

**UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN**  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA



Profesor Patrocinante:  
**Sr. Juan Pablo Segovia V.**

Informe de Memoria de Título  
para optar al título de:  
**Ingeniero Civil Electrónico**

**Diseño de Estrategias de Control para Espesadores**

Concepción, Septiembre de 2009

Gabriela Catalina Guzmán Bahamonde

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN  
Facultad de Ingeniería  
Departamento de Ingeniería Eléctrica

Profesor Patrocinante:  
**Sr. Juan Pablo Segovia V.**

# Diseño de Estrategias de Control para Espesadores



Gabriela Catalina Guzmán Bahamonde

Informe de Memoria de Título  
para optar al Título de

Ingeniero Civil Electrónico

Septiembre 2009

## Resumen

Se realiza una breve descripción del problema físico y modelación mediante una ley de conservación fuertemente degenerada. Se presenta un método numérico para obtener soluciones aproximadas de problemas provenientes de un proceso continuo de sedimentación-consolidación de suspensiones dentro de un Espesador- Clarificador, obteniendo óptimos resultados tanto en modo batch como modo continuo, asemejando el modelo al comportamiento real del proceso. Estos procesos se utilizan para lograr la separación de una suspensión de pequeñas partículas suspendidas en un líquido viscoso, en sus componentes sólido y líquido bajo la acción de la fuerza de gravedad, ayudados de la acción de un polímero llamado floculante, cuya función principal es aumentar la velocidad de sedimentación formando mayores masas o flóculos de partículas que caen hacia el fondo del espesador mas rápidamente. Estos procesos se usan ampliamente en la industria minera, por ejemplo para recuperar el agua de las suspensiones que salen de los procesos de flotación, recuperación de agua en procesos de la minería, purificación de aguas domiciliarias, entre otros procesos. A partir de la resolución numérica del proceso aplicada, se realiza un análisis en lazo abierto de éste para ver el comportamiento del floculante y la concentración de descarga. En el caso del floculante la conclusión principal es que para el tipo de material que se esta trabajando, la adhesión de floculante no genera grandes cambios en la concentración de descarga ni en el proceso en general, no siendo un parámetro considerable para controlar el proceso. Para el caso de la concentración de descarga se observa que existe un alto grado de acoplamiento de este parámetro con el flujo de descarga. Finalmente se implementó una estrategia de control tipo Fuzzy de Masa, altura y Presión, obteniendo resultados positivos a cambios de referencia para los tres casos, comportándose el sistema como un sistema de primer orden. Para el caso de control de masa éste se comporta como un control de altura, y al revés. Para el control de presión se concluye que éste logra el objetivo logrado, pero abriendo una serie de cuestionamientos respecto a si la presión que se esta controlando es la presión de fondo que se quiere controlar, ya que no existen ecuaciones claras o mucha información que explique el comportamiento o impacto de la presión en el proceso. Considerando lo anterior mencionado el modelo numérico y los controles implementados para el proceso de Sedimentación consolidación logra un acercamiento satisfactorio a la realidad, no olvidando que se las consideraciones de éste fueron ideales.



*A mi Familia y Amigos mas cercanos...*

## Agradecimientos

*En primer lugar agradexo a mi familia, mi hijo Leito mi fuerza e inspiración, mi papá Fredy, mi mamá Alicia, mis hermanas Angie y Valeria por el apoyo, cariño y esfuerzo durante todos estos años lejos de ellos fuera de mi ciudad Coyhaique. A Marcelo por su compañía, apoyo y amor, gracias mi vida. A mis amigos más cercanos, compañeros de carrera, compañeras de Hogar Los Aguileras y parte de Los Tilos, imposible nombrarlos a todos, son como una familia después de tantos momentos buenos y malos en mi estadía en la Universidad, fuera de ella y lejos de mi casa. Agradexo también a los Profesores de mi comisión por la oportunidad de trabajar con ellos y al Proyecto por el financiamiento de esta Memoria de Título. Como anécdota agradexo a los reproductores de música por la compañía en cada noche de estudio, tarea, trabajo y festejo. A todos ellos muchas gracias y cariños.*

# Tabla de Contenidos

<b>LISTA DE TABLAS.....</b>	<b>VIII</b>
<b>LISTA DE FIGURAS.....</b>	<b>IX</b>
<b>NOMENCLATURA.....</b>	<b>XI</b>
<b>ABREVIACIONES.....</b>	<b>XIII</b>
<b>CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>14</b>
1.1. INTRODUCCIÓN GENERAL.....	14
1.2. TRABAJOS PREVIOS.....	15
1.2.1 <i>Primer espesador</i> .....	15
1.2.2 <i>Estudios de la teoría de espesamiento</i> .....	16
1.2.3 <i>Descubrimiento de variables de operación</i> .....	16
1.2.4 <i>Influencia de Kynch</i> .....	16
1.2.5 <i>Nuevas Teorías para modelar el proceso</i> .....	17
1.2.6 <i>Nuevo Modelo</i> .....	17
1.3. HIPÓTESIS DE TRABAJO.....	18
1.4. OBJETIVOS.....	18
1.4.1 <i>Objetivo General</i> .....	18
1.4.2 <i>Objetivos Específicos</i> .....	18
1.5. ALCANCES Y LIMITACIONES.....	19
1.6. TEMARIO Y METODOLOGÍA.....	19
<b>CAPÍTULO 2. TEORÍA FENOMENOLÓGICA.....</b>	<b>20</b>
2.1. ESPESADORES.....	20
2.2. OPERACIÓN DE UN ESPESADOR.....	22
2.3. ESPESAMIENTO Y SUS VARIABLES.....	22
<b>CAPÍTULO 3. MODELO DE PROCESO DE ESPESAMIENTO.....</b>	<b>24</b>
3.1. CONSIDERACIONES, ANÁLISIS Y MODELO DE SEDIMENTACIÓN.....	24
<b>CAPÍTULO 4. SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL PROCESO DE SEDIMENTACIÓN.....</b>	<b>29</b>
4.1. ECUACIÓN HIPERBÓLICA PARABÓLICA FUERTEMENTE DEGENERADA.....	29
4.2. CONSIDERACIONES BÁSICAS PARA LA RESOLUCIÓN.....	32
4.3. SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL ESPESADOR.....	34
<b>CAPÍTULO 5. SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA DINÁMICA DEL ESPESADOR.....</b>	<b>38</b>
5.1. ALGORITMO DE PROGRAMACIÓN.....	38
5.2. CASO SEDIMENTACIÓN BATCH.....	42
5.3. CASO SEDIMENTACIÓN CONTINUA.....	53
<b>CAPÍTULO 6. ESTRATEGIA DE CONTROL PARA ESPESADOR.....</b>	<b>60</b>
6.1. ANÁLISIS LAZO ABIERTO.....	60
6.1.1 <i>Análisis Dosificación de Flocculante</i> .....	60
6.1.2 <i>Solución Estado Estacionario</i> .....	62
6.2. CONTROL F.L.C. PARA ESPESADOR CLARIFICADOR.....	70
6.2.1 <i>Nacimiento del Control Difuso</i> .....	71
6.2.2 <i>Conceptos de Lógica Difusa</i> .....	71
6.2.3 <i>Diseño del Controlador difuso para el Espesador</i> .....	74
6.2.4 <i>Simulación Controlador difuso para el Espesador</i> .....	79
<b>CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES.....</b>	<b>94</b>
7.1. SUMARIO.....	94
7.2. CONCLUSIONES.....	94

7.3. TRABAJOS FUTUROS..... 95

**BIBLIOGRAFÍA..... 97**



## Lista de Tablas

TABLA 5.1 Parámetros de Simulación Espesador Batch .....	45
TABLA 5.2 Parámetros de Simulación Espesador en modo Continuo.....	54
Tabla 6.1 Funciones de Pertenencia para error .....	76
Tabla 6.2 Funciones de Pertenencia para Delta error.....	77
Tabla 6.3 Reglas Propuestas para obtención de la salida del Controlador.....	77
Tabla 6.4 Referencia aplicada al Controlador de Masa. ....	79
Tabla 6.5 Referencia aplicada al Controlador de Altura.....	83
Tabla 6.6 Referencia aplicada al Controlador de Presión. ....	88





## Lista de Figuras

Fig. 2.1 Espesador Real.....	20
Fig. 2.2 Espesador y sus Elementos.....	21
Fig. 2.3 Zonas de un Espesador Clarificador.....	22
Fig. 4.1 Representación de un Espesador- Clarificador para aplicación del modelo.....	33
Fig. 5.1 Representación de un Espesador- Clarificador para aplicación del modelo.....	38
Fig. 5.2 Función Esfuerzo Efectivo de sólido $\sigma_e(\varphi)$ .....	46
Fig. 5.3 Función de densidad de flujo $f_{bk}(\varphi)$ para el problema de sedimentación Batch.....	47
Fig. 5.4 Curva de sedimentación mostrando las interfaces agua-suspensión, suspensión-sedimento y curvas de Concentración constante.....	48
Fig. 5.5 Ejemplo proceso de sedimentación mostrando.....	48
Fig. 5.6 Presiones existentes en el proceso.....	49
Fig. 5.7 Curva de sedimentación para Concentración Crítica modo batch.....	50
Fig. 5.8 Concentración de Descarga para Espesador modo batch.....	50
Fig. 5.9 Perfiles de Concentración durante la Sedimentación en modo Batch.....	51
Fig. 5.10 Perfiles de la Concentración durante la Sedimentación Batch.....	51
Fig. 5.11 Conservación de Masa M en Modo Batch.....	52
Fig. 5.12 Curva de sedimentación mostrando las interfaces agua-suspensión, suspensión-sedimento y curvas de Concentración constante modo Continuo.....	55
Fig. 5.13 Variación del perfil de la Concentración Crítica.....	56
Fig. 5.14 Presiones existentes en el proceso.....	56
Fig. 5.15 Perfiles de Concentración durante la Sedimentación.....	57
Fig. 5.16 Perfiles de Concentración durante la Sedimentación en modo Continuo.....	58
Fig. 5.17 Conservación de Masa.....	59
Fig. 6.1 Función Densidad de Flujo Kynch $f_{bk}(\varphi)$ en función de la.....	61
Fig. 6.2 Función Densidad de Flujo Kynch $f_{bk}(\varphi)$ en función de la adición de Floculante.....	61
Fig. 6.3 Diagrama de Flujo de la Solución S.S.....	65
Fig. 6.4 Evolución $\varphi_d$ v/s floculante v/s $Q_d$ . Para carga $Q_F = 0.3 [m^3 / s]$ .....	66
Fig. 6.5 Evolución $\varphi_d$ v/s floculante v/s $Q_d$ . Para carga $Q_F = 0.5 [m^3 / s]$ .....	67
Fig. 6.6 Evolución $\varphi_d$ v/s floculante v/s $Q_d$ . Para carga $Q_F = 0.7 [m^3 / s]$ .....	67
Fig. 6.7 Perfil de Concentración -Prueba S.S.....	68
Fig. 6.8 Altura de Concentración crítica -Prueba S.S.....	68
Fig. 6.9 Variación de Masa en el Espesador -Prueba S.S.....	69
Fig. 6.10 Comportamiento de la concentración de descarga -Prueba S.S.....	69
Fig. 6.11 Evolución del perfil del sedimento -Prueba S.S.....	69
Fig. 6.12 Esquema general de un sistema basado en Lógica Difusa.....	73
Fig. 6.13 Diagrama P&ID del Control Difuso a Implementar.....	74
Fig. 6.14 Función de pertenencia para Error.....	76
Fig. 6.15 Función de pertenencia para Delta Error.....	76
Fig. 6.16 Set Point aplicado al Control de Masa.....	79
Fig. 6.17 Respuesta de la salida controlada Flujo de descarga.....	80
Fig. 6.18 Respuesta de la salida controlada Flujo de descarga.....	80

Fig. 6.19 Perfil de Concentraciones producto de las perturbaciones .....	81
Fig. 6.20 Respuesta de la Concentración de Descarga.....	82
Fig. 6.21 Presiones existentes en el proceso .....	82
Fig. 6.22 Perfil completo de la Concentración frente al Control de Masa.....	83
Fig. 6.23 Set Point aplicado al control de Altura .....	84
Fig. 6.24 Respuesta de la salida controlada Flujo de descarga .....	84
Fig. 6.25 Set point versus Referencia.....	85
Fig. 6.26 Perfil de Concentraciones producto de las perturbaciones .....	85
Fig. 6.27 Respuesta de la Concentración de Descarga.....	86
Fig. 6.28 Presiones existentes en el proceso .....	86
Fig. 6.29 Perfil completo de la Concentración frente al Control de Altura .....	87
Fig. 6.30 Set Point aplicado al control de Presión .....	88
Fig. 6.31 Respuesta al Control de Presión .....	89
Fig. 6.32 Perfil de Concentraciones producto de las perturbaciones .....	90
Fig. 6.33 Presiones existentes en el proceso .....	90
Fig. 6.34 Perfil completo de la Concentración frente al Control de Presión.....	91
Fig. 6.35 Solución a la ecuación (6.15).....	92
Fig. 6.36 Solución a la ecuación (6.15).....	93



# Nomenclatura

## Letras Latinas

$m$	: Masa de la mezcla.
$p_f$	: Presión del fluido.
$p_t$	: Presión total.
$p_e$	: Presión de poros en exceso.
$floc$	: Dosificación de floculante [gr/ton].
$g$	: Aceleración de gravedad [ $m/s^2$ ].
$p_e$	: Presión de poros en exceso.
$q$	: Velocidad promedio volumétrica de la suspensión.
$q_F$	: Velocidad de alimentación del flujo.
$q_R$	: Velocidad de descarga del flujo.
$t$	: Variable tiempo [s].
$T$	: Tiempo de simulación [s].
$u_\infty$	: Velocidad de sedimentación de un flóculo aislado en un medio infinito (sin fronteras).
$v_f$	: Velocidad del fluido.
$v_s$	: Velocidad del sólido.
$v_r$	: Velocidad relativa del sólido.
$z$	: Variable especial, representa alto del Espesador.
$z_c$	: Altura de sedimento (altura de $\varphi_c$ ).
$z_L$	: Altura de entrada del sedimento (altura de $\varphi_L$ ).
$z_R$	: Altura de salida del sedimento (altura de $\varphi_R$ ).
$m_\alpha$	: Fuerza de interacción entre los componentes.
$m_e$	: Fuerza estática de interacción entre componentes.
$m_d$	: Fuerza dinámica de interacción entre componentes.
$f(\varphi, t)$	: Función de densidad de flujo de sólidos.
$f_{bk}(\varphi)$	: Función de densidad de flujo de sólidos Batch de Kynch.
$A(\phi)$	: Coeficiente de difusión integrado.
$U$	: Conjunto Universo.
$S_e$	: Variable de sintonización del error del controlador.
$S_{dc}$	: Variable de sintonización de delta error del controlador.
$d$	: Diámetro de la partícula.
$V$	: Volumen de la partícula.

## Letras Griegas

$\rho$	: Densidad de la mezcla.
$\mu$	: Grado de pertenencia.
$\rho_f$	: Densidad de masa del fluido.
$\varphi$	: Fracción volumétrica de sólidos.
$\varphi_c$	: Concentración volumétrica crítica.
$\varphi_R$	: Concentración volumétrica de flujo de descarga.
$\varphi_L$	: Concentración volumétrica de alimentación.
$\varphi_{\max}$	: Concentración volumétrica máxima de sólidos.
$\varphi_0$	: Distribución inicial de concentración.
$\sigma_e(\varphi)$	: Función Esfuerzo efectivo del sólido.
$\nabla\sigma_e$	: Gradiente del Esfuerzo efectivo
$\nabla p_e$	: Gradiente de Presión de poros en exceso.
$\mu_v$	: Es la viscosidad del líquido.
$\alpha(\varphi)$	: Función de relación entre la fuerza de interacción sólido-fluido (Coeficiente de difusión).



# Abreviaciones

## Mayúsculas

A.C.	: Antes de Cristo.
L.A.	: Lazo abierto.
S.S.	: Estado estacionario.
E.O.	: Enquist-Osher
F.L.C.	: Fuzzy Logic Control
P.V.I.	: Problema de Valores Iniciales
P.V.	: Variable de Proceso.
S.P.	: Set Point.
P.S.K.	: Proceso de Sedimentación Batch de Kynch
P.S.C.K.	: Proceso de Sedimentación Continuo de Kynch.

## Minúsculas

c.i.	: Condiciones iniciales.
------	--------------------------



# Capítulo 1. Introducción

---

## 1.1. INTRODUCCIÓN GENERAL

La separación sólido-líquido por métodos mecánicos forma parte de una gran área de técnicas de separación de fases sólidas, líquidas y gaseosas, se utilizan para lograr la separación de una suspensión de pequeñas partículas suspendidas en un líquido viscoso, en sus componentes sólido y líquido bajo la acción de la fuerza de gravedad. Este tipo de separación aparece en un extenso número de procesos industriales en los diversos campos de la economía. A ella pertenece la eliminación de agua desde suspensiones en la industria, la recuperación de agua en procesos de la minería, la purificación de aguas domiciliarias, la eliminación de polvo, la desgasificación de líquidos y la eliminación de espumas, entre muchos otros procesos.

Al contrario de sistemas de parámetros concentrados, en el que no se considera la distribución espacial de sus parámetros, los sistemas de parámetros distribuidos es necesario considerar la dependencia espacial de sus parámetros. La solución de modelos de parámetros concentrados es bastante más simple que aquellas usadas en la solución de modelos de parámetros distribuidos debido a que los sistemas de parámetros distribuidos se rigen por ecuaciones diferenciales parciales.

Las ecuaciones diferenciales parciales matemáticamente son una relación entre una función específica de varias variables independientes y las derivadas parciales de la función respecto a esas variables. Justamente por este motivo es que sistemas de parámetros distribuidos poseen una alta complejidad cuando se trata de modelarlos matemáticamente o realizar algún tipo de control.

Si se toma en cuenta el principio de conservación de masa, entonces la extensión de la teoría de Espesador –Clarificador conduce a una ley de conservación con un flujo que depende discontinuamente de la altura  $z$ . La forma del flujo discontinuo es un reto para el buen análisis y diseño de herramientas robustas de simulación para el modelo del Espesador-Clarificador.

Lo primordial a la hora de estudiar un sistema y establecer las posibilidades de un control es

una correcta modelación matemática. Como se menciono el sistema de Espesamiento es un sistema de parámetros distribuidos. Se realiza la modelación del proceso antes descrito, basado en el modelo propuesto por F. Concha y R. Bürguer, y para la resolución se utiliza método propuesto por R. Burguer 2005 para leyes de conservación y ecuaciones parabólicas. Luego se realiza la simulación del correspondiente modelo en modo batch y continuo. Finalmente se desarrolla una estrategia de control adecuada a dicho modelo y se analizan los resultados.

## **1.2. TRABAJOS PREVIOS**

El espesamiento no es un proceso moderno. Existe evidencia de beneficio de oro durante la dinastía Egipcia, aproximadamente 2.500 años AC. Las referencias más antiguas sobre trituración y lavado de oro, es la del geógrafo griego Agatharchides referido a Egipto 113 AC. En el mundo antiguo los conocimientos químicos de los árabes eran considerables también, como por ejemplo Abu Mussah-al-Sofi o Geber, quien vivió alrededor de 760 dC describió métodos mejorados de evaporación, filtración, sublimación, fusión, destilación y cristalización.

El descubrimiento de oro en California en 1848 y en Nevada algunos años mas tarde, sorprendió a los norteamericanos mal preparados para labores mineras, en las que trabajaban con palas y platos extrayendo oro en la misma forma que lo habían hecho los egipcios 5.000 años antes. Los únicos mineros profesionales en el continente Americano en aquella época eran los que venían de Freiberg o de otras escuelas Europeas.

### **1.2.1 PRIMER ESPESADOR**

La invención del espesador Dorr en 1905 y su introducción en las plantas concentradoras de Dakota del Sur en los Estados Unidos de Norteamérica, pueden ser mencionadas como el punto de partida de la era moderna de espesamiento en América.

Como el espesador Dorr fue inventado para realizar la separación sólido-líquido en el proceso de la cianuración de oro, la sedimentación de suspensiones conteniendo finas partículas de este metal apareció como interesante.

### 1.2.2 ESTUDIOS DE LA TEORÍA DE ESPESAMIENTO

La mayor parte de estos estudios introdujo confusión en la comprensión del fenómeno de asentamiento y fue Mishler (1912) quien propuso una ecuación mediante la cual se podía obtener la capacidad de un espesador industrial basado en experiencias realizadas en el laboratorio.

En 1916 Coe and Clevenger desarrollaron en forma independiente una ecuación similar a la de Mishler, , ellos recomendaron que se encontrara aquella concentración de valor intermedio entre la alimentación y descarga que producía la mínima "capacidad de tratamiento" mediante ensayos batch de laboratorio.

### 1.2.3 DESCUBRIMIENTO DE VARIABLES DE OPERACIÓN

Comings y colaboradores describieron sus descubrimientos en un importante trabajo en 1954. Ellos demuestran la existencia de cuatro zonas en un espesador continuo.

Otra contribución de aquella época fue el trabajo de Roberts (1949) el cual propuso un método que se utiliza hoy día para determinar la concentración crítica de una pulpa.

### 1.2.4 INFLUENCIA DE KYNCH

En 1952 Kynch, un matemático de la Universidad de Birmingham en Gran Bretaña, presentó su celebrado trabajo “Una teoría de sedimentación”. En él propone una teoría cinemática de la sedimentación.

La suspensión es considerada como un medio continuo y el proceso de sedimentación es representado por una ecuación diferencial de derivadas parciales hiperbólica de primer orden. El trabajo de Kynch tuvo una tremenda influencia en el desarrollo del espesamiento en adelante.

En 1954 Richardson y Zaki proponen una ecuación empírica para describir la velocidad de sedimentación de una suspensión de cualquier concentración y en 1962 Michaels y Bolgers proponen una generalización de esta expresión.



Un trabajo que fue escrito en 1975, pero que pertenece a la era de Kynch, es la publicación de Petty quien propone por primera vez una condición de contorno adecuada en el fondo del espesador.

### **1.2.5 NUEVAS TEORÍAS PARA MODELAR EL PROCESO**

Una investigación fuerte e importante en sedimentación, y en el campo de los medios porosos en general, se llevaba a cabo en Brasil en los años 70.

La Escuela de Graduados de la Universidad Federal de Río de Janeiro, varios investigadores y estudiantes graduados estaban involucrados en la aplicación de una herramienta matemática nueva, la Teoría de Mezclas de la mecánica de medios continuos a los sistemas particulados. En el mismo tiempo, y con estrechos lazos al grupo brasileño, investigadores de la Universidad de Concepción, en Chile comenzaron a trabajar en la misma dirección.

### **1.2.6 NUEVO MODELO**

A fines de la década de los 70 y durante los 80, varias publicaciones demostraron que el modelo fenomenológico del espesamiento, basado en la Teoría de Mezclas, había sido bien aceptado por la comunidad científica internacional.

Debido a que la teoría de mezclas hizo un buen trabajo en unificar la sedimentación de suspensiones dispersas con la de las suspensiones floculadas, una vez que se establecieron las ecuaciones constitutivas apropiadas, se creó un modelo robusto mediante el cual se podía simular el asentamiento de cualquier suspensión, el análisis matemático de este modelo no existía.

Matemáticos ya interesados en este tema iniciaron estudios y con la colaboración entre varias universidades se ha estudiado varios objetivos relacionados con este tema.

### 1.3. HIPÓTESIS DE TRABAJO

Es posible mejorar el método de resolución del modelo fenomenológico actualmente desarrollado para la modelación del proceso de espesamiento de modo de mejorar la forma en que éste se asemeja al comportamiento real del proceso de sedimentación - consolidación y posibles perturbaciones en un Espesador de relave.

A lo largo de este trabajo se estudiará, analizará e implementará el modelo fenomenológico de espesamiento y una resolución óptima, considerando en primer lugar la teoría de mezclas como herramienta para desarrollar la modelación, y la teoría propuesta por Bürguer R. y Concha F. en la última década del siglo pasado, para el estudio de sedimentación.

Considerando los resultados y su análisis se propone una estrategia de control a base de reglas (Fuzzy Logic Control) para la resolución óptima del modelo fenomenológico.

Los desarrollos matemáticos del proceso y control se serán implementados en MATLAB®2007b.



### 1.4. OBJETIVOS

#### 1.4.1 OBJETIVO GENERAL

Estudiar, diseñar y desarrollar una estrategia de control para la resolución óptima del Espesador.

#### 1.4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudiar en detalle el proceso de Espesamiento.
- Estudiar Estrategias de resolución del modelo fenomenológico de Sedimentación.
- Modelar, desarrollar y simular un método óptimo de resolución del Proceso de Espesamiento para transientes batch y continuos.
- Diseñar, desarrollar y simular una estrategia de control para el modelo implementado.

## 1.5. ALCANCES Y LIMITACIONES

Se implementará un método óptimo de resolución para el modelo fenomenológico propuesto por R. Bürguer y F. Concha, simulando las ecuaciones dinámicas principales que rigen el sistema.

El modelo y control propuesto se desarrollara considerando que las condiciones del sistema son condiciones ideales, es decir, un sistema sin cambios en parámetros que lo caracterizan, ni en la estructura del tanque que contiene el sedimento.

## 1.6. TEMARIO Y METODOLOGÍA

El desarrollo de las modelaciones y de las estrategias de control óptimo se realizará mediante el software MATLAB® apoyado con el software MATCAD®.

El Capitulo 2 se realiza una introducción a la teoría fenomenológica, describiendo que son y el funcionamiento de los espesadores.

En el Capitulo 3 se describe lo que es el modelo del proceso de Espesamiento. Mediante un breve análisis dinámico se construcción de la Ecuación característica.

En el Capitulo 4 se realiza un análisis matemático de la ecuación constitutiva obtenida en el Capitulo anterior para luego describir el método de resolución de la ecuación Hiperbólica Parabólica que se implementará.

En el Capitulo 5 se realiza la simulación de modelo, considerando el método descrito en el capitulo anterior, se describe el algoritmo utilizado y se simulan los procesos Batch y Continuo.

Finalmente en el Capitulo 6, se realiza un análisis exhaustivo en L.A. extrayendo las consideraciones que se deben tener a la hora de realizar un control. Luego se realiza una breve introducción al control difuso, se diseña la estrategia de control basada en el Control Fuzzy, se implementa y se presentan los resultados.

## Capítulo 2. Teoría Fenomenológica

---

A continuación se realiza una breve introducción del proceso en que se va a trabajar, tanto los elementos que lo componen, como la estructura y operación de un espesador.

### 2.1. ESPESADORES

El proceso de espesamiento se realiza mediante un equipo mecánico llamado Espesador. Los Espesadores son de gran efectividad en la separación sólido líquido aplicable a los tratamientos de vertidos de efluentes, escorrentías y aguas residuales generadas en los procesos productivos de los sectores de Áridos, Minería, Construcción, Químico y medioambiente entre otros. La figura siguiente muestra una fotografía de un espesador real:

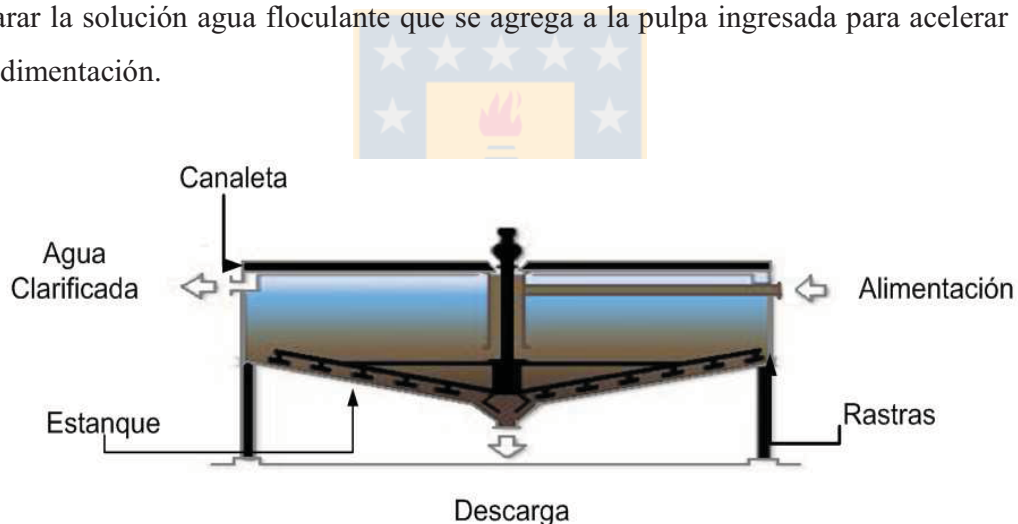


Fig. 2.1 Espesador Real.

Estos equipos se caracterizan por ser tanques cilíndricos de área seccional variable, los elementos que lo componen son:

La caja de Alimentación “feedwell” se ubica en la parte central superior donde se introduce el flujo de la pulpa, esta se encuentra a una altura apropiada dependiendo del tipo de Espesador, en.

- Cono de Descarga ubicada en la parte inferior central cuya función es la evacuación del relave espesado
- Canaletas de rebalse ubicado en la periferia superior del estanque, cuya función es recolectar el flujo de agua clarificada
- Paletas o Rastras ubicadas cuya función es barrer el sólido al punto de descarga.
- Planta de Floculante, esta planta se encuentra en las cercanías del espesador y su función es preparar la solución agua floculante que se agrega a la pulpa ingresada para acelerar el proceso de sedimentación.



**Fig. 2.2 Espesador y sus Elementos.**

El esquema de este espesador didácticamente se puede clasificar en cuatro zonas: Zona I denominada zona de de Clarificación ubicada en la parte superior del tanque donde se encuentra la las aguas claras generalmente libre de sólidos de concentración cercana a cero considerándose el líquido puro. Zona II denominada zona de Sedimentación, zona que posee concentraciones que varían entre cero y la concentración crítica, considerándose concentración crítica en el cual a una cierta altura la interfaz agua-suspensión se encontrará con la interfaz suspensión-sedimento. Finalmente la Zona III de compresión ubicada en el fondo del tanque. En esta zona se encuentran

suspensiones con concentraciones superiores a la crítica, donde ocurre el desaguado por compresión.

Su representación se muestra en la siguiente figura:

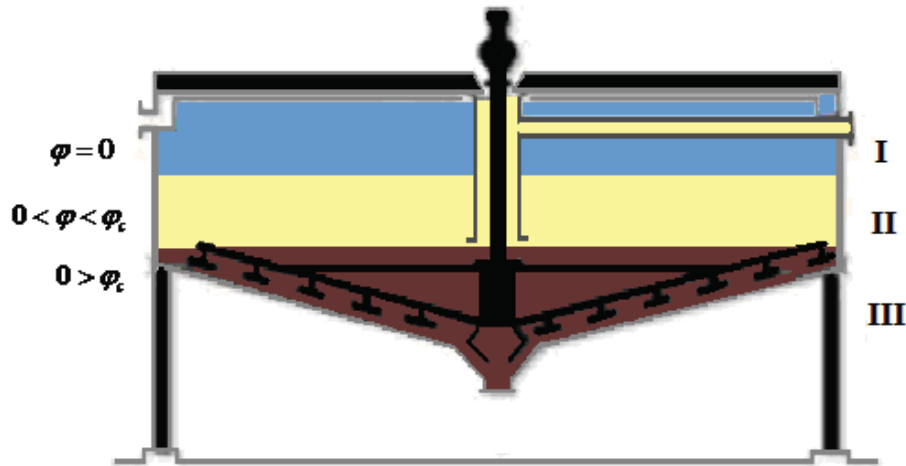


Fig. 2.3 Zonas de un Espesador Clarificador

## 2.2. OPERACIÓN DE UN ESPESADOR

La mezcla entra al espesador a través del feedwell a través de una tubería o canal, los sólidos decantan del líquido dirigiéndose hacia el cono de descarga ayudados por las rastras, las cuales poseen un torque adecuado manteniendo un grado de fluidez de la pulpa. Mediante las canaletas de rebalse se recolecta el agua clara.

Para acelerar el proceso se utiliza un aditivo llamado floculante, polímetro que incrementa la velocidad de sedimentación, su proceso es la floculación que formalmente se define como el proceso de unir partículas coaguladas para formar mayores masas o flóculos, de modo de posibilitar su separación por sedimentación (ó flotación) y/o filtración del agua tratada. La dosificación de floculante necesario esta en función de la carga de sólidos que entra al espesador.

## 2.3. ESPESAMIENTO Y SUS VARIABLES

El espesamiento es una superposición de dos fenómenos que son la sedimentación y la

consolidación, que tienen un comportamiento físico diferente por lo que se les analiza por separado.

La Sedimentación de partículas o suspensión de partículas consiste en el asentamiento de partículas individuales o flóculos debido a la fuerza de gravedad. Al sedimentar las partículas de una suspensión interactúan entre sí disminuyendo la velocidad de asentamiento que tendría cada partícula individualmente.

Cuando la sedimentación finaliza y las partículas se encuentran en el fondo del espesador, si las partículas son incompresibles el proceso de espesamiento termina ahí, como es el caso de concentrados de cobre cuando no se utiliza floculante. En caso que las partículas sean compresibles el peso de los flóculos afecta a los flóculos inferiores comprimiéndolos y exprimiéndolos del agua, a este proceso se le llama consolidación.

La teoría fenomenológica de sedimentación esta basada en la Teoría de Mezclas de la mecánica del medio continuo. La Teoría de Mezclas postula que cada punto en el espacio puede ser ocupado simultáneamente por un número finito de diferentes partículas, una por cada componente de la mezcla, la mezcla puede ser representada por  $n$  medios continuos, cada uno de los cuales sigue su propio movimiento. Esta teoría comienza el balance de momentum lineal y masa de los componentes y continua con el estudio del comportamiento de los materiales de la suspensión, descrito a través ecuaciones constitutivas.

## Capítulo 3. Modelo de Proceso de Espesamiento

---

Se presentan los temarios a considerar para generar el modelo, tomando como primera consideración la teoría de mezclas mediante los balances de masa y momentum lineal.

### 3.1. CONSIDERACIONES, ANÁLISIS Y MODELO DE SEDIMENTACIÓN

Considerando la teoría de mezclas las variables características del proceso de espesamiento se reducen a una dimensión espacial  $z$  y el tiempo  $t$ . El movimiento de cada uno de los componentes de la mezcla puede ser descrito mediante los balances de masa y Momentum lineal.

Se puede decir que las propiedades principales de una suspensión en sedimentación son:

- (i) La resistencia que el fluido opone a la sedimentación de las partículas,
- (ii) La permeabilidad del sedimento ,y
- (iii) La compresibilidad del sedimento.

Estas propiedades tienen asociadas las siguientes variables de campo:

- (i) Concentración, como fracción volumétrica de sólidos  $\varphi(z,t)$ .
- (ii) Densidad de flujo de sólido  $f(\varphi,t)$ .
- (iii) Velocidad volumétrica de la suspensión  $q(t)$ .
- (iv) Presión de poros en exceso  $p_e(z,t)$ .
- (v) Esfuerzo efectivo del sólido  $\sigma_e(\varphi)$ .

Con todas las consideraciones anteriores la teoría fenomenológica resume que las variables que describen la sedimentación constituyen un proceso dinámico si, en las regiones donde las variables son continuas, cumplen las siguientes cinco ecuaciones de campo para los Balances de masa y Momentum lineal:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi v_s) = 0 \quad (3.1)$$



$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial z} = -\Delta \rho \phi g - \frac{\alpha(\phi) v_r}{1-\phi} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial p_e}{\partial z} = \frac{\alpha(\phi) v_r}{1-\phi} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial q}{\partial z} = 0 \quad (3.4)$$

$$q = \phi v_s + (1-\phi) v_f \quad (3.5)$$

Obteniendo  $v_r$  de la quinta ecuación anterior, sumando  $v_s - v_f$  :

$$q = v_s - v_s + \phi v_s + (1-\phi) v_f$$

$$q = v_s - (1-\phi) v_s + (1-\phi) v_f$$

$$q = v_s - (1-\phi)(v_s - v_f)$$

$$q = v_s - (1-\phi) v_r$$

$$v_r = \frac{(v_s - q)}{(1-\phi)}$$

(3.6)

Reemplazando la ecuación anterior en la ecuación (3.2), ésta se puede escribir como:

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial z} = -\Delta \rho \phi g - \frac{\alpha(\phi)}{1-\phi} \left( \frac{v_s - q}{1-\phi} \right) \quad (3.7)$$

Despejando  $v_s$  de la ecuación anterior:

$$v_s = q - \left( \frac{\partial \sigma_e}{\partial z} + \Delta \rho \phi g \right) \frac{(1-\phi)^2}{\alpha(\phi)}$$

$$v_s = q - \frac{\Delta \rho \phi g (1-\phi)^2}{\alpha(\phi)} \left( \frac{1}{\Delta \rho \phi g} \frac{\partial \sigma_e}{\partial z} + 1 \right) \quad (3.8)$$

Multiplicándolo por  $\phi$  resulta:

$$\varphi v_s = q\varphi - \frac{\Delta\rho\varphi^2(1-\varphi)^2}{\alpha(\varphi)} \left( 1 + \frac{1}{\Delta\rho\varphi g} \frac{\partial\sigma_e(\varphi)}{\partial z} \right) \quad (3.9)$$

Considerando el diferencial  $\sigma_e(\varphi)$  con respecto a  $z$  resulta:

$$\frac{\partial\sigma_e}{\partial z} = \frac{\partial\sigma_e}{\partial\varphi} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \sigma'_e \frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad (3.10)$$

Reemplazado la ecuación (3.10) en la ecuación y multiplicando por  $\varphi$ :

$$\varphi v_s = q\varphi - \frac{\Delta\rho\varphi^2(1-\varphi)^2}{\alpha(\varphi)} \left( 1 + \frac{\partial\sigma'_e(\varphi)}{\Delta\rho\varphi g} \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) \quad (3.11)$$

Se define la “función de densidad de flujo batch de Kynch” como:

$$f_{bk}(\varphi) = -\Delta\rho g \frac{\varphi^2(1-\varphi)^2}{\alpha(\varphi)} \quad (3.12)$$

Con el coeficiente de difusión:

$$\alpha(\varphi) = -\frac{f_{bk}(\varphi)\sigma'_e(\varphi)}{\Delta\rho g\varphi} \quad (3.13)$$

Reemplazando la expresión (3.12) en la expresión (3.11) se tiene que:

$$\varphi v_s = q\varphi + f_{bk}(\varphi) \left( 1 + \frac{\partial\sigma'_e(\varphi)}{\Delta\rho\varphi g} \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) \quad (3.14)$$

Reemplazando la ecuación (3.14) en la ecuación (3.1):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi v_s) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( q\varphi + f_{bk}(\varphi) \left( 1 + \frac{\partial \sigma_e(\varphi)}{\Delta \rho \varphi g} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right) = 0 \quad (3.15)$$

Luego, considerando (3.13) se tiene que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( q\varphi + f_{bk}(\varphi) + f_{bk}(\varphi) \frac{\partial \sigma_e(\varphi)}{\Delta \rho \varphi g} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( q\varphi + f_{bk}(\varphi) - \alpha(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (q\varphi + f_{bk}(\varphi)) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \alpha(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0$$

Finalmente ordenando, se llega a que la ecuación diferencial que representa el proceso de espesamiento es:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (q\varphi + f_{bk}) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \alpha(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \quad (3.16)$$

Para el caso del balance de momentum lineal expuesto en el Capítulo 2 se puede deducir matemáticamente lo siguiente.

Combinando (3.2) y (3.3), se puede sustituir (3.2) por:

$$\nabla p_e + \nabla \sigma_e = \Delta \rho \varphi g$$

$$\nabla p_e = \Delta \rho \varphi g - \nabla \sigma_e \quad (3.17)$$

Se define el coeficiente de difusión integrado como:

$$A(\varphi) = \int_0^{\varphi} \alpha(s) ds \quad (3.18)$$

El gradiente del Esfuerzo efectivo  $\nabla \sigma_e$  se define como en (3.13) y se deduce que  $\sigma_e$  se puede expresar en función del coeficiente de difusión como:

$$\sigma_e(\varphi) = \frac{\alpha(\varphi) \Delta \rho g \varphi}{f_{bk}(\varphi)} \quad (3.19)$$

Con el coeficiente de difusión dado de (3.18):

$$\alpha(s) = \frac{dA(\phi)}{d\varphi} \quad (3.20)$$

De manera que, dadas las ecuaciones anteriores, se reemplazan en (3.17):

$$\frac{dp_e}{dz} = \Delta \rho g \varphi - \frac{d\sigma_e}{dz} \quad (3.21)$$

De (3.19) se tiene que:

$$\frac{dp_e}{dz} = \Delta \rho g \varphi - \left( \frac{\alpha(\varphi) \Delta \rho g \varphi}{f_{bk}(\varphi)} \right) \frac{d\varphi}{dz} \quad (3.22)$$

Finalmente de (3.20) se tiene que:

$$\frac{dp_e}{dz} = \Delta \rho g \varphi - \left( \frac{\Delta \rho g \varphi}{f_{bk}(\varphi)} \cdot \frac{dA(\phi)}{d\varphi} \right) \frac{d\varphi}{dz} \quad (3.23)$$

Ordenando, se tiene la ecuación final que rige el gradiente de Presión en exceso es:

$$\frac{dp_e}{dz} = \Delta \rho g \varphi \left( 1 - \frac{1}{f_{bk}(\varphi)} \cdot \frac{dA(\phi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dz} \right) \quad (3.24)$$

## Capítulo 4. Solución Numérica del Proceso de Sedimentación

---

En este capítulo se presentará un método numérico para obtener soluciones aproximadas de problemas provenientes de la sedimentación de suspensiones floculadas.

### 4.1. ECUACIÓN HIPERBÓLICA PARABÓLICA FUERTEMENTE DEGENERADA

La ecuación (3.16) es una ecuación diferencial del tipo hiperbólica-parabólica fuertemente degenerada. Recibe este nombre porque para valores de de concentración  $\varphi < \varphi_c$  ésta se transforma en la ecuación diferencial hiperbólica de la forma:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(q\varphi + f_{bk}) = 0 \quad (4.1)$$

Donde la función  $f_{bk}$  es la función densidad de flujo de sólidos de Kynch. Se puede reconocer esta ecuación como la ecuación de Kynch para espesamiento. Este resultado es de la más grande importancia, ya que indica que, para suspensiones floculadas, la ecuación de Kynch sigue siendo válida en aquellas regiones donde la concentración es menor a la concentración crítica.

La función  $f_{bk}(\varphi)$  es asumida  $f_{bk}(\varphi) = 0$  para  $\varphi \leq 0$  o  $\varphi \geq \varphi_{\max}$ , donde  $\varphi_{\max}$  es la concentración máxima contenida en el espesador,  $f_{bk}(\varphi) > 0$  para  $0 < \varphi < \varphi_{\max}$ ,  $f_{bk}'(0) > 0$  y  $f_{bk}'(\varphi_{\max}) \leq 0$ . En este caso se considera la Función Densidad de flujo Kynch como:

$$f_{bk}(\varphi) \begin{cases} u_{\infty} \varphi (1 - \varphi)^c & , \text{si } 0 < \varphi < \varphi_{\max} \\ 0 & , \text{si } \varphi \leq 0 \text{ ó } \varphi \geq \varphi_{\max} \end{cases} \quad (4.2)$$

Con  $c > 1$  y  $u_{\infty} > 0$  es una propiedad exclusiva de cada material y representa la velocidad de la solución de un solo flóculo en el líquido puro en  $[m/s]$ .

Es importante señalar que la concentración máxima que se puede alcanzar en el sistema depende del balance entre el término difusivo y convectivo pero no necesariamente de la elección de la concentración máxima. Con el fin de facilitar el análisis, supondremos que en el presente documento  $0 < \varphi_{\max} < 1$ .

La teoría de sedimentación-consolidación incluye una parte de *compresión* que lleva a que para valores de concentraciones mayores a la concentración crítica la ecuación (3.16) es de tipo Parabólica.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(q\varphi + f_{bk}(\phi)) = f_{bk}(\phi) \frac{\partial \sigma'_e(\varphi)}{\Delta \rho \varphi g} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (4.3)$$

Donde  $\Delta \rho > 0$  denota la diferencia de densidad sólido-fluido,  $g$  es la aceleración de gravedad, y  $\sigma'_e(\varphi)$  es la derivada Función Esfuerzo efectivo del sólido, el cual constituye la segunda función característica de la suspensión. Dicha función es asumida  $\sigma_e(\varphi) \geq 0$ :

$$\sigma_e(\varphi) = \begin{cases} 0 & , \varphi \leq \varphi_c \\ 5,35e^{17,9u} [N/m^2] & , \varphi > \varphi_c \end{cases} \quad (4.4)$$

En un determinado instante y a una cierta altura la interfaz agua-suspensión se encontrará con la interfaz suspensión-sedimento. Las coordenadas de ese evento se denominan tiempo crítico, altura crítica, concentración crítica  $\varphi_c$  y ellas definen el punto crítico en el cual termina la sedimentación.

Resumiendo, las propiedades materiales específicas de la suspensión por lo tanto son descritas indirectamente por el término del coeficiente de difusión, el cual aparece o desaparece según valores de concentración comparados con la concentración crítica.

$$\alpha(\varphi) \begin{cases} = 0 & \text{para } \varphi \leq \varphi_c & : \text{Hiperbólica} \\ > 0 & \text{para } \varphi_c < \varphi < 1 & : \text{Parabólica} \\ = 0 & \text{para } \varphi \geq 1 & : \text{Hiperbólica} \end{cases} \quad (4.5)$$

Se define el coeficiente de difusión como en (3.13) y el coeficiente de difusión integrado como:

$$A(\varphi) = \int_0^{\varphi} \alpha(s) ds \quad (4.6)$$

Como se mencionó anteriormente en el caso unidimensional, la teoría de la sedimentación produce ecuaciones de equilibrio de masa y momentum lineal descritos en el capítulo anterior, luego considerando (4.6) la ecuación Parabólica fuertemente degenerada (3.16) se puede representar de la forma:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (q(t) \varphi + f_{bk}(\varphi)) = \frac{\partial^2 A(\varphi)}{\partial z^2} \quad (4.7)$$

Las soluciones de (4.7) desarrollan discontinuidades debido a la no linealidad de la función de densidad de flujo  $f_{bk}(\varphi)$  y a la degeneración del coeficiente de difusión. Esto lleva a considerar soluciones entrópicas para tener un problema bien estructurado. Aun mas cuando esta ecuación es puramente hiperbólica, los valores de solución se propagan sobre rectas características que podrían intersectar las fronteras del dominio espacio-tiempo desde el interior, y esto requiere tratar a las condiciones de Dirichlet como condiciones entrópicas [4].

Una ecuación de convención-difusión fuertemente degenerada, con una función de flujo no necesariamente convexa que depende del tiempo, asociada a ciertas condiciones iniciales y de frontera, se considera como el modelo clásico para los procesos de sedimentación-consolidación. Recordemos que la sedimentación es, a grandes rasgos, un proceso en que partículas o agregados son separados de un líquido bajo la acción de la fuerza de gravedad. Este es probablemente el método industrial a gran escala más importante utilizado en química y minería [5]. En soluciones relativamente diluidas, las partículas no se comportan en forma discreta sino que tienden a agregarse unas a otras durante el proceso de sedimentación. Conforme se produce la floculación, la masa de partículas va aumentando, y se deposita a mayor velocidad. La medida en que se desarrolle el fenómeno de floculación depende de la posibilidad de contacto entre las diferentes partículas, que a su vez es función del flujo de carga en la superficie, del flujo de descarga, del gradiente de velocidad del sistema, de la concentración de partículas y de los tamaños de las mismas. El efecto de

estas variables sobre el proceso solo puede determinarse mediante ensayos de sedimentación. Esto hace que sea de gran utilidad en la modelación de estos fenómenos [5,6].

Por las características de este tipo de ecuaciones, no es posible aplicar ni la teoría de ecuaciones estrictamente parabólicas, ni la teoría establecida de soluciones de entropía de leyes de conservación [7].

Generalmente, el vector de flujos en una ecuación hiperbólica o parabólica, esta formado por funciones cuya dependencia de las variables de estado es no lineal y esto hace que no sea posible deducir soluciones exactas para estas ecuaciones. Es evidente que una solución discontinua no puede satisfacer la ecuación en derivadas parciales en el sentido clásico. Sin embargo, la clase de funciones continuas a trozos es demasiado amplia para garantizar unicidad de solución. Generalmente existen soluciones débiles con las mismas condiciones iniciales. Puesto que estas ecuaciones son modelos para situaciones físicas reales (o al menos esa es la motivación), es obvio que solo una de estas soluciones puede ser aceptable desde el punto de vista físico. El hecho de que existan otras soluciones espúreas es consecuencia de que las ecuaciones son tan sólo un modelo que ignora algunos efectos físicos. Estas consideraciones conducen a la imposición de determinados criterios basados en consideraciones físicas que permiten aislar la solución físicamente relevante entre todas las posibles soluciones débiles, hay viene el termino de solución entrópica.

## 4.2. CONSIDERACIONES BÁSICAS PARA LA RESOLUCIÓN

Estos modelos son generalmente basados sobre la Teoría Cinemática de Sedimentación propuesta por Kynch en 1952 y desarrollada por Bustos y Concha en la última década del siglo pasado [1]. El cual describe la solución Batch de una suspensión ideal de pequeñas esferas rígidas de tamaño uniforme en un fluido viscoso mediante la ecuación (3.1). Para una fracción volumétrica de sólidos  $\varphi$  como para una función de altura  $z$  y tiempo  $t$ .

Las propiedades específicas del material de una suspensión bajo estudio son descritas por la función de Densidad Flujo Kynch.



A continuación se expone un nuevo modelo del Espesador-Clarificador para suspensiones floculadas como una combinación del modelo de primer orden para suspensiones ideales con la teoría de Sedimentación-Consolidación, el cual incluye el término difusivo fuertemente degenerado. El resultado es un Problema de Valores Iniciales PVI de Ecuación diferencial parcial Parabólica-Hiperbólica fuertemente degenerada, en el cual ambos el flujo convectivo y el término difusivo dependen discontinuamente de  $z$ . Claramente, las soluciones de cada ecuación son en general discontinuas.

La representación de un Espesador-Clarificador utilizada se muestra en la siguiente figura. Se denota por  $z$  la variación de la altura y se asume que la variable flujo depende de la altura  $z$  y el tiempo  $t$ .

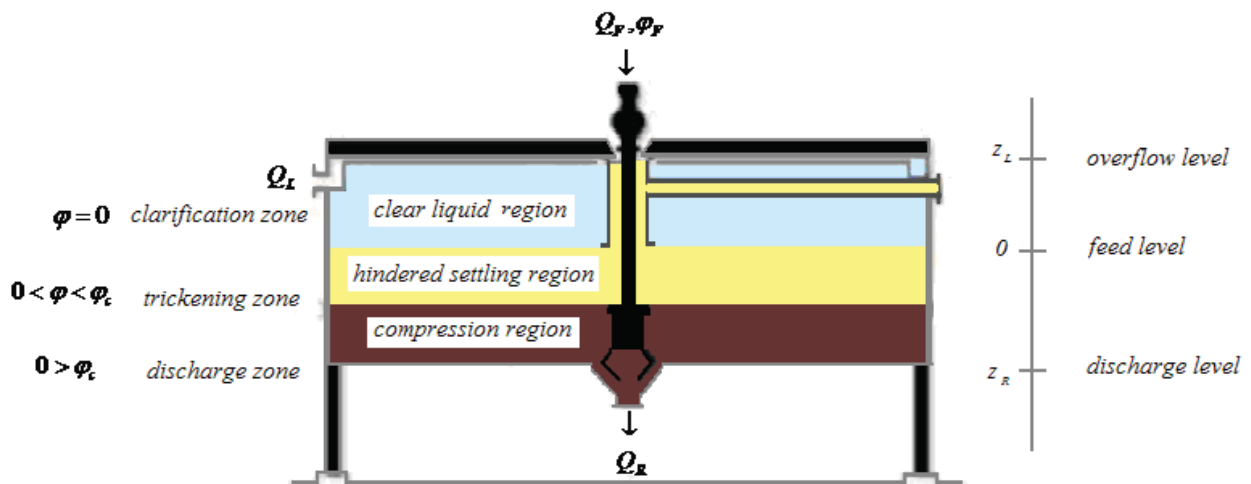


Fig. 4.1 Representación de un Espesador-Clarificador para aplicación del modelo

Se consideran para la simulación que el tanque Espesador-Clarificador en cuatro diferentes zonas:

- (i) La zona de espesamiento  $0 < z < z_R$ , la cual es usualmente la única zona considerada en el análisis convencional de sedimentación continua,
- (ii) La zona de clarificación  $z_L < z < 0$  ubicada en la parte superior del espesador,
- (iii) La zona de inferior se encuentra la zona de descarga  $z > z_R$  y
- (iv) La zona de rebalse  $z < z_L$ .

El tanque es alimentado continuamente a una altura  $z = 0$ , el flujo de alimentación debe ser mayor a cero, es decir  $Q_F(t) \geq 0$ , con  $Q_F(t)$  caudal de alimentación en  $[m^3 / s]$ . La concentración del flujo de alimentación de denominará  $\varphi_F$ . El caudal de descarga del sedimento es mayor que cero, es decir  $Q_R(t) \geq 0$ , con  $Q_R(t)$  caudal de descarga. Consecuentemente, el caudal de rebalse será:

$$Q_L(t) = Q_F(t) - Q_R(t) \quad (4.9)$$

Para un tanque con área  $S$  constante, se definen las velocidades volumétricas de entrada y salida como  $q_L(t) = Q_L(t) / S$  y  $q_R(t) = Q_R(t) / S$  respectivamente.

### 4.3. SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL ESPESADOR

La ecuación (4.7) es el ingrediente principal del modelo del Espesador- Clarificador, el cual incluye la zona de espesamiento y se representa la alimentación y la descarga mediante las condiciones de contorno. En el presente modelo, la velocidad flujo volumétrico por unidad de área es [8]:

$$q(z,t) = \begin{cases} q_R(t) & , z > 0 \\ q_L(t) & , z < 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

Se sugiere emplear en (4.7) con  $q(t) = q_R(t)$  para  $0 < z < z_R$  y  $q(t) = q_L(t)$  para  $z_L < z < 0$ . Además se asume que la zona de carga y descarga, el material sólido es transportado con la misma velocidad que el líquido,  $v_r = 0$ .

Considerando lo anteriormente mencionado, se obtiene el problema de convención- difusión fuertemente degenerado:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} g(z, \varphi) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \gamma_1(z) \frac{\partial A(\varphi)}{\partial z} \right) \quad -\infty < z < \infty, \quad t > 0 \quad (4.11)$$

$$u(z, 0) = u_0(z), \quad -\infty < z < \infty, \quad (4.12)$$

Donde:

$$g(z, \varphi) = \begin{cases} q_L(\varphi - \varphi_F) & , z < z_L \\ q_L(\varphi - \varphi_F) + f_{bk}(\varphi) & , z_L < z < 0 \\ q_R(\varphi - \varphi_F) + f_{bk}(\varphi) & , 0 < z < z_R \\ q_R(\varphi - \varphi_F) & , z < z_R \end{cases} \quad (4.13)$$

Y se define la función  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  como:

$$\gamma_1(z) = \begin{cases} 1 & z \in (z_L, z_R) \\ 0 & z \notin (z_L, z_R) \end{cases} \quad (4.14)$$

$$\gamma_2(z) = \begin{cases} q_L & z < 0 \\ q_R & z > 0 \end{cases}$$

Existen diferentes esquemas para la resolución de la ecuación (4.7) en los cuales el inconveniente más importante es evaluar la función de flujo Enquist-Osher (EO) [9], se tiene que determinar los extremos de la función  $q(\varphi - \varphi_F) + f_{bk}(\varphi)$  para  $q \in \{q_L, q_R\}$  numéricamente. Esto se puede evitar si se determina la función EO para la función  $f_{bk}(\varphi)$  solamente, y se discretiza la parte lineal  $q(\varphi - \varphi_F)$ . El esquema resultante es el siguiente:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \lambda \Delta_- h^1(\gamma_{j+1/2}^1, U_j^{n+1}, U_j^n) - \lambda \omega(\gamma_{j-1/2}^2, \gamma_{j+1/2}^2, U_{j-1}^n, U_j^n, U_{j+1}^n) + \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} (\gamma_{1,j+1/2} (A(U_{j+1}^n) - A(U_{j-1}^n))) - \gamma_{1,j-1/2} (A(U_j^n) - A(U_{j-1}^n))) \quad (4.15)$$

Donde  $\gamma^1, \gamma^2$  están definidas en (4.14) y la función  $h^1$  es la función Enquist-Osher aplicada a la función  $\gamma^1 f_{bk}(\varphi)$ :

$$h^1(\gamma^1, v, u) = \frac{\gamma^1}{2} \left( f_{bk}(u) + f_{bk}(v) - \int_u^v |f_{bk}'(s)| ds \right) \quad (4.16)$$

La función  $\omega$  surge de determinar la función EO para el término lineal  $\gamma^2(x)(\varphi - \varphi_F)$  seguido de la diferencia con respecto a  $z$ :

$$\omega(\gamma_{j-1/2}^2, \gamma_{j+1/2}^2, U_{j-1}^n, U_j^n, U_{j+1}^n) = \Delta_- \tilde{h}(\gamma_{j+1/2}^2, U_{j+1}^n - u_F, U_j^n - u_F) \quad (4.17)$$

Donde se define:

$$\tilde{h}(\gamma^2, v, u) = \frac{1}{2} \left( \gamma^2 (u+v) - \int_u^v |\gamma^2| ds \right) \quad (4.18)$$

El resultado para  $\omega$  es la siguiente fórmula:

$$\omega(\gamma_{j-1/2}^2, \gamma_{j+1/2}^2, U_{j-1}^n, U_j^n, U_{j+1}^n) = \begin{cases} \gamma_{j+1/2}^2 (U_j^n - u_F) - \gamma_{j-1/2}^2 (U_{j-1}^n - u_F) & \text{si } \gamma_{j-1/2}^2 \geq 0 \text{ y } \gamma_{j+1/2}^2 \geq 0 \\ \gamma_{j+1/2}^2 (U_{j+1}^n - u_F) - \gamma_{j-1/2}^2 (U_j^n - u_F) & \text{si } \gamma_{j-1/2}^2 < 0 \text{ y } \gamma_{j+1/2}^2 < 0 \\ (\gamma_{j+1/2}^2 - \gamma_{j-1/2}^2)(U_j^n - u_F) & \text{si } \gamma_{j+1/2}^2 \geq 0 \text{ y } \gamma_{j-1/2}^2 < 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

Para la resolución de la integral del flujo batch de kynch  $\int_u^v |f_{bk}'(s)| ds$  dentro de la función

Enquist-Osher, con el objetivo de economizar el costo computacional de evaluar esta integral, se puede desglosar en tres casos:

$$\begin{aligned} u \leq \varphi_{\max}, v \leq \varphi_{\max} &\rightarrow \int_u^v |f_{bk}'(s)| ds = \int_u^v f_{bk}'(s) ds = f_{bk}(v) - f_{bk}(u) \\ &\rightarrow h^1(\gamma^1, v, u) = \frac{\gamma^1}{2} (f_{bk}(u) + f_{bk}(v) - (f_{bk}(v) - f_{bk}(u))) \\ &\rightarrow h^1(\gamma^1, v, u) = \gamma^1 f_{bk}(u) \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned}
u \leq \varphi_{\max}, v > \varphi_{\max} &\rightarrow \int_u^v |f_{bk}'(s)| ds = \int_u^{\varphi_{\max}} f_{bk}'(s) ds - \int_{\varphi_{\max}}^v f_{bk}'(s) ds \\
&\rightarrow = f_{bk}(\varphi_{\max}) - f_{bk}(u) - (f_{bk}(v) - f_{bk}(\varphi_{\max})) \\
&\rightarrow = 2f_{bk}(\varphi_{\max}) - f_{bk}(u) - f_{bk}(v) \tag{4.21} \\
&\rightarrow h^1(\gamma^1, v, u) = \frac{\gamma^1}{2} (f_{bk}(u) + f_{bk}(v) - (2f_{bk}(\varphi_{\max}) - f_{bk}(u) - f_{bk}(v))) \\
&\rightarrow = \gamma^1 (f_{bk}(u) + f_{bk}(v) - f_{bk}(\varphi_{\max}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u \geq \varphi_{\max}, v > \varphi_{\max} &\rightarrow \int_u^v |f_{bk}'(s)| ds = -\int_u^v f_{bk}'(s) ds = -f_{bk}(v) + f_{bk}(u) \\
&\rightarrow h^1(\gamma^1, v, u) = \frac{\gamma^1}{2} (f_{bk}(u) + f_{bk}(v) - (-f_{bk}(v) + f_{bk}(u))) \tag{4.22} \\
&\rightarrow h^1(\gamma^1, v, u) = \gamma^1 f_{bk}(v)
\end{aligned}$$

Considerando estos antecedentes, la aplicación de este esquema se muestra en la siguiente sección.



## Capítulo 5. Simulación Numérica de la Dinámica del Espesador

A continuación se presenta los resultados de la simulación numérica del proceso en base a la resolución del modelo expuesta en el capítulo anterior.

### 5.1. ALGORITMO DE PROGRAMACIÓN

El algoritmo a continuación descrito fue implementado en Matlab® 2007b. Este detalla cada una de las etapas de programación implementadas para la resolución de la ecuación parabólica fuertemente degenerada.

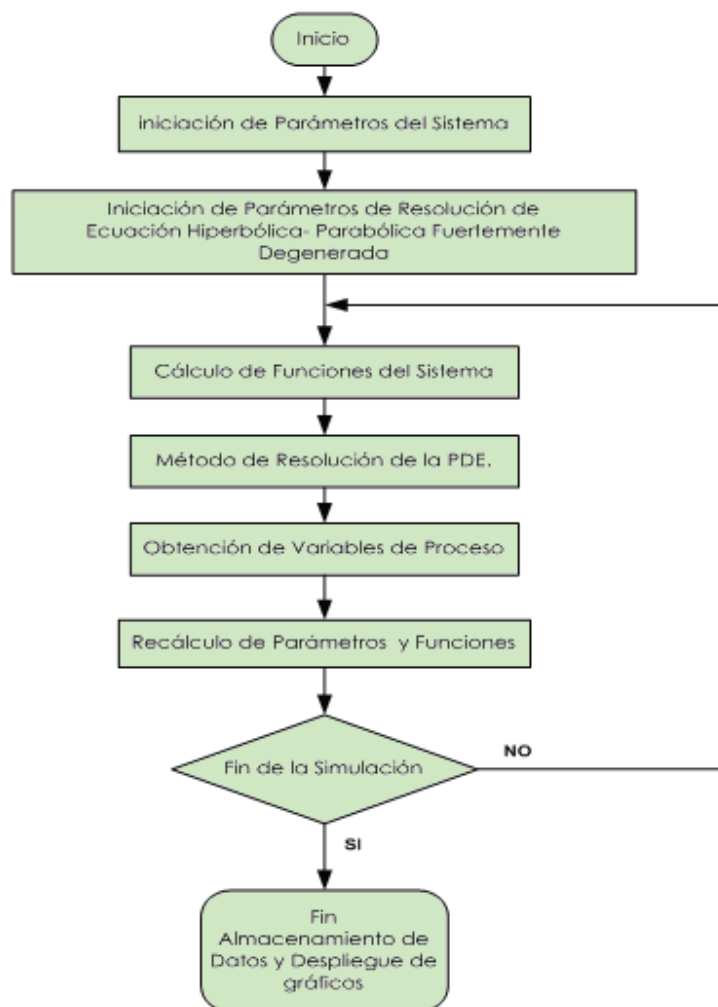


Fig. 5.1 Representación de un Espesador- Clarificador para aplicación del modelo

La estrategia a seguir por el algoritmo es la siguiente:

**(i) Inicialización de Parámetros y Variables del Espesador.**

- Inicialización de parámetros globales.
- Inicialización de parámetros del Espesador.
- Inicialización de parámetros para la resolución de la ecuación Hiperbólica -Parabólica.
- Inicialización de parámetros de Control.

**(ii) Definición de Funciones características del proceso de Espesamiento.**

- Definición de la Función de densidad de flujo Batch de Kynch  $f_{bk}(\varphi)$ :

$$f_{bk}(\varphi) = \begin{cases} u_{\infty} \varphi (1 - \varphi)^{12.59} & , \text{si } 0 < \varphi < \varphi_{\max} \\ 0 & , \text{si } 0 < \varphi < \varphi_{\max} \end{cases} \quad (5.1)$$

$$u_{\infty} = -\left(9.6 \times 10^{-6} \cdot \text{floc}^3 + 1.119 \times 10^{-4} \cdot \text{floc}^2 - 3.76 \times 10^{-3} \cdot \text{floc} - 5.73 \times 10^{-4}\right) \quad (5.2)$$

- Definición de la segunda función característica de la suspensión, la Función Esfuerzo Efectivo del Sólido  $\sigma_e(\varphi)$ :

$$\sigma_e(\varphi) = \begin{cases} 0 & , \varphi \leq \varphi_c \\ 5,35e^{17,9u} \left[ N / m^2 \right] & , \varphi > \varphi_c \end{cases} \quad (5.3)$$

- Definición del Coeficiente de difusión  $\alpha(\varphi)$  como en (3.13):
- Velocidad de flujo de Carga, Velocidad de flujo de Rebalse, Velocidad de flujo de Descarga:

$$S = \pi \cdot r^2 \quad \left[ mt^2 \right] \quad (5.4a)$$

$$q_f = Q_f / S \quad \left[ \frac{m^3}{s} \right] \quad (5.4b)$$

$$q_l = (Q_r - Q_f) / S \quad \left[ \frac{m^3}{s} \right] \quad (5.4c)$$

$$q_r = Q_r / S \quad \left[ \frac{m^3}{s} \right] \quad (5.4d)$$

(iii) **Resolución de la Ecuación Diferencial Parcial Hiperbólica-Parabólica:**

- Calculo del coeficiente de difusión integrado  $A(\varphi)$  por método trapezoidal.

$$Av_{jk} = Av_{jk-1} + \frac{\Delta\varphi}{2} \cdot \left( f_{bk}(\varphi)_{jk-1} \cdot \sigma_e(\varphi)_{jk-1} + f_{bk}(\varphi)_{jk} \cdot \sigma_e(\varphi)_{jk} \right) \quad (5.5)$$

- Calculo de la Funciones Gamma  $\gamma_1(z)$  y  $\gamma_2(z)$ .

- Calculo de la Integral de la función de flujo batch de Kynch  $\int_u^v |f'_{bk}(s)| ds$ .

$$If_{bk}(\varphi_{jk+1}) = If_{bk}(\varphi_{jk}) + \frac{\Delta\varphi}{2} \left( \left| u_\infty \times \left( (1 - \varphi_{jk})^C + C \times \varphi_{jk} \times (1 - \varphi_{jk})^{(C-1)} \right) \right| + \left| u_\infty \times \left( (1 - \varphi_{jk+1})^C + C \times \varphi_{jk+1} \times (1 - \varphi_{jk+1})^{(C-1)} \right) \right| \right) \quad (5.6)$$

- Calculo de la Función Enquist-Osher  $h^1$  aplicada a la función  $\gamma^1 f_{bk}(\varphi)$ .
- Calculo de la función  $\omega$  que surge de determinar la función EO para el término lineal  $\gamma^2(x)(\varphi - \varphi_F)$  seguido de la diferencia con respecto a  $z$  (Capitulo 4):

$$\omega(\gamma_{j-1/2}^2, \gamma_{j+1/2}^2, \varphi_{j-1}^n, \varphi_j^n, \varphi_{j+1}^n) = \begin{cases} \gamma_{j+1/2}^2 (\varphi_j^n - \varphi_F) - \gamma_{j-1/2}^2 (\varphi_{j-1}^n - \varphi_F) & \text{para } \gamma_{j-1/2}^2 \geq 0 \text{ y } \gamma_{j+1/2}^2 \geq 0 \\ \gamma_{j+1/2}^2 (\varphi_{j+1}^n - \varphi_F) - \gamma_{j-1/2}^2 (\varphi_j^n - \varphi_F) & \text{para } \gamma_{j-1/2}^2 < 0 \text{ y } \gamma_{j+1/2}^2 < 0 \\ (\gamma_{j+1/2}^2 - \gamma_{j-1/2}^2) (\varphi_j^n - \varphi_F) & \text{para } \gamma_{j+1/2}^2 \geq 0 \text{ y } \gamma_{j-1/2}^2 < 0 \end{cases} \quad (5.7)$$



- Resolución de la ecuación, cálculo del perfil  $\varphi$ .

**(iv) Obtención de Variables de Proceso (PV) y Perfiles de Concentración.**

- Cálculo de Masa del Sedimento:

$$M_{j+1}^n = (\Delta V) \cdot \left( (1 - \varphi_{j+1}^n) \cdot \rho_{fluida} + \varphi_{j+1}^n \cdot \rho_{solida} \right) \quad [Ton] \quad (5.8)$$

- Cálculo del nivel de concentración crítica  $z_c$ .

$$z_{j+1}^n = \Delta z \cdot \frac{(\varphi_c - \varphi_{j-1})_j + (\varphi_j - \varphi_c)_{j-1}}{(\varphi_j - \varphi_{j-1})} \quad [mt] \quad (5.9)$$

- Cálculo de la presión de poros  $p_e$ :

$$(p_e)_{j-1}^n = (p_e)_j^n + \Delta \rho \cdot \Delta z \cdot g \cdot \varphi_{j+1}^n \left( 1 - \frac{1}{\Delta z} \cdot \frac{A(\varphi_{j+1}^n) - A(\varphi_j^n)}{f_{bk}(\varphi_{j+1}^n)} \right) \quad (5.10)$$

- Cálculo de la presión de final  $p_f$ :

$$(p_f)_j^n = \Delta z \cdot g \cdot \left( (1 - \varphi_{j+1}^n) \cdot \rho_{liq} + \varphi_{j+1}^n \cdot \rho_{sol} \right) \quad (5.11)$$

- Cálculo de perfiles de concentración  $\varphi(z, t)$ .

$$\begin{aligned} \varphi_j^{n+1} = & \varphi_j^n - \lambda \Delta_- h^1 (\gamma_{j+1/2}^1, \varphi_j^{n+1}, \varphi_j^n) - \lambda \omega (\gamma_{j-1/2}^2, \gamma_{j+1/2}^2, \varphi_{j-1}^n, \varphi_j^n, \varphi_{j+1}^n) \\ & + \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} \left( \gamma_{1,j+1/2} (A(\varphi_{j+1}^n) - A(\varphi_{j-1}^n)) - \gamma_{1,j-1/2} (A(\varphi_j^n) - A(\varphi_{j-1}^n)) \right) \end{aligned} \quad (5.12)$$

**(v) Recálculo de Funciones y Parámetros.**

- Recálculo de parámetros del Espesador.

- Recálculo de función  $f_{bk}(\varphi, t)$ , Esfuerzo efectivo de sólido  $\sigma_e(\varphi)$ ,  $\varphi_{desc, z}(\varphi)$ ,  $q_r, q_l$ .

**(vi) Fin de Simulación.**

- Almacenamiento del perfil Batch, continuo o estado estacionario.
- Despliegue de gráficos del perfil.

## 5.2. CASO SEDIMENTACIÓN BATCH

Con el objetivo de tener una mejor descripción del proceso de sedimentación batch de una suspensión floculada, se describen las etapas del proceso:

- (i) Antes de comenzar la sedimentación la suspensión se homogeniza por agitación, de manera que su concentración es constante.
- (ii) Cuando la sedimentación comienza, todas las partículas caen a la misma velocidad, de manera que se forma una interfaz agua-suspensión en la parte superior de la columna, la que desciende a la misma velocidad que lo hacen las partículas.. La formación de una interfaz difusa indica floculación incompleta.
- (iii) Las partículas que llegan al fondo de la columna y rápidamente ocupan toda la superficie disponible. En ese momento los nuevos flóculos se acumulan sobre los anteriores presionándolos y haciendo que su concentración aumente de ahí en adelante se dice que el sedimento se encuentra en *compresión o consolidación*. La superficie del sedimento, o interfaz suspensión-sedimento, con una concentración igual a la crítica ya que no hay flóculos descansando sobre ella, se mueve hacia arriba a medida que nuevas partículas se le incorporan.
- (iv) En un punto determinado de la columna, pero bajo la interfaz de agua suspensión, la concentración de la suspensión permanece fija o aumenta con el tiempo.
- (v) A una cierta altura la interfaz agua-suspensión se encontrará con la interfaz suspensión-sedimento. Las coordenadas de ese evento se denominan tiempo crítico y altura crítica y ellas definen el punto crítico en el cual termina la sedimentación y comienza la consolidación.

Se considera un conjunto de partículas sólidas mezcladas con un flujo y se supone:

- (i) Las partículas son todas pequeñas respecto a la vasija o tanque que las contiene, de la misma densidad tamaño y forma.
- (ii) Las partículas individuales y el fluido es incompresible.
- (iii) No existe transferencia de masa entre sólido y fluido.
- (iv) La única fuerza externa es la fuerza de gravedad.
- (v) El tanque es impermeable y las paredes no tienen fricción ante el sólido y liquido.
- (vi) La velocidad de sedimentación es una función de la concentración local solamente y tiende a cero cuando la concentración tiende a un valor límite.

Bajo estas suposiciones, se puede decir que la sedimentación en un espesador continuo puede ser descrita por la fracción volumétrica de sólido, velocidad de sólido  $v_s$  y velocidad de fluido  $v_f$ , estas variables de campo obedecen los balances locales de masa, de manera que existe la ecuación de continuidad para sólido como para el fluido respectivamente:

$$\frac{d}{dt} \varphi + \frac{d}{dz} \varphi v_s = 0 \quad (5.13)$$

$$\frac{d}{dt} (1 - \varphi) + \frac{d}{dz} ((1 - \varphi) v_f) = 0 \quad (5.14)$$

Soluciones para estas ecuaciones de conservación son generalmente discontinuas. Esto quiere decir, que en la suspensión se pueden formar discontinuidades y que las ecuaciones son válidas solamente en aquellas regiones donde la concentración es continua. Sumando estas dos ecuaciones se obtienen la ecuación de continuidad de la mezcla:

$$\frac{d}{dz} (v_s - (1 - \varphi) v_f) = 0 \quad (5.15)$$

Se define  $q(z, t)$  velocidad promedio volumétrica de la suspensión como  $q = v_s - (1 - \varphi) v_f$ , luego:

$$\frac{d}{dz}q = 0 \quad (5.16)$$

La ecuación (5.15) implica que, en ausencia de fuentes, la velocidad volumétrica es una función del tiempo solamente  $q = q(t)$ .

En términos de la velocidad relativa sólido-fluido  $v_r = v_s - v_f$  la velocidad volumétrica puede ser expresada por:

$$q = v_s - (1 - \varphi)v_r \quad (5.17)$$

Como es sedimentación batch no hay flujo a través de la columna  $q = 0$  entonces  $v_s = (1 - \varphi)v_r$ . Como se menciona es necesario utilizar una ecuación constitutiva para la velocidad de sedimentación, la que describe el movimiento relativo local, de esta manera:

$$f_{bk}(\varphi) = \varphi(1 - \varphi)v_r \quad (5.18)$$

De esta manera la ecuación que describe la sedimentación Batch es:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi + \frac{\partial}{\partial z}f_{bk}(\varphi, t) = 0 \quad (5.19)$$

Como:

$$\frac{\partial f_{bk}(\varphi)}{\partial z} = \frac{\partial f_{bk}(\varphi)}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} = f_{bk}'(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (5.20)$$

La ecuación (5.19) se puede escribir de la forma:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + f_{bk}'(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (5.21)$$

Y permiten obtener condiciones iniciales y de contorno:

$$\varphi(z, 0) = \varphi_0 \quad z_l < z < z_r \quad (5.22)$$

$$\varphi(z_r, t) = \varphi_{\infty \rightarrow r} \quad t > 0 \quad (5.23)$$

Cabe mencionar que si se define  $\rho_\alpha$  como la densidad de masa que tendría el componente  $\alpha$  si fuese el único y  $\bar{\rho}_\alpha$  densidad de masa aparente, la fracción volumétrica del componente sería:

$$\varphi(r, t) = \frac{\bar{\rho}_\alpha(r, t)}{\rho_\alpha(r, t)} \quad (5.24)$$

En sedimentación como reología se suele usar la concentración de sólidos como fracción volumétrica de sólidos como una variable medible dada por:

$$\varphi = \frac{V_{\text{sólido}}}{V_{\text{pulpa}}} \quad (5.25)$$

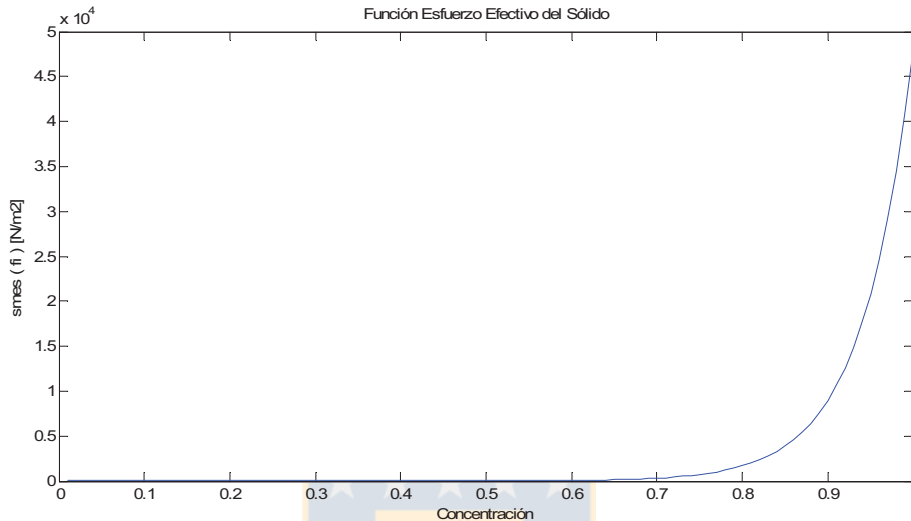
Para simular este proceso se calculan las soluciones de la ecuación (3.16) utilizando los esquemas numéricos descritos en la sección anterior, con una discretización de tipo Enquist-Osher. Considerar en primer lugar, el proceso de sedimentación batch el Estanque esta lleno con una mezcla uniforme, sin carga ni descarga de sedimento [11], con los siguientes parámetros:

**TABLA 5.1 Parámetros de Simulación Espesador Batch**

Parámetro	Valor
Altura del Espesador	$L = 4$ [mt]
Concentración Inicial	$\varphi_0(z) = 0.123$
Concentración Crítica	$\varphi_c(z) = 0.23$
Concentración Máxima	$\varphi_{\max}(z) = 0.6$
Dosis de Floculante	$floc = 4$ [gr / ton]
Diferencias de Densidades	$\Delta\rho = 1500$ [Kg / m <sup>3</sup> ]
Tiempo de Simulación	$T = 10000$ [ $\Delta t \cdot 60^2$ hr.]
Flujo de Descarga y Carga	$q_R = 0, q_L = 0$
Aceleración de Gravedad	$g = 9,8$ [ m / s <sup>2</sup> ]

La función  $\sigma_e(\varphi)$  dada como en (5.3):

$$\sigma_e(\varphi) = 5,35e^{17,9u} \left[ N / m^2 \right]$$



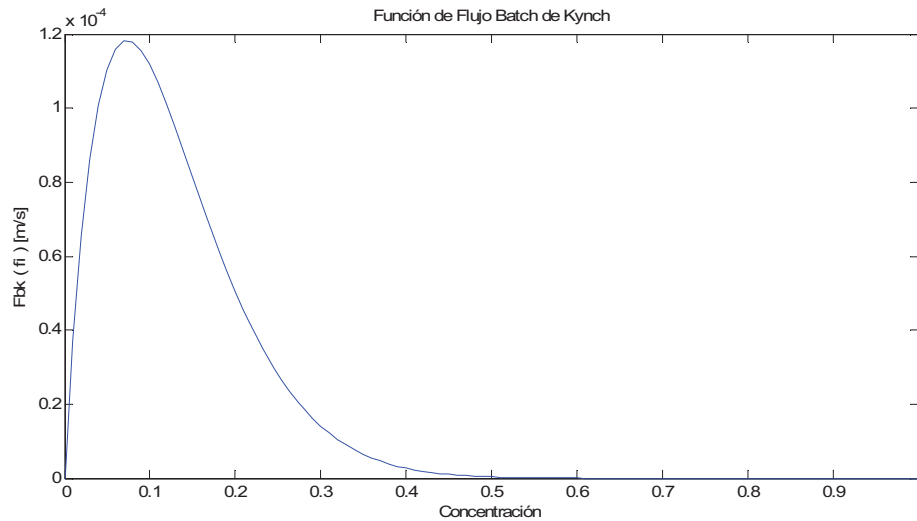
**Fig. 5.2 Función Esfuerzo Efectivo de sólido  $\sigma_e(\varphi)$**

Esta función representa el traspaso progresivo de la fuerza del flujo del agua, entre los intersticios de la formación del sedimento al esqueleto del sólido, esta fuerza sale de entre el sedimento hacia fuera de él. Este es el momento en que el proceso de consolidación comienza.

La función de flujo sólido se utiliza una función Kynch batch Richardson-Zaki dada en (5.1) y (5.2):

$$f_{bk}(\varphi) = u_{\infty} \varphi (1 - \varphi)^c \quad [m/s], \quad c = 12.5 \quad (5.26)$$

$$u_{\infty} = -\left(9.6 \times 10^{-6} \cdot (floc)^3 + 1.19 \times 10^{-4} \cdot (floc)^2 - 3.76 \times 10^{-3} \cdot (floc) - 5.73 \times 10^{-4}\right) \quad (5.27)$$



**Fig. 5.3 Función de densidad de flujo  $f_{bk}(\varphi)$  para el problema de sedimentación Batch**

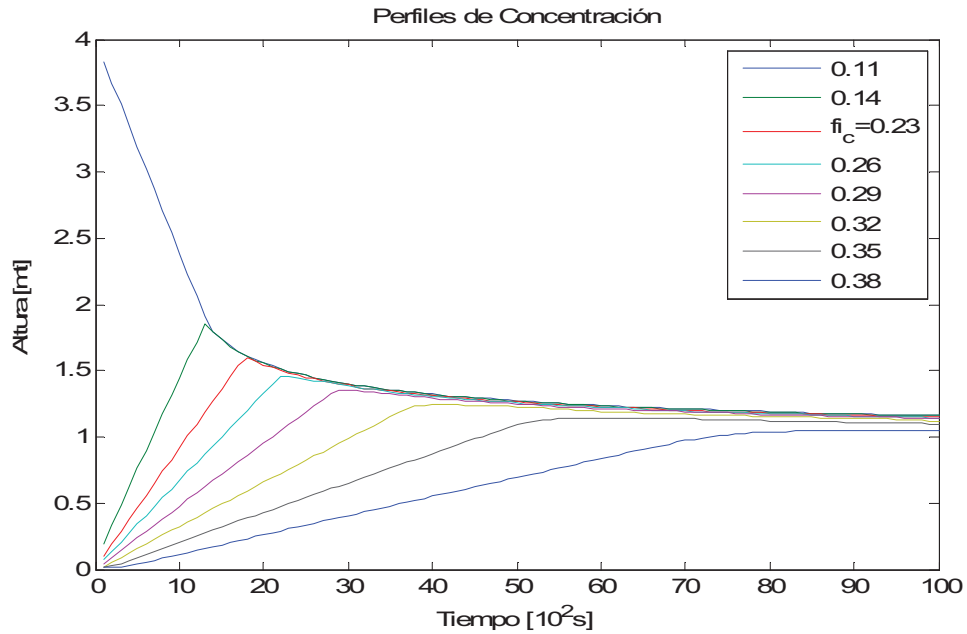
Esta función es la segunda componente (la componente no lineal) de la densidad de flujo de sólidos. Y describe el movimiento relativo local de las partículas.

Considerando la expresión (5.13), la densidad de flujo batch cumple las siguientes propiedades:

$$f_b(\varphi) > 0 \quad \text{para } 0 < \varphi < \varphi_{\max}, f_b(0) = f_b(\varphi_{\max}) = 0, f_b'(0) > 0 \text{ y } f_b'(\varphi_{\max}) < 0 \quad (5.28)$$

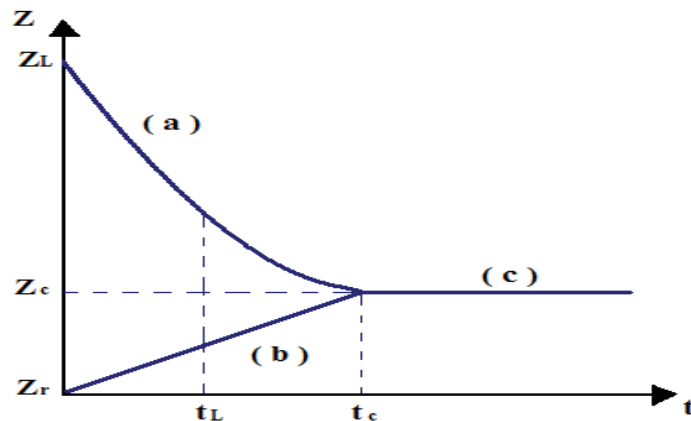
De las expresiones anteriores se puede concluir que la sedimentación de una suspensión puede ser descrita por la fracción volumétrica de sólido  $\varphi(z,t)$  y depende de la forma funcional de la densidad de flujo de sólidos  $f_b(\varphi)$ . Estas dos funciones contribuyen un Proceso de Sedimentación Batch de Kynch (PSK).

La siguiente figura muestra interfaces agua suspensión de sedimento en función del tiempo. Esta figura recibe el nombre de curva de sedimentación de evolución de la Altura del sedimento para distintas concentraciones del espesador en el tiempo:



**Fig. 5.4 Curva de sedimentación mostrando las interfaces agua-suspensión, suspensión-sedimento y curvas de Concentración constante**

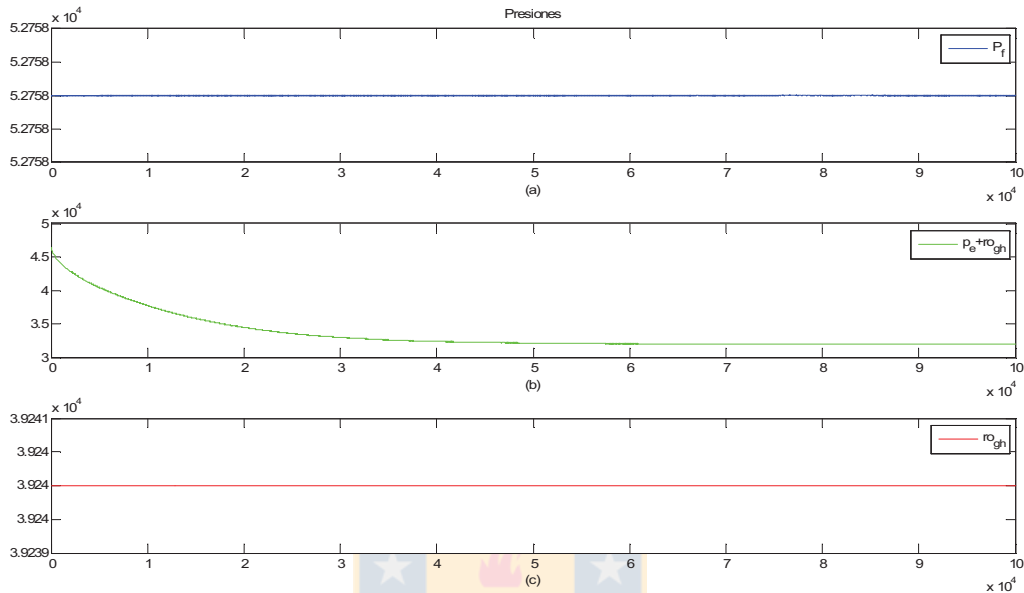
La curva de sedimentación representa el proceso de sedimentación, para este material cuando éste se encuentra con una concentración  $\phi = 0.11$  nos encontramos en la interfaz agua suspensión (a), cuando el proceso avanza y el material se encuentra con una concentración  $\phi = 0.14$  nos encontramos con la interfaz suspensión- sedimento (b) y finalmente cuando el proceso de termina la concentración final permanece constante , en este caso para un  $\phi = 0.38$  en esta etapa el proceso se encuentra en la interfaz agua sedimento (c), esto se ejemplifica teóricamente como sigue:



**Fig. 5.5 Ejemplo proceso de sedimentación mostrando**  
**(a) Interfaces agua-suspensión (b) Suspensión-sedimento(c) Curvas de Concentración constante**



La siguiente figura muestra la evolución de las presiones existentes en el interior del espesador:



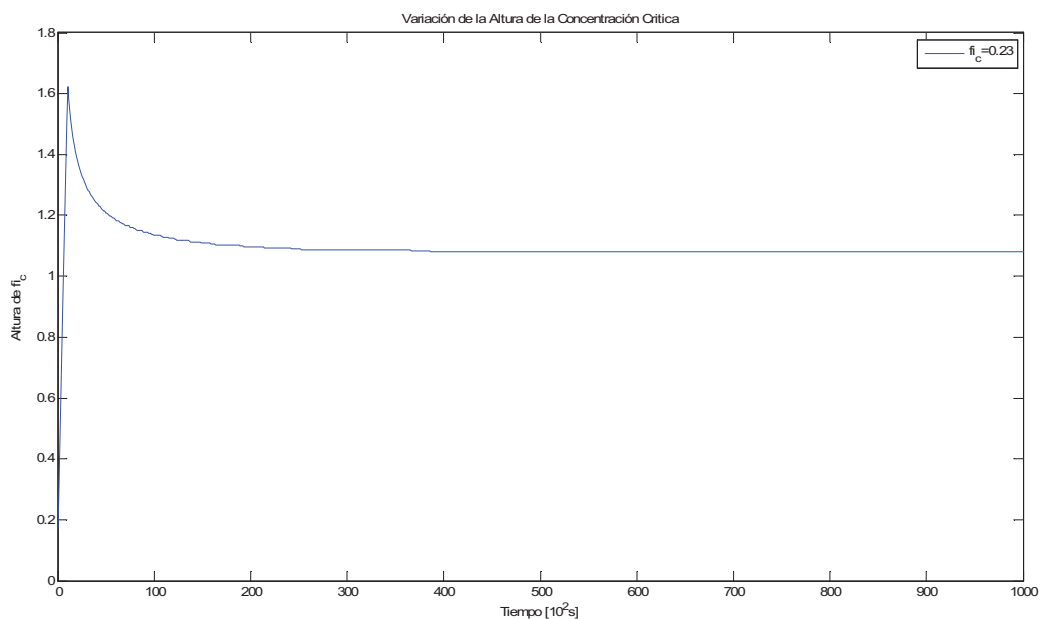
**Fig. 5.6 Presiones existentes en el proceso**

**(a) Presión final (b) Presión de Poros en Exceso (c) Presión hidrostática.**

En la figura anterior se muestran las variables; presión de final dada por la ecuación (5.11), considerando la densidad como densidad total. Presión de poros en exceso (b) y presión hidrostática (c) con respecto al tiempo de simulación.

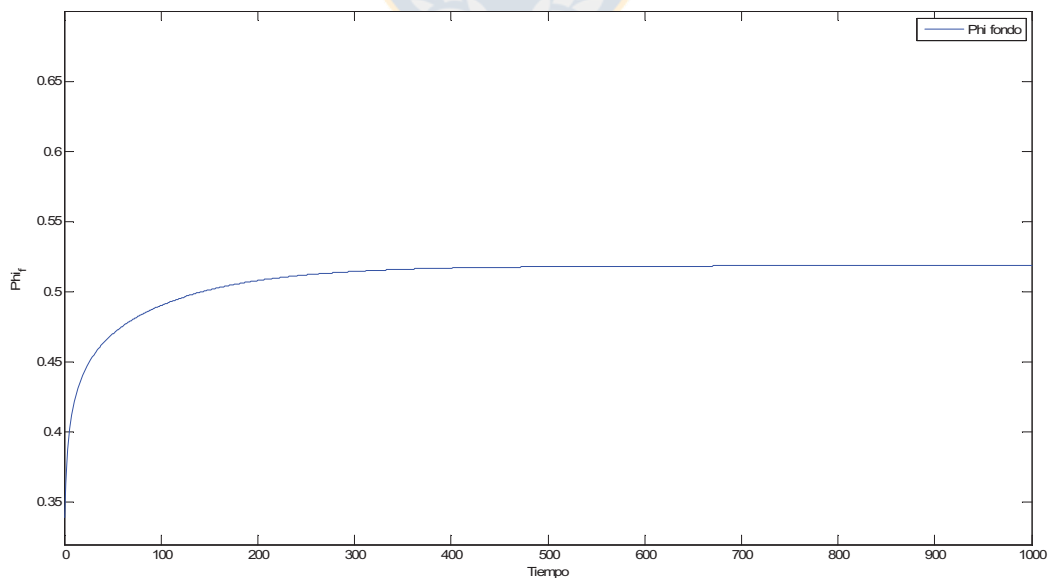
Recordemos que la presión de poros en exceso (b) refleja el gradiente de presión establecido en el agua que llena los poros y el exterior del sedimento, luego de iniciarse que el flujo de agua desde el sedimento hacia fuera de él. Este flujo es acompañado por una disminución de la presión de poros y un traspaso de presión al sedimento.

La evolución de la altura de la concentración crítica, se muestra a continuación:



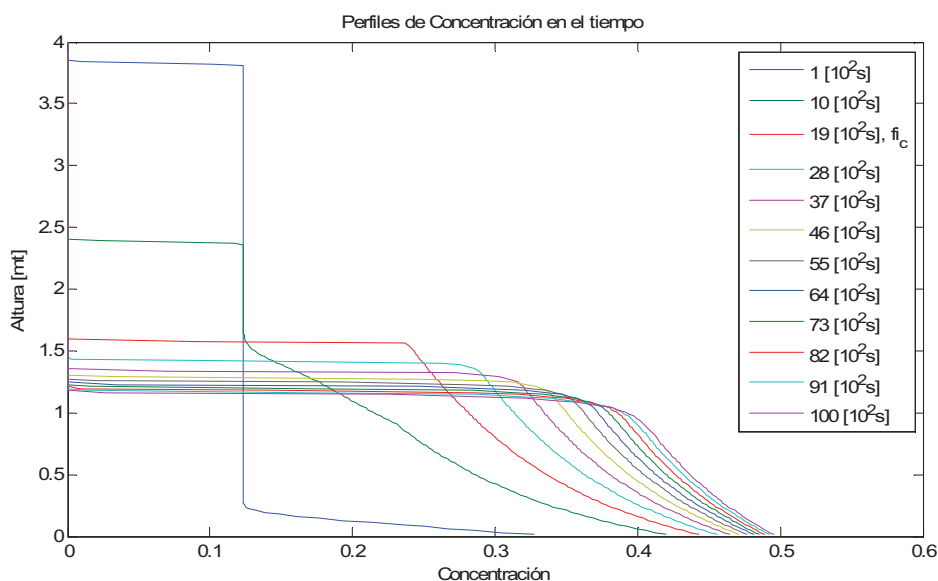
**Fig. 5.7 Curva de sedimentación para Concentración Crítica modo batch**

Se puede apreciar que a medida que aumenta la concentración, es decir se pasa al proceso de compresión, la altura de la interfaz disminuye hasta mantenerse en estado estacionario. Lo contrario sucede con la concentración de fondo, el cual aumenta a medida que la sedimentación avanza y se mantiene estacionaria cuando finaliza la compresión:



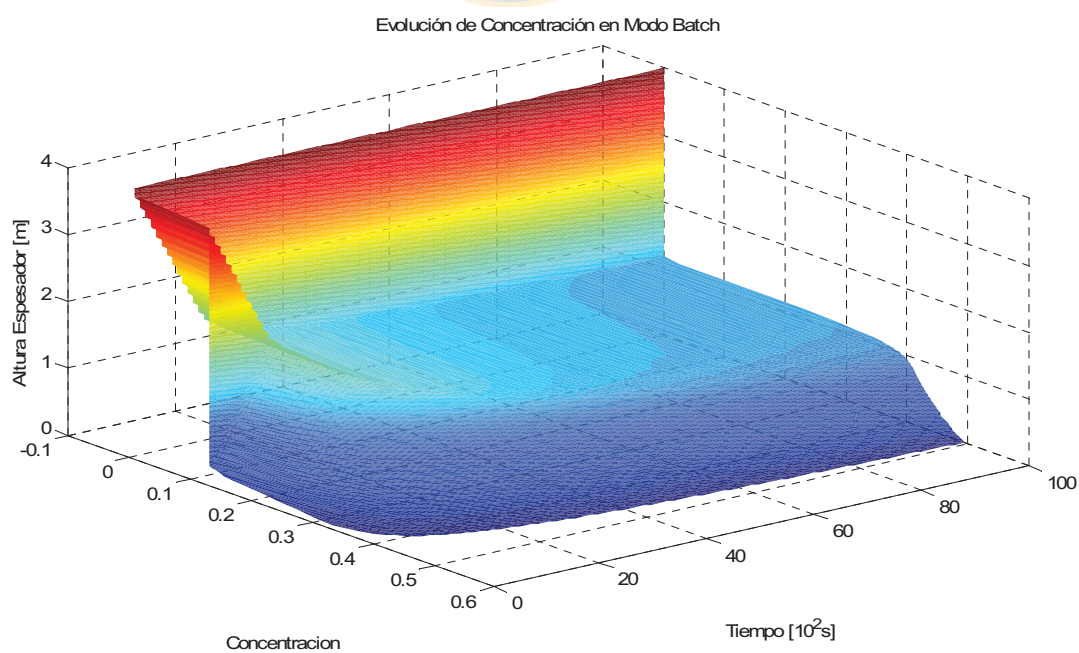
**Fig. 5.8 Concentración de Fondo para Espesador modo batch**

La Fig. 5.9 muestra la evolución de la altura de la concentración en el tiempo:



**Fig. 5.9** Perfiles de Concentración durante la Sedimentación en modo Batch

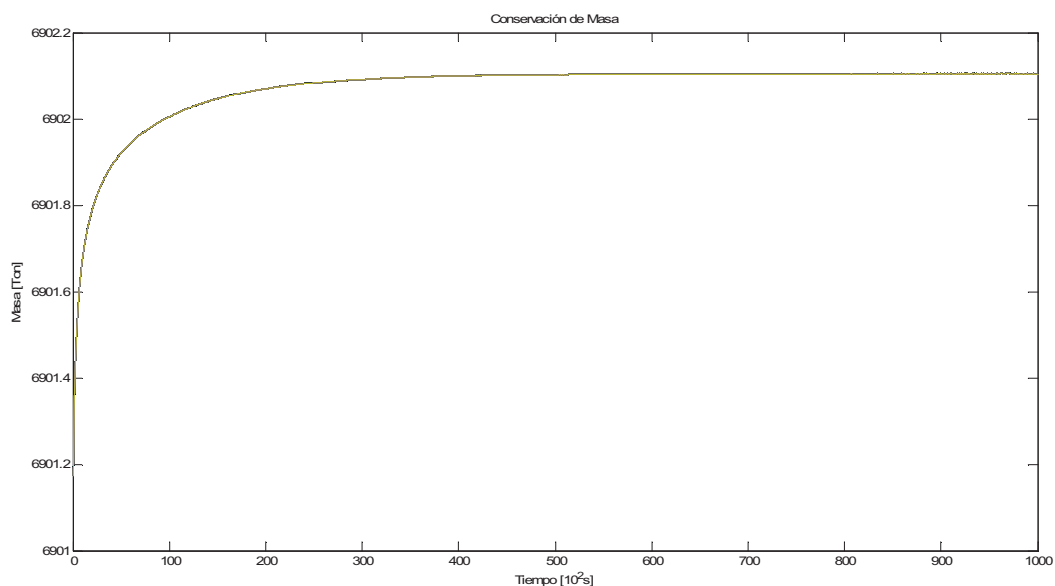
Como se puede observar inicialmente la mezcla en el Espesador esta homogenizada por lo que la altura del sedimento es la altura del Espesador, luego cuando comienza el proceso de sedimentación las partículas bajan hacia el fondo por gravedad y ayuda de adición de floculante el cual acelera el proceso de sedimentación, encontrándose las mayores concentraciones en el fondo, en consecuencia altura del sedimento disminuye hasta mantenerse estacionaria. Esto puede apreciarse mejor observándose la siguiente figura.



**Fig. 5.10** Perfiles de la Concentración durante la Sedimentación Batch

De la figura anterior se puede ver las etapas teóricas del proceso en modo batch, comenzando con una suspensión homogénea de concentración constante, luego cuando comienza la sedimentación las partículas comienzan a descender formando la interfaz agua- suspensión (sedimentación obstaculizada). Los flóculos comienzan a formarse y presionarse en el fondo del estanque aumentando su concentración iniciándose así la etapa de compresión. En un punto determinado bajo la interfaz agua suspensión, la concentración de la suspensión permanece fija o aumenta en el tiempo y a una cierta altura la interfaz agua suspensión se encontrara con la interfaz suspensión sedimento, en este instante termina la sedimentación.

Como la operación del espesador esta en modo batch, sin flujo de entrada ni de salida, la masa en el interior se conserva:



**Fig. 5.11 Conservación de Masa M en Modo Batch**

De las figuras anteriores muestran que el esquema de solución numérico aplicado aproxima correctamente el modelo fenomenológico del proceso batch, tanto de curva de sedimentación como de perfiles de concentración y puede ser utilizado de manera eficiente para simular el proceso de sedimentación. Es importante mencionar que las condiciones de este esquema son condiciones ideales, es decir, sin alteraciones de parámetros del espesador ( densidad de flujo , área ..etc ), ni fricción de paredes.

### 5.3. CASO SEDIMENTACIÓN CONTINUA

Para el caso continuo del Espesador se incluye el efecto de las funciones de control de caudal de carga y descarga.

La sedimentación continua se lleva a cabo en un espesador, estanque cilíndrico con la alimentación de pulpa en un tubo central en la parte superior, conocido como “feedwell”, y una descarga del sedimento, también central a  $\frac{3}{4}$  del fondo del Espesador. El agua recuperada en el proceso sale del equipo por un rebalse en toda la periferia del estanque.

El esquema para la simulación es el esquema mostrado en la Figura 4.1. El esquema de un espesador continuo consideran 4 zonas, como descritas en el Cap.2.

Las ecuaciones (5.16) y (5.17) son aun validas. Si se multiplica la expresión (5.17) por  $\varphi$  y, definiendo las densidades de flujo  $f(\varphi, t) = \varphi v_s$  y  $f_{bk}(\varphi) = \varphi(1 - \varphi)v_r$ , se puede escribir la densidad de flujo de sólidos en la forma:

$$f(\varphi, t) = q\varphi + f_{bk}(\varphi) \quad (5.29)$$

Esto es, la densidad de flujo de sólidos total consiste en la suma de una parte lineal  $q\varphi$ , correspondiente al movimiento global de la mezcla y una parte no-lineal  $f_{bk}(\varphi)$ , que describe el movimiento relativo local.

Luego la ecuación que describe a un espesador puede ser escrita como:

$$\frac{d}{dt}\varphi + \frac{d}{dz}f(\varphi, t) = 0 \quad (5.30)$$

Condición inicial y de contorno:

$$\varphi(z, 0) = \varphi_0 \quad (5.31)$$

$$\varphi(0, t) = \varphi_F \quad (5.32)$$

$$\varphi(z_r, t) = \varphi_r \quad (5.33)$$

Si la concentración de la descarga es menor que la de alimentación, se dice que el Espesador se vacía. Debemos destacar que, desde el punto de vista del modelo, las funciones  $\varphi_D, Q_D$  son desconocidas y pertenecen a la solución del problema ya que la concentración de descarga en el fondo inicialmente es impredecible.

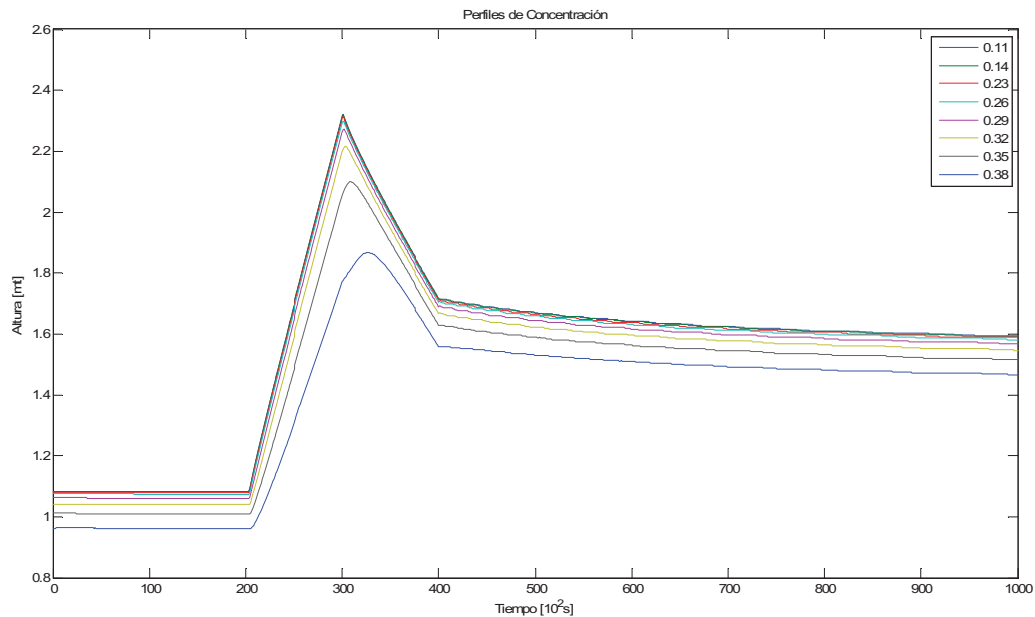
En la zona de rebalse se cumple (5.4d).

El tanque se alimenta en un tiempo  $t=20000$   $[\Delta t \cdot 60^2 \text{ hr.}]$ , se considera que el material se diluye rápidamente (instantáneamente) y se esparce a toda el área del equipo. A partir de este mismo instante de tiempo se adiciona más dosis de floculante. Luego en  $t=30000$   $[\Delta t \cdot 60^2 \text{ hr.}]$  se descarga el tanque y se finaliza la carga. Los parámetros utilizados son básicamente los mismos que los utilizados en modo batch, exceptuando la perturbación de carga y descarga:

**TABLA 5.2 Parámetros de Simulación Espesador en modo Continuo**

Parámetro	Valor
Floculante	$floc = 4 \text{ [gr / ton]}$ , $0 < t < 20000 \text{ [} \Delta t \cdot 60^2 \text{ hr.]}$
	$floc = 5.5 \text{ [gr / ton]}$ , $20000 < t < 100000 \text{ [} \Delta t \cdot 60^2 \text{ hr.]}$
Flujo Carga y Descarga	$Q_F = 0.8 \text{ [m}^3 \text{ / s]}$ , $20000 < t < 30000 \text{ [} \Delta t \cdot 60^2 \text{ hr.]}$
$q = Q / s \text{ [m / s]}$	$Q_R = 0.3 \text{ [m}^3 \text{ / s]}$ , $30000 < t < 40000 \text{ [} \Delta t \cdot 60^2 \text{ hr.]}$

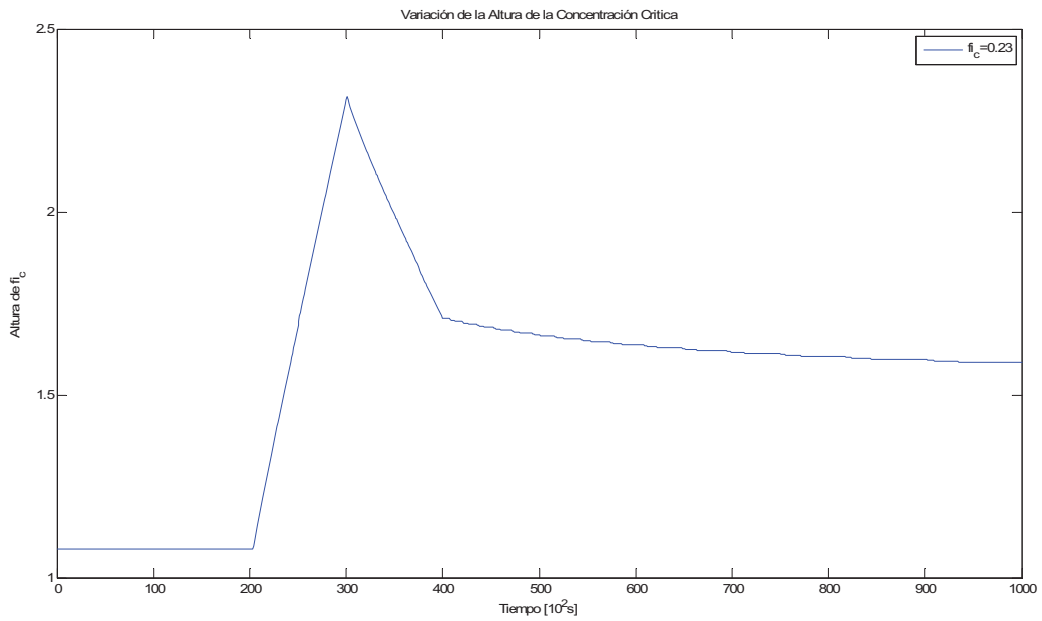
Los resultados obtenidos de la simulación en modo continuo son los siguientes:



**Fig. 5.12 Curva de sedimentación mostrando las interfaces agua-suspensión, suspensión-sedimento y curvas de Concentración constante modo Continuo**

Recordar que la alimentación y la descarga son consideradas como fuente y sumidero superficial respectivamente y los sólidos nunca entran en la zona de clarificación.

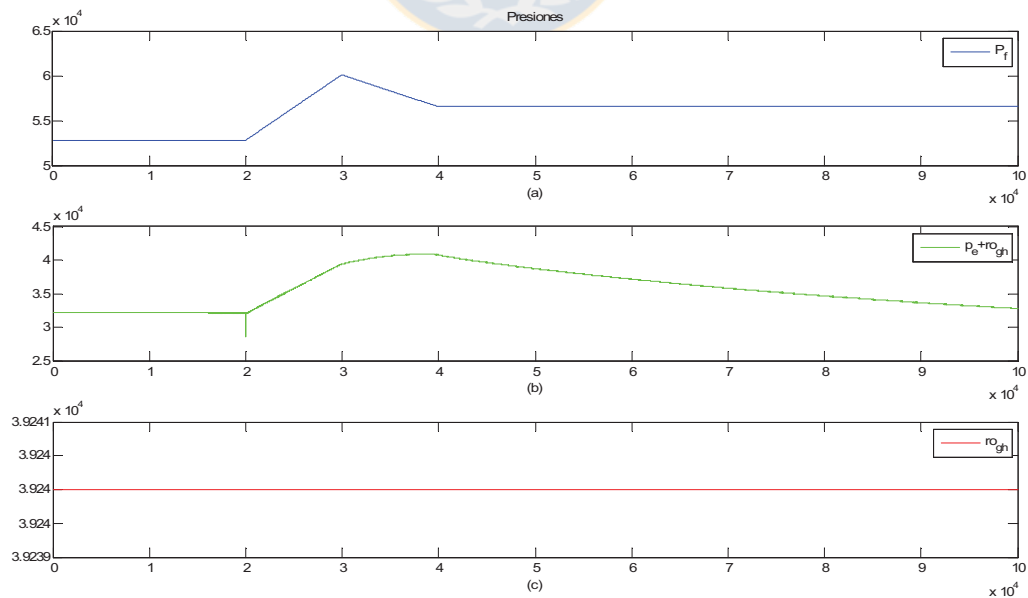
La curva demuestra que a partir del proceso batch, es decir partiendo con el espesador cerrado, se tendrá un perfil de concentraciones a lo alto del tanque. Al realizar una perturbación como administrar flujo de alimentación, el proceso en primer lugar provoca que la masa contenida en el tanque aumenta, en consecuencia el perfil de concentraciones dentro del estanque se ve afectado y aumenta inicialmente, al igual que la altura del sedimento. Si la alimentación continua el tanque se rebasaría, por lo que es adecuado perturbar la salida. Una vez aumentado el flujo de descarga la masa y los demás perfiles tienden a equilibrarse formando el proceso de sedimentación continuamente:



**Fig. 5.13 Variación del perfil de la Concentración Crítica**

Como se menciono anteriormente la variable “concentración crítica” es una variable que representa que el proceso de sedimentación a finalizado y por lo tanto es una referencia del perfil del sedimento.

Las perturbaciones obviamente también influyen en el comportamiento de las presiones involucradas en el espesador:

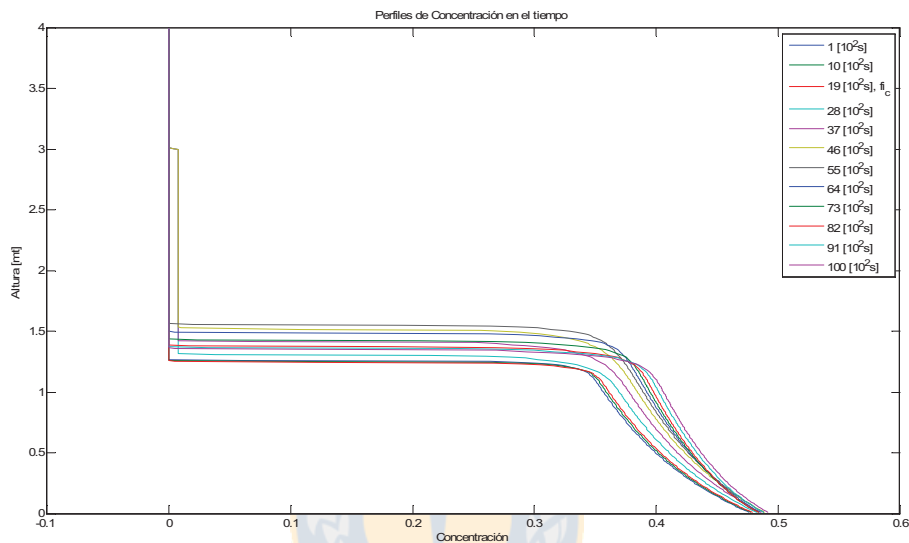


**Fig. 5.14 Presiones existentes en el proceso**  
**(a) Presión final (b) Presión de Poros en Exceso (c) Presión hidrostática.**



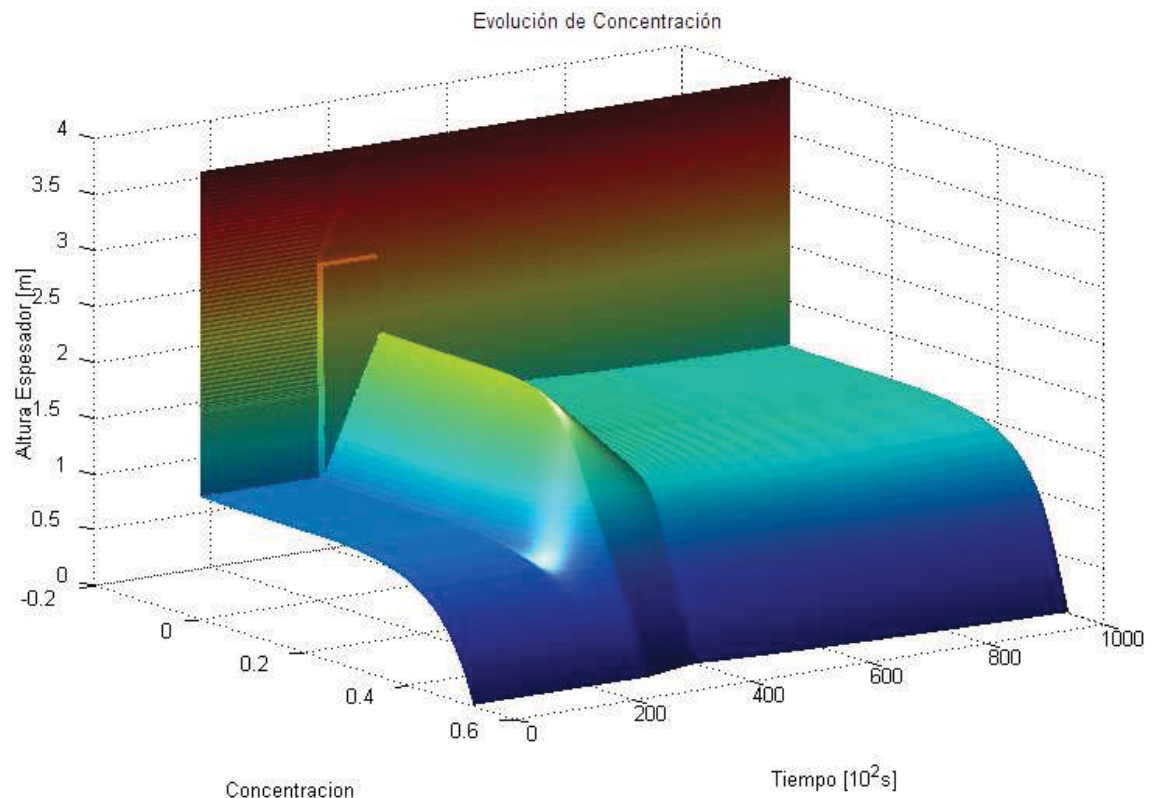
Notar que estas se comportan similarmente a la dinámica de la concentración en el caso de la presión total y la presión de poros en exceso. La presión hidrostática como es de suponerse se mantiene constante.

A continuación se muestra el perfil de las concentraciones el tiempo:



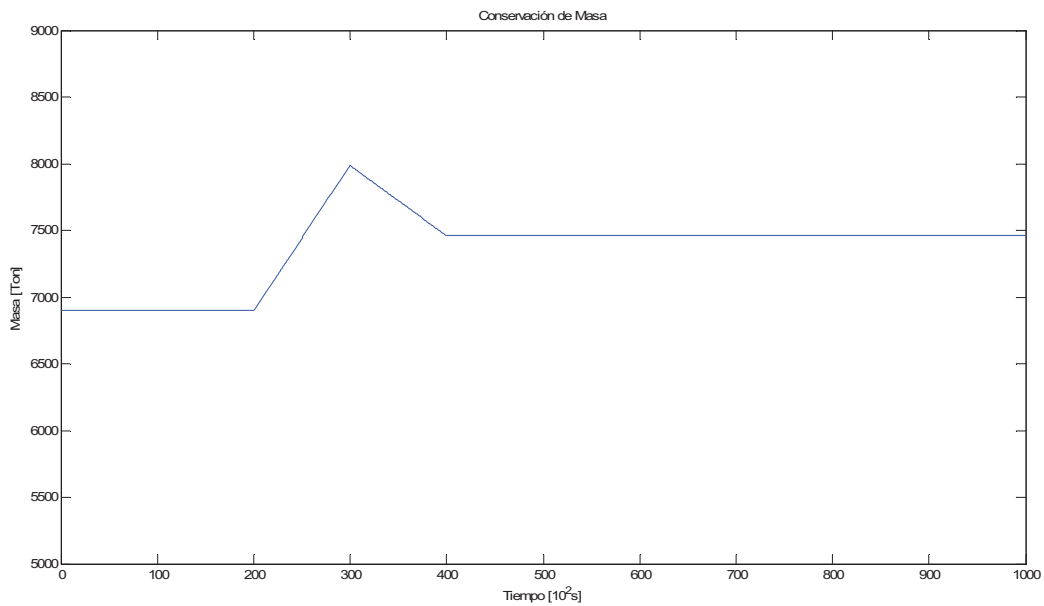
**Fig. 5.15 Perfiles de Concentración durante la Sedimentación**

Como este perfil esta en función del tiempo no se alcanza a apreciar la dinámica del proceso, básicamente los cambios producto de las perturbaciones que se expuso el sistema. La evolución de estas perturbaciones se observan en la siguiente Figura:



**Fig. 5.16 Perfiles de Concentración durante la Sedimentación en modo Continuo**

Como se muestra en la figura, se puede observar claramente los cambios de altura y concentración del sedimento al alimentar y descargar el Espesador -Clarificador, además de los cambios efectuados de la adición del floculante, este cambio se detalla en el capítulo siguiente. Respecto a la masa se corrobora lo anterior:



**Fig. 5.17 Conservación de Masa**

La masa se conserva al interior del tanque.

Como detalle aparte se puede ver el evidente el grado de acoplamiento que existe entre el flujo de descarga y el nivel de sedimento.

En consecuencia de lo expuesto en esta sección, se puede decir que la sedimentación continua de una suspensión en un Espesador queda descrita por las variables de campo: concentración de sólido  $\varphi(z, t)$ , por la velocidad volumétrica  $q(z, t)$  y por la ecuación constitutiva (curva de densidad de flujo)  $f_{bk}(\varphi(z, t))$ . Estas funciones constituyen un Proceso de Sedimentación Continuo de Kynch PSCK.

## Capítulo 6. Estrategia de Control para Espesador

---

En este Capitulo se realizará un análisis L.A. para determinar las consideraciones mas importantes para un posible control, además de determinar el comportamiento del proceso.

Después del análisis del proceso se diseñará una estrategia de control FLC.

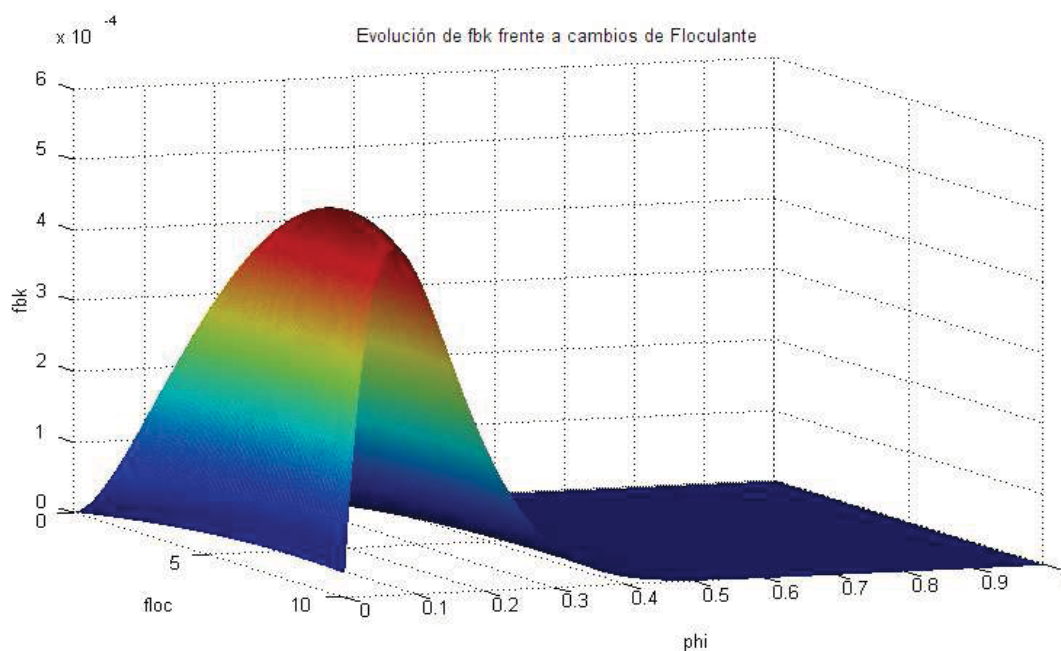
### 6.1. ANÁLISIS LAZO ABIERTO

#### 6.1.1 ANÁLISIS DOSIFICACIÓN DE FLOCULANTE

La función que relaciona la dosis de floculante y el efecto velocidad de compresión que se tiene en el sedimento es la función de densidad de flujo batch de Kynch. Esta función nace de pruebas de laboratorio por lo que no se tiene una función definida para todos los materiales, esto se considera no menor, ya que de esta depende la acción directa de la dosis de floculante, mas directamente de la función involucrada en la función densidad de flujo Kynch, esta es la función  $u_{\infty}$ .

La función densidad de flujo Kynch se describe la velocidad de la solución de un solo flóculo en el líquido puro, esta función esta descrita en la ecuación (5.1) y (5.2) y su comportamiento en función de la concentración en el la Figura 5.3. Más explícitamente esta función es la componente no lineal de la densidad de flujo de sólidos. Y describe el movimiento relativo local de las partículas.

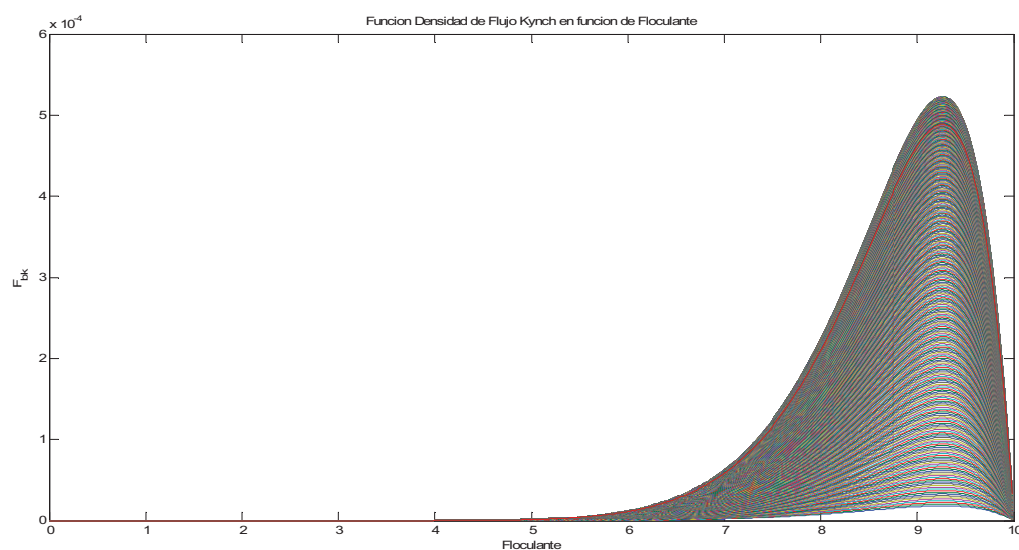
La figura siguiente muestra el comportamiento de la función  $f_{bk}(\varphi)$  en función tanto de la concentración como el floculante (acción directa de la función  $u_{\infty}$ ):



**Fig. 6.1** Función Densidad de Flujo Kynch  $f_{bk}(\varphi)$  en función de la Adición de Floculante y la concentración

Del comportamiento de esta función se infiere que la adición de floculante si bien influye en el comportamiento del proceso, a rangos mayores de cierta inflexión, el comportamiento del sistema no se ve afectado por lo que el aumento de éste no afectaría la dinámica de la sedimentación.

El rango exacto en el que no se produce influencias sobre la mezcla se detalla la siguiente figura:



**Fig. 6.2** Función Densidad de Flujo Kynch  $f_{bk}(\varphi)$  en función de la adición de Floculante

La figura muestra la función  $f_{bk}(\varphi)$  en función del floculante, para determinar el punto de inflexión se calcula el máximo de esta función, dando como resultado que para dosis mayores a 9.26 [gr/ton] el efecto de aceleración en la consolidación que se desea no ira en aumento sino que al contrario el proceso se tornará mas lento, no resultando una mayor compresión y además desperdiciando la dosis restante.

## 6.1.2 SOLUCIÓN ESTADO ESTACIONARIO

### A. Análisis Estado Estacionario

Para determinar el comportamiento de la concentración de descarga es conveniente realizar un análisis S.S.

Se dice que un sistema físico está en estado estacionario cuando las características del mismo no varían con el tiempo. Matemáticamente los estados estacionarios son aquellas soluciones de las ecuaciones diferenciales en las cuales las variables del sistema no varían con el tiempo.

Para analizar el espesamiento continuo es conveniente estudiar por separado el estado estacionario del transiente, ya que para el régimen estacionario las ecuaciones de campo se simplifican significativamente al considerar  $\partial\varphi/\partial t = 0$ .

Como antes se mencionó, en un espesador un cambio en alguna de las variables de proceso no produce o refleja un resultado rápido en el fenómeno del espesamiento. A modo de ejemplo, una variación en la concentración de entrada o en la adición de floculante, con el pasar de horas de proceso, se verá reflejado algún cambio en el sedimento. Es decir, la dinámica de este proceso es lenta. Es por esto que resulta importante determinar otra fenomenología del proceso de espesamiento. Esta corresponde al comportamiento de la concentración de fondo o de descarga del espesador  $\varphi_d$ .

Las ecuaciones que representan el estado estacionario de un espesador continuo se las puede deducir, como se describió anteriormente, eliminando la dependencia del tiempo en la ecuación diferencial que representa el proceso de espesamiento descrita de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{S(z)} \frac{\partial}{\partial z} (Q_d(t) \varphi + S(z) \cdot f_{bk}(\varphi)) = \frac{1}{S(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left( S(z) \cdot \alpha(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \quad (6.1)$$

Luego reordenando:

$$\frac{\partial (S(z) \cdot \varphi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (Q_d(t) \varphi + S(z) \cdot f_{bk}(\varphi)) = \frac{\partial}{\partial z} \left( S(z) \frac{\partial A(\varphi)}{\partial z} \right) \quad (6.2)$$

Recordar que la discretización y la solución numérica esta basada en la ecuación anterior, considerando el área unitaria.

Cada solución en estado estacionario satisface la ecuación diferencial ordinaria:

$$Q_d(t) \varphi + S(z) \cdot f_{bk}(\varphi) = S(z) \frac{\partial A(\varphi)}{\partial z} + C \quad (6.3)$$

Teniendo en cuenta la condición de frontera:

$$\left( f_{bk}(\varphi) - \frac{\partial A(\varphi)}{\partial z} \right) (z_r, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T \quad (6.4)$$

Y suponiendo que  $\varphi_D > \varphi_c$  es la concentración de sólido de descarga deseada, se obtiene que  $C = Q_D \varphi_D$ . Insertando esto en la ecuación (6.3) se obtiene la ecuación:

$$Q_d(t)(\varphi - \varphi_D) + S(z) \cdot f_{bk}(\varphi(z)) = S(z) \frac{\partial A(\varphi)}{\partial z} \quad (6.5)$$

Para la zona de compresión, donde  $\varphi$  varia entre  $\varphi_c$  y  $\varphi_D$ , se tiene  $\alpha(\varphi) \geq 0$  y  $\alpha(\varphi) = 0$  en la altura crítica en  $z_c$  (nivel de sedimento), en la que el valor crítico de concentración  $\varphi_c$  se ha alcanzado. Para el correspondiente perfil de concentración  $\varphi = \varphi(z)$ , se obtiene el siguiente problema de valores iniciales (con respecto a la variable independiente  $z$ ):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{\alpha(\varphi)} \left( \frac{Q_d(t)}{S(z)} (\varphi - \varphi_D) + f_{bk}(\varphi(z)) \right), \quad z > 0, \quad (6.6)$$

$$\varphi(0) = \varphi_D \quad (6.7)$$

Se observa que en el estado estacionario tanto la densidad de flujo de sólidos  $f_b$  como la velocidad volumétrica  $q$  son constantes a lo largo del espesor y pueden ser determinados desde las condiciones de contorno. Además, las discontinuidades, si existen, no se mueven.

La ecuación (6.6) se integra de  $z = z_R$  a  $z_c$ , es decir, hasta que la altura de la concentración crítica. En estado estacionario el perfil de la concentración en el intervalo  $(z_c, z_L)$  esta determinado por la condición de que el flujo de volumen de sólido de alimentación  $F_F$  sea igual a el flujo de sólido de descarga, es decir  $F_F = Q_F \varphi_F = Q_D \varphi_D$ , luego algebraicamente:

$$Q_d(t)(\varphi - \varphi_D) + S(z) f_{bk}(\varphi(z)) = 0, \quad (6.8)$$

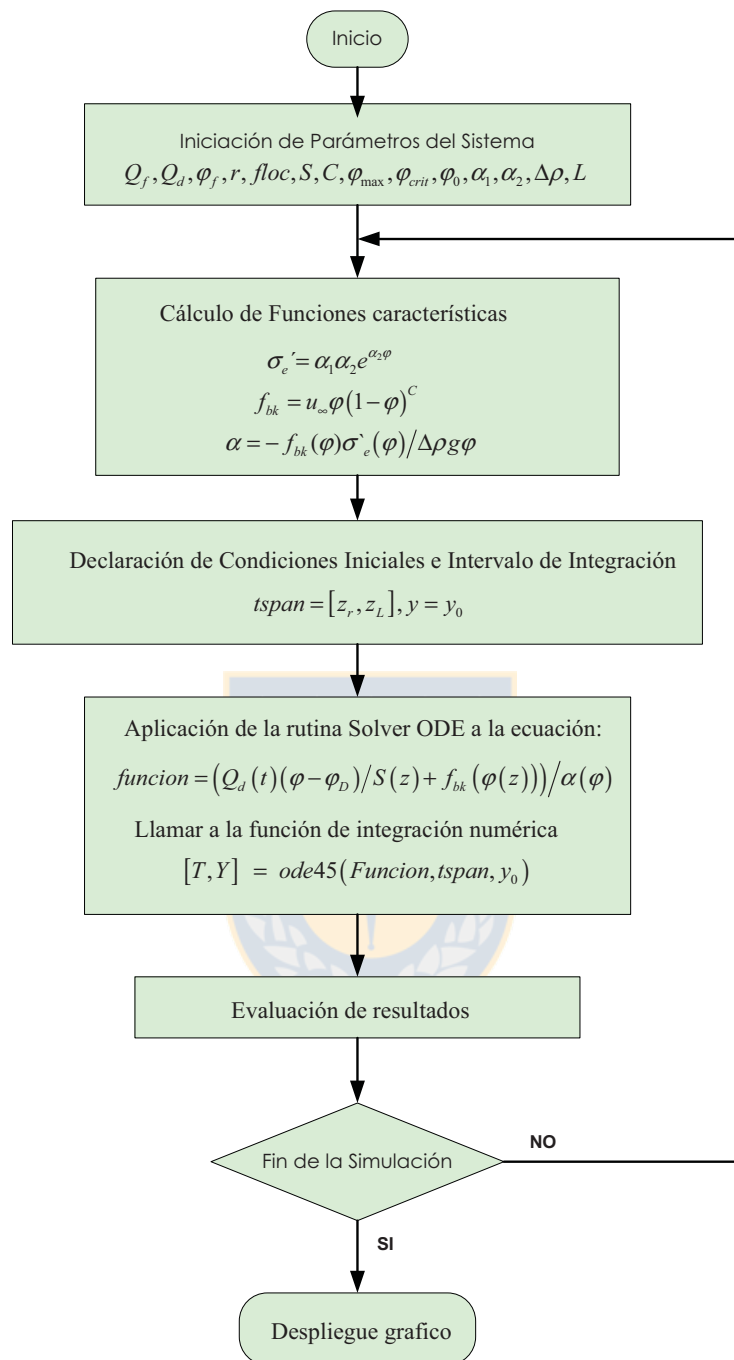
Para determinar la concentración en el intervalo  $(z_c, z_L)$  (6.7) se debe resolver  $\varphi(z)$  para cada  $z \in (z_c, z_L)$ . Se asume que los parámetros  $Q_D$  y  $\varphi_D$  son determinados de tal forma que la ecuación tiene solución única para todos los  $z \in (z_c, L)$ , luego la ecuación anterior es equivalente a:

$$Q_d(t)\varphi(z) + S(z) f_{bk}(\varphi) = Q_F \varphi_F = Q_D \varphi_D \quad (6.9)$$

## **B. Algoritmo de Resolución S.S.**

El algoritmo utilizado para la resolución de la ecuación (6.6) se detalla en el siguiente diagrama de Flujo:





**Fig. 6.3 Diagrama de Flujo de la Solución S.S.**

La función utilizada para resolver la ecuación de S.S. es la función ODE45 la cual es una función que dispone MATLAB para integrar ecuación o sistemas de ecuaciones diferencias. Esta función utiliza el método *Runge-Kutta*.

El comando *tspan* es un vector que define el intervalo de integración. Las condiciones iniciales están dadas por el vector  $y_0$ . El vector T devuelto por la función ode45 contiene los valores la altura para lo cual se esta calculando la concentración. “Y” es una matriz que contiene el resultado de la simulación.

### C. Simulación de la Solución S.S.

Luego, resolviendo la ecuación diferencial ordinaria (6.6) por el método numérico de Runge-Kutta, es posible determinar el comportamiento de la concentración de descarga del espesador. A continuación se muestra la evolución de la concentración de descarga  $\varphi_D$  en función de la variación de flujo de descarga y del ingreso de floculante, para un flujo de entrada  $Q_F = 0.3 \left[ \frac{m^3}{s} \right]$ ,  $Q_F = 0.5 \left[ \frac{m^3}{s} \right]$ ,  $Q_F = 0.7 \left[ \frac{m^3}{s} \right]$  y un Espesador de 4 metros:

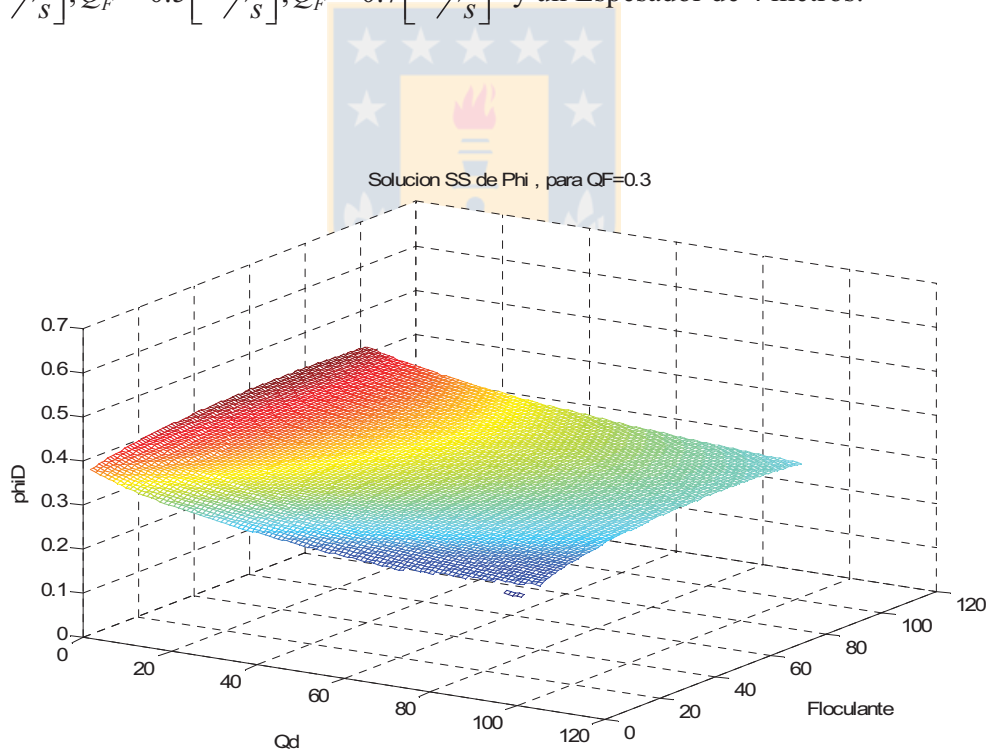
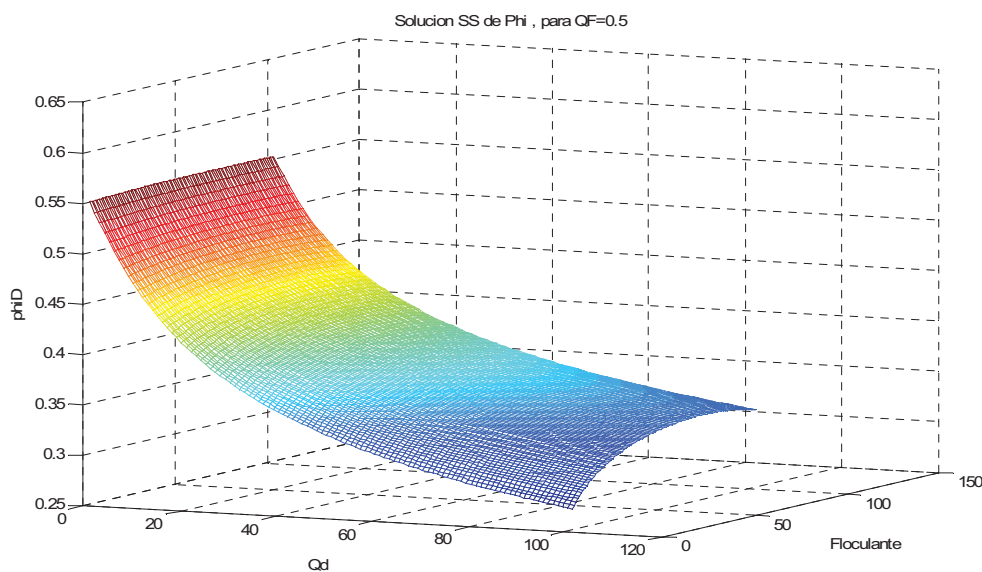
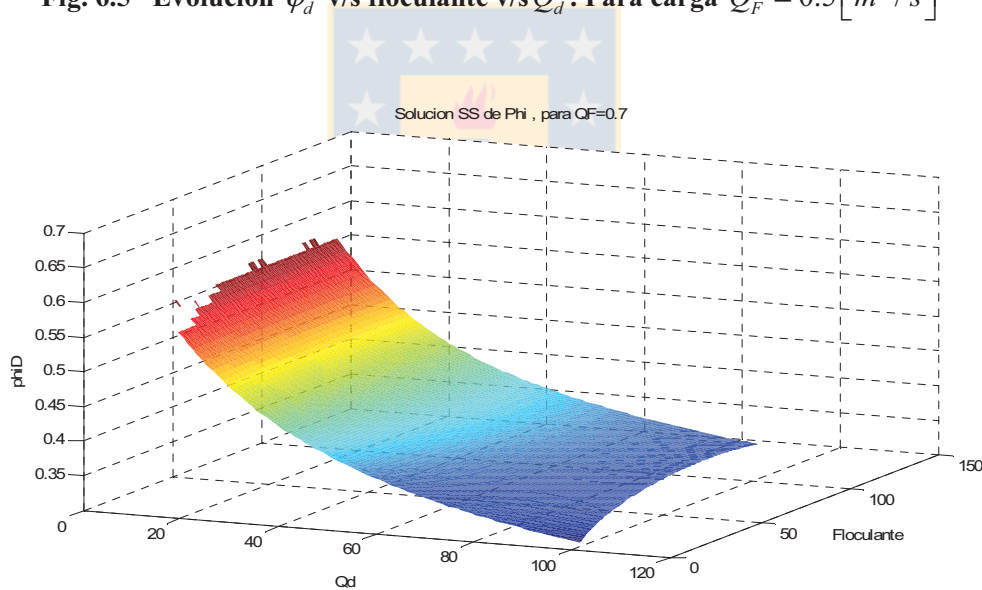


Fig. 6.4 Evolución  $\varphi_d$  v/s floculante v/s  $Q_d$ . Para carga  $Q_F = 0.3 \left[ \frac{m^3}{s} \right]$



**Fig. 6.5** Evolución  $\varphi_d$  v/s flocculante v/s  $Q_d$ . Para carga  $Q_F = 0.5 [m^3 / s]$



**Fig. 6.6** Evolución  $\varphi_d$  v/s flocculante v/s  $Q_d$ . Para carga  $Q_F = 0.7 [m^3 / s]$

Como se muestra en las figuras anteriores, existe una alta dependencia del flujo de descarga con la concentración de descarga, no así con la adición de flocculante, como se muestra la curva tiene una forma bastante plana en el sentido de flocculante por lo que cambios en éste no producen grandes cambios en la concentración de descarga, es importante mencionar que esto ocurre para este  $u_\infty$ , o mejor dicho para este tipo de material, recordemos que esta función es exclusivamente de cada

material.

En relación a la variación del flujo de carga, éste produce menor o mayor grado de concentración en la descarga dependiendo de que tan alto sea.

A modo de prueba, en L.A. se realizó una prueba escalón con valores dentro del rango dado en la solución estacionaria para un flujo de carga constante de  $Q_F = 0.5 \left[ \frac{m^3}{s} \right]$ , un caudal de descarga de  $Q_D = 0.177 \left[ \frac{m^3}{s} \right]$  y  $floc = 4.4 \left[ \frac{gr}{ton} \right]$ , los resultados fueron los siguientes, los cuales corroboran que existe una dependencia importante con respecto a el flujo de descarga y como se puede apreciar llega a un estado estacionario:

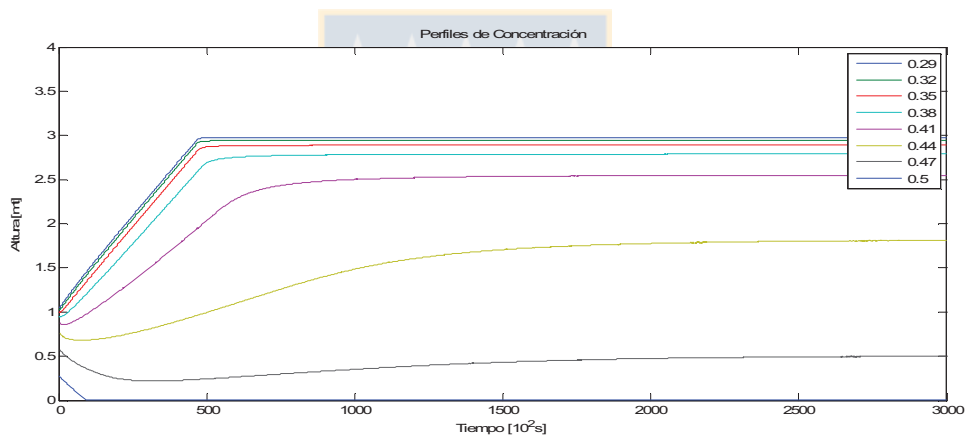


Fig. 6.7 Perfil de Concentración -Prueba S.S.

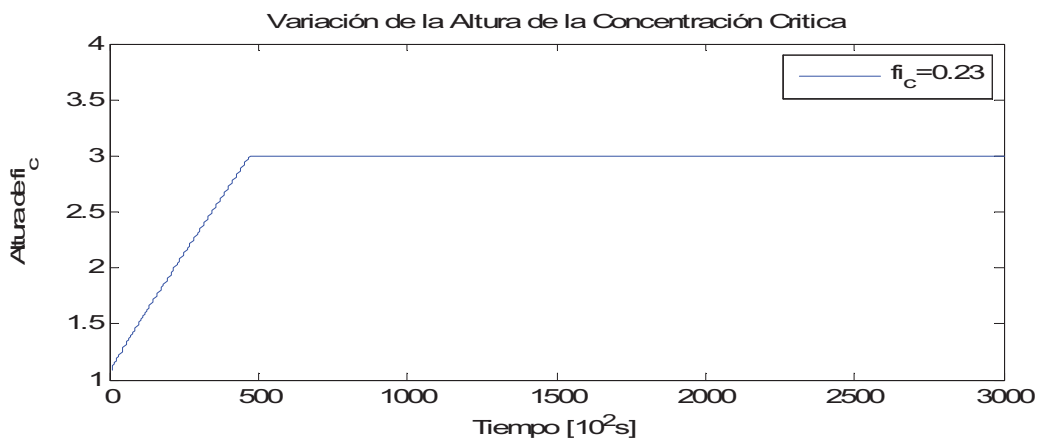
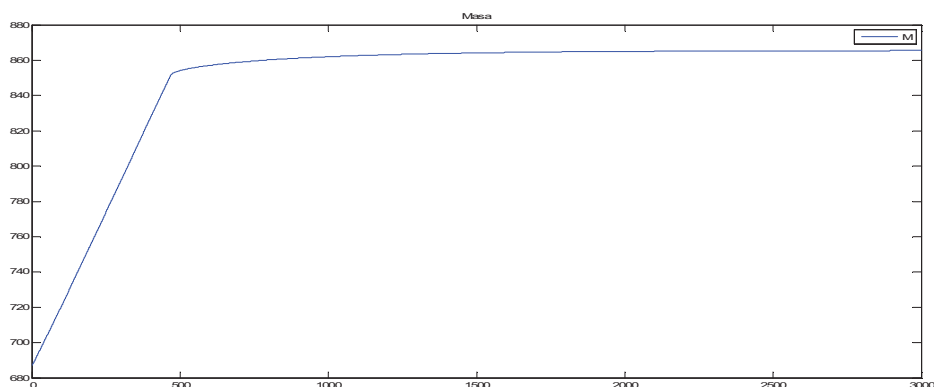
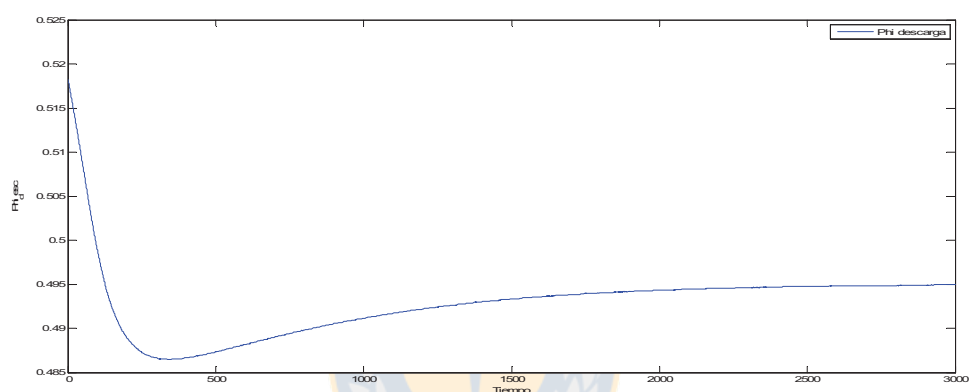


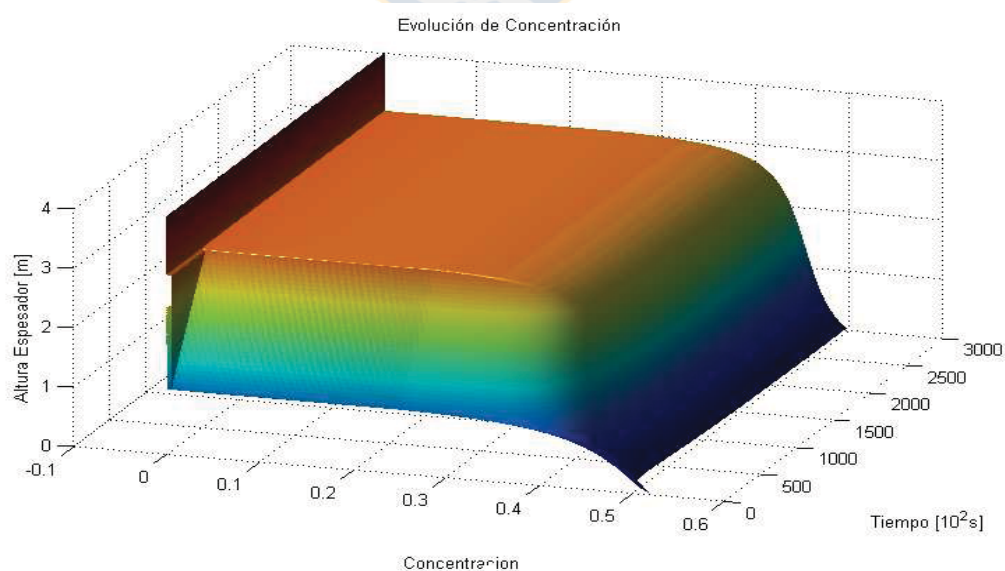
Fig. 6.8 Altura de Concentración crítica -Prueba S.S.



**Fig. 6.9 Variación de Masa en el Espesador -Prueba S.S.**



**Fig. 6.10 Comportamiento de la concentración de descarga -Prueba S.S.**



**Fig. 6.11 Evolución del perfil del sedimento -Prueba S.S.**

En esta prueba tanto la dosis de floculante, el flujo de carga y descarga pertenecen a una de

las posibles soluciones del S.S. descritas en la Figura 6.5. , las figuras resultantes de la prueba escalón demuestran que el proceso converge a estado estacionario.

La Figura 6.7 muestra el perfil de altura en que se encuentran las concentraciones en el interior del tanque.

La Figura 6.8 muestra la evolución de la altura de la concentración crítica la cual describe la altura del sedimento a la cual llega a estado estacionario.

Lo mismo se observa en la Figura 6.9 la cual muestra el perfil de la Masa, la cual se conserva luego de alcanzar el estado de equilibrio.

En la Figura 6.10 se puede inferir que la concentración de descarga también alcanza el estado estacionario, como descrito en las etapas del proceso de sedimentación.

Finalmente la Figura 6.11 muestra más claramente la evolución del perfil del sedimento en el tiempo altura y concentración.

Las soluciones de estado estacionario tienen una gran importancia por el motivo que son la base para elegir parámetros para controlar el proceso y describir el comportamiento de éste. Estos parámetros pueden ser extraídos de las Figuras 6.4, 6.5, 6.6.

## **6.2. CONTROL F.L.C. PARA ESPESADOR CLARIFICADOR**

Los Sistemas de Control de Procesos actúan sobre variables físicas que caracterizan el Proceso. En un Proceso puede haber muchas variables, como salida del Proceso, se elige en forma arbitraria la variable considerada más relevante que identifique o caracterice el producto (salida) del Proceso. El valor de esta variable se compara con el valor de una referencia. Si no son iguales, se actúa sobre las variables de entrada que acepten modificaciones, para corregir el error o diferencia entre ambas.

De acuerdo a su complejidad, una forma (hay otras) de clasificar los Sistemas de Control de Procesos es la siguiente:

- (i) Control On-Off automático o manual, acción discreta con solo dos estados posibles.
- (ii) Control de Regulación automático o manual, acción continua para tener cero errores entre la variable de salida y la referencia.
- (iii) Control Óptimo, modificación del valor de referencia por cálculo computacional o por acciones de un experto (humano) para mayor eficiencia del proceso y mejorar (o

mantener) calidad del producto.

- (iv) Control estocástico, acciones para enfrentar situaciones imprevistas. Ejemplo: adelantar un vehículo en una carretera con doble sentido de tránsito.

Los casos (i) y (ii) se resuelven bien por medio del control clásico; mientras que los casos (iii) y (iv) se resuelven mejor por medio de un control alternativo, un experto humano o por medio de Fuzzy Control.

### **6.2.1 NACIMIENTO DEL CONTROL DIFUSO**

Una aproximación a la forma de cómo manejamos la información y procesamos las personas, fue presentada por Lofti Zadeh brillante ingeniero eléctrico iraní nacionalizado en Estados Unidos, por medio de su “Logica Difusa”, la cual permite incluir el razonamiento impreciso y el manejo de la incertidumbre, desde su misma concepción, bajo una connotación de procesamiento de datos aproximados y con palabras. En realidad, la intención original del profesor Zadeh era crear un formalismo para manipular de forma más eficiente la imprecisión y la ambigüedad del razonamiento humano expresado lingüísticamente.

Aunque la lógica difusa es conocida con este nombre desde que Zadeh la bautizó así en 1965, la idea en sí de que las cosas no son blancas o negras, sino que existen infinitos matices de grises se remonta hace 2.500 años atrás. Los filósofos griegos, Aristóteles entre ellos, consideraban que existían ciertos grados de veracidad y falsedad y Platón ya trabajó con grados de pertenencia.

Si bien, esta nueva forma de modelar el conocimiento impreciso fue propuesta en los años 60, solo a partir del 2000 se ha empezado a formular una serie de aplicaciones en el ámbito de control de procesos, procesamiento digital de señales y robótica.

### **6.2.2 CONCEPTOS DE LÓGICA DIFUSA**

La lógica difusa permite representar el conocimiento común, que es mayoritariamente del tipo lingüístico cualitativo y no necesariamente cuantitativo, en un lenguaje matemático a través de la teoría de conjuntos difusos y funciones características asociadas a ellos.

La clave de esta adaptación al lenguaje, se basa en comprender los cuantificadores de nuestro lenguaje (en los ejemplos de arriba "mucho", "muy" y "un poco").

#### **A. Conjuntos Difusos**

Formalmente, un conjunto clásico difuso, se puede definir de varias formas: enumerando los elementos que pertenecen al conjunto, especificando las propiedades que deben cumplir los elementos que pertenecen a ese conjunto..

Para que un conjunto tenga sentido matemático, debe tener una notación o representación matemática que lo identifique, y también debe existir otro conjunto que lo contenga. El conjunto que lo contiene se denomina conjunto Universo  $U$ .

#### **B. Función de Pertenencia**

Para cada conjunto difuso, existe asociada una función de pertenencia para sus elementos, que indican en qué medida el elemento forma parte de ese conjunto difuso.

La teoría de conjuntos difusos contempla la pertenencia parcial de un elemento a un conjunto, es decir, cada elemento presenta un grado de pertenencia a un conjunto difuso que puede tomar cualquier valor entre 0 y 1.

La función característica proporciona una medida del grado de similaridad de un elemento de  $U$  con el conjunto difuso. La forma de la función característica utilizada, depende del criterio aplicado en la resolución de cada problema y variará en función de la cultura, geografía, época o punto de vista del usuario.

La única condición que debe cumplir una función característica es que tome valores entre 0 y 1, con continuidad. Las funciones características más comúnmente utilizadas por su simplicidad matemática y su manejabilidad son: triangular, trapezoidal, gaussiana, sigmoideal, gamma, pi, campana etc...

Entonces se puede decir que un conjunto difuso en un Universo  $U$  esta caracterizado por una función de pertenencia que toma valores en el intervalo  $[0,1]$ .



El grado de pertenencia de un elemento en un conjunto depende de la definición de la función pertenencia y se anota con la letra griega  $\mu$ . El grado de pertenencia se cuantifica mediante la función de pertenencia, que normalmente se escoge de una forma trapezoide.

### C. Inferencia Difusa

Se llama reglas difusas al conjunto de proposiciones IF-THEN que modelan el problema que se quiere resolver.

Es decir, el bloque de inferencia es aquel en el cual se realiza la “traducción matemática” de las reglas difusas: estas reglas modelan el sistema pero para poder trabajar con ellas y extraer un resultado se debe de evaluar matemáticamente la información que reflejan.

Los métodos de inferencia para esta base de reglas deben ser simples, veloces y eficaces. Los resultados de dichos métodos son un área final, fruto de un conjunto de áreas solapadas entre sí (cada área es resultado de una regla de inferencia). Para escoger una salida concreta a partir de tanta premisa difusa, el método más usado es el del centroide, en el que la salida final será el centro de gravedad del área total resultante.

### D. Diagrama en Bloques de Sistema basado en Lógica Difusa



Fig. 6.12 Esquema general de un sistema basado en Lógica Difusa

- (i) BLOQUE DIFUSOR: bloque en el que a cada variable de entrada se le asigna un grado de pertenencia a cada uno de los conjuntos difusos que se ha considerado, mediante las funciones características asociadas a estos conjuntos difusos. Las entradas a este bloque son valores concretos de las variables de entrada y las salidas son grados de pertenencia a los conjuntos difusos considerados.

- (ii) BLOQUE DE INFERENCIA: bloque que, mediante los mecanismos de inferencia relaciona conjuntos difusos de entrada y de salida y que representa a las reglas que definen el sistema. Las entradas a este bloque son conjuntos difusos (grados de pertenencia) y las salidas son también conjuntos difusos, asociados a la variable de salida.
- (iii) DESDIFUSOR: bloque en el cual a partir del conjunto difuso obtenido en el mecanismo de inferencia y mediante los métodos matemáticos de desdifusión, se obtiene un valor concreto de la variable de salida, es decir, el resultado.

### 6.2.3 DISEÑO DEL CONTROLADOR DIFUSO PARA EL ESPESADOR

Se Controlará dos variables pertenecientes al proceso. Éstas corresponden a: Altura del sedimento en  $\varphi_c(z_c)$ , Masa del Sedimento M y Presión. Estas serán controladas mediante el Flujo de descarga ( $q_d$ ).

El flujo de descarga ( $q_d$ ) puede tener como actuador, una válvula de descarga simulada en la obtención del modelo del proceso, o bien, un variador de frecuencia que regula la velocidad de la bomba extractora.

El diagrama P&ID de este control se muestra en la siguiente Figura:

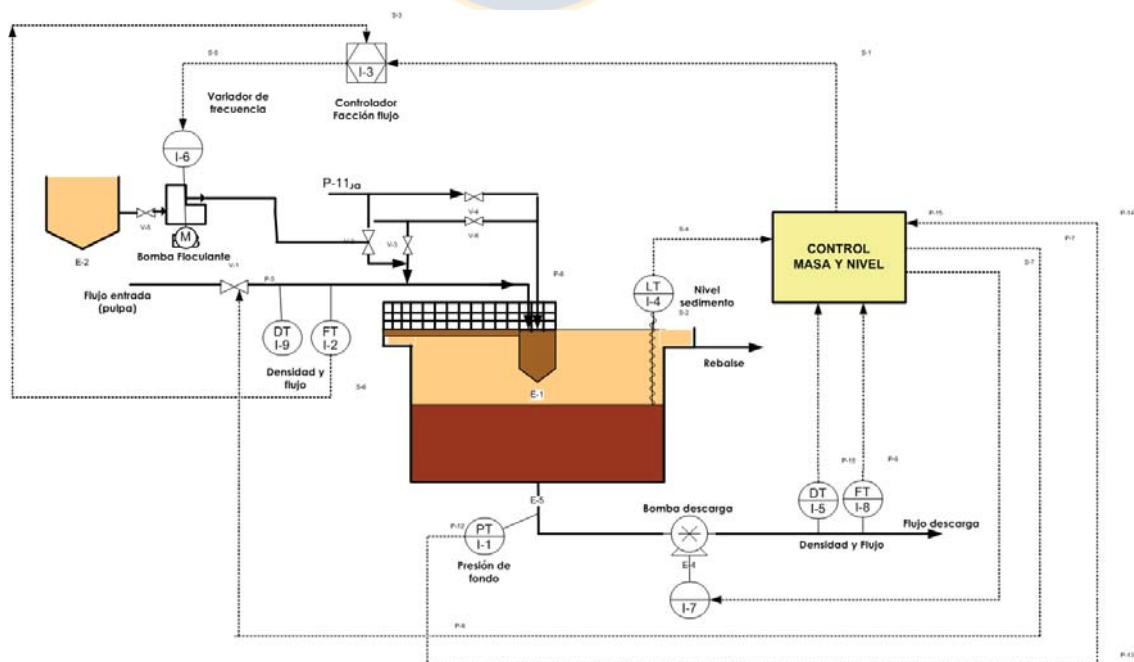


Fig. 6.13 Diagrama P&ID del Control Difuso a Implementar

Básicamente el control de masa es un control que controla nivel por lo que el conjunto de reglas a implementar para el control de masa y nivel son similares cambiando solo las variables de sintonización.

#### **A. Parámetros de Entrada**

Los parámetros de entrada de la etapa fusificadora del controlador difuso son el error y la derivada del error:

$$E_s = (PV - SP) / S_e \quad (6.10)$$

$$\Delta E_s = [(PV_t - SP_t) - (PV_{t-1} - SP_{t-1})] / S_{de} \quad (6.11)$$

La derivada del error da una noción de la velocidad con que la variable manipulable se acerca a la referencia.  $S_e$  y  $S_{de}$  corresponden a parámetros que permiten la sintonización del controlador mediante el escalamiento del error.

#### **B. Conjunto difuso**

Para el control se utilizaran cinco conjuntos difusos en los dos universos de discurso

$$U = \{NA, NM, ZE, PM, PA\} \quad (6.12)$$

#### **C. Funciones de Pertenencia**

El grado de pertenencia de un elemento en un conjunto depende de la definición de la función pertenencia y se anota con la letra griega  $\mu$ . A continuación se muestran las funciones de pertenencia para el error y delta error:

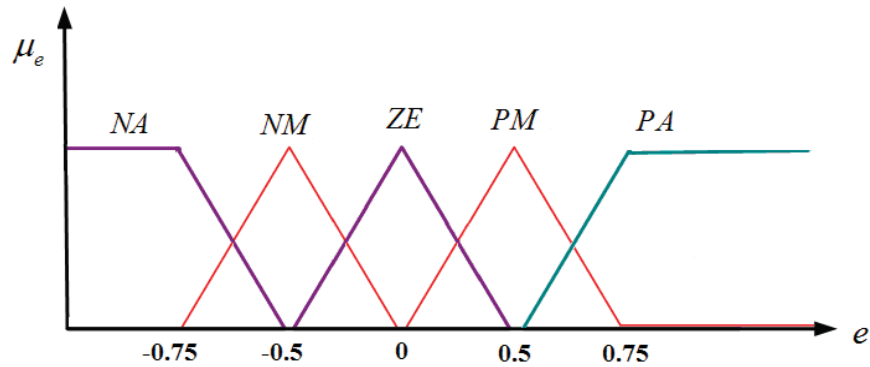


Fig. 6.14 Función de pertenencia para Error

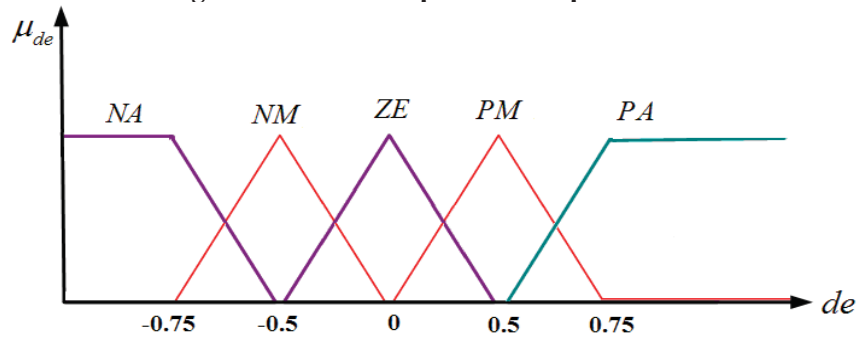


Fig. 6.15 Función de pertenencia para Delta Error

Las siguientes tablas indican el grado de pertenencia de cada una de las funciones:

Tabla 6.1 Funciones de Pertenencia para error

$e \leq -0.75$	$-0.75 < e \leq -0.5$	$-0.75 < e \leq 0$
$\mu_e(NA) = 1$	$\mu_e(NA) = -4e - 2$	$\mu_e(NA) = 0$
$\mu_e(NM) = 0$	$\mu_e(NM) = 4e + 3$	$\mu_e(NM) = -2e$
$\mu_e(ZE) = 0$	$\mu_e(ZE) = 0$	$\mu_e(ZE) = 2e + 1$
$\mu_e(PM) = 0$	$\mu_e(PM) = 0$	$\mu_e(PM) = 0$
$\mu_e(PA) = 0$	$\mu_e(PA) = 0$	$\mu_e(PA) = 0$
$0.5 < e \leq 0.75$	$0 < e \leq 0.5$	$e > 0.75$
$\mu_e(NA) = 0$	$\mu_e(NA) = 0$	$\mu_e(NA) = 0$
$\mu_e(NM) = 0$	$\mu_e(NM) = 0$	$\mu_e(NM) = 0$
$\mu_e(ZE) = 0$	$\mu_e(ZE) = -2e + 1$	$\mu_e(ZE) = 0$
$\mu_e(PM) = -4e + 3$	$\mu_e(PM) = 2e$	$\mu_e(PM) = 0$
$\mu_e(PA) = 4e - 2$	$\mu_e(PA) = 0$	$\mu_e(PA) = 1$

**Tabla 6.2 Funciones de Pertencia para Delta error**

$\Delta e \leq -0.75$	$0 < \Delta e \leq -0.5$	$-0.5 < \Delta e \leq 0$
$\mu_{de}(NA) = 1$	$\mu_{de}(NA) = -4de - 2$	$\mu_{de}(NA) = 0$
$\mu_{de}(NM) = 0$	$\mu_{de}(NM) = 4de + 3$	$\mu_{de}(NM) = -2de$
$\mu_{de}(ZE) = 0$	$\mu_{de}(ZE) = 0$	$\mu_{de}(ZE) = 2de + 1$
$\mu_{de}(PM) = 0$	$\mu_{de}(PM) = 0$	$\mu_{de}(PM) = 0$
$\mu_{de}(PA) = 0$	$\mu_{de}(PA) = 0$	$\mu_{de}(PA) = 0$
$0.5 < \Delta e \leq 0.75$	$0 < e \leq -0.5$	$\Delta e > 0.75$
$\mu_{de}(NA) = 0$	$\mu_{de}(NA) = 0$	$\mu_{de}(NA) = 0$
$\mu_{de}(NM) = 0$	$\mu_{de}(NM) = 0$	$\mu_{de}(NM) = 0$
$\mu_{de}(ZE) = 0$	$\mu_{de}(ZE) = -2de + 1$	$\mu_{de}(ZE) = 0$
$\mu_{de}(PM) = -4de + 3$	$\mu_{de}(PM) = 2de$	$\mu_{de}(PM) = 0$
$\mu_{de}(PA) = 4de - 2$	$\mu_{de}(PA) = 0$	$\mu_{de}(PA) = 1$

En la siguiente figura se muestra la tabla de doble entrada que describe las reglas de inferencia propuestas para el proceso de sedimentación:

**Tabla 6.3 Reglas Propuestas para obtención de la salida del Controlador.**

		<i>Error</i>				
		<i>NA</i>	<i>NM</i>	<i>ZE</i>	<i>PM</i>	<i>PA</i>
$\Delta Error$	<i>NA</i>	<i>NA</i>	<i>NA</i>	<i>NA</i>	<i>NM</i>	<i>ZE</i>
	<i>NM</i>	<i>NA</i>	<i>NM</i>	<i>NM</i>	<i>ZE</i>	<i>PM</i>
	<i>ZE</i>	<i>NA</i>	<i>NM</i>	<i>ZE</i>	<i>PM</i>	<i>PA</i>
	<i>PM</i>	<i>NM</i>	<i>ZE</i>	<i>PM</i>	<i>PM</i>	<i>PA</i>
	<i>PA</i>	<i>ZE</i>	<i>PM</i>	<i>PA</i>	<i>PA</i>	<i>PA</i>

#### D. Desfuzificación

Una vez evaluadas todas las reglas y obtenidos los conjuntos difusos de salida modificados, hay que realizar la agregación de todas las reglas para obtener un resultado único de la actuación de todas ellas, obteniéndose así el conjunto difuso de salida, asociado a la variable de salida como por ejemplo un máximo.

La entrada al bloque desdifusor es el conjunto difuso de salida, resultado del bloque de inferencia y la salida es un valor concreto de la variable de salida. Para obtener, a partir del conjunto difuso de salida que resulta de la agregación de todas las reglas, un resultado escalar, se aplican métodos matemáticos.

De lo anterior mencionado se tienen las siguientes operaciones lógicas:

$$\mu_{du}(NA) = \max \begin{pmatrix} \min(\mu_e(NA), \mu_{de}(NA)), \\ \min(\mu_e(NA), \mu_{de}(NM)), \\ \min(\mu_e(NA), \mu_{de}(ZE)), \\ \min(\mu_e(NM), \mu_{de}(NA)), \\ \min(\mu_e(ZE), \mu_{de}(NA)) \end{pmatrix} \quad (6.13a)$$

$$\mu_{du}(NM) = \max \begin{pmatrix} \min(\mu_e(PM), \mu_{de}(NA)), \\ \min(\mu_e(ZE), \mu_{de}(NM)), \\ \min(\mu_e(NM), \mu_{de}(ZE)), \\ \min(\mu_e(NA), \mu_{de}(PM)), \\ \min(\mu_e(NM), \mu_{de}(NM)) \end{pmatrix} \quad (6.13b)$$

$$\mu_{du}(ZE) = \max \begin{pmatrix} \min(\mu_e(PA), \mu_{de}(PA)), \\ \min(\mu_e(PM), \mu_{de}(PM)), \\ \min(\mu_e(ZE), \mu_{de}(ZE)), \\ \min(\mu_e(NM), \mu_e(PM)), \\ \min(\mu_e(NA), \mu_e(NA)) \end{pmatrix} \quad (6.13c)$$

$$\mu_{du}(PM) = \max \begin{pmatrix} \min(\mu_e(PA), \mu_{de}(NM)), \\ \min(\mu_e(PM), \mu_{de}(ZE)), \\ \min(\mu_e(ZE), \mu_{de}(PM)), \\ \min(\mu_e(NM), \mu_{de}(PA)), \\ \min(\mu_{de}(PM), \mu_{de}(PM)) \end{pmatrix} \quad (6.13d)$$

$$\mu_{du}(PA) = \max \begin{pmatrix} \min(\mu_e(PA), \mu_{de}(PA)), \\ \min(\mu_e(PA), \mu_{de}(PM)), \\ \min(\mu_e(PA), \mu_{de}(ZE)), \\ \min(\mu_e(PM), \mu_{de}(PA)), \\ \min(\mu_e(ZE), \mu_{de}(PA)) \end{pmatrix} \quad (6.13e)$$

Para escoger una salida concreta a partir de tanta premisa difusa, el método más usado es el del centroide, en el que la salida final será el centro de gravedad del área total resultante. Esta se aplica directamente al proceso:

$$u_{kq \text{ ó } km} = \frac{(2 \cdot \mu_{du}(PA) + \mu_{du}(PM) - \mu_{du}(NM) - 2 \cdot \mu_{du}(NA))}{(2 \cdot \mu_{du}(PA) + \mu_{du}(PM) + \mu_{du}(NM) + 2 \cdot \mu_{du}(NA) + \mu_{du}(ZE))} \quad (6.14)$$

## 6.2.4 SIMULACIÓN CONTROLADOR DIFUSO PARA EL ESPESADOR

### A. Control de Masa

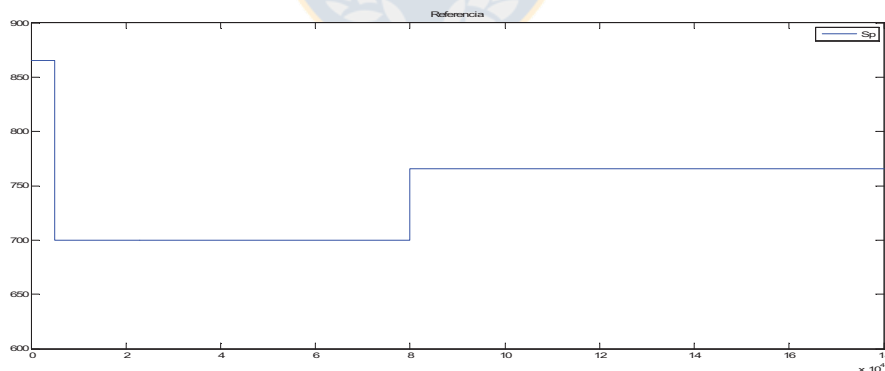
Al aplicar el control diseñado en la sección para el control de masa los resultados fueron los siguientes.

La referencia aplicada al controlador es la siguiente:

**Tabla 6.4 Referencia aplicada al Controlador de Masa.**

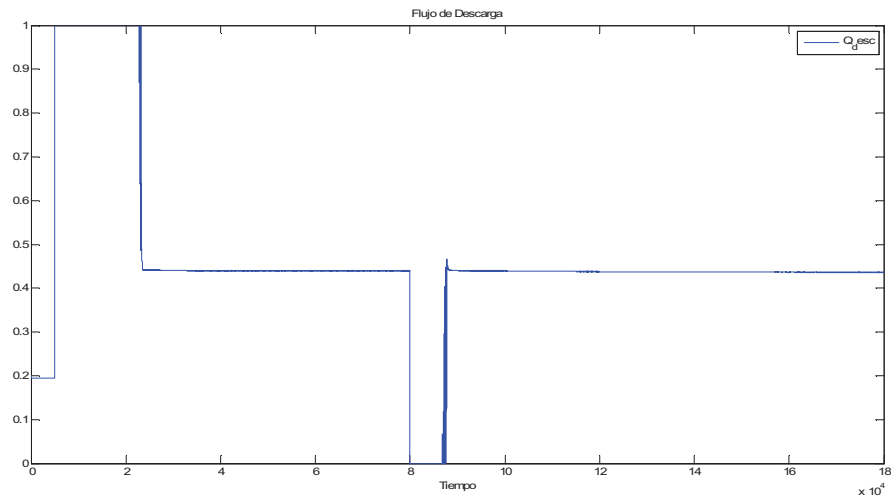
Parámetro	Valor
$SP_{masa}$	$= \begin{cases} M_{inicial} & \text{para } 0 < n < 5000 \quad [/\Delta t \cdot 60^2 \text{ hr.}] \\ 80,88 \% \cdot M_{inicial} & \text{para } 5000 < n < 80000 \quad [/\Delta t \cdot 60^2 \text{ hr.}] \\ 88,44 \% \cdot M_{inicial} & \text{para } 80000 < n < 180000 \quad [/\Delta t \cdot 60^2 \text{ hr.}] \end{cases}$
$Masa_{inicial}$	8,653966 $[x10^3 \text{ ton}]$
$floc$	5.5 $[gr / ton]$

El Set Point aplicado se grafica en la siguiente Figura:



**Fig. 6.16 Set Point aplicado al Control de Masa**

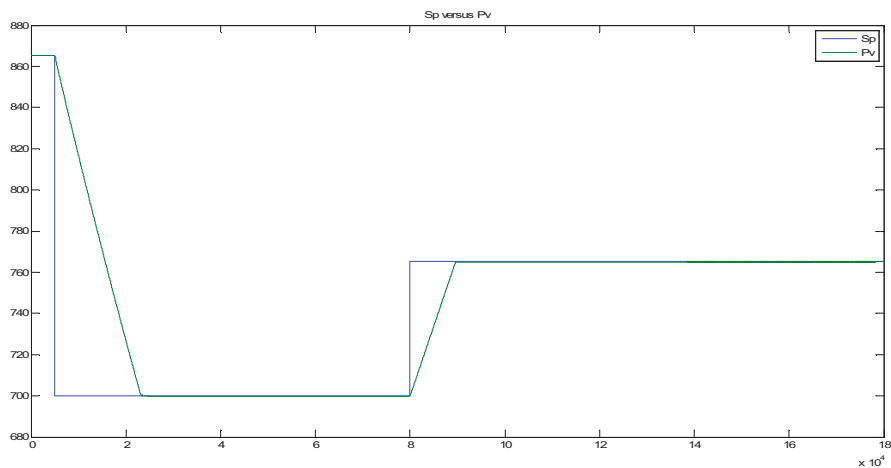
Al aplicar esta perturbación al controlador la salida, que sería el flujo de descarga actual de la siguiente forma:



**Fig. 6.17** Respuesta de la salida controlada Flujo de descarga

Como se puede ver en la figura anterior la “válvula de descarga” reacciona al instante en que se produce la perturbación, abriéndose completamente para alcanzar la disminución de masa, luego de ser alcanzada esta se mantiene en un valor fijo, logrando la estabilización del sistema. Luego al querer aumentar la masa en el instante 80000 (en paso), la salida disminuye drásticamente hasta conseguir la masa deseada, al conseguirla vuelve a estabilizarse.

La respuesta al control aplicado se muestra a continuación:

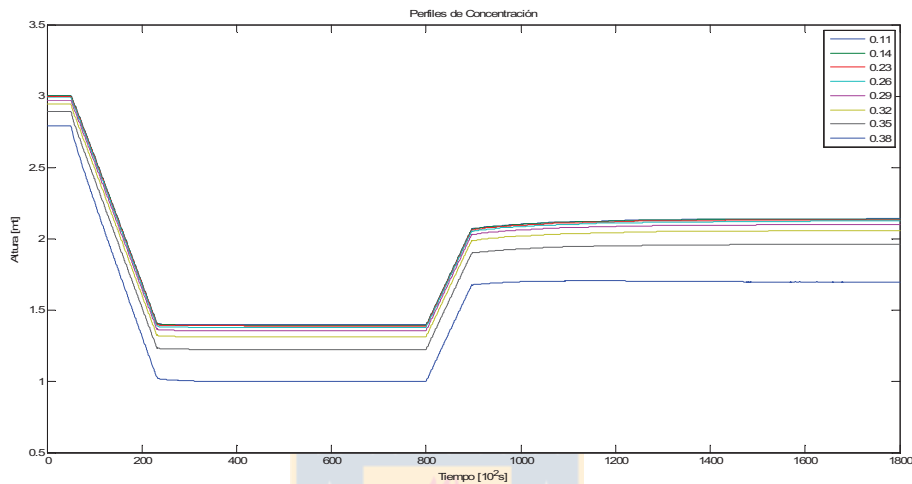


**Fig. 6.18** Respuesta de la salida controlada Flujo de descarga



La figura anterior muestra que respuesta al control de masa es de primer orden. Se puede inferir de esta dinámica que el sistema reacciona satisfactoriamente al control, acomodándose sin problemas a la referencia dada.

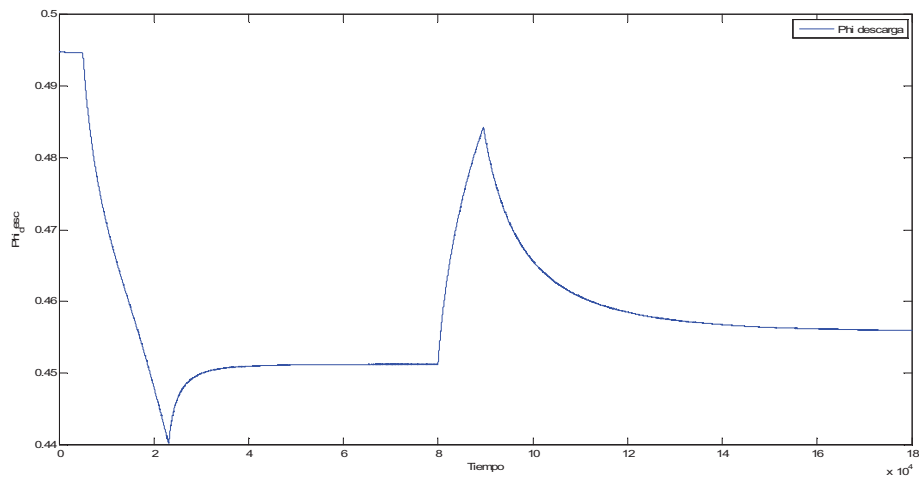
A continuación se muestra la dinámica de la concentración al aplicar las perturbaciones:



**Fig. 6.19 Perfil de Concentraciones producto de las perturbaciones**

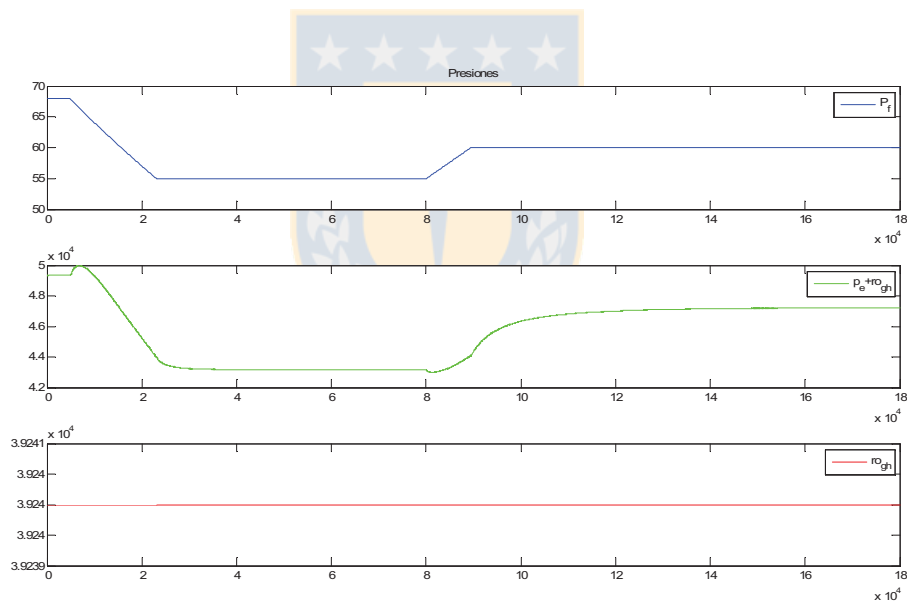
Como se puede observar la respuesta de las concentraciones al control responde establemente, siguiendo una dinámica continua a lo largo del proceso, respondiendo satisfactoriamente a las perturbaciones aplicadas.

Indirectamente el control de masa controla la concentración de descarga, la cual tiene un transiente al aplicar la referencia, pero estabiliza rápidamente. Esto se infiere de la siguiente respuesta:



**Fig. 6.20 Respuesta de la Concentración de Descarga**

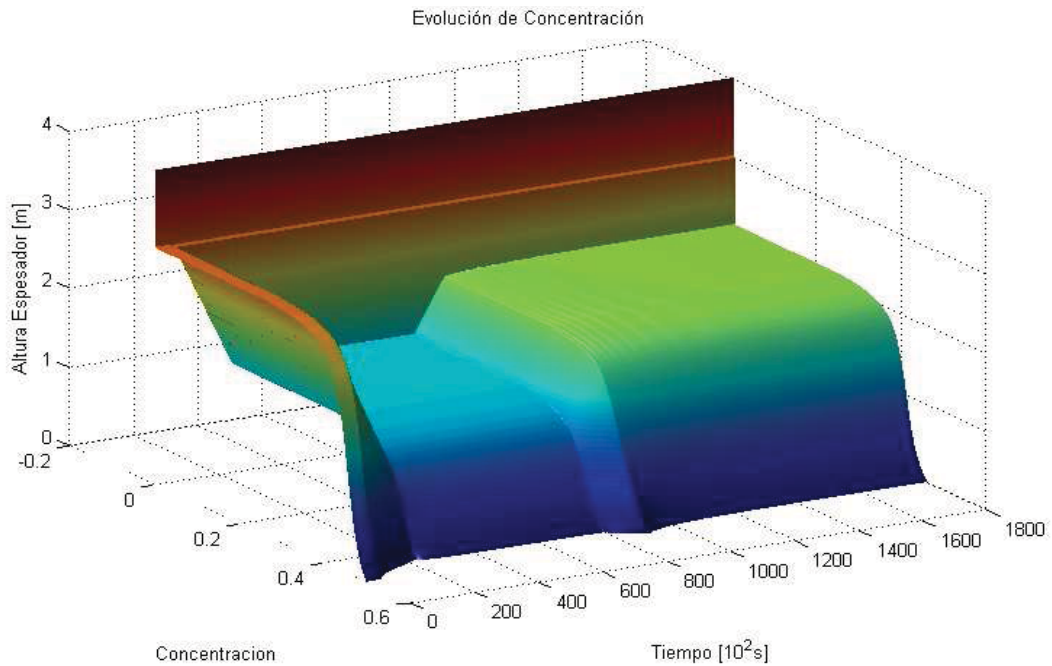
La presión también se ve afectada de la misma forma que la dinámica de la masa, esta se muestra a continuación:



**Fig. 6.21 Presiones existentes en el proceso**

**(a)** Presión final **(b)** Presión de Poros en Exceso **(c)** Presión hidrostática.

Finalmente se muestra la dinámica del espesor, el cual se comporta suavemente frente a las perturbaciones ocasionadas. Recordemos que el proceso parte de un estado estacionario antes de aplicar el control:



**Fig. 6.22 Perfil completo de la Concentración frente al Control de Masa**

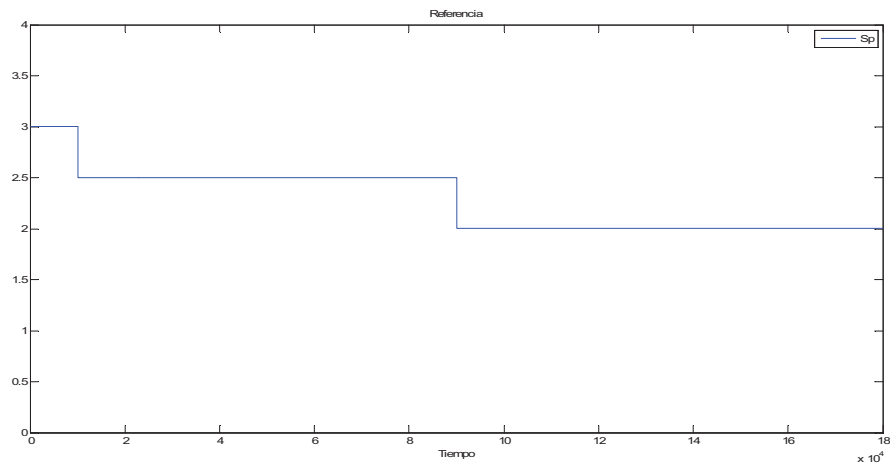
### B. Control de Altura

Se aplica el control diseñado en la sección anterior al controlador de altura del espesador. Las perturbaciones aplicadas al controlador se describen en la siguiente tabla:

**Tabla 6.5 Referencia aplicada al Controlador de Altura.**

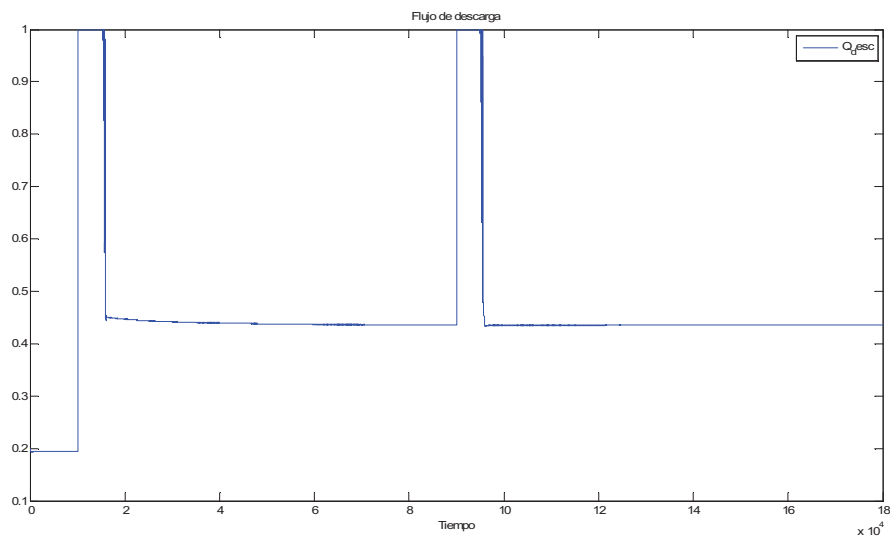
Parámetro	Valor
$SP_{altura}$	$= \begin{cases} h_{inicial} & \text{para } 0 < n < 10000 \quad [/\Delta t \cdot 60^2 \text{ hr.}] \\ 83.3\% \cdot h_{inicial} & \text{para } 10000 < n < 90000 \quad [/\Delta t \cdot 60^2 \text{ hr.}] \\ 66.6\% \cdot h_{inicial} & \text{para } 90000 < n < 180000 \quad [/\Delta t \cdot 60^2 \text{ hr.}] \end{cases}$
$H_{inicial}$	1[ <i>mt</i> ]
<i>floc</i>	5[ <i>gr / ton</i> ]

El Set Point aplicado se muestra en la siguiente Figura:



**Fig. 6.23 Set Point aplicado al control de Altura**

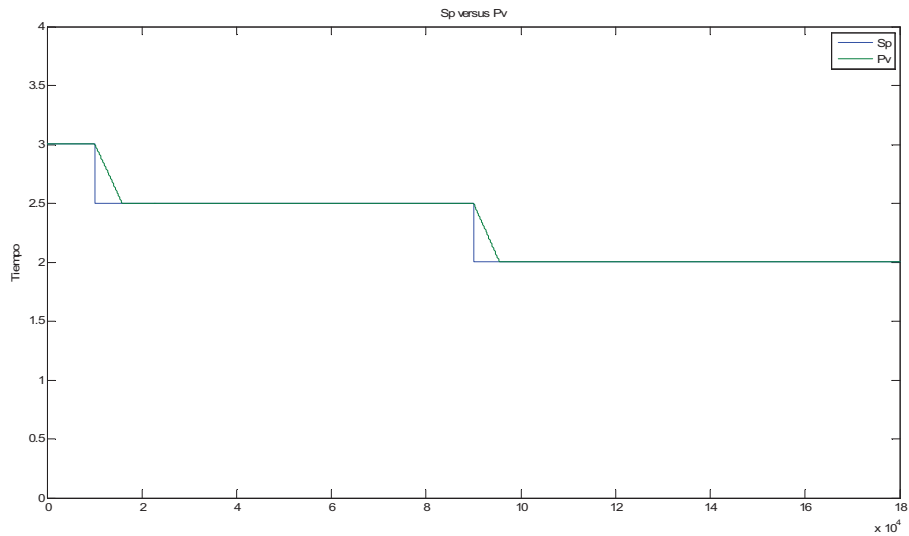
La respuesta de la variable de salida del controlador es la siguiente



**Fig. 6.24 Respuesta de la salida controlada Flujo de descarga**

Se puede observar en la figura anterior que el flujo de descarga sigue la dinámica del controlador, accionándose al percibir la perturbación, para luego estabilizarse en cierto valor.

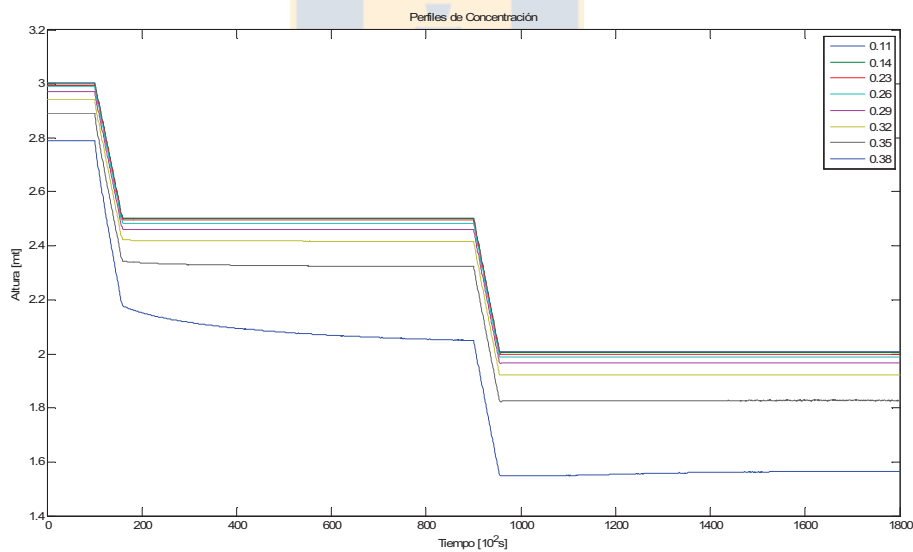
Frente a la referencia la variable a manipular tiene una respuesta de primer orden, siguiendo sin problemas la variable de proceso a la referencia:



**Fig. 6.25 Set point versus Referencia**

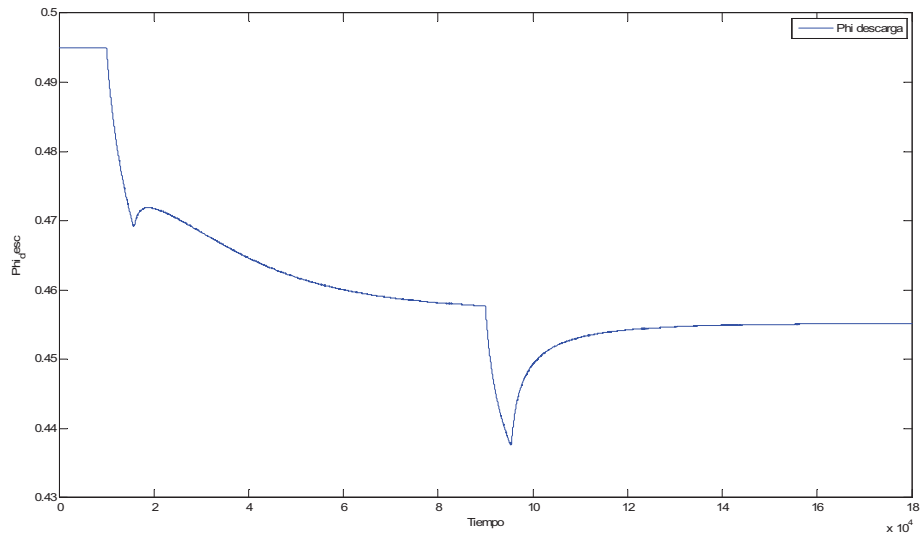
Se puede inferir de esta dinámica que el sistema reacciona satisfactoriamente al control, acomodándose sin problemas a la referencia dada.

Los perfiles de las perturbaciones se muestran a continuación:



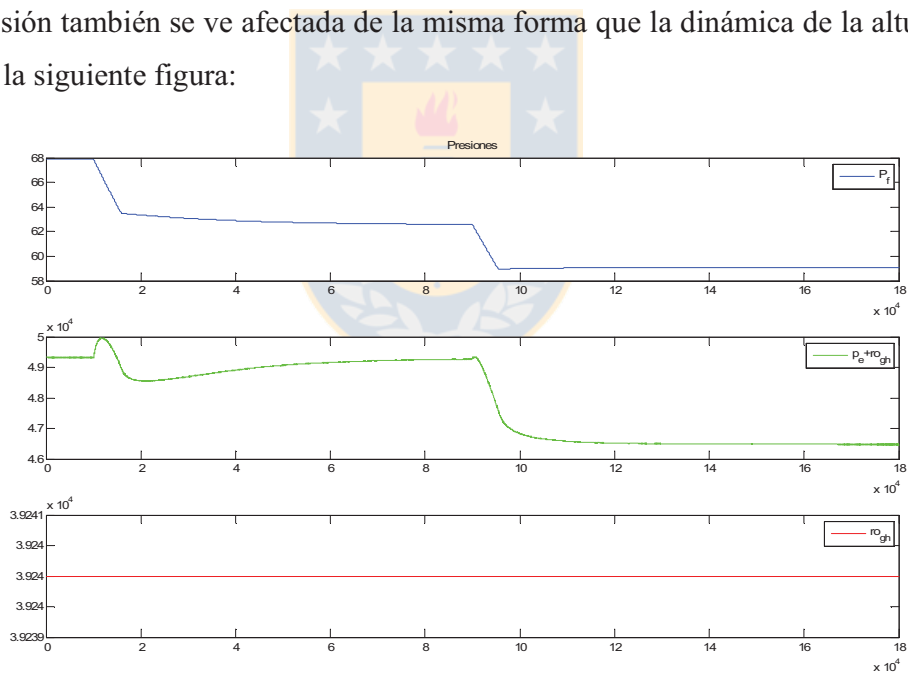
**Fig. 6.26 Perfil de Concentraciones producto de las perturbaciones**

Al igual que el control de masa, el control de la altura del espesador indirectamente controla la concentración de descarga, la cual tiene un transiente al aplicar la referencia, pero estabiliza rápidamente, aumentando como disminuyendo la referencia:



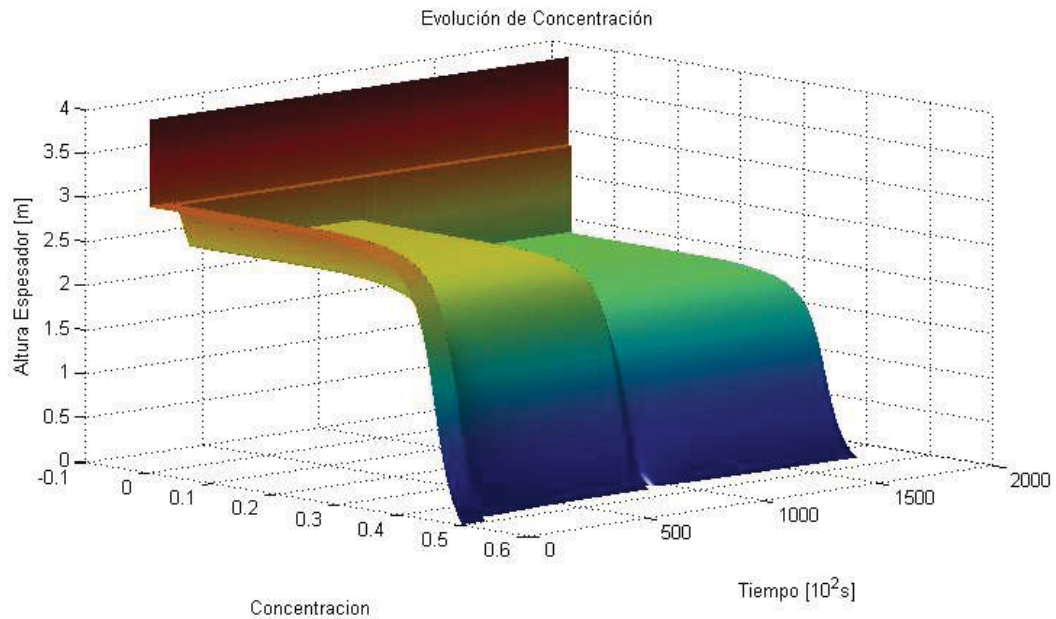
**Fig. 6.27 Respuesta de la Concentración de Descarga**

La presión también se ve afectada de la misma forma que la dinámica de la altura, este perfil se muestra en la siguiente figura:



**Fig. 6.28 Presiones existentes en el proceso**  
**(a)** Presión final **(b)** Presión de Poros en Exceso **(c)** Presión hidrostática.

Finalmente se muestra la dinámica del espesador al aplicar el control de la altura, reaccionando satisfactoriamente a las perturbaciones. Al igual que en el control de mas el espesador inicialmente se encuentra en estado estacionario, de ahí es que el comienzo de el perfil mostrado en la figura se encuentra estable:



**Fig. 6.29 Perfil completo de la Concentración frente al Control de Altura**

### C. Control de Presión

Para el caso de la presión del fluido no es medible ya que solamente parte de la superficie y volumen del lecho poroso está ocupado por cada componente, la variable experimental asociada al flujo en el lecho poroso es la presión de poros medible con un manómetro. Pero los procesos que se desarrollan en sistemas particulados dependen de la presión en exceso que esta sobre la presión hidrostática denominada  $p_e$ , ya que a esta presión de equilibrio el proceso llega a su fin.

En el caso de la presión en el componente sólido. Cuando una fuerza compresiva se aplica a un medio poroso a concentraciones mayores a la crítica, el esfuerzo total es soportado inmediatamente por el fluido que llena los intersticios entre las partículas aumentando la presión de los poros. El gradiente de presión establecido en el agua que llena los poros y el exterior del sedimento, esto es la presión de poros en exceso, inicia el flujo de agua desde el sedimento hacia fuera de él. Este flujo es acompañado por una disminución de la presión de poros y un traspaso progresivo del esfuerzo al esqueleto sólido (Esfuerzo efectivo del sólido  $\sigma_e$ ).

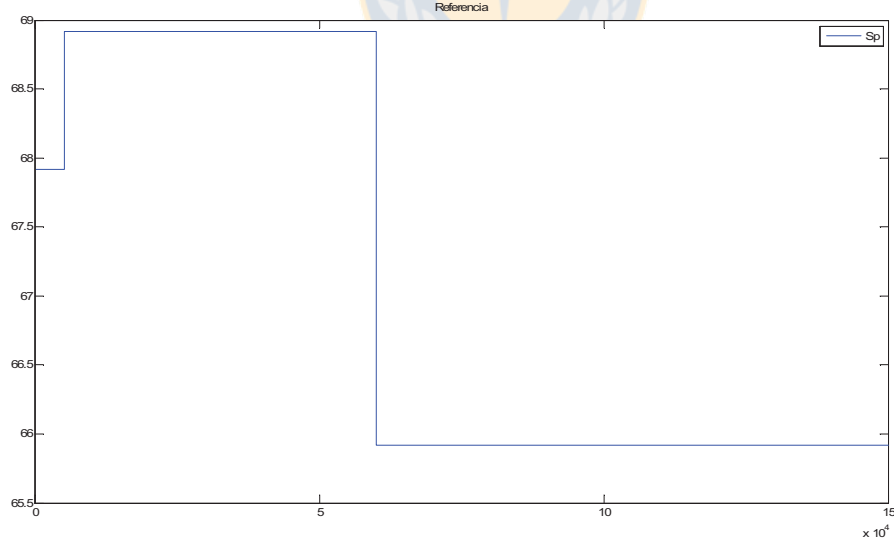
Para el caso del balance de momentum lineal se puede deducir las ecuaciones que caracterizan la Presión de poros en exceso (3.24) y la (3.10), (3.11) presiones utilizada para el control.

En el caso de control de presión, la acción de control actúa sobre la válvula de descarga, la referencia aplicada se presenta a continuación:

**Tabla 6.6 Referencia aplicada al Controlador de Presión.**

Parámetro	Valor
$SP_{presion}$	$= \begin{cases} P_{inicial} & \text{para } 0 < n < 5000 \quad [/\Delta t \cdot 60^2 \text{ hr.}] \\ P_{inicial} + 1,4772\% \cdot P_{inicial} & \text{para } 5000 < n < 60000 \quad [/\Delta t \cdot 60^2 \text{ hr.}] \\ 97,0552\% \cdot P_{inicial} & \text{para } 60000 < n < 100000 \quad [/\Delta t \cdot 60^2 \text{ hr.}] \end{cases}$
$P_{inicial}$	67.9163[atm]
$floc$	5,5[gr / ton]

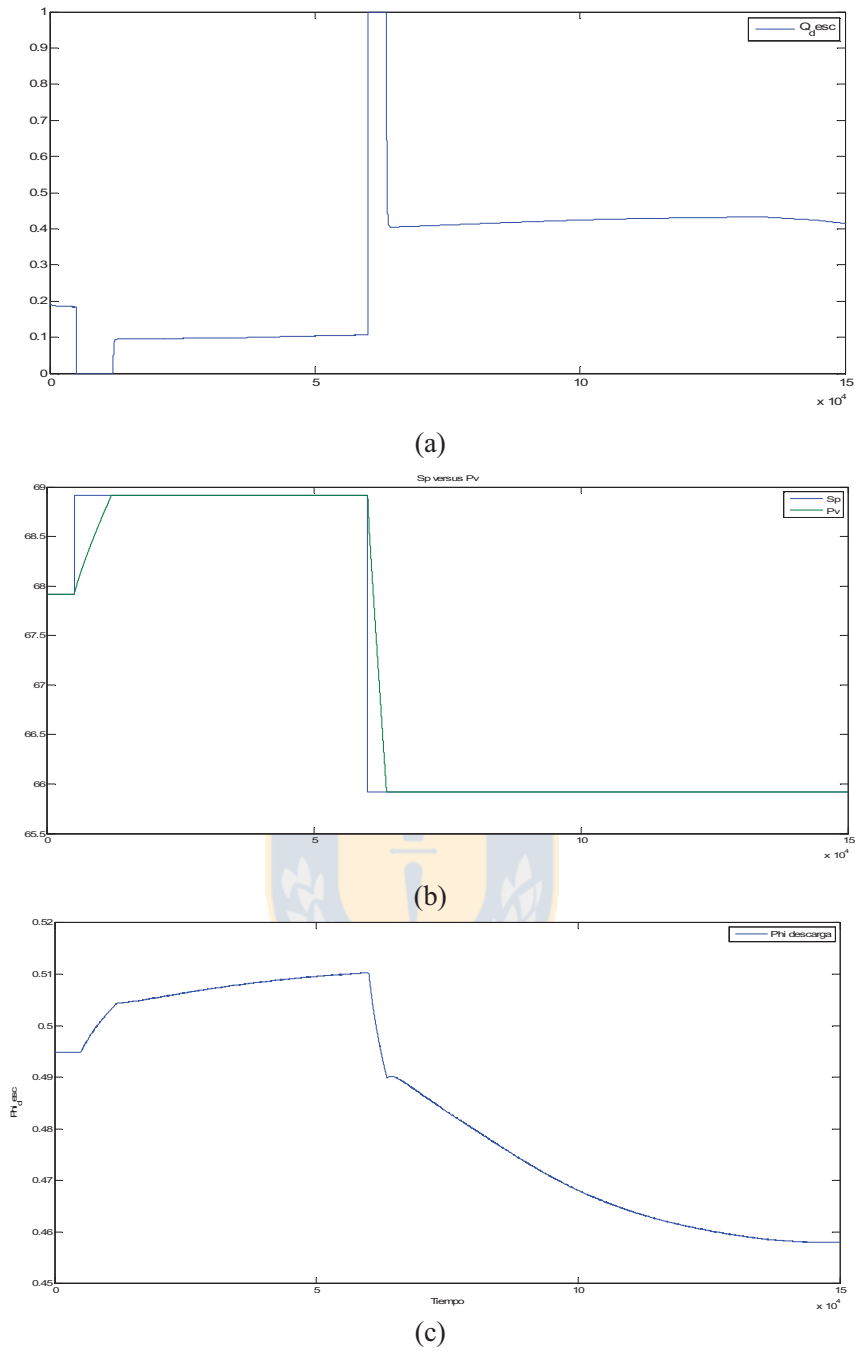
El Set Point aplicado se muestra en la siguiente Figura:



**Fig. 6.30 Set Point aplicado al control de Presión**

La respuesta del flujo de descarga al control:





**Fig. 6.31 Respuesta al Control de Presión**

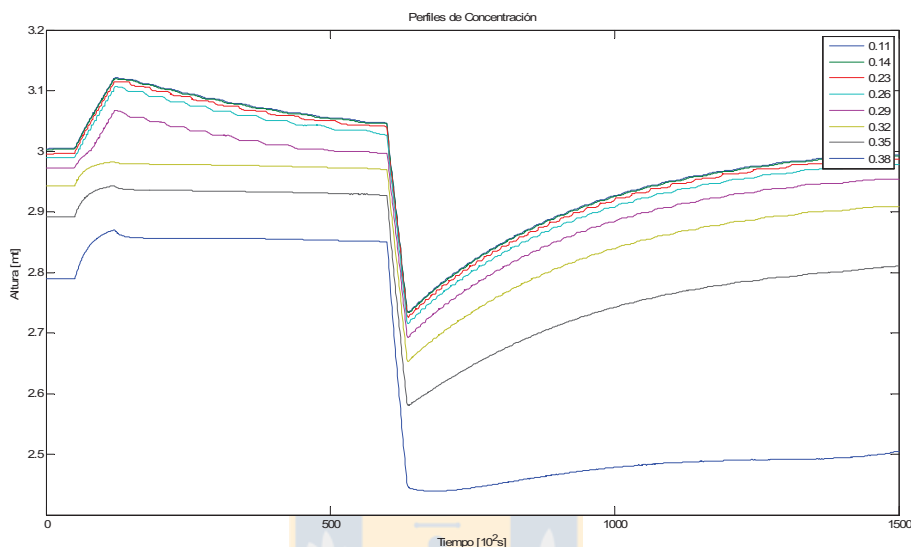
(a) Respuesta del Flujo de descarga (b) Set point versus Referencia (c) Respuesta de la Concentración de Descarga

Se puede observar en la figura anterior que el flujo de descarga sigue la dinámica del controlador, accionándose al percibir la perturbación, para luego estabilizarse en cierto valor.

Se puede inferir de esta dinámica que el sistema reacciona satisfactoriamente al control, acomodándose sin problemas a la referencia dada.

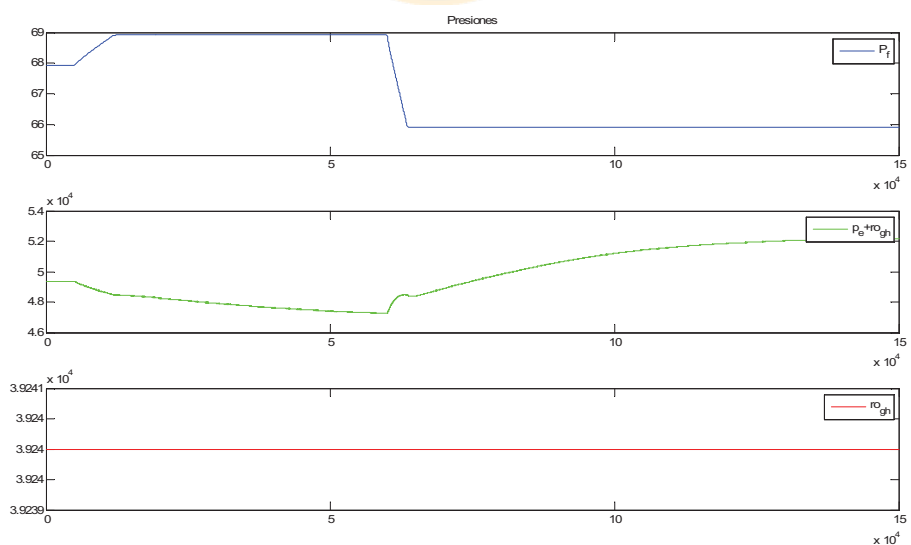
Al igual que el control de masa, el control de la altura, el control de presión del espesador indirectamente controla la concentración de descarga.

Los perfiles de las perturbaciones se muestran a continuación:



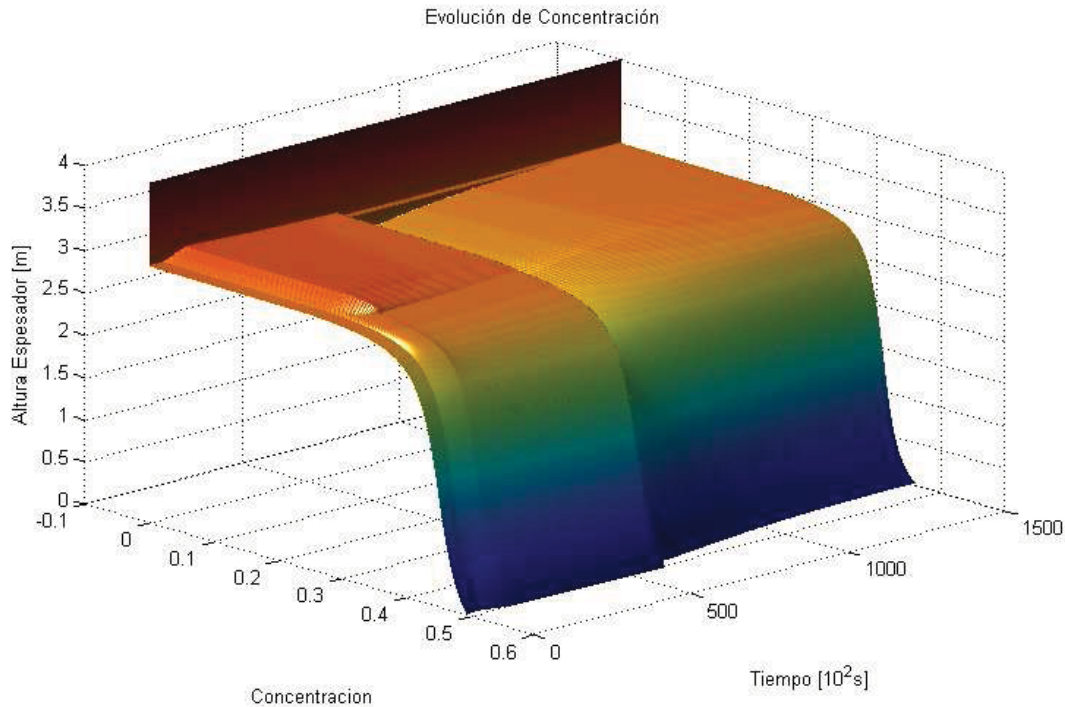
**Fig. 6.32 Perfil de Concentraciones producto de las perturbaciones**

La dinámica de la presión se muestra a continuación:



**Fig. 6.33 Presiones existentes en el proceso**  
**(a)** Presión final **(b)** Presión de Poros en Exceso **(c)** Presión hidrostática.

Finalmente se muestra la dinámica del espesor al aplicar el control de Presión, reaccionando satisfactoriamente a las perturbaciones:



**Fig. 6.34 Perfil completo de la Concentración frente al Control de Presión**

Se puede concluir que si bien el control de presión actúa eficazmente, aun quedan muchas dudas de la veracidad de las ecuaciones que constituyen tanto el control como la dinámica de la presión en el fondo, como por ejemplo si la velocidad con que caen las partículas tiene algún efecto en la masa del tanque considerándola ésta como una fuerza.

Como experimento se simuló una “bolita” (simulando una partícula), cayendo en un recipiente, considerando la ecuación que muestra la dinámica de sedimentación gravitacional:

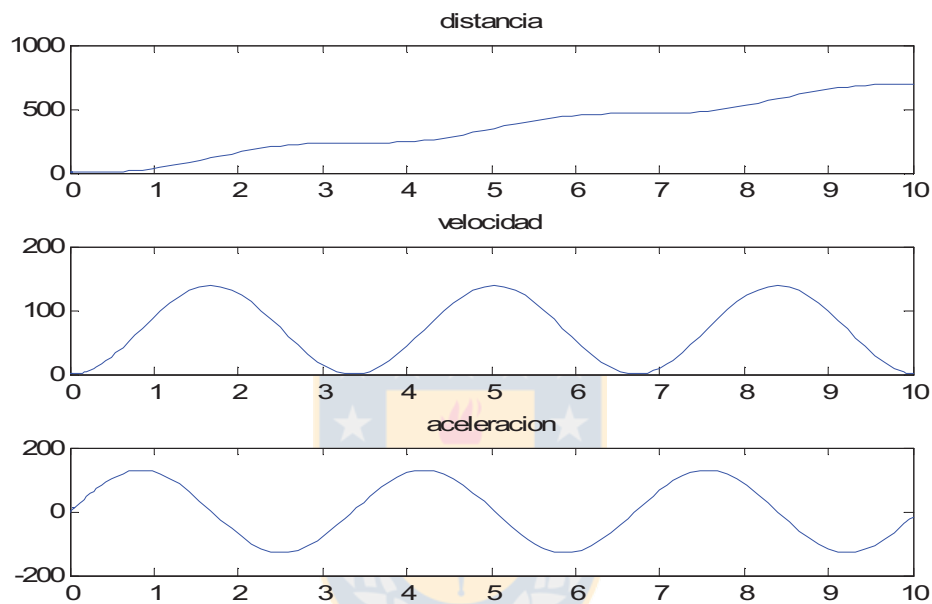
$$\dot{v}(t) + \frac{1\mu_v}{18\rho_p d^2} v(t) - \frac{\Delta\rho}{\rho_p} g = 0 \quad (6.15)$$

Donde

- $\mu_v$  es la viscosidad del liquido, en este caso 0.01 g/cm-s (a T° ambiente 20° C).
- $d$  es el diámetro de la partícula en este caso de la bola  $d = 2,2[cm]$ .

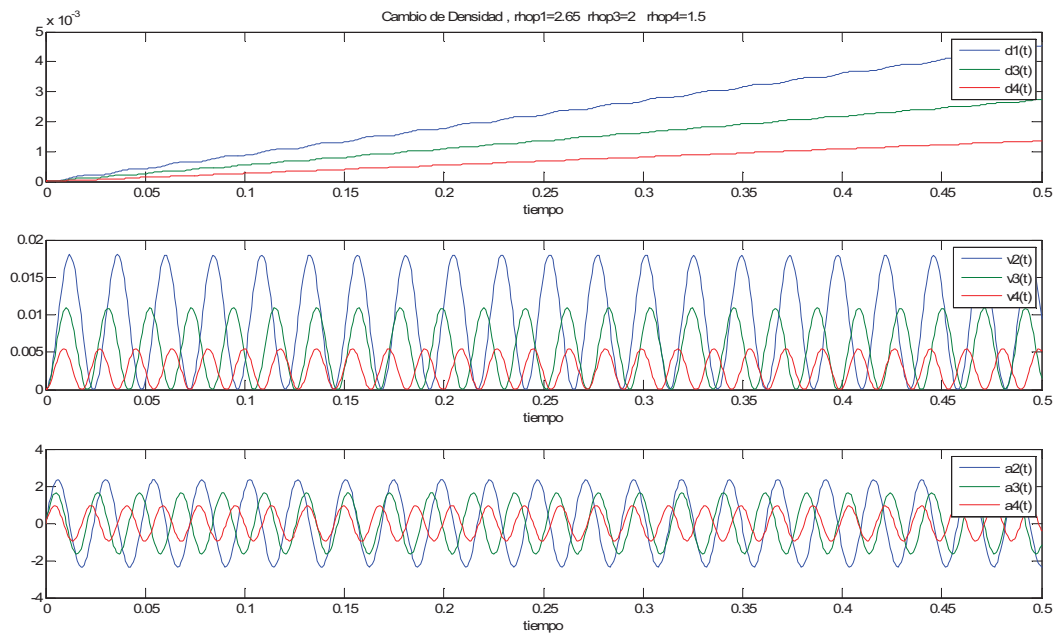
- $\rho_p$  es la densidad del solido  $\rho_p = m/V [g/cm^3]$ , con  $V = (\pi/6) \cdot d^3$ .
- $g$  aceleración de gravedad.

Luego de resolverse la ecuación anterior por el método Runge Kutta, se obtiene la velocidad Terminal de sedimentación, y la aceleración respectiva:



**Fig. 6.35 Solución a la ecuación (6.15)**

Siguiendo el mismo procedimiento se determinaron las dinámicas de sedimentación para partículas con distintas densidades. Como era de esperarse dependiendo de la densidad de la partícula la velocidad de caída dentro del recipiente acelera o es más lenta:



**Fig. 6.36 Solución a la ecuación (6.15)**  
 (a)  $(\rho_1 = 2.65, \rho_2 = 2, \rho_3 = 1.5) [gr / cm^3]$

Aquí se inician una serie de cuestionamientos respecto al efecto que la partícula tiene sobre la dinámica del espesador, porque teóricamente y demostrado en la figura anterior, la partícula tiene una cierta aceleración que en su forma oscila, es decir se detiene y acelera. La pregunta es si a escala microscópica se acentúa este efecto, a escala macroscópica este efecto sería lo suficientemente importante ( en la velocidad o presión de fondo ) como para considerarlo en la dinámica del proceso de sedimentación y poder realizar controles mas precisos en base a este análisis.

## Capítulo 7. Conclusiones

---

### 7.1. SUMARIO

En esta Memoria de Título se realizó un estudio exhaustivo del proceso de Espesamiento, se considero la teoría de mezclas la base de toda la modelación matemática propuesta. Se consideró el método propuesto por Bürguer R. basado en el desglose de la Función EO. El detalle que produjo más trabajo fue el hecho de que las ecuaciones que rigen este proceso son de naturaleza altamente no lineal y su comportamiento no se puede tratar con las teorías de la matemática clásica, por lo que la búsqueda de los métodos utilizados no fue de fácil acceso. Respecto a la programación de la dinámica del proceso, se utilizó la operación vectorial como solución a las funciones involucradas, ya que el consumo computacional era altísimo.

### 7.2. CONCLUSIONES

Si bien es posible mejorar el método de resolución utilizado en esta tesis, los resultados fueron bastante satisfactorios. Es debido mencionar que para obtener un resultado del comportamiento real del proceso hay varios trabajos futuros que pueden incorporarse, como es la incorporación del efecto de las rastras, roce de las paredes, o cambios en los parámetros del material o el material mismo etc. o sea estamos hablando de que este modelo fue simulado y controlado considerando el proceso en condiciones ideales. Pero en definitiva la respuesta de la modelación fue satisfactoria.

La presión de poros y final analizada responden a dinámicas que son las previstas, el comportamiento de esta variable es similar a las variables de concentración, o masa del espesador frente a las perturbaciones aplicadas.

Las respuestas de los controladores son respuestas de primer orden, la dinámica del proceso, si bien temporalmente es lenta, responde satisfactoriamente a las perturbaciones.

En definitiva, el modelo implementado en condiciones ideales se comporta establemente, esto fue corroborado tanto en el control como en las pruebas en lazo abierto aplicadas al Espesador Clarificador. El proceso naturalmente frente a cambios responde en primer lugar con un transiente, estabilizándose rápidamente hasta obtener un estado estacionario, teóricamente lo descrito en las etapas de modo batch y continuo se cumplen en plenitud y el espesador logra la interfaz agua suspensión.

De la solución estado estacionario se puede inferir que la dinámica de este material no es muy flexible a cambios en la dosis del floculante, llegando a un estado en que la adición de este no surge el efecto que se desea. Por lo tanto la función de densidad de flujo de Kynch es una función fundamental en el proceso de sedimentación, recordemos que esta función es la función que representa el material utilizado. Otra variable fundamental en el proceso y sobretodo el control es el flujo de descarga, como se pudo demostrar, los cambios en el flujo de descarga producen cambios altamente importantes en la variable masa y la altura del espesador, corroborando así su alto grado de acoplamiento entre estas variables.

El mayor grado de complejidad de estudio de este proceso son las ecuaciones que rigen el proceso de sedimentación, ya que contiene tramos no lineales, y las ecuaciones de conservación incorporadas generalmente son discontinuas, por lo que no es posible tratar el modelo matemático como una ecuación estrictamente parabólica, o estrictamente hiperbólica, se debe hacer una análisis por tramos de las soluciones posibles para las regiones continuas y que las soluciones tengan admas significado físico.

La implementación del simulador del modelo permite la clara comprensión y demostración de las etapas involucradas en el proceso. Se visualizan claramente las dinámicas de las variables del proceso, como por nombrar algunas, altura de sedimento, perfiles de concentración, ingreso de floculante, flujo de descarga, etc.

Con la estrategia de Control Difuso (FLC) los resultados obtenidos frente a las diferentes pruebas que se realizaron fueron satisfactorios.

Si bien, con la estrategia de control FLC se logran mejores acciones de control, el inconveniente que se genera es que se requiere de un conocimiento previo del sistema y del comportamiento de cada una de las variables involucradas en él.

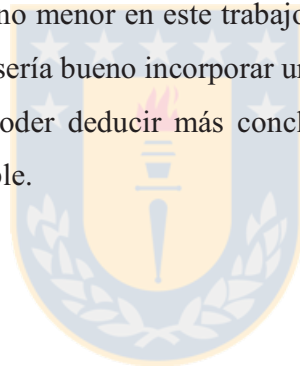
### **7.3. TRABAJOS FUTUROS**

Sin duda la implementación de este algoritmo puede perfeccionado, incorporando el efecto de variables no menos importantes en el modelo del proceso para obtener resultados que se acerquen más a lo real, como es el efecto de las rastras en el fondo del espesador, la fricción de las paredes. También podría realizarse un análisis considerando otro tipo de diseño del espesador, es decir, un espesador de área variable, de este análisis se podría deducir el efecto en la concentración de descarga, la velocidad de asentamiento de la mezcla, ya que por ejemplo al tener un espesador de

área variable la velocidad de bajada del sedimento aumentaría, ese efecto podría producirse con un espesador de área variable. También sería interesante obtener los resultados de otro tipo de material como mezcla, de esta forma se podrían variar los parámetros del espesador como sería el  $u_{\infty}$  o la concentración inicial, nombrar algunas. Al cambiar el tipo de material podría estudiarse con mayor detención el efecto del floculante en la mezcla, cambiando así la solución estado estacionario, el perfil completo de la concentración y dando la posibilidad de mayores rangos de control del Espesador.

Sin duda al realizarse un modelo con mayor flexibilidad, incorporando mas posibles variables que afectan la dinámica del espesador, las ecuaciones matemáticas deducidas de este análisis serian aun de mas complejidad, por lo tanto los análisis matemáticos futuros tendrían que seguir la misma línea seguida hasta el momento, siempre considerando otras posibilidades más sencillas de solución del problema.

La presión es una dinámica no menor en este trabajo, las dinámicas aquí expuestas se basan en un análisis teórico de la presión, sería bueno incorporar un análisis más exhaustivo de la dinámica de la presión del espesador para poder deducir más conclusiones y poder realizar algún tipo de tratamiento o control con esta variable.





## Bibliografía

- [1] Concha, F. and Bustos, M.C., 1991. Settling velocities of particulate systems, 6.Kynch. sedimentation processes: batch settling, Int. J. Mineral Process., 32, 193-212.
- [2] Ricardo Esteban Ruiz Baier, Métodos de Multi-resolución y su Aplicación a un Modelo de Ingeniería, Marzo 2005, UNIVERSIDAD DE CONCEPCION, CONCEPCION, CHILE.
- [3] Concha, F., Manual de Filtración y Separación, Centro de Imagen Corporativa, cettem, Concepción, 2001.
- [4] R. Bürger, S. Evje, K.H. Karlsen, On Strongly Degenerate Convection-Diffusion Problems Modelling Sedimentation-Consolidation Processes, J. Math. An. & App. 247,pp. 517-556, (2000).
- [5] M. Pérez, R. Font, C. Pastor, A mathematical model to simulate batch sedimentation with compression behavior, Comp. Chem. Eng., Vol. 22-11, pp. 1531-1541,(1998).
- [6] A. Coronel, F. James, M. Sepúlveda, Numerical identification of parameters for a model of sedimentation processes, Inverse Problems 19, pp. 951-972 (2003).
- [7] R. Bürger, W.L. Wendland, F. Concha, Model equations for gravitational sedimentation-consolidation processes, Z. Angew. Math. Mech. 80, pp. 79-92 (2000).
- [8] R. Bürger, K.H. Karlsen, J.D. Towers, Mathematical model and numerical simulation of the dynamics of flocculated suspensions in clarifier-thickeners, Chem. Eng. Journal 111 pp. 119-134 (2005).
- [9] R. Bürger, A. Garcia, K.H. Karlsen, J.D. Towers, On an extended clarifier- thickener model with singular source and sink terms, Euro. Jnl of Applied Mathematics vol.17, pp. 257-292, (2006).
- [10] Concha, F. and Bustos, M.C., 1992. Settling velocities of particulate systems, 7.Kynch sedimentation processes: continuous thickening, Int. J. Mineral Process., 34, 33-51.
- [11] F. Concha, M.C. Bustos, Settling velocities of particulate systems. Part 6. Kynch sedimentation processes: batch settling, Int. J. Mineral Processes. v. 32, pp. 193-212 (1991).
- [12] Página Prof. José R. Espinoza C., <http://www2.udec.cl/jose.espinoza/>

- [13] R. Bürger, J.J.R. Damasceno, K.H. Karlsen, A mathematical model for batch and continuous thickening of flocculated suspensions in vessels with varying cross-section Settling velocities of particulate systems, *Int. J. Miner. Process.* 73 (2004).
- [14] P. Garrido, R. Burgos, F. Conchab,\*, R. Bürger, Settling velocities of particulate systems: 13. A simulator for batch and continuous sedimentation of flocculated suspensions, *Int. J. Miner. Process.* 73 (2004).
- [15] Daniel Lovera, Amelia Coronado, Vladimir Arias, Janet Quiñones, Luis Puente, Jhonny Herrera Carlos Malpartida, Jorge Diego, Orlando Ipanaque, Pedro López, MODELIZACIÓN Y SIMULACIÓN DE PROCESOS METALÚRGICOS: FLOTACIÓN, FILTRACIÓN, LIXIVIACIÓN Y ESPESAMIENTO, *Revista del Instituto de Investigación FIGMMG Universidad Nacional Mayor de San Marcos Vol. 8, N.º 15, 19-24 (2005)*
- [16] Oscar Rodrigo Muñoz Guzmán. “Estudio comparativo de Estrategia de Control para espesamiento”, Memoria de Título, Universidad de Concepción, Concepción, Abril de 2008.
- [17] Adolfo Javier Grillo Queirolo. “Simulación y Control de un Espesador de Relave”, Memoria de Título, Universidad de Concepción, Concepción, Junio del 2000.
- [18] Edison Filidor Osses Lepin “Simulación de Estrategias de Control para un Espesador de Relave,” Título de Memoria, Universidad de Concepción, Concepción, Abril del 2002.
- [19] Katia P. Carrasco D. “Diseño e Implementación de un Instrumento para la Medición de Velocidad de Sedimentación en Espesadores Industriales”, Memoria de Título, Universidad de Concepción, Concepción, Diciembre de 2003.
- [20] Daniel Lovera Davila & Ing. Alfredo Palominio Infante “Modelacion de Proceso del Espesador”, Artículo de Investigación, UNMSM, Lima, Diciembre de 1999
- [21] “Equipos y Procesos”, [www.eralgroup.com](http://www.eralgroup.com).
- [22] Aníbal Coronel Pérez, ESTUDIO DE UN PROBLEMA INVERSO PARA UNA ECUACION PARABOLICA DEGENERADA CON APLICACIONES A LA TEORIA DE LA SEDIMENTACION, Memoria de Título, Universidad de Concepción, concepción, 2004.