



Universidad de Concepción
Dirección de Postgrado
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Programa de Doctorado en Ciencias Físicas

**ACERCA DE CUERDAS Y P-BRANAS NEGRAS EN
RELATIVIDAD GENERAL Y EN PRESENCIA DE
POTENCIAS ALTAS DE LA CURVATURA**

Tesis para optar al grado académico
de Doctor en Ciencias Físicas

por

Carla Loreto Henríquez Baez

Director de Tesis : Dr. Julio Eduardo Oliva Zapata

Comisión : Dr. Adolfo Cisterna Roa

Dr. Fabrizio Canfora Tartaglia

Agosto, 2021

Concepción-Chile



© 2021, Carla Loreto Henríquez Baez

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento.

A mi madre



Agradecimientos

Por haber sido una parte importante en esta etapa en la cual he llevado a cabo mis estudios de doctorado, debo agradecer a muchas personas e instituciones quienes de una u otra forma han contribuido.

A mi familia. A Jacqueline, Camila y Cristóbal, quienes siempre han sido un apoyo fundamental. También a Luis, quien ha sido mi compañero durante estos años.

De mi paso por la Universidad de Concepción, a Marcela y Aldo por acogerme, a Sebastián por siempre compartir su conocimiento, a Karen y Carlos por su valiosa amistad.

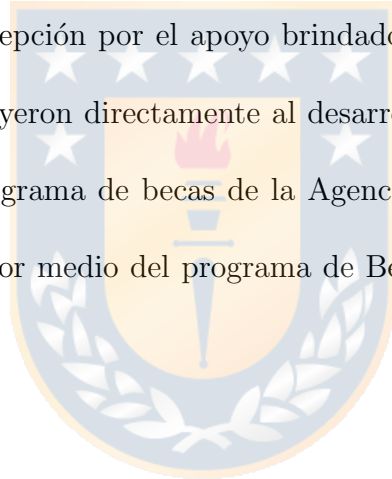
Agradezco al Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas por acogerme durante estos años y a todas las personas que forman parte de él. En especial quiero agradecer a los profesores Guillermo Rubilar y Patricio Salgado por sus maravillosas e inspiradoras clases y el apoyo brindado. Debo agradecer a Soledad Daroch, quien con su diligencia y disposición me salvó cada vez que lo necesite.

Al profesor Fabrizio Canfora, debo agradecer su buena disposición hacia mi siempre, el conocimiento y las lúdicas conversaciones compartidas. Al profesor

Adolfo Cisterna, por las colaboraciones, consejos y la energía transmitida en esta última etapa. Agradezco a ambos además la revisión de esta tesis.

Finalmente, quiero agradecer a mi director de tesis, Doctor Oliva, quien desde el inicio de la licenciatura y durante mis estudios de doctorado, ha sido una fuente de inspiración y motivación. Su ayuda y guía han sido fundamentales en mi formación como investigadora. Muchas gracias profesor.

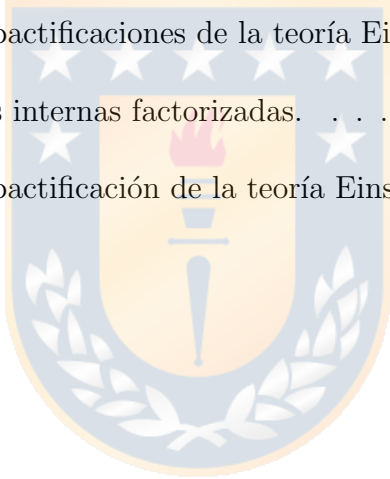
Debo agradecer además al departamento de Física de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas y al programa de Doctorado en Ciencias Físicas de la Universidad de Concepción por el apoyo brindado para asistir a eventos y actividades que contribuyeron directamente al desarrollo de esta tesis. Esta tesis se realizó gracias al programa de becas de la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) por medio del programa de Beca ANID Doctorado Nacional 2017 (21171394).



Índice general

Índice de figuras	ix
Introducción	1
1. Teoría de Relatividad General	7
1.1. Gravedad en cuatro dimensiones	7
1.1.1. Soluciones de Agujeros Negros	9
1.2. Gravedad en más dimensiones	16
1.2.1. Agujeros negros en más dimensiones	16
1.2.2. Estabilidad de cuerdas negras en AdS	20
2. Modificando Relatividad General en más dimensiones	31
2.1. Teoría de Lovelock	32
2.1.1. Agujeros negros en la teoría de Lovelock	33
2.2. Relatividad General a partir de la Gravedad de Einstein-Gauss- Bonnet	38
2.2.1. Teoría y ecuaciones de campo	39

2.2.2.	Compactificando la gravedad de Einstein-Gauss-Bonnet a la teoría de Einstein en dimensión cuatro	41
2.2.3.	Caso escalar: variedad interna uno-dimensional	49
2.2.4.	Cantidades termodinámicas	54
2.3.	Electromagnetismo cuasitopológico: cuerdas negras de Reissner-Nordström en gravedades de Einstein y Lovelock	58
2.3.1.	Modelo y ecuaciones de campo	59
2.3.2.	Compactificación de la teoría de Einstein-Maxwell	62
2.3.3.	Compactificaciones de la teoría Einstein-Maxwell en variedades internas factorizadas.	68
2.3.4.	Compactificación de la teoría Einstein-Maxwell-Lovelock	74
Apéndice		88
Bibliografía		88





Índice de figuras

1.1. El espectro de la inestabilidad para $r_+ = 0,1$. Este resultado fue obtenido con 30 ordenes en la serie de potencias. Para valores más altos del número de onda k , la convergencia de nuestro esquema numérico se rompe.	29
1.2. Comportamiento de la perturbación métrica \tilde{h} como una función de la coordenada radial p	30
2.1. Energía libre versus la temperatura para Schwarzschild-AdS en Relatividad General en cuatro dimensiones (panel izquierdo) y para la solución de agujero negro Schwarzschild-AdS ₄ × S ² compactificado (panel derecho). La solución compactificada corresponde a los valores $\alpha_2 = 0,1$, $\beta_1 = 0,2$, $\beta_2 = 0,05$ y $\Lambda = -1$	58

Resumen

La investigación moderna sobre gravedad en dimensiones superiores se remonta a principios del siglo XX a partir de los trabajos de T. Kaluza y O. Klein. Tales escenarios aparecen de forma natural en Teoría de cuerdas, que, por lo que sabemos, es el único marco en el que se puede calcular la dispersión de gravitones. El límite de bajas energías de Teorías de cuerdas lleva naturalmente a la teoría de Relatividad General a interactuar con p -formas de diferentes grados, que reciben correcciones dinámicas en α 's, así como correcciones cuánticas. La consistencia de estos términos requiere tratarlos como perturbativos [1].

Inspirada en estos ingredientes, esta tesis se centra en el estudio de objetos negros en dimensiones superiores, tanto en la teoría de Relatividad General como en teorías de Lovelock en presencia de flujos de p -formas.

En el contexto de Relatividad General, es sabido que las soluciones de cuerdas y p -branas negras homogéneas en el espaciotiempo plano son inestables bajo perturbaciones de longitud de onda larga, la cual es conocida como inestabilidad de Gregory-Laflamme. Recientemente, se construyeron cuerdas negras homogéneas en presencia de una constante cosmológica negativa, al incluir campos escalares que dependen sólo de las coordenadas extendidas. En la primera parte de esta

tesis se muestra que estas soluciones de cuerdas negras con constante cosmológica son estables a nivel lineal para perturbaciones genéricas, independiente del tamaño del agujero negro Schwarzschild-AdS ubicado en la brana. Además se presenta una perturbación del tipo escalar en la métrica que desencadena una inestabilidad, pero esta corresponde a una perturbación no genérica.

Al movernos a la teoría de Lovelock, en la segunda parte de esta tesis, se presentan primero los resultados sobre la obtención consistente de la gravedad de Einstein en cuatro dimensiones a partir de la compactificación de una teoría de Lovelock de mayor curvatura en dimensión $D = 4 + p$, siendo $p \geq 1$. La compactificación se desarrolla en el producto de espacios $\mathcal{M}_D = \mathcal{M}_d \times \mathcal{K}^p$, donde \mathcal{K}^p es una variedad interna Euclidiana de curvatura constante. Este proceso se lleva de forma tal que no se requiere una relación entre las constantes de acoplamiento. Se presenta explícitamente la compactificación de la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet desde dimensión seis a la teoría de Einstein en dimensión cuatro y se esboza un procedimiento similar para que esta compactificación tome lugar comenzando desde dimensión cinco. Se construyen varias soluciones de cuerdas/ p -branas negras, entre las cuales, una cuerda negra cinco dimensional asintóticamente plana compuesta de un agujero negro de Schwarzschild en la brana es particularmente interesante. Finalmente, se describe la termodinámica de las soluciones y se encuentra que la compactificación consistente modifica la entropía al incluir un término constante, la cual puede inducir una desviación del comportamiento usual de la transición de fase de Hawking-Page.

Posteriormente se presentan compactificaciones de la teoría de Einstein-Maxwell

y la teoría de Einstein-Maxwell-Lovelock en el producto directo de espaciotiempos de la forma $\mathcal{M}_D = \mathcal{M}_d \times \mathcal{K}^p$. Para que estas compactificaciones tomen lugar, se requiere una distribución precisa de un flujo de p -formas sobre la variedad interna. La dinámica de las p -formas es controlada por dos tipos de interacciones. Primero, por acoplamientos específicos con el tensor de curvatura y segundo, por una interacción apropiada con el campo electromagnético de la brana d -dimensional, la última siendo dictada por una modificación recientemente propuesta por el Electromagnetismo Cuasitopológico. En esta aproximación, presentada por Feng y Lü [65], es posible construir soluciones cargadas de cuerdas y p -branas negras. Se resuelven las ecuaciones de campo de las teorías compactificadas correspondientes y se construyen p -branas negras homogéneas cargadas generales. Finalmente se obtienen cuerdas y p -branas negras de Reissner-Nordström homogéneas en la teoría de Einstein-Maxwell y p -branas negras homogéneas de Boulware-Deser cargado para las gravedades de Lovelock-Maxwell cuadráticas y cúbicas.

Abstract

The modern research on gravity in higher dimensions dates back to the early twenty century from the works of T. Kaluza and O. Klein. Such scenarios naturally appear in String Theory, which as far as we know, is the only framework in which graviton scattering can be computed. The low energy limit of string theories naturally lead to General Relativity interacting with p - forms of different degrees, which receive dynamical corrections in α' , as well as quantum corrections. The consistency of these terms require to treat them as perturbative

Inspired by these ingredients, this thesis foccuses on the study of black objects in higher dimensions, both in General Relativity theory and Lovelock theories in the presence of fluxes.

In the context of General Relativity, it is known that solutions of homogeneous black strings and p -branes in flat spacetime are unstable under long wavelength perturbations, which is known as Gregory-Laflamme instability. Recently, homogeneous black strings were constructed in the presence of a negative cosmological constant by including scalar fields that depend only on the extended coordinates. In the first part of this thesis it is shown that these black string solutions with cosmological constant are linearly stable for generic perturbations, independent of

the size of the Schwarzschild-AdS black hole located on the brane. In addition, a scalar type perturbation in the metric triggers an instability, but this corresponds to a non-generic perturbation [1].

Moving to Lovelock theory, in the second part of this thesis we first present the results on obtaining consistently Einstein gravity in four dimensions from the compactification of a higher curvature Lovelock theory in dimension $D = 4 + p$, being $p \geq 1$. The compactification is developed in the product of spaces $\mathcal{M}_D = \mathcal{M}_d \times \mathcal{K}^p$, where \mathcal{K}^p is a Euclidean internal manifold of constant curvature. This process is carried in such a way that no relation between the coupling constants is required. The compactification of the Einstein-Gauss-Bonnet theory from dimension six to the Einstein theory in dimension four is explicitly presented and a similar procedure is outlined for this compactification to take place starting from dimension five. Several string/ p -black-brane solutions are constructed, among which an asymptotically flat five-dimensional black string composed of a Schwarzschild black hole in the brane is particularly interesting. Finally, the thermodynamics of the solutions is described and it is found that the consistent compactification modifies the entropy by including a constant term, which can induce a deviation from the usual Hawking-Page phase transition behavior.

Subsequently, compactifications of the Einstein-Maxwell theory and the Einstein-Maxwell-Lovelock theory are presented in the direct product of spacetimes $\mathcal{M}_D = \mathcal{M}_d \times \mathcal{K}^p$. For these compactifications to take place, a precise distribution of a flux of p -forms over the internal manifold is required. The dynamics of the p -forms is controlled by two types of interactions. First, by specific couplings with

the curvature tensor and second, by an appropriate interaction with the electromagnetic field of the d -dimensional brane, the latter being dictated by a recently proposed modification proposed by Quasitopological Electromagnetism. In this approximation, presented by Feng y Lü [65], it is possible to construct charged string solutions and p -black branes. The field equations of the corresponding compactified theories are solved and general homogeneous charged black p -branes are constructed. Homogeneous Reissner-Nordström strings and black p -branes in the Einstein-Maxwell theory and homogeneous charged Boulware-Deser black p -branes for the Lovelock-Maxwell quadratic and classical gravities are obtained.



Introducción

La teoría de gravedad de Einstein ha sido testeada exitosamente en el régimen de gravedad débil y fuerte en el sistema solar y por la información registrada por pulsares binarios, respectivamente [2,3]. Entre las predicciones que tiene la teoría de Einstein se encuentra la existencia de ondas gravitacionales, las cuales fueron medidas recientemente [4,5] y la existencia de agujeros negros, cuya fotografía se tomó recientemente [6]. De todas maneras, existe evidencia de experimentos cosmológicos y datos astrofísicos que cuestionan la validez de Relatividad General.

Entre las alternativas para modificar Relatividad General se encuentra incluir grados de libertad adicionales o campos, ya sean escalares o vectoriales [7-9], aumentar el número de dimensiones del espaciotiempo o modificar las ecuaciones de campo. Para estas modificaciones, deben existir ciertos requerimientos de consistencia: la teoría modificada debe contar un vacío maximalmente simétrico, como el espaciotiempo de Minkowski, de Sitter o Anti- de Sitter, debe satisfacer los constraints experimentales de Relatividad General y debe conectar naturalmente con la teoría de Relatividad General.

Si sólo se aumenta el número de dimensiones de la teoría de Einstein, sin agregar campos adicionales, es posible obtener objetos negros con una variedad

de topologías de horizonte, evitando la censura topológica [10] de la teoría de relatividad general en cuatro dimensiones y los teoremas de unicidad [12]. Entre las características nuevas que exhiben las soluciones de cuerda negra, las cuales aparecen naturalmente en dimensiones superiores, se demostró que estas soluciones presentan una inestabilidad bajo perturbaciones de longitud de onda larga, conocida como inestabilidad de Gregory-Laflamme [13], la cual, en su estado final conduce a la formación de singularidades desnudas [15, 94]. Ahora, si se considera la teoría de Einstein en dimensiones más altas con constante cosmológica, la construcción de objetos extendidos ya no es directa, es más se han construido soluciones de cuerda negra no homogénea de forma analítica y cuerdas negras homogéneas por medio de métodos numéricos [18, 48, 49]. Recientemente, se logró construir una solución de cuerda negra homogénea en AdS al incluir campos escalares sin masa acoplados minimalmente [19]. Como una primera aproximación al estudio de gravedad y objetos negros en más dimensiones, nos enfocaremos en el estudio de la estabilidad dinámica de las soluciones construidas en [19].

Al modificar la teoría de RG, en el esquema original de Kaluza-Klein [20, 21] se demostró que al comenzar desde una teoría puramente geométrica en más dimensiones, es posible unificar la teoría de Relatividad General y electromagnetismo en cuatro dimensiones. Al intentar realizar este procedimiento en un espacio producto de forma $\mathcal{M}_D = \mathcal{M}_d \times \mathcal{K}^p$, las ecuaciones de la teoría se proyectan en la brana (espaciotiempo d -dimensional) y en la variedad interna Euclidiana (\mathcal{K}^p), surgen incompatibilidades entre las ecuaciones de campo, haciendo imposible la compactificación desde la teoría D dimensional a la teoría d -dimensional en es-

te tipo de espacios producto. Es más, al compactificar a un espaciotiempo en cuatridimensional, es importante que la teoría sea compatible con la evidencia experimental, concretamente el valor observado de la constante cosmológica, así como la restricción en el tamaño de las dimensiones extra, impuestas por las evidencias que vienen de física de partículas.

Además, al considerar que el espaciotiempo tiene dimensiones extra, Lovelock [22] demostró que la teoría de gravedad más general ya no es la teoría de Einstein, sino que esta sólo es la teoría en cuatro dimensiones. En cinco dimensiones, la teoría más general de gravedad es la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet (EGB), la cual consiste en la teoría de Lovelock hasta segundo orden en la curvatura. Al realizar el proceso de compactificación en esta teoría, en [23] se demostró que es posible la compactificación desde la teoría de Lovelock cúbico a la teoría de Einstein, pero fijando las constantes de acoplamiento de la teoría. En la segunda parte de este trabajo de tesis se demuestra que es posible realizar esta compactificación al incluir campos p -formas que viven en la variedad interna, al acoplarlos no-minimalmente con el tensor de curvatura. Este procedimiento nos permitió obtener la teoría de Einstein en cuatro dimensiones, sin relacionar las constantes de acoplamiento. Además, esta aproximación para tratar el problema de la compactificación, nos permitió compactificar la teoría de Einstein-Maxwell y Lovelock-Maxwell y construir soluciones de cuerda y p -branas negras en la teoría de Einstein-Maxwell y p -branas negras en la teoría de Lovelock-Maxwell al considerar flujos de p -formas.

El objetivo principal de esta tesis es estudiar tanto la estabilidad de agujeros

negros en más dimensiones en el contexto de Relatividad General con constante cosmológica, así como también estudiar la construcción de este tipo de soluciones al compactificar teorías de gravedad más generales en dimensiones $d > 4$.

La estructura de esta tesis es la siguiente: en el primer capítulo se introduce brevemente la teoría de Relatividad General en cuatro dimensiones y se presentan algunas soluciones de agujeros negros clásicos y sus propiedades principales. Posteriormente, se presentan algunas soluciones de objetos negros y las propiedades nuevas que estos objetos exhiben, enfocándonos principalmente en la inestabilidad de Gregory-Laflamme, para luego presentar los resultados obtenidos sobre la estabilidad de una cuerda negra homogénea AdS.

En el segundo capítulo se presenta la teoría de Lovelock y la configuración que nos permitió realizar la compactificación de la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet a la teoría de Einstein sin necesidad de introducir relaciones entre las constantes de acoplamiento de la teoría. Además se presentan las soluciones de cuerdas y p -branas negras obtenidas, junto con un breve análisis de la termodinámica de las soluciones. La aproximación usada en este caso, en particular, la inclusión de campos p -formas, nos permitió compactificar la teoría de Einstein-Maxwell y Lovelock-Maxwell, lo que además permitió la construcción de cuerdas y p -branas negras con carga.

En el último capítulo se presentan las conclusiones.

Los resultados originales sobre la estabilidad de la cuerda negra en AdS fueron publicados en Journal of High Energy Physics en JHEP 01 (2020) 052 [57], y los resultados sobre la compactificación de la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet a la

teoría de Einstein [60] y sobre la compactificación de la teoría de Einstein-Maxwell y la teoría de Lovelock-Maxwell [73].

Los resultados sobre estabilidad fueron presentado en formato charla en la conferencia Black Holes Workshop XII, realizada en Guimaraes, Portugal, y en la Escuela CECs de Gravedad y Relatividad General. Además se presentaron en formato poster en el XXII Simposio Chileno de Física (que fue elegido como el mejor poster de la actividad). Los resultados sobre la compactificación de la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet a la teoría de Einstein en cuatro dimensiones fueron presentados en los seminarios del grupo de investigación de la Universidad de Concepción.



Capítulo 1

Teoría de Relatividad General

1.1. Gravedad en cuatro dimensiones

La teoría de Einstein, considera que las interacciones gravitacionales en una variedad espaciotemporal son descritas por un tensor métrico g , el cual es simétrico, que obedece las ecuaciones de campo de Einstein.

En la formulación Lagrangiana de la teoría de Relatividad General, la variable de campo es la métrica espaciotemporal, $g_{\mu\nu}$, la cual es definida en una variedad cuadridimensional, \mathcal{M} [24]. La densidad lagrangiana gravitacional (de Einstein) es dada por

$$\mathcal{L}_E = \sqrt{-g}R , \quad (1.1)$$

donde R es el escalar de Ricci dado por $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ y el tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$, donde $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$ es el tensor de Riemann definido por

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho\Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \partial_\sigma\Gamma^\mu_{\nu\rho} + \Gamma^\mu_{\rho\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu_{\sigma\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\rho} . \quad (1.2)$$

La acción de Einstein-Hilbert es dada por

$$S_E [g] = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R , \quad (1.3)$$

donde G es la constante de Newton. Al realizar la variación de esta acción con respecto a la métrica se obtienen las ecuaciones de campo de Einstein en vacío

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 , \quad (1.4)$$

donde el tensor de Einstein, $G_{\mu\nu}$.

Si se considera la presencia de materia, se construye la densidad lagrangiana (total) \mathcal{L} , al añadir a la densidad lagrangiana de Einstein \mathcal{L}_E la densidad lagrangiana \mathcal{L}_M para el campo de materia

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_E + \mathcal{L}_M , \quad (1.5)$$

La variación de la acción total, S , con respecto al campo métrico lleva a la ecuación

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} , \quad (1.6)$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momentum definido como

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} . \quad (1.7)$$

1.1.1. Soluciones de Agujeros Negros

A continuación se presentan algunas de las soluciones clásicas de agujeros negros en cuatro dimensiones.

Solución de Schwarzschild

Después de unos meses de que Einstein formulara su teoría, K. Schwarzschild [25] presentó una solución que describe el campo gravitacional en el exterior de un cuerpo estático esféricamente simétrico, al resolver las ecuaciones de Einstein en vacío, es decir con $T_{\mu\nu} = 0$. Esta es la solución no-trivial más simple que conduce al concepto de agujero negro.

La métrica para la solución de Schwarzschild es dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r} \right)} + r^2 d\Omega_2^2, \quad (1.8)$$

donde $d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ corresponde a la métrica de una 2-esfera unitaria. El parámetro M representa la masa total en unidades $c = G = 1$. De (1.8) vemos que cuando r tiende a infinito, esta solución se aproxima al espaciotiempo plano, lo que indica que es asintóticamente plana. Físicamente, esta característica implica que se está tratando con un sistema aislado, es decir con un sistema con la fuente de campo gravitacional confinado en un volumen finito.

Algunas de las propiedades de esta solución son

1. La solución (1.8) es la única solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de Einstein en vacío ($R_{\mu\nu} = 0$). El teorema de Birkhoff [11] establece

que todos los espaciotiempos con simetría esférica que son soluciones de las ecuaciones de Einstein en vacío son estáticos, lo que efectivamente implica que esta debe ser la solución de Schwarzschild. Para agujeros negros, Israel demostró que un espaciotiempo vacío, estático, asintóticamente plano, que es no-singular en el horizonte de eventos ni fuera de este, debe ser la solución de Schwarzschild [12].

2. Esta solución es estable bajo perturbaciones pequeñas, ya sean gravitacionales o debido a campos externos [26]. Los agujeros negros no tienen modos normales de oscilación ordinarios ya que la energía es dispersada por medio de radiación a infinito o por ondas que caen a través de horizonte. Si se consideran perturbaciones con dependencia temporal armónica $e^{i\omega t}$ y se imponen condiciones de borde tal que los modos sean puramente salientes en infinito y entrantes en el horizonte, se encuentra una solución para un conjunto discreto de ω 's. La parte imaginaria de ω es negativa, entonces estos modos oscilan con una amplitud exponencialmente decreciente.

3. Otra característica importante de la solución (1.8) es que las componentes de la métrica se vuelven singulares en $r = 0$ y $r = 2M$ lo que se puede deber a un problema en las coordenadas usadas para escribir la solución o debido a la presencia de una singularidad real de la estructura espaciotempo. Al calcular el cuadrado del tensor de Riemann, el invariante Kretchmann, $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ para la solución de (1.8), se encuentra que este es proporcional a M^2/r^6 , lo sugiere que $r = 2M$ es sólo una singularidad de coordenadas, la

cual es removible por medio de un cambio de coordenadas apropiado y $r = 0$ es una singularidad irremovible, ya que este invariante toma el mismo valor en todos los sistemas coordenados. Este tipo de singularidades se conoce como singularidad real, física o de curvatura.

La superficie $r = 2M = r_+$ se conoce como horizonte de eventos, ya que esta describe una barrera no física, por la cual pueden caer objetos y señales a $r < r_+$, pero desde la cual no pueden salir ni objetos ni señales (incluso luz). La superficie $r = 2M$ corresponde entonces a un punto de no retorno para partículas que pasan a través de esta. A una superficie con estas características se les denomina como *horizonte de eventos*. Ya que nada puede salir del horizonte de eventos, esta región del espaciotiempo se encuentra separada del infinito por un horizonte de eventos, lo que se conoce como *agujero negro*.

4. Para el caso en que $M < 0$, la singularidad en $r = 0$ se encontraría a la vista ya que no se tendría un horizonte de eventos. La Hipótesis de Censura Cósmica de Penrose [27] dice que una métrica de tales características, es decir (1.8) con M negativo nunca será el estado final del colapso gravitacional de una estrella o de cualquier otro tipo de materia con un tensor de energía-momentum aceptable físicamente.

Solución de Reissner-Norström

Si consideramos el caso de gravedad acoplado a un campo vectorial de materia A_μ sin masa, obtenemos la acción de Einstein-Maxwell, la cual se obtiene al sumar

la acción de Einstein-Hilbert (1.3) con la acción de Maxwell,

$$S_{EM}[g, A] = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) , \quad (1.9)$$

donde $F_{\mu\nu}$ corresponde a la intensidad de campo del campo vectorial electro-magnético A_μ ,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \quad (1.10)$$

Las ecuaciones de campo que se obtienen de la variación de (1.9) respecto a $g_{\mu\nu}$ y A_μ son

$$G_{\mu\nu} = 2 \left(F_{\mu\lambda}F_{\nu}{}^\lambda - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \right) , \quad (1.11)$$

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0 . \quad (1.12)$$

Para un ansatz estático con simetría esférica se obtiene la siguiente solución

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2}dt^2 + \frac{r^2}{\Delta}dr^2 + r^2d\Omega^2 , \quad \Delta = r^2 - 2Mr + Q^2 \quad (1.13)$$

donde M es la masa y Q su carga. Esta solución corresponde al agujero negro de Reissner-Nordström [28].

La solución para las ecuación de Maxwell es

$$A = \frac{Q}{r}dt . \quad (1.14)$$

En este caso, para ver el horizonte de eventos de la solución de Reissner-

Nordström, es útil realizar la siguiente definición

$$\Delta = r^2 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} = (r - r_+)(r - r_-) \quad (1.15)$$

donde

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2} \quad (1.16)$$

Se deben considerar tres casos:

1. $M < Q$: En este caso Δ no tiene raíces reales por lo tanto no existe un horizonte y la singularidad en $r = 0$ es desnuda (Kretchmann). De acuerdo a la hipótesis de censura cósmica esta situación no podría ocurrir en el colapso gravitacional.
2. $M > |Q|$: En este caso, Δ se anula para $r = r_+$ y $r = r_-$ reales y por lo tanto, estas corresponden a singularidades de la métrica (1.13). Estas corresponden a singularidades de coordenadas. En particular, $r = r_+$ corresponde al horizonte de eventos para (1.13) y $r = r_-$ corresponde a un horizonte de Cauchy.
3. $M = Q$: caso extremal ($r_{\pm} = M$)

La solución (1.13), (1.14) describe el campo gravitacional y el campo electromagnético producido por un objeto esféricamente simétrico cargado eléctricamente. Para estas soluciones, existe una generalización del teorema de Birkhoff y el teorema de Israel [29], los que establecen que la solución Reissner-Nordström es la única solución (o familia de soluciones) estática y asintóticamente plana

del sistema de Einstein-Maxwell.

También se demostró en [26] que esta solución es estable.

Soluciones con constante cosmológica

Si se considera la acción de Einstein con constante cosmológica se tiene

$$S_{EH} [g] = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) , \quad (1.17)$$

de donde se obtienen las ecuaciones de Einstein en vacío con constante cosmológica

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (1.18)$$

El efecto de Λ en las ecuaciones de Einstein (1.18) es un cambio en el vacío de la teoría, lo que se puede definir como la solución maximalmente simétrica de las ecuaciones de movimiento cuando todos los campos de materia se fijan a cero. En este caso, las soluciones maximalmente simétricas corresponden al espaciotiempo *de Sitter* (dS) cuando la constante cosmológica es positiva, el cual en coordenadas estáticas es

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r^2}{L^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r^2}{L^2} \right)} + r^2 d\Omega_2^2 , \quad (1.19)$$

donde la superficie $r = L$ es nula y se llama horizonte de de Sitter.

Para el caso en el cual la constante cosmológica es negativa, el espaciotiempo maximalmente simétrico es dado por el espaciotiempo *anti-de Sitter* (AdS), el cual

es

$$ds^2 = - \left(\frac{r^2}{L^2} + 1 \right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{L^2} + 1 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 . \quad (1.20)$$

con $\Lambda = -3/L^2$.

Las ecuaciones de Einstein en vacío con constante cosmológica también admiten soluciones de agujero negro. Por ejemplo, un agujero negro (neutro, no-rotante) en el espacio de Sitter es dado por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r^2}{L^2} - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{r^2}{L^2} - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 . \quad (1.21)$$

Esta solución también es llamada solución de Kottler. La métrica anterior describe un agujero negro sólo si g_{tt} se anula, es decir si el horizonte del agujero negro entra en el horizonte de dS. Es decir, hay un límite superior para la masa de un agujero negro en el espacio de dS: $M < L/3^{3/2}$. Si M es mayor que este límite, la singularidad en $r = 0$ es desnuda.

Un agujero negro (neutro, no-rotante) en el espaciotiempo anti-de Sitter es dado por la métrica

$$ds^2 = - \left(\frac{r^2}{L^2} + 1 - \frac{2M}{r} \right) d\tau^2 + \left(\frac{r^2}{L^2} + 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 . \quad (1.22)$$

Para cualquier $M > 0$, hay un valor para el cual $g_{tt} = 0$. Este es el horizonte de eventos $r = r_+$. Como hemos discutido hasta ahora, este tiene un horizonte esférico.

Las soluciones de agujeros negros en cuatro dimensiones tienen propiedades

bien definidas gracias a teoremas de unicidad, a la censura cósmica y a la censura topológica, además de los teoremas de no-pelo y los resultados de estabilidad. En la siguiente sección, veremos que al modificar Relatividad General al añadir dimensiones al espaciotiempo, se encuentra una amplia variedad de soluciones y las propiedades de estas difieren del caso en cuatro dimensiones.

1.2. Gravedad en más dimensiones

Al considerar la gravedad de Einstein en dimensiones superiores a cuatro, en vacío, se observa una estructura más rica de fases de agujeros negros con nuevas propiedades como quiebres de simetría, nuevas topologías de horizontes, puntos de fusión y en algunos casos no-unicidad infinita [34,50]. Una de las razones para esta estructura más variada es que cuando la dimensión aumenta, hay muchos más grados de libertad para la métrica. En más dimensiones aparecen por ejemplo, nuevos planos de rotación, y también se encuentran objetos negros con horizontes extendidos, como lo son las cuerdas y p -branas negras.

A continuación se presentan algunas de estas soluciones.

1.2.1. Agujeros negros en más dimensiones

La generalización de la solución de Schwarzschild a dimensiones más altas fue presentada por Tangherlini [30]

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\Omega_{d-2}^2, \quad f(r) = 1 - \frac{\mu}{r^{d-3}} \quad (1.23)$$

donde $d\Omega_{d-2}^2$ corresponde al elemento de línea de una esfera unitaria $(d - 2)$ dimensional y μ es el parámetro de masa definido por

$$\mu = \frac{16\pi M}{(d - 2)\Omega_{d-2}} . \quad (1.24)$$

Teoremas de unicidad para espaciotiempos D dimensionales ($D > 4$) asintóticamente planos, establecen que la solución de Schwarzschild-Tangherlini es el único agujero negro estático asintóticamente plano en gravedad pura. Para estas soluciones se demostró unicidad [31]. Además se demostró que estas son estables bajo perturbaciones gravitacionales linealizadas [32].

También es posible construir soluciones de cuerda negra o p -branas negras, las cuales consisten en una solución de las ecuaciones de Einstein en vacío en d -dimensiones, a la cual se le agregan direcciones planas extendidas. Consideremos por ejemplo la solución (1.23) a la cual le agregan p direcciones planas extendidas, esto es

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\Omega_{d-2}^2 + dx_i dx^i , \quad f(r) = 1 - \left(\frac{r_+}{r}\right)^{d-3} \quad (1.25)$$

donde x^i corresponden a las coordenadas de las p direcciones extendidas. Esta solución es conocida como p -brana negra homogénea, y en el caso $p = 1$ denominan cuerdas negras. Esta solución, fue introducida originalmente por Horowitz y Strominger [33] como una solución del límite de bajas energías de una teoría de cuerdas diez-dimensional con una métrica que es solución de las ecuaciones de Einstein en vacío en d dimensiones, y aunque estas parecen triviales, hay una

cantidad no despreciable de física tras estas soluciones [34, 35].

En dimensiones superiores es posible además construir soluciones estáticas esféricamente simétricas con carga, la cual corresponde a la generalización de la solución de Reissner-Nordström, y soluciones rotantes, como los agujeros negros de Myers-Perry [36], anillos negros rotantes [38, 39], soluciones de multi-agujeros negros como black Saturns y multi-anillos negros rotantes [40], [41–43]. Como vemos, para RG en $d > 4$, existe una variedad de soluciones con diferentes topologías de horizonte y los cuales son descritos por otros parámetros además de las cargas conservadas, a diferencia de las soluciones de agujero negro en cuatro dimensiones.

Al considerar las ecuaciones de Einstein en más dimensiones con constante cosmológica, se encuentra por ejemplo, la solución generalizada a más dimensiones del agujero negro de Schwarzschild-AdS [46, 47], dada por

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{d-2}^2, \quad f(r) = 2 - \frac{\mu}{r^{d-3}} + \frac{r^2}{l^2}, \quad (1.26)$$

donde μ es proporcional a la masa y l es el radio de curvatura AdS.

La extensión de soluciones con constante cosmológica negativa en cuatro dimensiones, a soluciones tipo cuerda o p -brana no es trivial. Por medio de métodos numéricos es posible construir cuerdas negras homogéneas en AdS en Relatividad General pura con constante cosmológica [48, 49]. En [19], construyen una cuerdas y p -branas negras homogéneas. Esto se logra al considerar la teoría de Einstein con constante cosmológica en dimensión $D = d + p$ acoplada a p campos escalares

$\phi^{(i)}$ con $i = 1, \dots, p$.

Otro de los nuevos fenómenos de la teoría en más dimensiones, es que las soluciones de cuerda y p -branas negras presentan inestabilidades bajo perturbaciones de longitud de onda larga, lo que se conoce como inestabilidad de Gregory-Laflamme [13]. La evolución de esta estabilidad conduce a la ruptura del horizonte haciendo visible la singularidad central [15, 94]. Argumentos termodinámicos indican que para dimensiones mayores que trece el estado final de la inestabilidad podría ser una cuerda negra inhomogénea [51]. Este tipo de inestabilidad se presenta en una gran variedad de objetos negros [35], como los anillos negros rotantes, los agujeros negros rotantes y también en el caso de las cuerdas negras cargadas [52], e incluso va más allá de la teoría de Relatividad General, como por ejemplo para soluciones de cuerdas negras en otras teorías como gravedad de mayor curvatura [53–56].

Otro caso de no-unicidad ha sido observado en el agujero negro de Kaluza-Klein, en particular para soluciones de agujeros negros asíntota al espacio de Minkowski \times un círculo S^1 . La solución más simple que es posible construir es la cuerda negra uniforme lo cual es el agujero negro de Schwarzschild-Tangherlini $(D - 1)$ dimensional (1.23) más una dirección plana, el cual tiene topología de horizonte $S^{D-3} \times S^1$. De todas maneras, al menos para un rango de masas, también hay cuerdas negras no-uniformes y agujeros negros que están localizados en el círculo, ambos de los cuales no tienen invariancia traslacional a lo largo de la dirección del círculo. Si se admiten horizontes desconectados, también son posibles configuraciones de multi-agujeros negros localizados en el círculo, dando lugar a

una no-unicidad infinita [?, 50].

A continuación se presentan los resultados obtenidos sobre la estabilidad de la solución de cuerda negra en AdS, los cuales definen los primeros resultados originales de esta tesis y fueron publicados en [57].

1.2.2. Estabilidad de cuerdas negras en AdS

En esta sección se presentan los resultados sobre el estudio de la estabilidad de la solución de cuerda negra en presencia de una constante cosmológica negativa con campos escalares acoplados minimalmente. Se presenta primero el análisis de la estabilidad de la solución bajo perturbaciones genéricas de la métrica y del campo escalar. Posteriormente se extiende el estudio de la estabilidad al presentar la existencia de una perturbación no genérica que da lugar a un comportamiento inestable. Este modo es fine-tuned ya que requiere que el grado de libertad campo escalar este ausente de toda la evolución del sistema.

La solución estudiada fue presentada por [19], donde construyen una solución de cuerda y p -brana negra homogéneas en Relatividad General con constante cosmológica. Esto se logra al considerar la teoría de Einstein en dimensión $D = d + p$ acoplada a p campos escalares $\phi^{(i)}$ con $i = 1, \dots, p$.

Las ecuaciones de campo para esta teoría son

$$G_{AB} + \Lambda g_{AB} = \kappa \sum_{i=1}^p T_{AB}^{(i)}, \quad (1.27)$$

donde G_{AB} es el tensor de Einstein y el tensor de energía-momentum es dado por

$$T_{AB}^{(i)} = \frac{1}{2} \partial_A \psi^{(i)} \partial_B \psi^{(i)} - \frac{1}{4} g_{AB} \partial_C \psi^{(i)} \partial^C \psi^{(i)} . \quad (1.28)$$

La ecuación para el campo escalar es

$$\square \psi^{(i)} = 0 \quad (1.29)$$

donde $i = 1, 2, \dots, p$.

Esta teoría admite soluciones de la forma

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{d-2}^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (1.30)$$

donde

$$f(r) = 1 - \frac{2m}{r^{d-3}} - \frac{2\Lambda r^2}{(d-1)(d+p-2)} , \quad (1.31)$$

con $x^i (i = 1, \dots, p)$ coordenadas cartesianas, las cuales corresponden a las coordenadas a lo largo de la p -brana negra.

La solución para los campos escalares es

$$\psi^{(i)} = \lambda x^i \quad (1.32)$$

con

$$\lambda^2 = -\frac{4\Lambda}{\kappa(d+p-2)} . \quad (1.33)$$

Resultados de estabilidad

Nos enfocaremos en el caso cinco dimensional, pero los cálculos se pueden realizar en dimensión arbitraria $d \geq 5$. Consideramos entonces la solución de cuerda negra AdS dada por (1.30),(1.31), fijando $\kappa = 2$ y $\Lambda = -3/2$ tal que $\lambda = 1$ por simplicidad. De esta forma tenemos

$$f(r) = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{2\Lambda}{9}r^2 . \quad (1.34)$$

Siguiendo el trabajo original de Gregory y Laflamme [13,58], se considera una perturbación genérica esféricamente simétrica para la métrica $g_{AB} \rightarrow g_{AB} + h_{AB}$, donde

$$h_{AB} = e^{ikz} e^{\Omega t} \begin{bmatrix} h_{tt}(r) & h_{tr}(r) & 0 & 0 & h_{tz}(r) \\ h_{tr}(r) & h_{rr}(r) & 0 & 0 & h_{rz}(r) \\ 0 & 0 & h(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h(r) \sin^2 \theta & 0 \\ h_{tz}(r) & h_{tr}(r) & 0 & 0 & h_{zz}(r) \end{bmatrix} .$$

La perturbación para el campo escalar $\psi \rightarrow \psi + \chi$ es dada por

$$\chi = \Phi(r) e^{\Omega t + ikz} . \quad (1.35)$$

Con las perturbaciones presentadas anteriormente, se obtiene que el sistema

Einstein-Klein-Gordon linealizado da lugar a

$$-\frac{1}{2}\nabla_L h_{AB} + \frac{1}{2}g_{AB}h^{CD}R_{CD} + \frac{1}{4}g_{AB}g^{CD}\nabla_L h_{CD} + h_{AB}\left(1 - \frac{1}{2}R\right) = T_{AB}^{(1)} \quad (1.36)$$

donde Δ_L corresponde al operador de Lichnerowicz para la métrica del espacio-tiempo de fondo es dado por

$$\Delta_L h_{AB} = \square h_{AB} + 2R_{ACBD}h^{CD} - 2R_{(A}{}^C h_{B)C} - 2\nabla_{(A}\nabla^C h_{B)C} + \nabla_A\nabla_B h, \quad (1.37)$$

y

$$T_{AB}^{(1)} = \frac{1}{2}(\partial_A\psi\partial_B\chi + \partial_{AB}\psi\partial\chi) - \frac{1}{4}g_{AB}g^{CD}(\partial_C\psi\partial_D\chi + \partial_C\chi\partial_D\psi) - \frac{1}{4}\partial_C\psi\partial_D\psi(h_{AB}g^{CD} - g_{AB}h^{CD}). \quad (1.38)$$

La ecuación linealizada para el campo escalar es

$$\square\chi - \nabla_A h^{AB} - h^{AB}\nabla_B\psi - h^{AB}\nabla_A\nabla_B\psi + \frac{1}{2}\nabla_A h\nabla^A\psi = 0. \quad (1.39)$$

Ya que nos encontramos en presencia de materia, es consistente imponer la siguiente condición de gauge

$$\nabla_A h^{AB} = \frac{1}{2}\nabla^B h^C{}_C \quad (1.40)$$

Para esta configuración, obtenemos que la ecuación linealizada para la perturbación del campo escalar (1.39) toma la forma

$$\square\chi - h^{ab}\nabla_a\nabla_b\psi = 0 . \quad (1.41)$$

Al introducir la separación para la fluctuación del campo escalar (1.35) obtenemos

$$\begin{aligned} & (r - r_+)^2 (r^2 + r_+r + r_+^2 + 3) r \frac{d^2\Phi}{dr^2} - 3r^2 ((r - r_+)k^2 + 3r\Omega^2) \Phi \\ & + (r - r_+) (4r^3 - r_+^3 + 6r - 3r_+) (r^2 + r_+r + r_+^2 + 3) \frac{d\Phi}{dr} = 0 . \end{aligned} \quad (1.42)$$

De esta ecuación vemos que el comportamiento regular asintótico en el horizonte y en infinito son dados por

$$\Phi(r) \sim (r - r_+)^{\frac{r_+\Omega}{r_+^2+1}} (1 + \mathcal{O}(r - r_+)) \quad \text{cuando } r \rightarrow r_+ , \quad (1.43)$$

$$\Phi(r) \sim r^{-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{12k^2+9}}{2}} (1 + \mathcal{O}(r^{-1})) \quad \text{cuando } r \rightarrow \infty . \quad (1.44)$$

En la búsqueda de la inestabilidad, es decir, en la búsqueda de valores positivos de Ω , es imposible conectar los comportamientos asintóticos cerca del horizonte y en infinito, lo que proviene del siguiente análisis. Cualquier solución espacialmente acotada de (1.42) se debe anular tanto en infinito como en el horizonte, por lo tanto debe existir un punto de retorno en el dominio de comunicación exterior. En tal punto $r = r_* > r_+$ debemos tener

$$\frac{1}{\Phi(r_*)} \frac{d^2\Phi(r_*)}{dr^2} = \frac{3r_* ((r_* - r_+)k^2 + 3r_*\Omega^2)}{(r_* - r_+^2 + r_*r_+ + r_+^2 + 3)} \quad (1.45)$$

y ya que el lado derecho de la ecuación (1.45) es estrictamente positivo no existe tal punto de retorno. Este argumento estandar prueba la no-existencia de un modo con crecimiento exponencial en el tiempo, para perturbaciones genéricas con simetría esférica de la cuerda negra estudiada, y por lo tanto su estabilidad.

Estos resultados pueden ser extendidos a dimensión arbitraria $D = d + p$, e incluso más allá de simetría esférica. De hecho, usando la condición de gauge (1.40), cada una de las perturbaciones de los campos en (1.32), $\delta\psi_{(i)} = \chi_{(i)}$, será solución de una ecuación de Klein-Gordon en la métrica de fondo (1.30), (1.31).

Introduciendo la separación $\chi_{(i)} = e^{\Omega t + i\vec{k}\cdot\vec{z}} Y_l(\sigma_{d-2}) \Phi_{(i)}(r)$ en la ecuación (1.41) se obtiene una ecuación diferencial ordinaria

$$r^2 f^2 \Phi_{(i)}''(r) + r f ((d-2)f + r f') \Phi_{(i)}'(r) - \left(\Omega^2 r^2 + l(l+d-1)f + \vec{k}^2 r^2 f \right) \Phi_{(i)}(r) = 0 \quad (1.46)$$

con $i = 1, \dots, p$ y donde $Y_l(\sigma_{d-2})$ corresponde a un armónico esférico en la σ_{d-2} esfera.

Los comportamientos asintóticos relevantes son $\Phi_{(i)} \sim (r r_+)^{\Omega/f'(r_+)}$ y $\Phi_{(i)} \sim r^{-\Delta_+}$ con $2\Delta_+ := (d-1) + \sqrt{(d-1)^2 + 4L^2 \vec{k}^2}$ en el horizonte y en infinito respectivamente, y L corresponde al radio AdS efectivo en la región asintótica del agujero negro en la brana. Como en el caso anterior, la ecuación (1.46) no admite soluciones regulares para Ω positivo y por lo tanto el sistema es estable.

Inestabilidad no-genérica

Las ecuaciones para perturbación continúan siendo consistentes si se fija $\chi(r) = 0$, es decir, si perturbamos sólo la métrica. Para el modo escalar de la perturbación gravitacional $g_{ab} \rightarrow g_{ab} + \epsilon h_{ab}$, donde

$$h_{ab} = e^{ikz} e^{\Omega t} \begin{bmatrix} h_{tt}(r) & h_{tr}(r) & 0 & 0 & 0 \\ h_{tr}(r) & h_{rr}(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h(r) \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

se obtiene que h_{tr} satisface la siguiente ecuación

$$A(r) \frac{d^2 h_{tr}(r)}{dr^2} + B(r) \frac{dh_{tr}(r)}{dr} + C(r) h_{tr}(r) = 0. \quad (1.47)$$

con

$$A(r) = -\frac{1}{3} \left[\left(k^2 + \frac{2}{3} \right) r^6 + (3\Omega^2 + 3k^2 + 3) r^4 - r_+ \left(k^2 + \frac{4}{3} \right) (r_+^2 + 3) r^3 - \frac{r_+^2}{12} (r_+^2 + 3)^2 \right] (r^2 + rr_+ + r_+^2 + 3)^2 (-r_+ + r)^2 r^2 \quad (1.48)$$

$$\begin{aligned}
B(r) = & -2(r^2 + rr_+ + r_+^2 + 3)(-r_+ + r)r \left[\left(k^2 + \frac{2}{3}\right)r^9 + (4\Omega^2 + 4k^2 + 4)r^7 \right. \\
& - \left(k^2 + \frac{5}{3}\right)r_+(r_+^2 + 3)r^6 + (3\Omega^2 + 3k^2 + 3)r^5 + \frac{r_+^3}{24}(r_+^2 + 3)^3 \\
& \left. - \left(k^2 - \frac{\Omega^2}{2} + \frac{3}{2}\right)r_+(r_+^2 + 3)r^4 - \frac{r_+^2}{6}(r_+^2 + 3)^2 r^3 - \frac{r_+^2}{4}(r_+^2 + 3)^2 r \right]
\end{aligned} \tag{1.49}$$

y

$$\begin{aligned}
C(r) = & \left(-\frac{8}{9} + k^4 - \frac{2k^2}{3}\right)r^{12} + (6k^4 + (6\Omega^2 - 3)k^2 - 6\Omega^2 - 8)r^{10} + \frac{r_+^4}{36}(r_+^2 + 3)^4 \\
& - 2r_+ \left(k^2 - \frac{11}{6}\right) \left(k^2 + \frac{4}{3}\right) (r_+^2 + 3)r^9 + \left(9 \left(k^2 + \Omega^2 - \frac{2}{3}\right)\right) (\Omega^2 + k^2 + 1)r^8 \\
& - 6r_+ \left(k^4 + \left(\Omega^2 + \frac{1}{2}\right)k^2 + \Omega^2 - \frac{4}{3}\right) (r_+^2 + 3)r^7 + (18k^2 + 18\Omega^2 + 18)r^6 \\
& + \left(\left(-\frac{1}{3} + k^4 + \frac{3}{4}k^2\right)r_+^6 + \left(-2 + 6k^4 + \frac{9}{2}k^2\right)r_+^4 + \left(-3 + 9k^4 + \frac{27}{4}k^2\right)r_+^2\right)r^6 \\
& - 21r_+(r_+^2 + 3) \left(k^2 + \frac{4}{7}\Omega^2 + \frac{6}{7}\right)r^5 + \frac{33}{4}r_+^2 \left(k^2 + \frac{1}{11}\Omega^2 + \frac{38}{33}\right) (r_+^2 + 3)^2 r^4 \\
& - \frac{13}{12}r_+^3 \left(k^2 + \frac{4}{3}\right) (r_+^2 + 3)^3 r^3 + \frac{3}{2}r_+^2 (r_+^2 + 3)^2 r^2 - \frac{1}{2}r_+^3 (r_+^2 + 3)^3 r
\end{aligned} \tag{1.50}$$

El comportamiento asintótico de h_{tr} cerca del horizonte (cuando $r \rightarrow r_+$) es dado

por

$$h_{tr}(r) = c_1 (r - r_+)^{-1 + \frac{\Omega r_+}{r_+^2 + 1}} (1 + \mathcal{O}(r - r_+)) + c_2 (r - r_+)^{-1 - \frac{\Omega r_+}{r_+^2 + 1}} (1 + \mathcal{O}(r - r_+)) \tag{1.51}$$

Para modos inestables $\Omega > 0$, por lo tanto la segunda rama diverge en el horizonte. Note que para $\Omega < \frac{1+r_+^2}{r_+}$ incluso la primera rama inexorablemente diverge

en el horizonte. Como en el caso de Gregory-Laflamme original, en este régimen

encontraremos modos inestables. Resulta que la divergencia de estos modos cerca del horizonte, es un artefacto de las coordenadas, y se puede demostrar que en las coordenadas de Kruskal-Szekeres tales modos son regulares.

En el otro borde, cuando $r \rightarrow \infty$, el comportamiento asintótico es dado por

$$h_{tr}(r) = \tilde{c}_1 \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{9+12k^2}}{2}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right)\right) + \tilde{c}_2 \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{9+12k^2}}{2}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right)\right) \quad (1.52)$$

Es interesante notar que hay un rango de momentos k a lo largo de la dirección extendida para la cual ambas ramas son regulares en infinito. Siguiendo la aproximación estandar en AdS, se imponen condiciones de borde de Dirichlet en infinito, es decir, se requerirá que $\tilde{c}_2 = 0$.

Antes de implementar el método que dará lugar al espectro, es útil introducir el siguiente cambio de variables

$$h_{tr}(r) = (r - r_+)^{-1 + \frac{r_+ \Omega}{r_+^2 + 1}} r^{1 - \frac{r_+ \Omega}{r_+^2 + 1}} r^{-\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{9+12k^2}}{2}} \tilde{h}(r) . \quad (1.53)$$

Con esta redefinición, $\tilde{h}(r)$ hereda el siguiente comportamiento asintótico en el horizonte

$$\tilde{h}(r) \sim c_1 (1 + \mathcal{O}(r - r_+)) + c_2 (r - r_+)^{-\frac{2r_+ \Omega}{r_+^2 + 1}} (1 + \mathcal{O}(r - r_+)) , \quad (1.54)$$

y en $r \rightarrow \infty$

$$\tilde{h}(r) \sim \tilde{c}_1 r^{-\sqrt{9+12k^2}} (1 + \mathcal{O}(1/r)) + \tilde{c}_2 . \quad (1.55)$$

y por lo tanto necesitamos fijar $c_2 = 0$ y $\tilde{c}_2 = 0$ en el horizonte y en infinito respectivamente.

Para obtener el espectro es conveniente introducir la coordenada $p = \frac{r-r_+}{r}$, la cual mapea $r \in]r_+, +\infty[$ to $p \in]0, 1[$. Al imponer las condiciones de borde apropiadas, y usando una solución en serie de potencias para la perturbación se encuentran valores positivos de Ω , lo que indica un crecimiento exponencial de la perturbación en el tiempo. Para $r_+ = 0,1$, se obtiene el espectro de inestabilidades el cual es presentado en la figura (1.1) y la figura (1.2) se presenta el comportamiento de la perturbación a varios ordenes en la serie.

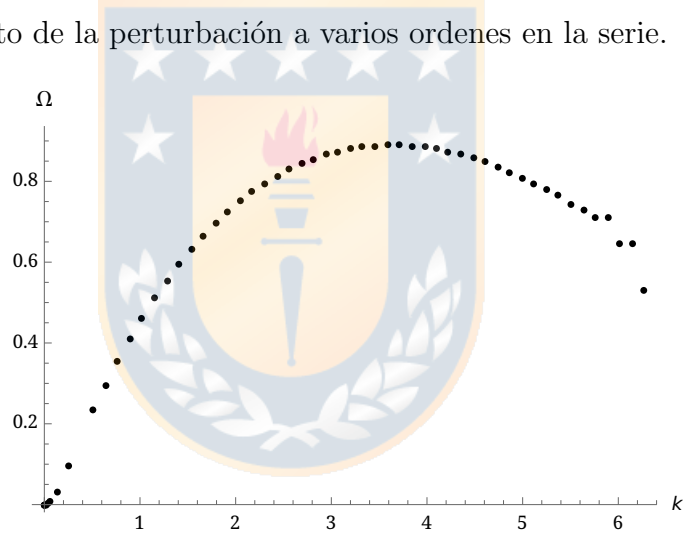


Figura 1.1: El espectro de la inestabilidad para $r_+ = 0,1$. Este resultado fue obtenido con 30 ordenes en la serie de potencias. Para valores más altos del número de onda k , la convergencia de nuestro esquema numérico se rompe.

Aquí se extendieron los resultados sobre cuerdas negras homogéneas en AdS. Se demostró que una perturbación no genérica de la solución de cuerda negra homogénea (1.30) da lugar a una inestabilidad de Gregory-Laflamme. Es importante mencionar que para el caso donde la perturbación del campo escalar se anula, se establece la inestabilidad del Gregory-Laflamme, sin embargo esta es

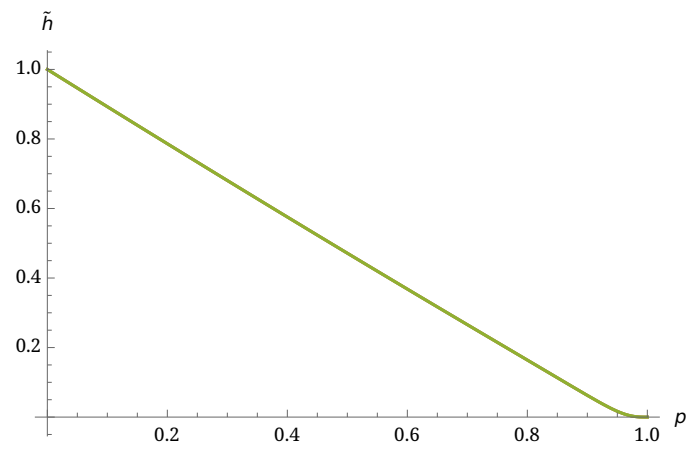


Figura 1.2: Comportamiento de la perturbación métrica \tilde{h} como una función de la coordenada radial p

una perturbación no-genérica consistente.



Capítulo 2

Modificando Relatividad General en más dimensiones

Los principios que llevan a la formulación de Relatividad General en dimensión cuatro, indican que en dimensión superior la teoría más general obtenida bajo los mismos principios es la teoría de Lovelock. De esta forma, Lovelock [22], usando las mismas propiedades que se usan para obtener las ecuaciones de Einstein en cuatro dimensiones, logró obtener una teoría de gravedad en más dimensiones, la cual en cuatro dimensiones coincide con la teoría de Einstein. Esta teoría corresponde a una serie infinita de términos de mayor curvatura de orden k , los cuales son no-triviales cuando $k \leq [D/2]$. De esta forma, además del término cosmológico, el escalar de Ricci es el primer término de la serie y el único que es no-trivial en dimensión cuatro. La primera corrección dinámica de la gravedad de Lovelock a la acción de Einstein-Hilbert aparece en dimensión cinco y es dada por una combinación precisa de términos cuadráticos en la curvatura conocidos

como la densidad de Gauss-Bonnet, el cual también aparece como una corrección α' a la teoría de GR en teoría de cuerdas [59].

2.1. Teoría de Lovelock

El Lagrangiano de Lovelock [22] en D dimensiones es dado por

$$\mathcal{L}_{Lovelock}[g] = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor} \alpha_k \mathcal{L}^k, \quad (2.1)$$

donde \mathcal{L}^k corresponden a las densidades de Euler definidas por

$$\mathcal{L}^k = \frac{1}{2^k} \delta_{B_1 \dots B_{2k}}^{A_1 \dots A_{2k}} R^{B_1 B_2}_{A_1 A_2} \dots R^{B_{2k-1} B_{2k}}_{A_{2k-1} A_{2k}}, \quad (2.2)$$

siendo $\delta_{B_1 \dots B_{2k}}^{A_1 \dots A_{2k}}$ las deltas de Kronecker antisimétricas generalizadas. Cada densidad de Euler contribuirá no-trivialmente a las ecuaciones de campo para $k < \lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor$, de otra forma estos términos son topológicos o idénticamente cero.

Los términos α_k en (2.1) corresponden a los acoplamientos de Lovelock, los cuales tienen dimensiones $[\text{longitud}]^{2n-D}$. Explícitamente, α_0 es la constante cosmológica y α_k con $k \geq 2$ corresponden a las constantes de acoplamiento de los términos de orden más alto en la curvatura, los que representan correcciones ultravioleta a la teoría de Einstein.

Las ecuaciones de movimiento para la teoría (2.1) de orden k en vacío son dadas por

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor} E_{AB}^{(k)} = 0 \quad (2.3)$$

donde $E_{AB}^{(k)}$ es el tensor de Lovelock de orden k ,

$$E_{AB}^{(k)} = -\frac{1}{2^{k+1}} g_{(A|C} \delta_{|B)B_1 \dots B_{2k}}^{CA_1 \dots A_{2k}} R^{B_1 B_2}_{A_1 A_2} \dots R^{B_{2k-1} B_{2k}}_{A_{2k-1} A_{2k}} . \quad (2.4)$$

En su forma expandida, el lagrangiano de Lovelock es dado por

$$\mathcal{L}_{Lovelock} [g] = \sqrt{-g} (\alpha_0 + \alpha_1 R + \alpha_2 \mathcal{L}^2 + \alpha_3 \mathcal{L}^3 + \mathcal{O}(R^4)) \quad (2.5)$$

donde

$$\mathcal{L}^2 = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} , \quad (2.6)$$

es el término de segundo orden en el tensor de Riemann, llamado término de Gauss-Bonnet. El término cúbico es dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^3 = & R^3 + 3RR^{\mu\nu\alpha\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta} - 12RR^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + 24R^{\mu\nu\alpha\beta}R_{\alpha\mu}R_{\beta\nu} + 16R^{\mu\nu}R_{\nu\alpha}R_{\mu}^{\alpha} \\ & + 24R^{\mu\nu\alpha\beta}R_{\alpha\beta\nu\rho}R_{\mu}^{\rho} + 8R^{\mu\nu}{}_{\alpha\rho}R^{\alpha\beta}{}_{\nu\sigma}R^{\rho\sigma}{}_{\mu\beta} + 2R_{\alpha\beta\rho\sigma}R^{\mu\nu\alpha\beta}R^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Estas expresiones para los términos de orden cuadrático y cúbico nos serán de utilidad en lo que sigue.

2.1.1. Agujeros negros en la teoría de Lovelock

Al considerar la teoría de Lovelock en 5 dimensiones, en la acción aparecen términos hasta de orden cuadrático en la curvatura. Tenemos entonces que la

acción de esta teoría es dada por la acción de Einstein-Gauss-Bonnet

$$S_{EGB} [g] = \frac{1}{16\pi} \int d^5x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda + \alpha_2 (R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma})) . \quad (2.8)$$

Las ecuaciones de movimiento de esta teoría son

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \alpha_2 H_{\mu\nu} = 0 , \quad (2.9)$$

donde $G_{\mu\nu}$ corresponde al tensor de Einstein y $H_{\mu\nu}$ corresponde al tensor de Gauss-Bonnet, el cual es dado por

$$H_{\mu\nu} = 2RR_{\mu\nu} - 4R^{\rho\sigma}R_{\mu\rho\nu\sigma} - 4R_{\mu\rho}R_{\nu}{}^{\rho} + 2R_{\mu\rho\sigma\lambda}R_{\nu}{}^{\rho\sigma\lambda} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} (R^2 - 4R_{\rho\sigma}R^{\rho\sigma} + R_{\alpha\beta\rho\sigma}R^{\alpha\beta\rho\sigma}) . \quad (2.10)$$

Si consideramos un ansatz métrico de la siguiente forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Sigma_k^2 \quad (2.11)$$

donde $d\Sigma_k^2$ corresponde a elemento de línea de una superficie tres dimensional con curvatura constante k , donde $k = 1, 0, -1$, y

$$f(r) = k + \frac{r^2}{4\alpha_2} \left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{4M\alpha_2}{3r^4} + \frac{4\alpha_2\Lambda}{3}} \right) , \quad (2.12)$$

Esta solución con simetría esférica fue encontrada primero por Boulware-Deser [74].

Ahora, si consideramos la teoría con carga eléctrica, se tiene

$$S[g, A] = S_{EGB}[g] + S_{Maxwell}[g, A] \quad (2.13)$$

donde

$$S_{Maxwell}[g, A] = \int d^5x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} F^2 \right). \quad (2.14)$$

Para un ansatz métrico de la forma (2.11), tenemos que la función métrica es dada por

$$f(r) = k + \frac{r^2}{4\alpha_2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\alpha_2\Lambda}{3} + \frac{4}{3} \frac{M\alpha_2}{r^4} - \frac{2}{3} \frac{\alpha_2 Q}{r^6}} \right). \quad (2.15)$$

donde M y Q son constantes de integración.

El problema de la reducción dimensional

Cuando se considera la aproximación de espacios productos (reducción dimensional simple) pueden surgir una serie de problemas. Las compactificaciones simples sobre el producto de espacios directos donde la variedad interna es de curvatura constante, usualmente sufren de incompatibilidades a nivel de las ecuaciones de campo. Un ejemplo concreto para ver esto es la compactificación de la teoría de Einstein en un espaciotiempo $D = d + p$ dimensional de la forma $\mathcal{M}_D = \mathcal{M}_d \times \mathcal{K}^p$, donde \mathcal{M}_d es un espaciotiempo d -dimensional y \mathcal{K}^p es

una variedad Euclidiana p -dimensional de curvatura constante. La compatibilidad de las ecuaciones de campo implicará que el tensor de Ricci de la variedad interna, el cual se asume de curvatura constante, debe ser localmente plano y consecuentemente, su grupo de isometría sólo puede ser Abeliano. Por otro lado, para acomodar una constante cosmológica pequeña no nula es necesario ya sea renunciar al vacío de las dimensiones más altas o generalizar la estructura geométrica al incluir términos de curvatura más alta en la acción gravitacional.

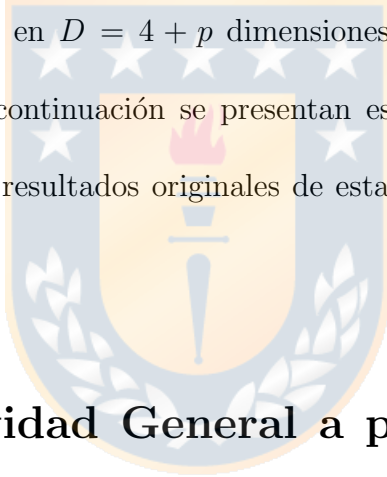
A nivel práctico, incluir campos de materia en más dimensiones ha demostrado ser exitoso para compactificar la teoría de Einstein. Es sabido que vestir la variedad interna con $(p - 1)$ -formas fundamentales $A_{[p-1]}$, con una intensidad de campo $F_{[p]} = dA_{[p-1]}$ proporcional a la forma de volumen de tal espacio, hace posible compactificaciones de la gravedad de Einstein [61, 62]. De hecho, la carga de la p -forma permite una curvatura no trivial de la variedad interna mientras que al mismo tiempo acomoda una constante cosmológica pequeña.

Es natural preguntarse cómo este modelo, conocido como gravedad de Einstein-Gauss-Bonnet (EGB), se compactifica en el producto directo de espaciotiempos. La gravedad de Einstein-Gauss-Bonnet con una constante cosmológica puede ser compactificada fácilmente sobre una variedad interna con curvatura constante no-nula de dimensión p a un espaciotiempo de dimensión $d \geq 5$. La presencia de la densidad de Gauss-Bonnet da lugar a una compactificación trivial pero al precio de un *tunning* de la constante cosmológica con el acomplamiento de Gauss-Bonnet y forzando a la variedad interna a tener una estructura hiperbólica; es decir una curvatura constante negativa. La teoría compactificada se vuelve mal-

comportada, los vectores de Killing de la variedad interna hiperbólica compacta no son definidos globalmente y entonces no es posible acomodar la unificación de gravedad con cualquier otra interacción. Uno podría estar tentado de vestir la variedad interna con p -formas, de todas maneras, se demostró en [63] que esto sólo elimina el tuning de la constante cosmológica con el acoplamiento de Gauss-Bonnet, pero la variedad interna se mantiene hiperbólica. Un escenario en el que se pueden resolver estos problemas, incluye campos de materia en más dimensiones en la forma de p -formas acopladas no-minimalmente, al tensor de curvatura, manteniendo el carácter de segundo orden de la teoría como principio guía. Tal interacción, primero descrita por Horndeski [64] y luego generalizada recientemente en [65] provee la única electrodinámica invariante de gauge acoplada no-minimalmente con ecuaciones de campo de segundo orden en el límite de espaciotiempo plano se reducen a las ecuaciones de campo de Maxwell. Este modelo da lugar a una posible compactificación genérica de la gravedad de Einstein-Gauss-Bonnet a una variedad interna extendible a cualquier teoría de Lovelock. En relación a esas compactificaciones, surge una preocupación natural: es posible compactificar la teoría de Lovelock a la gravedad de Einstein en dimensión cuatro? En cuatro dimensiones las densidades de Lovelock son topológicas o idénticamente cero, sin embargo, luego de la compactificación, las trazas de esas cantidades geométricas sobreviven a nivel de las ecuaciones de campo, dando lugar a una teoría no compatible. En [23] se demostró que es posible compactificar la gravedad de Lovelock a una teoría de Einstein en cuatro dimensiones siempre que la teoría incluya al menos el término cúbico de la serie de Lovelock en

consecuencia con una variedad interna de dimensión $p \geq 3$. El precio a pagar por esta compactificación espontánea, más allá del hecho de que esta comienza en dimensión siete, es que la constante cosmológica y el acoplamiento de Gauss-Bonnet y de Lovelock cúbico están relacionadas uno con el otro de forma tal que no conduce a una simetría extendida, y por lo tanto, se espera que tal relación no sobreviva a correcciones cuánticas.

Uno de los problemas abordados en este trabajo, consiste en la obtención de la teoría de Relatividad General en cuatro dimensiones, comenzando desde la teoría de Lovelock en $D = 4 + p$ dimensiones, con $p \geq 1$, por medio de la compactificación. A continuación se presentan estos resultados, que definen el segundo conjunto de resultados originales de esta tesis y que fueron publicados en [60](in press).



2.2. Relatividad General a partir de la Gravedad de Einstein-Gauss-Bonnet

La compactificación se desarrolla en un producto directo de espacios de la forma $\mathcal{M}_D = \mathcal{M}_4 \times \mathcal{K}^p$, donde \mathcal{K}^p es una variedad interna Euclidiana de curvatura constante. Este proceso de compactificación no produce relaciones no deseadas entre las constantes de acoplamiento de la teoría, así como tampoco a incompatibilidades entre las ecuaciones de campo. El objetivo es desarrollar compactificaciones de la teoría de Lovelock (2.1), (2.2) de orden k en D -dimensiones, comenzando desde un espaciotiempo producto $D = d + p$ dimensional \mathcal{M}_D a un espaciotiempo

d -dimensional \mathcal{M}_d donde \mathcal{K}^p es la variedad interna que corresponde a un espacio Euclideo p -dimensional de curvatura constante. Para esto, es necesario incluir acoplamientos no-minimales entre los tensores de curvatura y campos p -formas, cuya contribución es dictada por la teoría de Electromagnetismo cuasitopológico introducida recientemente por X. H. Feng and H. Lu en [65].

2.2.1. Teoría y ecuaciones de campo

La teoría para los campos p -formas se construye en analogía con el Lagrangiano de Lovelock, es decir, se construye en términos de un polinomio invariante compuesto de tensores de curvatura y de la intensidad de campo de las p -formas correspondientes.

Se definen las formas bi-lineales Z

$$Z^{A_1 \dots A_p}{}_{B_1 \dots B_p} := F^{A_1 \dots A_p} F_{B_1 \dots B_p}, \quad (2.16)$$

donde $F_{[p]} = dA_{[p-1]}$. La nueva interacción se define como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{p-forms} [g, A_{[p-1]}] = & \sum_{n=0}^{[(D-1)/p]} \sum_{k=0}^{[(D-np)/2]} \frac{\beta_k}{2^k (p!)^n} \delta_{B_1 \dots B_{2k} D_1^1 \dots D_1^p \dots D_n^1 \dots D_n^p}^{A_1 \dots A_{2k} C_1^1 \dots C_1^p \dots C_n^1 \dots C_n^p} R^{B_1 B_2}{}_{A_1 A_2} \dots \\ & R^{B_{2k-1} B_{2k}}{}_{A_{2k-1} A_{2k}} \times Z^{D_1^1 \dots D_1^p}{}_{C_1^1 \dots C_1^p} \dots Z^{D_n^1 \dots D_n^p}{}_{C_n^1 \dots C_n^p}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde β_k son las constantes de acoplamiento.

Las ecuaciones de campo son de segundo orden, lo que se puede demostrar utilizando la identidad de Bianchi satisfecha por las p -formas

$$\nabla_{[A_1} F_{B_1 \dots B_p]} = \nabla^{[A_1} F^{B_1 \dots B_p]} = 0 \quad (2.18)$$

así como la siguiente identidad del tensor Z

$$\begin{aligned} \nabla_{[D_1} \nabla^{[C_1} Z^{A_1 \dots A_p]}_{B_1 \dots B_p]} &= \nabla_{[D_1} F^{[A_1 \dots A_p} \nabla^{C_1]} F_{B_1 \dots B_p]} \\ &+ p(-1)^p F^{[A_1 \dots A_p} R^E{}_{[B_1 D_1}{}^{C_1]} F_{B_2 \dots B_p]E}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Note que el orden k puede ser cero y pueden aparecer solo tensores Z en la teoría.

Al requerir que las ecuaciones del campo de materia sean lineales en el campo p -forma, sólo se considerarán Lagrangianos cuadráticos en $F_{[p]}$ en (2.17) y por lo tanto, lineales en Z , es decir, se fija $n = 1$ en (2.17).

Ahora, al considerar la teoría de Lovelock (2.1), (2.2) junto con la interacción (2.17), se obtienen las ecuaciones

$$\sum_{k=0}^{[(D-1)/2]} \alpha_k E_{AB}^{(k)} - \sum_{k=0}^{[(D-p)/2]} \beta_k T_{AB,p}^{(k,1)} = 0, \quad (2.20)$$

donde $E_{AB}^{(k)}$ corresponde al tensor de Lovelock de orden k en la curvatura (2.4) y $T_{AB,p}^{k,1}$ corresponden a los tensores de energía-momentum asociados con (2.17),

dados por

$$\begin{aligned}
T_{AB,p}^{(k,1)} = & \frac{1}{2^{k+1}p!} g_{AB} \delta_{B_1 \dots B_{2k} D_1 \dots D_p}^{A_1 \dots A_{2k} C_1 \dots C_p} R_{A_1 A_2}^{B_1 B_2} \dots R_{A_{2k-1} A_{2k}}^{B_{2k-1} B_{2k}} Z^{D_1 \dots D_p}{}_{C_1 \dots C_p} \\
& - \frac{k}{2^k p!} \delta_{B_1(A_1 \dots B_{2k} D_1 \dots D_p}^{A_1 A_2 \dots A_{2k} C_1 \dots C_p} R_{|B) A_1 A_2}^{B_1} R_{A_3 A_4}^{B_3 B_4} \dots R_{A_{2k-1} A_{2k}}^{B_{2k-1} B_{2k}} Z^{D_1 \dots D_p}{}_{C_1 \dots C_p} \\
& + \frac{2k}{2^k p!} \delta_{(A_1 \dots B_{2k} D_1 \dots D_p}^{A_1 \dots A_{2k} C_1 \dots C_p} g_{A_2|B)} R_{A_3 A_4}^{B_3 B_4} \dots R_{A_{2k-1} A_{2k}}^{B_{2k-1} B_{2k}} \nabla_{A_1} F^{D_1 \dots D_p} \nabla^{B_2} F_{C_1 \dots C_p} \\
& + \frac{2pk}{2^k p!} \delta_{(A_1 \dots B_{2k} D_1 \dots D_p}^{A_1 \dots A_{2k} C_1 \dots C_p} g_{A_2|B)} R_{A_3 A_4}^{B_3 B_4} \dots R_{A_{2k-1} A_{2k}}^{B_{2k-1} B_{2k}} R_{E}^{D_1}{}_{A_1}{}^{B_2} Z^{ED_2 \dots D_p}{}_{C_1 \dots C_p} \\
& - \frac{p}{2^k p!} \delta_{B_1 \dots B_{2k} (A_1 \dots D_p}^{A_1 \dots A_{2k} C_1 \dots C_p} R_{A_1 A_2}^{B_1 B_2} \dots R_{A_{2k-1} A_{2k}}^{B_{2k-1} B_{2k}} Z_{|B)}{}^{D_2 \dots D_p}{}_{C_1 \dots C_p} . \quad (2.21)
\end{aligned}$$

Para el campo de gauge se tiene

$$\sum_{k=0}^{[(D-p)/2]} \frac{\beta_k}{2} \delta_{B_1 \dots B_{2k} D_1 \dots D_p}^{A_1 \dots A_{2k} C_1 \dots C_p} R_{A_1 A_2}^{B_1 B_2} \dots R_{A_{2k-1} A_{2k}}^{B_{2k-1} B_{2k}} \nabla^{D_1} F_{C_1 \dots C_p} = 0 . \quad (2.22)$$

En la siguiente sección se presenta la compactificación de la gravedad de EGB desde $D = d + p$ dimensiones a la teoría de Einstein en cuatro dimensiones.

2.2.2. Compactificando la gravedad de Einstein-Gauss-Bonnet a la teoría de Einstein en dimensión cuatro

Para que exista la compactificación, la interacción (2.17) debe contener todos los términos hasta orden cuadrático en el tensor de Riemann. La acción de esta

teoría es dada por

$$\begin{aligned}
S [g, A_{[p-1]}] = & \int \sqrt{-g} d^{d+p} x \left(R - 2\Lambda + \frac{\alpha_2}{4} \delta_{B_1 \dots B_4}^{A_1 \dots A_4} R^{B_1 B_2}_{A_1 A_2} R^{B_3 B_4}_{A_3 A_4} \right. \\
& - \frac{1}{2p} Z^{C_1 \dots C_p}_{C_1 \dots C_p} + \frac{\beta_1}{2p!} \delta_{B_1 B_2 D_1 \dots D_p}^{A_1 A_2 C_1 \dots C_p} R^{B_1 B_2}_{A_1 A_2} Z^{D_1 \dots D_p}_{C_1 \dots C_p} \\
& \left. + \frac{\beta_2}{4p!} \delta_{B_1 \dots B_4 D_1 \dots D_p}^{A_1 \dots A_4 C_1 \dots C_p} R^{B_1 B_2}_{A_1 A_2} R^{B_3 B_4}_{A_3 A_4} Z^{D_1 \dots D_p}_{C_1 \dots C_p} \right) . \quad (2.23)
\end{aligned}$$

Al desarrollar la variación de (2.23) con respecto al campo métrico se obtiene

$$G_{AB} + \Lambda g_{AB} + \alpha_2 H_{AB} = T_{AB}^{(0,1)} + \beta_1 T_{AB}^{(1,1)} + \beta_2 T_{AB}^{(2,1)} , \quad (2.24)$$

donde G_{AB} corresponde al tensor de Einstein y H_{AB} es el tensor de Gauss-Bonnet, el cual es dado por

$$H_{AB} = 2R R_{AB} - 4R_{AC} R^C_B - 4R^{CD} R_{ACBD} + 2R_{ACDE} R_B{}^{CDE} - \frac{1}{2} g_{AB} \mathcal{GB} , \quad (2.25)$$

donde $\mathcal{GB} = R^2 - 4R_{AB} R^{AB} + R_{ABCD} R^{ABCD}$ es la densidad de Gauss-Bonnet.

Los tensores de energía-momentum son dados por

$$T_{AB,p}^{(0,1)} = \frac{1}{2} Z_B{}^{C_2 \dots C_p}{}_{AC_2 \dots C_p} - \frac{1}{4p} g_{AB} Z^{C_1 \dots C_p}_{C_1 \dots C_p} , \quad (2.26)$$

mientras que los sectores acoplados no-minimalmente contribuyen como

$$\begin{aligned}
T_{AB,p}^{(1,1)} &= \frac{1}{4p!} g_{AB} \delta_{B_1 B_2 D_1 \dots D_p}^{A_1 A_2 C_1 \dots C_p} R_{A_1 A_2}^{B_1 B_2} Z^{D_1 \dots D_p}{}_{C_1 \dots C_p} \\
&\quad - \frac{p}{2p!} \delta_{B_1 B_2 (A | \dots D_p}^{A_1 A_2 C_1 \dots C_p} R_{A_1 A_2}^{B_1 B_2} Z_{|B)}{}^{D_2 \dots D_p}{}_{C_1 \dots C_p} \\
&\quad - \frac{1}{2p!} \delta_{B_1 (A | D_1 \dots D_p}^{A_1 A_2 C_1 \dots C_p} R^{B_1}{}_{|B) A_1 A_2} Z^{D_1 \dots D_p}{}_{C_1 \dots C_p} \\
&\quad + \frac{1}{p!} \delta_{(A | B_2 D_1 \dots D_p}^{A_1 A_2 C_1 \dots C_p} g_{A_2 | B)} \nabla_{A_1} F^{D_1 \dots D_p} \nabla^{B_2} F_{C_1 \dots C_p} \\
&\quad + \frac{p}{p!} \delta_{(A | B_2 D_1 \dots D_p}^{A_1 A_2 C_1 \dots C_p} g_{A_2 | B)} R^{D_1}{}_{E}{}^{B_2}{}_{A_1} Z^{E D_2 \dots D_p}{}_{C_1 \dots C_p} \quad (2.27)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
T_{AB,p}^{(2,1)} &= \frac{1}{8p!} g_{AB} \delta_{B_1 \dots B_4 D_1 \dots D_p}^{A_1 \dots A_4 C_1 \dots C_p} R_{A_1 A_2}^{B_1 B_2} R_{A_3 A_4}^{B_3 B_4} Z^{D_1 \dots D_p}{}_{C_1 \dots C_p} \\
&\quad - \frac{p}{4p!} \delta_{B_1 \dots B_4 (A | \dots D_p}^{A_1 \dots A_4 C_1 \dots C_p} R_{A_1 A_2}^{B_1 B_2} R_{A_3 A_4}^{B_3 B_4} Z_{|B)}{}^{D_2 \dots D_p}{}_{C_1 \dots C_p} \\
&\quad - \frac{1}{2p!} \delta_{B_1 (A | \dots B_4 D_1 \dots D_p}^{A_1 A_2 \dots A_4 C_1 \dots C_p} R^{B_1}{}_{|B) A_1 A_2} R_{A_3 A_4}^{B_3 B_4} Z^{D_1 \dots D_p}{}_{C_1 \dots C_p} \\
&\quad + \frac{1}{p!} \delta_{(A | \dots B_4 D_1 \dots D_p}^{A_1 \dots A_4 C_1 \dots C_p} g_{A_2 | B)} R_{A_3 A_4}^{B_3 B_4} \nabla_{A_1} F^{D_1 \dots D_p} \nabla^{B_2} F_{C_1 \dots C_p} \\
&\quad + \frac{p}{p!} \delta_{(A | \dots B_4 D_1 \dots D_p}^{A_1 \dots A_4 C_1 \dots C_p} g_{A_2 | B)} R^{D_1}{}_{E}{}^{B_2}{}_{A_1} R_{A_3 A_4}^{B_3 B_4} Z^{E D_2 \dots D_p}{}_{C_1 \dots C_p} \cdot \quad (2.28)
\end{aligned}$$

Al realizar la variación con respecto al campo de gauge se obtienen las siguientes ecuaciones de segundo orden tipo Maxwell

$$\begin{aligned}
(p-1)! \nabla^{D_1} F_{D_1 \dots D_p} - \beta_1 \delta_{B_1 B_2 D_1 \dots D_p}^{A_1 A_2 C_1 \dots C_p} R^{B_1 B_2}{}_{A_1 A_2} \nabla^{D_1} F_{C_1 \dots C_p} \\
- \frac{\beta_2}{2} \delta_{B_1 \dots B_4 D_1 \dots D_p}^{A_1 \dots A_4 C_1 \dots C_p} R^{B_1 B_2}{}_{A_1 A_2} R^{B_3 B_4}{}_{A_3 A_4} \nabla^{D_1} F_{C_1 \dots C_p} = 0 \cdot \quad (2.29)
\end{aligned}$$

Para compactificar en un espacio producto $\mathcal{M}_D = \mathcal{M}_d \times \mathcal{K}^p$, se considera la siguiente métrica

$$ds^2 = g_{AB}dx^A dx^B = \tilde{g}_{\mu\nu}(y) dy^\mu dy^\nu + \hat{g}_{ij}(z) dz^i dz^j. \quad (2.30)$$

donde $\tilde{g}_{\mu\nu}dy^\mu dy^\nu$ representa el espaciotiempo d -dimensional \mathcal{M}_d , mientras que $\hat{g}_{ij}(z) dz^i dz^j$ es la variedad Euclidiana p -dimensional \mathcal{K}^p

$$\hat{g}_{ij}(z) dz^i dz^j = \frac{d\vec{z} \cdot d\vec{z}}{\left(1 + \frac{\gamma}{4} \sum_{j=1}^p z_j^2\right)^2} \quad (2.31)$$

de curvatura constante, es decir,

$$\hat{R}_{ijkl} = \gamma(\hat{g}_{ik}\hat{g}_{jl} - \hat{g}_{il}\hat{g}_{jk}) \quad (2.32)$$

con γ definiendo el radio de curvatura correspondiente $R_0 = |\gamma|^{-1}$. En lo que sigue, los objetos con tilde están definidos intrínsecamente en el espaciotiempo d -dimensional (la brana), mientras que cantidades con un gorro hacen referencia a cantidades en la variedad interna de dimensión p .

De acuerdo con la configuración considerada para las p -formas, el campo de gauge A_{p-1} vive en la variedad interna y en consecuencia estos deben ser proporcionales a la forma de volumen de \mathcal{K}^p , esto es

$$\hat{F}_{i_1 \dots i_p} = \frac{q_m}{\left(1 + \frac{\gamma}{4} \sum_{j=1}^p z_j^2\right)^p} \hat{e}_{i_1 \dots i_p}, \quad (2.33)$$

donde q_m juega el rol de una carga magnética generalizada. Esta configuración satisface inmediatamente la ecuación de campo gauge (2.29).

En este ansatz métrico, las ecuaciones de campo (2.24) se separan en las ecuaciones de campo en la brana y en la variedad interna, lo que da como resultado

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\gamma}{2} p (p-1) + \Lambda - \frac{\alpha_2}{2} \gamma^2 p (p-1) (p-2) (p-3) + \frac{q_m^2}{4} (p-1)! \right] \tilde{g}_{\mu\nu} \\ & + (\alpha_2 + \beta_2 q_m^2 p!) \tilde{H}_{\mu\nu} + [1 + 2\alpha_2 \gamma p (p-1) + \beta_1 q_m^2 p!] \tilde{G}_{\mu\nu} = 0, \end{aligned} \quad (2.34)$$

y

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\gamma}{2} (p-1) (p-2) \hat{g}_{ij} + \Lambda \hat{g}_{ij} - \frac{\alpha_2}{2} \gamma^2 (p-1) (p-2) (p-3) (p-4) \hat{g}_{ij} \right. \\ & \left. - \frac{q_m^2}{4} (p-1)! \hat{g}_{ij} \right] + \left[-\frac{1}{2} \hat{g}_{ij} - \alpha_2 \gamma (p-1) (p-2) \hat{g}_{ij} + \frac{\beta_1}{2} q_m^2 p! \hat{g}_{ij} \right] \tilde{R}_d \\ & \left(-\frac{\alpha_2}{2} \hat{g}_{ij} + \frac{\beta_2}{2} q_m^2 p! \hat{g}_{ij} \right) \tilde{\mathcal{G}}\mathcal{B}_d = 0. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Para analizar la compatibilidad de las ecuaciones, se presenta la traza de ambas ecuaciones, las cuales son dadas por

$$\begin{aligned} & \left[-\gamma d p (p-1) + 2d\Lambda - \alpha_2 \gamma^2 d p (p-1) (p-2) (p-3) + \frac{q_m^2}{2} d (p-1)! \right] \\ & + (\alpha_2 + \beta_2 q_m^2 p!) (4-d) \tilde{\mathcal{G}}\mathcal{B}_d + [1 + 2\alpha_2 \gamma p (p-1) + \beta_1 q_m^2 p!] (2-d) \tilde{R}_d = 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

y

$$\begin{aligned}
& (-\alpha_2 p + \beta_2 q_m^2 p p!) \tilde{\mathcal{G}}\mathcal{B}_d + [-p - 2\alpha_2 \gamma p (p-1)(p-2) + \beta_1 q_m^2 p p!] \tilde{R}_d \\
& + [-\gamma p (p-1)(p-2) + 2p\Lambda - \alpha_2 \gamma^2 p (p-1)(p-2)(p-3)(p-4) \\
& \qquad \qquad \qquad - \frac{q_m^2}{2} p (p-1)!] = 0 .
\end{aligned} \tag{2.37}$$

En el caso $d = 4$ y $p = 2$, las ecuaciones (2.36) y (2.37) son

$$(2\beta_1 q_m^2 + 4\gamma\alpha_2 + 1) \tilde{R}_4 + (4\gamma - 4\Lambda - q_m^2) = 0 , \tag{2.38}$$

$$(4\beta_2 q_m^2 - 2\alpha_2) \tilde{\mathcal{G}}\mathcal{B}_4 + (4\beta_1 q_m^2 - 2) \tilde{R}_4 + (4\Lambda - q_m^2) = 0 , \tag{2.39}$$

cuya compatibilidad se asegura si

$$q_m^2 = \frac{\alpha_2}{2\beta_2}, \quad \gamma = -\frac{1}{4} \frac{24\Lambda\alpha_2\beta_1\beta_2 - 8\Lambda\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_1 - 3\alpha_2\beta_2}{\beta_2(8\Lambda\alpha_2\beta_2 - \alpha_2^2 - 4\alpha_2\beta_1 + 4\beta_2)} , \tag{2.40}$$

donde vemos que se fija la carga magnética en términos de los acoplamientos α_2 y β_2 y se fija también el radio de compactificación γ .

Del caso anterior, vemos que la presencia de la constante β_2 , la cual viene del término de orden $k = 2$ en (2.17), es necesaria para la compactificación, ya que en caso contrario, aunque $\mathcal{G}\mathcal{B}_4$ es topológico en $d = 4$ su presencia a nivel de las ecuaciones de campo hace imposible la compactificación, de hecho, restringe el sistema de tal manera que no se permiten soluciones de Relatividad General

(ver también [66] y [67]). Se observa además que α_2 y β_2 están relacionados por medio de la carga magnética, una constante de integración que puede tomar cualquier valor, y en consecuencia no hay un tuning entre los acoplamientos de la teoría. Esto está en marcado contraste con lo que ocurre en [23], donde para que exista la compactificación se debe incluir una interacción cúbica de Lovelock cuyo acoplamiento α_3 se fija directamente en términos de α_2 y Λ .

Esta compactificación puede ser desarrollada desde dimensión seis debido al hecho de que todos los términos en (2.17) no son topológicos y en consecuencia contribuyen no-trivialmente en la dimensión crítica, opuesto a la interacción de Lovelock cúbica la cual es no-topológica comenzando a partir de la dimensión siete.

Finalmente, es interesante notar que en un escenario en el que los términos de mayor curvatura surgen como correcciones apropiadas de una teoría de campo efectiva, $\alpha_2 \sim M^{-2} \sim \beta_1$ mientras que $\beta_2 \sim M^{-4}$, donde M es la escala de energía que define el enfoque efectivo, es decir, las cantidades físicas deben expandirse en el límite M grande. A partir de la segunda relación en (2.40), se puede mostrar que el radio de compactificación $R_0^2 \sim M^{-2}$, y por lo tanto el esquema perturbativo es efectivamente consistente con tener una dimensión extra perturbativamente pequeña y compacta.

Por lo tanto, luego de fijar el radio de compactificación así como también el valor de la carga magnética como en (2.40), uno puede obtener consistentemente una ecuación de Einstein inducida en la brana, la cual se puede leer de (2.34)

$$\frac{1}{16\pi G_{\text{eff}}} (G_{\mu\nu} + \Lambda_{\text{eff}} g_{\mu\nu}) = 0, \quad (2.41)$$

donde hemos definido una constante de Newton y constante cosmológica efectiva como

$$\begin{aligned} \Lambda_{\text{eff}} &= \frac{(8\Lambda\beta_2 - \alpha_2)}{16(\beta_2 - \alpha_2\beta_1)}, \\ G_{\text{eff}} &= \frac{1}{32\pi} \frac{\beta_2(8\Lambda\alpha_2\beta_2 - \alpha_2^2 - 4\alpha_2\beta_1 + 4\beta_2)}{(\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(\alpha_2^2 + 2\alpha_2\beta_1 + 8\Lambda\alpha_2\beta_2 + 2\beta_2)}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

Ahora, es posible resolver las ecuaciones de campo por ejemplo, para la siguiente 2-brana negra de 6 dimensiones (caso estático esféricamente simétrico)

$$ds^2 = - \left(\frac{r^2}{l_{\text{eff}}^2} - \frac{\mu}{r} + K \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(\frac{r^2}{l_{\text{eff}}^2} - \frac{\mu}{r} + K \right)} + r^2 d\Sigma_K^2 + \frac{dz_1^2 + dz_2^2}{\left[1 + \frac{\gamma}{4}(z_1^2 + z_2^2) \right]^2} \quad (2.43)$$

donde K corresponde a la curvatura de la variedad transversal $d\Sigma_K^2$, μ es una constante de integración relacionada con la masa ADM y $l_{\text{eff}}^2 = -3/\Lambda_{\text{eff}}$, el radio (A)dS efectivo

$$l_{\text{eff}}^{-2} = \frac{1}{48} \left(\frac{8\Lambda\beta_2 - \alpha_2}{\alpha_2\beta_1 - \beta_2} \right). \quad (2.44)$$

La brana cuatridimensional es dada por un agujero negro de Schwarzschild (A)dS con una constante cosmológica efectiva, es decir, una solución de Einstein.

2.2.3. Caso escalar: variedad interna uno-dimensional

Para compactificar la gravedad de Einstein-Gauss-Bonnet comenzando desde dimensión cinco, es necesario considerar una variedad interna uno-dimensional, y en consecuencia, ésta debe estar vestida por 0-formas, es decir, campos escalares. Esta aproximación se ha aplicado exitosamente para construir cuerdas y p -branas negras homogéneas en AdS en RG y teorías de Lovelock [19, 57, 68, 69, 99]. En analogía con el caso presentado anteriormente, en el cual las formas fundamentales eran proporcionales a la forma de volumen de la variedad interna, se requiere que los campos escalares sean lineales en la coordenada de la variedad interna, obteniendo de esta forma, una solución inmediata a la correspondiente ecuación de Klein-Gordon. La interacción (2.17) se modifica de forma tal que ahora los tensores de curvatura están acoplados con una combinación específica de primeras derivadas del escalar. Se considera entonces

$$\mathcal{L}_{scalar}[g, \phi_i] = -\frac{1}{2^{2k+1}} \delta_{DB_1 \dots B_{2k}}^{CA_1 \dots A_{2k}} R^{B_1 B_2}_{A_1 A_2} \dots R^{B_{2k-1} B_{2k}}_{A_{2k-1} A_{2k}} \nabla_C \phi_i \nabla^D \phi_i \quad (2.45)$$

lo que es equivalente al acoplamiento cinético no-minimal generalizado controlado por el tensor de Lovelock de orden k

$$\mathcal{L}_{scalar}[g, \phi_i] = -\frac{1}{2^{2k+1}} E^{CD}_{(k)} \nabla_C \phi_i \nabla_D \phi_i . \quad (2.46)$$

Al igual que en el caso anterior, se trunca la teoría a orden $k = 2$, por lo que el principio de acción es

$$\begin{aligned}
S[g, \phi, \varphi] = \int \sqrt{-g} d^5 x \left[R - 2\Lambda + \frac{\alpha_2}{4} \delta_{B_1 \dots B_4}^{A_1 \dots A_4} R^{B_1 B_2}{}_{A_1 A_2} R^{B_3 B_4}{}_{A_3 A_4} \right. \\
\left. - \frac{1}{2} g^{AB} \nabla_A \phi \nabla_B \phi + \frac{\beta_1}{8} G^{AB} \nabla_A \phi \nabla_B \phi + \frac{\gamma_1}{64} H^{AB} \nabla_A \phi \nabla_B \phi \right. \\
\left. - \frac{1}{2} g^{AB} \nabla_A \varphi \nabla_B \varphi + \frac{\beta_2}{8} G^{AB} \nabla_A \varphi \nabla_B \varphi + \frac{\gamma_2}{64} H^{AB} \nabla_A \varphi \nabla_B \varphi \right]
\end{aligned} \tag{2.47}$$

donde, para evitar un tuning no deseado entre los acoplamientos, es necesario introducir al menos dos campos escalares.

La teoría resultante pertenece al sector de la gravedad de Horndeski, la teoría tenso-escalar más general con ecuaciones de campo de segundo orden [70]. El acoplamiento cinético con el tensor de Einstein corresponde al sector cuadrático de la gravedad de Horndeski en dimensión cuatro mientras que el acoplamiento con el tensor de Gauss-Bonnet aparece naturalmente en dimensión mayor o igual a cinco.

Al realizar la variación con respecto a la métrica se obtiene

$$G_{AB} + \Lambda g_{AB} + \alpha_2 H_{AB} = T_{\phi_i AB}^{(0)} + \beta_1 T_{\phi_i AB}^{(1)} + \beta_2 T_{\phi_i AB}^{(2)}, \tag{2.48}$$

donde

$$T_{\phi_i AB}^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\partial_A \phi^i \partial_B \phi_i - \frac{1}{2} g_{AB} \partial_C \phi_i \partial^C \phi_i \right), \tag{2.49}$$

$$\begin{aligned}
T_{\phi_i AB}^{(1)} = & \frac{1}{2} \left(\partial_A \phi_i \partial_B \phi_i R - 2 \partial_C \partial_{(A} \phi_i R_{B)}^C - \partial_C \phi_i \partial_D \psi R_A^C{}^D - \nabla_A \nabla^C \phi_i \nabla_B \nabla_C \phi_i \right. \\
& + \nabla_A \nabla_B \phi_i \square \phi_i + \frac{1}{2} G_{AB} (\partial \phi_i)^2 - g_{AB} \left[-\frac{1}{2} \nabla^C \nabla^D \phi_i \nabla_C \nabla_D \phi_i + \frac{1}{2} (\square \phi_i)^2 \right. \\
& \left. \left. - \partial_C \phi_i \partial_D \phi_i R^{CD} \right] \right) , \tag{2.50}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
T_{\phi_i AB}^{(2)} = & -\frac{1}{64} g_{AB} \nabla_C \phi_i \nabla^D \phi_i \delta_{DB_1 \dots B_4}^{CA_1 \dots A_4} R^{B_1 B_2}{}_{A_1 A_2} R^{B_3 B_4}{}_{A_3 A_4} \\
& + \frac{1}{32} \nabla_C \phi_i \nabla_{(A} \phi_i \delta_{|B) B_1 \dots B_4}^{CA_1 \dots A_4} R^{B_1 B_2}{}_{A_1 A_2} R^{B_3 B_4}{}_{A_3 A_4} \\
& + \frac{1}{16} \nabla_C \phi_i \nabla^D \phi_i \delta_{DB_1 \dots (A}^{CA_1 \dots A_4} R^{B_1 B_2}{}_{A_1 A_2} R^{B_3}{}_{|B) A_3 A_4} \\
& + \frac{1}{8} \nabla^{B_3} \nabla_C \phi_i \nabla_{A_3} \nabla^D \phi_i \delta_{DB_1 \dots (B}^{CA_1 \dots A_4} R^{B_1 B_2}{}_{A_1 A_2} g_{|A) A_4} \\
& + \frac{1}{16} \nabla_C \phi_i \nabla^E \phi_i \delta_{DB_1 \dots (B}^{CA_1 \dots A_4} R^{B_1 B_2}{}_{A_1 A_2} R_{A_3 E}{}^{B_3 D} g_{|A) A_4} , \tag{2.51}
\end{aligned}$$

donde ϕ_i representa los campos escalares y $i = 1, 2$. Por otro lado, los campos escalares satisfacen

$$\left(g^{AB} \nabla_A \nabla_B \phi_i - \frac{\beta_i}{4} G^{AB} \nabla_A \nabla_B \phi_i - \frac{\gamma_i}{32} H^{AB} \nabla_A \nabla_B \phi_i \right) = 0 . \tag{2.52}$$

Se considera entonces un espacio producto de cinco dimensiones $\mathcal{M}_D = \mathcal{M}_4 \times \mathbb{R}$ cuya métrica puede ser escrita como

$$ds^2 = d\tilde{s}_4^2 + dz^2 . \tag{2.53}$$

Como se mencionó, cada campo escalar es lineal en la coordenada de la variedad

interna, por lo tanto

$$\phi(z) = \lambda_0 z, \quad \varphi(z) = \lambda_1 z, \quad (2.54)$$

donde λ_0 y λ_1 son constantes de integración, y estos campos son solución de la ecuación (2.52) correspondiente. Ahora, al calcular las ecuaciones de campo en la brana y en la coordenada extra, y tomando la traza de estas, se obtiene

$$(4\Lambda + \lambda_0^2 + \lambda_1^2) - \left(1 - \frac{\beta_1}{4}\lambda_0^2 - \frac{\beta_2}{4}\lambda_1^2\right) \tilde{R} = 0 \quad (2.55)$$

y

$$\left(-2\Lambda + \frac{\lambda_0^2}{2} + \frac{\lambda_1^2}{2}\right) + \left(1 + \frac{\beta_1}{4}\lambda_0^2 + \frac{\beta_2}{4}\lambda_1^2\right) \tilde{R} + \left(\alpha_2 - \frac{\gamma_1}{8}\lambda_0^2 - \frac{\gamma_2}{8}\lambda_1^2\right) \tilde{\mathcal{G}}\mathcal{B} = 0 \quad (2.56)$$

La compatibilidad de las ecuaciones requiere

$$\begin{aligned} \lambda_0^2 &= \frac{8\alpha_2 - \gamma_2\lambda_1^2}{\gamma_1}, \\ \Lambda &= -\frac{1}{4} \frac{(\gamma_1\lambda_1^2 - \gamma_2\lambda_1^2 + 8\alpha_2)(-\beta_1\gamma_2\lambda_1^2 + \beta_2\gamma_1\lambda_1^2 + 8\alpha_2\beta_1 + 12\gamma_1)}{\gamma_1(-3\beta_1\gamma_2\lambda_1^2 + 3\beta_2\gamma_1\lambda_1^2 + 24\alpha_2\beta_1 + 4\gamma_1)}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Para un ansatz esféricamente simétrico en la brana, al resolver las ecuaciones de Einstein obtenemos

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{l_{\text{eff}}^2} - \frac{\mu}{r} + K\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(\frac{r^2}{l_{\text{eff}}^2} - \frac{\mu}{r} + K\right)} + r^2 d\Sigma_K^2 + dz^2 \quad (2.58)$$

donde la constante cosmológica efectiva, por medio de (2.57), es dada por

$$l_{\text{eff}}^{-2} = \frac{1}{6} \frac{(\gamma_1 - \gamma_2) \lambda_1^2 + 4\Lambda\gamma_1 + 8\alpha_2}{(-\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) \lambda_1^2 + 8\alpha_2\beta_1 - 2\gamma_1}. \quad (2.59)$$

Es interesante notar que, de aquí, es posible obtener una cuerda negra de Schwarzschild, es decir, una solución de cuerda negra cinco dimensional para (2.48) en la cual la brana cuádrimensional es dada por un agujero negro de Schwarzschild. Esto puede ser realizado al considerar el caso en el cual $\Lambda = \lambda_0 = 0$. Para tal caso, incluso la interacción β_1 puede ser despreciada y el resultado no es más que la cuerda negra estándar

$$ds^2 = - \left(K - \frac{\mu}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(K - \frac{\mu}{r} \right)} + r^2 d\Sigma_K^2 + dz^2 \quad (2.60)$$

Aquí observamos la evidente relación entre cuerdas negras y compactificaciones en espacios de productos directos. La cuerda negra original de Schwarzschild cinco dimensional existe porque Relatividad General admite compactificaciones cilíndricas de la forma $\mathcal{M}_D = \mathcal{M}_4 \times \mathbb{R}(\mathcal{S}^1)$. Esta solución es particularmente interesante porque, como se mencionó anteriormente, en cinco dimensiones, estas configuraciones sufren de una inestabilidad de longitud de onda larga, la inestabilidad de Gregory-Laflamme [13], revelando la debilidad de la censura cósmica en dimensiones superiores [94]. Uno podría conjeturar que esto está relacionado con el hecho de que el agujero negro de Schwarzschild es solución de Relatividad General, y que al elevar la solución a una cuerda negra de cinco dimensiones seguimos bajo el dominio de la misma teoría, es decir, resolviendo las ecuaciones de

campo de Einstein en dimensión cinco. De todas maneras, en cinco dimensiones la teoría de Einstein no es la teoría gravitacional más general que se tiene a mano, de hecho, en cinco dimensiones la gravedad de Einstein-Gauss-Bonnet juega ese rol. Por medio de nuestro procedimiento de compactificación, hemos sido capaces de construir una cuerda negra en la gravedad de Einstein-Gauss-Bonnet cinco dimensional (2.58),(2.60) la cual representa precisamente una solución de Einstein en la brana cuadridimensional. En consecuencia, sería atractivo estudiar su estabilidad mecánica al menos en el régimen lineal.

2.2.4. Cantidades termodinámicas

A continuación, se presenta el análisis termodinámico de la solución de 2-brana negra 6-dimensional (2.43)¹. La temperatura de la 2-brana se obtiene, como es usual, al requerir una continuación Euclidiana suave de la solución, entonces

$$T = \frac{r_+}{2\pi l_{\text{eff}}^2} + \frac{\mu(r_+)}{4\pi r_+^2}, \quad (2.61)$$

donde $r = r_+$ denota la ubicación del horizonte del agujero negro, la longitud AdS efectiva es dada en (2.44) y $\mu(r_+)$ define como

$$\mu(r_+) = \frac{r_+ (r_+^2/l_{\text{eff}}^2 + 1)}{2G_{\text{eff}}}. \quad (2.62)$$

Por otro lado, por medio de la fórmula de Wald [71] se obtiene que la densidad

¹La cuerda negra 5-dimensional (2.58) sigue el mismo procedimiento.

de entropía es

$$s = \frac{S}{\text{Vol}[\mathcal{K}^2]} = \frac{\sigma r_+^2}{4G_{\text{eff}}} + 32\pi\sigma K\alpha_2, \quad (2.63)$$

con G_{eff} definida en (2.42). Aquí $\text{Vol}[\mathcal{K}^2]$ representa el volumen de una variedad interna 2-dimensional \mathcal{K}^2 , mientras que σ corresponde al volumen de la variedad transversal del agujero negro cuadridimensional en la brana. Es interesante notar que hay dos tipos de contribuciones a la entropía del agujero negro. Ya que la teoría efectiva que dicta la dinámica de la variedad cuadridimensional es Relatividad General, la entropía del agujero negro tiene una contribución que va como r_+^2 , es decir como el área del horizonte de eventos, como era de esperar, se recupera una fórmula de Bekenstein-Hawking efectiva. En efecto, esta contribución adquiere correcciones de todos los acoplamientos de materia de curvatura más alta, y puede ser escrita como $A/(4G_{\text{eff}})$. También vale la pena señalar que hay una contribución constante extra y universal a la entropía, que proviene de la presencia del término de Gauss-Bonnet de mayor dimensión.

Usando la primera ley de la termodinámica, $dm = Tds$, obtenemos que la constante μ es identificada con la masa de la solución por

$$m = \frac{\sigma r_+ (r_+^2 + Kl_{\text{eff}}^2)}{8G_{\text{eff}}l_{\text{eff}}^2\pi} = \frac{\mu\sigma}{8\pi G_{\text{eff}}}, \quad (2.64)$$

donde $r_+ = r_+(\mu)$. Se observa que no hay ningún gap en la masa, es decir, la densidad de masa llega a cero en el límite $r_+ \rightarrow 0$. Como se espera, el invariante

de Kretschmann para (2.43) cuando $r \rightarrow 0$ se comporta como

$$R_{ABCD}R^{ABCD} = \mathcal{O}(r^{-6}), \quad (2.65)$$

revelando la existencia de una singularidad de curvatura ubicada en el origen.

Es muy interesante analizar el efecto del término constante en la entropía, inducido por los términos de mayor curvatura en dimensiones superiores, que conducen a una reducción dimensional consistente gracias al campo de Maxwell acoplado no-mínimamente. Considerando la temperatura, entropía y masa, respectivamente dadas en (2.61), (2.63) y (2.64), se encuentra la siguiente expresión para la energía libre de Helmholtz

$$\frac{F(r_+)}{\text{Vol}[\mathcal{K}^2]} = \frac{r_+}{4G_{\text{eff}}} \left(1 - \frac{r_+^2}{l_{\text{eff}}^2} \right) - 32\pi\alpha_2 \left(\frac{3r_+}{l_{\text{eff}}^2} + \frac{1}{r_+} \right), \quad (2.66)$$

donde nos hemos enfocado en el caso esféricamente simétrico, es decir, hemos fijado $\sigma = 4\pi$ y $K = 1$. Ya que la temperatura no es modificada con respecto a la de Schwarzschild-AdS, esta toma un valor mínimo, en el cual la energía libre se reduce a

$$\frac{F(T_{\text{min}})}{\text{Vol}[\mathcal{K}^2]} = 2\sqrt{3}l_{\text{eff}} \left(\frac{1}{36G_{\text{eff}}} - \frac{32\pi\alpha_2}{l_{\text{eff}}^2} \right). \quad (2.67)$$

Note que $F(T_{\text{min}})$ puede tener ambos signos dependiendo en los valores precisos del acoplamiento de Gauss-Bonnet, y la presencia de la constante cosmológica y de Newton efectivas, lo cual permite modificar el signo incluso cuando los términos de mayor curvatura son de naturaleza perturbativa. También es interesante

observar que para agujeros negros arbitrariamente pequeños la energía libre llega a menos infinito debido a la presencia del acoplamiento Gauss-Bonnet α_2 , en marcado contraste con el comportamiento de agujeros negros pequeños en GR cuya energía libre se anula asintóticamente. Sin embargo la presencia del término aditivo en la entropía, fija un límite inferior en la masa de los agujeros negros y consecuentemente un límite inferior en su radio. Este límite estandar viene de considerar un proceso de fusión de agujeros negro idealizado, cuasiestático donde los agujeros negros iniciales tienen masas M_1 y M_2 y, sin tener en cuenta la radiación gravitacional, la variación de la entropía es

$$\Delta S = 8\pi G_{\text{eff}} M_1 M_2 - 128\pi^2 \alpha_2 - \frac{64\pi G_{\text{eff}}^3}{l_{\text{eff}}^2} M_1 M_2 (2M_1^2 + 3M_1 M_2 + 2M_2^2) + \mathcal{O}(l_{\text{eff}}^{-4}), \quad (2.68)$$

donde $\Delta S = S_{\text{final}} - S_{\text{initial}}$. Ya que la expresión para l_{eff} finito no es muy iluminadora, se ha tomado la expansión para l_{eff} grande. En el caso asintóticamente plano, la positividad de ΔS claramente impone un límite inferior en las masas de los agujeros negros.

La figura 2.1 representa las curvas de energía libre para diferentes valores de los parámetros. Dado que no hay ninguna otra constante de integración, más allá de la masa, el ensamble apropiado es el ensamble canónico y, por lo tanto, la configuración más favorecida estadísticamente es la que minimiza la energía libre de Helmholtz para una temperatura fija dada. Es también importante notar que la configuración de vacío, es decir, la solución con $F(T)$ nulo es igual al $\text{AdS}_4 \times S^2$ termal con un flujo de campo de Maxwell no-nulo en la esfera interna

bidimensional compactificada. Notablemente, cuando $F(T_{\min})$ es negativo, no hay una transición Hawking-Page [72] y el agujero negro grande siempre domina el ensamble.

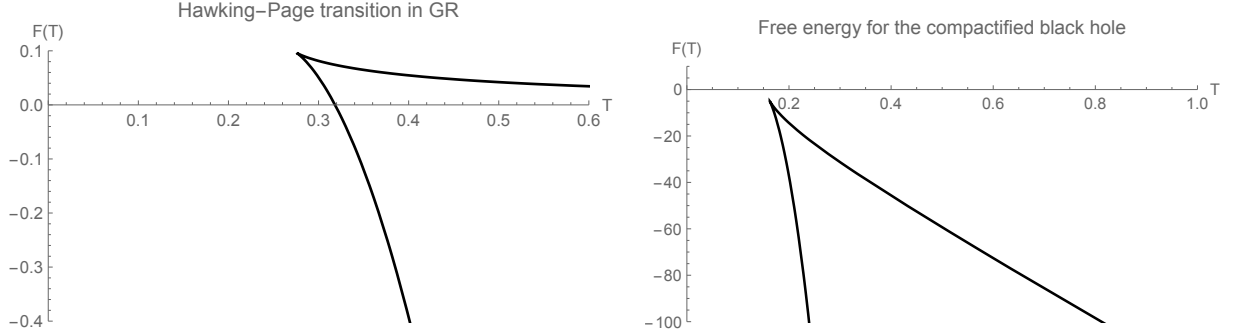


Figura 2.1: Energía libre versus la temperatura para Schwarzschild-AdS en Relatividad General en cuatro dimensiones (panel izquierdo) y para la solución de agujero negro Schwarzschild-AdS $_4 \times S^2$ compactificado (panel derecho). La solución compactificada corresponde a los valores $\alpha_2 = 0,1$, $\beta_1 = 0,2$, $\beta_2 = 0,05$ y $\Lambda = -1$.

Siguiendo este enfoque de compactificación, en la siguiente sección se presentan los resultados obtenidos para la compactificación de la teoría de Einstein-Maxwell y de Lovelock-Maxwell, al usar p -formas. Estos resultados se encuentran en [73] y definen la tercera contribución novedosa de esta tesis.

2.3. Electromagnetismo cuasitopológico: cuerdas negras de Reissner-Nordström en gravedades de Einstein y Lovelock

En esta sección se presentan nuestros resultados, reportados en [73], sobre la compactificación de la teoría de Einstein-Maxwell en un producto directo de

espaciotiempos de la forma $\mathcal{M}_D = \mathcal{M}_d \times \mathcal{K}^p$, donde \mathcal{K}^p es una variedad Euclidiana de curvatura constante, siguiendo la aproximación de la sección anterior, es decir, se incluye un flujo preciso de p -formas sobre la variedad interna.

Para desarrollar la compactificación de la teoría de Einstein-Maxwell o cualquier teoría de Lovelock-Maxwell en espacios de la forma $\mathcal{M}_D = \mathcal{M}_d \times \mathcal{K}^p$, es necesario estudiar las potenciales incompatibilidades que surgen naturalmente de las ecuaciones de campo una vez que se han proyectado en la brana y la variedad interna correspondiente. Estas incompatibilidades emergen debido a la presencia tanto del término de Maxwell así como de las contribuciones curvatura más alta que la teoría de Lovelock. Estas incompatibilidades pueden ser evitadas en presencia de campos p -formas en más dimensiones, los que contribuyen naturalmente al tensor de energía-momentum de Maxwell y a los tensores geométricos que vienen del lagrangiano de Lovelock. En este caso, al igual que en la sección anterior, se requiere que las p -formas sean proporcionales a la forma de volumen de la variedad interna correspondiente \mathcal{K}^p proporcionando un dressing adecuado que podría resolver las incompatibilidades.

2.3.1. Modelo y ecuaciones de campo

Consideremos nuevamente la teoría de Lovelock (2.1), (2.2), junto con la interacción (2.17).

En este caso, la forma bilineal la definiremos como Z , donde

$$Z^{A_1 \dots A_p}{}_{B_1 \dots B_p} := M^{A_1 \dots A_p} M_{B_1 \dots B_p}, \quad (2.69)$$

para una p -forma intensidad de campo $M_{[p]} = dB_{[p-1]}$. Aquí, M o consecuentemente B puede representar tanto configuraciones eléctricas o magnéticas. Para configuraciones eléctricas se denotará M como F_{AB} mientras que para configuraciones magnéticas será denotados como $H_{A_1\dots A_p}$.

Por otro lado, el carácter de segundo orden de las ecuaciones de campo se asegura por la identidad de Bianchi que $M_{A_1\dots A_p}$ satisface junto con una relación similar impuesta en el tensor Z , para detalles específicos ver [65].

Las ecuaciones de campo de la teoría de Einstein-Lovelock-Maxwell complementado con la interacción (2.17) son dadas por

$$\sum_{k=0}^{[D/2]} \left[\alpha_k E_{AB}^{(k)} - \beta_k T_{AB,p}^{(k,1)} \right] = T_{AB}^{em}, \quad (2.70)$$

donde $E_{AB}^{(k)}$ es el tensor de Lovelock de orden k en la curvatura (2.4) y $T_{AB,p}^{(k,1)}$ es el tensor de energía-momentum asociado con (2.17), dado por (2.21) y T_{AB}^{em} es el tensor de Maxwell-Faraday estándar

$$T_{AB}^{em} = \frac{1}{2} (F_{AC} F_B{}^C - \frac{1}{4} g_{AB} F_{CD} F^{CD}). \quad (2.71)$$

Al realizar la variación con respecto a los campos de gauge $A_{[p-1]}$ y $B_{[p-1]}$, se obtienen las siguientes ecuaciones de campo

$$\nabla_A F^{AB} = 0, \quad (2.72)$$

$$\sum_{k=0}^{[D/2]} \frac{\beta_k}{2^{k-1}} \delta_{B_1\dots B_{2k} D_1\dots D_p}^{A_1\dots A_{2k} C_1\dots C_p} R_{A_1 A_2}^{B_1 B_2} \dots R_{A_{2k-1} A_{2k}}^{B_{2k-1} B_{2k}} \nabla^{D_1} M_{C_1\dots C_p} = 0. \quad (2.73)$$

Note que aquí se consideró el caso en el cual $n = 1$, es decir, las ecuaciones de campo de gauge para M son lineales ².

En las siguientes subsecciones se presenta la compactificación de las teorías de Einstein-Maxwell y Einstein Lovelock-Maxwell, al complementar la teoría con modelos apropiados en (2.17). A diferencia del caso presentado en la sección anterior, es necesario modificar el procedimiento de compactificación en presencia de la acción de Maxwell: El término de Maxwell no introduce ninguna incompatibilidad en relación a la presencia de términos de curvatura, entonces es necesario considerar (2.17) en el caso en el cual $k = 0$. Además, para leer correctamente las incompatibilidades generadas por el término de Maxwell, el tensor bi-lineal Z se ve obligado a ser inhomogéneo

$$Z^{A_1 A_2}{}_{B_1 \dots B_p} = F^{A_1 A_2} H_{B_1 \dots B_p}, \quad (2.74)$$

siendo compuestas por la intensidad de campo eléctrico de Maxwell original, el cual vive en la brana \mathcal{M}_d y la p -forma intensidad de campo magnético $H_{B_1 \dots B_p}$, que vive exclusivamente en variedad interna \mathcal{K}^p . En este caso, la compactificación también se llevará a cabo en espacios de productos representadas por (2.30). De acuerdo con esta geometría, las configuraciones para F y H son dadas respecti-

²Valores más altos de n pueden ser útiles cuando compactificamos la electrodinámica no-lineal de la forma $(-\frac{1}{4}F_{AB}F^{AB})^q$, con q un número natural. [81, 82]

vamente por

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = a'(r)\delta_{\mu\nu}^{tr} \quad (2.75)$$

$$\hat{H}_{i_1\dots i_p} = \frac{p!Q_m}{\left(1 + \frac{\gamma}{4} \sum_{j=1}^p z_j^2\right)^p} \hat{\delta}_{i_1\dots i_p}^{z_1\dots z_p}, \quad (2.76)$$

donde Q_m es considerada como la carga magnética.

2.3.2. Compactificación de la teoría de Einstein-Maxwell

Para el caso Einstein-Maxwell, no aparecen términos de mayor curvatura y en consecuencia no hay incompatibilidades asociadas a esos tipos de interacciones. Entonces, se complementa la teoría de Einstein-Maxwell con (2.17), donde nos quedamos con $k = 0$ y Z es dada por (2.74). La interacción QTE resultante es dada por

$$\mathcal{L}_{QTE} = -\frac{1}{2p!} H_{C_1\dots C_p} H^{C_1\dots C_p} - \beta_0 \delta_{B_1 B_2 D_1 \dots D_p}^{A_1 A_2 C_1 \dots C_p} F_{A_1 A_2} H_{C_1 \dots C_p} F^{B_1 B_2} H^{D_1 \dots D_p}, \quad (2.77)$$

donde, para contar con una constante cosmológica no-trivial apropiada, se ha incluido el término cinético para $H_{[p]}$. La primera observación que podemos hacer es que, para un campo puramente eléctrico F_{AB} y un campo puramente magnético $H_{A_1\dots A_p}$, que vive en la variedad interna, el lagrangiano QTE (2.77) posee sólo una interacción no-trivial, es decir,

$$\mathcal{L}_{QTE} = -\frac{1}{2p!} H_{A_1\dots A_p} H^{A_1\dots A_p} - \beta_0 F_{A_1 A_2} F^{A_1 A_2} H_{B_1 \dots B_p} H^{B_1 \dots B_p}, \quad (2.78)$$

lo que entrega el siguiente principio de acción

$$S[g, A] = \int \sqrt{-g} d^{d+p} x \left(R - 2\Lambda - \frac{1}{4} F_{AB} F^{AB} - \frac{1}{2p!} H_{A_1 \dots A_p} H^{A_1 \dots A_p} - \beta_0 F_{A_1 A_2} F^{A_1 A_2} H_{B_1 \dots B_p} H^{B_1 \dots B_p} \right). \quad (2.79)$$

Al realizar la variación con respecto a la métrica, se obtienen las siguientes ecuaciones de campo de Einstein

$$G_{AB} + g_{AB}\Lambda - T_{AB}^{em} - T_{AB}^H - \beta_0 T_{AB}^{QTE} = 0, \quad (2.80)$$

donde

$$\begin{aligned} T_{AB}^H &= \frac{1}{2(p-1)!} H_{AA_2 \dots A_p} H_B^{A_2 \dots A_p} - \frac{1}{4p!} g_{AB} H^2, \\ T_{AB}^{QTE} &= 2F_{AC} F_B^C H^2 + p H_{AA_2 \dots A_p} H_B^{A_2 \dots A_p} F^2 - \frac{1}{2} g_{AB} F^2 H^2, \end{aligned} \quad (2.81)$$

mientras que las variaciones con respecto a los potenciales electromagnéticos entregan las siguientes ecuaciones de campo de gauge

$$\nabla_A [(1 + 4\beta_0 H^2) F^{AB}] = 0 \quad (2.82)$$

$$\nabla_{A_1} [(1 + 2p! \beta_0 F^2) H^{A_1 \dots A_p}] = 0 \quad (2.83)$$

Es directo observar que, para una p -forma magnética con una intensidad de campo proporcional al volumen del espacio interno (2.76), se satisface automáticamente la ecuación de campo de gauge asociada (2.83), mientras que la ecuación de campo

de gauge asociada con el campo eléctrico (2.82) se satisface siempre que

$$a(r) = -\frac{1}{(d-3)} \frac{Q_e}{r^{(d-3)}}. \quad (2.84)$$

Debido a que el espaciotiempo considerado es de la forma (2.30), las ecuaciones de campo de Einstein son proyectables directamente en \mathcal{M}_d y \mathcal{K}^p , por lo tanto se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{R}_d + \hat{R}_p) + \tilde{g}_{\mu\nu}\Lambda - \frac{1}{2}\left(\tilde{F}_{\mu\lambda}\tilde{F}_\nu{}^\lambda - \frac{1}{4}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{F}^2\right) \\ + \frac{1}{4p!}\tilde{g}_{\mu\nu}\hat{H}^2 - \beta_0\left(2\tilde{F}_{\mu\lambda}\tilde{F}_\nu{}^\lambda - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{F}^2\right)\hat{H}^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.85)$$

para la brana y

$$\begin{aligned} \hat{R}_{ij} - \frac{1}{2}\hat{g}_{ij}(\tilde{R}_d + \hat{R}_p) + \hat{g}_{ij}\Lambda + \left(\frac{\hat{H}_{ii_2\dots i_p}\hat{H}_j{}^{i_2\dots i_p}}{2(p-1)!} - \frac{1}{4p!}\hat{g}_{ij}\hat{H}^2\right) \\ - \beta_0\left(p\hat{H}_{ii_2\dots i_p}\hat{H}_j{}^{i_2\dots i_p} - \frac{1}{2}\hat{g}_{ij}\hat{H}^2\right)\tilde{F}^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.86)$$

para la variedad interna. Aquí, se han usado las notaciones abreviadas $\tilde{F}^2 = \tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ y $\hat{H}^2 = \hat{H}_{i_1\dots i_p}\hat{H}^{i_1\dots i_p}$. Además, el escalar de Ricci del espaciotiempo completo es dado por la suma directa

$$R = \tilde{R}_d + \gamma g^{ik}g^{jl}(\hat{g}_{ik}\hat{g}_{jl} - \hat{g}_{il}\hat{g}_{jk}) = \tilde{R}_d + \hat{R}_p. \quad (2.87)$$

Para analizar la compatibilidad de las ecuaciones de Einstein proyectadas en

la brana y en la variedad interna, tomaremos sus trazas, las cuales son dadas por

$$\begin{aligned} \tilde{R}_d \left(1 - \frac{d}{2}\right) + d \left(\Lambda - \frac{\hat{R}_p}{2} + \frac{1}{4p!} \hat{H}^2\right) - \left(\frac{1}{2} + 2\beta_0 \hat{H}^2\right) \left(1 - \frac{d}{4}\right) \tilde{F}^2 &= 0 \\ -p \frac{\tilde{R}_d}{2} + \left(\hat{R}_p \left(1 - \frac{p}{2}\right) + p\Lambda - \frac{1}{4(p-1)!} \hat{H}^2\right) - p \left(\frac{1}{2} \beta_0 \hat{H}^2 - \frac{1}{8}\right) \tilde{F}^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.88)$$

cuya compatibilidad esta sujeta a las condiciones

$$Q_m^2 = \frac{1}{4\beta_0} \frac{1}{(d-3)p!} \quad (2.89)$$

$$\Lambda = \frac{1}{2} (p-1)(d+p-2)\gamma - \frac{d-1}{4} Q_m^2. \quad (2.90)$$

Aquí, se vuelve explícito el hecho de que bajo (2.32) y (2.76), $\hat{R}_p = \gamma p(p-1)$ y $\hat{H}^2 = p! Q_m^2$, respectivamente. Algunos comentarios respecto a lo anterior: De (2.89) es directo observar como la interacción QTE hace posible la compactificación de la teoría a través de la inclusión de la carga magnética, la que al ser fijada de forma apropiada, elimina un término incompatible proporcional a \tilde{F}^2 . Es más, para cualquier dimensión d , en la ausencia del término β_0 , las ecuaciones de campo son compatibles sólo para $\tilde{F}^2 = 0$, condición que no se puede lograr con soluciones puramente eléctricas. Por lo tanto, la inclusión del lagrangiano QTE abre un camino para compactificar la teoría Einstein-Maxwell genericamente en $\mathcal{M}_D = \mathcal{M}_d \times \mathcal{K}^p$, sin restringir la dimensión del espaciotiempo o la naturaleza del campo electromagnético que vive en la brana, con el caso de una brana tres dimensional analizada de forma separada. La constante cosmológica adquiere dos

contribuciones, una de \mathcal{K}^p a través de su curvatura γ y otra desde el término cinético de $\hat{H}_{i_1 \dots i_p}$. Entonces, para tener soluciones genéricas asintóticamente planas se fuerza a la variedad interna a ser plana al mismo tiempo que el lagrangiano QTE debe carecer de un término cinético estándar \hat{H} . En la siguiente sección se integran las ecuaciones de campo (2.86) abordando la construcción de p -branas negras de Reissner-Nordström en dimensión $D = d + p$, donde la variedad interna tiene curvatura constante genérica γ .

Una vez que es posible la compactificación, las ecuaciones de campo se vuelven integrables, haciendo posible la construcción de objetos extendidos cilindricos simples, como lo son las cuerdas negras y las p -branas negras.

Por simplicidad, describamos \mathcal{M}_d por el siguiente espaciotiempo d -dimensional esféricamente simétrico

$$ds_d^2 = -F(r)dt^2 + \frac{dr^2}{F(r)} + r^2 d\Sigma_{d-2,K}^2, \quad (2.91)$$

donde $d\Sigma_K^2$ representa una variedad Euclidiana $(d - 2)$ -dimensional de curvatura constante normalizada $K = 0, \pm 1$ ³.

Al resolver las ecuaciones Einstein-Maxwell- Λ en la brana, y al incluir las condiciones de compatibilidad (2.89) y (2.90), se obtiene la siguiente p -brana negra de Reissner-Nordström

$$ds_D^2 = -F(r)dt^2 + \frac{dr^2}{F(r)} + r^2 d\Sigma_K^2 + \frac{d\vec{z} \cdot d\vec{z}}{\left(1 + \frac{\gamma}{4} \sum_{j=1}^p z_j^2\right)^2} \quad (2.92)$$

³Esta es una suposición para simplificar, de hecho, podríamos tomar cualquier solución de las ecuaciones de Einstein-Maxwell- Λ

con

$$F(r) = \frac{r^2}{l_{eff}^2} - \frac{M}{r^{d-3}} + K + \frac{Q_e^2}{2(d-3)^2 r^{2(d-3)}}, \quad (2.93)$$

y radio AdS efectivo dado por

$$l_{eff}^{-2} := -\frac{1}{8\beta_0} \frac{16\beta_0\Lambda(d-3)p! - (p-1)}{(d-1)(d-3)(d+p-2)p!}. \quad (2.94)$$

Se observa que el efecto neto del campo magnético en la backreaction espacio-temporal esta en proveer al agujero negro en la brana con una carga eléctrica efectiva

$$\bar{Q}_e^2 := \frac{1}{2(d-3)^2} Q_e^2, \quad (2.95)$$

la cual difiere de la carga del agujero negro de Reissner-Nordström estandar $Q_e^{RN} := \frac{Q_e^2}{2(d-2)(d-3)}$, $\bar{Q}_e < Q_e^{RN}$. La solución (2.92) representa la extensión de p -brana negra homogénea más general del agujero negro de Reissner-Nordström.

Ninguna restricción nos impide tomar el caso $p = 1$ ($\gamma = 0$), y en consecuencia construir la generalización más simple de cuerda negra del agujero negro de Reissner-Nordström. Evitando la inclusión del término cinético para $\hat{H}_{i_1 \dots i_p}$ la solución es

$$ds^2 = - \left(K - \frac{M}{r} + \frac{Q^2}{2r^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(K - \frac{M}{r} + \frac{Q^2}{2r^2} \right)} + r^2 d\Sigma_{2,K}^2 + dz^2 \quad (2.96)$$

Note que, aunque se ha obtenido esta cuerda negra al considerar una p -forma general en la variedad interna, y luego al tomar el caso $p = 1$, se puede obtener el mismo resultado al comenzar inmediatamente con $K^p = \mathbb{R}$ o \mathcal{S}^1 y vistiendo el

espacio interno con un campo escalar que depende linealmente de la coordenada plana. Para tal caso, sólo cuando vamos al caso $(d+p)$ dimensional se observa una diferencia: De hecho, cuando se viste la variedad interna con campos escalares, es necesario incluir un campo escalar a lo largo de cada dirección extendida⁴, y en consecuencia se requieren p campos escalares. Esto se traduce en una carga eléctrica efectiva

$$\bar{Q}_e^2 := \frac{1}{2(d-3)(d-p-2)} Q_e^2 \quad (2.97)$$

De hecho, cuando consideramos una p -forma en vez de p campos escalares, p va a uno y se recupera (2.95).

2.3.3. Compactificaciones de la teoría Einstein-Maxwell en variedades internas factorizadas.

De la condición de compatibilidad (2.89) se observa que, más allá de la rama logarítmica inducida por el campo eléctrico en tres dimensiones, el caso tres dimensional es topológico y no existen soluciones de cuerda negra. De todas maneras, se observa que para el caso escalar en el cual la variedad interna plana \mathcal{K}^p es subdividida en p variedades internas planas, la condición de compatibilidad cambia a

$$Q_m^2 = \frac{1}{4\beta_0} \frac{1}{(d-p-2)}, \quad (2.98)$$

⁴Este caso correspondería a una variedad interna que es dividida en p espacios subinternos de dimensión uno. En la siguiente sección, se aborda la separación de la variedad interna en completa generalidad, demostrando las recciones que el número de subdivisiones y la dimensión correspondiente d debe satisfacer para que existan soluciones.

la que toma en cuenta el número de subdivisiones, p en este caso, de la variedad interna. De aquí, el caso tres dimensional no es prohibido a menos que la variedad interna sea uno dimensional, es decir, no es posible una extensión de cuerda negra del agujero negro BTZ cargado electricamente. Cuando consideramos variedades internas factorizadas, existe una dimensión crítica que, para valores específicos del número de subdivisiones, no admite la compactificación y, en consecuencia, la existencia de soluciones de p -brana negra.

Abordemos este caso en el que la variedad interna \mathcal{K}^p está dada por un producto directo de variedades internas de menor dimensionalidad

$$\mathcal{K}^p = \mathcal{K}^{p_1} \times \mathcal{K}^{p_2} \times \dots \times \mathcal{K}^{p_n}, \quad (2.99)$$

donde la suma de las dimensiones de todas las n variedades subinternas \mathcal{K}^{p_n} deben corresponder a la dimensión de la variedad interna inicial \mathcal{K}^p , $\sum_n p_n = p$. Es necesario mencionar que las dimensiones p_n son arbitrarias, y en consecuencia el número de posibles subdivisiones y combinación de ellas que reproducen la variedad interna corresponde al número de maneras diferentes en que un número natural puede escribirse como la suma de un número arbitrario de naturales inferiores, es decir las particiones de p , la cual es dada asintóticamente por la fórmula de Hardy-Ramanujan. Aquí, nos enfocamos en el valor n que da el número de sub-variedades que son consideradas en la separación original, y no sobre el número de posibles combinaciones que proporcionan una variedad interna de dimensión equivalente, esto debido al hecho de que el orden de las variedades internas es

irrelevante en terminos de la backreaction de las soluciones. Para proceder a la compactificación y para evitar cualquier relación no deseada entre los parámetros de nuestra teoría, vestimos cada variedad interna con su correspondiente interacción QTE

$$\mathcal{L}_{QTE}^j = -\frac{1}{2p_j!} H_{(j),A_1\dots A_{p_j}} H_{(j)}^{A_1\dots A_{p_j}} + \beta_{0,j} F_{A_1 A_2} F^{A_1 A_2} H_{(j),B_1\dots B_{p_j}} H_{(j)}^{B_1\dots B_{p_j}}. \quad (2.100)$$

Entonces, la teoría de Einstein-Maxwell es complementada con

$$L_{QTE} = \sum_{j=1}^n \mathcal{L}_{QTE}^j. \quad (2.101)$$

Cada uno de los campos p -formas será proporcional a la forma de volumen del subespacio \mathcal{K}^{p_n} correspondiente. Note que cada interacción es controlada por su propia constante de acoplamiento $\beta_{0,n}$ y que no hay una suma en n , este sólo etiqueta el número de las variedad subinternas. El escalar de Ricci del espaciotiempo completo y el cuadrado de la intensidad de campo de la p -forma magnética es dada por

$$R = \tilde{R}_d + \sum_{j=1}^n \gamma_j p_j (p_j - 1) \hat{H}_n^2 = p_n! Q_{m_n}^2 \quad (2.102)$$

donde γ_j define el radio de curvatura de la variedad subinterna \mathcal{K}^{p_j} .

Debido a la naturaleza del espaciotiempo producto, las ecuaciones de campo correspondientes pueden ser proyectadas a lo largo de la variedad espaciotemporal \mathcal{M}_d y a lo largo de cada variedad subinterna \mathcal{K}^{p_n} . La traza de las ecuaciones de

campo en \mathcal{M}_d es dada por

$$\tilde{R}_d = \frac{2d}{(d-2)}\Lambda_{eff}^d + e_{eff}^d \left(\frac{d-4}{d-2} \right) \frac{\tilde{F}^2}{2}, \quad (2.103)$$

donde

$$\Lambda_{eff}^d = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{4p_j!} \hat{H}_j^2 - \frac{1}{2} \hat{R}_{p_j} \right) + \Lambda \quad (2.104)$$

$$e_{eff}^d = \frac{1}{2} + 2 \sum_{j=1}^n \beta_{0,j} \hat{H}_j^2 \quad (2.105)$$

representando las contribuciones efectivas en la brana de las formas magnéticas a la constante cosmológica y al tensor de estres electromagnético.

Para que las ecuaciones de campo del espaciotiempo completo sean compatibles, la ecuación (2.103) junto con las condiciones (2.104) y (2.105), deben ser compatibles con las ecuaciones de campo proyectadas en todas las variedades subinternas \mathcal{K}^{p_n} . Esto define el siguiente sistema de ecuaciones $2n$ -dimensional

$$\Lambda_{eff}^{p_i} - \frac{p_i d}{d-2} \Lambda_{eff}^d = 0 \quad (2.106)$$

$$e_{eff}^{p_i} - \frac{e_{eff}^d}{4} \left(\frac{d-4}{d-2} \right) = 0 \quad (2.107)$$

donde, en cada variedad subintera, se ha definido una constante cosmológica efectiva y una contribución efectiva de los campos p_n -formas en el tensor de

estres electromagnetico

$$\Lambda_{eff}^{p_i} = \hat{R}_{p_i} \left(1 - \frac{p_i}{2}\right) - \frac{p_i}{2} \left(\sum_{j=1}^n \hat{R}_{p_j}\right) + p_i \Lambda - \frac{\hat{H}_i^2}{4(p_i - 1)!} + p_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{4p_j!} \hat{H}_j^2\right), \quad (2.108)$$

$$e_{eff}^{p_i} = \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \beta_{0,j} \hat{H}_j^2 - \beta_{0,i} \hat{H}_i^2\right). \quad (2.109)$$

para $j \neq i$. En el lado izquierdo p_i determina la variedad subinterna correspondiente en la cual las ecuaciones de campo se han proyectado. Para el lado derecho, p_i es la dimensión de la \mathcal{K}^{p_i} correspondiente en la cual el campo \hat{H}_i se ha distribuido.

No hay una sumatoria en i , y se debe mencionar que en la ecuación (2.108) las sumas se llevan en todos los valores de j salvo para el definido por i . La ecuación (2.106) define las relaciones de compatibilidad que deben satisfacer todas las contribuciones a la constante cosmológica efectiva, mientras que (2.107) define las condiciones de compatibilidad que todos los términos proporcionales al campo de Maxwell deben satisfacer. Las ecuaciones (2.106) y (2.107) constituyen un sistema lineal no-homogeneo para Q_{m_n} and γ_n . Para analizar la existencia de soluciones es útil escribir el sistema en la siguiente forma matricial $A_n \vec{X} = \vec{B}$ con A siendo los coeficientes matriciales de orden n y B un vector columna n -dimensional representando las contribuciones inhomogéneas al sistema.

Obviamente, para que el sistema tenga una solución única, el rango de A debe ser igual al rango de la matriz aumentada \bar{A} , la cual se obtiene al añadir a A una columna más dada por el vector B .

Si lo anterior es asegurado, existe una única solución cuando el rango de A es igual a su orden n , de otra manera, si el rango de A es menor que n , surgen infinitas soluciones.

En nuestro caso, para valores arbitrarios de la dimensión d y la dimensión p_n de cada variedad subinterna, el sistema posee una sola solución dada por

$$Q_{m_i}^2 = \frac{1}{4\beta_{0,i}p_i!(d-n-2)}, \quad (2.110)$$

$$\gamma_i = \frac{1}{(p_i-1)(d+p-2)} \left[2\Lambda - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (p_j-1)Q_{m_j}^2 + \frac{1}{2}(p-p_i)Q_{m_i}^2 + \frac{1}{2}(d-1)Q_{m_i}^2 \right], \quad (2.111)$$

para $j \neq i$. Se observa que para que surja una solución, con una o múltiples variedades internas, es necesario que la dimensión del espaciotiempo \mathcal{M}_d y el número de variedades internas \mathcal{K}^{p_n} satisfaga $d-n-2 \neq 0$. Esta condición es violada por el caso tres dimensional en el cual sólo una variedad interna es considerada. Para tal caso, el rango A es diferente del rango de la matriz \bar{A} , y en consecuencia no existen soluciones. El mismo problema ocurre para el caso cuatridimensional cuando se consideran dos variedades internas, independiente de sus respectivas dimensiones.

Notamos además que, cuando la variedad interna se divide en dos variedades subinternas de dimensión uno, la dimensión de la variedad interna original y el número de subdivisiones son iguales. Este es el caso cuando p campos escalares son distribuidos a lo largo de p direcciones planas extendidas.

Finalmente, en el límite para el cual $n = 1$, y en consecuencia sólo una de las

cargas aparece, las condiciones (2.111) y (2.110) se reducen precisamente a (2.89) y (2.90).

2.3.4. Compactificación de la teoría Einstein-Maxwell-Lovelock

Las cuerdas negras son por definición objetos en más dimensiones y en consecuencia, es interesante entender si estos pertenecen o no al espectro de agujeros negros de la teoría de Lovelock.

Ya se ha demostrado que con el objeto de construir cuerdas y p -branas negras en la gravedad de Lovelock, es necesario incluir acoplamientos no-minimales entre tensores de curvatura y campos p -formas magnéticas [63], esto en la línea de (2.17). En definitiva, la inclusión de términos de mayor curvatura introduce naturalmente incompatibilidades entre las ecuaciones de campo proyectadas. Entonces, la presencia de nuevos tensores de curvatura, esta vez modulados por su acoplamiento a las p -formas, abre el camino para curar estas incompatibilidades. Aquí se extienden esos resultados al incluir el capo de Maxwell.

Cuerdas negras en la teoría de Einstein-Maxwell-Gauss-Bonnet

Comencemos considerando la gravedad de Einstein-Maxwell-Gauss-Bonnet

$$S = \int d^{d+p}x \sqrt{-g} \left(R - 2\Lambda - \frac{1}{4}F^2 + \mathcal{L}^2 \right), \quad (2.112)$$

con una dimensión de la brana mayor a cuatro para asegurar una contribución no trivial del termino de Gauss-Bonnet en la dinámica de la teoría. Luego de que las

ecuaciones de campo son proyectadas, pueden surgir dos tipos de incompatibilidades. La primera es generada por la presencia de la densidad de Gauss-Bonnet, la cual es cuadrática en el tensor de curvatura y, una vez que es proyectada, introduce incompatibilidades con el término de Einstein. El segundo tipo de incompatibilidades viene directamente de la inclusión del lagrangiano de Maxwell. Independiente de estas características genéricas, es importante notar que para una teoría de Gauss-Bonnet pura (sin término de Einstein) complementada con la acción de Maxwell, la compatificación es trivial y de hecho no son necesarios campos de materia adicionales [100]. Este resultado se extiende más allá de la teoría de Gauss-Bonnet pura y establece que cualquier teoría de Lovelock pura de orden k soporta la existencia de p -branas negras homogéneas cargadas siempre que el campo de Maxwell que vive en la brana sea dado por un campo p -forma de orden $p = k$. De esta forma, la teoría de Gauss-Bonnet pura contiene naturalmente cuerdas negras cargadas eléctricamente, es decir, $k = p = 2$. Considerando la presencia del término de Einstein, es decir, una serie de Lovelock homogénea, notamos que la única incompatibilidad que viene de los invariantes de curvatura de diferente orden debe ser solucionada. En este punto, para construir p -branas negras cargadas en la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet es suficiente considerar la aproximación desarrollada en [63] sin interacciones extra de la forma QTE (2.17) consideradas anteriormente. Así, comenzamos complementando (2.112) con $\mathcal{L}^{(1,1)}$

y su correspondiente término cinético

$$S^{(1,1)} = \int d^{d+p} x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2p!} \hat{H}_{(1)}^2 + \frac{\beta_1}{2p!} \delta_{B_1 B_2 D_1 \dots D_p}^{A_1 A_2 C_1 \dots C_p} R^{B_1 B_2}{}_{A_1 A_2} H^{D_1 \dots D_p} H_{C_1 \dots C_p} \right) \quad (2.113)$$

Esta interacción naturalmente cura las incompatibilidades entre la densidad de Gauss-Bonnet y el escalar de Ricci. Las ecuaciones de campo correspondientes están dadas en el apéndice donde se definen explícitamente por (2.130) y (2.131), las condiciones de compatibilidad por las relaciones (2.132) y (2.133). Como un ejemplo, se construye explícitamente una 2-brana negra de Boulware-Deser (A)dS cargada en siete dimensiones, compuesta por el producto directo de un agujero negro de Boulware-Deser en cinco dimensiones y un espacio dos dimensional de curvatura constante, es decir, $d = 5$ y $p = 2$. La solución es dada por

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + \frac{dr^2}{F(r)} + r^2 d\Sigma_{K,3}^2 + \frac{dz_1^2 + dz_2^2}{\left(1 + \frac{\gamma}{4}(z_1^2 + z_2^2)\right)^2}, \quad (2.114)$$

donde

$$F(r) = K + \frac{\hat{\xi}_1}{4\alpha_2} r^2 \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{3} \frac{\alpha_2}{\hat{\xi}_1^2} \Lambda_{brana} + \frac{8\alpha_2}{3\hat{\xi}_1^2} \frac{M}{r^4}} \right) \quad (2.115)$$

Las condiciones de compatibilidad están dadas en términos de $Q_{m_1}^2$ y de la constante cosmológica desnuda Λ , fijando los acoplamientos efectivos $\hat{\xi}_1^2$ y la cons-

tante cosmológica de la brana como

$$\hat{\xi}_1 = \frac{1}{2} + \alpha_2 \gamma , \quad (2.116)$$

$$\Lambda_{brana} = \frac{1}{32\beta_1} (1 + 2\gamma (3\alpha_2 + 4\beta_1)) . \quad (2.117)$$

Esta solución se obtiene a partir del polinomio de Wheeler efectivo [77]

$$-\frac{1}{2}\hat{\xi}_1 (K - F(r)) - \frac{1}{r^2}\alpha_2 (K - F(r))^2 + \frac{1}{3}\frac{M}{r^3} + \frac{1}{12}\Lambda_{brana}r^2 - \frac{1}{24}\frac{Q_e^2}{r^4} = 0 , \quad (2.118)$$

donde M y Q_e son constantes de integración relacionadas con la masa física y la carga eléctrica [78–80]. Note que los campos p -formas distribuidos en la variedad interna afectan las soluciones a través de la constante de acoplamiento de Newton efectiva $\hat{\xi}_1$, cambiando el valor numérico en los valores de la masa y carga eléctrica. Para que estas cantidades estén bien definidas, $\hat{\xi}_1$ debe ser positivo, lo que se asegura genéricamente cuando se compactifica en variedades internas de curvatura constante positiva. Consecuentemente, el acoplamiento β_1 toma valores negativos para que Q_{m_1} sea real. Por otro lado, para valores negativos de γ , la positividad de $\hat{\xi}_1$ se puede mantener al restringir el radio de curvatura de la variedad interna en terminos del acoplamiento de Gauss-Bonnet. Para $\beta_1 > 0$, la curvatura de la variedad interna es restringida por lo anterior en términos de α_2 , mientras que para $\beta < 0$, esta restringido a tomar valores en un intervalo restringido definido por α_2 . Como es estándar los agujeros negros de Einstein-Gauss-Bonnet, la rama negra conecta asinácticamente con las soluciones de Relatividad General

correspondiente, y es considerado como la rama física.

Cuerdas negras en la teoría de Einstein-Maxwell-Lovelock: caso cúbico

Al considerar el siguiente orden en la teoría de Lovelock, la compactificación se torna un poco más complicada. De acuerdo a [100], la teoría de Lovelock cúbica pura soportará compactificaciones triviales siempre que el campo de Maxwell sea dado por una 3-forma magnética, por lo tanto, el agujero negro no puede tener una carga eléctrica. Además, debido al hecho de que la densidad cúbica contribuye a a las ecuaciones de campo para $d > 6$, la existencia de esas p -branas negras cargadas también está sujeta a la dimensionalidad del horizonte del agujero negro, seis en el caso minimalista, y por lo tanto, se deben considerar al menos dos 3-formas.

Al movernos al caso de la serie de Lovelock homogénea de orden tres, es decir, al incluir los términos de Einstein y de Gauss-Bonnet, se observa que no hay una simplificación en contraste con el caso anterior. Para construir p -branas negras cargadas electricamente, necesitamos tomar en cuenta las incompatibilidades producidas por las cantidades de curvatura de diferente orden y las incompatibilidades añadidas por el campo eléctrico de Maxwell. Consecuentemente, en teorías de Lovelock genéricas de orden $k > 2$ es necesario combinar el procedimiento de [63] con un término de la forma QTE (2.77).

Para la teoría de Einstein-Maxwell-Lovelock cúbico se considera el siguiente

principio de acción

$$S_{EMCL} = \int \sqrt{-g} d^{d+p} x \left(R - 2\Lambda - \frac{F^2}{4} + \mathcal{L}^2 + \mathcal{L}^3 - \frac{H_{(1)}^2}{2p!} - \frac{H_{(2)}^2}{2p!} + \mathcal{L}_{(1)}^{(1,1)} + \mathcal{L}_{(2)}^{(2,1)} + \mathcal{L}_{(3)}^{QTE} \right), \quad (2.119)$$

donde

$$\mathcal{L}^{(2,1)} = \frac{\beta_2}{4p!} \delta_{B_1 B_2 B_3 B_4 D_1 \dots D_p}^{A_1 A_2 A_3 A_4 C_1 \dots C_p} R^{B_1 B_2}{}_{A_1 A_2} R^{B_3 B_4}{}_{A_3 A_4} Z^{D_1 \dots D_p}{}_{C_1 \dots C_p} . \quad (2.120)$$

Este término permite la compatibilidad en presencia de la densidad de Lovelock de orden cúbico. En este caso, se han agregado los términos cinéticos asociados con $\mathcal{L}_{(1)}^{(1,1)}$ y $\mathcal{L}_{(2)}^{(2,1)}$ y cada una de las interacciones son dadas por diferentes p -formas magnéticas, $H_{(1)}$, $H_{(2)}$ y $H_{(3)}$ correspondiendo a $\mathcal{L}_{(1)}^{(1,1)}$, $\mathcal{L}_{(2)}^{(2,1)}$ y $\mathcal{L}_{(3)}^{QTE}$ respectivamente. Las ecuaciones de campo (2.130) y (2.131) se encuentran en el Apéndice. A continuación se presenta la construcción explícita de una 2-brana negra en diez dimensiones, la cual es compuesta por un agujero negro de Boulware-Deser cargado en ocho dimensiones y un espacio dos dimensional de curvatura constante, es decir, $d = 8$ y $p = 2$. Las relaciones de compatibilidad (2.132) y (2.133) y las cargas magnéticas son dadas por

$$Q_{m_1}^2 = -\frac{3\alpha_2}{2\beta_1} \gamma - \frac{1}{4\beta_1} , \quad (2.121)$$

$$Q_{m_2}^2 = -\frac{2\alpha_3}{\beta_2} \gamma - \frac{1}{6} \frac{\alpha_2}{\beta_2} , \quad (2.122)$$

$$Q_{m_3}^2 = -\frac{1}{96\beta_0} , \quad (2.123)$$

mientras que la constante cosmológica esta relacionada con el radio de curvatura

de la variedad interna a través de la relación

$$\Lambda = \left(\frac{5\alpha_2}{8\beta_1} + \frac{5\alpha_3}{6\beta_2} + \frac{4}{3} \right) \gamma + \frac{5\alpha_2}{72\beta_2} + \frac{5}{48\beta_1} + \frac{5}{1152\beta_0} . \quad (2.124)$$

Las ecuaciones de campo son entonces integrables y proveen una 2-brana negra cargada de la forma

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + \frac{dr^2}{F(r)} + r^2 d\Sigma_{k,6}^2 + \frac{dz_1^2 + dz_2^2}{\left(1 + \frac{\gamma}{4}(z_1^2 + z_2^2)\right)^2} \quad (2.125)$$

con la función $F(r)$ es dada por la solución real del polinomio de Wheeler efectivo

$$-3r^5 (K - F(r)) \hat{\xi}_1 - 60r^3 (K - F(r))^2 \hat{\xi}_2 - 360r (K - F(r))^2 \alpha_3 - \frac{\hat{\xi}_4 Q_e^2}{20 r^5} + \frac{\Lambda_{brana}}{7} r^7 + M = 0 . \quad (2.126)$$

Luego de aplicar las relaciones de compatibilidad correspondientes (??) los acoplamientos efectivos son

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_1 &= \frac{1}{2} + \alpha_2 \gamma , \quad \hat{\xi}_2 = \frac{2}{3} \alpha_2 + 2\alpha_3 \gamma , \quad \hat{\xi}_4 = \frac{2}{3} \\ \Lambda_{brana} &= \frac{1}{12\beta_1\beta_2} (4\alpha_3\beta_1 + 4\beta_1\beta_2 + 3\alpha_2\beta_2) \gamma + \end{aligned} \quad (2.127)$$

Conclusiones

En este trabajo se estudiaron diferentes aspectos de gravedad en más dimensiones.

Primero, se demostró que la misma perturbación que da lugar a la inestabilidad de Gregory-Laflamme [13] para cuerdas negras asintóticamente planas, no desencadena una inestabilidad en la solución de cuerda negra homogénea asintóticamente $AdS_4 \times \mathbb{R}$, la cual es solución de Relatividad General en cinco dimensiones, soportada por un campo escalar sin masa. En el estudio de la estabilidad de esta solución, el campo escalar actúa estabilizando a la cuerda negra. Estos resultados se extendieron a dimensión arbitraria $D = d + p$.

En la sección (2.2) se presentó la reducción dimensional de la teoría EGB a dimensión cuatro, dando lugar a Relatividad General para valores arbitrarios de los acoplamientos de la teoría. La consistencia de la compactificación se basa en la presencia de las p -formas acopladas no-minimalmente, cargadas magnéticamente. Como principio guía para la introducción de este campo de la materia, nos hemos restringido a la familia de acoplamientos introducidas en [65], la cual imita la estructura de las teorías de Lovelock, dando lugar a ecuaciones de campo de segundo orden. El término de Gauss-Bonnet, así como también los otros

acoplamientos de curvatura más alta con campos de materia, los cuales surgen naturalmente como una corrección perturbativa de las teorías fundamentales en los escenarios de la teoría de campo efectivo (ver por ejemplo, [105]).

La estructura de las teorías consideradas sugieren que nuestros resultados pueden ser extendidos a teorías de Lovelock más allá del Lagrangiano de EGB. Incluso se podría considerar una teoría de Lovelock arbitrario en dimensión D y obtener una teoría de Lovelock consistente arbitraria en $d = D - p$ al considerar p -formas cargadas magnéticamente acopladas no-minimalmente en la familia (2.17). En vacío, tales compactificaciones usualmente requieren introducir relaciones entre los acoplamientos, las cuales no son compatibles con la interpretación de términos de mayor curvatura como correcciones perturbativas (para soluciones de teorías de Lovelock en $N + 1$ -dimensiones ver [106]). Cuando se aumenta la dimensión de la variedad compacta, liberando su geometría, es natural esperar la presencia de algunas restricciones de mayor orden en su curvatura. Para el caso de agujeros negros topológicos, se demostró en [107] que una nueva constante que caracteriza el cuadrado del tensor de Weyl del horizonte aparece en la función lapse y se han explorado los efectos de tal constante en la termodinámica se han estudiado recientemente en [108]. Una familia simple de variedades que permitiría ir más allá de espacios internos de curvatura constante es el producto de esferas. Estas variedades permitirían introducir parámetros adicionales en las compactificaciones las cuales podrían ayudar cuando se contrasta la teoría cuatridimensional obtenida con evidencia experimental.

Luego, en la sección (2.3). se presentó la construcción de cuerdas y p -branas

negras homogéneas cargadas en la teoría de Einstein-Maxwell y la teoría de Einstein-Maxwell-Lovelock. Para lograr esto primero se mostró una compactificación posible de la teoría de Einstein-Maxwell en espacios producto de la forma $\mathcal{M}_D = \mathcal{M}_d \times \mathcal{K}^p$. Para que esta compactificación tome lugar, se requiere que la variedad interna este vestida con un flujo específico de p -formas: su dinámica debe estar controlada por una modificación precisa de la teoría de Electromagnetismo cuasitopológico. A continuación, se construye la familia más general p -branas negras de Reissner-Nordström con las variedades internas de curvatura constante.

Estas nuevas soluciones representan extensiones de cuerda/ p -branas negras homogéneas de los agujeros negros Reissner-Nordström y de Boulware-Deser cargado, con o sin constante cosmológica. También se extendieron los resultados al caso en el cual se incluyen varias variedades internas, lo que conduce a una relación entre la dimensión de la brana y el número de variedades internas tal que la compactificación sea posible.

Para el caso de las teorías de Maxwell-Lovelock, se observó que las compactificaciones influyen el agujero negro en la brana a través del polinomio de Wheeler efectivo en el cual todos los coeficientes adquieren correcciones de las p -formas magnéticas.

Apendice: Descomposición y las ecuaciones de campo en la teoría de Einstein-Maxwell-Lovelock cubico

Espaciotiempos de la forma $\mathcal{M}_D = \mathcal{M}_d \times \mathcal{K}^p$ simplifican la forma del tensor de Riemann

$$R^{A_1 A_2}{}_{B_1 B_2} = \tilde{R}^{\mu_1 \mu_2}{}_{\nu_1 \nu_2} \delta_{B_1}^{\nu_1} \delta_{B_2}^{\nu_2} \delta_{\mu_1}^{A_1} \delta_{\mu_2}^{A_2} + \hat{R}^{ij}{}_{kl} \delta_{B_1}^k \delta_{B_2}^l \delta_i^{A_1} \delta_j^{A_2}, \quad (2.129)$$

donde los índices griegos denotan cantidades en la brana y los índices latinos denotan cantidades en la variedad interna. De acuerdo a esto, se presenta la descomposición de las cantidades usadas en la sección (2.3).

Para los lagrangianos se tiene

$$\begin{aligned} R &= \tilde{R}_d + \hat{R}_p \\ \mathcal{L}^2 &= \tilde{\mathcal{L}}_d^2 + \hat{\mathcal{L}}_p^2 + 2\tilde{R}_d \hat{R}_p \\ \mathcal{L}^3 &= \tilde{\mathcal{L}}_d^3 + 3\tilde{\mathcal{L}}_d^2 \hat{R}_p + 3\hat{\mathcal{L}}_p^2 \tilde{R}_d + \hat{\mathcal{L}}_p^3 \\ \mathcal{L}_{(1)}^{(1,1)} &= \tilde{R}_d \hat{H}_{(1)}^2 \\ \mathcal{L}_{(2)}^{(2,1)} &= \tilde{\mathcal{L}}_d^2 \hat{H}_{(2)}^2 \\ \mathcal{L}_{(3)}^{QTE} &= -\frac{1}{2p!} \hat{H}_{(3)}^2 - 2p! \beta_0 \tilde{F}^2 \hat{H}_{(3)}^2. \end{aligned}$$

Los tensores relevantes usados son:

$$\begin{aligned}
G_{AB} &= (\tilde{G}_{\mu\nu}^d - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\hat{R}_p)\delta_A^\mu\delta_B^\nu + (\hat{G}_{ij}^p - \frac{1}{2}\hat{g}_{ij}\tilde{R}_d)\delta_A^i\delta_B^j, \\
\mathcal{H}_{AB} &= (\tilde{\mathcal{H}}_{\mu\nu} + 2\tilde{G}_{\mu\nu}^d R_p - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\hat{\mathcal{L}}_p^2)\delta_A^\mu\delta_B^\nu + (\hat{\mathcal{H}}_{ij} + 2\hat{G}_{ij}^p R_d - \frac{1}{2}\hat{g}_{ij}\tilde{\mathcal{L}}_d^2)\delta_A^i\delta_B^j \\
\mathcal{E}_{AB} &= (\tilde{\mathcal{E}}_{\mu\nu}^d + 3\tilde{\mathcal{H}}_{\mu\nu}\hat{R}_p + 3\tilde{G}_{\mu\nu}^d\hat{\mathcal{L}}_p^2 - \frac{\tilde{g}_{\mu\nu}}{2}\hat{\mathcal{L}}_p^3)\delta_A^\mu\delta_B^\nu + (\hat{\mathcal{E}}_{ij}^p + 3\hat{\mathcal{H}}_{ij}\tilde{R}_d + 3\hat{G}_{ij}^p\tilde{\mathcal{L}}_d^2 - \frac{\hat{g}_{ij}}{2}\tilde{\mathcal{L}}_d^3)\delta_A^i\delta_B^j \\
T_{AB}^{(1,1)} &= -\tilde{G}_{\mu\nu}^d H_{(1)}^2 \delta_A^\mu \delta_B^\nu - (p\tilde{R}_d H_i^{(1)l_2\dots l_p} H_{j l_2\dots l_p}^{(1)} - \frac{1}{2}\hat{g}_{ij}\tilde{R}_d H_{(1)}^2)\delta_A^i\delta_B^j \\
T_{AB}^{(2,1)} &= -\mathcal{H}_{\mu\nu}^d H_{(2)}^2 \delta_A^\mu \delta_B^\nu - (p\tilde{\mathcal{L}}_d^2 H_i^{(2)l_2\dots l_p} H_{j l_2\dots l_p}^{(2)} - \frac{1}{2}\hat{g}_{ij}\tilde{\mathcal{L}}_d^2 H_{(2)}^2)\delta_A^i\delta_B^j \\
T_{AB\ p}^{QTE} &= 2p! \left(2\tilde{F}_{\mu\lambda}\tilde{F}_\nu{}^\lambda \hat{H}_{(3)}^2 - \frac{1}{2}\tilde{F}^2 \hat{H}_{(3)}^2 \right) \delta_A^\mu \delta_B^\nu + 2p! \left(\hat{H}_{(3)i_2\dots i_p} \hat{H}_{(3)j}{}^{i_2\dots i_p} \tilde{F}^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}\tilde{F}^2 \hat{H}_{(3)}^2 \right) \delta_A^i \delta_B^j.
\end{aligned}$$

Para la teoría de Einstein-Maxwell-Lovelock cúbico, las ecuaciones de campo pueden ser escritos como

$$\hat{\xi}_1 \tilde{G}_{\mu\nu}^d + \Lambda_{brana} \tilde{g}_{\mu\nu} + \hat{\xi}_2 \mathcal{H}_{\mu\nu}^d + \alpha_3 \tilde{E}_{\mu\nu}^d - \hat{\xi}_{em} \left(\tilde{F}_{\mu\lambda} \tilde{F}_\nu{}^\lambda - \frac{1}{4} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{F}^2 \right) = 0, \tag{2.130}$$

$$\hat{e}_{ij}^i \tilde{R}_d + \hat{e}_{ij}^0 + \hat{e}_{ij}^2 \mathcal{L}_d^2 - \frac{1}{2} \alpha_3 \hat{g}_{ij} \mathcal{L}_d^3 - \hat{e}_{ij}^{em} \tilde{F}^2 = 0, \tag{2.131}$$

donde se han definido las cantidades auxiliares

$$\begin{aligned}
\Lambda_{brana} &= -\frac{\hat{R}_p}{2} + \Lambda - \frac{\alpha_2}{2}\hat{\mathcal{L}}_p - \frac{\alpha_3}{2}\hat{\mathcal{L}}_p^3 + \frac{1}{4p!} \left(\hat{H}_{(1)}^2 + \hat{H}_{(2)}^2 + \hat{H}_{(3)}^2 \right) , \\
\hat{\xi}_1 &= 1 + 2\alpha_2\hat{R}_p + 3\alpha_3\hat{\mathcal{L}}_p^2 + \beta_1\hat{H}_{(1)}^2 , \\
\hat{\xi}_2 &= \alpha_2 + 3\alpha_3\hat{R}_p + \beta_2\hat{H}_{(2)}^2 , \\
\hat{\xi}_{em} &= \frac{1}{2} + 4\beta_0p!\hat{H}_{(3)}^2 ,
\end{aligned}$$

en la brana, y

$$\begin{aligned}
\hat{e}_{ij}^0 &= \hat{G}_{ij}^p + \hat{g}_{ij}\Lambda + \alpha_2\hat{\mathcal{H}}_{ij}^p + \alpha_3\hat{\mathcal{E}}_{ij}^p - \sum_{m=1}^3 \left(\frac{\hat{H}_{(m)i_2\dots i_p}\hat{H}_{(m)j}{}^{i_2\dots i_p}}{2(p-1)!} - \frac{\hat{g}_{ij}}{4p!}\hat{H}_{(m)}^2 \right) , \\
\hat{e}_{ij}^1 &= -\frac{1}{2}\hat{g}_{ij} + 2\alpha_2\hat{G}_{ij}^p + 3\alpha_3\hat{\mathcal{H}}_{ij}^p + \beta_1 \left(p\hat{H}_{(1)i_2\dots i_p}\hat{H}_{(2)j}{}^{i_2\dots i_p} - \frac{\hat{g}_{ij}}{2}\hat{H}_{(2)}^2 \right) , \\
\hat{e}_{ij}^2 &= -\frac{1}{2}\alpha_2\hat{g}_{ij} + 3\alpha_3\hat{G}_{ij}^p + \beta_2 \left(p\hat{H}_{(2)i_2\dots i_p}\hat{H}_{(2)j}{}^{i_2\dots i_p} - \frac{\hat{g}_{ij}}{2}\hat{H}_{(2)}^2 \right) , \\
\hat{e}_{ij}^{em} &= 2\beta_0p! \left(p\hat{H}_{(3)i_2\dots i_p}\hat{H}_{(2)j}{}^{i_2\dots i_p} - \frac{\hat{g}_{ij}}{2}\hat{H}_{(3)}^2 \right) - \frac{1}{8}\hat{g}_{ij}
\end{aligned}$$

en la variedad interna. Ambas ecuaciones de campo imponen condiciones de compatibilidad, que cuando son escritos en términos de la carga magnética y de la

constante cosmológica desnuda, toman la forma

$$\begin{aligned}
Q_{m_1}^2 &= -\frac{6\alpha_2(p-1)(p-2)(p-3)(p-6+d)\gamma^2}{p!\beta_1(d-4)} - \frac{2\alpha_2(p-1)(2p-6+d)\gamma}{p!\beta_1(d-4)} - \frac{2}{p!\beta_1(d-4)}, \\
Q_{m_2}^2 &= -\frac{3\alpha_3(p-1)(p-6+d)\gamma}{p!\beta_2(d-5)} - \frac{\alpha_2}{p!\beta_2(d-5)}, \\
Q_{m_3}^2 &= -\frac{1}{8\beta_0 p!^2(d-5)} \\
\Lambda &= \frac{1}{2}\alpha_3(p-5)(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(d+p-6)\gamma^3 \\
&\quad + \left(\frac{(p-1)(p-2)(p-3)(3p-12-3d)\alpha_2}{6\beta_1(d-4)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(p-1)(p-2)(p-3)(d-3)(p-6+d)\alpha_3}{2p!\beta_1(d-4)} \right) \gamma^2 \\
&\quad + \left(\frac{(p-1)(d-3)(2p-6+d)\alpha_2}{6p!\beta_1(d-4)} + \frac{(p-1)(d-3)(p-6+d)\alpha_3}{4p!\beta_2(d-5)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(p-1)(3p-6+d)}{6} \right) \gamma + \frac{(d-3)\alpha_2}{12p!(d-5)\beta_2} + \frac{d-3}{6p!(d-4)\beta_1} + \frac{(d-3)}{96(d-5)p!^2\beta_0} \quad (2.133)
\end{aligned}$$

Se han introducido explícitamente las cantidades

$$\begin{aligned}
\hat{R}_p &= \gamma p(p-1), \\
\hat{\mathcal{L}}_p^2 &= \gamma^2 p(p-1)(p-2)(p-3), \\
\hat{\mathcal{L}}_p^3 &= \gamma^3 p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(p-5),
\end{aligned}$$

y las trazas de los tensores de Lovelock de orden k

$$g^{AB} E_{AB}^k = \left(\frac{2k-D}{2} \right) \mathcal{L}^k$$

Las ecuaciones (2.130) y (2.131) contienen naturalmente las ecuaciones de campo de la teoría de Einstein-Maxwell-Gauss-Bonnet considerada en la sección

(2.3). para $\hat{H}_{(2)} = \hat{H}_{(3)} = 0$ y $\alpha_3 = 0$. De acuerdo a esto, las condiciones de compatibilidad toman la forma

$$Q_{m_1}^2 = -\frac{2\alpha_2 (p-1)(d+p-4)}{\beta_1 p!(d-3)} - \frac{1}{p!\beta_1(d-3)}$$

$$\Lambda = \frac{1}{2}\alpha_2 (p-1)(p-2)(p-3)(d+p-4)\gamma^2 + \frac{1}{4}(p-1)(d+2p-4)\gamma$$

$$-\frac{1}{8}Q_{m_1}^2 (d-2) .$$



Bibliografía

- [1] X. O. Camanho, J. D. Edelstein, J. Maldacena and A. Zhiboedov, JHEP **02**, 020 (2016) doi:10.1007/JHEP02(2016)020 [arXiv:1407.5597 [hep-th]].
- [2] C. M. Will, Living Rev. Rel. **9**, 3 (2006) doi:10.12942/lrr-2006-3 [arXiv:gr-qc/0510072 [gr-qc]].
- [3] C. M. Will, Theory and experiment in gravitational physics, Cambridge University Press.
- [4] B. P. Abbott *et al.* [LIGO Scientific and Virgo], Phys. Rev. Lett. **119**, no.16, 161101 (2017) doi:10.1103/PhysRevLett.119.161101 [arXiv:1710.05832 [gr-qc]].
- [5] B. P. Abbott *et al.* [LIGO Scientific and Virgo], Phys. Rev. Lett. **119**, no.14, 141101 (2017) doi:10.1103/PhysRevLett.119.141101 [arXiv:1709.09660 [gr-qc]].
- [6] K. Akiyama *et al.* [Event Horizon Telescope], Astrophys. J. Lett. **875**, L1 (2019) doi:10.3847/2041-8213/ab0ec7 [arXiv:1906.11238 [astro-ph.GA]].

- [7] Brans, C, and Dicke, R H. Wed . "MACH'S PRINCIPLE AND A RELATIVISTIC THEORY OF GRAVITATION". Country unknown/Code not available. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.124.925>.
- [8] T. Damour and G. Esposito-Farese, *Class. Quant. Grav.* **9**, 2093-2176 (1992) doi:10.1088/0264-9381/9/9/015
- [9] C. Eling, T. Jacobson and D. Mattingly, [arXiv:gr-qc/0410001 [gr-qc]].
- [10] J. L. Friedman, K. Schleich and D. M. Witt, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1486-1489 (1993) [erratum: *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1872 (1995)] doi:10.1103/PhysRevLett.71.1486 [arXiv:gr-qc/9305017 [gr-qc]].
- [11] G. D. Birkhoff, *Relativity and Modern Physics*, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press (1923).
- [12] W. Israel, *Phys. Rev.* **164**, 1776-1779 (1967) doi:10.1103/PhysRev.164.1776
- [13] R. Gregory and R. Laflamme, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2837-2840 (1993) [arXiv:hep-th/9301052 [hep-th]].
- [14] L. Lehner and F. Pretorius, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 101102 (2010) doi:10.1103/PhysRevLett.105.101102 [arXiv:1006.5960 [hep-th]].
- [15] S. C. Collingbourne, *J. Math. Phys.* **62**, no.3, 032502 (2021) doi:10.1063/5.0043059 [arXiv:2007.08441 [gr-qc]].
- [16] K. Copsey and G. T. Horowitz, *JHEP* **06**, 021 (2006) doi:10.1088/1126-6708/2006/06/021 [arXiv:hep-th/0602003 [hep-th]].

- [17] R. B. Mann, E. Radu and C. Stelea, JHEP **09**, 073 (2006) doi:10.1088/1126-6708/2006/09/073 [arXiv:hep-th/0604205 [hep-th]].
- [18] A. Bernamonti, M. M. Caldarelli, D. Klemm, R. Olea, C. Sieg and E. Zorzan, JHEP **01**, 061 (2008) doi:10.1088/1126-6708/2008/01/061 [arXiv:0708.2402 [hep-th]].
- [19] A. Cisterna and J. Oliva, Class. Quant. Grav. **35**, no.3, 035012 (2018) doi:10.1088/1361-6382/aa9f7b [arXiv:1708.02916 [hep-th]].
- [20] T. Kaluza, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1921**, 966-972 (1921) doi:10.1142/S0218271818700017 [arXiv:1803.08616 [physics.hist-ph]].
- [21] O.Klein, Quantentheorie und funfdimensionale Relativitatstheorie, Zeits. Phys. 37 (1926) 895.
- [22] D. Lovelock, J. Math. Phys. **12**, 498-501 (1971)
- [23] F. Canfora, A. Giacomini, R. Troncoso and S. Willison, Phys. Rev. D **80**, 044029 (2009) [arXiv:0812.4311 [hep-th]].
- [24] R. M. Wald, doi:10.7208/chicago/9780226870373.001.0001
- [25] K. Schwarzschild, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1916**, 189-196 (1916) [arXiv:physics/9905030 [physics]].
- [26] S. Chandrasekhar, The Mathematical Theory of Black Holes, Clarendon Press (1992).

- [27] R. Penrose, Riv. Nuovo Cim. 1 (1969) 252276.
- [28] G. Nordström, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. 20 (1918) 1238.
- [29] W. Israel, Commun. Math. Phys. 8 (1968) 245.
- [30] F. R. Tangherlini, Schwarzschild field in n dimensions and the dimensionality of space problem, Nuovo Cim., vol. 27, pp. 636651, 1963.
- [31] G. W. Gibbons, D. Ida and T. Shiromizu, Phys. Rev. Lett. **89**, 041101 (2002) doi:10.1103/PhysRevLett.89.041101 [arXiv:hep-th/0206049 [hep-th]].
- [32] A. Ishibashi and H. Kodama, Prog. Theor. Phys. **110**, 901-919 (2003) doi:10.1143/PTP.110.901 [arXiv:hep-th/0305185 [hep-th]].
- [33] G. T. Horowitz and A. Strominger, Nucl. Phys. B **360**, 197-209 (1991) doi:10.1016/0550-3213(91)90440-9
- [34] N. A. Obers, Lect. Notes Phys. **769**, 211-258 (2009) [arXiv:0802.0519 [hep-th]].
- [35] T. Harmark, V. Niarchos and N. A. Obers, Class. Quant. Grav. **24**, R1-R90 (2007) [arXiv:hep-th/0701022 [hep-th]].
- [36] R. C. Myers and M. J. Perry, Annals Phys. **172**, 304 (1986) doi:10.1016/0003-4916(86)90186-7
- [37] D. Garfinkle, G. Horowitz and A. Strominger, Phys. Rev D **43** 3140 (1991).
- [38] R. Emparan and H. S. Reall, Black rings, Class. Quant. Grav. **23** (2006) R169, hep-th/0608012.

- [39] R. Emparan and H. S. Reall, A rotating black ring in five dimensions, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 101101, hep-th/0110260.
- [40] H. Elvang and P. Figueras, Black saturn, *JHEP* **05** (2007) 050, hep-th/0701035.
- [41] H. Elvang, R. Emparan, and P. Figueras, Phases of five-dimensional black holes, *JHEP* **05** (2007) 056, hep-th/0702111.
- [42] H. Iguchi and T. Mishima, Black di-ring and infinite nonuniqueness, *Phys. Rev. D* **75** (2007) 064018, hep-th/0701043.
- [43] J. Evslin and C. Krishnan, The black di-ring: An inverse scattering construction, arXiv:0706.1231 [hep-th].
- [44] R. Emparan and H. S. Reall, Generalized Weyl solutions, *Phys. Rev. D* **65** (2002) 084025, hep-th/0110258.
- [45] T. Harmark, Stationary and axisymmetric solutions of higher-dimensional general relativity, *Phys. Rev. D* **70** (2004) 124002, hep-th/0408141.
- [46] E. Witten, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 505-532 (1998) doi:10.4310/ATMP.1998.v2.n3.a3 [arXiv:hep-th/9803131 [hep-th]].
- [47] D. Birmingham, *Class. Quant. Grav.* **16**, 1197-1205 (1999) doi:10.1088/0264-9381/16/4/009 [arXiv:hep-th/9808032 [hep-th]].
- [48] K. Copsey and G. T. Horowitz, *JHEP* **06**, 021 (2006) doi:10.1088/1126-6708/2006/06/021 [arXiv:hep-th/0602003 [hep-th]].

- [49] R. B. Mann, E. Radu and C. Stelea, JHEP **09**, 073 (2006) doi:10.1088/1126-6708/2006/09/073 [arXiv:hep-th/0604205 [hep-th]].
- [50] G. W. Gibbons, D. Ida and T. Shiromizu, Prog. Theor. Phys. Suppl. **148**, 284-290 (2003) doi:10.1143/PTPS.148.284 [arXiv:gr-qc/0203004 [gr-qc]].
- [51] E. Sorkin, Phys. Rev. Lett. **93**, 031601 (2004) doi:10.1103/PhysRevLett.93.031601 [arXiv:hep-th/0402216 [hep-th]].
- [52] R. Gregory and R. Laflamme, Nucl. Phys. B **428**, 399-434 (1994) doi:10.1016/0550-3213(94)90206-2 [arXiv:hep-th/9404071 [hep-th]].
- [53] Y. Brihaye, T. Delsate and E. Radu, JHEP **07**, 022 (2010) doi:10.1007/JHEP07(2010)022 [arXiv:1004.2164 [hep-th]].
- [54] A. Giacomini, J. Oliva and A. Vera, Phys. Rev. D **91**, no.10, 104033 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.91.104033 [arXiv:1503.03696 [hep-th]].
- [55] A. Giacomini, C. Henríquez-Báez, M. Lagos, J. Oliva and A. Vera, Phys. Rev. D **93**, no.10, 104005 (2016) doi:10.1103/PhysRevD.93.104005 [arXiv:1603.02670 [hep-th]].
- [56] B. Chen, P. C. Li and C. Y. Zhang, JHEP **10**, 123 (2017) doi:10.1007/JHEP10(2017)123 [arXiv:1707.09766 [hep-th]].
- [57] A. Cisterna, C. Henríquez-Báez and J. Oliva, JHEP **01**, 052 (2020) [arXiv:1909.05404 [hep-th]].

- [58] R. Gregory and R. Laflamme, Phys. Rev. D **37**, 305 (1988)
doi:10.1103/PhysRevD.37.305
- [59] B. Zwiebach, Phys. Lett. B **156**, 315-317 (1985)
- [60] F. Canfora, A. Cisterna, S. Fuenzalida, C. Henriquez-Baez and J. Oliva,
[arXiv:2103.09110 [hep-th]]. *In press*
- [61] P. G. O. Freund and M. A. Rubin, “Dynamics of Dimensional Reduction,”
Phys. Lett. **97B**, 233 (1980).
- [62] S. Randjbar-Daemi, A. Salam and J. A. Strathdee, “Spontaneous Compactification in Six-Dimensional Einstein-Maxwell Theory,” Nucl. Phys. B **214**, 491 (1983).
- [63] A. Cisterna, S. Fuenzalida and J. Oliva, Phys. Rev. D **101**, no.6, 064055 (2020) [arXiv:2001.00788 [hep-th]].
- [64] G. W. Horndeski, “Conservation of Charge and the Einstein-Maxwell Field Equations,” J. Math. Phys. **17**, 1980 (1976).
- [65] X. H. Feng and H. Lu, “Higher-Derivative Gravity with Non-minimally Coupled Maxwell Field,” Eur. Phys. J. C **76**, no. 4, 178 (2016) [arXiv:1512.09153 [hep-th]].
- [66] D. Kastor and R. B. Mann, JHEP **04**, 048 (2006) [arXiv:hep-th/0603168 [hep-th]].

- [67] G. Giribet, J. Oliva and R. Troncoso, JHEP **05**, 007 (2006) [arXiv:hep-th/0603177 [hep-th]].
- [68] A. Cisterna, S. Fuenzalida, M. Lagos and J. Oliva, Eur. Phys. J. C **78**, no.11, 982 (2018) [arXiv:1810.02798 [hep-th]].
- [69] E. Arratia, C. Corral, J. Figueroa and L. Sanhueza, [arXiv:2010.02460 [hep-th]].
- [70] G. W. Horndeski, Int. J. Theor. Phys. **10**, 363-384 (1974)
- [71] R. M. Wald, Phys. Rev. D **48**, no.8, 3427-3431 (1993) [arXiv:gr-qc/9307038 [gr-qc]].
- [72] S. W. Hawking and D. N. Page, Commun. Math. Phys. **87**, 577 (1983)
- [73] A. Cisterna, C. Henríquez-Báez, N. Mora and L. Sanhueza, [arXiv:2105.04239 [gr-qc]] *in press*.
- [74] D. G. Boulware and S. Deser, Phys. Rev. Lett. **55**, 2656 (1985)
doi:10.1103/PhysRevLett.55.2656
- [75] D. L. Wiltshire, Phys. Rev. D **38**, 2445 (1988)
doi:10.1103/PhysRevD.38.2445
- [76] D. Kastor, S. Ray and J. Traschen, Class. Quant. Grav. **34**, no.19, 195005 (2017) [arXiv:1706.06684 [gr-qc]].
- [77] J. T. Wheeler, Nucl. Phys. B **268**, 737-746 (1986) doi:10.1016/0550-3213(86)90268-3

- [78] R. G. Cai, Phys. Rev. D **65**, 084014 (2002) doi:10.1103/PhysRevD.65.084014 [arXiv:hep-th/0109133 [hep-th]].
- [79] R. G. Cai and Q. Guo, Phys. Rev. D **69**, 104025 (2004) doi:10.1103/PhysRevD.69.104025 [arXiv:hep-th/0311020 [hep-th]].
- [80] H. Maeda and N. Dadhich, Phys. Rev. D **74**, 021501 (2006) doi:10.1103/PhysRevD.74.021501 [arXiv:hep-th/0605031 [hep-th]].
- [81] M. Hassaine and C. Martinez, Phys. Rev. D **75**, 027502 (2007) doi:10.1103/PhysRevD.75.027502 [arXiv:hep-th/0701058 [hep-th]].
- [82] M. Hassaine and C. Martinez, Class. Quant. Grav. **25**, 195023 (2008) doi:10.1088/0264-9381/25/19/195023 [arXiv:0803.2946 [hep-th]].
- [83] Horowitz G 2012 *Black Holes in Higher Dimensions*. (Cambridge: Cambridge University Press)
- [84] Obers N A 2009 *Lect. Notes Phys.* **769** 211–258
- [85] G. T. Horowitz and K. Maeda, Fate of the black string instability, Phys. Rev. Lett. 87 (2001), 131 301.
- [86] H. S. Liu, Z. F. Mai, Y. Z. Li and H. Lü, Sci. China Phys. Mech. Astron. **63**, 240411 (2020) [arXiv:1907.10876 [hep-th]].
- [87] A. Cisterna, G. Giribet, J. Oliva and K. Pallikaris, Phys. Rev. D **101**, no.12, 124041 (2020) [arXiv:2004.05474 [hep-th]].
- [88] P. A. Cano and Á. Murcia, JHEP **10**, 125 (2020) [arXiv:2007.04331 [hep-th]].

- [89] A. Cisterna, C. Corral and S. del Pino, *Eur. Phys. J. C* **79**, no.5, 400 (2019) [arXiv:1809.02903 [gr-qc]].
- [90] L. Lehner and F. Pretorius, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 101102 (2010) [arXiv:1006.5960 [hep-th]].
- [91] R. Emparan and H. S. Reall, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 101101 (2002) [arXiv:hep-th/0110260 [hep-th]].
- [92] F. R. Tangherlini, *Nuovo Cim.* **27**, 636-651 (1963)
- [93] M. Lagos, J. Oliva and A. Vera, doi:10.1142/9789813226609_0177
- [94] L. Lehner and F. Pretorius, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 101102 (2010) [arXiv:1006.5960 [hep-th]].
- [95] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, "The Large Scale Structure of Space-Time,"
- [96] A. Chamblin, S. W. Hawking and H. S. Reall, *Phys. Rev. D* **61**, 065007 (2000) [arXiv:hep-th/9909205 [hep-th]].
- [97] J. M. Overduin and P. S. Wesson, *Phys. Rept.* **283**, 303-380 (1997). [arXiv:gr-qc/9805018 [gr-qc]].
- [98] M. J. Duff, B. E. W. Nilsson and C. N. Pope, *Phys. Rept.* **130**, 1-142 (1986)
- [99] A. Cisterna, C. Corral and S. del Pino, *Eur. Phys. J. C* **79**, no.5, 400 (2019) [arXiv:1809.02903 [gr-qc]].

- [100] A. Giacomini, M. Lagos, J. Oliva and A. Vera, Phys. Rev. D **98**, no.4, 044019 (2018) [arXiv:1804.03130 [hep-th]].
- [101] A. Cisterna, G. Giribet, J. Oliva and K. Pallikaris, Phys. Rev. D **101**, no.12, 124041 (2020) [arXiv:2004.05474 [hep-th]].
- [102] H. S. Liu, Z. F. Mai, Y. Z. Li and H. Lü, Sci. China Phys. Mech. Astron. **63**, 240411 (2020) [arXiv:1907.10876 [hep-th]].
- [103] P. A. Cano and Á. Murcia, JHEP **10**, 125 (2020) [arXiv:2007.04331 [hep-th]].
- [104] Y. Bardoux, M. M. Caldarelli and C. Charmousis, JHEP **05**, 054 (2012) [arXiv:1202.4458 [hep-th]].
- [105] C. P. Burgess, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **57**, 329-362 (2007) [arXiv:hep-th/0701053 [hep-th]].
- [106] D. Kastor, S. Ray and J. Traschen, Class. Quant. Grav. **34**, no.19, 195005 (2017) [arXiv:1706.06684 [gr-qc]].
- [107] G. Dotti and R. J. Gleiser, Phys. Lett. B **627**, 174-179 (2005) [arXiv:hep-th/0508118 [hep-th]].
- [108] B. R. Hull and R. B. Mann, [arXiv:2102.05282 [gr-qc]].