_l v_z} \zeta_+^2 - \frac{\omega_{l+1}}{k_{l+1}} \frac{\omega_{l-1} - k_{l-1} v_z + \Omega_p}{\Delta_{+,l}} (\omega_0 - k_0 v_z) \zeta_+ \right) \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial v_z} \right. \quad (4.181)$$

$$\left. + \frac{\omega_{l+1}}{k_{l+1}} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_p B_0}{B_s} \right)^2 \frac{V_\perp^2}{\Delta_{+,l}} \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial V^2} \right) \right] \left. \right\} \quad (4.182)$$

con lo cual es posible escribir:

$$(\epsilon_- - M_{-,-}) \tilde{B}_{1,l+1}^- = M_{-,s} i \frac{\tilde{E}_{1,l}^z}{V_A} + M_{-,+} \tilde{B}_{1,l-1}^+ \quad (4.183)$$

en donde cada término está dado en el apéndice F.4, con ϵ_- independiente de la amplitud B_0 .

4.4.4. Relación de dispersión

Es evidente ahora que se pueden combinar los resultados de las ecuaciones de dispersión longitudinal (4.168) y transversal (4.176)-(4.183) en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_s - M_{ss} & -M_{s+} & -M_{s-} \\ -M_{+s} & \epsilon_+ - M_{+,+} & -M_{+,-} \\ -M_{-s} & -M_{-,+} & \epsilon_- - M_{-,-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \tilde{E}_{1,l}^z / V_A \\ \tilde{B}_{1,l-1}^+ \\ \tilde{B}_{1,l+1}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.184)$$

que es un sistema homogéneo de tres ecuaciones anterior para las variables $\tilde{E}_{1,l}^z$, $\tilde{B}_{1,l-1}^+$, $\tilde{B}_{1,l+1}^-$, por lo que tendrá solución no trivial si y sólo si su determinante es nulo, proporcionando así la relación de dispersión buscada entre las variables ω_l y k_l . De acuerdo al teorema de Floquet (sección B) y debido al acople entre los coeficientes l con $l \pm 1$, puede escogerse $l = 0$ y definirse la frecuencia y número de onda en la misma forma que (B.5) y (B.6), de modo tal que:

$$\boxed{(\epsilon_s - M_{ss}) \left[(\epsilon_+ - M_{+,+})(\epsilon_- - M_{-,-}) - M_{-,+} M_{+,-} \right] - M_{s+} \left[M_{+s}(\epsilon_- - M_{-,-}) + M_{-s} M_{+,-} \right] - M_{s-} \left[M_{-s}(\epsilon_+ - M_{+,+}) + M_{+s} M_{-,+} \right] = 0} \quad (4.185)$$

4.5. Modelo completamente cinético: Resultados numéricos

La relación de dispersión anterior se puede resolver con el mismo método usado en el caso cinético híbrido de la sección 2.7.1. A diferencia de dicho caso, aquí el cálculo es bastante más complejo, involucrando una gran número de cantidades en términos de la función zeta con distintos argumentos (dado en la sección F.3.1).

4.5.1. Límite de amplitud nula

Con la misma elección de parámetros que en la figura 2.22 para amplitud nula de la pump con el modelo cinético-híbrido, es posible calcular las curvas a nivel 0 de la relación de dispersión cinética (4.185), cuyas intersecciones proveen los ω_r y γ para un k dado:

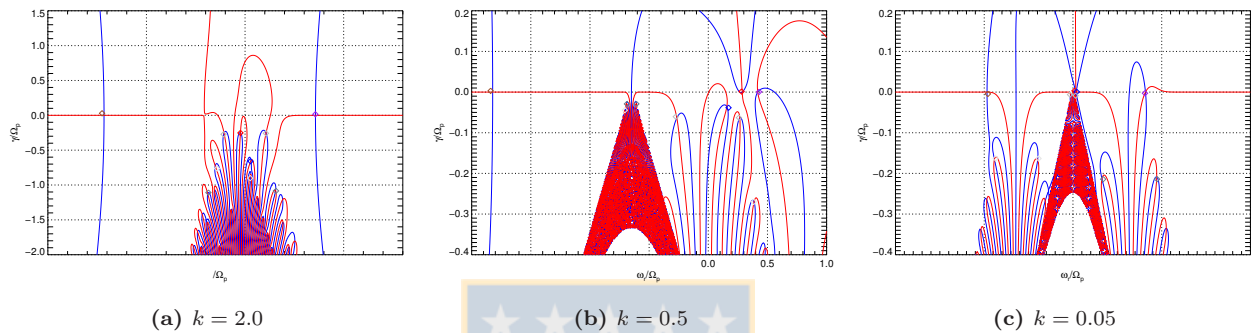


Figura 4.8: Curvas de nivel en azul (2.101) y en rojo (2.102) para los valores de k indicados. Parámetros: $A = 0$, $X_0 = 0.35$, $\beta_e^K = 0.1$, $\gamma_e = 1$ y $\tilde{\beta}_p = 0.1$. La iteración en k va de valores mayores a menores. Cada intersección está indicada con un código de colores. Los grises indican modos acústicos.

La distribución de las curvas de nivel es bastante distinta a la del caso cinético híbrido de la figura 2.22. Existe una superposición de al menos dos tipos de curvas de nivel para $k = 2.0$, una con estrecha y otra con amplia separación. Para k muy pequeños, tal como el mostrado en $k = 0.05$, se distinguen claramente tres tipos de intersecciones de curvas de nivel: una centrada en 0 que proporciona los familiares modos acústicos ligeramente amortiguados (para este valor de k), y otras dos centradas en $X = \pm|1 - X_0|$, que proporcionan unos modos más fuertemente amortiguados que los acústicos, pero con una relación de dispersión con pendiente constante y creciente similares a ellos. Algunos de ellos se pueden observar en los siguientes diagramas de dispersión (equivalente a los de la figura 2.23):

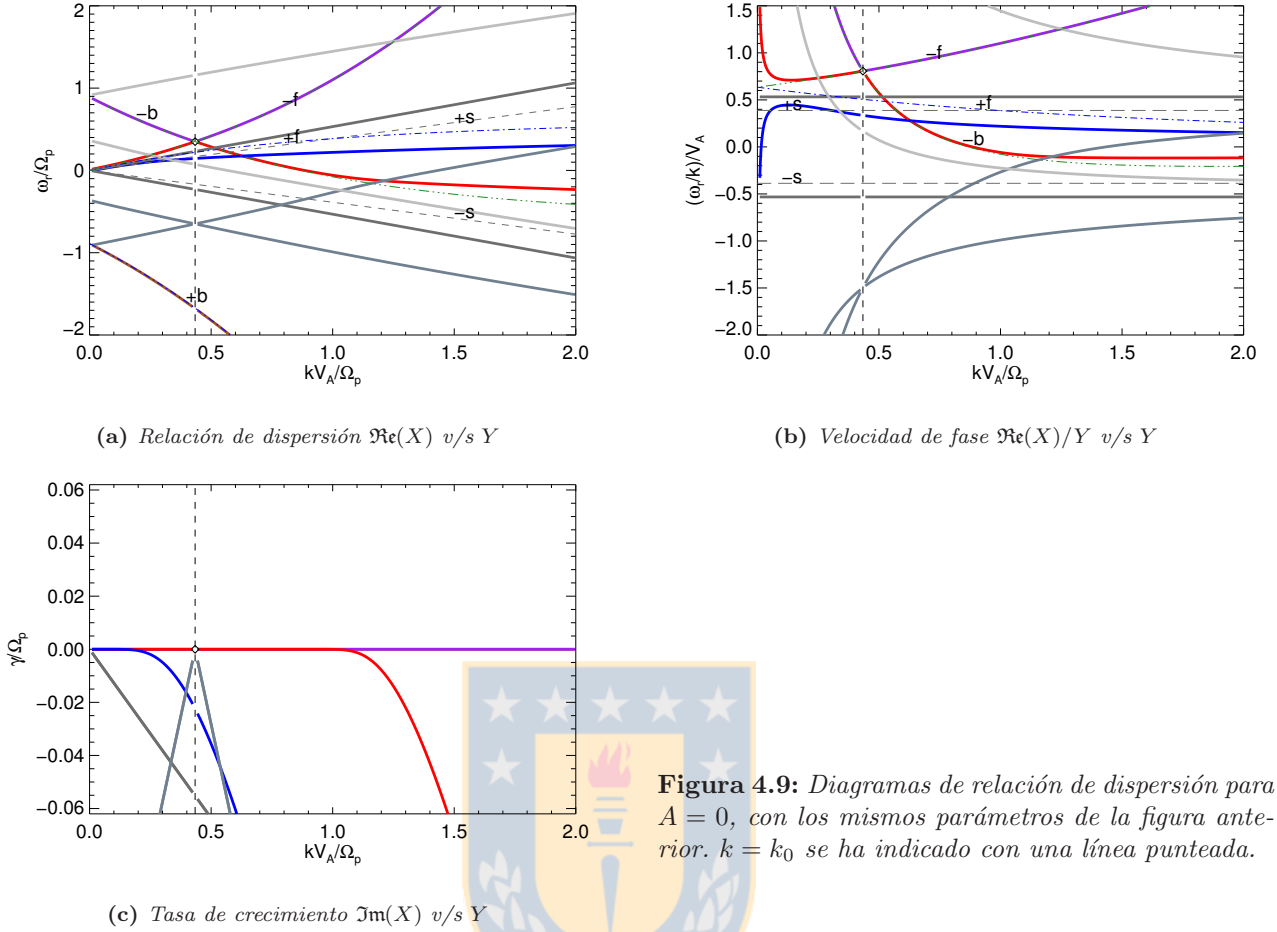


Figura 4.9: Diagramas de relación de dispersión para $A = 0$, con los mismos parámetros de la figura anterior. $k = k_0$ se ha indicado con una línea punteada.

Aquí se infiere que los modos cercanos a $X = \pm|1 - X_0|$ para $Y \rightarrow 0$ mencionados, provienen de la relación de dispersión para la onda pump mostrada en (4.6), al igual que los de las bandas laterales $\pm f$ y $\pm b$. Es decir, dichos modos son el resultado de un desplazamiento rígido de la onda pump usada (4.53)³, de la misma forma que en modelo de fluidos y cinético híbridos (y discutidos extensivamente allí). Luego, recordando la discusión que sigue a (4.6), las bandas laterales $-f$ y $+b$ “heredarán” una tasa de crecimiento $\gamma = 0$ (inestables ni amortiguadas), coincidiendo exactamente con sus contrapartes conocidas de teoría de fluidos (figura 2.4) y cinético híbridos (figura 2.23). Pero, por la misma razón, las bandas laterales $+f$ y $-b$ presentarán un amortiguamiento inexistente en dichos modelos, desde k mayor a un cierto valor, en el que además sus curvas ω_r comenzarán a desviarse del resultado conocido de fluidos. Este k crítico es mayor para la banda lateral inferior $-b$, que para la banda lateral superior $+f$, y depende de β_p en la forma indicada en la discusión de la figura 4.7. Ello tiene como consecuencia que la rama que más discrepa en su velocidad de fase con respecto al resultado cinético-híbrido es $+f$, tal como se aprecia en el correspondiente diagrama. También cabe mencionar que la velocidad de fase de dicho modo y de $-f$ tienden a diverger para $k \rightarrow 0$. Por último, también se observan los ya clásicos modos acústicos fuertemente amortiguados, de la misma forma que en el modelo cinético-híbrido y distinguiéndose de los demás por su velocidad de fase constante. Notar también que el par de (nuevos) modos cercanos a $X = -|1 - X_0|$ para $Y \rightarrow 0$ tienen un amortiguamiento que llega a cero para $Y \rightarrow Y_0$ (i.e.: presentan un peak en γ allí), decayendo muy fuertemente para todo número de onda distinto de áquel. En cambio, el par de (nuevos) modos cercanos a $X = |1 - X_0|$ para $Y \rightarrow 0$, presentan un fuerte amortiguamiento que se va reduciendo monótonamente conforme Y decrece.

³Recordar que es una expresión aproximada a la relación exacta (1.95). Los valores de X_0 y Y_0 usados son los dados por la expresión exacta, que discrepan muy poco de la aproximación usada en el rango de parámetros escogidos.

4.5.2. Caso estándar

Siguiendo el orden ya acostumbrado, ahora se procederá a activar la onda pump con una amplitud $A = 0.09$, la misma usada en el modelo cinético-híbrido según la figura 2.23. No vale la pena mostrar las curvas de nivel del método de solución análogas a las de 4.8, ya que la estructura general varía muy poco de dicho caso de amplitud nula. Así, los diagramas de dispersión respectivos serán:

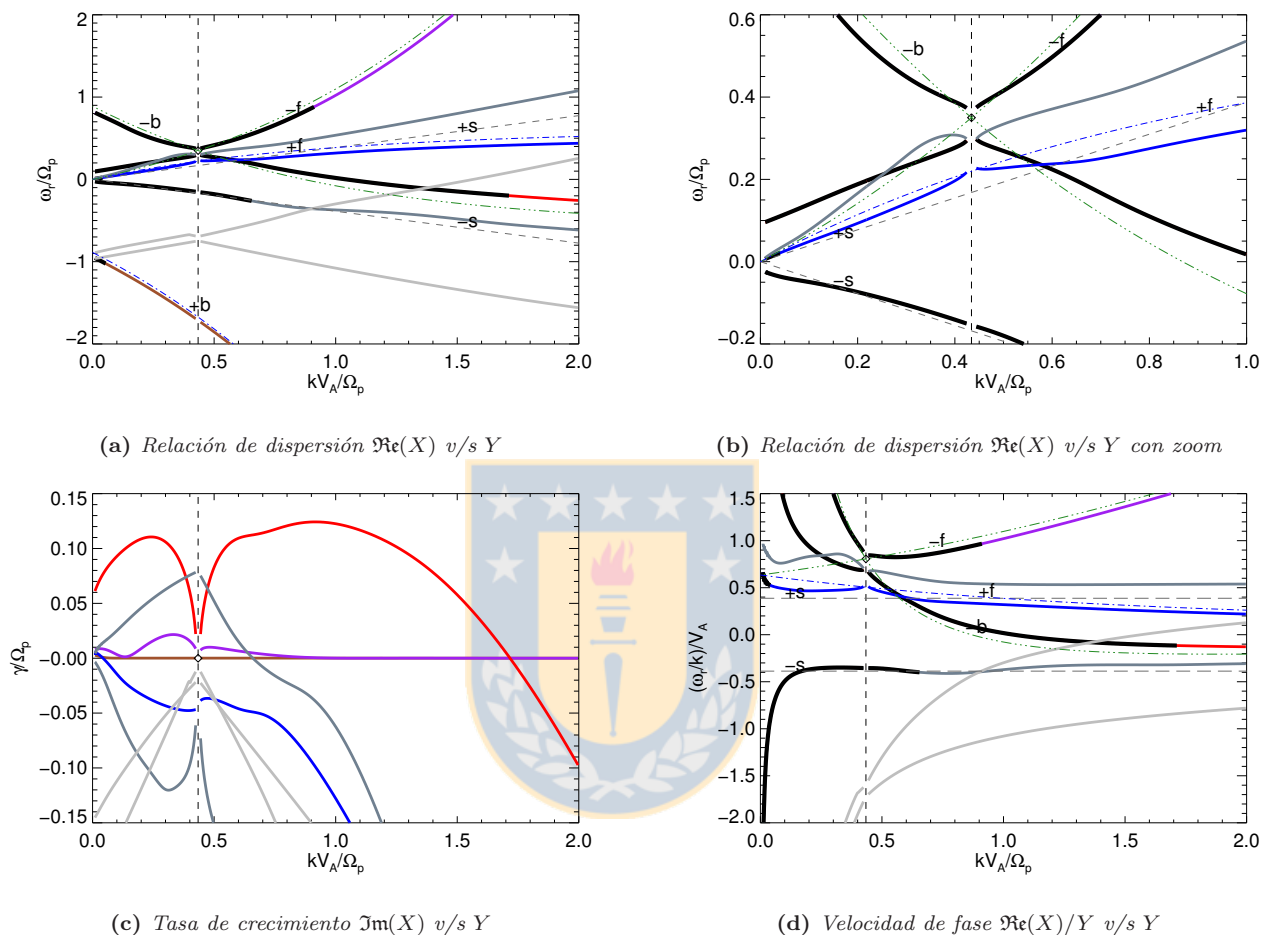


Figura 4.10: Diagramas de relación de dispersión con $A = 0.3^2$. Los restantes parámetros son los mismos anteriores

Esperablemente, todas las curvas ω_r para las bandas laterales se desplazan ligeramente de las soluciones de fluidos con $A = 0$, aunque la forma en que lo hacen discrepa anómalamente de los modelos previos. En efecto, la rama $-f$ se desplaza en la dirección contraria (hacia abajo) de la mostrada en 2.6a (y también en este modelo 4.9a) para $k > k_0$ mientras que para $k < k_0$ discrepa lo suficiente como para no llegar a $\omega \rightarrow 0$ para $k \rightarrow 0$. En cambio, la rama $+b$ se desplaza en la misma dirección predicha por los otros modelos, aunque en mayor grado. La rama $-b$, que se encuentra amortiguada en $A = 0$ según 4.9a, experimenta una separación igualmente en la misma dirección (arriba) que la antes predicha para $k < k_0$, mientras que la situación se invierte para $k > k_0$. Por otra parte, la rama $+f$ se desplaza en dirección contraria a la indicada en otros modelos, aunque como se encuentra fuertemente amortiguada para $A = 0$, el efecto neto es que queda casi en la misma posición que la predicha por fluidos 2.6a. Por último, las ramas acústicas menos amortiguadas presentan un comportamiento similar a lo encontrado con modelos previos. También se ha mostrado, al igual que en el caso sin pump 4.9, un par de nuevas ramas que llegan a $X = -1$ para $Y \rightarrow 0$, debido a que son las menos amortiguadas (las que llegan cerca de $X = 1$ para $Y \rightarrow 0$ están mucho más amortiguadas).

Si bien el panorama general muestra un relativamente buen acuerdo para las curvas de dispersión, la situación para las tasas de crecimiento es mucho más sombría. A pesar que se observa una especie de inestabilidad

fusionada beam decay en la rama $-b$ para $k > k_0$, sus tasas de crecimiento y rangos en k son excesivamente grandes comparados con modelos previos (unas cuatro (!) veces mayores). Además, aparecen inestabilidades inexistentes y desconocidas en las ramas $-f$ y $+s$ para $k > k_0$. Para $k < k_0$, se tiene la usual inestabilidad modulacional en $-f$, aunque con tasas de crecimiento gigantescas similares a decay y beat; además de dos inestabilidades gigantescas en $-f$ y $+s$, que no tienen explicación ni significado físico alguno dentro de la teoría previamente desarrollada.

En resumen, la concordancia de las curvas ω_r con las soluciones conocidas de modelos previos es relativamente buena, pero sus tasas de crecimiento exhiben comportamientos muy extraños y no físicos.

Variando parámetros

¿Mejorará esta situación con otras elecciones de parámetros? Para responder a ello, se analizará un caso poco dispersivo y con la amplitud de la pump un tanto más débil:

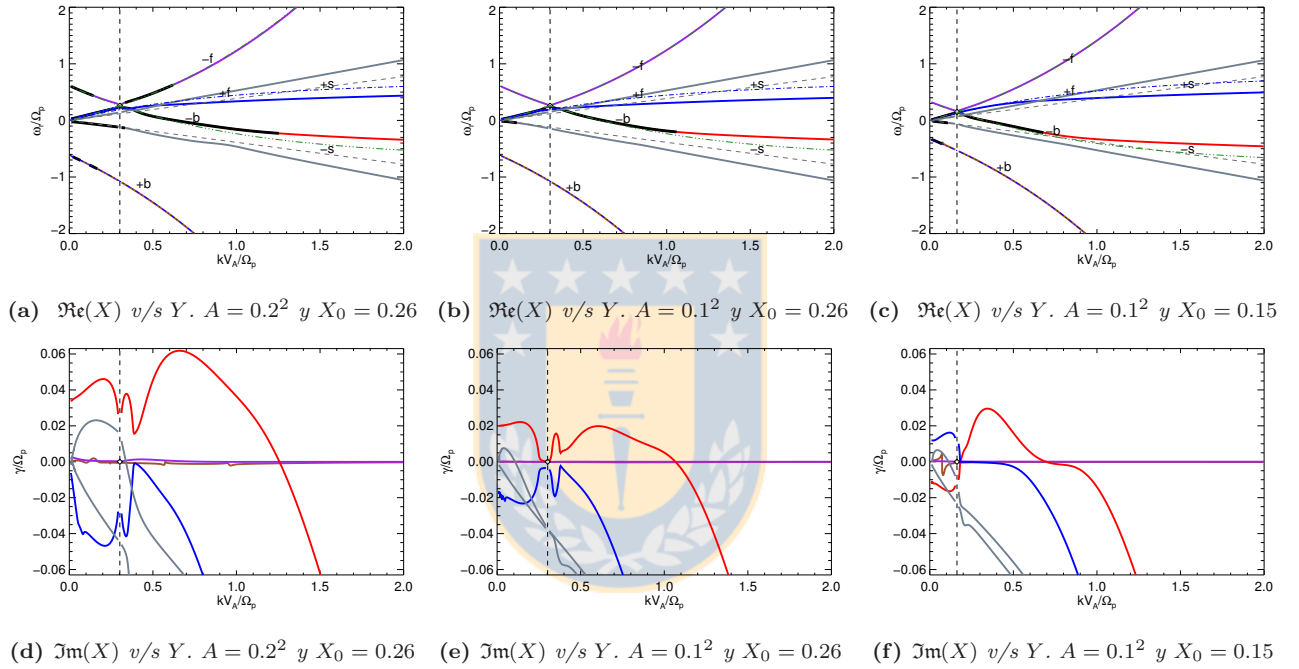


Figura 4.11: Diagramas de relación de dispersión con $\beta_e^K = 0.1$ y $\tilde{\beta}_p = 0.1$ y varias combinaciones de X_0 y A . No se han mostrado los nuevos modos altamente amortiguados que surgen en estas situaciones, sino que sólo los 6 ya conocidos que también aparecen en las relaciones de dispersión previas.

- Tal como se podía suponer, la situación para las tasas de crecimiento de las tres inestabilidades conocidas mejora bastante en la figura de la izquierda, en la que se ha reducido tanto A como X_0 con respecto al caso estándar 4.10, asemejándose un poco más a la típica estructura de inestabilidades de fluidos, aunque de todas formas con γ 's mucho mayores que los predichos (que son del orden de $\gamma \sim 0.01$).
- Comparando las figuras, se puede inferir que la inestabilidad decay para $k > k_0$ no es muy sensitiva a la variación de la frecuencia, aunque sí las inestabilidades situadas a $k < k_0$, lo que representa un comportamiento anómalo a lo conocido de fluidos (todas se debilitan para frecuencias menores. Ver figura 2.16)
- El parámetro determinante para predecir las tasas de crecimiento generales de las inestabilidades es la amplitud A . El valor usado en la primera figura 4.10, $A = 0.3^2$, es lo suficientemente grande para que las aproximaciones usadas en la relación de dispersión introduzcan inestabilidades espurias en ciertas ramas. Ellas se reducen significativamente al disminuir la amplitud de la pump, hasta el grado que en la figura de la derecha (en donde $B_0 = 0.1B_s$), la morfología de las tasas de crecimiento sea muy similar a lo conocido de los modelos antes descritos.

- A pequeños sería una excelente aproximación a los modelos antes descritos salvo por dos detalles: el primero es que los γ predichos son mucho mayores que los modelos previos. Por ej., en la última figura, $\gamma_{max} \sim 0.002$ según el modelo cinético-híbrido, un orden de magnitud menor a lo allí mostrado. El segundo detalle es que la inestabilidad modulacional tiene una tasa de crecimiento $\gamma \neq 0$ para $k \rightarrow 0$, representando una situación difícilmente realizable físicamente: ondas de muy larga longitud de onda son inestables, contrario a lo comúnmente observado.

Las soluciones de la relación de dispersión usada ¿obedecen los mismos comportamientos al cambiar la proporción entre el beta electrónico y protónico que la descrita con el modelo cinético-híbrido? Para responder a ello, se usarán los parámetros apropiados de la tercera figura anterior 4.11b y tratando de emular el análisis de la figura 2.26

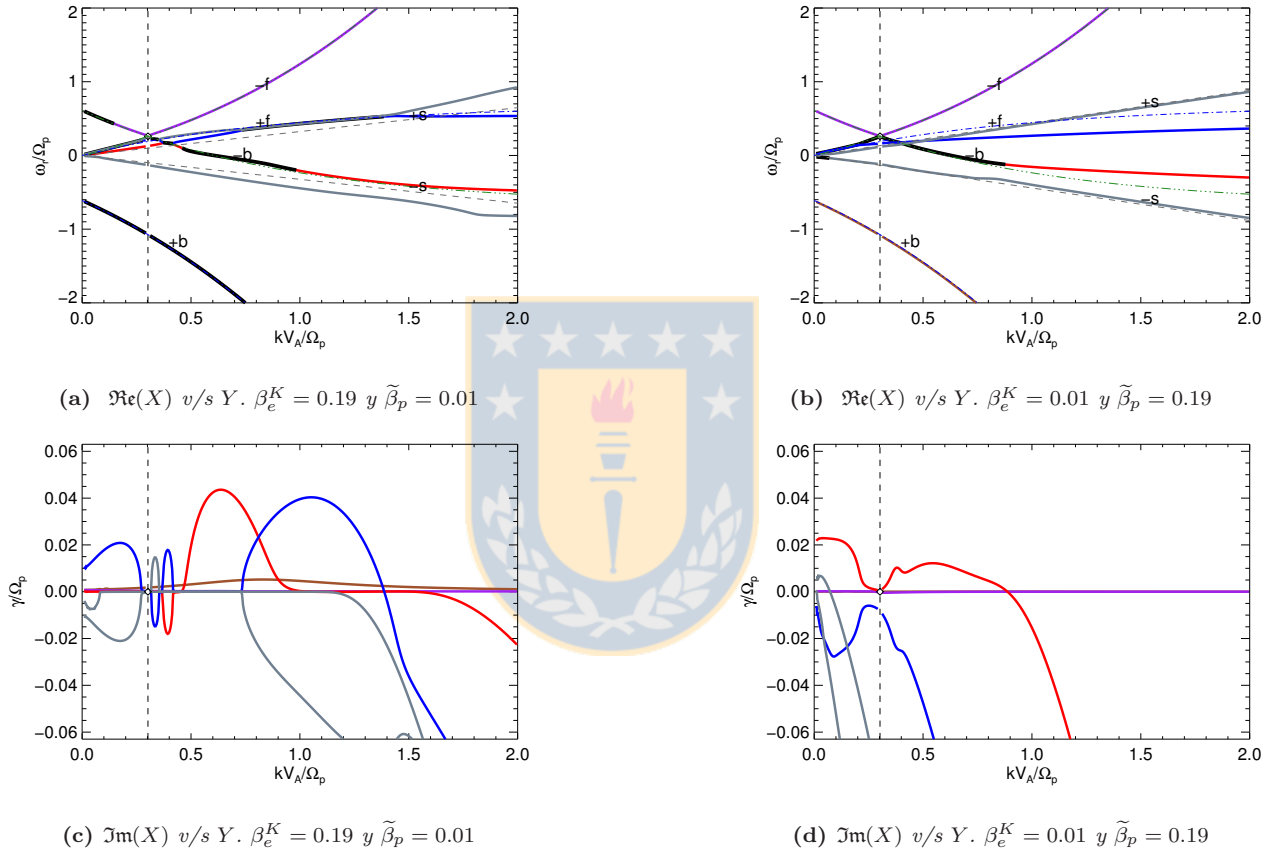


Figura 4.12: Diagramas de relación de dispersión con $A = 0.1^2$ y $X_0 = 0.26$, para dos combinaciones de beta's, con $\beta^K = \beta_e^K + \tilde{\beta}_p$ constante. Izquierda: caso tipo fluido. Derecha: caso tipo cinético.

- En el caso tipo cinético de la figura derecha, con β_e predominante, se nota que la inestabilidad decay disminuye notoriamente sus γ_{max} , con la modulacional manteniéndose prácticamente constante. Es precisamente el mismo comportamiento que el mostrado en la figura del modelo cinético-híbrido 2.27b
- En el caso tipo fluido de la figura izquierda, con $\tilde{\beta}_p$ dominante, la situación de los γ de las inestabilidades se asemeja sólo un poco a la encontrada con el modelo de fluido ó cinético híbridos, en particular por la tendencia entre pares de curvas de presentar soluciones degeneradas. Existe una mayor discrepancia en el sentido que aparecen varias otras inestabilidades espurias, tal como una en la rama $+f$ para $k > k_0$ debido a una interacción con $+s$, con γ_{max} similares a decay; ó una desestabilización de la rama $+b$ con un gran rango en k pero de pequeñas tasas de crecimiento. De aquí se concluye que, a mayores proporciones del parámetro β_e , se introducirán más distorsiones al problema de las que presentaría con los parámetros de gráficos anteriores, en lo que claramente es un comportamiento no físico puesto que, sobre todo en este caso, debiera existir una buena correspondencia con el modelo de fluidos.

4.5.3. Discusión de problemas de la relación de dispersión

Los resultados gráficos mostrados para la relación de dispersión completamente cinética indican que, si bien sus curvas ω_r v/s k muestran una relativa concordancia con resultados conocidos, no es confiable en la mayoría de los parámetros usados para las tasas de crecimiento γ v/s k , en el sentido que las inestabilidades predichas por ella discrepan bastante de las conocidas de modelos de fluidos y cinético-híbridos, a los cuales debería asemejarse (un claro comportamiento no físico). Esto se refleja, principalmente, en tres situaciones:

1. Las tasas de crecimiento máximas γ_{max} del modelo cinético pueden llegar a ser mayores en un orden de magnitud que en los otros modelos conocidos.
2. La existencia de importantes inestabilidades en ciertas ramas que deberían ser estables en regímenes de parámetros compatibles con modelos de fluidos.
3. Violentas e importantes distorsiones en la morfología de las inestabilidades (un poco en las curvas ω_r v/s k , pero mucho más marcadas en las γ v/s k) con tan sólo un leve incremento de la amplitud o frecuencia de la pump.

Dichos argumentos son un fuerte indicio que *la relación de dispersión cinética aquí derivada modela mal el plasma analizado en la mayoría de las situaciones, debido, muy posiblemente, a problemas numéricos originados en la mala calidad de las aproximaciones usadas*. Rastreando todas las suposiciones usadas, se ha identificado que son dos las fuentes de todos estos problemas:

1. *Trayectorias no perturbadas*: Para encontrar una solución analítica cerrada y manejable de la trayectoria de un protón en el plasma en equilibrio, dado por el campo de la onda pump más el magnético de fondo, en la sección 4.1.1 se simplificó la ecuación en v_z mediante la suposición que es constante (ver (4.7)). Esto permitió encontrar expresiones para la velocidad v_x (4.17) y v_y (4.18) que se compararon gráficamente en diagramas como los de 4.1 y siguientes. Allí se mostró que las tres componentes discreparán más de las soluciones exactas para las trayectoria conforme se aumenta la amplitud A o la frecuencia X_0 , lo que explicaría las desviaciones y comportamientos anómalos en las inestabilidades observadas para esos rangos de parámetros. Pero hay un punto más esencial: las desviaciones entre soluciones aproximadas y exactas para v_z exhiben variaciones periódicas, siendo por tanto no muy importantes a la hora de integrar durante varios giroperiodos. En cambio, para v_x y v_y , esta discrepancia exhibe un patrón modulacional periódico para tiempos mucho mayores que un giroperiodo (ver 4.1b). Si bien puede no ser un gran problema usar estas trayectorias aproximadas en cálculos como los de cambio de sistema de referencia para la ecuación de Vlasov (ver (4.71)), sí lo es, y en una forma muy importante, el integrar la función de distribución perturbada de $-\infty$ a t siguiendo estas órbitas (ver (4.74)). La discrepancia entre soluciones aproximadas y exactas se acumula en cada giroperiodo, por lo que la predicción para las velocidades finales transversales \vec{v}^\perp , al seguir la trayectoria en todo el rango de tiempo considerado en la integral mencionada, puede diverger dramáticamente entre ambos casos, dando como resultados relaciones de dispersión posiblemente muy distintas (tal cual se ha observado en los gráficos anteriores).

También hay otro punto que merece ser destacado. El objetivo de encontrar una relación de dispersión completamente cinética fue poder incluir los efectos del amortiguamiento ciclotrónico, por lo que la trayectoria aproximada usada debiera seguir lo más fielmente a la exacta en las cercanías de esa región. Pero irónicamente, tal como fue ejemplificado en la figura 4.5, cerca de la resonancia ciclotrónica es donde las soluciones aproximadas para \vec{v}^\perp poseen un comportamiento completamente opuesto a las exactas, pues mientras esas últimas están acotadas, las primeras tienen oscilaciones sinusoidales que son cada vez más crecientes conforme más cerca se esté de la resonancia ciclotrónica. Luego, la zona cerca de la resonancia ciclotrónica es en donde peor se desempeñan las trayectorias aproximadas para la velocidad \vec{v}^\perp , por lo que cualquier conclusión desprendida de los resultados de dichos efectos (usando estas órbitas), estará cualitativamente errónea.

2. *Función de distribución en equilibrio*: Aquí se ha usado (4.44) en vez de la conocida relación exacta (1.138) (lo es en el sentido que proporciona la relación correcta entre ω_0 y k_0 de la onda pump de Alfvén autoconsistente). La razón de ello fue que el cambio de sistema de referencia - inspirado en las trayectorias no perturbadas usadas - permite la elección de dicha función como la más general posible que adopte las simetrías del sistema. A pesar de la mala calidad de la aproximación (antes discutida), dicha función de

distribución es prácticamente idéntica a la de Sonnerup, salvo por el factor ζ_+ en las velocidades de drift transversales, que cambia según:

$$\zeta^S = \frac{\omega_0}{\omega_0 - \Omega_p} \quad \longmapsto \quad \zeta^M = \frac{\omega_0 - k_0 v_z}{\omega_0 - k_0 v_z - \Omega_p} \quad (4.186)$$

donde S indica la solución exacta de Sonnerup y M (por Matsuda) es el aquí usado en forma aproximada. Ahora, es claramente visible que ambas cantidades se relacionan por un simple desplazamiento Doppler debido a un cambio en el sistema de referencia a aquél comóvil a una partícula con velocidad v_z . Esto trae como consecuencia que el denominador de la derecha (ζ^M), aquí usado, sea precisamente la condición de resonancia ciclotrónica (1.56), introduciéndose así una falsa singularidad que en el tratamiento exacto (ζ^S) *no* existe (sólo hay problemas en el usual límite dispersivo $\omega_0 \rightarrow \Omega_p$). Es decir, y debido a la propiedad heredada de las trayectorias no perturbadas antes discutida, el régimen de parámetros en torno a la resonancia ciclotrónica es en donde existen mayores desviaciones a la función de distribución exacta de Sonnerup, a pesar de ser el propósito original de estudio de esta tesis, por lo que ninguna conclusión cerca de dichos puntos debiera considerarse seriamente.

También cabe recalcar que en la solución aproximada usada (4.44), existe la libertad suficiente como para escoger arbitrariamente $\alpha = 1$, de modo que la función de distribución sea isotrópica en el sistema \vec{V} . Esto se hizo simplemente por facilidad de cálculo, ya que ello permite la validez de la expresión (4.86), y por tanto la eliminación de varios términos extras que de otra forma aparecerían en (4.95) y se incrementarían en las posteriores integraciones. En principio, como no hay otras razones físicas de fondo, se podría escoger otro valor de α sin mayores problemas, quizá por ejemplo el dado por Sonnerup (1.148) (que además tiene la interesante interpretación de una razón entre temperaturas paralela y perpendicular), extendiendo los resultados aquí obtenidos.

En vista de la discusión anterior, es válido hacerse la siguiente pregunta ¿Por qué no usar simplemente la función de distribución en equilibrio conocida por ser exacta (1.138), en vez de la aproximación basada en las poco confiables trayectorias aproximadas? El principal argumento en contra de esto es que no habría una autoconsistencia interna, pues la función de distribución en equilibrio debiera describir apropiadamente la trayectoria de las partículas en el espacio fase. Es decir, escogiendo una función de distribución exacta y trayectorias aproximadas, se tendría que estas últimas no pueden dar cuenta de la forma funcional de la primera, por lo que si bien tal situación podría ser físicamente realizable, no sería un estado de equilibrio sino sólo una aproximación a él.

Propuestas para mejorar la relación de dispersión

En base a los problemas mencionados, es fácil darse cuenta que la principal manera de remediar las malas predicciones de la relación de dispersión calculada (4.185) sería encontrar mejores soluciones analíticas para las órbitas de los protones en el campo de la onda pump, pero que a la vez permitan efectuar la integración (por el método de las características) de la función de distribución no perturbada en una forma relativamente simple. En realidad, la solución analítica exacta (que sería lo ideal) de las ecuaciones de trayectoria (4.4)-(4.5)-(4.6), y sus constantes del movimiento, se conocen desde hace algún tiempo (ver [Roberts and Buchsbaum, 1964] y [Liemohn and Duane, 1976]), pero son sumamente poco manejables debido a su complejidad: las expresiones cerradas para las órbitas de las partículas se escriben en términos de las funciones elípticas zeta y sigma de Weierstrass. Es por ello que su uso para integrar la función de distribución no perturbada, por el método de las características, no es para nada recomendado. Es en este sentido que un diferente enfoque sería más apropiado, tal como los propuestos en [Bouquet and Bourdier, 1998] y [Beléndez et al., 2007], donde se discuten aproximaciones analíticas para las trayectorias mencionadas usando constantes del movimiento con el formalismo Hamiltoniano y métodos de homotopía. El requisito que debe satisfacer cualquiera de las trayectorias aproximadas es que tengan la suficiente simplicidad como para que el cálculo analítico sea factible de hacer, tal como la usada en esta tesis, pero que a la vez mantengan una razonable fidelidad a la trayectorias exactas, sobre todo cerca de la resonancia ciclotrón (1.56). Ello permitiría una adecuada descripción del amortiguamiento ciclotrónico, objetivo original no cumplido de esta tesis.

En segundo lugar de importancia para mejorar la relación de dispersión (4.185), es usar una función de distribución que idealmente reproduzca la relación conocida por ser exacta entre ω_0 y k_0 de la onda pump de Alfvén autoconsistente (1.95), y que además sea consistente con las trayectorias usadas. Una de ellas es la función de distribución exacta dada por [Sonnerup and Su, 1967]: ec. (1.138), consistente por tanto con la

órbitas exactas que siguen las partículas en estado de equilibrio. El problema con ella, como ya fue mencionado, es que la expresión analítica cerrada es lo suficientemente complicada como para que el cálculo a realizar sea prohibitivo. Entonces, la tarea futura a realizar es buscar otras funciones de distribución a partir de las trayectorias aproximadas que se usen, aunque como existe un gran abanico de posibilidades en base a que la ecuación de Vlasov admite muchos estados de equilibrio (ver pág 361 de [Krall and Trivelpiece, 1973]), sería óptimo hallar algún método simple que permita encontrar alguna que satisfaga todos los requisitos (en particular, que también genere la relación exacta de la onda pump (1.95)).





Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

En el capítulo 1 se introdujeron los conceptos básicos y definiciones de física de plasmas necesarias para el desarrollo de los restantes capítulos, así como una breve descripción de los aspectos generales y diferencias entre los modelos de fluidos y cinéticos que se usan para modelar los plasmas. También se describieron las interacciones onda-partículas más importantes, enfatizando el hecho que son efectos que surgen netamente de teoría cinética. Específicamente, se presentó el amortiguamiento ciclotrónico que actúa en dirección transversal al campo magnético estático de fondo, como contraparte al usual amortiguamiento Landau que actúa en la dirección paralela. Por último, dentro del contexto de ondas en plasmas y las relaciones de dispersión que los describen, se presentó uno de los modos básicos y más característicos de los plasmas espaciales magnetizados: la onda de Alfvén ión-ciclotrón circularmente polarizada de propagación paralela, cuya relación de dispersión (1.95) es solución tanto de las ecuaciones linealizadas de fluidos como también exacta dentro del sistema Vlasov-Maxwell.

En el capítulo 2 se introdujo el concepto de inestabilidades paramétricas en plasmas, contextualizándolas en ambientes de plasmas espaciales, en particular los del viento solar donde la onda madre es la misma Alfvén ión-ciclotrón circularmente polarizada descrita en el capítulo 1. Se esbozó la forma teórica en que éstas fenómenos han sido estudiadas en el último medio siglo, tanto con modelos de fluidos, cinéticos, como también con simulaciones MHD y/o cinética-híbridas. Como base de los modelos desarrollados posteriormente en esta tesis, se revisó el método desarrollado en [Hollweg, 1994], dentro de teoría de fluidos, para encontrar la relación de dispersión que describa el decaimiento paramétrico de la onda de Alfvén mencionada (para frecuencias en torno a la ciclotrónica de protones Ω_p). Ésta se resolvió numéricamente, determinando en forma precisa los efectos que tiene sobre las inestabilidades paramétricas (modulacional, *beat* y de decaimiento) la variación de los parámetros involucrados: la amplitud A y la frecuencia X_0 de la onda pump, además del parámetro β (razón entre presión térmica y magnética). Fundamentalmente, se enfatizó encontrar los umbrales, para cada uno de los parámetros (principalmente en A y β), a partir de los cuales las inestabilidades desaparecen, encontrando resultados que concuerdan con toda la literatura previa (además, lateralmente, de identificar los rangos de parámetros en los cuales cada inestabilidad existe). Por otra parte, también se revisó la extensión cinética-híbrida del modelo anterior que incorpora los efectos del amortiguamiento Landau en la dirección longitudinal desarrollado por [Araneda, 1998]. Sus soluciones numéricas, como ya había sido determinado en muchos trabajos previos, demuestran principalmente una reducción en las tasas de crecimiento γ_{max} y una extensión del rango en que están activas las inestabilidades, en comparación con los resultados previos de fluidos. Se analizó también los efectos de cambiar cada uno de los parámetros (ahora, en vez de un parámetro β , existirá uno para los electrones β_e y otro para los protones $\tilde{\beta}_p$), enfatizando las diferencias existentes con el modelo de fluidos. Se encontró, principalmente, que los umbrales de supresión no son tan definidos como en el modelo de fluidos, sino que existe una “difuminación”: a pesar del efecto del amortiguamiento Landau de reducción de las tasas de crecimiento γ , las inestabilidades persisten para valores de parámetros mucho mayores que los umbrales de fluidos, aunque con γ 's pequeños. Esperablemente, este fenómeno es más acentuado conforme mayor sea $\tilde{\beta}_p$, es decir, mientras más importantes sean los efectos cinéticos.

En la sección 3 se estudiaron las consecuencias de incluir un beam de protones en el decaimiento paramétrico de una onda de Alfvén. Primero se le incorporó en el modelo de fluidos de forma análoga a lo desarrollado en [Hollweg et al., 1993], resolviéndose numéricamente la correspondiente relación de dispersión, en donde ahora hay otros tres parámetros asociados con el beam: la razón entre su densidad con respecto a la electrónica η_b , la razón

entre su presión térmica con respecto a la magnética de fondo β_b , y la velocidad de drift relativa U . Y al igual que para el caso de una especie, se incorporaron los efectos cinéticos del amortiguamiento Landau mediante el método desarrollado en [Araneda, 1998], de forma similar a lo realizado en [Kauffmann and Araneda, 2008] y [Nariyuki et al., 2009]. Resolviendo numéricamente la relación de dispersión resultante en ambos modelos, se encontraron los resultados resumidos en 3.6. Éstos consisten, a grandes rasgos, en identificar las inestabilidades asociadas al beam y los rangos de parámetros en los que se presentan, además de precisar el comportamiento de ellas frente al cambio de dichos parámetros y las modificaciones introducidas por el amortiguamiento Landau. Por ejemplo, dos de las inestabilidades que se generan intrínsecamente debido a la velocidad de drift del beam, la teoría de fluidos predice que deben ser las dominantes en sus respectivos dominios, pero los efectos cinéticos las amortiguan tanto que otras toman su lugar. Por otra parte, la conocida inestabilidad decay resultó ser la más afectada, de entre las de una especie, debido al beam, llegando incluso a desaparecer para valores suficientemente altos de U y η_b . Dado que ella es uno de los principales mecanismo por los cuales se proveen las ondas propagantes hacia atrás en el viento solar, ello podría tener consecuencias negativas para explicar la generación de turbulencia Alfvénica en casos que el plasma posea un componente tipo beam (ver [Hollweg et al., 1993]). Las otras inestabilidades beat y modulacional son mínimamente afectadas por la variación de cualquiera de los parámetros del beam, así que los umbrales y regiones del espacio de parámetros A - β - X_0 identificados para el caso de una especie siguen siendo válidos para este caso. También se encontró una inestabilidad, para frecuencias de la pump X_0 grandes, que tiene la notable propiedad de ser amplificada por los efectos cinéticos.

Los resultados obtenidos en el capítulo 3 son bastante restringidos y pueden extenderse de varias formas. Por ejemplo, la mayoría de los cambios de las inestabilidades paramétricas estudiadas fueron caracterizados por sus tasas de crecimiento máximas, así que sería útil implementar algún método que permita determinar otras características de ellas, tales como sus rangos ó la simetría de sus curvas γ v/s k . Tampoco se estudió la polarización de las ondas hijas producida por la pump, que podría haber sido un método para identificar si las ondas generadas en cada inestabilidad paramétrica son predominantemente longitudinales ó transversales, y verificar cómo este comportamiento es afectado para otras combinaciones de parámetros. Ello podría ser de interés en aplicaciones a plasmas del viento solar, puesto que las ondas de polarización transversal que se desplazan hacia atrás desempeñan un papel importante en la generación de turbulencia en el viento solar ([Hollweg, 1994]). Sólo se consideró una pump de Alfvén circularmente polarizada por la izquierda, así que sería interesante analizar también las consecuencias de una onda con polarización derecha, tal como las que se pueden presentar en ondas de choque interplanetarias ó en en ciertas zonas de la magnetósfera terrestre. También se restringió al caso de $\beta \gtrsim 1$, para una mejor comparación con modelo de fluidos, pero valores más altos de dicho parámetro pudiesen ser de interés en otros ambientes espaciales, tales como la fotósfera o la zona de aceleración del viento solar (además, un valor común de dicho parámetro para el viento solar, cerca de la Tierra, es $\beta \approx 1$). Por otra parte, la relación de dispersión cinética-híbrida calculada permite la descripción de un beam de cualquier tipo de ión, así que, sin ninguna dificultad adicional, también podría analizarse cómo cambian las características de las inestabilidades paramétricas estudiadas al incluir partículas alfa u otros iones más pesados, que se observan rutinariamente en las mediciones del viento solar.

En el capítulo 4, se adaptó el método desarrollado en [Matsuda, 1986] para encontrar, en un plasma electrón-protón, una relación de dispersión completamente cinética que describa el decaimiento paramétrico de una onda de Alfvén ión-ciclotrón (frecuencias en torno a la ciclotrónica de protones Ω_p), incorporando los efectos del amortiguamiento ciclotrónico (ver 1.3.3). Así, considerando una ley de Ohm generalizada, los electrones como un fluido sin masa e isotérmico, y los protones modelados por una función de distribución consistente con la onda pump de Alfvén, se llegó después de un largo cálculo a la relación de dispersión (4.185), mediante el procedimiento estándar de integrar, a través de las características u órbitas no perturbadas, la función de distribución perturbada proveniente de la linealización de la ecuación de Vlasov. Al resolverla numéricamente y tratar de establecer comparaciones con los resultados conocidos del capítulo 2, se encontraron numerosos deficiencias y comportamientos no físicos discutidos en la sección 4.5.3, sobre todo para las curvas de las tasas de crecimiento γ v/s k . Se rastreó el origen de estos problemas, llegando a la conclusión que provenían, principalmente, de la mala calidad de la aproximación usada (ver (4.7)) para encontrar las órbitas no perturbadas de los protones en los campos del plasma en equilibrio (ecuaciones (4.17) y (4.18)), manifestada sobre todo cerca de la resonancia ciclotrónica (ver, por ej., figura 4.5). Ello también implica que la función de distribución usada y consistente con estas trayectorias, (4.44), no es una buena aproximación a la exacta (1.138), por lo que la relación entre ω_0 y k_0 para la onda pump de Alfvén derivada de ella, posee comportamientos (ligeras desviaciones) que no se presentan con la conocida relación exacta (1.95), introduciendo así otra fuente de error en el problema. En resumen, las suposiciones usadas provocan que los resultados numéricos no sean confiables para modelar el

comportamiento de las inestabilidades, e, irónicamente, su desempeño es el peor precisamente en la zona en la cual se pretendía incorporar los efectos del amortiguamiento ciclotrónico.

Los resultados negativos del capítulo 4 abren la posibilidad de continuar explorando formas para mejorar los aspectos negativos de la relación de dispersión calculada, tal como los sugeridos en la sección 4.5.3. En resumen, se trata de encontrar trayectorias analíticas aproximadas (las exactas se conocen pero son demasiado complicadas) que describan lo más fielmente posible el movimiento de protones en el campo de la onda pump, sobre todo cerca de la resonancia ciclotrónica. Dichas órbitas permitirían encontrar una función de distribución en equilibrio apropiada, que idealmente reproduzca la relación exacta entre ω_0 y k_0 (1.95). Además, si dichas órbitas son lo suficientemente simples como para ser manipulables, se podría integrar analíticamente la función de distribución perturbada proveniente de la ecuación de Vlasov mediante el método de las características, encontrando de este modo una relación de dispersión que incluya apropiadamente el amortiguamiento ciclotrónico. Una vez testeada mediante comparaciones con los resultados del capítulo 2, se podría identificar los efectos que el amortiguamiento ciclotrónico tiene sobre las usuales inestabilidades paramétricas, cómo afecta a sus umbrales de supresión, y los rangos de parámetros en los cuales es más importante. Todo esto se podría validar con las simulaciones híbridas, para comprobar cuáles de estas consecuencias pueden llegar a ser importantes en un plasma más realista. Y, eventualmente, la relación de dispersión también se podría extender para dos especies, y así poder estudiar la incorporación de efectos cinéticos en la dirección transversal para un plasma con beam de iones, mejorando los resultados del capítulo 3.





Apéndice A

Polarización de ondas de Alfvén

A.1. Convención para ondas circularmente polarizadas

En esta tesis se ha trabajado con ondas circularmente polarizadas, por lo que conviene definir bien la convención usada para etiquetar los dos sentidos de polarización existentes (que es ampliamente usada en la literatura de física de plasmas. Ver, por ej. pág 10 de [Stix, 1992] ó 91 de [Gary, 1993]). Se denotará onda circularmente polarizada *izquierda/derecha* como aquella cuyo campo eléctrico rota en sentido horario/antihorario al observarla a lo largo de la dirección del campo magnético estático en B_z , con frecuencia positiva $\omega > 0$, y que se propaga *hacia* el observador, tal como se muestra en los siguientes diagramas:

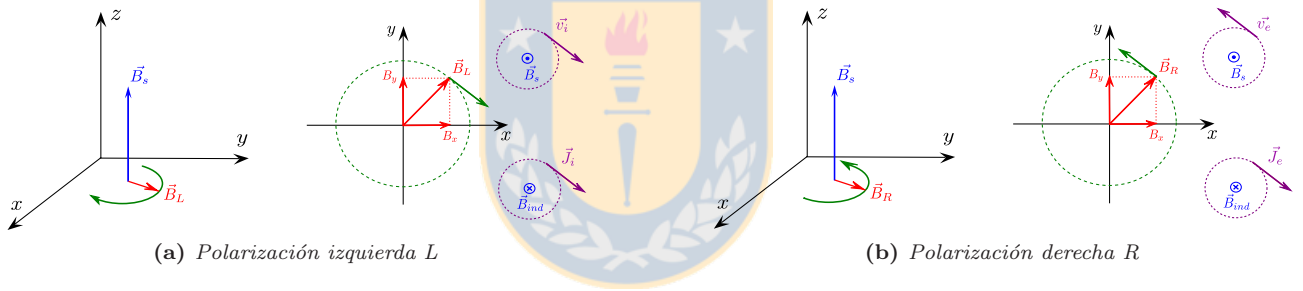


Figura A.1: Convenciones de sentido de polarización circular. $\vec{E}_{R,L}$ indica campo eléctrico de onda izquierda/derecha y las flechas el sentido de rotación. También están indicados el sentido del movimiento ciclotrónico de electrones (e) e iones (i), y las respectivas corrientes y campos magnéticos por ellos generados.

De aquí se infiere (ver [Chen, 1984]):

- Debido al campo magnético estático $\vec{B} = B_s \hat{z}$, los iones/electrones giran con movimiento ciclotrónico en el mismo sentido horario/antihorario que una onda izquierda(derecha), observando a la onda. Es decir, *una onda L/R puede ser resonante con los iones/electrones*
- La corriente generada por el mov. ciclotrónico de los iones/electrones, $\vec{J}_{i/e} = (Ze/-e)n_{i/e}\vec{v}_{i/e}$, va en sentido horario/antihorario (en el mismo/opuesto sentido que ellos), como es necesario para generar un campo magnético inducido \vec{B}_{ind} contrario al campo estático \vec{B}_s , de acuerdo a la ley de Lenz.

Dado que el rango de frecuencias considerado en esta tesis es $\omega \ll \Omega_e$, la única resonancia posible sería la de los iones con una onda L , en caso de $\omega = \Omega_i$ (aunque los efectos igual se sienten en las cercanías $\omega \sim \Omega_i$, como es el caso de la mayoría de ondas aquí consideradas). Esta es la razón por la cual se usa una onda L como pump, pues es más probable que genere una mayor gama de fenómenos interesantes en las inestabilidades paramétricas que una onda R , debido a la proximidad de estos efectos resonantes.

A.1.1. Representación de ondas circularmente polarizadas

Una onda de polarización circular izquierda L/derecha R, propagándose a lo largo de un campo magnético estático en dirección z positiva (al igual que en el texto principal) y con $\omega > 0$, se supondrá representada por

un campo magnético complejo $\vec{B}(z, t) = \vec{B}(k, \omega)e^{i(kz - \omega t)}$ ($\vec{B}(k, \omega)$ es la transformada de Fourier), de modo que la parte real de sus componentes sea (con B la amplitud real):

$$\Re(B_x) = B \cos(kz - \omega t) = \Re(Be^{i(kz - \omega t)}) \quad (\text{A.1})$$

$$\Re(B_y) = \pm B \sin(kz - \omega t) = \Re(\mp iBe^{i(kz - \omega t)}) \quad (\text{A.2})$$

De donde es evidente que este campo magnético mantendrá una magnitud constante B y girará en la forma indicada en la figura A.1, conforme avanza el tiempo (ver pág 50 de [Swanson, 2003] y 10 de [Stix, 1992]). Luego, se tendrá la siguiente relación entre la fase de una onda L/R :

$$B_y = \mp iB_x \quad (\text{A.3})$$

Lo anterior permite justificar la elección de la forma en que las componentes transversales del campo magnético se suman en la cantidad compleja (1.67) (y otras similares para las cantidades perturbadas): se trata de coordenadas rotantes en que $B^+ = B_x + iB_y$ representa ondas de polarización izquierda y $B^- = B_x - iB_y$ aquellas con polarización derecha (ver sección 7.2.3 de [Swanson, 2003], y págs 22 de [Stix, 1992], 228 de [Baumjohann and Treumann, 1997] y 144 de [Cramer, 2001]. Se ha seguido la convención de las tres primera referencias). En efecto, dado que cualquier campo magnético transversal real \vec{B} puede expresarse como una combinación apropiada de B^+ y B^- , si se tiene, por ej: $B^- = 0$, entonces se satisfará la condición del primer signo de (A.3), con lo cual la onda, descrita únicamente por B^+ , será izquierda. La justificación de B^- como onda derecha es análoga.

A.2. Polarización de ondas hijas en plasmas protón-protón

De acuerdo a la definición dada en [Hollweg, 1994], el grado de polarización transversal T de las ondas hijas vendrá dada por:

$$T := \frac{\langle (\tilde{V}_1^\perp)^2 \rangle}{\langle (\tilde{V}_1^z)^2 \rangle} = 2 \left[\frac{|\tilde{V}_{1p,l+1}^-|^2}{|\tilde{V}_{1,l}^z|^2} + \frac{|\tilde{V}_{1p,l-1}^+|^2}{|\tilde{V}_{1,l}^z|^2} \right] \quad (\text{A.4})$$

en donde los paréntesis brackets indican promedio espacial. También se puede definir, en vista de lo anterior, el grado de polarización $+/-$ por:

$$P = \frac{|\tilde{V}_{1p,l+1}^-|^2}{|\tilde{V}_{1p,l-1}^+|^2} \quad (\text{A.5})$$

Apéndice B

Teorema de Floquet

En la forma enunciada por [Jayanti and Hollweg, 1993], este teorema ¹ es aplicable para sistemas de ecuaciones diferenciales en donde es conocido que una solución particular $y(x)$ tiene coeficientes periódicos en x . En dicho caso, la solución general vendrá dada por:

$$y(x) = e^{i\zeta} F(x) \quad (\text{B.1})$$

en donde la función $F(x)$ es periódica en x (con el mismo periodo que $y(x)$), y ζ se determina por las condiciones impuestas tanto por la ecuación diferencial como por la periodicidad de y^2 . En este caso,

$$\zeta = \omega_\alpha t - k_\alpha z \quad (\text{B.2})$$

en donde ω_α y k_α son frecuencias y números de ondas definidos en (B.4). Reseñando la extensa explicación del mismo paper [Jayanti and Hollweg, 1993], aplicar este teorema de Floquet a los campos escalares y vectoriales incógnitas del sistema de ecuaciones que describen el plasma (ya sea en modelo de fluido, híbrido, ó cinético), consiste en escribir la siguiente descomposición aplicada, por ejemplo, al campo eléctrico longitudinal:

$$E_1^z(z, t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{E}_{1,l}^z(k, \omega) e^{i(\omega_l t - k_l z)} \quad (\text{B.3})$$

en donde se define:

$$\begin{aligned} \omega_{l=0} &= \omega_\alpha, & |\omega_\alpha| &< \frac{\omega_0}{2} \\ \omega_l &= \omega_\alpha + l\omega_0, & k_l &= k_\alpha + lk_0 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Las demás cantidades admiten una expansión similar. Este procedimiento permite, luego de un tedioso cálculo, encontrar un conjunto infinito de ecuaciones recursivas en los coeficientes de número de onda k_l y frecuencia ω_l . Sin embargo, este sistema siempre puede desacoplarse escogiendo apropiadamente un valor explícito de l , dando origen a una determinada relación de dispersión (ej.: si $l = 0$, se tendrá una relación entre la frecuencia y número de ondas definidos por $\omega := \omega_\alpha$ y $k := k_\alpha$). Puede mostrarse que la relación de dispersión resultante con cualquier otro valor de l será equivalente a la primera, con tan sólo redefinir consistentemente el valor de k y ω (ej: si $l = 2$, entonces se tendrá una relación entre la frecuencia y número de ondas definidos por $\omega := \omega_\alpha + 2\omega_0$ y $k := k_\alpha + 2k_0$). En otras palabras: del conjunto infinito de relaciones de dispersión en l , sólo hay una físicamente relevante, siendo todas las demás redundantes.

En el caso particular de todas las relaciones de dispersión calculadas, se ha hallado un acople entre los coeficientes l con $l \pm 1$, por lo que conviene escoger $l = 0$ y, en base a (B.4), definir la frecuencia y número de ondas como sigue

$$\omega := \omega_{l=0} = \omega_\alpha \quad k := k_{l=0} = k_\alpha \quad (\text{B.5})$$

$$\omega_\pm := \omega \pm \omega_0 = \omega_{l\pm 1} = \omega_\alpha \pm \omega_0 \quad k_\pm := k \pm k_0 = k_{l\pm 1} = k_\alpha + k_0 \quad (\text{B.6})$$

¹Nombrado por el matemático francés G. Floquet, en 1883. También se denomina, sobre todo en el contexto del análisis de sólidos cristalinos, Teorema de Bloch ó Bloch-Floquet.

²Para una explicación más detallada, basada en un ejemplo de oscilador paramétrico mecánico, ver el paper [Fameli et al., 1999] y la pág. 80 del libro en el cual se basa: [Landau and Lifshitz, 1982].

en donde los modos de ondas descritos por ω_{\pm} y k_{\pm} se denominan bandas laterales superior e inferior, respectivamente. Estas relaciones tienen la interesantísima interpretación como reglas de selección análogas a las de Mecánica Cuántica, en la misma forma que lo discutido en la ec. (2.1).



Apéndice C

Función Z de Plasma

La función de dispersión Z de plasma, ó función de Fried-Comte [Fried and Conte, 1961], es definida por:

$$Z(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-x^2)}{x - \xi} dx, \quad \Im(\xi) > 0 \quad (\text{C.1})$$

Está relacionada con la función error de argumento complejo (ver apéndice B de [Swanson, 2003]) y aparece recurrentemente en la descripción cinética de plasmas con ciertas funciones de distribuciones de velocidades, tales como Maxwellianas. Su argumento usualmente surge como la razón entre la velocidad de fase característica de las ondas y la velocidad térmica de una cierta especie j :

$$\xi = \frac{\omega}{kv_{Tj}} = \frac{\omega_r + i\gamma}{kv_{Tj}} \quad (\text{C.2})$$

Dado que k siempre será real en el contexto de esta tesis, el contorno de integración de la función Z será diferente dependiendo de su signo y del de $\Im(\omega)$, puesto que es posible extender el prescrito en (C.1) mediante continuación analítica para encerrar el polo en $x = \xi$ (Una discusión detallada se da en la pág 202 de [Stix, 1992]):

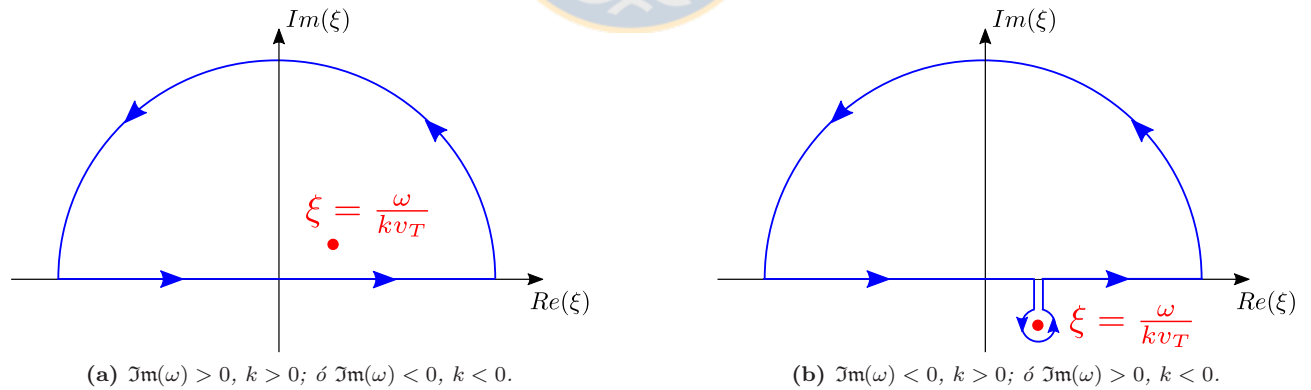


Figura C.1: Contornos de integración de la función Z (C.1). Izquierda: $\Im(\xi) > 0$. Derecha: $\Im(\xi) < 0$. Notar el contorno deformado en el gráfico de la derecha debido a la continuación analítica.

Mediante ello, y considerando la (a veces) llamada fórmula de Plemelj para tratar singularidades en el contorno de integración (Ver pág 285-287 de [Hassani, 1999] y 171 de [Bellan, 2006]), que se escribe simbólicamente así:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x - \xi \pm i|\epsilon|} = P \frac{1}{x - \xi} \mp i\pi\delta(x - \xi) \quad (\text{C.3})$$

es posible expresar (C.1) como (ver ec. 4.63 de [Swanson, 2003]):

$$Z(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-x^2)}{x - \xi} dx + \left(\frac{k}{|k|} \right) i\sqrt{\pi} e^{-\xi^2} \quad (\text{C.4})$$

en donde \mathcal{P} representa el valor principal de Cauchy de la integral.

A continuación se explicitarán algunas de las propiedades de la función zeta que son de utilidad dentro de esta tesis.

C.1. Propiedades

C.1.1. Ecuación diferencial

La ecuación diferencial que satisface esta función puede ser obtenida derivando su definición (C.1) e integrando por partes:

$$\frac{dZ(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x - \xi)^2} dx \quad (\text{C.5})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{e^{-x^2}}{x - \xi} \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{-x^2}}{x - \xi} dx \right\} \quad (\text{C.6})$$

$$= -2[1 + \xi Z(\xi)]. \quad (\text{C.7})$$

C.1.2. Expansión asintótica de la función Z

Existen dos aproximaciones analíticas de la función Z que funcionan bien en los límites resumidos en el siguiente diagrama para una función de distribución maxwelliana típica:

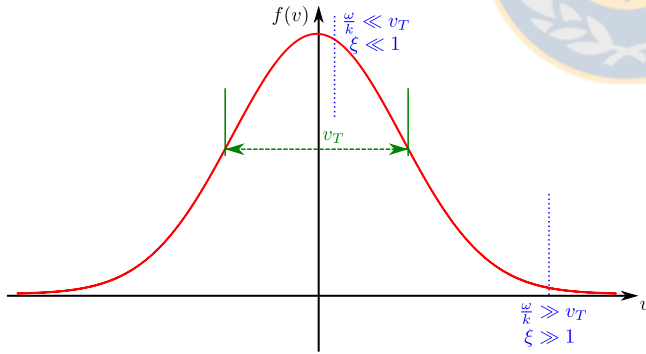


Figura C.2: Aproximaciones $\xi \gg 1$ y $\xi \ll 1$, y los sectores donde la onda, con velocidad de fase ω/k , actúa en una función de distribución maxwelliana típica.

Caso $\xi \gg 1$

Es posible encontrar una expansión asintótica apropiada [Bellan, 2006] de la función Z de plasma cuando los efectos térmicos no son predominantes, esto es, en el llamado límite frío ó de fluido adiabático (recordar para el modelo de fluidos la ec. (1.22)), definido por:

$$|\xi| \gg 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{\omega_r + i\gamma}{k} \right| \gg v_{Tj}, \quad (\text{C.8})$$

es decir, representa la condición que el flujo de calor es totalmente despreciable. Para una velocidad de fase dada, esta condición se cumplirá tanto mejor conforme el plasma se torne más frío, siendo útil en aquellas situaciones. Para este caso, el factor $\exp(-x^2)$ del integrando de la función Z contribuye significativamente a la integral sólo cuando tiene orden de magnitud 1, que corresponde a $x \sim 0$. En este intervalo donde el término

exponencial es relevante, se tendrá por consiguiente $|\xi| \gg x \sim 0$, o equivalentemente $\frac{x}{\xi} \ll 1$, de modo tal que la siguiente expansión en serie converja:

$$\frac{1}{x-\xi} = -\frac{1}{\xi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\xi} \right)^n \right) = -\frac{1}{\xi} \left(1 + \frac{x}{\xi} + \left(\frac{x}{\xi} \right)^2 + \left(\frac{x}{\xi} \right)^3 + \left(\frac{x}{\xi} \right)^4 + \dots \right)$$

Luego, sustituyendo en la integral de la parte principal (a valores reales), que es a valores reales, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-x^2)}{x-\xi} dx \simeq & -\frac{1}{\xi} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx + \frac{1}{\sqrt{\pi}\xi} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp(-x^2) dx + \frac{1}{\sqrt{\pi}\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-x^2) dx \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}\xi^3} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \exp(-x^2) dx + \frac{1}{\sqrt{\pi}\xi^4} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \exp(-x^2) dx + \dots \right] \end{aligned}$$

Todas la integrales anteriores con el factor multiplicando a la exponencial x impar, son impares y por lo tanto se anulan, mientras que las con x par son del tipo gaussiano Luego, la parte real de la función Z de plasma se puede aproximar así:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-x^2)}{x-\xi} dx \simeq -\frac{1}{\xi} - \frac{1}{2\xi^3} - \frac{3}{4\xi^5} + \dots \quad (\text{C.9})$$

y finalmente, la forma asintótica de la parte real de la función Z será:

$$Z(\xi) \simeq -\frac{1}{\xi} - \frac{1}{2\xi^3} - \frac{3}{4\xi^5} + \dots \quad \text{para } |\xi| \gg 1 \quad (\text{C.10})$$

Caso $\xi \ll 1$

Aquí obviamente se cumple la desigualdad opuesta a (C.8), caracterizada físicamente por un sistema isotérmico en donde el flujo de calor es tan dominante que homogeneiza el sistema en cuestión (recordar para el modelo de fluidos la ec. (1.21)). Como para esta situación es posible tener $x \simeq \xi_j$ en la integral C.1, se hace necesario estudiar detalladamente el integrando para evitar problemas con la singularidad de su denominador en $x = \xi_j$. Luego, conviene introducir la variable $\eta = x - \xi_j$, que implica $\eta^2 + 2\eta\xi_j + \xi_j^2 = x^2$. Luego, el valor principal de Cauchy en C.4 se obtiene expandiendo en serie de Taylor un par de veces y usando las conocidas integrales gaussianas

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-x^2)}{x-\xi_j} dx = \frac{\exp(\xi_j^2)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \frac{\exp(-\eta^2)}{\eta} \cdot \exp(-2\eta\xi_j) \quad (\text{C.11})$$

$$\simeq \frac{-2\xi_j \exp(\xi_j^2)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \exp(-\eta^2) \left(1 + \frac{2\xi_j^2}{3}\eta^2 + \dots \right) \quad (\text{C.12})$$

$$\simeq -2\xi_j \left(1 - \xi_j^2 + \frac{\xi_j^4}{2!} \right) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{2}{3} \xi_j^2 + \dots \right) \quad (\text{C.13})$$

$$\simeq -2\xi_j \left(1 - \frac{2}{3} \xi_j^2 + O(\xi_j^4) \right) \quad (\text{C.14})$$

Entonces, la parte real de la función Z de plasma se puede aproximar, en el caso analizado, por la siguiente expansión asintótica,

$$Z(\xi_j) \simeq -2\xi_j + \frac{4}{3}\xi_j^3 + \dots \quad \text{para } |\xi_j| \ll 1 \quad (\text{C.15})$$

A modo de verificación de estas aproximaciones, sea el siguiente gráfico en donde se compara con la solución exacta de la ecuación diferencial (C.7) (obtenida con el método de Runge-Kutta), en el caso particular de ξ real (ver también figura 8.14 de [Stix, 1992])

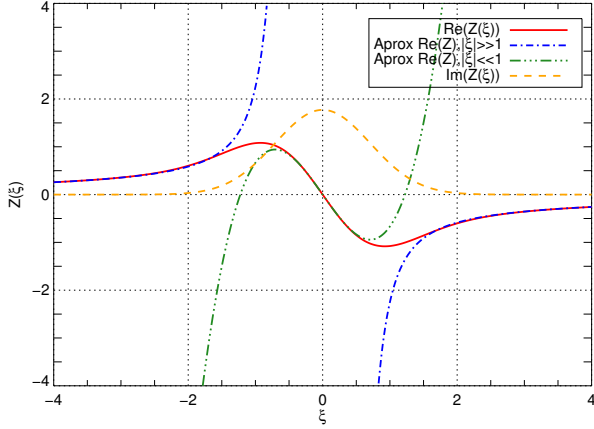


Figura C.3: Partes real e imaginarias de $Z(\xi)$ y sus respectivas aproximaciones para $\xi \gg 1$ (C.10) y $\xi \ll 1$ (C.15), en el caso particular de ξ real.

C.1.3. Propiedades de simetría

De su definición, es fácil determinar las siguientes relaciones de simetría de la función Z (ver [Swanson, 2003]):

$$Z(-\xi) = 2i\sqrt{\pi}e^{-\xi^2} - Z(\xi) = -[Z(\xi^*)]^* \quad (\text{C.16})$$

$$Z(\xi^*) = [Z(\xi) - 2i\sqrt{\pi}e^{-\xi^2}]^* \quad (\text{C.17})$$

$$[Z(\xi)]^* = Z(\xi) - 2i\sqrt{\pi}e^{-\xi^2}, \quad \Im m(\xi) < 0 \quad (\text{C.18})$$

Estas propiedades se pueden comprobar en el gráfico anterior y los siguientes, siendo usados en el algoritmo para encontrar numéricamente los valores de $Z(\xi)$.

C.2. Función zeta y método de resolución de relaciones de dispersión

Para resolver las relaciones de dispersión cinéticas de esta tesis (modelos cinético-híbridos y completamente cinéticos), se ha usado el método de encontrar las intersecciones de los contornos a nivel cero de sus partes real e imaginaria, según lo discutido en la sección 2.7.1 y las ecuaciones (2.101) y (2.102). Debido a que todas estas relaciones involucran la función zeta, es útil visualizar la distribución de sus contornos para la parte real e imaginaria:

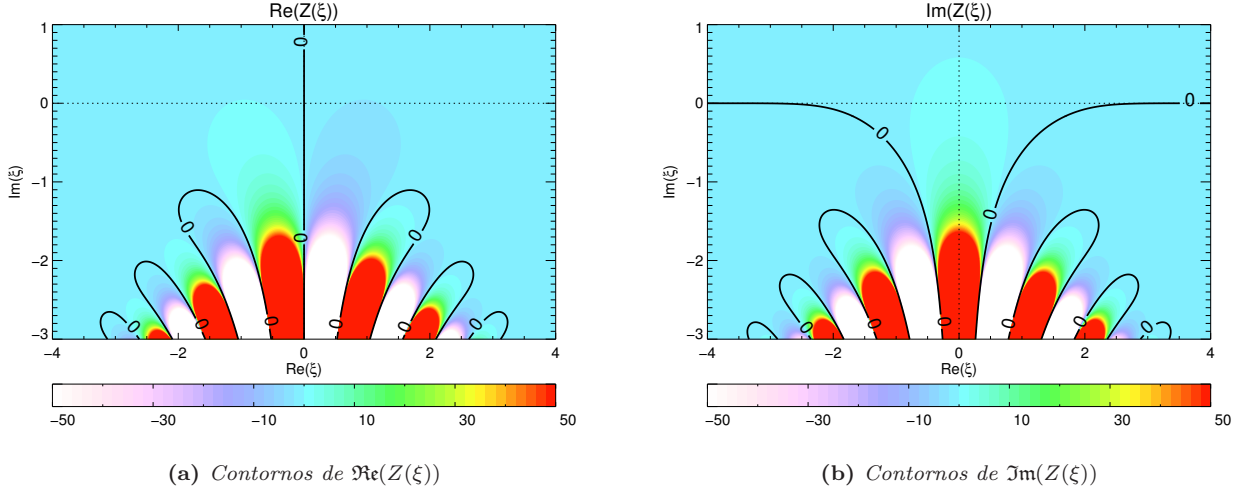


Figura C.4: Gráficos de contorno de la parte real (izquierda) e imaginaria (derecha) de la función $Z(\xi)$, con $\xi = \Re(\xi) + i\Im(\xi)$. La parte saturada en rojo y blanco indica valores que tienden rápidamente a $\pm\infty$, respectivamente, saliendo por tanto de la escala de colores indicada. En líneas negras se han graficado los contornos a nivel 0.

Aquí se puede apreciar en todo su esplendor la complejidad que yace en la naturaleza compleja (valga la redundancia) de la función zeta (C.1), expresada principalmente en la violenta variación de valores infinitamente negativos a positivos en un intervalo muy pequeño. Pero lo que en realidad interesa aquí, son las intersecciones de los contornos de las partes real e imaginaria mostrados, que vendrían siendo los ceros de la función zeta. Esto se aprecia mejor al sobreponerlos en un diagrama del valor absoluto de $Z(\xi)$:

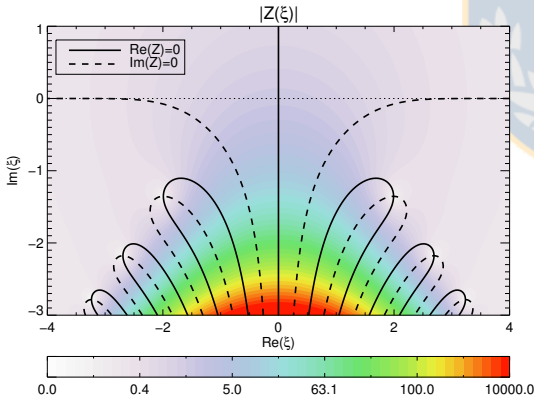


Figura C.5: Gráficos de contorno para $|Z(\xi)|$. También se muestran las curvas (antes mostradas) de los contornos a nivel 0 de las partes real e imaginaria de la función zeta. El código de colores es logarítmico.

Notar que, a pesar de la violenta variación entre valores positivos y negativos de las parte real e imaginaria de la función zeta, éstos se compensan de tal modo que su valor absoluto se mantiene finito y con un incremento constante para valores más negativos de $\Im(\xi)$, a excepción de las cercanías de los ceros. Notar que estas raíces de la función zeta son simétricas con respecto al eje de las ordenadas, siendo el valor numérico de las 6 mostradas (de [Swanson, 2003]):

$$\xi_1 = \pm 1.991466835 - i 1.354810123 \quad (\text{C.19})$$

$$\xi_2 = \pm 2.691149024 - i 2.177044906 \quad (\text{C.20})$$

$$\xi_3 = \pm 3.235330868 - i 2.784387613 \quad (\text{C.21})$$

Naturalmente, estos gráficos por sí solos no permiten resolver las relaciones de dispersión antes mencionadas, pero son la base del método con el cual se generan, por ejemplo, los diagramas para el índice politrópico γ_p^k 2.21 y la relación de plasma protón-electrón con amplitud nula 2.22a.

Apéndice D

Modelo cinético: Forma explícita de los coeficientes de Fourier de la velocidad de drift \vec{v}^d

D.1. Trayectorias perturbadas por la velocidad de drift \vec{v}^d

La velocidad de drift macroscópica \vec{v}^d representa una corrección de los efectos no considerados al efectuar la aproximación (4.7) en las trayectorias no perturbadas a orden 0 de un protón en el campo de la onda pump. Dado que es una perturbación en velocidad a primer orden, su forma explícita se puede hallar a través de la ecuación de movimiento de una partícula de prueba (protón) bajo la fuerza de Lorentz producida por los campos electromagnético perturbados (orden 1) en la ecuación de Vlasov (ver (4.59)), *sin* considerar el término que incluye la velocidad no perturbada (pues su expresión explícita ya fue determinada en las trayectorias a orden 0 en la sección 4.1.1):

$$\frac{d\vec{v}^d}{dt} = \frac{e}{m_p} \left(\vec{E}_1 + \vec{v}_d \times (\vec{B}_s + \vec{B}_0) \right), \quad (\text{D.1})$$

Nótese la analogía con la ecuación de movimiento a orden 0 (4.1). Invocando la descomposición en Fourier de \vec{E}_1 y \vec{v}_d según (B.3) y (4.104), y separando explícitamente cada componente usando (4.105):

$$\frac{d\vec{v}^d}{dt} = \frac{e}{m_p} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-i\phi_l} \left\{ \tilde{E}_{1,l}^z + \frac{\omega_l}{k_l} \left(B_{1,l}^y \hat{x} - B_{1,l}^x \hat{y} \right) + B_s \left(v_{d,l}^y \hat{x} - v_{d,l}^x \hat{y} \right) + v_{d,l}^z B_0 \left(-\sin \phi_0 \hat{x} + \cos \phi_0 \hat{y} \right) \right\} \quad (\text{D.2})$$

$$+ B_0 \left(v_{d,l}^x \sin \phi_0 - v_{d,l}^y \cos \phi_0 \right) \hat{z} \quad (\text{D.3})$$

Pero, al usar la descomposición de Fourier mencionada para la velocidad de drift, se tiene que su derivada total será:

$$\frac{d\vec{v}^d}{dt} = \frac{\partial \vec{v}^d}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}^d}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-i\phi_l} \left\{ i(\omega_l - k_l v_z) \vec{v}_l^d \right\} \quad (\text{D.4})$$

Luego, despejando cada componente del campo eléctrico:

$$\sum_l e^{-i\phi_l} \left\{ i(\omega_l - k_l v_z) v_{d,l}^x - \Omega_p v_{d,l}^y + \frac{\Omega_p B_0}{B_s} \sin \phi_0 v_{d,l}^z \right\} = \sum_l e^{-i\phi_l} \left\{ \frac{\Omega_p \omega_l}{B_s k_l} \tilde{B}_{1,l}^y \right\} \quad (\text{D.5})$$

$$\sum_l e^{-i\phi_l} \left\{ i(\omega_l - k_l v_z) v_{d,l}^y + \Omega_p v_{d,l}^x - \frac{\Omega_p B_0}{B_s} \cos \phi_0 v_{d,l}^z \right\} = \sum_l e^{-i\phi_l} \left\{ -\frac{\Omega_p \omega_l}{B_s k_l} \tilde{B}_{1,l}^x \right\} \quad (\text{D.6})$$

$$\sum_l e^{-i\phi_l} \left\{ i(\omega_l - k_l v_z) v_{d,l}^z + \frac{\Omega_p B_0}{B_s} \left(-v_{d,l}^x \sin \phi_0 + v_{d,l}^y \cos \phi_0 \right) \right\} = \sum_l e^{-i\phi_l} \left\{ \frac{\Omega_p}{B_s} \tilde{E}_{1,l}^z \right\} \quad (\text{D.7})$$

Ahora, se suman las componentes transversales (Ec X) $\pm i$ (Ec Y) para después seleccionar el coeficiente de Fourier $l \mp 1$. En la componente z igualmente se introducen las variables transversales, para después seleccionar el coeficiente l . De este modo, y recordando la relación entre coeficientes l y $l \pm 1$ (2.33), se tiene:

$$(\omega_{l\mp 1} - k_{l\mp 1}v_z \pm \Omega_p) v_{d,l\mp 1}^\pm \mp \frac{\Omega_p B_0}{B_s} v_{d,l}^z = \mp \frac{\Omega_p}{B_s} \frac{\omega_{l\mp 1}}{k_{l\mp 1}} \tilde{B}_{d,l\mp 1}^\pm \quad (\text{D.8})$$

$$(\omega_l - k_l v_z) v_{d,l}^z + \frac{\Omega_p B_0}{2B_s} \left(-v_{d,l-1}^+ + v_{d,l+1}^- \right) = -i \frac{\Omega_p}{B_s} \tilde{E}_{1,l}^z \quad (\text{D.9})$$

D.2. Solución del sistema de ecuaciones

La expresión anterior es un sistema de tres ecuaciones en las variables de velocidad de drift $v_{d,l\mp 1}^\pm$ y $v_{d,l}^z$. Para resolverlo, conviene introducir las siguientes abreviaciones:

$$A_\pm := \omega_{l\pm 1} - k_{l\pm 1}v_z \mp \Omega_p = -\dot{\phi}_{l\pm 1} \mp \Omega_p \quad (\text{D.10})$$

$$A_0 := \omega_l - k_l v_z = -\dot{\phi}_l \quad (\text{D.11})$$

$$B := \frac{\Omega_p B_0}{B_s} \quad (\text{D.12})$$

$$C_\pm := \frac{\Omega_p}{B_s} \frac{\omega_{l\pm 1}}{k_{l\pm 1}} \tilde{B}_{1,l\pm 1}^\mp \quad (\text{D.13})$$

$$C_0 := -i \frac{\Omega_p}{B_s} \tilde{E}_{1,l}^z \quad (\text{D.14})$$

de modo que en forma matricial el sistema se pueda escribir así:

$$\begin{pmatrix} A_- & 0 & -B \\ 0 & A_+ & B \\ -B/2 & B/2 & A_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{d,l-1}^+ \\ v_{d,l+1}^- \\ v_{z,l}^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_- \\ C_+ \\ C_0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.15})$$

con lo cual, notando que $A_- + A_+ = 2A_0$, se puede definir el determinante:

$$\Delta_{+,l} = -\frac{B^2}{2} (A_- + A_+) + A_0(A_- A_+) \quad (\text{D.16})$$

$$= (\omega_l - k_l v_z) \left[(\omega_{l-1} - k_{l-1}v_z + \Omega_p) \cdot (\omega_{l+1} - k_{l+1}v_z - \Omega_p) - \left(\frac{\Omega_p B_0}{B_s} \right)^2 \right] \quad (\text{D.17})$$

y así se hallan fácilmente las soluciones al sistema:

$$v_{d,l-1}^+ = \frac{1}{\Delta_{+,l}} \begin{vmatrix} -C_- & 0 & -B \\ C_+ & A_+ & B \\ C_0 & B/2 & A_0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta_{+,l}} \left[-C_- \left(A_+ A_0 - \frac{B^2}{2} \right) - B \left(C_+ \frac{B}{2} - C_0 A_+ \right) \right] \quad (\text{D.18})$$

$$= \frac{1}{\Delta_{+,l}} \left[\frac{B^2}{2} (C_- - C_+) - A_+ (C_- A_0 - C_0 B) \right], \quad (\text{D.19})$$

$$v_{d,l+1}^- = \frac{1}{\Delta_{+,l}} \begin{vmatrix} A_- & -C_- & -B \\ 0 & C_+ & B \\ -B/2 & C_0 & A_0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta_{+,l}} \left[A_- (C_+ A_0 - B C_0) - \frac{B}{2} (-C_- B + C_+ B) \right] \quad (\text{D.20})$$

$$= \frac{1}{\Delta_{+,l}} \left[\frac{B^2}{2} (C_- - C_+) + A_- (C_+ A_0 - C_0 B) \right], \quad (\text{D.21})$$

$$v_{d,l}^z = \frac{1}{\Delta_{+,l}} \begin{vmatrix} A_- & 0 & -C_- \\ 0 & A_+ & C_+ \\ -B/2 & B/2 & C_0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta_{+,l}} \left[A_- \left(A_+ C_0 - C_+ \frac{B}{2} \right) - C_- \left(\frac{B}{2} A_+ \right) \right] \quad (\text{D.22})$$

$$= \frac{1}{\Delta_{+,l}} \left[-\frac{B}{2} (A_- C_+ + A_+ C_-) + A_- A_+ C_0 \right] \quad (\text{D.23})$$

Pero, en realidad, sólo se usará la diferencia entre las componentes de las velocidades de drift halladas, dada por:

$$-v_{d,l-1}^+ + v_{d,l+1}^- = \frac{\omega_l - k_l v_z}{\Delta_{+,l}} \left\{ 2i \frac{\Omega_p^2 B_0}{B_s^2} \tilde{E}_{1,l}^z \right. \quad (\text{D.24})$$

$$\left. + \frac{\Omega_p}{B_s} \left[\tilde{B}_{1,l-1}^+ \frac{\omega_{l-1}}{k_{l-1}} (\omega_{l+1} - k_{l+1} v_z - \Omega_p) + \tilde{B}_{1,l+1}^- \frac{\omega_{l+1}}{k_{l+1}} (\omega_{l-1} - k_{l-1} v_z + \Omega_p) \right] \right\} \quad (\text{D.25})$$

y también la forma explícita de la componente z :

$$v_{d,l}^z = \frac{1}{\Delta_{+,l}} \left\{ -i \frac{\Omega_p}{B_s} \tilde{E}_{1,l}^z (\omega_{l+1} - k_{l+1} v_z - \Omega_p) (\omega_{l-1} - k_{l-1} v_z + \Omega_p) \right. \quad (\text{D.26})$$

$$\left. - \frac{1}{2} \frac{\Omega_p^2 B_0}{B_s^2} \left[\tilde{B}_{1,l-1}^+ \frac{\omega_{l-1}}{k_{l-1}} (\omega_{l+1} - k_{l+1} v_z - \Omega_p) + \tilde{B}_{1,l+1}^- \frac{\omega_{l+1}}{k_{l+1}} (\omega_{l-1} - k_{l-1} v_z + \Omega_p) \right] \right\} \quad (\text{D.27})$$



Apéndice E

Modelo cinético: Simplificaciones de integrales varias

E.1. Integrales temporales

Para determinar la integral temporal (en la variable τ) que proporciona la función de distribución perturbada sin el término de drift F_{1p} (4.98), además de la corrección ΔF_{1p} , se requiere calcular tres tipos de integrales temporales que requieren el factor ϕ_l dado en (4.96):

- Las del primer tipo, $I_{1\pm}$, involucran el factor $e^{\pm i\Omega_p\tau}$, de modo que la integral a determinar sea:

$$I_{1+} := \int_0^\infty e^{i\phi_l\tau} e^{\pm i\Omega_p\tau} d\tau = \int_0^\infty \exp[-i(\omega_l - k_l v_z)\tau \pm i\Omega_p\tau] d\tau \quad (\text{E.1})$$

$$= \frac{1}{-i(\omega_l \mp \Omega_p - k_l v_z)} \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\Im(\omega_l)\tau} e^{-i(\Re(\omega_l) - \Omega_p - k_l v_z)\tau} - 1 \right) \quad (\text{E.2})$$

Nótese que la segunda exponencial del límite anterior está acotada:

$$\left| e^{-i(\Re(\omega_l) - \Omega_p - k_l v_z)\tau} \right| \leq 1, \quad (\text{E.3})$$

por lo que imponiendo la condición de convergencia (4.99), se tendrá que

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\Im(\omega_l)\tau} = 0, \quad (\text{E.4})$$

Cabe destacar que esta situación ocurrirá con todas las restantes integrales temporales aquí mostradas, por lo que no se repetirá el argumento anterior. Entonces, finalmente se tendrá:

$$I_{1+} := \frac{1}{i(\omega_l \mp \Omega_p - k_l v_z)} \quad (\text{E.5})$$

- La integral del segundo tipo I_2 involucran sólo el factor de Fourier $e^{i\phi_l\tau}$:

$$I_2 := \int_0^\infty e^{i\phi_l\tau} d\tau = \int_0^\infty d\tau \exp[-i(\omega_l - k_l v_z)\tau] \quad (\text{E.6})$$

$$= \frac{1}{-i(\omega_l - k_l v_z)} \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\Im(\omega_l)\tau} e^{-i(\Re(\omega_l) - k_l v_z)\tau} - 1 \right) \quad (\text{E.7})$$

$$= \frac{1}{i(\omega_l - k_l v_z)} \quad (\text{E.8})$$

- Las del tercer tipo, $I_{3\pm}$, involucran el factor $e^{\pm i\phi'_0}$ cuyo argumento es dado en (4.97), de modo que la integral a determinar sea:

$$I_{3\pm} = \int_0^\infty e^{i\phi_l\tau} e^{\pm i\phi'_0} d\tau = \int_0^\infty d\tau \exp[-i(\omega_l - k_l v_z)\tau \pm i(k_0 z - \omega_0 t) \pm i(\omega_0 - k_0 v_z)\tau] \quad (\text{E.9})$$

$$= \frac{e^{\pm i(k_0 z - \omega_0 t)}}{-i(\omega_l \mp \omega_0 - (k_l \mp k_0)v_z)} \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\Im(\omega_l)\tau} e^{-i[\Re(\omega_l) \mp \omega_0 - (k_l \mp k_0)v_z]\tau} - 1 \right) \quad (\text{E.10})$$

$$= \frac{e^{\pm i\phi_0}}{i(\omega_{l\mp 1} - k_{l\mp 1}v_z)} \quad (\text{E.11})$$

en donde se han usado las abreviaciones (2.30) y (2.31).

- Las del cuarto tipo, $I_{4\pm}$, que sólo aparecen al calcular ΔF_{1p} , requieren ambos factores $e^{\pm i\phi'_0}$ y $e^{\pm i\Omega_p\tau}$:

$$I_{4+} := \int_0^\infty e^{i\phi_l\tau} e^{\pm i\Omega_p\tau} e^{\mp i\phi'_0} d\tau = \int_0^\infty \exp[-i(\omega_l - k_l v_z)\tau \pm i\Omega_p\tau \pm i(k_0 z - \omega_0 t) \pm i(\omega_0 - k_0 v_z)] d\tau \quad (\text{E.12})$$

$$= \frac{e^{\mp i\phi_0}}{i(\omega_{l\pm 1} \mp \Omega_p - k_{l\pm 1}v_z)} \quad (\text{E.13})$$

E.2. Integrales de la función Z

Estas son las integrales en velocidad que aparecen al calcular las expresiones explícitas para la densidad de carga y densidad de corriente transversal. Debido a que F_{0p} (4.44) es de tipo Maxwelliana, todas ellas podrán ser escritas en términos de la función Z de plasma (C.1), con sus argumentos normalizados dados en la sección F.3.1. En general, también se requieren las siguientes derivadas de la función de distribución:

$$\frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial v_z} = -\frac{2v_z e^{-\vec{v}^2/v_{Tp}^2}}{\pi^{3/2} v_{Tp}^5} = -\frac{2v_z}{v_{Tp}^2} \hat{F}_{0p} \quad (\text{E.14})$$

y, usando (4.86):

$$V_\perp^2 \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial V^2} = \frac{V_x}{2} \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial V_x} + \frac{V_y}{2} \frac{\partial \hat{F}_{0p}}{\partial V_y} \quad (\text{E.15})$$

$$= -V_\perp^2 \frac{e^{-\vec{v}^2/v_{Tp}^2}}{\pi^{3/2} v_{Tp}^5} = -V_\perp^2 \hat{F}_{0p} \quad (\text{E.16})$$

Además, se hará repetido uso de la sustitución

$$i = \frac{V_i}{v_{Tp}}, \quad \text{con } i = x, y, z \quad (\text{E.17})$$

y de la integral gaussiana $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

E.2.1. Independientes de la amplitud

Son aquellas que no incorporan el factor $\Delta_{+,l}$. Se denotarán con la letra “G” y un subíndice apropiado. Las que involucren la derivada transversal de la función de distribución df_0/dv_2 portarán un subíndice extra “T”.

- La asociada al término ϵ_s (F.62), y que proviene de $\rho_{1p,l}$, es

$$I_{G1} = \int d^3V \frac{1}{\omega_l - k_l v_z} \frac{\partial \widehat{F}_0}{\partial v_z} = \frac{1}{k_l} \frac{2}{\pi^{3/2} v_{Tp}^5} \int d^3V \frac{v_z e^{-V^2/v_{Tp}^2}}{v_z - \frac{\omega_l}{k_l}} \quad (E.18)$$

Notar que es muy similar a la calculada en el modelo cinético híbrido (2.84). Las integrales transversales son inmediatas, mientras que para la longitudinal se recurre a la abreviación ξ_l dado en la subsección F.3.1:

$$I_{G1} = \frac{2}{\sqrt{\pi} k_l v_{Tp}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{z - \xi_l} e^{-z^2} dz \quad (E.19)$$

$$= \frac{2}{k_l v_{Tp}^2} (1 + \xi_l Z(\xi_l)) = -\frac{Z'(\xi_l)}{k_l v_{Tp}^2} \quad (E.20)$$

- Una de las integrales del término $M_{s\pm}$ (F.66), que también proviene de la densidad de carga, es

$$I_{G2} = \int d^3V \frac{\zeta_+}{\omega_l - k_l v_z} \frac{\partial \widehat{F}_{0p}}{\partial v_z} = \frac{-1}{k_l} \int d^3V \frac{v_z - \frac{\omega_0}{k_0}}{\left(v_z - \frac{\omega_l}{k_l}\right) \left(v_z - \frac{\omega_0 - \Omega}{k_0}\right)} \frac{-2v_z e^{-V^2/v_{Tp}^2}}{\pi^{3/2} v_{Tp}^5} \quad (E.21)$$

efectuando las integrales transversales, introduciendo las abreviaciones ξ_0 y ξ_Ω (sección F.3.1), y realizando la descomposición en fracciones parciales, se tendrá:

$$I_{\rho_2} = \frac{2}{k_l \sqrt{\pi} v_{Tp}^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} \left\{ \frac{z(z - \xi_0)}{(z - \xi_l)(z - (\xi_0 - \xi_\Omega))} \right\} \quad (E.22)$$

$$= \frac{2}{k_l v_{Tp}^2} \left[1 + \frac{\xi_l(\xi_l - \xi_0)Z(\xi_l) - \xi_\Omega(\xi_\Omega - \xi_0)Z(\xi_0 - \xi_\Omega)}{\xi_l - (\xi_0 - \xi_\Omega)} \right] \quad (E.23)$$

Usando las definiciones F.3.2, se tiene finalmente:

$$I_{G2} = \frac{2G_2}{k_l v_T^2} \quad (E.24)$$

- En los términos $M_{+,+}$ (F.74) y $M_{+,-}$ (F.80) hay una integral que proviene de combinar cantidades, independientes de la amplitud, de la densidad de carga, corriente transversal y corriente longitudinal:

$$I_{G3} = \int d^3V \frac{\zeta_+^2(\omega_0 - k_0 v_z)}{\omega_l - k_l v_z} \frac{\partial \widehat{F}_{0p}}{\partial v_z} \quad (E.25)$$

$$= \frac{-k_0}{-k_l} \int d^3V \frac{v_z - \frac{\omega_0}{k_0}}{v_z - \frac{\omega_l}{k_l}} \left(\frac{\omega_0 - k_0 v_z}{\omega_0 - k_0 v_z - \Omega_p} \right)^2 \frac{-2v_z e^{-V^2/v_{Tp}^2}}{\pi^{3/2} v_{Tp}^5} \quad (E.26)$$

efectuando las integrales transversales, introduciendo abreviaciones apropiadas, y realizando la descomposición en fracciones parciales, se tendrá:

$$I_{G3} = \frac{-2k_0}{k_l \sqrt{\pi} v_{Tp}} \int dz e^{-z^2} \left\{ \frac{z(z - \xi_0)^3}{(z - (\xi_0 - \xi_\Omega))^2 (z - \xi_l)} \right\} \quad (E.27)$$

$$= \frac{-2k_0}{k_l v_{Tp}} \left\{ \xi_l - \xi_0 - 2\xi_\Omega + \frac{\xi_\Omega^3(\xi_0 - \xi_\Omega)Z'(\xi_0 - \xi_\Omega)}{\xi_l - (\xi_0 - \xi_\Omega)} \right\} \quad (E.28)$$

$$+ \frac{1}{\xi_l - (\xi_0 - \xi_\Omega)} \left[\left(-3(\xi_0 - \xi_\Omega) + \frac{\xi_\Omega \xi_l}{\xi_l - (\xi_0 - \xi_\Omega)} \right) \xi_\Omega^2 Z(\xi_0 - \xi_\Omega) + \frac{\xi_l(\xi_l - \xi_0)^3 Z(\xi_l)}{\xi_l - (\xi_0 - \xi_\Omega)} \right] \quad (E.29)$$

Usando las definiciones F.3.2, se tiene finalmente:

$$I_{G3} = \frac{-2k_0}{k_l v_{Tp}} G_3 \quad (E.30)$$

- En los términos ϵ_{\pm} (F.69) se tiene la integral

$$I_{GT,l\pm 1} = \int d^3V \frac{V_{\perp}^2 \partial \widehat{F}_0 / \partial V^2}{\omega_{l\pm 1} \mp \Omega_p - k_{l\pm 1} v_z} = \frac{1}{k_{l\pm 1}} \int d^3V \frac{1}{v_z - \frac{\omega_{l\pm 1} \mp \Omega}{k_{l\pm 1}}} \frac{e^{-\vec{V}^2/v_T^2}}{\pi^{3/2} v_T^5} (V_x^2 + V_y^2) \quad (\text{E.31})$$

Efectuando las integrales transversales e introduciendo abreviaciones apropiadas, se tendrá:

$$I_{GT,l\pm 1} = \frac{1}{k_{l\pm 1} \sqrt{\pi} v_T} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{-z^2}}{z - \xi_{\pm}} = \frac{1}{k_{l\pm 1} v_T} Z(\xi_{\pm}) \quad (\text{E.32})$$

E.2.2. Dependientes de la amplitud

Todas las integrales que dependen de la amplitud llevarán el factor $\Delta_{+,l}$. Por tanto, convendrá escribirlo como un producto de factores lineales en v_z para poder efectuar la descomposición en fracciones parciales. Así, definiendo

$$b := - \left(\frac{\omega_{l+1} - \Omega}{k_{l+1}} + \frac{\omega_{l-1} + \Omega}{k_{l-1}} \right) \quad (\text{E.33})$$

$$c := \left(\frac{\omega_{l+1} - \Omega}{k_{l+1}} \right) \left(\frac{\omega_{l-1} + \Omega}{k_{l-1}} \right) - \frac{1}{k_{l-1} k_{l+1}} \left(\frac{e E_0 k_0}{m \omega_0} \right)^2 \quad (\text{E.34})$$

$$\Lambda := b^2 - 4c = \left(\frac{\omega_{l+1} - \Omega}{k_{l+1}} - \frac{\omega_{l-1} + \Omega}{k_{l-1}} \right)^2 + \frac{4}{k_{l-1} k_{l+1}} \left(\frac{e E_0 k_0}{m \omega_0} \right)^2 \quad (\text{E.35})$$

y en vista de (D.16), se tendrá:

$$\Delta_{+,l} = -k_l k_{l-1} k_{l+1} \left(v_z - \frac{\omega_l}{k_l} \right) [v_z^2 + b v_z + c] \quad (\text{E.36})$$

$$= -k_l k_{l-1} k_{l+1} \left(v_z - \frac{\omega_l}{k_l} \right) \left(v_z - \frac{-b + \sqrt{\Lambda}}{2} \right) \left(v_z - \frac{-b - \sqrt{\Lambda}}{2} \right) \quad (\text{E.37})$$

en donde la última igualdad se justifica debido a que el discriminante $\Lambda \geq 0$

- Una de las integrales del término M_{ss} (F.64), que proviene de la densidad de carga, es:

$$I_{H1} = \int d^3V \frac{1}{\Delta_{+,l}} \frac{\partial \widehat{F}_0}{\partial v_z}, \quad (\text{E.38})$$

$$= \frac{1}{-i k_l k_{l-1} k_{l+1} \pi^{3/2} v_{Tp}^5} \int d^3V \frac{-2v_z}{\left(v_z - \frac{\omega_l}{k_l} \right) \left(v_z - \frac{-b + \sqrt{\Lambda}}{2} \right) \left(v_z - \frac{-b - \sqrt{\Lambda}}{2} \right)} e^{-\vec{V}^2/v_{Tp}^2} \quad (\text{E.39})$$

Integrando en las variables transversales, normalizando apropiadamente y descomponiendo en fracciones parciales, se tiene:

$$I_{H1} = \frac{2}{k_l k_{l-1} k_{l+1} \sqrt{\pi} v_{Tp}^4} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} \left\{ \frac{z}{(z - \xi_l)(z - \xi_{B+})(z - \xi_{B-})} \right\} \quad (\text{E.40})$$

$$= \frac{2}{k_l k_{l-1} k_{l+1} v_{Tp}^4} \left\{ \frac{\xi_l Z(\xi_l)}{(\xi_{B+} - \xi_l)(\xi_{B-} - \xi_l)} + \frac{\xi_{B+} Z(\xi_{B+})}{(\xi_{B+} - \xi_{B-})(\xi_{B+} - \xi_l)} - \frac{\xi_{B-} Z(\xi_{B-})}{(\xi_{B+} - \xi_{B-})(\xi_{B-} - \xi_l)} \right\} \quad (\text{E.41})$$

Usando las definiciones F.3.2, se tiene finalmente:

$$I_{H1} = \frac{2H_1}{k_l k_{l-1} k_{l+1} v_{Tp}^4} \quad (\text{E.42})$$

- Otra de las integrales del término M_{ss} (F.64), que proviene de una suma de términos de la densidad de corriente, es

$$I_{HT1} = \int d^3V \frac{\omega_l - k_l v_z}{\Delta_{+,l}} V_{\perp}^2 \frac{\partial \widehat{F}_{0p}}{\partial V^2} \quad (E.43)$$

$$= \frac{-k_l}{-k_l k_{l-1} k_{l+1} \pi^{3/2} v_{Tp}^5} \int d^3V \frac{v_z - \frac{\omega_l}{k_l}}{(v_z - \xi_l v_{Tp})(v_z - \xi_{B+} v_{Tp})(v_z - \xi_{B-} v_{Tp})} e^{-V^2/v_{Tp}^2} (-V_x^2 - V_y^2) \quad (E.44)$$

Calculando las integrales transversales, introduciendo las cantidades $\xi_{B\pm}$, y mediante la descomposición en fracciones parciales, se tendrá:

$$I_{HT1} = \frac{-1}{k_{l-1} k_{l+1} \sqrt{\pi} v_{Tp}^2} \int dz e^{-z^2} \left\{ \frac{1}{(z - \xi_{B+})(z - \xi_{B-})} \right\} \quad (E.45)$$

$$= \frac{-1}{k_{l-1} k_{l+1} v_{Tp}^2} \left\{ \frac{1}{\xi_{B+} - \xi_{B-}} (Z(\xi_{B+}) - Z(\xi_{B-})) \right\} \quad (E.46)$$

Y finalmente, con las cantidades de F.3.2:

$$I_{HT1} = \frac{-H_{T1}}{k_{l-1} k_{l+1} v_{Tp}^2} \quad (E.47)$$

- Una de las integrales del término $M_{s\pm}$ (F.66), que proviene de la densidad de carga y alterna sus dos casos de signos, es:

$$I_{H2,l\pm 1} = \int d^3V \frac{\omega_{l\pm 1} \mp \Omega - k_{l\pm 1} v_z}{\Delta_{+,l}} \frac{\partial \widehat{F}_0}{\partial v_z} \quad (E.48)$$

$$= -k_{l\pm 1} \int d^3V \frac{v_z - \frac{\omega_{l\pm 1} \mp \Omega}{k_{l\pm 1}}}{\left(v_z - \frac{\omega_l}{k_l}\right) \left(v_z - \frac{-b + \sqrt{\Lambda}}{2}\right) \left(v_z - \frac{-b - \sqrt{\Lambda}}{2}\right)} \frac{-2v_z e^{-\vec{V}^2/v_{Tp}^2}}{(-1)k_l k_{l-1} k_{l+1} \pi^{3/2} v_{Tp}^5} \quad (E.49)$$

Efectuando las integrales transversales, adimensionalizando, y descomponiendo en fracciones parciales:

$$I_{H2,l\pm 1} = \frac{-2}{k_l k_{l\mp 1} \sqrt{\pi} v_{Tp}^3} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} \frac{z(z - \xi_{\pm})}{(z - \xi_l)(z - \xi_{B+})(z - \xi_{B-})} \quad (E.50)$$

$$= \frac{-2}{k_l k_{l\mp 1} v_{Tp}^3} \left\{ \frac{\xi_l(\xi_l - \xi_{\pm})}{(\xi_{B+} - \xi_l)(\xi_{B-} - \xi_l)} Z(\xi_l) + \frac{1}{\xi_{B+} - \xi_{B-}} \left[\frac{\xi_{B+}(\xi_{B+} - \xi_{\pm})}{\xi_{B+} - \xi_l} Z(\xi_{B+}) - \frac{\xi_{B-}(\xi_{B-} - \xi_{\pm})}{\xi_{B-} - \xi_l} Z(\xi_{B-}) \right] \right\} \quad (E.51)$$

Finalmente, considerando las cantidades de F.3.2, se tiene

$$I_{H2,l\pm 1} = -\frac{2H_{2,l\pm 1}}{k_l k_{l\mp 1} v_{Tp}^3} \quad (E.52)$$

- Otra de las integrales del término $M_{s\pm}$ (F.66), que proviene de una suma de términos en la densidad de corriente, es:

$$I_{HT2,l\pm 1} = \int d^3V \frac{(\omega_l - k_l v_z)(\omega_{l\pm 1} - k_{l\pm 1} v_z \mp \Omega_p)}{\Delta_{+,l}} V_{\perp}^2 \frac{\partial \widehat{F}_{0p}}{\partial V^2} \quad (E.53)$$

$$= \frac{k_l k_{l\pm 1}}{-k_l k_{l-1} k_{l+1} \pi^{3/2} v_{Tp}^5} \int d^3V \frac{\left(v_z - \frac{\omega_l}{k_l}\right) \left(v_z - \frac{\omega_{l\pm 1} \mp \Omega_p}{k_{l\pm 1}}\right)}{(v_z - \xi_l v_{Tp})(v_z - \xi_{B+} v_{Tp})(v_z - \xi_{B-} v_{Tp})} e^{-V^2/v_{Tp}^2} (-V_x^2 - V_y^2) \quad (E.54)$$

Efectuando las integrales transversales, adimensionalizando, y descomponiendo en fracciones parciales:

$$I_{HT2,l\pm 1} = \frac{1}{k_{l\mp 1} \sqrt{\pi} v_{Tp}} \int dz e^{-z^2} \left\{ \frac{(z - \xi_{\pm})}{(z - \xi_{B+})(z - \xi_{B-})} \right\} \quad (E.55)$$

$$= \frac{1}{i k_{l\mp 1} v_{Tp}} \left\{ \frac{1}{\xi_{B+} - \xi_{B-}} [(\xi_{B+} - \xi_{\pm})Z(\xi_{B+}) - (\xi_{B-} - \xi_{\pm})Z(\xi_{B-})] \right\} \quad (E.56)$$

Finalmente, considerando las cantidades de F.3.2, se tiene:

$$I_{HT2,l\pm 1} = \frac{H_{T2,l\pm 1}}{k_{l\mp 1}v_{Tp}} \quad (\text{E.57})$$

- En el término $M_{+,+}$ (F.74) se tiene la siguiente integral, que proviene de la densidad de corriente:

$$I_{HT3+-} = \int d^3V \frac{\omega_{l+1} - k_{l+1}v_z - \Omega_p}{\omega_{l-1} - k_{l-1}v_z + \Omega_p} \frac{V_{\perp}^2}{\Delta_{+,l}} \frac{\partial \widehat{F}_0}{\partial V^2} \quad (\text{E.58})$$

$$= \frac{k_{l+1}}{-k_{l-1}k_l k_{l-1}k_{l+1}\pi^{3/2}v_{Tp}^5} \int d^3V \frac{v_z - \frac{\omega_{l+1}-\Omega}{k_{l+1}}}{v_z - \frac{\omega_{l-1}+\Omega}{k_{l-1}}} \frac{-(V_x^2 + V_y^2)}{\left(v_z - \frac{\omega_l}{k_l}\right) \left(v_z - \frac{-b+\sqrt{\Lambda}}{2}\right) \left(v_z - \frac{-b-\sqrt{\Lambda}}{2}\right)} e^{-\vec{V}^2/v_{Tp}^2} \quad (\text{E.59})$$

Efectuando las integrales transversales, adimensionalizando, y descomponiendo en fracciones parciales:

$$I_{HT3+-} = \frac{1}{k_l k_{l-1}^2 \sqrt{\pi} v_{Tp}^3} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} \frac{z - \xi_+}{(z - \xi_-)(z - \xi_l)(z - \xi_{B+})(z - \xi_{B-})} \quad (\text{E.60})$$

$$= \frac{1}{k_l k_{l-1}^2 v_{Tp}^3} \left\{ \frac{(\xi_+ - \xi_-)Z(\xi_-)}{(\xi_l - \xi_-)(\xi_{B+} - \xi_-)(\xi_{B-} - \xi_-)} - \frac{(\xi_+ - \xi_l)Z(\xi_l)}{(\xi_l - \xi_-)(\xi_{B+} - \xi_l)(\xi_{B-} - \xi_l)} \right. \quad (\text{E.61})$$

$$\left. + \frac{1}{\xi_{B+} - \xi_{B-}} \left[-\frac{(\xi_+ - \xi_{B+})Z(\xi_{B+})}{(\xi_l - \xi_{B+})(\xi_- - \xi_{B+})} + \frac{(\xi_+ - \xi_{B-})Z(\xi_{B-})}{(\xi_l - \xi_{B-})(\xi_- - \xi_{B-})} \right] \right\} \quad (\text{E.62})$$

Por otra parte, hay una integral análoga que aparece en el término $M_{-,-}$ (F.77):

$$I_{HT3-+} = \int d^3V \frac{\omega_{l-1} - k_{l-1}v_z + \Omega_p}{\omega_{l+1} - k_{l+1}v_z - \Omega} \frac{V_{\perp}^2}{\Delta_{+,l}} \frac{\partial \widehat{F}_{0p}}{\partial V^2} \quad (\text{E.63})$$

que se puede simplificar en base al resultado anterior, cambiando los signos necesarios del siguiente modo:

$$I_{HT3-+} = \frac{1}{k_l k_{l+1}^2 v_{Tp}^3} \left\{ \frac{(\xi_- - \xi_+)Z(\xi_+)}{(\xi_l - \xi_+)(\xi_{B+} - \xi_+)(\xi_{B-} - \xi_+)} - \frac{(\xi_- - \xi_l)Z(\xi_l)}{(\xi_l - \xi_+)(\xi_{B+} - \xi_l)(\xi_{B-} - \xi_l)} \right. \quad (\text{E.64})$$

$$\left. + \frac{1}{\xi_{B+} - \xi_{B-}} \left[-\frac{(\xi_- - \xi_{B+})Z(\xi_{B+})}{(\xi_l - \xi_{B+})(\xi_+ - \xi_{B+})} + \frac{(\xi_- - \xi_{B-})Z(\xi_{B-})}{(\xi_l - \xi_{B-})(\xi_+ - \xi_{B-})} \right] \right\} \quad (\text{E.65})$$

De esta forma, usando la abreviación común de F.3.2, se tendrá finalmente:

$$I_{HT3+-} = \frac{H_{T3,l+1}}{k_l k_{l-1}^2 v_T^3} \quad (\text{E.66})$$

$$I_{HT3-+} = \frac{H_{T3,l-1}}{k_l k_{l+1}^2 v_T^3} \quad (\text{E.67})$$

- Otra integral de signo alternado que aparece en $M_{+,+}$ (F.74) y $M_{+,-}$ (F.80), proveniente de una combinación de densidad de carga y corriente, es

$$I_{H3,l\pm 1} = \int d^3V \frac{(\omega_{l\pm 1} - k_{l\pm 1}v_z \mp \Omega_p)(\omega_0 - k_0v_z)}{\Delta_{+,l}} \zeta_{\pm} \frac{\partial \widehat{F}_{0p}}{\partial v_z} \quad (\text{E.68})$$

$$= (-k_{l\pm 1})(-k_0) \int d^3V \frac{\left(v_z - \frac{\omega_{l\pm 1} \mp \Omega_p}{k_{l\pm 1}}\right) \left(v_z - \frac{\omega_0}{k_0}\right)}{\Delta_{+,l}} \frac{\omega_0 - k_0v_z}{\omega_0 - k_0v_z - \Omega_p} \frac{-2v_z e^{-V^2/v_{Tp}^2}}{\pi^{3/2}v_{Tp}^5} \quad (\text{E.69})$$

$$(\text{E.70})$$

Efectuando las integrales transversales, adimensionalizando, y descomponiendo en fracciones parciales:

$$I_{H3,l\pm 1} = \frac{2k_0}{k_l k_{l\mp 1} \sqrt{\pi} v_{Tp}^2} \int dz e^{-z^2} \left\{ \frac{z(z-\xi_{\pm})(z-\xi_0)^2}{(z-\xi_l)(z-\xi_{B+})(z-\xi_{B-})(z-(\xi_0-\xi_{\Omega_p}))} \right\} \quad (\text{E.71})$$

$$= \frac{2k_0}{k_l k_{l\mp 1} v_{Tp}^2} \left\{ 1 + \frac{1}{\xi_{B+} - \xi_{B-}} \left[\frac{\xi_{B+}(\xi_{B+} - \xi_{\pm})(\xi_{B+} - \xi_0)^2}{(\xi_{B+} - \xi_l)(\xi_{B+} - (\xi_0 - \xi_{\Omega}))} Z(\xi_{B+}) - \frac{\xi_{B-}(\xi_{B-} - \xi_{\pm})(\xi_{B-} - \xi_0)^2}{(\xi_{B-} - \xi_l)(\xi_{B-} - (\xi_0 - \xi_{\Omega}))} Z(\xi_{B-}) \right] \right\} \quad (\text{E.72})$$

$$+ \frac{1}{\xi_l - (\xi_0 - \xi_{\Omega})} \left[\frac{\xi_l(\xi_l - \xi_{\pm})(\xi_l - \xi_0)^2}{(\xi_{B+} - \xi_l)(\xi_{B-} - \xi_l)} Z(\xi_l) - \frac{\xi_{\Omega}^2(\xi_0 - \xi_{\Omega})(\xi_0 - \xi_{\Omega} - \xi_{\pm})}{(\xi_{B+} - (\xi_0 - \xi_{\Omega}))(\xi_{B-} - (\xi_0 - \xi_{\Omega}))} Z(\xi_0 - \xi_{\Omega}) \right] \left. \right\} \quad (\text{E.73})$$

Así, invocando las cantidades de F.3.2, se tendrá finalmente la integral:

$$I_{H3,l\pm 1} = \frac{2k_0}{k_l k_{l\mp 1} v_{Tp}^2} H_{3,l\pm 1} \quad (\text{E.74})$$

- Otra integral que aparece en los términos $M_{+,-}$ (F.80) y $M_{-,+}$ (F.83), asociada a la densidad de corriente transversal, es:

$$I_{HT4} = \int d^3V \frac{V_{\perp}^2}{\Delta_{+,l}} \frac{\partial \widehat{F}_0}{\partial V^2} \quad (\text{E.75})$$

$$= \frac{1}{-k_l k_{l-1} k_{l+1} \pi^{3/2} v_{Tp}^5} \int d^3V \frac{-(V_x^2 + V_y^2)}{\left(v_z - \frac{\omega_l}{k_l}\right) \left(v_z - \frac{-b+\sqrt{\Lambda}}{2}\right) \left(v_z - \frac{-b-\sqrt{\Lambda}}{2}\right)} e^{-\vec{V}^2/v_{Tp}^2} \quad (\text{E.76})$$

Efectuando las integrales transversales, adimensionalizando, y descomponiendo en fracciones parciales:

$$I_{HT4} = \frac{1}{k_l k_{l-1} k_{l+1} \sqrt{\pi} v_{Tp}^3} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} \frac{1}{(z-\xi_l)(z-\xi_{B+})(z-\xi_{B-})} \quad (\text{E.77})$$

$$= \frac{1}{k_l k_{l-1} k_{l+1} v_{Tp}^3} \left\{ \frac{Z(\xi_l)}{(\xi_{B+} - \xi_l)(\xi_{B-} - \xi_l)} + \frac{1}{\xi_{B+} - \xi_{B-}} \left[\frac{Z(\xi_{B+})}{\xi_{B+} - \xi_l} - \frac{Z(\xi_{B-})}{\xi_{B-} - \xi_l} \right] \right\} \quad (\text{E.78})$$

Así, invocando las cantidades de F.3.2, se tendrá finalmente la integral:

$$I_{HT4} = \frac{H_{T4}}{k_l k_{l-1} k_{l+1} v_{Tp}^3} \quad (\text{E.79})$$

Denotando

$$H_{T4} := \frac{Z(\xi_l)}{(\xi_{B+} - \xi_l)(\xi_{B-} - \xi_l)} + \frac{1}{\xi_{B+} - \xi_{B-}} \left[\frac{Z(\xi_{B+})}{\xi_{B+} - \xi_l} - \frac{Z(\xi_{B-})}{\xi_{B-} - \xi_l} \right], \quad (\text{E.80})$$

- Una de las integrales que conforman los términos $M_{\pm s}$ (F.71), proveniente de una combinación de cantidades de la densidad de carga y densidades de corriente transversal y longitudinal, es:

$$I_{H4} = \int d^3V \frac{(\omega_{l-1} - k_{l-1}v_z + \Omega_p)(\omega_{l+1} - k_{l+1}v_z - \Omega_p)}{\Delta_{+,l}} (\omega_0 - k_0v_z) \zeta_+ \frac{\partial \widehat{F}_{0p}}{\partial v_z} \quad (\text{E.81})$$

$$= \frac{(-k_0)(-k_{l-1})(-k_{l+1})}{-k_l k_{l-1} k_{l+1} \pi^{3/2} v_{Tp}^5} \int d^3V \frac{\left(v_z - \frac{\omega_{l-1} + \Omega_p}{k_{l-1}}\right) \left(v_z - \frac{\omega_{l+1} - \Omega_p}{k_{l+1}}\right)}{\left(v_z - \frac{\omega_l}{k_l}\right) \left(v_z - \frac{-b+\sqrt{\Lambda}}{2}\right) \left(v_z - \frac{-b-\sqrt{\Lambda}}{2}\right)} \left(v_z - \frac{\omega_0}{k_0}\right) \zeta_+ \frac{-2v_z e^{-V^2/v_{Tp}^2}}{\pi^{3/2} v_{Tp}^5} \quad (\text{E.82})$$

Efectuando las integrales transversales, adimensionalizando, y descomponiendo en fracciones parciales:

$$I_{H4} = \frac{-2k_0}{k_l \sqrt{\pi} v_{Tp}} \int dz e^{-z^2} \left\{ \frac{z(z - \xi_+)(z - \xi_-)}{(z - \xi_l)(z - \xi_{B+})(z - \xi_{B-})} \frac{(z - \xi_0)^2}{z - (\xi_0 - \xi_\Omega)} \right\} \quad (\text{E.83})$$

$$= \frac{-2k_0}{k_l v_{Tp}} \left\{ \frac{1}{\xi_{B+} - \xi_{B-}} \left[\frac{(\xi_{B+} - \xi_0)^2 (\xi_{B+} - \xi_+) (\xi_{B+} - \xi_-)}{(\xi_{B+} - \xi_l) (\xi_{B+} - (\xi_0 - \xi_\Omega))} \xi_{B+} Z(\xi_{B+}) \right. \right. \quad (\text{E.84})$$

$$\left. - \frac{(\xi_{B-} - \xi_0)^2 (\xi_{B-} - \xi_+) (\xi_{B-} - \xi_-)}{(\xi_{B-} - \xi_l) (\xi_{B-} - (\xi_0 - \xi_\Omega))} \xi_{B-} Z(\xi_{B-}) \right] + \frac{1}{\xi_l - (\xi_0 - \xi_\Omega)} \left[\frac{(\xi_l - \xi_0)^2 (\xi_l - \xi_+) (\xi_l - \xi_-)}{(\xi_{B+} - \xi_l) (\xi_{B-} - \xi_l)} \xi_l Z(\xi_l) \right. \quad (\text{E.85})$$

$$\left. - \frac{\xi_\Omega^2 (\xi_+ - (\xi_0 - \xi_\Omega)) (\xi_- - (\xi_0 - \xi_\Omega))}{(\xi_{B+} - (\xi_0 - \xi_\Omega)) (\xi_{B-} - (\xi_0 - \xi_\Omega))} (\xi_0 - \xi_\Omega) Z(\xi_0 - \xi_\Omega) \right] + \xi_{B+} + \xi_{B-} + \xi_l - \xi_0 - \xi_+ - \xi_- \left. \right\} \quad (\text{E.86})$$

Así, invocando las cantidades de F.3.2, se tendrá finalmente la integral:

$$I_{H4} = \frac{-2k_0}{k_l v_{Tp}} H_4 \quad (\text{E.87})$$

- Otra integral del término $M_{\pm,s}$ (F.71), proveniente de la densidad de corriente transversal y con signo alternante, es:

$$I_{HT5,l\pm 1} = \int d^3V \frac{\omega_{l\pm 1} \mp \Omega - k_{l\pm 1} v_z}{\Delta_{+,l}} V_\perp^2 \frac{\partial \hat{F}_0}{\partial V^2} \quad (\text{E.88})$$

$$= \frac{-k_{l\pm 1}}{-k_l k_{l-1} k_{l+1} \pi^{3/2} v_{Tp}^5} \int d^3V \frac{\left(v_z - \frac{\omega_{l\pm 1} \mp \Omega}{k_{l\pm 1}} \right) (-e^{-\vec{V}^2/v_{Tp}^2}) (V_x^2 + V_y^2)}{\left(v_z - \frac{\omega_l}{k_l} \right) \left(v_z - \frac{-b+\sqrt{\Lambda}}{2} \right) \left(v_z - \frac{-b-\sqrt{\Lambda}}{2} \right)} \quad (\text{E.89})$$

Efectuando las integrales transversales, adimensionalizando, y descomponiendo en fracciones parciales:

$$I_{HT5,l\pm 1} = -\frac{1}{\sqrt{\pi} k_l k_{l\mp 1} v_{Tp}^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} \frac{(z - \xi_\pm)}{(z - \xi_l)(z - \xi_{B+})(z - \xi_{B-})} \quad (\text{E.90})$$

$$= \frac{-1}{k_l k_{l\mp 1} v_{Tp}^2} \left\{ \frac{(\xi_l - \xi_\pm) Z(\xi_l)}{(\xi_{B+} - \xi_l) (\xi_{B-} - \xi_l)} + \frac{1}{\xi_{B+} - \xi_{B-}} \left[\frac{(\xi_{B+} - \xi_\pm) Z(\xi_{B+})}{\xi_{B+} - \xi_l} - \frac{(\xi_{B-} - \xi_\pm) Z(\xi_{B-})}{\xi_{B-} - \xi_l} \right] \right\} \quad (\text{E.91})$$

Así, invocando las cantidades de F.3.2, se tendrá finalmente la integral:

$$I_{HT5,l\pm 1} = -\frac{H_{T5,l\pm 1}}{k_l k_{l\mp 1} v_{Tp}^2} \quad (\text{E.92})$$

Apéndice F

Normalizaciones

F.1. Plasma electrón-protón

Para adimensionalizar el sistema compuesto de un plasma de electrones sin masa (e) y protones (p), se usan las definiciones dadas en Hollweg [Hollweg, 1994], de modo que para las cantidades de la onda pump:

$$Y_0 = k_0 \frac{V_A}{\Omega_p}, \quad X_0 = \frac{\omega_0}{\Omega_p} \quad (\text{F.1})$$

con V_A la velocidad de Alfvén dada por (1.32). De modo análogo, por el teorema de Floquet (sección B.4) y las definiciones de ω (B.5) y k (B.6), se tiene:

$$X = X_l := \frac{\omega_l}{\Omega_p}, \quad Y = Y_l := \frac{k_l V_A}{\Omega_p}, \quad (\text{F.2})$$

Por otra parte, tendremos:

$$X_{l\pm 1} = X \pm X_0 = \pm(X_0 \pm X) = \pm X_{\pm} \quad (\text{F.3})$$

$$Y_{l\pm 1} = Y \pm Y_0 = \pm(Y_0 \pm Y) = \pm Y_{\pm} \quad (\text{F.4})$$

otras normalizaciones complementarias:

$$\psi_0 := 1 - X_0, \quad \psi_{\pm} := 1 \mp X_{l\pm 1} = 1 - X_{\pm}, \quad r = \psi_0 \psi_+ \psi_- \quad (\text{F.5})$$

y la amplitud del campo eléctrico de la onda pump normalizado:

$$A := \left(\frac{B_0}{B_s} \right)^2 \quad (\text{F.6})$$

mediante la cual se pueden definir los términos que aparecen en la relación de dispersión (2.61):

$$\Delta := A + r \left(1 - \beta_p^F \frac{Y^2}{X^2} \right) \quad (\text{F.7})$$

$$D := r \beta_e^F Y^2 - X^2 \Delta \quad (\text{F.8})$$

$$B_{\pm} := \pm A X \psi_{\mp} \left(\frac{Y_{\pm} \psi_{\pm} X_0^2 - Y_0 \psi_0 X_{\pm}^2}{Y_0 Y_{\pm}} \right) \quad (\text{F.9})$$

$$R_{\pm} := \frac{Y_{\pm}}{2\psi_0} \left(X_0 - \frac{Y X_0^2}{Y_0 X} + \frac{X_{\pm}}{\psi_{\pm}} \right) \quad (\text{F.10})$$

$$L_{\pm} := Y_{\pm}^2 - \frac{X_{\pm}^2}{\psi_{\pm}} \quad (\text{F.11})$$

Recordar que el superíndice F es para enfatizar el hecho que tanto β_e como β_p están dadas por sus definiciones de fluidos (1.37), que son las mismas utilizada originalmente en [Hollweg, 1994] (con el cambio apropiado del

sistema de unidades gaussiano al S.I. aquí usado). Merece destacarse el hecho que sólo está involucrada la suma de los parámetros beta:

$$\beta^F = \beta_e^F + \beta_p^F, \quad (\text{F.12})$$

por lo que en realidad sólo requiere especificarse esta cantidad y no cada una por separado.

F.1.1. Modelo cinético híbrido

En este apartado sólo se indicará las normalizaciones y términos que, en este modelo, difieren de las mostradas previamente de teoría de fluidos F.1. Así, se requiere el argumento de la función Z de plasma (C.1) y su respectiva normalización mediante las definiciones previas:

$$\xi_p = \frac{\omega}{kv_{T_p}} = \frac{X}{Y\sqrt{\tilde{\beta}_p}}, \quad (\text{F.13})$$

con $\tilde{\beta}_p$ dado por (1.36) y numéricamente igual a β_p^K . Como este modelo posee una relación de dispersión idéntica a la de fluidos, pero con un coeficiente politrópico cinético de protones γ_p^K dado en (2.95) (en vez de la constante usual γ_p), se tendrá que el término β_p^F de fluidos dado por (1.37) cambiará a:

$$\beta_p^F = \frac{\mu_0 n_0 \gamma_p k_B T_p}{B_s^2} \rightarrow \frac{\mu_0 n_0 \gamma_p^K k_B T_p}{B_s^2} = \frac{\tilde{\beta}_p}{2} 2 \left(\xi_p^2 - \frac{1}{Z'(\xi_p)} \right) = \frac{X^2}{Y^2} - \frac{\tilde{\beta}_p}{Z'(\xi_p)} \quad (\text{F.14})$$

Consistentemente, Δ (que es el único término que contiene el parámetro beta de protones) deberá cambiar su definición de (F.7) a:

$$\Delta \rightarrow A + r \left[1 - \left(\frac{X^2}{Y^2} - \frac{\tilde{\beta}_p}{Z'(\xi_p)} \right) \frac{Y^2}{X^2} \right] \quad (\text{F.15})$$

y, para mantener coherencia (aunque no sea necesario), se redefinirá el parámetro beta de electrones de acuerdo a su definición cinética (1.35), de donde:

$$\beta_e^F = \frac{\gamma_e \beta_e^K}{2} \quad (\text{F.16})$$

de donde el único término de la relación de dispersión de fluido que contiene esto, D , cambiará a:

$$D \rightarrow r \frac{\gamma_e \beta_e^K}{2} Y^2 - X^2 \Delta \quad (\text{F.17})$$

Todos los demás términos y normalizaciones que aparecen en la relación de dispersión de fluidos (2.61) permanecen idénticos a los de este modelo cinético-híbrido. Obviamente, y a diferencia del caso de fluidos, acá es estrictamente necesario especificar los parámetros beta de electrones y protones por separado.

F.2. Plasma electrón-protón-beam

Para adimensionalizar el sistema compuesto de un plasma de electrones sin masa (e), un *core* de protones (p) y un *beam* de protones (p), se usan las definiciones dadas en Hollweg [Hollweg et al., 1993], notando que $\Omega_c = \Omega_p$ y $\Omega_b = Z\Omega_p/A_b$. Para adimensionalizar todas las velocidades de drift, la velocidad de Alfvén, a diferencia de (1.32), se define en función de la densidad electrónica así:

$$V_A = \frac{B_s}{\sqrt{\mu_0 n_{0e} m_p}}, \quad (\text{F.18})$$

con lo que las cantidades adicionales a considerar (con respecto a las presentados en la sección F.1) serán:

$$X_j : X_{j,l} = \frac{\omega_{j,l}}{\Omega_p}, \quad X_{0j} := \frac{\omega_{0j}}{\Omega_p}, \quad X_{\pm 0j} = X_{0j} \pm X_j = X_{\pm} - U_j Y_{\pm}, \quad U_j = \frac{U_j}{V_A} \quad (\text{F.19})$$

También se tiene:

$$\psi_{0j} := 1 - \frac{\omega_{0j}}{\Omega_j}, \quad \psi_{\pm j} := 1 \mp \frac{\omega_{j,l\pm 1}}{\Omega_j}, \quad r_j = \psi_{0j}\psi_{+j}\psi_{-j} \quad (\text{F.20})$$

con $j = c, b$. Por otro lado, la definición del parámetro plasma beta aquí es muy similar a la de fluidos para un plasma electrón-protón (1.37), que es la razón entre velocidades de sonido y velocidad de Alfvén. La diferencia radica en que, en este caso, la velocidad de Alfvén se define en términos de la densidad electrónica en equilibrio según (F.18), por lo que aquí se usa:

$$\beta_j^F := \frac{c_{sj}^2}{V_A^2} = \frac{\gamma_j k_B T_j}{m_p} \frac{\mu_0 n_{0e} m_p}{B_s^2} = \frac{\mu_0 n_{0e} \gamma_j k_B T_j}{B_s^2} \quad (\text{F.21})$$

para cada especie $j = c, b, e$. Además, conviene definir la abreviación para electrones:

$$\beta'_e = \frac{\beta_e^F}{1 + Z\eta} Y^2 \quad (\text{F.22})$$

Con todo esto, se pueden definir los términos que aparecen en la relación de dispersión (3.56):

$$B_{\pm c} := -Z\beta'_e B_{\pm b1} \eta r_c X_{c,l} X_{b,l} + B_{\pm p1} X_{c,l}^2 \left(\beta'_e \frac{Z^2}{A_b} \eta r_b - \Delta_b X_{b,l}^2 \right) \quad (\text{F.23})$$

$$B_{\pm b} := -\frac{Z}{A_b} \beta'_e B_{\pm c1} r_b X_{c,l} X_{b,l} + B_{\pm b1} X_{b,l}^2 (\beta'_e r_c - \Delta_c X_{c,l}^2) \quad (\text{F.24})$$

$$R_{\pm c} := \pm \frac{Y_{l\pm 1}}{2\psi_{0c}} \left[X_{0c} - \frac{Y_l X_{0c}^2}{Y_0 X_{c,l}} \pm \frac{X_{l\pm 1c}}{\psi_{\pm c}} \right] \quad (\text{F.25})$$

$$= \frac{Y_{\pm 1}}{2\psi_{0c}} \left[X_{0c} - \frac{Y X_{0c}^2}{Y_0 X_c} + \frac{X_{\pm 1c}}{\psi_{\pm c}} \right] \quad (\text{F.26})$$

$$R_{\pm b} := \pm A_b \eta \frac{Y_{l\pm 1}}{2\psi_{0b}} \left[X_{0b} - \frac{Y_l X_{0b}^2}{Y_0 X_{b,l}} \pm \frac{X_{l\pm 1b}}{\psi_{\pm b}} \right] \quad (\text{F.27})$$

$$= A_b \eta \frac{Y_{\pm 1}}{2\psi_{0b}} \left[X_{0b} - \frac{Y X_{0b}^2}{Y_0 X_b} + \frac{X_{\pm 1b}}{\psi_{\pm b}} \right] \quad (\text{F.28})$$

$$L_{\pm} := (1 + Z\eta) Y_{\pm 1}^2 - \frac{X_{\pm c}^2}{\psi_{\pm c}} - A_b \eta \frac{X_{\pm b}^2}{\psi_{\pm b}}, \quad (\text{F.29})$$

en donde se tienen, además, las definiciones suplementarias:

$$\Delta_c := A + r_c \left(1 - \beta_c^F \frac{Y^2}{X_c^2} \right) \quad (\text{F.30})$$

$$\Delta_b := A + r_b \left(1 - \frac{\beta_b^F}{A_b} \frac{Y^2}{X_b^2} \right) \quad (\text{F.31})$$

$$B_{\pm j1} := \mp A \psi_{\mp j} \left(\frac{Y_{l\pm 1} \psi_{\pm j} X_{0j}^2 \mp Y_0 \psi_{0j} X_{l\pm 1j}^2}{Y_0 Y_{l\pm 1} X_{lj}} \right) \quad (\text{F.32})$$

$$= \mp A \psi_{\mp j} \left(\frac{Y_{\pm} \psi_{\pm j} X_{0j}^2 - Y_0 \psi_{0j} X_{\pm j}^2}{Y_0 Y_{\pm} X_j} \right) \quad (\text{F.33})$$

$$D := \beta'_e \Delta_c \left(\frac{Z^2}{A_b} \right) \eta r_b X_c^2 + \beta'_e \Delta_b r_c X_b^2 - \Delta_c \Delta_b (X_c X_b)^2 \quad (\text{F.34})$$

F.2.1. Modelo cinético híbrido

En este apartado sólo se indicará las normalizaciones y términos que, en este modelo, difieren de las mostradas previamente de teoría de fluidos F.2. Así, el argumento de la función Z de plasma (C.1) para el core y el beam

cambiará del caso electrón-protón (F.13) a una expresión similar, excepto por el corrimiento de frecuencia a ω_j según (3.30) y su respectiva normalización (F.19) :

$$\xi_j = \frac{\omega_j}{kv_{Tj}} = \frac{X_j}{Y\sqrt{\tilde{\beta}_j}}, \quad (\text{F.35})$$

con $j = c, b$ y $\tilde{\beta}_j$ dado por la extensión de (1.36) a este caso (notar el cambio a la velocidad de Alfvén aquí utilizada).

$$\tilde{\beta}_j = \frac{v_{Tj}^2}{V_A^2} = \frac{2\mu_0 n_{0e} k_B T_j}{A_b B_s^2} \quad (\text{F.36})$$

Como este modelo posee una relación de dispersión idéntica a la de fluidos, pero con un coeficiente politrópico cinético del core y beam para γ_j^K dado en (2.95) (en vez de la constante usual γ_j), se tendrá que el término β_j^F de fluidos dado por (F.14) cambiará a:

$$\beta_j^F = \frac{\mu_0 n_{0e} \gamma_j k_B T_j}{B_s^2} \rightarrow \frac{\mu_0 n_{0e} \gamma_j^K k_B T_j}{B_s^2} = \frac{\tilde{\beta}_j}{2} \frac{m_j}{m_p} 2 \left(\xi_j^2 - \frac{1}{Z'(\xi_j)} \right) = \frac{m_j}{m_p} \left[\frac{X_j^2}{Y^2} - \frac{\tilde{\beta}_j}{Z'(\xi_j)} \right] \quad (\text{F.37})$$

en donde el core $m_c/m_p = 1$ y el beam $m_b/m_p = A_b$. Consistentemente, Δ_c y Δ_b (que son los únicos términos que contienen el parámetro beta del core y el beam) deberán cambiar su definición de (F.30) y (F.31):

$$\Delta_c \rightarrow A + r_c \left[1 - \left(\frac{X_c^2}{Y^2} - \frac{\tilde{\beta}_c}{Z'(\xi_c)} \right) \frac{Y^2}{X_c^2} \right] \quad (\text{F.38})$$

$$\Delta_b \rightarrow A + r_b \left[1 - \left(\frac{X_b^2}{Y^2} - \frac{\tilde{\beta}_b}{Z'(\xi_b)} \right) \frac{Y^2}{X_b^2} \right] \quad (\text{F.39})$$

y, para mantener coherencia (aunque no sea necesario), se redefinirá el parámetro beta de electrones usando la misma relación (F.16). Con esto, la abreviación (F.22) que incluye dicho término cambia de la descripción de fluido a la cinética:

$$\beta_e' \rightarrow \frac{\gamma_e \beta_e^K}{2(1 + Z\eta)} Y^2 \quad (\text{F.40})$$

Todos los demás términos de la relación de dispersión (3.56) que contienen β_e' quedan en idéntica forma al caso de fluidos, así como todos los que no dependen de los parámetros beta.

F.3. Plasma electrón-protón: Modelo cinético

En esta sección se describirá las normalizaciones utilizadas en el intento de modelo cinético desarrollado en el capítulo (4). La velocidad de Alfvén que se utilizará será la misma que en el caso de fluido (1.32) (i.e.: con respecto a la densidad en equilibrio de protones). La frecuencia y número de onda, tanto para la onda pump como para las ondas hijas, tendrán las mismas adimensionalizaciones que en el caso de fluidos (ver sección F.1), como también la amplitud de la pump.

F.3.1. Argumentos de la función Z

Recordar que, por el Teorema de Floquet, se puede escoger el coeficiente $l = 0$ de modo que se tenga (F.2). Además, en todas estas cantidades se omitirá el subíndice p referido a los protones dándose por sobreentendido.

Así, se continuará usando el parámetro $\tilde{\beta}_p$ según (1.36) y ξ según (F.13) como también:

$$\xi_0 := \frac{\omega_0}{k_0 v_{Tp}} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\beta}_p}} \frac{X_0}{Y_0} \quad (\text{F.41})$$

$$\xi_\Omega := \frac{\Omega_p}{k_0 v_{Tp}} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\beta}_p}} \frac{1}{Y_0}, \quad (\text{F.42})$$

$$\xi_{\pm} := \frac{\omega_{l\pm 1} \mp \Omega}{k_{l\pm 1} v_{Tp}} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\beta}_p}} \frac{X_{l\pm 1} \mp 1}{Y_{l\pm 1}} \quad (\text{F.43})$$

$$\xi_{B\pm} := \frac{-b \pm \sqrt{\Lambda}}{2v_{Tp}} = \frac{\xi_+ + \xi_-}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\xi_+ - \xi_-}{2}\right)^2 + \frac{A}{\tilde{\beta}_p Y_{l-1} Y_{l+1}}} \quad (\text{F.44})$$

F.3.2. Cantidades dependientes de la función Z

Aquí se recopilarán cantidades que sólo dependen de la función Z y sus argumentos, surgidas del cálculo de las integrales de la relación de dispersión en la sección E.2. El objetivo es desacoplar estas cantidades del resto de las constantes para una manipulación más sencilla.

Independientes de la amplitud

$$G_2 := 1 + \frac{\xi_l(\xi_l - \xi_0)Z(\xi_l) - \xi_\Omega(\xi_\Omega - \xi_0)Z(\xi_0 - \xi_\Omega)}{\xi_l - (\xi_0 - \xi_\Omega)} \quad (\text{F.45})$$

$$G_3 = \left\{ \xi_l - \xi_0 - 2\xi_\Omega + \frac{\xi_\Omega^3(\xi_0 - \xi_\Omega)Z'(\xi_0 - \xi_\Omega)}{\xi_l - (\xi_0 - \xi_\Omega)} \right. \quad (\text{F.46})$$

$$\left. + \frac{1}{\xi_l - (\xi_0 - \xi_\Omega)} \left[\left(-3(\xi_0 - \xi_\Omega) + \frac{\xi_\Omega \xi_l}{\xi_l - (\xi_0 - \xi_\Omega)} \right) \xi_\Omega^2 Z(\xi_0 - \xi_\Omega) + \frac{\xi_l(\xi_l - \xi_0)^3 Z(\xi_l)}{\xi_l - (\xi_0 - \xi_\Omega)} \right] \right\} \quad (\text{F.47})$$

Dependientes de la amplitud

Estas involucran la cantidad $\Delta_{+,l}$, por lo que siempre aparecerá las cantides $\xi_{B\pm}$.

$$H_1 := \frac{\xi_l Z(\xi_l)}{(\xi_{B+} - \xi_l)(\xi_{B-} - \xi_l)} + \frac{1}{\xi_{B+} - \xi_{B-}} \left[\frac{\xi_{B+} Z(\xi_{B+})}{\xi_{B+} - \xi_l} - \frac{\xi_{B-} Z(\xi_{B-})}{\xi_{B-} - \xi_l} \right] \quad (\text{F.48})$$

$$H_{T1} = \frac{1}{\xi_{B+} - \xi_{B-}} (Z(\xi_{B+}) - Z(\xi_{B-})) \quad (\text{F.49})$$

$$H_{2,l\pm 1} := \frac{\xi_l(\xi_l - \xi_{\pm})}{(\xi_{B+} - \xi_l)(\xi_{B-} - \xi_l)} Z(\xi_l) + \frac{1}{\xi_{B+} - \xi_{B-}} \left[\frac{\xi_{B+}(\xi_{B+} - \xi_{\pm})}{\xi_{B+} - \xi_l} Z(\xi_{B+}) - \frac{\xi_{B-}(\xi_{B-} - \xi_{\pm})}{\xi_{B-} - \xi_l} Z(\xi_{B-}) \right] \quad (\text{F.50})$$

$$H_{T2,l\pm 1} = \frac{1}{\xi_{B+} - \xi_{B-}} [(\xi_{B+} - \xi_{\pm})Z(\xi_{B+}) - (\xi_{B-} - \xi_{\pm})Z(\xi_{B-})] \quad (\text{F.51})$$

$$H_{T3,l\pm 1} := \frac{(\xi_{\pm} - \xi_{\mp})Z(\xi_{\mp})}{(\xi_l - \xi_{\mp})(\xi_{B+} - \xi_{\mp})(\xi_{B-} - \xi_{\mp})} - \frac{(\xi_{\pm} - \xi_l)Z(\xi_l)}{(\xi_l - \xi_{\mp})(\xi_{B+} - \xi_l)(\xi_{B-} - \xi_l)} \quad (\text{F.52})$$

$$+ \frac{1}{\xi_{B+} - \xi_{B-}} \left[-\frac{(\xi_{\pm} - \xi_{B+})Z(\xi_{B+})}{(\xi_l - \xi_{B+})(\xi_{\mp} - \xi_{B+})} + \frac{(\xi_{\pm} - \xi_{B-})Z(\xi_{B-})}{(\xi_l - \xi_{B-})(\xi_{\mp} - \xi_{B-})} \right] \quad (\text{F.53})$$

$$H_{3,l\pm 1} := 1 + \frac{1}{\xi_{B+} - \xi_{B-}} \left[\frac{\xi_{B+}(\xi_{B+} - \xi_{\pm})(\xi_{B+} - \xi_0)^2}{(\xi_{B+} - \xi_l)(\xi_{B+} - (\xi_0 - \xi_{\Omega}))} Z(\xi_{B+}) - \frac{\xi_{B-}(\xi_{B-} - \xi_{\pm})(\xi_{B-} - \xi_0)^2}{(\xi_{B-} - \xi_l)(\xi_{B-} - (\xi_0 - \xi_{\Omega}))} Z(\xi_{B-}) \right] \quad (\text{F.54})$$

$$+ \frac{1}{\xi_l - (\xi_0 - \xi_{\Omega})} \left[\frac{\xi_l(\xi_l - \xi_{\pm})(\xi_l - \xi_0)^2}{(\xi_{B+} - \xi_l)(\xi_{B-} - \xi_l)} Z(\xi_l) - \frac{\xi_{\Omega}^2(\xi_0 - \xi_{\Omega})(\xi_0 - \xi_{\Omega} - \xi_{\pm})}{(\xi_{B+} - (\xi_0 - \xi_{\Omega}))(\xi_{B-} - (\xi_0 - \xi_{\Omega}))} Z(\xi_0 - \xi_{\Omega}) \right] \quad (\text{F.55})$$

$$H_{T4} := \frac{Z(\xi_l)}{(\xi_{B+} - \xi_l)(\xi_{B-} - \xi_l)} + \frac{1}{\xi_{B+} - \xi_{B-}} \left[\frac{Z(\xi_{B+})}{\xi_{B+} - \xi_l} - \frac{Z(\xi_{B-})}{\xi_{B-} - \xi_l} \right] \quad (\text{F.56})$$

$$H_4 := \xi_{B+} + \xi_{B-} + \xi_l - \xi_0 - \xi_+ - \xi_- \quad (\text{F.57})$$

$$+ \frac{1}{\xi_{B+} - \xi_{B-}} \left[\frac{(\xi_{B+} - \xi_0)^2(\xi_{B+} - \xi_+)(\xi_{B+} - \xi_-)}{(\xi_{B+} - \xi_l)(\xi_{B+} - (\xi_0 - \xi_{\Omega}))} \xi_{B+} Z(\xi_{B+}) - \frac{(\xi_{B-} - \xi_0)^2(\xi_{B-} - \xi_+)(\xi_{B-} - \xi_-)}{(\xi_{B-} - \xi_l)(\xi_{B-} - (\xi_0 - \xi_{\Omega}))} \xi_{B-} Z(\xi_{B-}) \right] \quad (\text{F.58})$$

$$+ \frac{1}{\xi_l - (\xi_0 - \xi_{\Omega})} \left[\frac{(\xi_l - \xi_0)^2(\xi_l - \xi_+)(\xi_l - \xi_-)}{(\xi_{B+} - \xi_l)(\xi_{B-} - \xi_l)} \xi_l Z(\xi_l) - \frac{\xi_{\Omega}^2(\xi_+ - (\xi_0 - \xi_{\Omega}))(\xi_- - (\xi_0 - \xi_{\Omega}))}{(\xi_{B+} - (\xi_0 - \xi_{\Omega}))(\xi_{B-} - (\xi_0 - \xi_{\Omega}))} (\xi_0 - \xi_{\Omega}) Z(\xi_0 - \xi_{\Omega}) \right] \quad (\text{F.59})$$

$$H_{T5,l\pm 1} := \frac{(\xi_l - \xi_{\pm})Z(\xi_l)}{(\xi_{B+} - \xi_l)(\xi_{B-} - \xi_l)} + \frac{1}{\xi_{B+} - \xi_{B-}} \left[\frac{(\xi_{B+} - \xi_{\pm})Z(\xi_{B+})}{\xi_{B+} - \xi_l} - \frac{(\xi_{B-} - \xi_{\pm})Z(\xi_{B-})}{\xi_{B-} - \xi_l} \right] \quad (\text{F.60})$$

F.4. Términos de relación de dispersión

Aquí se escribirán de forma adimensional cada uno de los términos de la relación de dispersión cinética (4.185), que se componen de las integrales calculadas en la sección E.2 y expresadas en términos de cantidades dependientes de la función Z y sus argumentos mostradas en la sección previa. Notar que el parámetro $\tilde{\beta}_p$ a usar para los protones será el estándar cinético (1.36), mientras que para los electrones se usará β_e asociado a fluidos (1.37), de donde:

$$\frac{\gamma_e k_B T_e}{m_p v_{Tp}^2} = \frac{\beta_e}{\tilde{\beta}_p} \quad (\text{F.61})$$

F.4.1. Ecuación de dispersión longitudinal

Aquí se usarán las integrales independientes de la amplitud I_{G1} , I_{G2} , así como las dependientes de la amplitud I_{H1} , I_{HT1} , $I_{H2,l,\pm 1}$, $I_{T2,l,\pm 1}$.

$$\epsilon_s = 1 + \frac{\gamma_e k_B T_e}{m_p} k_l \int d^3V \frac{1}{\omega_l - k_l v_z} \frac{\partial \widehat{F}_{0p}}{\partial v_z} \quad (\text{F.62})$$

$$= 1 - \frac{\beta_e}{\beta_p} Z'(\xi_l) \quad (\text{F.63})$$

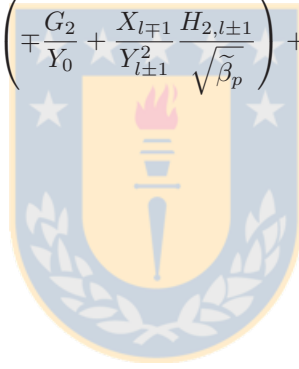
$$M_{ss} = \left(\frac{\Omega_p B_0}{B_s} \right)^2 \left[-\frac{\gamma_e k_B T_e}{m_p} k_l \int d^3V \frac{1}{\Delta_{+,l}} \frac{\partial \widehat{F}_{0p}}{\partial v_z} + \int d^3V \frac{\omega_l - k_l v_z}{\Delta_{+,l}} V_\perp^2 \frac{\partial \widehat{F}_{0p}}{\partial V^2} \right] \quad (\text{F.64})$$

$$= -\frac{A}{\beta_p} \frac{1}{Y_{l-1} Y_{l+1}} \left[\frac{\beta_e}{\beta_p} 2H_1 + H_{T1} \right] \quad (\text{F.65})$$

$$M_{s\pm} = \frac{1}{2V_A} \left(\mp \widetilde{V}_{0p}^\perp - \frac{k_l B_0}{\mu_0 e n_0} \right) + \frac{\Omega_p B_0}{2B_s V_A} \left\{ -\frac{\gamma_e k_B T_e}{m_p} k_l \int d^3V \left[\pm \frac{1}{k_0} \frac{\zeta_+}{\omega_l - k_l v_z} + \frac{\omega_{l\mp 1}}{k_{l\mp 1}} \frac{\omega_{l-1} - k_{l-1} v_z + \Omega_p}{\Delta_{+,l}} \right] \frac{\partial \widehat{F}_{0p}}{\partial v_z} \right. \quad (\text{F.66})$$

$$\left. + \frac{\omega_{l\mp 1}}{2k_{l\mp 1}} \int d^3V \frac{(\omega_l - k_l v_z)(\omega_{l\pm 1} - k_{l\pm 1} v_z - \Omega_p)}{\Delta_{+,l}} V_\perp^2 \frac{\partial \widehat{F}_{0p}}{\partial V^2} \right\} \quad (\text{F.67})$$

$$= \frac{1}{2} \left(\mp \frac{\widetilde{V}_{0p}^\perp}{V_A} - \sqrt{A} Y_l \right) + \sqrt{A} \left\{ \frac{\beta_e}{\widetilde{\beta}_p} \left(\mp \frac{G_2}{Y_0} + \frac{X_{l\mp 1}}{Y_{l\pm 1}^2} \frac{H_{2,l,\pm 1}}{\sqrt{\widetilde{\beta}_p}} \right) + \frac{X_{l\mp 1}}{Y_{l\pm 1}^2} \frac{H_{T2,l,\pm 1}}{2\sqrt{\widetilde{\beta}_p}} \right\} \quad (\text{F.68})$$



F.4.2. Ecuación de dispersión transversal

Aquí se usarán las integrales independientes de la amplitud $I_{GT,l\pm 1}$ y I_{G3} , así como las dependientes de la amplitud $I_{HT3+,-}$, I_{HT3-+} , $I_{H3,l\pm 1}$, I_{H4} , I_{HT4} , $I_{HT5,l\pm 1}$:

$$\epsilon_{\pm} = 1 - \frac{\mu_0 en_0}{B_s} \frac{\omega_{l\mp 1}}{k_{l\mp 1}^2} \left[\pm 1 - \Omega_p \int d^3V \frac{V_{\perp}^2 \partial \widehat{F}_{0p} / \partial V^2}{\omega_{l\mp 1} \pm \Omega_p - k_{l\mp 1} v_z} \right] \quad (\text{F.69})$$

$$= 1 - \frac{X_{l\mp 1}}{Y_{l\mp 1}^2} \left[\pm 1 - \frac{Z(\xi_{\mp})}{\sqrt{\widetilde{\beta}_p} Y_{l\mp 1}} \right] \quad (\text{F.70})$$

$$M_{\pm s} = \frac{\mu_0 en_0}{B_s} \frac{V_A}{k_{l\mp 1}} \frac{\Omega_p B_0}{B_s} \left\{ \frac{\mp 1}{k_0} \int d^3V \frac{(\omega_{l-1} - k_{l-1} v_z + \Omega_p)(\omega_{l+1} - k_{l+1} v_z - \Omega_p)}{\Delta_{+,l}} (\omega_0 - k_0 v_z) \zeta_+ \frac{\partial \widehat{F}_{0p}}{\partial v_z} \right. \quad (\text{F.71})$$

$$\left. - \Omega_p \int d^3V \frac{\omega_{l\pm 1} - k_{l\pm 1} v_z \mp \Omega_p}{\Delta_{+,l}} V_{\perp}^2 \frac{\partial \widehat{F}_{0p}}{\partial V^2} \right\} \quad (\text{F.72})$$

$$= \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\widetilde{\beta}_p} Y_l Y_{l\mp 1}} \left[\pm 2H_4 + \frac{HT5,l\pm 1}{\sqrt{\widetilde{\beta}_p} Y_{l\mp 1}} \right] \quad (\text{F.73})$$

$$M_{+,+} = \frac{\mu_0 en_0}{2B_s} \frac{1}{k_{l-1}} \left(\frac{\Omega_p B_0}{B_s} \right)^2 \left\{ -\Omega_p \frac{\omega_{l-1}}{k_{l-1}} \int d^3V \frac{\omega_{l+1} - k_{l+1} v_z - \Omega_p}{\omega_{l-1} - k_{l-1} v_z + \Omega_p} \frac{V_{\perp}^2}{\Delta_{+,l}} \frac{\partial \widehat{F}_{0p}}{\partial V^2} \right. \quad (\text{F.74})$$

$$\left. - \int d^3V \frac{\partial \widehat{F}_{0p}}{\partial v_z} \left[\frac{1}{k_0^2} \frac{\zeta_+^2 (\omega_0 - k_0 v_z)}{\omega_l - k_l v_z} + \frac{\omega_{l-1}}{k_0 k_{l-1}} \frac{(\omega_0 - k_0 v_z)(\omega_{l+1} - k_{l+1} v_z - \Omega_p)}{\Delta_{+,l}} \zeta_+ \right] \right\} \quad (\text{F.75})$$

$$= \frac{A}{\sqrt{\widetilde{\beta}_p} Y_{l-1} Y_l} \left[\frac{G_3}{Y_0} - \frac{X_{l-1}}{\sqrt{\widetilde{\beta}_p} Y_{l-1}^2} \left(H_{3,l+1} + \frac{HT3,l+1}{2\sqrt{\widetilde{\beta}_p} Y_{l-1}} \right) \right] \quad (\text{F.76})$$

$$M_{-,-} = \frac{\mu_0 en_0}{2B_s} \frac{1}{k_{l+1}} \left(\frac{\Omega_p B_0}{B_s} \right)^2 \left\{ -\Omega_p \frac{\omega_{l+1}}{k_{l+1}} \int d^3V \frac{\omega_{l-1} - k_{l-1} v_z + \Omega_p}{\omega_{l+1} - k_{l+1} v_z - \Omega_p} \frac{V_{\perp}^2}{\Delta_{+,l}} \frac{\partial \widehat{F}_{0p}}{\partial V^2} \right. \quad (\text{F.77})$$

$$\left. - \int d^3V \frac{\partial \widehat{F}_{0p}}{\partial v_z} \left[\frac{1}{k_0^2} \frac{\zeta_+^2 (\omega_0 - k_0 v_z)}{\omega_l - k_l v_z} - \frac{\omega_{l+1}}{k_0 k_{l+1}} \frac{(\omega_0 - k_0 v_z)(\omega_{l-1} - k_{l-1} v_z + \Omega_p)}{\Delta_{+,l}} \zeta_+ \right] \right\} \quad (\text{F.78})$$

$$= \frac{A}{\sqrt{\widetilde{\beta}_p} Y_{l+1} Y_l} \left[\frac{G_3}{Y_0} + \frac{X_{l+1}}{\sqrt{\widetilde{\beta}_p} Y_{l+1}^2} \left(H_{3,l-1} - \frac{HT3,l-1}{2\sqrt{\widetilde{\beta}_p} Y_{l+1}} \right) \right] \quad (\text{F.79})$$

$$M_{+,-} = \frac{\mu_0 en_0}{2B_s} \frac{1}{k_{l-1}} \left(\frac{\Omega_p B_0}{B_s} \right)^2 \left\{ -\Omega_p \frac{\omega_{l+1}}{k_{l+1}} \int d^3V \frac{V_{\perp}^2}{\Delta_{+,l}} \frac{\partial \widehat{F}_{0p}}{\partial V^2} \right. \quad (\text{F.80})$$

$$\left. \int d^3V \frac{\partial \widehat{F}_{0p}}{\partial v_z} \left[\frac{1}{k_0^2} \frac{\zeta_+^2 (\omega_0 - k_0 v_z)}{\omega_l - k_l v_z} - \frac{\omega_{l+1}}{k_0 k_{l+1}} \frac{(\omega_0 - k_0 v_z)(\omega_{l-1} - k_{l-1} v_z + \Omega_p)}{\Delta_{+,l}} \zeta_+ \right] \right\} \quad (\text{F.81})$$

$$= -\frac{A}{\sqrt{\widetilde{\beta}_p} Y_{l-1} Y_l} \left[\frac{G_3}{Y_0} + \frac{X_{l+1}}{\sqrt{\widetilde{\beta}_p} Y_{l+1}^2} \left(H_{3,l-1} + \frac{HT4}{2\sqrt{\widetilde{\beta}_p} Y_{l-1}} \right) \right] \quad (\text{F.82})$$

$$M_{-,+} = \frac{\mu_0 en_0}{2B_s} \frac{1}{k_{l+1}} \left(\frac{\Omega_p B_0}{B_s} \right)^2 \left\{ -\Omega_p \frac{\omega_{l-1}}{k_{l-1}} \int d^3V \frac{V_{\perp}^2}{\Delta_{+,l}} \frac{\partial \widehat{F}_{0p}}{\partial V^2} \right. \quad (\text{F.83})$$

$$\left. \int d^3V \frac{\partial \widehat{F}_{0p}}{\partial v_z} \left[\frac{1}{k_0^2} \frac{\zeta_+^2 (\omega_0 - k_0 v_z)}{\omega_l - k_l v_z} + \frac{\omega_{l-1}}{k_0 k_{l-1}} \frac{(\omega_0 - k_0 v_z)(\omega_{l+1} - k_{l+1} v_z - \Omega_p)}{\Delta_{+,l}} \zeta_+ \right] \right\} \quad (\text{F.84})$$

$$= \frac{A}{\sqrt{\widetilde{\beta}_p} Y_{l+1} Y_l} \left[-\frac{G_3}{Y_0} + \frac{X_{l-1}}{\sqrt{\widetilde{\beta}_p} Y_{l-1}^2} \left(H_{3,l+1} - \frac{HT4}{2\sqrt{\widetilde{\beta}_p} Y_{l+1}} \right) \right] \quad (\text{F.85})$$

Bibliografía

- [Abraham-Shrauner and Feldman, 1977] Abraham-Shrauner, B. and Feldman, W. (1977). Nonlinear Alfvén waves in high-speed solar wind streams. *Journal of Geophysical Research*, 82(4):618–624. [47](#)
- [Araneda, 1998] Araneda, J. (1998). Parametric instabilities of parallel-propagating Alfvén waves: kinetic effects in the MHD-model. *Physica Scripta*, 1998:164. [10](#), [47](#), [69](#), [72](#), [82](#), [196](#), [197](#)
- [Araneda and Gomberoff, 2004] Araneda, J. and Gomberoff, L. (2004). Stabilization of right-hand polarized beam plasma instabilities due to a large-amplitude left-hand polarized wave: A simulation study. *Journal of Geophysical Research*, 109(A1):A01106. [78](#), [87](#), [114](#)
- [Araneda et al., 2008] Araneda, J., Marsch, E., and F.-Viñas, A. (2008). Proton Core Heating and Beam Formation via Parametrically Unstable Alfvén-Cyclotron Waves. *Physical Review Letters*, 100(12):125003. [31](#)
- [Araneda et al., 2007] Araneda, J., Marsch, E., and Vinas, A. (2007). Collisionless damping of parametrically unstable Alfvén waves. *Journal of Geophysical Research*, 112(A4):A04104. [47](#), [55](#), [69](#), [72](#), [75](#), [78](#), [80](#), [82](#), [87](#), [183](#)
- [Aschwanden, 2004] Aschwanden, M. (2004). *Physics of the Solar Corona: An Introduction*. Springer Verlag. [27](#)
- [Baumjohann and Treumann, 1997] Baumjohann, W. and Treumann, R. (1997). *Basic space plasma physics*. Imperial College Press. [13](#), [14](#), [15](#), [16](#), [17](#), [20](#), [21](#), [22](#), [26](#), [27](#), [35](#), [201](#)
- [Belcher and Davis Jr, 1971] Belcher, J. and Davis Jr, L. (1971). Large Amplitude Alfvén Waves in the Interplanetary Medium. *J. Geophys. Res.*, 76(16):3534. [32](#)
- [Beléndez et al., 2007] Beléndez, A., Hernández, A., Beléndez, T., Neipp, C., and Márquez, A. (2007). Application of the homotopy perturbation method to the nonlinear pendulum. *European journal of physics*, 28:93. [193](#)
- [Bellan, 2006] Bellan, P. (2006). *Fundamentals of plasma physics*. Cambridge Univ Pr. [14](#), [15](#), [20](#), [42](#), [44](#), [178](#), [204](#), [205](#)
- [Birdsall and Langdon, 1991] Birdsall, C. and Langdon, A. (1991). *Plasma physics via computer simulations*. Hilger. [86](#), [87](#), [88](#)
- [Bouquet and Bourdier, 1998] Bouquet, S. and Bourdier, A. (1998). Notion of integrability for time-dependent Hamiltonian systems: Illustrations from the relativistic motion of a charged particle. *Physical Review E*, 57(2):1273. [193](#)
- [Bruno and Carbone, 2005] Bruno, R. and Carbone, V. (2005). The Solar Wind as a Turbulence Laboratory. *Living Reviews in Solar Physics*, 2:4. [32](#)
- [Büchner et al., 2003] Büchner, J., Dum, C., and Scholer, M. (2003). *Space plasma simulation*. Springer Verlag. [87](#)
- [Chen, 1984] Chen, F. (1984). *Introduction to plasma physics and controlled fusion: Plasma physics*. Plenum Pub Corp. [15](#), [21](#), [23](#), [25](#), [31](#), [35](#), [42](#), [44](#), [200](#)

- [Choudhuri, 1998] Choudhuri, A. (1998). *The physics of fluids and plasmas: an introduction for astrophysicists*. Cambridge Univ Pr. [15](#), [22](#), [24](#)
- [Cramer, 2001] Cramer, N. (2001). *The physics of Alfvén waves*. Wiley Online Library. [17](#), [31](#), [35](#), [201](#)
- [Cravens, 1997] Cravens, T. (1997). *Physics of Solar System Plasmas*. Cambridge Univ Pr. [13](#), [15](#), [25](#), [27](#)
- [Davidson, 1984] Davidson, R. C. (1984). Kinetic waves and instabilities in a uniform plasma. In A. A. Galeev & R.N. Sudan, editor, *Basic Plasma Physics: Selected Chapters, Handbook of Plasma Physics, Volume 1*. [24](#), [70](#)
- [Derby, 1978] Derby, N. J. (1978). Modulational instability of finite-amplitude, circularly polarized Alfvén waves. *Astrophysical Journal*, 224:1013–1016. [46](#)
- [Erdelyi and Fedun, 2007] Erdelyi, R. and Fedun, V. (2007). Are There Alfvén Waves in the Solar Atmosphere? *Science*, 318(5856):1572. [32](#)
- [Fameli et al., 1999] Fameli, N., Curzon, F., and Mikoshiba, S. (1999). Floquets theorem and matrices for parametric oscillators: Theory and demonstrations. *American Journal of Physics*, 67:127. [202](#)
- [Feldman et al., 2005] Feldman, U., Landi, E., and Schwadron, N. (2005). On the sources of fast and slow solar wind. *Journal of geophysical research*, 110(A7):A07109. [29](#)
- [Forslund et al., 1972] Forslund, D., Kindel, J., and Lindman, E. (1972). Parametric excitation of electromagnetic waves. *Physical Review Letters*, 29(5):249–252. [46](#)
- [Fried and Conte, 1961] Fried, B. and Conte, S. (1961). *The plasma dispersion function: the Hilbert transform of the Gaussian*. Academic Press. [204](#)
- [Galeev and Oraevskii, 1963] Galeev, A. and Oraevskii, V. (1963). The stability of Alfvén waves. In *Soviet Physics Doklady*, volume 7, page 988. [46](#)
- [Gary, 1991] Gary, S. (1991). Electromagnetic ion/ion instabilities and their consequences in space plasmas: A review. *Space Science Reviews*, 56(3):373–415. [102](#)
- [Gary, 1993] Gary, S. (1993). *Theory of space plasma microinstabilities*. Cambridge Univ Pr. [102](#), [200](#)
- [Goldstein et al., 2000] Goldstein, B., Neugebauer, M., Zhang, L., and Gary, S. (2000). Observed constraint on proton-proton relative velocities in the solar wind. *Geophysical research letters*, 27(1):53–56. [31](#)
- [Goldstein, 1978] Goldstein, M. (1978). An instability of finite amplitude circularly polarized Alfvén waves. *The Astrophysical Journal*, 219:700–704. [33](#), [36](#), [46](#)
- [Gomberoff, 2003] Gomberoff, L. (2003). Stabilization of linear ion beam right-hand polarized instabilities by nonlinear Alfvén/ion-cyclotron waves. *Journal of Geophysical Research*, 108(A6):1261. [102](#), [114](#)
- [Gomberoff et al., 2002] Gomberoff, L., Gomberoff, K., and Brinca, A. (2002). New parametric decays of proton beam-plasma electromagnetic waves. *Journal of Geophysical Research*, 107(A7):1123. [97](#), [99](#), [105](#), [115](#), [160](#)
- [Hassani, 1999] Hassani, S. (1999). *Mathematical physics: a modern introduction to its foundations*. Springer Verlag. [204](#)
- [Hollweg, 1994] Hollweg, J. (1994). Beat, modulational, and decay instabilities of a circularly polarized Alfvén wave. *Journal of Geophysical Research*, 99(A12):23431. [10](#), [18](#), [32](#), [46](#), [48](#), [53](#), [54](#), [57](#), [59](#), [61](#), [62](#), [67](#), [68](#), [196](#), [197](#), [201](#), [220](#)
- [Hollweg, 2008] Hollweg, J. (2008). The solar wind: Our current understanding and how we got here. *Journal of Astrophysics and Astronomy*, 29(1):217–237. [89](#)
- [Hollweg et al., 1993] Hollweg, J., Esser, R., and Jayanti, V. (1993). Modulational and decay instabilities of Alfvén waves: Effects of streaming He⁺⁺. *Journal of Geophysical Research*, 98(A3):3491–3500. [60](#), [97](#), [105](#), [107](#), [109](#), [110](#), [115](#), [118](#), [196](#), [197](#), [221](#)

- [Hollweg and Isenberg, 2002] Hollweg, J. and Isenberg, P. (2002). Generation of the fast solar wind: A review with emphasis on the resonant cyclotron interaction. *Journal of Geophysical Research*, 107(A7):1147. [32](#)
- [Inhester, 1990] Inhester, B. (1990). A drift-kinetic treatment of the parametric decay of large-amplitude Alfvén waves. *Journal of Geophysical Research*, 95(A7):10525. [47](#), [75](#)
- [Jayanti and Hollweg, 1993] Jayanti, V. and Hollweg, J. (1993). On the dispersion relations for parametric instabilities of parallel-propagating Alfvén waves. *Journal of Geophysical Research*, 98(A8):13247. [202](#)
- [Jayanti and Hollweg, 1994] Jayanti, V. and Hollweg, J. (1994). Growth rates of new parametric instabilities occurring in a plasma with streaming He (2+). *Journal of geophysical research*, 99:23449. [109](#), [160](#)
- [Kauffmann and Araneda, 2008] Kauffmann, K. and Araneda, J. (2008). Parametric instabilities of Alfvén waves in a multispecies plasma: Kinetic effects. *Physics of Plasmas*, 15:062106. [197](#)
- [Kirk et al., 1994] Kirk, J., Melrose, D., Priest, E., Benz, A., and Courvoisier, T. (1994). *Plasma astrophysics*. Springer. [14](#), [23](#), [25](#), [26](#)
- [Kivelson and Russell, 1995] Kivelson, M. and Russell, C. (1995). *Introduction to space physics*. Cambridge Univ Pr. [28](#)
- [Krall and Trivelpiece, 1973] Krall, N. and Trivelpiece, A. (1973). *Principles of plasma physics*. McGraw-Hill. [20](#), [21](#), [22](#), [24](#), [25](#), [39](#), [176](#), [194](#)
- [Landau, 1946] Landau, L. (1946). On the vibrations of the electronic plasma. *Zh. Eksper. Teor. Fiz.*, 16:574–586. [20](#), [21](#)
- [Landau and Lifshitz, 1982] Landau, L. and Lifshitz, E. (1982). *Mechanics: Course of Theoretical Physics Vol. 1*, volume 1 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon Oxford. [202](#)
- [Lee and Kaw, 1972] Lee, Y. and Kaw, P. (1972). Parametric Instabilities of Ion Cyclotron Waves in a Plasma. *Physics of Fluids*, 15:911–918. [47](#)
- [Liemohn and Duane, 1976] Liemohn, H. and Duane, B. (1976). Particle motion in ion cyclotron wave fields. *American Journal of Physics*, 44:100. [25](#), [37](#), [168](#), [169](#), [193](#)
- [Lifshitz and Pitaevskii, 1981] Lifshitz, E. and Pitaevskii, L. (1981). *Physical kinetics: Course of Theoretical Physics Vol. 10*, volume 10 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon Press. [21](#)
- [Liu and Tripathi, 1986] Liu, C. and Tripathi, V. (1986). Parametric instabilities in a magnetized plasma. *Physics Reports*, 130(3):143–216. [43](#)
- [Liu and Tripathi, 1994] Liu, C. and Tripathi, V. (1994). *Interaction of electromagnetic waves with electron beams and plasmas*. World Scientific Pub Co Inc. [19](#), [45](#)
- [Longtin and Sonnerup, 1986] Longtin, M. and Sonnerup, B. (1986). Modulational instability of circularly polarized Alfvén waves. *J. Geophys. Res.*, 91:6816–6824. [46](#), [54](#), [57](#)
- [Marsch, 2006] Marsch, E. (2006). Kinetic Physics of the Solar Corona and Solar Wind. *Living Reviews in Solar Physics*, 3:1. [10](#), [29](#), [30](#), [31](#)
- [Matsuda, 1986] Matsuda, K. (1986). Kinetic theory of parametric excitation of electromagnetic waves propagating along a constant magnetic field. *Physics of Fluids*, 29:2493–2500. [10](#), [47](#), [164](#), [170](#), [179](#), [197](#)
- [Matsumoto and Omura, 1993] Matsumoto, H. and Omura, Y. (1993). *Computer Space Plasma Physics*. Terra Sci. Publ. Co., Tokyo. [86](#), [87](#), [88](#)
- [McKenzie et al., 1993] McKenzie, J., Marsch, E., Baumgärtel, K., and Sauer, K. (1993). Wave and stability properties of multi-ion plasmas with applications to winds and flows. In *Annales Geophysicae*, volume 11, pages 341–353. European Geophysical Society. [109](#), [135](#)
- [Meyer-Vernet, 2007] Meyer-Vernet, N. (2007). *Basics of the solar wind*. Cambridge Univ Pr. [26](#), [27](#), [29](#), [32](#)

- [Mjølhus and Wyller, 1988] Mjølhus, E. and Wyller, J. (1988). Nonlinear Alfvén waves in a finite-beta plasma. *Journal of Plasma Physics*, 40(02):299–318. [47](#)
- [Mouhot and Villani, 2010] Mouhot, C. and Villani, C. (2010). Landau damping. *Journal of Mathematical Physics*, 51:015204. [21](#)
- [Nariyuki et al., 2009] Nariyuki, Y., Hada, T., and Tsubouchi, K. (2009). Parametric instabilities of circularly polarized Alfvén waves in plasmas with beam protons. *Journal of Geophysical Research*, 114(A7):A07102. [129](#), [133](#), [161](#), [197](#)
- [Parks, 2004] Parks, G. (2004). *Physics of space plasmas: an introduction*. Westview Pr. [15](#), [16](#), [26](#), [27](#), [30](#)
- [Porkolab and Chang, 1978] Porkolab, M. and Chang, R. (1978). Nonlinear wave effects in laboratory plasmas: A comparison between theory and experiment. *Reviews of Modern Physics*, 50(4):745–795. [43](#)
- [Roberts and Buchsbaum, 1964] Roberts, C. and Buchsbaum, S. (1964). Motion of a charged particle in a constant magnetic field and a transverse electromagnetic wave propagating along the field. *Phys. Rev*, 135(A381):A381. [193](#)
- [Ryutov, 1999] Ryutov, D. (1999). Landau damping: half a century with the great discovery. *Plasma physics and controlled fusion*, 41:A1. [21](#)
- [Sagan, 1993] Sagan, D. (1993). On the physics of Landau damping. *American Journal of Physics*, 62:5. [23](#)
- [Sagdeev and Galeev, 1969] Sagdeev, R. and Galeev, A. (1969). *Nonlinear plasma theory*. WA Benjamin. [46](#)
- [Sakai and Sonnerup, 1983] Sakai, J. and Sonnerup, B. (1983). Modulational instability of finite amplitude dispersive Alfvén waves. *Journal of Geophysical Research*, 88(A11):9069–9079. [46](#)
- [Somov, 2006] Somov, B. (2006). *Plasma astrophysics: fundamentals and practice*. Springer Verlag. [14](#), [17](#), [20](#), [21](#), [23](#), [24](#)
- [Sonnerup and Su, 1967] Sonnerup, B. and Su, S. (1967). Large Amplitude Whistler Waves in a Hot Collision-Free Plasma. *Physics of Fluids*, 10:462. [31](#), [37](#), [39](#), [170](#), [193](#)
- [Spangler, 1989] Spangler, S. (1989). Kinetic effects of Alfvén wave nonlinearity. I. Ponderomotive density fluctuations. *Physics of Fluids B: Plasma Physics*, 1:1738. [47](#)
- [Stix, 1992] Stix, T. (1992). *Waves in plasmas*. American Institute of Physics. [14](#), [200](#), [201](#), [204](#), [206](#)
- [Swanson, 2003] Swanson, D. (2003). *Plasma Waves*. Institute of Physics Publishing. [19](#), [26](#), [42](#), [171](#), [176](#), [201](#), [204](#), [205](#), [207](#), [208](#)
- [Terasawa et al., 1986] Terasawa, T., Hoshino, M., Sakai, J., and Hada, T. (1986). Decay instability of finite-amplitude circularly polarized Alfvén waves: A numerical simulation of stimulated Brillouin scattering. *Journal of Geophysical Research*, 91(A4):4171–4187. [47](#)
- [Tu et al., 2004] Tu, C., Marsch, E., and Qin, Z. (2004). Dependence of the proton beam drift velocity on the proton core plasma beta in the solar wind. *Journal of geophysical research*, 109(A5):A05101. [31](#)
- [Vasquez, 1995] Vasquez, B. (1995). Simulation study of the role of ion kinetics in low-frequency wave train evolution. *Journal of Geophysical Research*, 100(A2):1779–1792. [47](#)
- [Vekstein, 1998] Vekstein, G. (1998). Landau resonance mechanism for plasma and wind-generated water waves. *American Journal of Physics*, 66:886. [23](#)
- [Wong and Goldstein, 1986] Wong, H. and Goldstein, M. (1986). Parametric instabilities of circularly polarized Alfvén waves including dispersion. *Journal of Geophysical Research*, 91(A5):5617–5628. [46](#)