

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN

Facultad de Ingeniería

Departamento de Ingeniería Metalúrgica

Profesores Patrocinantes

Fernando Elías Betancourt Cerda

Daniel Gerónimo Sbarbaro Hofer

CONTROL DE LA ALTURA DE CAMA DE SEDIMENTO EN UN ESPESADOR PILOTO

Fernando Ariel Maureira Manríquez

Informe de Memoria de Título

para optar al Título de

Ingeniero Civil Metalúrgico

Noviembre 2019

AGRADECIMIENTOS

No podría agradecer suficientemente a todas las personas que de algún modo u otro han contribuido a que lograra terminar mi trabajo de tesis, no ha sido un proceso fácil, e indudablemente sin el apoyo de innumerables personas, jamás habría logrado los objetivos, ruego perdón por las omisiones, sin duda alguna no son intencionales.

A mis padres Jaime Maureira, Rosa Manríquez y a mi hermano menor, Nicolás Maureira, por su cariño incondicional y su infinita paciencia con mi persona.

A mi abuela Nolfia, si hay alguien a quien le debo todo lo que se es a ella, no hay nadie cuyas palabras calen tan profundo en mi como las suyas, siempre llenas de amor, sabiduría y humor.

A mi abuelo Juan Maureira, por ser haber sido hombre más inteligente y trabajador que he conocido, quien me ha enseñado tanto a través de buenos y malos ejemplos, siempre que deseo pensar sobre algún tema, antes de decir cosa alguna digo en mis adentros: ¿Qué habría dicho mi abuelo Juan sobre esto?

A mis tíos Freddy y Susana, quienes siempre me apoyaron incondicionalmente, y siempre fueron los primeros en estar ahí cada vez que necesité algo.

A don Edgardo, por toda la paciencia y el apoyo en tantos ámbitos del desarrollo de mi tesis.

A Esteban Reyes por haber invertido valiosas horas de su tiempo en enseñarme los rudimentos de la programación del PLC, de no haber sido por su buena voluntad y excelente disposición, no habría podido terminar jamás mi trabajo.

A CHRIAM por permitirme disponer del espesador piloto y el PLC con absoluta libertad.

A mis profesores patrocinantes, Fernando Betancourt por creer en mí y ofrecerme este tema que resultó ser un problema muy entretenido e interesante de resolver, al profesor Daniel Sbarbaro no sólo por creer en mí, sino también por sus valiosísimas y fructíferas discusiones, de donde tantas ideas (que pienso investigar lo antes posible) resultaron salir.

A Javier Ortiz, Diego Oyarzo y Javier Rubilar por ser excelentes amigos todos estos años, y tengo la absoluta seguridad de que también lo serán en los venideros.

A mi preciado y ya viejo amigo Diego Franco Henríquez, por siempre acompañar con excelentes conversaciones y ayudarme con muchas de las figuras que el lector podrá apreciar en este trabajo.

A todos los amigos de la carrera que conocí en mi período universitario, Carlos, Marchant (quien, a pesar de no seguir en la carrera, corresponde a una amistad que atesoro mucho), Patricio, Oscar, Annya, Valentina Parra, María José, Valentina Garcés, Leonardo y Tomás, sin quienes jamás me habría animado a continuar en mis estudios.

También a mis amigos fuera de la carrera, quienes para mí son preciadísimas amistades que espero guardar toda mi vida, especialmente Francisco Tassara y Nicolás Nuñez, con quienes he compartido (y espero seguir compartiendo) a lo largo de todos estos años, incontables risas, lágrimas, y conversaciones de todas las cosas del mundo.

A los profesores Freddy Paiva y Manuel Solano, al primero por apoyarme y sugerirme valiosísimas lecturas en las fases iniciales del desarrollo de mi trabajo, y al segundo, quien, sin conocerme mucho, siempre tuvo abiertas las puertas de su oficina para discutir algunas ideas matemáticas que se me ocurrían.

Se dice que la calidad de un trabajo se mide por la calidad de sus lectores, y no puedo pensar en mejores lectores que Benjamín Bobadilla, Javier Ortiz y Patricio Parada para dar lecturas críticas a mi trabajo (críticas que muchas veces resultaron en correcciones muy fructíferas tanto para la forma como el fondo del texto), además de todas esas conversaciones afuera del Dimet que espero, tuvieran tanto valor para ellos como tuvieron para mí.

A Germán Henríquez por estar siempre disponible para ayudarme incondicionalmente con mi vergonzosa carencia de conocimientos en Word.

RESUMEN

Se propone un método que permite medir directamente y en línea la altura de la cama de sedimento para fines de control en el espesador piloto disponible en el laboratorio, basado en un análisis de imágenes en línea y las propiedades de la sedimentación ideal, se desarrolla un método para determinar teóricamente la altura de la cama de sedimento medida, se demuestra la existencia de una solución a las ecuaciones propuestas y se presenta un método matricial que simplifica la evaluación de la función a anular.

La forma de las respuestas escalón obtenidas en las simulaciones de lazo abierto permite estipular una linealización para pequeñas perturbaciones, cuyas funciones de transferencia pueden asimilarse a un integrador, una ganancia y un retardo. Se muestra como pueden medirse y calcularse sus parámetros en base a las simulaciones, y también conociendo ciertos parámetros de una prueba escalón realizable en laboratorio.

Se ilustra como la información de las pruebas de lazo abierto puede ser utilizada para realizar procesos de sintonización de un controlador PI en base a dos modelos simplificados de un sistema, se demuestra que ambos representan casos límites de un sistema simplificado más general.

Se propone una estrategia de control de la cama de sedimento basadas en el control PI, se clasifican los tipos de respuestas y se estudian las causas de los comportamientos observados.

Se realiza un resumen de diversos límites impuestos a las acciones de control con la finalidad de cumplir simultáneamente una serie de objetivos de rendimiento, estabilidad, evitar cambios abruptos, y sostener la operación óptima en el espesador.

La clasificación propuesta para las respuestas al control PI es esencialmente dependiente del tiempo de estabilización del sistema y el retardo del sistema en la zona de sedimentación, se observa convergencia en un controlador de acción rápida, inestabilidades en algunos casos de acción lenta y convergencia para la acción ultra lenta.

En una gran mayoría de los casos las respuestas observadas pueden ser entendidas mediante una comprensión adecuada de los retardos en la operación, ya sean estos retardos asociados a la zona de sedimentación como a la zona de sedimento, dando lugar a las dos clases de falsos estados estacionarios observados.

ABSTRACT

A method is proposed that allows to measure directly and in-line the height of the sludge-blanket for control purposes in the pilot thickeners available in the laboratory, based on an online image analysis and the known properties of the ideal sedimentation, a method is developed to theoretically determine the height of the sludge blanket, the existence of solutions to the proposed equation is demonstrated and a matrix method that simplifies the evaluation of this equation is presented.

The shape of the step responses obtained in the open-loop simulation allows the stipulation of a linearization for small disturbances, whose transfer functions can be assimilated to an integrator, a gain and a delay. It was shown how its parameters can be measured and calculated based on simulations and also knowing certain parameters of a step response that can be performed in laboratory.

It is illustrated how the information of the open-loop tests can be used to perform tuning processes of a PI controller based on two simplified versions of the linearized model.

A sediment bed control strategy based on PI control is proposed, the types of responses are classified and the causes of the observed behaviors are studied.

A summary of various limits imposed on control actions is performed in order to simultaneously achieving a series of secondary objectives, stability, avoid abrupt changes, and sustain the optimal operation in the thickener.

The proposed classification for the responses to the PI controller is essentially dependent on the stabilization time of the system and the delay time caused by the travelling waves in the sedimentation zone, convergence is observed in the fast-action and the ultraslow-action controller and instabilities could emerge in the slow-action controller.

In the large majority of cases, the observed responses can be understood by an adequate understanding of the delays in the operation, whether these delays are associated with the sedimentation zone or the sediment zone, giving rise to the two kind of false-steady states observed.

ÍNDICE

1.1. INTRODUCCIÓN.....	1
1.2. El problema del agua en la minería.	1
1.3. Espesamiento.	4
1.3.1. Definición.	4
1.3.2. Equipos.	4
1.4. Objetivos de este trabajo.....	5
1.4.1. Objetivos generales.....	5
1.4.2. Objetivos específicos.	5
2 MODELACIÓN FENOMENOLÓGICA.	6
2.1. Mecánica del medio continuo y Teoría de mezclas.....	8
2.1.1. Balance de masa.....	8
2.1.2. Balance de momentum lineal.....	9
2.1.3. Relaciones constitutivas.....	9
2.1.4. Balances en discontinuidades.	10
2.2. Teoría de la sedimentación.	10
2.2.1. Modelo de sedimentación.	12
2.2.2. Zonas en un espesador continuo.	14
3 ESTADOS ESTACIONARIOS EN UN ESPESADOR CONTINUO.....	16
3.1. Preliminares.....	16
3.2. Definiciones.....	16
3.3. Construcción del estado estacionario.	18
3.4. Operación óptima de una columna de sedimentación.	19
4 SOLUCIONES NUMÉRICAS Y SIMULACIONES EN LAZO ABIERTO.	22
4.1. Descripción del método numérico.....	22
4.2. Determinación de la altura de la cama de sedimento.	24
4.2.1. Método del flotador.....	25
4.3. Simulaciones en lazo abierto.	26

4.3.1. Efecto del cambio en el flujo de descarga.	28
4.3.2. Efecto del cambio en el flujo de alimentación.	30
4.4. Análisis de las respuestas escalón:	31
4.4.1. Alteraciones en la alimentación	32
4.4.2. Alteraciones en el flujo de descarga.	34
4.5. Comportamiento dinámico del sistema.	35
5 SISTEMA DE CONTROL	36
5.1. Preliminares	36
5.1.1. Tipos de control	36
5.1.2. Error	36
5.1.3. Control PID:.....	36
5.2. Objetivos de control:	37
5.3. Límites operacionales.	38
5.3.1. Primera condición:	39
5.3.2. Segunda condición:	40
5.3.3. Tercera condición.....	41
5.3.4. Cuarta condición:	42
5.3.5. Quinta condición:.....	42
5.3.6. Límites globales	42
5.3.7. Control PI.....	43
5.4. Simulaciones.....	43
5.4.1. Simulaciones para el lazo de control PI.	44
5.5. Análisis de las respuestas escalón:	50
6 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.	55
6.1. Conclusiones y recomendaciones asociados a los resultados teóricos.	55
6.2. Conclusiones y recomendaciones asociados a los resultados experimentales.	60
7 ANEXOS.	61
7.1. Diagramas de flujo importantes.....	61
7.2. Simulaciones no incluidas.	62

7.2.1. Lazo abierto.	62
7.2.2. Control PI.....	66
7.2.3. Control de lógica difusa.	75
7.3. Zonas del plano Ω de utilidad.....	80
7.3.1. Zonas para estado estacionario dependientes del flujo de descarga.	80
7.3.2. Zonas para estado estacionario independientes del flujo de descarga.	81
7.3.3. Zonas para determinar respuestas escalón.	82
7.4. Propuestas para la obtención de la altura de la cama de sedimento.	81
7.4.1. Propuesta de solución I.....	81
7.4.2. Propuesta de solución II.....	81
7.5. Estudio matemático y experimental del método del flotador.	83
7.5.1. Demostración de la relación de recurrencia de la matriz A.	87
7.5.2. Existencia de soluciones para el método propuesto.....	88
7.6. Comparación de métodos para determinar la altura de la cama de sedimento.....	92
7.6.1. Lazo abierto	93
7.6.2. Control PI.....	94
7.6.3. Control de lógica difusa.....	95
7.7. Ejemplos de cálculo de los parámetros de los cambios escalón.....	97
7.7.1. Cambio escalón en el flujo de descarga.	97
7.7.2. Cambio escalón en el flujo de alimentación.	99
7.7.3. Cambio escalón en el porcentaje de sólidos de alimentación.	102
7.7.4. Reducción de variables.	104
7.8. Sintonización del controlador PI	105
7.8.1. Sintonización de acción rápida.	109
7.8.2. Sintonización de acción lenta.....	110
7.8.3. Generalización del modelo.	110
7.9. Control de lógica difusa.....	132
7.9.1. Definición y conceptualización del control de lógica difusa:	132
7.9.2. Diseño del controlador de lógica difusa.....	133
7.10. Desarrollo experimental.	136
7.10.1. Montaje experimental	136

7.10.2. Descripción de los equipos y operación.....	136
7.10.3. Caracterización del material.	142
7.10.4. Pruebas continuas:	142
7.11. Anexo matemático.....	145
7.11.1. Leyes de conservación hiperbólicas y el método de las características:.....	145
7.11.2. Soluciones débiles:.....	148
7.11.3. Condición de Rankine-Hugoniot:	149
7.11.4. Condiciones de Entropía:	149
7.11.5. Problema de Riemann.	150
7.11.6. Ondas de rarefacción.....	150
7.11.7. Funciones de flujo numérico.....	150
7.11.8. Condición CFL.....	151
8 BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS.....	153

NOMENCLATURA

Sistemas y unidades de medida

En las secciones teóricas y simulaciones se procuró siempre utilizar unidades del sistema internacional de medidas SI, sin embargo, en algunas descripciones experimentales se optó por utilizar unidades distintas para dar una impresión más adecuada del orden de magnitud de los equipos y capacidades involucradas.

- m: Metros.
- s: Segundos.
- kg: Kilogramos.
- ton: Toneladas.
- L: Litros.
- min: Minutos.
- hr: Horas.
- A: Amperes.
- V: Volts.

Deben considerarse también los prefijos utilizados para alterar los órdenes de magnitud de una unidad:

- μ : micro (10^{-6}).
- m: mili (10^{-3}).
- c: centi (10^{-2}).
- d: deci (10^{-1}).
- k: kilo (10^3).
- M: mega (10^6).

Notación.

Se presentan los símbolos utilizados para representar las magnitudes físicas más relevantes para el desarrollo de este trabajo, además de los símbolos que se utilizarán para las funciones más importantes y las unidades en el sistema internacional SI en que estas se miden.

- Q : Caudal volumétrico o flujo (m^3/s).

- q : Velocidad de flujo o densidad de flujo convectivo (m/s) el subíndice f , u y e significan alimentación, descarga y efluente respectivamente.
- ρ : Densidad (kg/m^3).
- U : Promedio de celda de la fracción volumétrica de sólidos (adimensional).
- u : Fracción volumétrica de sólidos (adimensional).
- u_c : Fracción volumétrica de sólidos conjugada (adimensional).
- u_m : Fracción volumétrica de sólidos conjugada de estado estacionario (adimensional).
- u_M : Fracción volumétrica de sólidos en la zona de sedimento de estado estacionario (adimensional).
- u_{max} : Máxima fracción volumétrica de sólidos posible.
- u_{infl} : Fracción volumétrica de sólidos asociada al punto de inflexión de la función de flujo batch.
- u_{ma} : Fracción volumétrica de sólidos asociada al máximo de la función de flujo batch.
- u^{max} : Máxima fracción volumétrica de sólidos deseada en la descarga del espesador.
- u^{min} : Mínima fracción volumétrica de sólidos deseada en la descarga del espesador.
- u_D : Fracción volumétrica de sólidos en el límite inferior del espesador.
- \vec{b} : Vector de fuerzas de cuerpo ($\text{kg/s}^2\text{m}^2$).
- \vec{m} : Fuerza de interacción entre componentes ($\text{kg/s}^2\text{m}^2$).
- T : Tensor de esfuerzos ($\text{kg/s}^2\text{m}$).
- f_b : Función de flujo batch (m/s).
- f : Función de flujo total en la zona de sedimentación. (m/s)
- F : Función de flujo total (m/s)
- z_{sb} : Altura de la cama de sedimento (m).
- L : Longitud total del espesador (m).
- D : Distancia entre la alimentación del espesador y el rebalse (m).
- H : Distancia entre la alimentación al espesador y la descarga (m), se usa también como una función proporcional a la sumatoria de fuerzas.
- A : Área del espesador, se utiliza también como una función que representa el área transversal de una esfera (m^2), o como matriz (m^3).
- v_∞ : Parámetro en la correlación de Richardson y Zaki (m/s).

- c : Parámetro en la correlación de Richardson y Zaki (adimensional).
- e : Diferencia entre el valor real y referencia de la altura de la cama de sedimento (m).
- M_s : Masa de sólidos en el interior del espesador (kg).
- K_i : Constantes de diversos tipos,
- R : Radio de la esfera utilizada para medir la altura de cama de sedimento (m).
- σ, S_f : Velocidad de propagación de una discontinuidad de salto (m/s).
- \vec{E} : Vector columna cuyas componentes son 1.
- θ : Retardo (s).
- s : Densidad de alimentación de sólidos (m/s).
- S : Alimentación de sólidos (m³/s)
- \mathcal{E} : Función de flujo en exceso (m/s).
- U : Zonas del plano Ω tales que se produce un vaciado del espesador.
- \mathcal{O} : Zonas del plano Ω tales que se produce el llenado del espesador.
- ℓ : Zonas del plano Ω tales que el espesador quede críticamente cargado.
- v : Velocidad relativa sólido-fluido (m/s)

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Función de flujo batch, punto de inflexión y concentración máxima.....	16
Figura 2 Función de flujo global y concentraciones relevantes.....	17
Figura 3 Diagrama de estados estacionarios.	21
Figura 4 Soluciones de la simulación de lazo abierto para un cambio positivo en el caudal de descarga.	28
Figura 5 Respuestas dinámicas del sistema ante un cambio positivo de flujo de descarga.....	28
Figura 6 Dinámica de la concentración conjugada ante un cambio escalón positivo en el flujo de descarga.	29
Figura 7 Respuestas dinámicas del sistema ante el cambio escalón positivo de flujo de alimentación.	30
Figura 8 Soluciones de la simulación de lazo abierto para un cambio escalón positivo en el caudal de alimentación.....	30
Figura 9 Soluciones de la simulación del lazo de control PI de acción rápida para un cambio escalón positivo en el set-point.....	44
Figura 10 Respuestas dinámicas del sistema ante el cambio escalón positivo de set-point.....	45
Figura 11 Velocidad de flujo de descarga y sus límites.	45
Figura 12 Concentración conjugada.....	45
Figura 13 Concentración de sólidos en la descarga y sus límites.....	46
Figura 14 Flujo de descarga y sus límites para acción lenta.....	47
Figura 15 Soluciones de la simulación del lazo de control PI para un cambio escalón positivo en el flujo de sólidos.....	47
Figura 16 Respuestas dinámicas del sistema ante el cambio escalón positivo en el flujo de alimentación.	48
Figura 17 Flujo de descarga y límites para el controlador de acción lenta.	49
Figura 18 Concentración conjugada para el caso de acción lenta.	49
Figura 19 Función de flujo límite y punto de alimentación para un estado estacionario.....	53
Figura 20 Algoritmo para la determinación de estados estacionarios.	61
Figura 21 Soluciones a las simulaciones en lazo abierto para el cambio escalón negativo en el flujo de descarga.....	62
Figura 22 Respuestas dinámicas a cambios escalón negativos en el flujo de descarga.....	62

Figura 23 Soluciones a las simulaciones en lazo abierto para el cambio escalón negativo en el flujo de alimentación.....	63
Figura 24 Respuestas dinámicas a cambio escalón negativo en el flujo de alimentación.....	63
Figura 25 Soluciones de la simulación de lazo abierto para un cambio escalón positivo en el porcentaje de sólidos.....	64
Figura 26 Respuestas dinámicas del sistema ante el cambio escalón positivo en la fracción volumétrica de sólidos.....	64
Figura 27 Soluciones de la simulación de lazo abierto para un cambio escalón negativo en el porcentaje de sólidos.....	65
Figura 28 Respuestas dinámicas a cambio escalón negativo en el porcentaje de sólidos de alimentación.....	65
Figura 29 Soluciones para el cambio escalón negativo en el set-point bajo control PI de acción rápida.....	66
Figura 30 Respuestas dinámicas a un cambio escalón negativo en el set-point.....	66
Figura 31 Soluciones para el cambio escalón negativo en el flujo de alimentación bajo control PI.....	67
Figura 32 Respuestas dinámicas a un cambio escalón negativo en el flujo de alimentación....	67
Figura 33 Soluciones para el cambio escalón en el set-point bajo control PI de acción lenta. ...	68
Figura 34 Respuestas dinámicas a un cambio escalón positivo en el set-point bajo control PI de acción lenta.....	68
Figura 35 Soluciones para el cambio escalón en la alimentación de sólidos bajo control PI de acción lenta.....	69
Figura 36 Respuestas dinámicas a un cambio escalón positivo en la alimentación de sólidos bajo control PI de acción lenta.....	69
Figura 37 Soluciones para el cambio escalón en el set-point bajo PI de acción ultra lenta.....	70
Figura 38 Respuestas dinámicas a un cambio escalón positivo en el set point bajo control PI de acción lenta.....	70
Figura 39 Soluciones para el cambio escalón positivo en la alimentación de sólidos bajo control PI de acción ultra lenta.....	71
Figura 40 Respuestas dinámicas a un cambio escalón positivo en la alimentación de sólidos bajo control PI de acción ultra lenta.....	71

Figura 41 Soluciones para el cambio escalón positivo en la alimentación de sólidos bajo control PI de acción rápida, largo plazo.	72
Figura 42 Respuestas dinámicas a un cambio escalón positivo en la alimentación de sólidos bajo control PI de acción rápida, largo plazo.....	72
Figura 43 Soluciones para el cambio escalón negativo en la alimentación de sólidos bajo control PI de acción rápida, largo plazo.	73
Figura 44 Respuestas dinámicas a un cambio escalón negativo en la alimentación de sólidos bajo control PI de acción rápida, largo plazo.	73
Figura 45 Respuesta dinámica a cambios en el set point de la altura de cama de sedimento bajo control de acción ultra-lenta.....	74
Figura 46 Caudal de descarga, sus límites y su valor estacionario.	74
Figura 47 Soluciones de la simulación del lazo de control de lógica difusa para un cambio escalón positivo en el set-point.	75
Figura 48 Respuestas dinámicas del sistema ante el cambio escalón positivo de set-point.	76
Figura 49 Soluciones de la simulación del lazo de control de lógica difusa para un cambio escalón positivo en la alimentación de sólidos.....	77
Figura 50 Respuestas dinámicas del sistema ante el cambio escalón positivo en el flujo de alimentación de sólidos.	77
Figura 51 Soluciones para el cambio escalón negativo en el set-point bajo control de lógica difusa.	78
Figura 52 Respuestas dinámicas para el cambio negativo en el set-point bajo el control de lógica difusa.	78
Figura 53 Soluciones para el cambio escalón negativo en la alimentación de sólidos bajo control de lógica difusa.	79
Figura 54 Respuestas dinámicas para el cambio negativo en la alimentación de sólidos bajo control de lógica difusa.....	79
Figura 55 Función de flujo límite y las zonas que define. Arriba a la izquierda: la función de flujo límite. Arriba a la derecha: zonas definidas para $qu < qu < qu$, Abajo a la izquierda: zonas definidas para $qu \leq qu$, Abajo a la derecha: zonas definidas para $qu \leq qu$. Extraído de Diehl 2001.	80
Figura 56 Zonas del plano Ω independientes del flujo de descarga. Extraído de Diehl 2006. ...	81
Figura 57 Zonas del plano Ω asociadas a las respuestas escalón.....	82

Figura 58 Inventario acumulado para un perfil estacionario críticamente cargado.....	82
Figura 59 Inventario acumulado para un perfil de concentraciones continuo.....	82
Figura 60 Rango de valores que puede adquirir la posición del centro del flotador, la densidad de la esfera es decreciente de izquierda a derecha.....	84
Figura 61 Modificaciones en la función fuerza ante cambios en los parámetros, izquierda: cambios en el radio del flotador, derecha: cambios en la densidad del flotador.	87
Figura 62 Representación del argumento a utilizar para demostrar la existencia de soluciones para el método propuesto.	88
Figura 63 Comparación de resultados obtenidos para la simulación de lazo abierto.....	93
Figura 64 Comparación de métodos para la simulación del sistema de control PI.....	94
Figura 65 Comparación de los métodos de determinación de altura de cama de sedimento para la simulación del control de lógica difusa.	95
Figura 66 Comparación de métodos para la modificación del set-point.	96
Figura 67 Respuesta escalón ante cambio escalón positivo en el flujo de descarga.	97
Figura 68 Respuesta escalón ante cambio escalón positivo en el flujo de alimentación.....	99
Figura 69 Retardo estimado y error cuadrático versus alfa.....	100
Figura 70 Respuesta escalón ante cambio escalón positivo en el porcentaje de sólidos en la alimentación.	102
Figura 71 Retardo estimado y error cuadrático en función de alfa.....	103
Figura 72 Diagrama de bloques linealizado del sistema en lazo abierto.	106
Figura 73 Diagrama de bloques del sistema de control linealizado simplificado 1.	106
Figura 74 Diagrama de bloques del sistema de control linealizado simplificado 2.	111
Figura 75 Concentración conjugada ante cambio escalón en la alimentación de sólidos.....	112
Figura 76 Respuestas dinámicas para un cambio positivo en el set-point para el controlador PI de acción rápida.....	120
Figura 77 Respuestas dinámicas para un cambio positivo en la alimentación de sólidos para el controlador PI de acción rápida.	121
Figura 78 Respuestas dinámicas para un cambio positivo en el set-point para el controlador PI de acción lenta.	121
Figura 79 Respuestas dinámicas para un cambio positivo en la alimentación de sólidos para el controlador PI de acción lenta.....	121

Figura 80 Respuestas dinámicas del sistema de control PI de acción ultra lento a un cambio positivo en el set-point.	124
Figura 81 Respuestas dinámicas del sistema de control PI de acción ultra lenta a un cambio positivo en la alimentación de sólidos.	124
Figura 82 Comparación entre la función de flujo de Richardson y Zaki y la aproximación lineal propuesta.	127
Figura 83 Funciones de pertenencia en función del error.	134
Figura 84 Acciones de control para el controlador de lógica difusa.	135
Figura 85 Diagrama del montaje experimental del espesador piloto, representa las conexiones entre los diversos equipos, no sus dimensiones.	136
Figura 86 Plano del espesador piloto disponible en el laboratorio. Cortesía de Edgardo Lorza.	137
Figura 87 Interfaz gráfica del software de análisis de video.	140
Figura 88 Pantalla principal de la HMI desarrollada por el autor para el control de la altura de la cama de sedimento.	141
Figura 89 Zonas donde no llegan las curvas características. Extraído de Renardy (2004).	147
Figura 90 Zonas donde las curvas características se intersectan. Extraído de Renardy (2004).	147

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Costos del agua industrial para una faena ubicada en el desierto Chileno en el año 2010	2
Tabla 2. Expresiones Semi-Empíricas para la función de flujo batch.	11
Tabla 3 Parámetros físicos y condiciones iniciales para la simulación en lazo abierto.	27
Tabla 4 Parámetros Numéricos para la simulación en lazo abierto.....	27
Tabla 5 Estado estacionario determinado	27
Tabla 6 Parámetros controlador PI.	44
Tabla 7 Parámetros controlador de lógica difusa.....	75
Tabla 8 Parámetros del ajuste lineal.	97
Tabla 9 Parámetros del ajuste lineal.	99
Tabla 10 Parámetros del ajuste lineal.....	102
Tabla 11 Parámetros de las funciones de transferencia asociadas a las variables de entrada.	105
Tabla 12 Solicitaciones para control Pi de acción rápida.	109
Tabla 13 Solicitaciones para control Pi de acción lenta.	110
Tabla 14 Parámetros de la tabla de Ruth-Hurwitz.....	116
Tabla 15 Tabla de Ruth-Hurwitz con una aproximación de Pade de cuarto orden para acción rápida.	119
Tabla 16 Tabla de Ruth-Hurwitz con una aproximación de Pade de cuarto orden para acción lenta.	119
Tabla 17 Coeficientes polinómicos, y parámetros de la tabla de Ruth-Hurwitz primer orden para acción ultra lenta.....	119
Tabla 18 Tabla de Ruth-Hurwitz con una aproximación de Pade de cuarto orden para acción ultra lenta.	120
Tabla 19 Solicitaciones para control Pi de acción ultra lenta.....	123
Tabla 20 Reglas de inferencia propuestas para la obtención de la salida del controlador.	134
Tabla 21 Acciones de control para el tanque agitador.....	139
Tabla 22 Módulos disponibles en el PLC del laboratorio.....	141
Tabla 23 Parámetros de Richardson y Zaki obtenidos a partir de las mediciones de velocidad de sedimentación.	142

1.1. INTRODUCCIÓN.

1.2. El problema del agua en la minería.

Uno de los principales desafíos que enfrenta no solo la industria minera en Chile, si no la humanidad en su totalidad es mejorar la eficiencia en la utilización de los recursos hídricos, si bien es cierto, la minería consumía un 4.5% de los recursos hídricos nacionales al año 2005 [1], si se considera la importancia de la agricultura como actividad económica para el país¹, se deduce que esta cifra enmascara el verdadero impacto que tiene la industria minera, que al año 2010 consumió un total de 300 millones de metros cúbicos, mientras se estima que durante al año 2026 se consumirán 631 millones de metros cúbicos [2].

Respecto de las líneas de procesamiento, considerando la industria metalúrgica extractiva del cobre en Chile, en particular, la línea de procesamiento de minerales sulfurados de cobre, la necesidad de grandes cantidades de agua en los procesos de molienda y flotación² [2] determinan que la eficiencia hídrica de este proceso tenga una enorme relevancia en el consumo de agua fresca de la línea de procesamiento en su totalidad.

Las pérdidas de agua en una planta concentradora se deben principalmente a dos factores de importancia, la evaporación y el agua residual en la pulpa de descarga de los espesadores, que termina depositada en tranques de relaves.

Aún sin pensar en incrementos de producción, este requerimiento de agua no hará sino aumentar con el tiempo debido entre otros a los siguientes factores:

1. Disminución de las leyes minerales: Obliga a incrementar el tonelaje procesado para mantener una producción constante, lo que implica una mayor necesidad de agua.
2. Incremento en la presencia de minerales de ganga complejos: El aumento de la presencia de minerales de arcilla en los minerales a tratar, trae una serie de problemas en el procesamiento de minerales, que en general son resueltos inyectando más agua al proceso.

Por otra parte, en el contexto nacional, la mayoría de las plantas de procesamiento de minerales se emplazan en el norte del país, donde el agua es un recurso muy escaso, además las comunidades y la

¹ La agricultura requiere de grandes consumos de agua, en 2005, el 84.6% del consumo de recursos hídricos fue a parar a esta actividad [1].

² Estimaciones dictan que en el proceso de flotación se requieren 0.72 metros cúbicos por cada tonelada de mineral procesado, mientras en la línea hidrometalúrgica se requiere de 0.30 metros cúbicos de agua por tonelada de mineral procesado [2].

legislación ven cada vez con peores ojos la extracción de las escasas aguas locales con fines mineros, así, queda claro que la industria debe buscar una solución a estos problemas.

Se han propuesto diversas soluciones para este problema, una posibilidad es ocupar un recurso “inagotable” como es el agua de mar, opción que está siendo estudiada, donde incluso en el año 2010 se abrió la planta concentradora Esperanza, operada completamente con agua de mar, pero hacer uso de este recurso en las faenas ya operativas requiere de enormes inversiones y posee elevados costos asociados, para ilustrar esta idea, se adjuntan en la tabla 1 los costos aproximados del agua para una faena emplazada en el desierto chileno en el año 2010 [2], por otro lado los efectos de este cambio de insumo sobre la eficiencia del proceso de flotación están aún siendo estudiados, la necesidad de infraestructura y tecnología para posibilitar el traslado y adecuación del agua de mar al proceso, condicionan que esta solución sólo sea aplicable en el mediano-largo plazo.

Tabla 1. Costos del agua industrial para una faena ubicada en el desierto Chileno en el año 2010

Insumo	Precio (US\$/m³)
Agua fresca	0.50
Agua recuperada de proceso	0.18
Agua de mar	1.20
Agua de mar desalinizada	2.20

Respecto del corto plazo, una solución que puede tener un gran impacto es mejorar la utilización de los recursos hídricos actuales, es decir, disminuir la necesidad de agua fresca en las plantas concentradoras mediante la optimización del uso de agua en el proceso, o bien, incrementando las tasas de recirculación de agua [3].

En las plantas de procesamiento mineral, esta recirculación depende de la eficiencia de los procesos de espesamiento, filtrado de concentrados y disposición de relaves, debido a que la razón relave/concentrado es aproximadamente 25/1 [3], es la optimización de la recuperación de agua de los relaves el foco que ofrece mayores oportunidades de mejorar las tasas de recirculación de agua en el proceso.

Si bien se han dedicado grandes esfuerzos en esta área logrando en el período 2005-2014 una reducción del 33% en los requerimientos de agua fresca por tonelada procesada [3], aún restan esfuerzos que realizar, por ejemplo, se estima que una mejor operación de la etapa de espesamiento, permitiría mejorar en un 4% las tasas de recuperación de agua [4].

Otro problema, esta vez de importancia económica, está asociado a la sensibilidad que manifiesta la continuidad operacional del proceso de flotación respecto de la buena operación de las etapas de espesamiento de relaves, el porcentaje de sólidos de la pulpa mineral a procesar es una variable de gran relevancia para el proceso de flotación, así, un problema en la etapa de espesamiento, podría comprometer seriamente la disponibilidad inmediata de agua en el proceso, y con esto, ocasionar desde un aumento en la demanda de agua fresca en el proceso, hasta una paralización total de la planta, pasando por un descenso en la calidad o cantidad de producto con las graves consecuencias económicas que cada uno de estos sucesos puede traer.

Así, el espesamiento aparece como una etapa crucial para la industria del procesamiento de minerales, tanto como un proceso de importancia estratégica debido a la importancia que adquiere el agua si se le considera como un recurso cuyo suministro no es seguro en el largo plazo, como un proceso crítico en la operación diaria de una planta.

Para el caso de una planta de procesamiento de minerales de cobre, el proceso de espesamiento, aparece emplazado aguas abajo, lo que implica que está sometido a grandes perturbaciones, en este sentido el control automático del proceso aparece como un problema de gran importancia.

El control de este proceso está principalmente orientado a evitar sobrecargas y embancamientos³ para asegurar la continuidad operacional del proceso, y a controlar el porcentaje de sólidos en la descarga a fin de maximizar la recuperación de agua sin comprometer el objetivo anteriormente mencionado [3].

El control en los espesadores representa un desafío importante para ingenieros y controlistas, esto debido a que es un sistema de muy lenta respuesta, existe muy poca instrumentación, su naturaleza no lineal y las perturbaciones presentes [5].

Según Concha en el año 2001 [6], el estudio de la dinámica y el control de un espesador es aún un problema no resuelto en su totalidad, si bien desde escritas esas palabras, se ha avanzado bastante, por ejemplo, se han realizado estudios extensivos sobre los estados estacionarios que alcanza un espesador [7-9], la dinámica de esos procesos [10-12], y se han propuesto pautas de control [10, 13], se han

³ Embancamiento se entiende como el fenómeno en que el esfuerzo de cedencia de la pulpa en la zona inferior de la columna de sedimentación aumenta en un grado tal que impide la succión del material en la descarga, y en consecuencia la descarga de la columna se obstruye deteniendo el proceso.

propuesto también estrategias de control de tipo predictivo [14], sin embargo, resta aún realizar validación experimental para muchas de estas ideas.

Con todo, en este trabajo se pretende diseñar y simular sistemas de control para la altura de la cama de sedimento en una columna de sedimentación piloto, con material no floculado, mediante una estrategia de control realimentado del tipo PI y en los anexos una estrategia de lógica difusa, ambos sometidos a una serie de restricciones que son cumplidas mediante saturación.

Una estrategia de control proporcional para la cama de sedimento fue propuesta por Diehl en el año 2007 [15] y, en gran medida, el presente trabajo es deudor de aquella publicación, sin embargo, también se realizarán variaciones sensibles respecto de las propuestas ahí escritas.

1.3. Espesamiento.

1.3.1. Definición.

El espesamiento es una operación mecánica continua de separación de fases cuyo objetivo es lograr, a partir de una pulpa (mezcla de sólido y líquido) alimentada al equipo, dos corrientes, una de descarga que contenga la totalidad del sólido con el menor contenido de agua posible y otra de rebalse que consista en agua clara.

El principio de funcionamiento de un espesador convencional se basa en la sedimentación o asentamiento de las partículas sólidas en el fondo de tanques cilíndricos que reciben el nombre de espesadores, debido a que el proceso de espesamiento se dificulta al tratar pulpas con partículas finas, a menudo estas se aglomeran mediante mecanismos de coagulación o floculación.

Es importante que este proceso logre el más elevado porcentaje de sólidos posible en la descarga debido a que esto asegura una buena recirculación de agua al proceso, y además disminuye los riesgos de contaminación a las napas subterráneas por líquidos percolados en los tranques de relaves donde los sólidos son dispuestos.

1.3.2. Equipos.

La base de los equipos de espesamiento es esencialmente la misma que del espesador Dorr inventado en 1905, así se han mejorado y modernizado algunas de sus partes, pero el equipo no ha cambiado mucho desde su invención:

Estanque: En general es de forma cilíndrica, con una base semi-cónica en la parte inferior, el material del que se construye depende del diámetro que pueda adquirir el equipo (Son equipos que pueden llegar a medir 120 metros de diámetro).

Bandeja de alimentación: Es un cilindro concéntrico al estanque, que en general se diseña de forma que permita una buena distribución de la alimentación al espesador, otra de sus funciones es lograr una buena mezcla entre la pulpa y el floculante.

Rastras: Tienen como finalidad llevar el material depositado en el fondo del espesador hacia la abertura de descarga, además de sostener la fluidez del material algunas cuentan con sistemas para modificar su posición (altura) para cuando el torque se hace excesivo.

Canaletas de rebalse: tienen por objetivo evacuar el agua recuperada a una velocidad adecuada para evitar el arrastre de partículas finas.

1.4. Objetivos de este trabajo.

1.4.1. Objetivos generales.

- 1) Proponer estrategias de control realimentadas que permitan controlar la altura de la cama de sedimento en una columna de sedimentación piloto sin la adición de floculantes.
- 2) Simular el desempeño de estas estrategias de control, clasificando y explicando los fenómenos observados.

1.4.2. Objetivos específicos.

- 1) Desarrollar un método que permita la medición experimental de la altura de la cama de sedimento en línea en la columna de sedimentación presente en el laboratorio, señalando recomendaciones y limitaciones.
- 2) Diseñar un protocolo de operación para el espesador piloto presente en el laboratorio
- 3) Programar las pruebas en el PLC disponible en el laboratorio.

2 MODELACIÓN FENOMENOLÓGICA.

En el modelamiento tradicional del proceso de espesamiento se toman en cuenta esencialmente dos fenómenos, la sedimentación y la consolidación. El proceso de sedimentación es producido por efectos gravitacionales⁴ y el de consolidación es ocasionado por la compresibilidad del sedimento, manifestándose por sobre una concentración que adquiere el nombre de concentración crítica.

Debido a que como hipótesis de trabajo no se considera el fenómeno de consolidación, se procede al estudio de la teoría de la sedimentación y cómo se puede utilizar esta teoría para llegar a las ecuaciones diferenciales que han sido utilizadas con éxito en modelar el proceso de sedimentación ideal.

El proceso de sedimentación por efecto gravitacional ocurre siempre que exista la fuerza motriz del mismo, y el de consolidación debe ser tenido en cuenta para el caso de sedimentos compresibles y suspensiones floculadas, esta compresibilidad para el caso de pulpas minerales puede darse tanto debido a fenómenos de coagulación⁵ como de floculación⁶, el cual es el caso de las pulpas de relaves provenientes del proceso de flotación de minerales de cobre, que son floculadas para fomentar la agregación de partículas mejorando la recuperación de agua, y disminuir el esfuerzo de cedencia de la pulpa, facilitando el trabajo de las rastras.

En el proceso de sedimentación, el fluido puede siempre ser considerado como un medio continuo [6], la modelación fenomenológica del proceso de sedimentación podrá en primera instancia clasificarse según cómo se considere la fase sólida, de esta manera, el proceso de sedimentación puede ser entendido mediante los llamados enfoque discreto y enfoque continuo [6], el enfoque discreto entiende la fase sólida como un gran número de elementos o partículas con formas y tamaños determinados que sedimentan, mientras el enfoque continuo entiende la fase sólida como un medio continuo superpuesto sobre el fluido, así se obvian variables asociadas a la individualidad de las partículas y la descripción pasa a realizarse mediante una función de flujo que aúna estas características.

En la práctica, estos enfoques no son contradictorios, si no complementarios, esto debido a que el enfoque discreto ha resultado exitoso para determinar funciones constitutivas en procesos de

⁴ Cualquier fuerza de cuerpo permite realizar esta separación, también fuerzas inerciales (como la fuerza centrífuga) pueden ser fuerzas motrices de la sedimentación.

⁵ Ocasionado por las interacciones fisicoquímicas entre las partículas en la suspensión, mecanismo especialmente importante en partículas finas.

⁶ Donde la aglomeración es inducida por un agente químico externo, llamado floculante, que usualmente consisten en polímeros de alto peso molecular

sedimentación, y el enfoque continuo ha resultado exitoso para modelar y predecir patrones de comportamiento en el proceso haciendo uso de las funciones constitutivas obtenidas mediante el enfoque discreto.

En cualquier caso, para el modelamiento, simulación, dimensionamiento, control, y en general el estudio del comportamiento de un proceso de espesamiento, el enfoque continuo resulta más adecuado, esto debido a que al obviar las características individuales de las partículas disminuye enormemente el número de parámetros a considerar, permite una mejor y más simple interpretación de los resultados y simplifica enormemente el problema de determinar experimentalmente los valores de los parámetros relevantes para la predicción del comportamiento de un proceso.

Además, la aproximación necesaria para el uso del modelo continuo resulta tremendamente acertada, debido a que las partículas que sedimentan en un proceso de espesamiento industrial son muy pequeñas comparadas con el estanque que las contiene⁷.

Puede pensarse que aplicar este enfoque obvia algunas variables de enorme importancia en el proceso de sedimentación, como es el caso de la distribución de tamaño de partículas, sin embargo, también es posible tomar en consideración esta variable y sus efectos mediante la llamada teoría de sedimentación polidispersa, que hasta el momento de escritas estas líneas ha logrado incorporar con éxito distribuciones discretas de tamaños de partículas [2, 6, 16], también, gracias a herramientas matemáticas modernas como la mecánica de fluidos computacional se han logrado modelar y simular adecuadamente aspectos detallados del proceso, como por ejemplo el desempeño de la dilución en la alimentación a un espesador [6].

Así, el modelamiento de los procesos de sedimentación, puede ser abordado a partir de la teoría de mezclas inserta en el contexto de la mecánica del medio continuo [6, 17] donde se modela la mezcla sólido-líquido como una superposición de dos medios continuos, los cuales interactúan con el medio ambiente, consigo mismos⁸, y entre sí [17].

⁷ Las partículas tienen un tamaño del orden de 10^{-4} m mientras el espesador puede tener un diámetro del orden de 10^2 m

⁸ En el sentido de que partes de un medio continuo, interactúan con partes adyacentes del mismo.

2.1. Mecánica del medio continuo y Teoría de mezclas.

Se remite a [6, 17-20] por una descripción general, axiomática y completa de la mecánica del medio continuo y la teoría de mezclas, se discuten aquí los conceptos esenciales para la adecuada comprensión de la teoría de la sedimentación y tener presentes sus limitaciones.

La hipótesis fundamental que permite el uso de la mecánica del medio continuo en algún problema particular, es que el fenómeno que ocurra en el cuerpo de interés pueda ser descrito ignorando los detalles de la microestructura del material, de las discontinuidades microscópicas y de los movimientos de las partículas involucradas.

Por su parte, el postulado esencial de la teoría de mezclas es que un mismo punto espacial puede ser ocupado simultáneamente por un número finito de partículas distintas donde cada una de estas representa a alguna de las especies presentes, esto permite entender una mezcla global como una superposición de medios continuos, donde la misma cumple las leyes aplicables a los materiales simples [6].

Se limitará el estudio a una mezcla de sólo dos especies, una corresponderá a la fase líquida, y otra a la sólida, la imposición del principio de conservación de la masa, la primera y segunda ley de Euler de la mecánica del medio continuo reformuladas en el contexto de la teoría de mezclas, son suficientes para establecer las ecuaciones de movimiento para este sistema.

2.1.1. Balance de masa.

La primera ley a considerar es la conservación de la masa, esta exigencia, impone una serie de condiciones de tipo integral sobre los campos de densidad y velocidad presentes, y bajo ciertas hipótesis de suavidad de los campos involucrados permite obtener una serie de ecuaciones diferenciales parciales que forman parte del sistema que debe resolverse para estudiar la dinámica del sistema.

La ley de la conservación de la masa dice que la variación en el tiempo de la masa de una especie en un volumen de control, se debe a generaciones o consumos internos del componente y al flujo de la especie a través de sus paredes, esta ley puede traducirse matemáticamente a una ecuación de tipo integral, donde tras aplicar los teoremas de transporte de Reynolds, de Green-Gauss-Ostrogradsky, y de localización [18], bajo la suposición de continuidad de las variables involucradas, se puede obtener la llamada *ecuación de continuidad* para cada componente

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (u_\alpha \vec{v}_\alpha) = 0, \quad (1)$$

donde u_α corresponde a la fracción volumétrica de la componente α , mientras \vec{v}_α es la velocidad asociada a esta componente

Se define la velocidad promedio volumétrica, o velocidad de flujo convectivo como

$$\vec{q} = u_l \vec{v}_l + u_s \vec{v}_s, \quad (2)$$

si se suman las ecuaciones de continuidad asociadas a ambas componentes, se obtiene la relación

$$\nabla \cdot \vec{q} = 0, \quad (3)$$

esta versión representa al balance de masa global, y puede reemplazar indistintamente al balance de cualquiera de las dos componentes, en lo venidero reemplazará al balance de masa de la componente fluida.

2.1.2. Balance de momentum lineal.

La ley de balance de momentum lineal impone que la variación de momentum lineal de la porción del medio continuo encerrada en un volumen de control es ocasionada por el flujo de momentum a través de las paredes de este volumen y las fuerzas aplicadas sobre éste.

La primera ley de Euler reformulada en el contexto de la teoría de mezclas, es una ecuación del tipo integral, si se le aplican manipulaciones muy similares a las realizadas anteriormente al balance de masa, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_\alpha u_\alpha \vec{v}_\alpha) + \nabla \cdot (\rho_\alpha u_\alpha (\vec{v}_\alpha \vec{v}_\alpha)) = \vec{b}_\alpha + \vec{m}_\alpha + \nabla \cdot \mathbf{T}_\alpha, \quad (4)$$

donde el producto $\vec{v}_\alpha \vec{v}_\alpha$ se entiende en forma diádica, ver [17] por una descripción adecuada de este producto, y de la divergencia de un tensor, esta ecuación recibe el nombre de forma de conservación del balance de momentum lineal.

2.1.3. Relaciones constitutivas.

Las ecuaciones derivadas anteriormente (balance de masa y momentum) junto a condiciones iniciales no bastan para cerrar el problema de determinar el estado mecánico del sistema, puesto que no se ha caracterizado aún cada material, las ecuaciones que relacionan alguna magnitud de deformación y los esfuerzos, o que permitan determinar las forma en que los diversos componentes interactúan entre si reciben el nombre de *ecuaciones constitutivas*.

2.1.4. Balances en discontinuidades.

Resulta de importancia determinar condiciones de salto apropiadas cuando las variables no son continuas, estas se obtienen suponiendo que la discontinuidad se manifiesta a través de alguna superficie, se pretende estudiar la velocidad de propagación de esta discontinuidad denotada por σ .

Este problema es resuelto mediante la llamada condición de Rankine-Hugoniot, que puede obtenerse a partir de los balances integrales de masa

$$\sigma = \frac{\left(u_{\alpha}^{+} \vec{v}_{\alpha}^{+} - u_{\alpha}^{-} \vec{v}_{\alpha}^{-}\right) \cdot \mathbf{e}_i}{u_{\alpha}^{+} - u_{\alpha}^{-}}, \quad (5)$$

donde los valores de u_{α}^{+} y u_{α}^{-} corresponden a los valores límite del porcentaje volumétrico de la especie α a ambos lados de la discontinuidad, y \mathbf{e}_i es un vector unitario normal a la superficie de discontinuidad.

Existe también una condición de Rankine-Hugoniot para el balance de momentum, sin embargo, no tendrá uso en este trabajo, por lo que no se discutirá, el lector interesado puede encontrarla en [2, 6, 16].

2.2. Teoría de la sedimentación.

Se considera aquí el problema de la sedimentación de una suspensión ideal bajo efectos gravitatorios, se siguen aquí las suposiciones hechas por Kynch en 1952 [2, 6, 16, 21], que son las siguientes:

- 1) Las partículas sólidas son pequeñas en comparación con el recipiente que las contiene.
- 2) Las partículas tienen todas el mismo tamaño, densidad y forma.
- 3) El sólido y el fluido en la suspensión son incompresibles.
- 4) No hay transferencia de masa entre los componentes.
- 5) La velocidad relativa sólido-fluido es una función exclusiva de la concentración local de sólidos.

Estas propiedades definen a una suspensión ideal.

La suposición 1 permite tratar la fase sólida como un medio continuo, y, además permite junto a la suposición 2, estipular una única función de velocidad de sedimentación para todas las partículas, la propiedad 5, por su parte, pasa a reemplazar al balance de momentum [2], el estudio de las consecuencias de estas suposiciones es el origen de la teoría moderna de la sedimentación [22].

La última propiedad, implica la existencia de una función constitutiva de flujo, que para un sistema particulado sedimentando en un medio fluido determinado, depende exclusivamente de la concentración local de sólidos, de modo que

$$u_s v_s = u_s q + f_b, \quad (6)$$

donde $f_b(u_s) = u_s(1 - u_s)v(u_s)$ recibe el nombre de *función de flujo batch*, y v corresponde a la velocidad relativa sólido-fluido.

El término q tiene relación con el flujo convectivo de material, es decir, el flujo asociado a los movimientos globales de materia, y el término f_b , tiene relación al flujo preferencial que tiene el sólido sobre el fluido debido a la gravedad, es una función característica de la pulpa y depende de la concentración local de sólidos, un problema importante consiste en la determinación de esta función de flujo batch.

En general el análisis matemático de esta teoría depende sensiblemente del número de puntos de inflexión que tiene esta función, de modo que este parámetro permite clasificarlas, la mayoría de las funciones de flujo batch tienen uno o dos puntos de inflexión [23].

La forma específica que la función de flujo batch tiene fue estudiada por diversos autores [22], tanto de forma teórica como experimental, sin embargo las versiones más utilizadas corresponden a las siguientes dos correlaciones semi-empíricas:

Tabla 2. Expresiones Semi-Empíricas para la función de flujo batch.

Correlación	Año	Investigadores	Parámetros
$f_b = v_\infty u_s (1 - u_s)^c$	1954	Richardson y Zaki. [24]	v_∞, c .
$f_b = v_\infty u_s \left(1 - \frac{u_s}{u_{max}}\right)^c$	1962	Michaels y Bolger.	v_∞, c, u_{max} .

Donde v_∞ y c corresponden a parámetros que pueden determinarse experimentalmente, en particular v_∞ puede interpretarse como la velocidad terminal que una partícula adquiriría de sedimentar sola en un medio fluido infinito, y c es un número real cualquiera con un valor mayor o igual a uno.

La correlación de Richardson y Zaki, tiene la ventaja de necesitar sólo dos parámetros, sin embargo, predice que el flujo de sólidos no se hace cero hasta una fracción volumétrica de sólidos unitaria, mientras que en la práctica el valor máximo de fracción de sólidos oscilan entre 0.6 y 0.7 [22], por su

parte, la correlación de Michaels y Bolger soluciona este problema, pero requiere de tres parámetros a ajustar, otra correlación conocida es la de Shannon, quien en 1963 propuso un ajuste polinomial de cuarto orden para modelar la velocidad de sedimentación de bolas de vidrio⁹.

Estos métodos de ajuste son del tipo global-paramétricos, es decir, determinan los parámetros que mejor ajustan los datos experimentales sobre una función plantilla, estos métodos adolecen de errores de sensibilidad, otro método es la estimación local cerrada, y es por ejemplo utilizado por Camilo Mejías en [25] donde determina una función de flujo batch definida por trozos en base a la observación de la dinámica de interfaces como la interfaz suspensión-sedimento.

A lo largo de este trabajo se utilizará la correlación de Richardson y Zaki cuya principal ventaja es su dependencia de sólo dos parámetros.

2.2.1. Modelo de sedimentación.

En base a la situación experimental que se pretende simular, que corresponde a una columna de sedimentación cilíndrica, y teniendo además en consideración que en muchas ocasiones este sistema puede simularse muy bien considerando que la concentración es una función de la profundidad y el tiempo, se añadirán dos suposiciones para simplificar el modelo:

- 1) La concentración de sólidos es constante en cualquier superficie horizontal considerada, y depende exclusivamente de la profundidad y el tiempo.
- 2) La suspensión sedimenta en un estanque cilíndrico de área constante.

La primera suposición permite estudiar el problema como uno espacialmente unidimensional, mientras que la segunda suposición permite deducir que la parte convectiva de la función de flujo es independiente de la ubicación espacial salvo por saltos en el punto de alimentación y en los bordes del espesador (Considérese la forma unidimensional de la ecuación (3)).

2.2.1.1. Tipo Continuo.

En este modelo se admite la presencia de una alimentación en algún punto al interior del espesador, además, el sistema posee una descarga en la zona inferior y una zona donde se elimina el efluente en la parte superior.

⁹ La función de flujo batch, quedaba expresada entonces, por un polinomio de quinto orden.

La existencia de esta alimentación obliga a tener en consideración no solo el movimiento de sólido a causa de la sedimentación gravitacional, sino también el debido al flujo global de material al interior de la columna, para evitar introducir condiciones de borde en el punto de la alimentación, se añade un término extra que representa este flujo de alimentación, donde se hace uso de la distribución delta de Dirac centrada en el punto en que se alimenta la pulpa.

En la zona de alimentación, el flujo volumétrico que se introduce en el interior del equipo, se reparte entre una fracción que va hacia la descarga y otra que se dirige hacia el efluente.

El modelo de sedimentación a utilizar, considera que la sedimentación ocurre en el interior de un estanque cilíndrico de área constante A , de altura L , que se separará en dos zonas a cada lado del punto donde se ubicará la alimentación, la descarga se ubicará en la zona inferior y el rebalse en la zona superior, por debajo de la alimentación, el flujo convectivo de material irá hacia abajo, y arriba de la alimentación, el flujo convectivo de material irá hacia arriba.

Se supondrá que la alimentación, al entrar al equipo, se diluye instantáneamente en toda el área donde se llega a una concentración conocida como concentración conjugada u_L .

Así, el problema matemático de la sedimentación ideal continua adquiere la siguiente formulación:

Encontrar una función $u(z, t)$ en un dominio $\mathbb{R} \times [0, T]$ que sea solución débil (ver anexo 7.10.2 o las referencias para más detalles) de la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial u(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial F(u, z, t)}{\partial z} = s(t)\delta(z), \quad (7)$$

donde $s(t)$ corresponde a un término fuente, δ corresponde a la distribución delta de Dirac y F corresponde a una función de flujo total discontinua dada por:

$$F = \begin{cases} q_e u & z < -B \\ q_e u + f_b(u) & -B \leq z < 0 \\ q_u u + f_b(u) & 0 \leq z \leq H \\ q_u u & H \leq z \end{cases} \quad (8)$$

La solución está sujeta a la condición inicial

$$u(z, 0) = u_0(z) \quad (9)$$

tal que en discontinuidades cumpla con la condición de Rankine-Hugoniot:

$$x'(t) = \frac{[F]}{[u]}, \quad (10)$$

donde $[G] = G^+ - G^-$ representa la diferencia entre los límites laterales de una función cualquiera G a ambos lados de la discontinuidad, y $x(t)$ una curva emplazada en la discontinuidad.

Además estas discontinuidades cumplen con la condición de entropía [26]:

$$S(u^-, u^+) \leq S(u^-, v) \quad \forall v \in [u^-, u^+] \quad (11)$$

Donde $S(u, v)$ corresponde a la velocidad con la que se mueve la discontinuidad en función de u y v , notar que la condición de Rankine-Hugoniot implica que

$$S(u, v) = \frac{F(u) - F(v)}{u - v}. \quad (12)$$

Este problema, salvo muy pocas situaciones no puede ser interpretado en la forma clásica en que se interpreta un problema de valores iniciales y de contorno, esto debido a que se esperan soluciones que formen discontinuidades como las suspensiones reales, así, el problema debe interpretarse de forma débil, asociado a condiciones de entropía apropiadas, que permiten seleccionar de entre las soluciones débiles al problema, la solución *físicamente relevante*.

El problema matemático que resulta puede resolverse mediante el método de las curvas características, donde la solución estará representada por una serie de curvas llamadas características sobre las cuales la concentración es constante, y se propagan a partir de los datos iniciales.

En ocasiones estas curvas pueden intersectarse, y formar las conocidas como “ondas de choque”, y en otros casos, dejar zonas del plano (z, t) sin curvas características, donde, gracias a la noción de solución de entropía puede determinarse que la solución varía continuamente y aparecen las conocidas como “ondas de rarefacción”, también pueden aparecer combinaciones de estos dos comportamientos [27].

Los tipos de soluciones cualitativamente distintas para ciertos pares de problemas de Riemann (Ver anexo 7.11.5) reciben el nombre de modos de sedimentación continua, revisiones de los modos de sedimentación continua para una función de flujo batch con un punto de inflexión pueden encontrarse en [2, 6, 16].

2.2.2. Zonas en la operación de un espesador continuo.

La ecuación (8) separa el espesador en cuatro zonas distintas definidas según cómo se considere la función de flujo, esta distinción es independiente del tiempo y de la operación, sin embargo, se desea definir una serie de demarcaciones basadas en las características dinámicas del sistema.

Concha en su libro [2], separa un espesador en cuatro zonas distintas, otros autores prefieren distinguir entre tres zonas, o bien considerar otros límites para cuatro zonas como es el caso de Comings [28] que en su trabajo de 1954 consideró una zona extra para tener en cuenta el efecto de las rastras, considerando los objetivos de este trabajo, se utilizará la distinción propuesta por Concha, que se presenta a continuación:

Zona de agua clara

Corresponde a la zona ubicada por sobre la alimentación.

Zona de sedimentación

Está ubicada inmediatamente por debajo de la alimentación, el material una vez entra en el espesador, se diluye inmediatamente hasta alcanzar una concentración característica llamada concentración conjugada, o u_c a lo largo del texto.

Zona de transición

En esta zona la concentración de sólidos pasa de la concentración conjugada a la concentración de sedimento, esto puede ser mediante una onda de choque (discontinua), una onda de rarefacción (continua) o una combinación de ambos comportamientos, en el estado estacionario esta zona corresponde a una onda de choque, reduciéndose a un punto.

Zona de sedimento

Llamada zona de sedimento, corresponde a una zona ubicada inmediatamente debajo de la zona de transición, es una zona de concentración constante en el estado estacionario, que recibe el nombre de concentración del sedimento.

3 ESTADOS ESTACIONARIOS EN UN ESPESADOR CONTINUO.

3.1. Preliminares.

Numerosos estudios sobre los estados estacionarios en un tanque sedimentador fueron publicados a lo largo del siglo XX, comenzando con los trabajos fundacionales de Coe y Clevenger [29] en la primera mitad del siglo y en la segunda mitad por Lev, Bustos, Concha, Barrientos entre otros [30], se sigue aquí la línea de trabajos publicados por Diehl a partir de 2001 [7, 10, 12, 13] quien estudió de forma exhaustiva tanto los estados estacionarios como las respuestas dinámicas a cambios escalón de un tanque sedimentador¹⁰.

3.2. Definiciones.

En estos trabajos se supone que la función de flujo batch posee las siguientes propiedades:

$$f_b \in C^2[0, u_{m\acute{a}x}] \quad (13)$$

$$f_b(u) > 0, \quad u \in [0, u_{m\acute{a}x}] \quad (14)$$

$$f_b(0) = f_b(u_{m\acute{a}x}) = 0 \quad (15)$$

$$f_b \text{ posee un \acute{u}nico punto de inflexi3n en } u_{infl} \in (0, u_{m\acute{a}x}) \quad (16)$$

$$f_b''(u) < 0, \quad u \in (0, u_{infl}) \quad (17)$$

$$f_b''(u) > 0, \quad u \in (u_{infl}, u_{m\acute{a}x}) \quad (18)$$

Notar que tanto la funci3n de flujo de Richardson y Zaki como la de Michelson y Bolgers cumplen estas propiedades a condici3n de que $u_{infl} < u_{m\acute{a}x}$, en la figura 1 se muestra una funci3n de flujo batch y las concentraciones u_{infl} y $u_{m\acute{a}x}$.

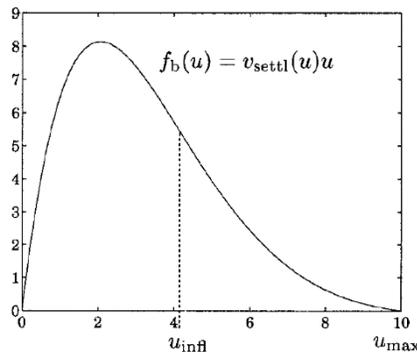


Figura 1 Funci3n de flujo batch, punto de inflexi3n y concentraci3n m\acute{a}xima.

¹⁰ Para una funci3n de flujo batch que cumpla ciertas propiedades, considerando un tanque de \acute{a}rea constante, y sin tener en consideraci3n los efectos de la compresibilidad del sedimento.

Se definen en base a esto y las velocidades de flujo convectivo los siguientes valores, que son de gran importancia en el estudio del estado estacionario y la dinámica del proceso:

$$\bar{q}_u = -f'_b(u_{m\acute{a}x}) \quad (19)$$

$$\bar{\bar{q}}_u = -f'_b(u_{infl}) \quad (20)$$

En muchas ocasiones el mínimo local u_M a la derecha de u_{infl} juega también un rol importante, pues corresponde a la concentración estacionaria en la zona de sedimento, sin embargo, esta concentración no siempre corresponde a un mínimo local, su definición general para cualquier valor de q_u es

$$u_M = \begin{cases} u_{m\acute{a}x} & 0 < q_u \leq \bar{q}_u \\ \tilde{f}'_b^{-1}(-q_u) & \bar{q}_u < q_u < \bar{\bar{q}}_u, \\ u_{infl} & \bar{\bar{q}}_u \leq q_u \end{cases} \quad (21)$$

donde \tilde{f}'_b es una restricción de la función f_b al dominio $(u_{infl}, u_{m\acute{a}x}]$.

Dado u_M se define además el valor u_m como el valor que satisface la relación

$$f(u_m) = f(u_M), \quad (22)$$

tal que u_m sea distinto de u_M y además $u_m \leq u_{infl}$, ambos valores junto a las concentraciones asociadas al punto de inflexión y a la concentración máxima se muestran en la figura 2.

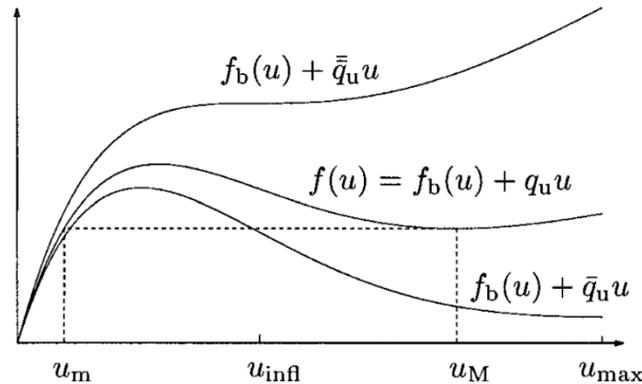


Figura 2 Función de flujo global y concentraciones relevantes.

Se define también el flujo limitante

$$f_{lim}(u) = \min_{u \leq \alpha \leq u_{m\acute{a}x}} h(\alpha) = \begin{cases} f(u) & \text{para } u \in [0, u_m] \cup [u_M, u_{m\acute{a}x}] \\ f(u_M) & \text{para } u \in (u_m, u_M) \end{cases} \quad (23)$$

y el flujo en exceso:

$$\mathcal{E}(u_f, s) = s - f_{lim}(u_f), \quad (24)$$

s corresponde a la velocidad de flujo volumétrica de sólidos en la alimentación.

3.3. Construcción del estado estacionario.

Se enunció en [7, 10, 12, 13, 26, 31] un teorema de importancia que menciona que en un tanque sedimentador, fijas las funciones f y g asociadas a los flujos en las distintas zonas del tanque sedimentador a cada lado del alimentador, los valores de concentración de sólidos en la descarga y efluente en el estado estacionario, están determinados por las variables de alimentación, es decir, flujo y concentración de sólidos en la alimentación¹¹.

Mostró también como obtener información sobre los estados estacionarios a partir de la gráfica de la función de flujo F^{12} en función de la concentración de sólidos, en un plano llamado Ω el cual quedaba dividido en distintas zonas, de modo que al graficar en este plano el punto de alimentación (u_f, s) , puede obtenerse, según la zona del plano Ω en que esté ubicado, el comportamiento cualitativo de la solución en el estado estacionario.

Otro resultado de importancia es que el flujo en exceso define si la unidad se sobrecarga, se vacía o se carga críticamente, que corresponde al estado que se desea (con la existencia de una cama de sedimento), la regla para determinar qué comportamiento se manifiesta es la siguiente:

$$\text{Si } \begin{cases} \mathcal{E} > 0 \\ \mathcal{E} = 0 \\ \mathcal{E} < 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{La columna se sobrecarga} \\ \text{La columna se carga críticamente} \\ \text{La columna se vacía} \end{array}$$

De los tres casos mencionados, el único que manifiesta una cama de sedimento es el caso críticamente cargado.

Un teorema central en esa publicación [7] es el que enuncia que, dado un punto de alimentación, fijo el caudal de descarga, los conjuntos recién definidos cubren todas las posibles alimentaciones, y el estado estacionario al que llegará una columna de sedimentación, está determinado de manera única para cualquier punto en los conjuntos U y O , por otro lado, para los conjuntos ℓ se tiene que existe

¹¹ Más, el perfil estacionario no está determinado de forma única, esto quiere decir que la altura de la cama de sedimento no está determinada de manera unívoca.

¹² Que consiste en la suma de los flujos convectivo y batch para la descarga.

una solución estacionaria, que está determinada excepto por la ubicación de la cama de sedimento (La definición de estos conjuntos del plano Ω puede encontrarse en el anexo 7.3).

Además, es posible obtener valores explícitos para una serie de variables que describen el estado estacionario, como las velocidades de flujo y concentraciones de sólidos en las diversas zonas de la columna de sedimentación, así como las concentraciones de sólidos en el efluente y la descarga:

$$f_{thick}(u_f, s) = \min(s, f_{lim}(u_f)) \quad (25)$$

$$u_u(u_f, s) = \frac{A f_{thick}(u_f, s)}{Q_u} \quad (26)$$

$$Q_e(u_f, s) = \frac{As}{u_f} - Q_u = \frac{S}{u_f} - Q_u \quad (27)$$

$$u_e(u_f, s) = \frac{A \max(0, \mathcal{E}(u_f, s))}{Q_e} \quad \text{para } Q_e > 0 \quad (28)$$

Con estos teoremas, es posible determinar de manera única las variables externas en estado estacionario para una columna de sedimentación dadas la alimentación, el caudal de descarga y la altura de la cama de sedimento para el caso críticamente cargado, notar que la altura de cama de sedimento es un parámetro libre, esto es, no está prefijado por las variables de alimentación y descarga.

Un problema más interesante que determinar el tipo de estado estacionario que se alcanza en base a la alimentación y la descarga, es determinar qué caudal de descarga permite bajo una alimentación determinada alcanzar una operación que pueda llamarse *óptima en estado estacionario*, para plantear bien este problema, es necesario primero explicitar que se entiende por operación óptima.

3.4. Operación óptima de una columna de sedimentación.

Se dice que una columna de sedimentación opera en forma óptima en un tiempo t si $q_u(t) < \bar{q}_u$ y la solución al problema dinámico satisface:

- 1) $u_{cl}(x, t) = 0 \Leftrightarrow u(x, t) = 0 \quad -H < x < 0$
- 2) Existe una altura de cama de sedimento $x_{sb}(t) \in (0, D)$ tal que:

$$u(x, t) \in \begin{cases} [0, u_{infl}] & 0 < x < x_{sb}(t), \\ [u_{infl}, u_{máx}] & x_{sb}(t) < x < D. \end{cases} \quad (29)$$

En base a esta definición es posible demostrar que una condición necesaria (no suficiente) para que se mantenga la operación óptima en todo tiempo t es:

$$\left(u_f(t), s(t)\right) \in P_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_{3a} \quad (30)$$

Lo cual pone un límite natural a las alimentaciones que puede recibir una columna de sedimentación sin perder su operación óptima.

De aquí se obtiene una definición natural para la altura de cama de sedimento para un tanque sedimentador operado de forma óptima, como la discontinuidad tal que el salto de concentración pasa por el valor u_{infl} .

Esta información y la mencionada en las secciones anteriores, permite la construcción de un algoritmo que permite resolver el problema de determinar el caudal de descarga que permita obtener una operación óptima en el estado estacionario para una alimentación determinada, en el anexo 7.1 se presenta el diagrama de flujo de este algoritmo.

Y mediante la aplicación de este algoritmo es posible construir las siguientes gráficas de estado estacionario, donde, para cada par fracción volumétrica de sólidos y velocidad de flujo en la alimentación, se entrega el flujo de descarga y concentraciones de sólidos en la zona de sedimento y sedimentación en estado estacionario, estos tres gráficos de contornos permiten apreciar la forma de las curvas de nivel, la función de flujo utilizada corresponde a la función de flujo del material considerado.

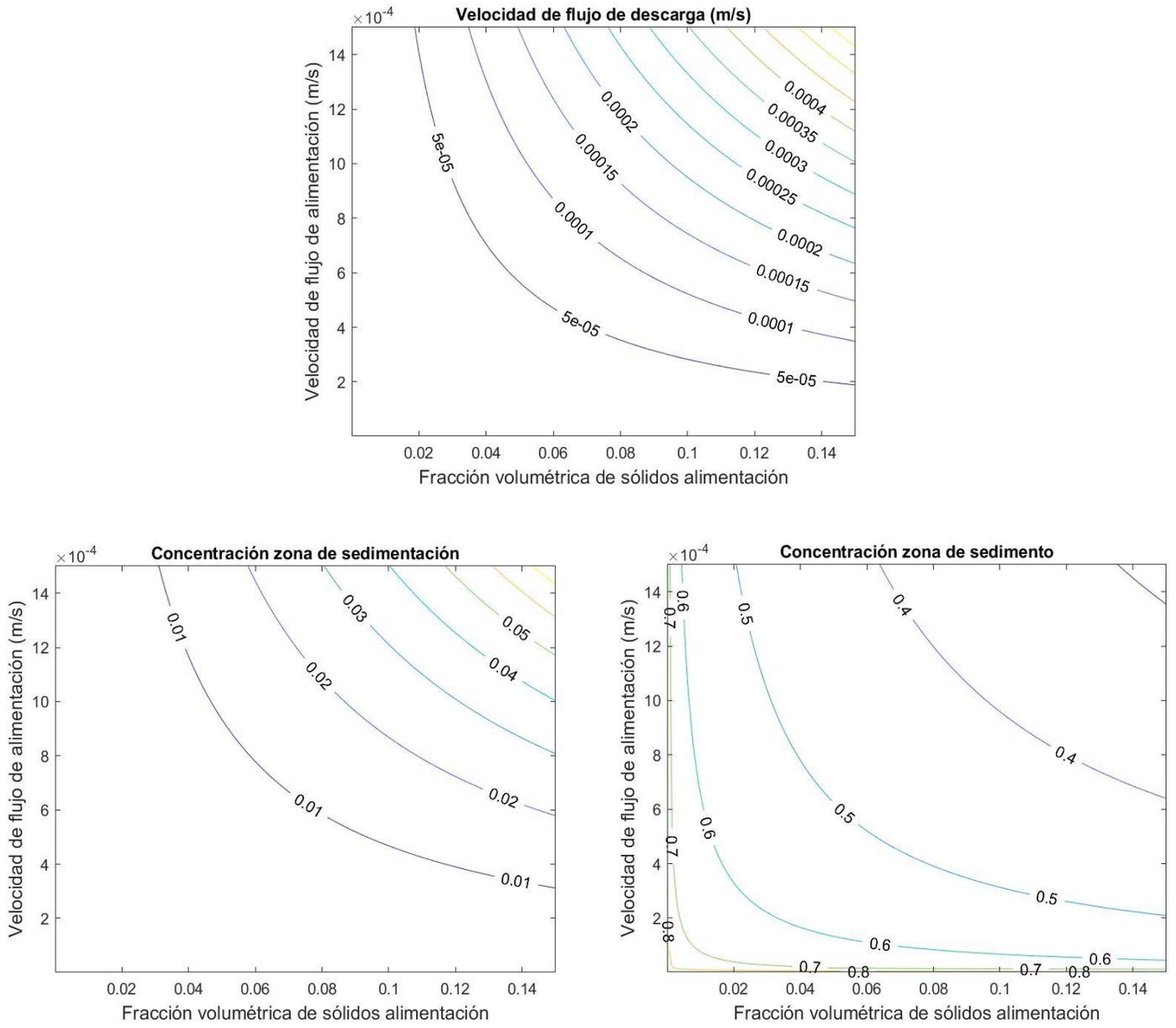


Figura 3 Diagrama de estados estacionarios.

4 SOLUCIONES NUMÉRICAS Y SIMULACIONES EN LAZO ABIERTO.

Primero se presenta el método numérico a utilizar para resolver las ecuaciones que modelan el sistema obtenidas en el capítulo II, luego se procede a mostrar el método a utilizar para determinar la altura de la cama de sedimento en base a las simulaciones.

Se muestran y estudian las soluciones en lazo abierto del modelo obtenido, y cómo este responde ante cambios escalón en las variables de entrada, el capítulo finaliza con un análisis de estas respuestas y presenta como esta información puede ser correlacionada aproximadamente con parámetros típicos considerados en el estudio de sistemas de control.

4.1. Descripción del método numérico.

Para más detalles de este punto, revisar las referencias [32, 33].

El método utilizado para obtener simulaciones es un método de diferencias finitas, de paso temporal de primer orden explícito, el primer paso en este método consiste en discretizar el espacio y tiempo, el tanque es subdividido en N subintervalos, se consideran además n subdivisiones espaciales arriba y abajo del tanque y por su parte el intervalo de tiempo $[0, T]$ en M subintervalos, de modo que las longitudes de subintervalos espaciales y temporales serán:

$$\Delta x = \frac{B + H}{N} \quad y \quad (31)$$

$$\Delta t = \frac{T}{M} \quad (32)$$

así, el j -ésimo intervalo espacial al interior del tanque, con $j = -n, \dots, 1, \dots, N, \dots, N + n$ será

$$I_{x_j} = [-H + (j - 1)\Delta x, -H + j\Delta x] = [x_{j-1}, x_j]. \quad (33)$$

Para los puntos exteriores al tanque se consideran subíndices negativos asociados a la parte superior del tanque y subíndices mayores a N para los inferiores al tanque.

El i -ésimo intervalo temporal, con $i = 1, \dots, M$ estará dado por:

$$I_{t_i} = [(i - 1)\Delta t, i\Delta t] = [t_{i-1}, t_i] \quad (34)$$

Se define la razón entre la longitud del intervalo temporal y el intervalo espacial

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (35)$$

Se define el promedio de celda en el intervalo espacial j y tiempo i

$$U_j^i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(x, t_i) dx. \quad (36)$$

Este método numérico estudia la evolución temporal de estos promedios de celda, así el método, conocidos los valores de promedios de celda para un tiempo t_i permite calcular el valor de promedio de la celda en el tiempo t_{i+1} siguiendo el siguiente cálculo:

$$U_j^{i+1} = U_j^i - \lambda \left(F^{num}(U_j^i, U_{j+1}^i, x_j, t_i) - F^{num}(U_{j-1}^i, U_j^i, x_{j-1}, t_i) \right) + \delta_{jk} S(t_i) \quad (37)$$

Donde la función F^{num} es una función de flujo numérica que aproxima al flujo real entre celdas, δ_{jk} corresponde a la función delta de Kronecker, y k corresponde al número asociado a la celda espacial que contiene en su interior a la alimentación.

Los promedios de celda iniciales pueden ser obtenidos a partir del perfil inicial de concentración:

$$U_j^0 = \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(x, 0) dx \quad (38)$$

La función de flujo numérica puede ser evaluada de diversas maneras [33, 34], un primer paso en este sentido es separar la parte convectiva de la parte asociada al flujo batch, y tratar a cada una por separado, debido a que el flujo asociado a la parte convectiva es lineal respecto de la concentración puede tratarse sin problemas mediante un método upwind, pero resta determinar un tratamiento adecuado para la parte batch, aquí se utilizará un flujo numérico del tipo Enquist-Osher, que permite obtener soluciones consistentes con las restricciones de entropía, el flujo batch entre la celdilla j y $j + 1$ se llamará G_j y puede evaluarse siguiendo

$$G_j = h(U_j, U_{j+1}) = \frac{1}{2} \left[f_b(U_j) + f_b(U_{j+1}) - \int_{U_j}^{U_{j+1}} |f_b'(\xi)| d\xi \right]. \quad (39)$$

Así, el flujo numérico se evaluará siguiendo

$$F_j^{num} = \begin{cases} -q_e U_{j+1} & \text{para } j < 0 \\ -q_e U_{j+1} + G_j & \text{para } 0 \leq j \leq k - 1 \\ q_u U_j + G_j & \text{para } k \leq j \leq N \\ q_u U_j & \text{para } N < j \end{cases}. \quad (40)$$

La condición CFL asociada a este método es

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{\max_{0 \leq t \leq T} \frac{Q_f(t)}{A} + \max_{0 \leq u \leq u_{max}} |f'_b(u)|}. \quad (41)$$

4.2. Determinación de la altura de la cama de sedimento.

Si bien es cierto, considerando una columna de sedimentación operada de forma óptima en el estado estacionario, la altura de la cama de sedimento adquiere un valor bien definido, durante el desarrollo dinámico del proceso, esta cama de sedimento¹³, puede desaparecer, dando paso a una onda de rarefacción, o bien una combinación de estos comportamientos.

La teoría de Kynch, según demostraron los desarrollos matemáticos de Diehl [7, 10, 12, 13], permite determinar un rango de caudales de descarga tales que la cama de sedimento no desaparece, sin embargo, lo cierto es que la determinación de este rango de caudales se realiza en base a la función de flujo batch, la cual es determinada empíricamente, y por lo tanto adolece de errores experimentales y de muestreo, de modo que el rango calculado podría no coincidir exactamente con el rango real, otras causas para esta diferencia pueden ser modificaciones en la función de flujo causadas por cambios en la dosis de floculante¹⁴ o por cambios en la mineralogía o granulometría de las especies a sedimentar y por lo tanto, no se puede suponer que siempre se pueda mantener una operación óptima.

Se justifica así la necesidad de atribuir a un perfil de concentraciones de sólidos un número que esté asociado a la idea que se tiene de altura de cama de sedimento, y que esté bien definido incluso cuando la discontinuidad desaparezca.

El método utilizado por Diehl en [15] para dar un valor a la cama de sedimento, que recibirá en este trabajo el nombre de *método del inventario*, está basado en la relación que existe en el estado estacionario entre la cama de sedimento y el inventario, que es

$$\frac{M_s}{\rho_s A} = (H - z_{sb})u_m + z_{sb}u_M. \quad (42)$$

Esta expresión posee diversas limitaciones que deberían considerarse, en primera instancia, supone que el perfil de concentraciones al interior del espesador es una función constante por trozos, lo cual, no es en general verdadero salvo en estado estacionario, según lo demostrado con multitud de

¹³ Entendida como la posición donde ocurre la discontinuidad que pasa por la concentración u_{infl} .

¹⁴ O bien cambios en la forma en que el floculante se dosifica, no obstante, este factor, se obvia debido a que en este trabajo se considera exclusivamente sedimentación ideal.

ejemplos por Diehl en [12], otro problema es que de acuerdo a esta expresión, una perturbación en las variables de alimentación genera un cambio instantáneo en la altura de la cama de sedimento, sin embargo es bien conocido que una perturbación en las variables de alimentación sólo puede propagarse con una velocidad finita dentro del espesador, en consecuencia, se tendrá la existencia de un retardo correspondiente al tiempo de viaje de la nueva concentración conjugada desde la alimentación hasta la cama de sedimento, otro defecto, menor y en principio corregible es que supone que las concentraciones u_m y u_M son constantes, pero como se vio anteriormente, dependen de las variables de alimentación y la descarga, sin embargo este último problema puede resolverse mediante un re-cálculo constante de esos parámetros en base a las condiciones de operación¹⁵.

Otro problema, no inherente a la expresión corresponde a que resulta más natural medir la altura de la cama de sedimento para controlar el inventario y no al revés, considerando que lo que se desea en este trabajo es medir y controlar directamente la altura de la cama de sedimento, se decidió no trabajar con este método y plantear en su lugar otras alternativas de solución, se presenta aquí la última de ellas, dejando las demás en los anexos 7.4.1 y 7.4.2 como posibilidades de desarrollo posterior.

En el anexo 7.6 se presentan gráficos comparativos de los métodos del inventario, recién descrito, el método I (Método del punto de inflexión) y el método III (Método del flotador) que se describirá a continuación.

4.2.1. Método del flotador.

Consiste en el uso de un flotador de densidad controlada que sea más denso que el material en la zona de sedimentación, pero menor a la densidad del material en la zona de sedimento.

Este método posee una contraparte experimental clara, y su expresión numérica genera respuestas suavizadas en comparación al método del punto de inflexión.

El objetivo es determinar de manera teórica en base al perfil de concentraciones dónde estaría ubicada esta esfera, se supone que las únicas fuerzas que actúan sobre la esfera son el peso y la fuerza de empuje¹⁶.

¹⁵ En realidad, el reajuste propuesto conlleva grandes dificultades, debido principalmente a que las concentraciones de sólidos en el espesador sufren modificaciones con lentitud, de modo que los parámetros varían gradualmente con el tiempo.

¹⁶ De modo que las fuerzas de arrastre producidas por el movimiento de material se desprecian.

El desarrollo matemático de esta idea se encuentra en el anexo 7.5, las principales consecuencias del análisis ahí realizado son las siguientes:

- I. El método posee una limitación natural, y es que, ignorando errores en las mediciones y otros, entrega valores para la altura de cama de sedimento que pueden variar en el intervalo $[z_{sb} - r, z_{sb} + r]$ donde r es el radio de la esfera y z_{sb} es el valor real de la altura de la cama de sedimento.
- II. Cuando se tiene un perfil de concentraciones dado por un conjunto de valores representativos en subintervalos de tamaños equivalentes, es posible obtener la posición de la cama de sedimento mediante la búsqueda del punto donde se anula una función del perfil de concentraciones, que puede ser evaluada como

$$\vec{H} = A\vec{U} - \frac{4}{3} \left(\frac{\rho_d - \rho_L}{\rho_s - \rho_L} \right) r^3 \vec{E}, \quad (43)$$

donde A es una matriz constante que depende de la geometría del flotador, \vec{U} es un vector de concentraciones, ρ_d es la densidad másica de la esfera, ρ_L es la densidad del líquido soporte, y ρ_s es la densidad del sólido en suspensión, y \vec{E} es un vector columna de unos.

Por su parte la matriz A cumple la relación $A_{ij} = A_{i+1 j+1}$.

La etapa siguiente del método es realizar al vector H una interpolación mediante funciones lineales a trozos, y determinar el punto donde esta interpolación intersecta al eje z , este punto corresponderá a la aproximación de la altura de la cama de sedimento, este método será el utilizado.

4.3. Simulaciones en lazo abierto.

En el trabajo de Diehl [12] se muestran las respuestas en lazo abierto que tiene una columna de sedimentación en operación óptima ante una gran variedad de cambios en las variables de entrada, aquí se replican estos resultados, pero considerando pequeños cambios en las variables de entrada, y con los parámetros determinados experimentalmente.

Tabla 3 Parámetros físicos y condiciones iniciales para la simulación en lazo abierto.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
A	$7.07 \times 10^{-2} \text{ m}^2$	N	9.6
L	2 m	z_{sb}	1 m
D	0.3 m	u_f	0.12
ρ_s	2700 kg/m^3	Q_f	$6.67 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$
ρ_l	1000 kg/m^3	ρ_d	1500 kg/m^3
ψ_{max}	0.65	R	0.015m
v_∞	$5.05 \times 10^{-3} \text{ m/s}$		

Tabla 4 Parámetros Numéricos para la simulación en lazo abierto

Parámetro	Valor
Δz	0.0020 m
Δt	0.3300 s
T	2000 s

Se estudian por separado los efectos de alteraciones escalón en cada una de las variables de relevancia, que serán, flujo de descarga, flujo de alimentación y porcentaje de sólidos de alimentación.

Las respuestas para cambios en el porcentaje de sólidos en la alimentación son cualitativamente iguales a las respuestas a los cambios en el flujo de alimentación, así que se remite al lector al anexo 7.2.1.3 y 7.7.4.

Primero se determina el estado estacionario del sistema cuyos valores se muestran a continuación:

Tabla 5 Estado estacionario determinado

Parámetro	Valor
u_m	0.0276
u_M	0.3816
Q_u	$1.743 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$

Los cambios siguientes fueron todos realizados en un tiempo $t = 200\text{s}$, debido a las asimetrías del sistema, aparecen ligeras diferencias cuantitativas entre cambios positivos y negativos, las respuestas a los cambios escalón negativos pueden ser encontradas en el anexo 7.2.1.

4.3.1. Efecto del cambio en el flujo de descarga.

A partir de las condiciones iniciales estipuladas en el apartado anterior, se realiza una modificación positiva del 9.5% en el flujo de descarga, es decir de $1.667 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$:

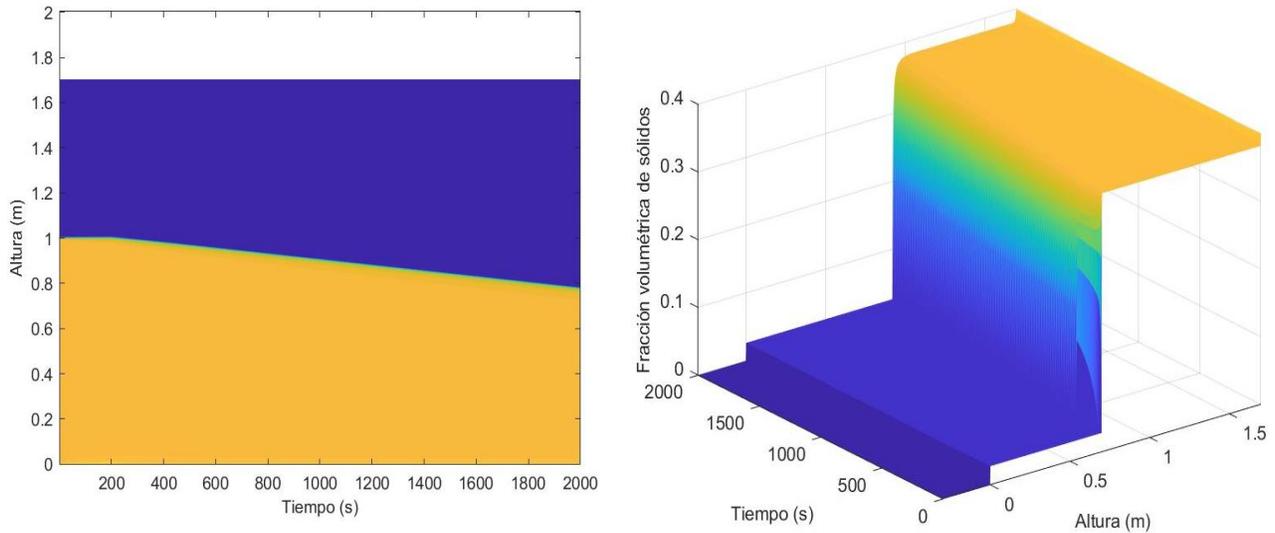


Figura 4 Soluciones de la simulación de lazo abierto para un cambio positivo en el caudal de descarga.

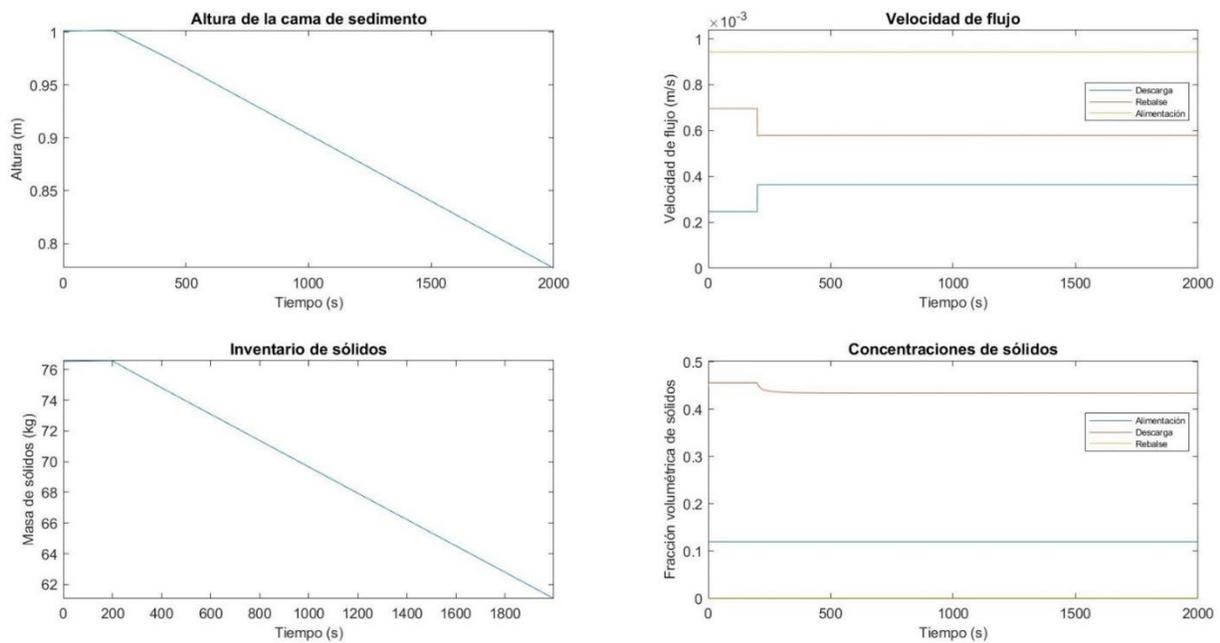


Figura 5 Respuestas dinámicas del sistema ante un cambio positivo de flujo de descarga.

Cualitativamente, la principal observación es que, en las condiciones impuestas, ante un cambio escalón en el flujo de descarga se produce un comportamiento lineal en la altura de la cama de sedimento, si el cambio escalón es positivo, como es de esperarse, la cama de sedimento sube y de ser negativo, la cama de sedimento baja.

Las pendientes de crecimiento no son exactamente iguales con el signo cambiado, aunque la magnitud del cambio tenga el mismo valor absoluto, puesto que el fenómeno de incremento (o decremento) de la altura de la cama de sedimento es un fenómeno asociado a la velocidad de propagación de shock, el cual depende sensiblemente de la concentración, en cualquier caso, la magnitud de ambas pendientes se parecen, lo cual indica que al tender el cambio escalón a cero, las pendientes de crecimiento debieran tender a igualarse, como es de esperarse.

Una vez impuesta la perturbación, el efecto sobre la altura de cama de sedimento es instantáneo, sin retardo alguno, esto trae como consecuencia que el comportamiento de la altura de cama de sedimento y el inventario sean análogos.

La concentración de sólidos en la descarga sigue una dinámica sobre-amortiguada.

Se presenta también un gráfico de la concentración conjugada, que sufre un pequeño cambio negativo instantáneamente.

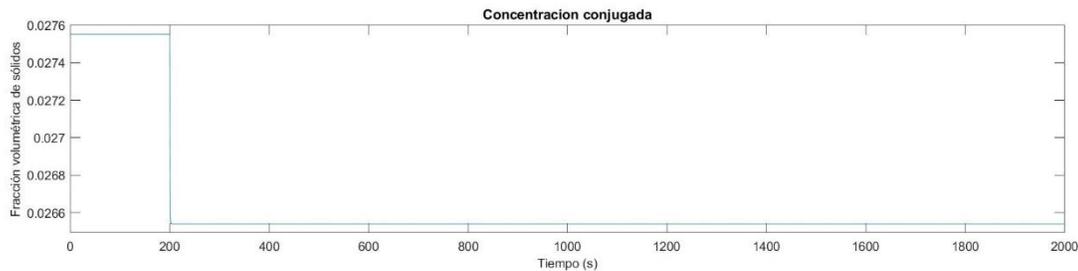


Figura 6 Dinámica de la concentración conjugada ante un cambio escalón positivo en el flujo de descarga.

Respecto al cambio escalón negativo, se aprecia un comportamiento similar, pero la altura de cama de sedimento aumenta linealmente en el tiempo, sin embargo, manifiesta una diferencia cualitativa importante, la disminución en el caudal de descarga genera una onda de rarefacción que se propaga desde la descarga, cuyo principal efecto es aumentar el porcentaje de sólidos en la zona de sedimento.

4.3.2. Efecto del cambio en el flujo de alimentación.

Se realiza una modificación del 25% en un flujo de alimentación, concretamente de $1.66 \times 10^{-5} m^3/s$ en un tiempo $t = 200s$:

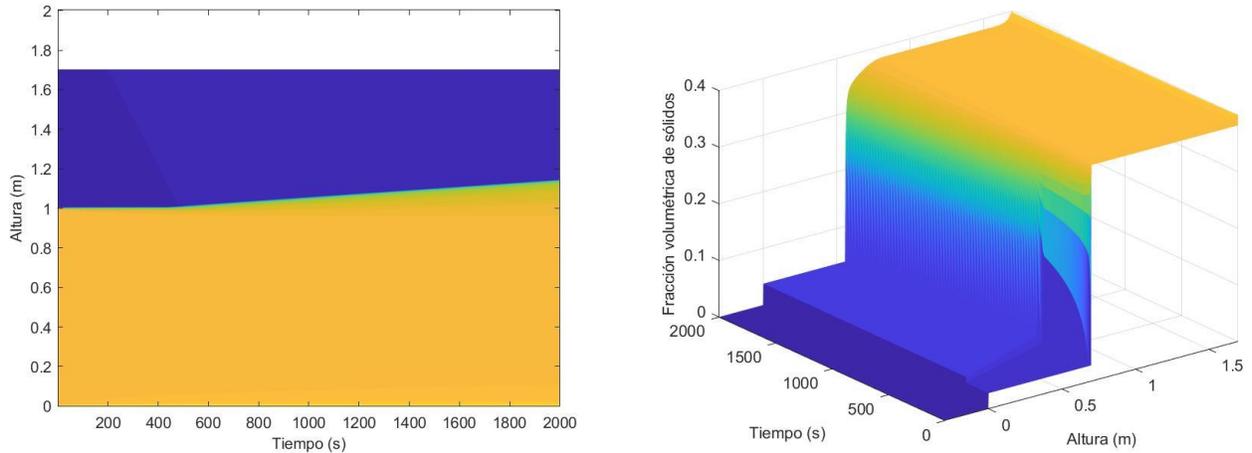


Figura 8 Soluciones de la simulación de lazo abierto para un cambio escalón positivo en el caudal de alimentación.

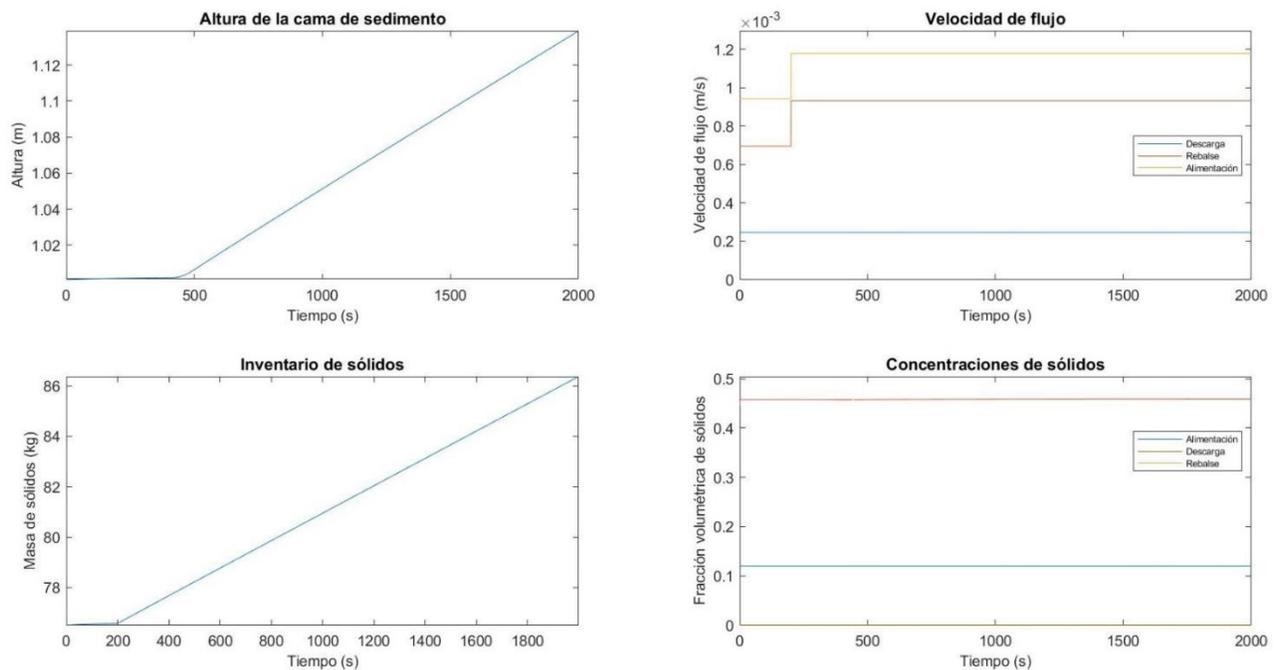


Figura 7 Respuestas dinámicas del sistema ante el cambio escalón positivo de flujo de alimentación.

La respuesta de la cama de sedimento al cambio escalón en el flujo de alimentación tiene en esencia dos características principales, un retardo y un crecimiento (o decrecimiento) lineal sostenido durante un tiempo¹⁷.

El retardo es esperado, debido al tiempo que les toma a las curvas características propagar la información de la nueva concentración conjugada desde la alimentación hasta la cama de sedimento, y dada la función de flujo, depende de la concentración conjugada anterior, la nueva concentración conjugada y la altura de la cama de sedimento, la dependencia respecto de la cama de sedimento en general es lineal, y la dependencia del retardo con ambas concentraciones conjugadas es más compleja y depende de la función de flujo y su derivada evaluada en ambas concentraciones.

4.4. Análisis de las respuestas escalón:

El análisis se divide en dos casos, como se vio en la sección anterior, las alteraciones en la alimentación, ya sea de flujo como de concentración comparten ambas la característica de poseer un retardo y luego generar una alteración lineal a la cama de sedimento, mientras un cambio escalón en el flujo de descarga si bien genera alteraciones lineales en la altura de la cama de sedimento, sus efectos son inmediatos, por lo que su análisis será separado.

Los análisis de esta sección consideran sólo los casos observados en las simulaciones de lazo abierto, y no pretenden ser extensivos en el sentido de representar cualquier tipo de cambio escalón en la alimentación, un estudio que si considera todas las respuestas escalón cualitativamente distintas puede ser encontrado en [12], donde se presentan además en los casos en que es posible las expresiones analíticas para todos los parámetros que aquí se estudian, en este sentido, esta sección no presenta ninguna novedad salvo la reinterpretación de estos parámetros como información de utilidad para el control de procesos.

En [46], Bustos y colaboradores estudiaron el problema del control en términos muy similares a los que se utilizarán acá, y obtuvieron las ecuaciones aún antes que la citada publicación de Diehl, aunque sin toda la generalidad del trabajo de Diehl.

Los respectivos ejemplos de cálculo de los parámetros pueden ser encontrados en el anexo 7.7.

¹⁷ Hasta que la cama de sedimento alcance la descarga o bien la alimentación.

4.4.1. Alteraciones en la alimentación

Supóngase que ocurre un cambio en la alimentación que altera la concentración conjugada de un valor u_m^1 a un nuevo valor u_c^2 , se busca obtener expresiones que permitan relacionar las condiciones de operación, y los parámetros del sistema con las características principales de la respuesta escalón en lazo abierto, esto es, el retardo y la pendiente inicial de modificación de la cama de sedimento.

El valor de u_c^2 puede obtenerse mediante la solución de

$$u_F q_F = f_b(u_c^2) + q_u u_c^2. \quad (44)$$

Por su parte, resultará de utilidad debido definir el operador:

$$(u)^* = \max(\alpha \in [u_{infl}, u_{max}]: S_f(u, \alpha) \leq S_f(u, \beta) \quad \forall \beta \in [u, u_{max}]), \quad (45)$$

cuya imagen para valores de $u \in [0, u_{infl}]$ puede ser obtenida mediante la resolución de

$$f_b(u^*) - f_b(u) = (u^* - u)f_b'(u^*). \quad (46)$$

4.4.1.1. Análisis del retardo

El retardo visto en las simulaciones de lazo abierto depende fundamentalmente de la altura de la cama de sedimento, el punto de alimentación y la velocidad de propagación de la perturbación en la zona de sedimentación, el análisis debe dividirse en dos casos, según esta propagación sea mediante una onda de choque, o una de rarefacción.

i) Si la onda es de choque:

Las ondas de choque aparecen cuando las curvas características en las nuevas condiciones se intersectan con las que existían anteriormente solapándose, esto fuerza a que las soluciones de entropía a la ley de conservación contengan discontinuidades, se caracteriza por una única velocidad de propagación, matemáticamente, para el caso que compete, este tipo de soluciones aparecen cuando $f'(u_m^1) < f'(u_c^2)$.

Corresponde al caso más sencillo, la propagación de la información es lineal y su expresión puede ser obtenida en base a la condición de Rankine-Hugoniot

$$\sigma = \frac{f(u_m^1) - f(u_c^2)}{u_m^1 - u_c^2}, \quad (47)$$

considerando además que la velocidad de propagación de la información corresponde a la distancia recorrida dividida en el tiempo se obtiene que

$$\sigma = \frac{B - z_{sb}}{\theta}, \quad (48)$$

y así, puede deducirse una expresión para el retardo θ en base a la función de flujo, las condiciones de operación, y las respectivas concentraciones conjugadas, que es

$$\theta = \frac{u_m^1 - u_c^2}{f(u_m^1) - f(u_c^2)} (B - z_{sb}). \quad (49)$$

ii) Si la onda es de rarefacción:

Este tipo de comportamientos aparece cuando aparece una zona sin curvas características, la solución de entropía para este caso corresponde a un cambio continuo de valores, llamado onda de rarefacción, matemáticamente, el caso que compete, ocurre cuando $f'(u_m^1) > f'(u_c^2)$.

Es un caso más complicado pues la información no exhibe una sola velocidad de propagación y se propaga un continuo de valores que varían desde la concentración u_m^1 hasta la nueva concentración u_m^2 .

Para estimar un retardo para este caso, se utilizará un promedio ponderado de las velocidades de propagación de ambas concentraciones límite, así, la velocidad de propagación de la información estará dada por

$$\sigma = \alpha f'(u_m^1) + (1 - \alpha) f'(u_c^2), \quad (50)$$

la estimación óptima a priori del valor del parámetro α es un problema que excede los alcances de este trabajo, sin embargo, como puede verse en los anexos, en los casos analizados, un valor de $\alpha = 1$ permite estimar con precisión la velocidad de propagación real de la perturbación, lo que quiere decir, que el retardo está esencialmente controlado por la velocidad de propagación asociada a la concentración conjugada inicial.

En este caso, el retardo puede ser estimado mediante la expresión

$$\theta = \frac{B - z_{sb}}{\alpha f'(u_m^1) + (1 - \alpha) f'(u_c^2)}. \quad (51)$$

Un último caso, si bien de escasa importancia práctica es aquel en que ambas velocidades de propagación son iguales, aquí se apreciará una discontinuidad similar a un choque propagándose con una velocidad $f'(u_m^1)$, la expresión para el retardo permanece inalterada considerando esta velocidad de propagación.

4.4.1.2. Análisis de la pendiente inicial

Por su lado, el crecimiento lineal es también esperado debido al cambio también lineal del inventario de sólidos al interior del espesor, considerar que esto motiva la forma utilizada para la determinación de la cama de sedimento en la literatura como puede verse en Diehl [15], también es posible determinar la pendiente de este crecimiento lineal, sin embargo, esta estimación resulta mucho más problemática debido a la gran diversidad de comportamientos que pueden presentarse [12], por lo que el análisis debe realizarse caso a caso como se hizo en el trabajo referenciado, donde incluso, se muestra que en algunos casos no se tiene un crecimiento lineal.

Sin embargo, los valores de alimentación o cambios en el flujo de descarga que pudieran generar esta clase de comportamientos están relativamente alejados de la operación óptima, y representan cambios drásticos en las variables de alimentación (específicamente corresponden a cambios escalón tales que el nuevo punto de alimentación queda ubicado en las zonas \mathcal{O}_{2c} , U_{2b} , \mathcal{O}_{3b} o \mathcal{O}_{3c} , la definición de estas zonas puede encontrarse en 7.3), por lo que si se acota el análisis a cambios pequeños en torno al punto de equilibrio, y con $q_u < \overline{q_u}$ se pueden generar expresiones para la pendiente inicial del crecimiento de la cama de sedimento siguiendo las mismas consideraciones anteriores:

i) Si la onda es de choque:

Razonando de forma similar a la estudiada anteriormente, se puede estudiar la velocidad de propagación de esta onda, que correspondería a la velocidad de crecimiento de la cama de sedimento mediante la condición de Rankine-Hugoniot:

$$\sigma = \frac{f(u_c^2) - f((u_c^2)^*)}{u_c^2 - (u_c^2)^*}, \quad (52)$$

donde el valor $(u_c^2)^*$ representa el límite superior de la onda de choque considerando una concentración conjugada u_c^2 , que puede calcularse resolviendo la ecuación (46).

ii) Si la onda es de rarefacción:

En todos los casos observados, la altura de cama de sedimento corresponde a una onda de choque, sin embargo, de no ser ese el caso se puede aplicar una expresión similar a la ecuación (50).

4.4.2. Alteraciones en el flujo de descarga.

Como se vio en las simulaciones, una alteración en el flujo de descarga se traducía en una respuesta inmediata (sin retardo) en la cama de sedimento, la cual crece de manera lineal y sostenida en el

tiempo, la pendiente de este crecimiento puede ser estimada mediante el mismo método descrito anteriormente, basado en la condición de Rankine-Hugoniot para el caso de una onda de choque, y mediante una ponderación entre velocidades de propagación extremas para el caso de ondas de rarefacción.

4.5. Comportamiento dinámico del sistema.

El principal resultado obtenido en base a las simulaciones realizadas en el apartado anterior, confirmando lo expresado por Diehl en 2007 [15] y reportado en múltiples oportunidades por operadores [35], es que dada una columna de sedimentación operada de manera óptima en estado estacionario, el comportamiento de esta columna ante pequeños cambios escalón en las variables de alimentación y descarga, se puede resumir como sigue:

$$q_u \text{ disminuye o } s \text{ aumenta} \Rightarrow m \text{ aumenta, y } z_{sb} \text{ aumenta}$$

$$q_u \text{ aumenta o } s \text{ disminuye} \Rightarrow m \text{ disminuye, y } z_{sb} \text{ disminuye}$$

Junto a la respuesta cualitativa de la respuesta del sistema ante cambios escalón, esta propiedad permite estipular la forma que poseen las funciones de transferencia asociadas a cada una de las variables, siendo para el caudal de descarga

$$G_1 = -\frac{K_1}{s}, \quad (53)$$

y para modificaciones en la alimentación de sólidos

$$G_s = \frac{K' e^{-\theta s}}{s}, \quad (54)$$

Esta información es fundamental para realizar la sintonización del controlador, los valores de las constantes involucradas se determinan en el anexo 7.7.

Otro comportamiento de importancia es que cualquier cambio en la alimentación o en el caudal de descarga genera un cambio en la concentración conjugada, el cual se propaga desde la alimentación con dirección hacia la descarga del espesador.

Un cambio en el flujo de descarga genera una respuesta sobre-amortiguada en la concentración de sólidos en la descarga, mientras que, cambios en la alimentación, no generan respuestas en la concentración de descarga si no tras pasado mucho tiempo.

5 SISTEMA DE CONTROL

En este capítulo se describe brevemente la estrategia de control PI, la estrategia de lógica difusa puede encontrarse en el anexo 7.9, se plantean y desarrollan los objetivos de control deseados, luego se presentan las respuestas escalón del proceso ante el sistema de control PI y se realiza un análisis cualitativo de las respuestas escalón, un estudio de la sintonización de este sistema puede ser encontrado en el anexo 7.8.

5.1. Preliminares

5.1.1. Tipos de control

Se proponen dos estrategias de control, un controlador PI, y un controlador de lógica difusa cuyo desarrollo puede encontrarse en los anexos.

5.1.2. Error

Llámesse error a la diferencia actual entre el valor adquirido por una variable de salida y un valor de referencia deseado para esa variable de salida comúnmente llamado *set-point*, la variable de salida y la referencia deseada pueden ser funciones del tiempo, y en consecuencia se tiene

$$e(t_n) = y(t_n) - y^{sp}(t_n), \quad (55)$$

también será de importancia su derivada en el tiempo:

$$\Delta e(t_n) = e(t_n) - e(t_{n-1}), \quad (56)$$

para el control de lógica difusa se considerarán estas dos definiciones, pero normalizadas, dividiendo el error por la salida de referencia, y la derivada por algún valor de derivada máxima que se desee.

5.1.3. Control PID:

Un primer tipo de control a tener en consideración es el control proporcional o control P, el cual determina la acción a ejecutar considerando que la modificación a la variable manipulada debe ser proporcional al error, expresado en la forma:

$$\Delta m(t_n) = K_p e(t_n), \quad (57)$$

donde K_p corresponde a la constante del controlador, cuya magnitud dicta cuán rápido responde el sistema de control a la perturbación, esta constante puede ser positiva o negativa según las necesidades

del sistema, un valor alto de $|K_p|$ implica una mayor velocidad de respuesta ante los cambios, pero puede generar inestabilidad.

La principal ventaja de este sistema es su fácil implementación, sintonización y programación, sin embargo, en el estado estacionario, la variable de salida, puede presentar, de acuerdo a las características del sistema, un error distinto de cero en el estado estacionario, este error, comúnmente llamado *off-set* puede disminuirse aumentando el valor de la constante $|K_p|$, sin embargo, como se ha mencionado, esto podría ocasionar inestabilidad en el sistema.

El control PID corresponde a una extensión natural del control proporcional, que tiene en consideración no sólo la diferencia entre el valor actual y la referencia, sino también la integral y derivada de esta diferencia en el tiempo, esto permite solucionar el problema del off-set asociado al controlador P.

La forma normal que representa a este tipo de control es, para el caso discreto

$$\Delta m(t_n) = K_p e(t_n) + K_I \sum_{i=1}^n e(t_i) + K_D \Delta e(t_n), \quad (58)$$

sin embargo, cuando el control se realiza en base a valores determinados en línea, es frecuente en muchas industrias que la parte derivativa en este control se omita, debido a que, aunque mejore la respuesta a la variabilidad, esta tiende a sobre reaccionar ante el ruido en las mediciones.

Por esta razón, se decide aplicar una estrategia de control basada en el control PI con leves modificaciones, que no posee parte derivativa, opera razonablemente bien ante el ruido en las mediciones, y de converger, lo hace al valor de la variable de referencia.

Para el control PI, la forma velocidad es

$$\Delta m(t_n) = m(t_n) - m(t_{n-1}) = K_p \Delta e(t_n) + K_I e(t_n) \Delta t. \quad (59)$$

Que corresponde a la forma que con leves cambios se programará en las simulaciones.

5.2. Objetivos de control:

El objetivo de control a considerar en este trabajo corresponde a mantener la altura de la cama de sedimento cerca de un valor estable deseado, sin embargo, en un espesador otros objetivos también resultan deseables.

Los objetivos de control más importantes en un espesador son asegurar la continuidad operacional del espesador (evitar embancamientos y sobrecargas) y lograr el máximo porcentaje de sólidos en la descarga que no comprometa el punto anterior, en este sentido los autores [5, 36] proponen los siguientes puntos como esenciales:

- Producir una baja concentración de sólidos en el rebalse (idealmente cero).
- Producir una concentración en la descarga que sobrepase cierto valor determinado, pero que no exceda un valor máximo.
- Ser robusto ante cambios en las variables de alimentación.

Así, en orden de prioridad, los objetivos de control que se buscarán en este trabajo, serán los siguientes:

- 1) Controlar la altura de la cama de sedimento manteniéndola cerca de un valor de referencia dado.
- 2) Sustener una operación óptima en todo tiempo.
- 3) Producir una concentración de descarga que no supere cierto valor u^{max} y que sea mayor a un valor u^{min} dado.
- 4) Que las acciones del controlador no supongan cambios abruptos para el caudal de descarga.

Otros objetivos muy similares pero con distintos órdenes de prioridad pueden encontrarse en [10] o en [15] donde se proponen controladores sujetos a las condiciones anteriores salvo por la cota superior al porcentaje de sólidos en la descarga.

En general las variables de perturbación son el flujo de alimentación Q_f y la concentración de sólidos en la alimentación u_f , las variables de salida pueden ser diversas, por ejemplo, el inventario, concentración de sólidos en la descarga, altura de cama o la turbidez en el rebalse, mientras que la principal variable manipulada es el caudal de descarga, el cual puede ser manipulado mediante una bomba de desplazamiento positivo [5].

5.3. Límites operacionales.

Previo al planteo de la estrategia de control, resulta esencial determinar los límites de operación que puede permitirse el controlador sin sacrificar las condiciones impuestas al control, se estudiarán los límites impuestos por cada condición.

5.3.1. Primera condición:

“El equipo se mantiene en operación óptima en todo tiempo t ”.

La primera condición que se exige por esta vía corresponde a la limitante presente en la definición de operación óptima en una columna de sedimentación, cuya expresión es

$$Q_u(t) \leq \overline{Q_u} \quad (60)$$

pues por sobre ese caudal no es posible sostener la operación óptima de la columna de sedimentación [12].

Considérese la función: $f(u) = f_b(u) + q_u u$, llámese u^M al máximo local de f , se define la función:

$$f_m(u) = \begin{cases} f(u) & 0 \leq u \leq u^M \\ f(u^M) & u^M < u \leq f(u^M)/q_u \\ q_u u & f(u^M)/q_u < u \leq u_{max} \end{cases} \quad (61)$$

notar que esta función depende también del caudal de descarga.

Esto permite definir las siguientes zonas del plano Ω :

$$S = \{(u, y): q_u u < y < f_m(u)\} \quad (62)$$

$$S_1 = S \cap \{(u, y): y \leq f(u_{infl})\} \quad (63)$$

$$S_2 = S \setminus S_1 \quad (64)$$

$$D = \{(u, y): 0 \leq u \leq u_{max}, f_m(u) < y\} \quad (65)$$

El resultado más relevante en este sentido, es que una columna de sedimentación mantendrá una operación óptima al menos por un tiempo mientras el punto de alimentación pertenezca a S_1 ¹⁸.

Entonces, se debe limitar el flujo de descarga de manera tal que el punto de alimentación siempre pertenezca al conjunto S_1 , para simplificar, se permitirá que pertenezca también a la frontera.

Esto implica que los puntos cumplen dos condiciones, pertenecen a S y además pertenecen a $\{(u, y): y \leq f(u_{infl})\}$, entonces deben cumplirse las siguientes condiciones:

$$s \leq f(u_{infl}) \quad y \quad (66)$$

$$q_u u_f \leq s \leq f_m(u_f). \quad (67)$$

¹⁸ En realidad, es posible relajar esta condición, pero en este trabajo no se considerará esa posibilidad, se permitirá además que el punto de alimentación pertenezca a la frontera de S_1 , según mencionó Diehl en [7], esta distinción tiene importancia teórica, pero escasa importancia práctica.

Notar que para que ambas condiciones sean satisfechas, es suficiente exigir que:

$$q_u u_f \leq s \leq \min(f_m(u_f), f(u_{infl})). \quad (68)$$

Lo cual se traduce en dos desigualdades, notar que la primera de ellas no entrega información nueva (pues $q_u \leq q_f$), pero la segunda si ofrece un límite para la operación, para esto, es importante considerar que f y f_m exhiben una dependencia funcional respecto al caudal de descarga.

La condición obtenida por esta vía corresponderá a un límite inferior para el caudal de descarga, para resolver el problema se calculan las soluciones a las siguientes ecuaciones

$$f_m(u_f; Q_{min1,1}) = s, \quad y \quad (69)$$

$$Q_{min1,2} = \frac{A(s - f_b(u_{infl}))}{u_{infl}}, \quad (70)$$

y el límite asociado a esta condición será

$$Q_u(t) \geq Q_{min1} \equiv \max(Q_{min1,1}, Q_{min1,2}). \quad (71)$$

Notar que los valores de caudales límite obtenidos con este método son funciones del flujo de descarga¹⁹, considerando que la alimentación es variable en el tiempo, se deduce que estos límites operacionales son también funciones del tiempo, por lo que deben ser recalculados en cada instante en base a la información de la alimentación.

5.3.2. Segunda condición:

“La concentración de sólidos en la descarga supera cierto valor u^{min} dado”.

Esta condición resulta deseable para asegurar una determinada productividad, esta concentración puede determinarse mediante los balances de masa estacionarios, por ejemplo, mediante el uso de la metodología de Coe y Clevenger [29] considerando la cantidad de agua mínima que se necesita recircular en el proceso.

El teorema que resuelve este problema puede ser encontrado en [10], la hipótesis esencial es que el equipo opere en forma óptima en un tiempo t , el teorema tiene dos partes:

- La concentración de sólidos en la descarga cumple con: $u_u(t) \in (\bar{u}_u, u_{max}]$ para todo tiempo t donde $\bar{u}_u = (f_b(u_{infl}) + q_u u_{infl}) / \bar{q}_u$.

¹⁹ Recuérdese que la función f depende del flujo de descarga.

- Sea u_{min} un valor mínimo deseado de porcentaje de sólidos en la descarga, entonces, el caudal de descarga debe cumplir con

$$Q_u(t) \leq Q_{max1}, \quad (72)$$

donde Q_{max1} está dado por la ecuación:

$$f(u_M(Q_{max1}), Q_{max1}) = \frac{Q_{max1}}{A} u^{min}. \quad (73)$$

Luego, el problema de determinar el caudal máximo de descarga se reduce a resolver la ecuación no lineal (73), esta ecuación puede resolverse mediante un método de punto fijo, donde u_M puede ser calculado en base a la calculadora de estados estacionarios comentada anteriormente, notar que si u^{min} no varía con el tiempo, el límite operacional derivado de esta condición es también independiente del tiempo.

El valor de u^{min} a utilizar es de 0.25.

5.3.3. Tercera condición.

“El porcentaje de sólidos en la descarga no puede superar cierto valor u^{max} ”.

Esta condición se impone para evitar embancamientos, daños en las rastras u obstrucciones en las tuberías, las variables importantes a tener en cuenta para determinar esta concentración son el yield-stress y la viscosidad de la pulpa deseada.

El autor no ha encontrado en la literatura ninguna referencia donde se estudie este problema de manera dinámica, Betancourt en [5], mencionó la necesidad de este tipo de limitantes, sin embargo no se determinó explícitamente una expresión que permita asegurar esta condición, pues se trabajó fuera de rangos problemáticos, y se limitó a mencionar que era posible plantear una condición de este tipo, por otra parte, Segovia y colaboradores en [37], utilizaron un límite de este tipo, basada en ecuaciones que se cumplen sólo en estado estacionario, y en propiedades cualitativas de la respuesta dinámica del sistema, la expresión propuesta es:

$$Q_{min2} = \frac{Af_b(u_D) + Q_u u_D}{u^{max}}, \quad (74)$$

donde u_D corresponde al porcentaje de sólidos en el inferior del espesador, este valor debe recalcularse en cada instante, basado en el valor de la concentración de sólidos en el punto inferior del espesador.

La principal deficiencia de esta ecuación corresponde a su dependencia del valor de concentración u_D que si bien en una simulación es fácil de aproximar, en la práctica puede ser difícil de medir a menos que exista el equipamiento apropiado para ello.

El valor de u^{max} a utilizar es de 0.55

5.3.4. Cuarta condición:

“Límite a la derivada”.

Un controlador de acción rápida (ver anexo) tiende a reaccionar rápidamente sobre el flujo de descarga, haciendo que las modificaciones sobre este sean muy abruptas, lo que en la práctica puede resultar en un daño al equipo, en este sentido, es deseable limitar la velocidad a la que se imponen cambios en el flujo de descarga, dígase que esta velocidad máxima permitida es un valor v_{max} , las limitantes por esta vía corresponderán geoméricamente a un cono en torno al caudal anterior cuya expresión en tiempo discreto será:

$$Q_{max2}^{i+1} = Q_u^i + v_{max}\Delta t \quad y \quad (75)$$

$$Q_{min3}^{i+1} = Q_u^i - v_{max}\Delta t \quad (76)$$

De esta manera se evitan acciones abruptas sobre la bomba.

El valor de v_{max} a considerar en este trabajo será de $1 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$.

5.3.5. Quinta condición:

“Límites prácticos”.

Existen además otras cotas de importancia a tener en consideración, impuestas por las condiciones reales del equipo, en este sentido la experiencia de operación, la turbidez deseada en el efluente, los límites de succión de la bomba, u otras consideraciones no contempladas en los apartados anteriores, impondrían unos nuevos límites a considerar, que se llamarán Q_{min4} y Q_{max3} , si no se presentan, o no son necesarios, no se considerarán.

5.3.6. Límites globales

Notar que las condiciones anteriores imponen límites al caudal de descarga que varían en función del tiempo, es decir no sólo el caudal de descarga, si no los valores extremos que éste puede adquirir varían con el tiempo.

Naturalmente, se desea cumplir con todos los requisitos solicitados a la operación para cualquier tiempo t , esto implica que deben cumplirse todas las condiciones para el caudal de descarga simultáneamente, luego el intervalo final de valores donde el caudal de descarga puede variar estará dado por:

$$Q_{min}(t) \leq Q_u(t) \leq Q_{max}(t), \quad (77)$$

donde:

$$Q_{min}(t) = \max(Q_{min1}(t), Q_{min2}(t), Q_{min3}(t), Q_{min4}(t)) \quad y \quad (78)$$

$$Q_{max}(t) = \min(Q_{max1}(t), Q_{max2}(t), Q_{max3}, \overline{Q_u}). \quad (79)$$

Para que exista la posibilidad de llegar a un estado estacionario, debe darse que $Q_{min} \leq Q_{est} \leq Q_{max}$, donde Q_{est} corresponde al valor estacionario de flujo de descarga, los casos en que esta relación no se cumpla, no podrán operar cumpliendo todos los criterios que se exigen, sin embargo relajar estos criterios siempre es posible, por ejemplo, si comprometiera la estabilidad operacional, una buena opción sería sacrificar el rendimiento mínimo o la operación óptima durante un tiempo, y una vez solucionado el problema, es posible recuperar el perfil deseado volviendo a imponer las condiciones retiradas y esperando un tiempo suficiente.

5.3.7. Control PI.

El control que se utilizará en este ítem es muy similar al control PI, sin embargo, tendrá una diferencia importante, y es que tendrá límites de acción impuestos externamente, todo sujeto a las consideraciones estudiadas en el apartado anterior

Dadas las constantes K_p y K_I , y conocido el error $e(t_n) = z_{sb}(t_n) - z_{sb}^{sp}(t_n)$ y la derivada del mismo, la respuesta de control PI estará dada por:

$$Q_u(t_n) = \max(\min(Q_u(t_{n-1}) + K_p \Delta e(t_n) + K_i e(t_n) \Delta t, Q_{max}), Q_{min}). \quad (80)$$

5.4. Simulaciones.

Con las estrategias de control propuestas y los mismos parámetros dados para las simulaciones de lazo abierto, se realiza la simulación de la respuesta del sistema ante perturbaciones en el set-point y posteriormente en las variables de alimentación, como se muestra en los anexos, debido a que la respuesta del sistema ante cambios en la alimentación no depende de u_f y Q_f por separado, si no del producto de ambas variables S , sólo se consideran perturbaciones en esta variable.

5.4.1. Simulaciones para el lazo de control PI.

Se consideran tres controladores PI con distintas constantes

Tabla 6 Parámetros controlador PI.

Parámetro	Acción Rápida	Acción Lenta	Accion Ultra-Lenta
K_p	0.0236	1.18×10^{-3}	4.43×10^{-5}
K_I	0.0143	7.14×10^{-4}	1.16×10^{-8}

Se presentan las respuestas para el controlador PI de acción rápida, y los gráficos de respuestas de acción lenta necesarias para las discusiones, el procedimiento seguido para realizar la sintonización, así como las demás respuestas dinámicas pueden ser encontradas en los anexos.

5.4.1.1. Respuesta a cambios en el set-point.

Se realiza una modificación del 1% en el set-point de altura de cama de sedimento, concretamente de $0.01m$ en un tiempo $t = 200s$:

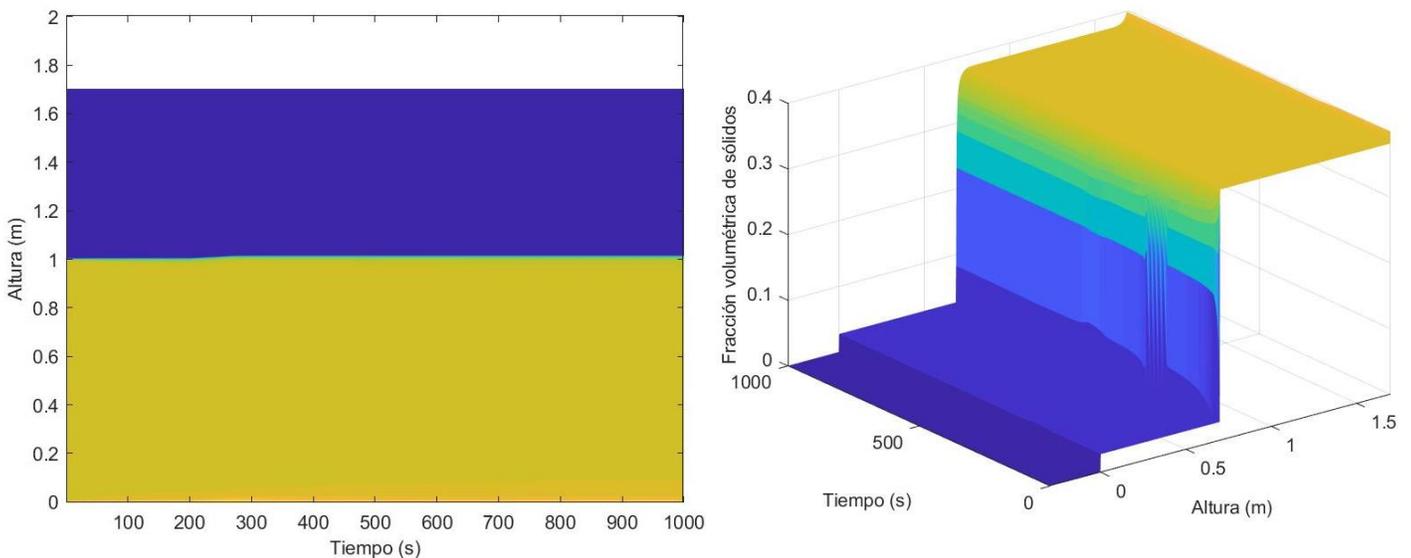


Figura 9 Soluciones de la simulación del lazo de control PI de acción rápida para un cambio escalón positivo en el set-point.

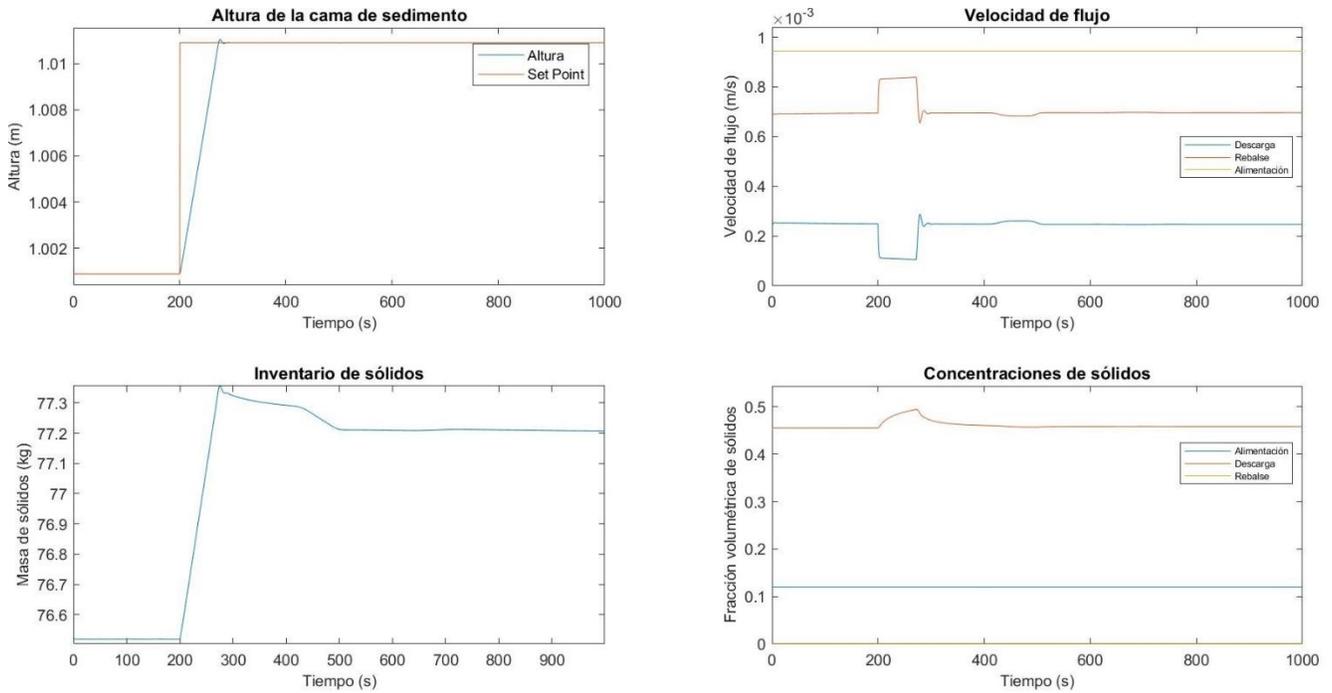


Figura 10 Respuestas dinámicas del sistema ante el cambio escalón positivo de set-point.

El set-point es alcanzado rápidamente tras lo cual la cama de sedimento no sufre alteraciones importantes, el tiempo de estabilización fue mayor a 20s, sin embargo, esto es debido a que el flujo de descarga alcanzó su límite inferior como se aprecia en el siguiente gráfico:

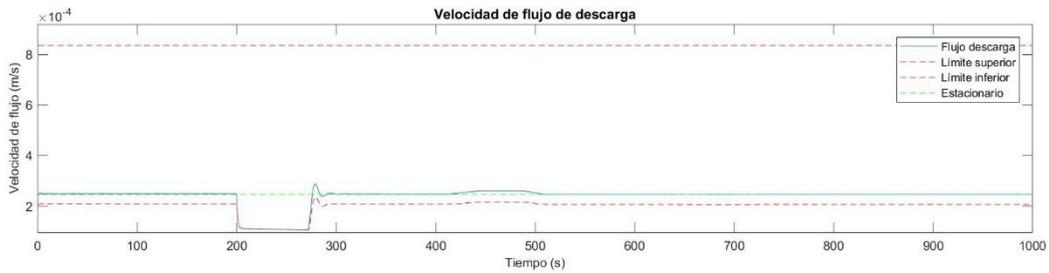


Figura 11 Velocidad de flujo de descarga y sus límites.

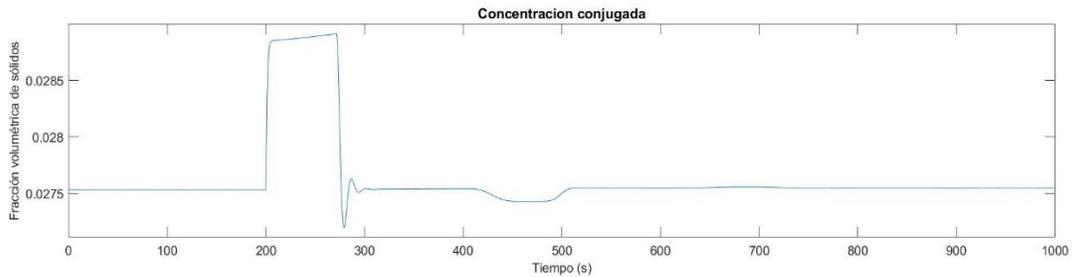


Figura 12 Concentración conjugada.

Se observa la aparición de intervalos temporales donde tanto la altura de la cama de sedimento como el flujo de descarga permanecen relativamente constantes, seguidos de cambios importantes en el flujo de descarga, asimilables a respuestas de segundo orden que se estabilizan rápidamente, se puede comprender este fenómeno en base a la propagación de perturbaciones, en efecto, en cuanto ocurre un cambio en el set-point, el flujo de descarga se modifica rápidamente hasta alcanzar el límite inferior, valor en que se queda hasta que la altura de cama de sedimento alcanza el set-point, este cambio en el flujo de descarga genera cambios importantes en la concentración conjugada, que mantiene un valor constante durante un tiempo, una vez alcanzado el set-point, la respuesta del caudal de descarga vuelve a valores cercanos al equilibrio.

Las modificaciones en la concentración conjugada se propagan a lo largo de la zona de sedimentación, y al alcanzar la cama de sedimento, fuerza al controlador a modificar el flujo de descarga, generando nuevas alteraciones en la concentración conjugada las cuales se propagan nuevamente.

Por su parte la concentración de sólidos en la descarga obedece a la dinámica sobre-amortiguada con leves modificaciones producidas por las distintas formas en que se modifica el caudal de descarga, cumple las especificaciones de ambos límites impuestos como se ve en la siguiente figura:

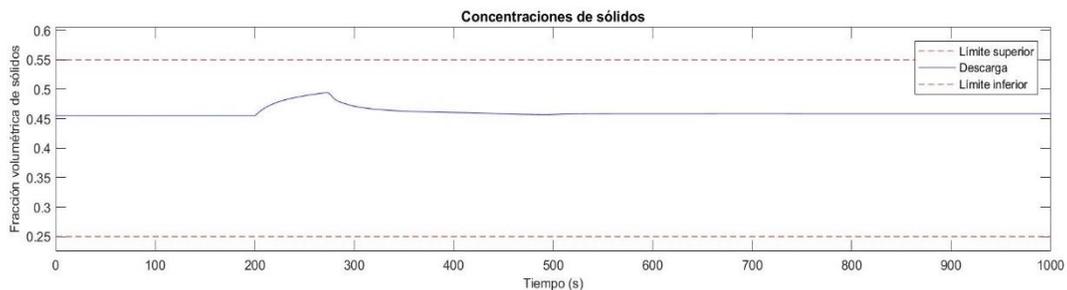


Figura 13 Concentración de sólidos en la descarga y sus límites.

El inventario logra alcanzar el estado estacionario, esto debido a que, como la alimentación no sufrió alteración alguna, las concentraciones u_m y u_M asociadas al estado estacionario de la zona de sedimentación y sedimento respectivamente no sufren alteración alguna, y tras las acciones de control, tanto la concentración conjugada como la asociada a la zona de sedimento permanecen virtualmente inalteradas.

En la respuesta de acción lenta (Figura 34), el flujo de descarga no logra estabilizarse antes de la propagación de las alteraciones en la concentración conjugada que genera, esto implica que las acciones ante las nuevas perturbaciones se superponen con las acciones de control anteriores, con la

consecuencia de que el sistema se mantiene oscilando durante mucho más tiempo, sin embargo, el control logra que la amplitud de las oscilaciones en general disminuya una vez transcurrido suficiente tiempo.

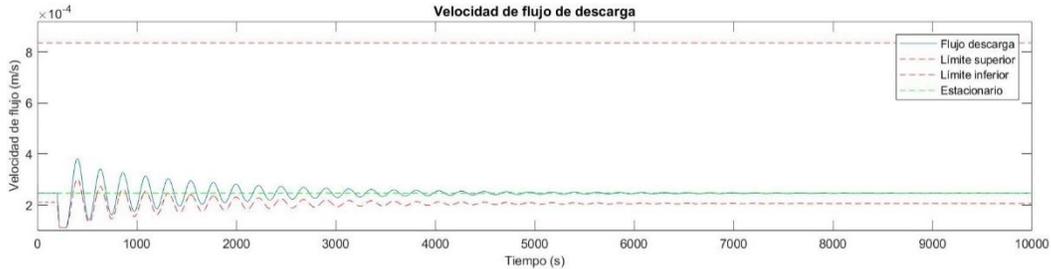


Figura 14 Flujo de descarga y sus límites para acción lenta.

Es decir, las acciones de control generan cambios en la concentración conjugada a los que el sistema de control deberá enfrentarse una vez estos se propaguen a través de la zona de sedimentación, y enfrentar estas modificaciones genera a su vez nuevos cambios en la concentración conjugada, esto justifica la importancia de la relación entre el tiempo de estabilización y el retardo inherente a la operación de la columna.

5.4.1.2. Respuesta a cambios en la alimentación.

Se realizan modificaciones en la alimentación de sólidos del 25%, concretamente de $2.00 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$ en un tiempo $t = 200\text{s}$, la duración total de la simulación fue de $T = 1000\text{s}$:

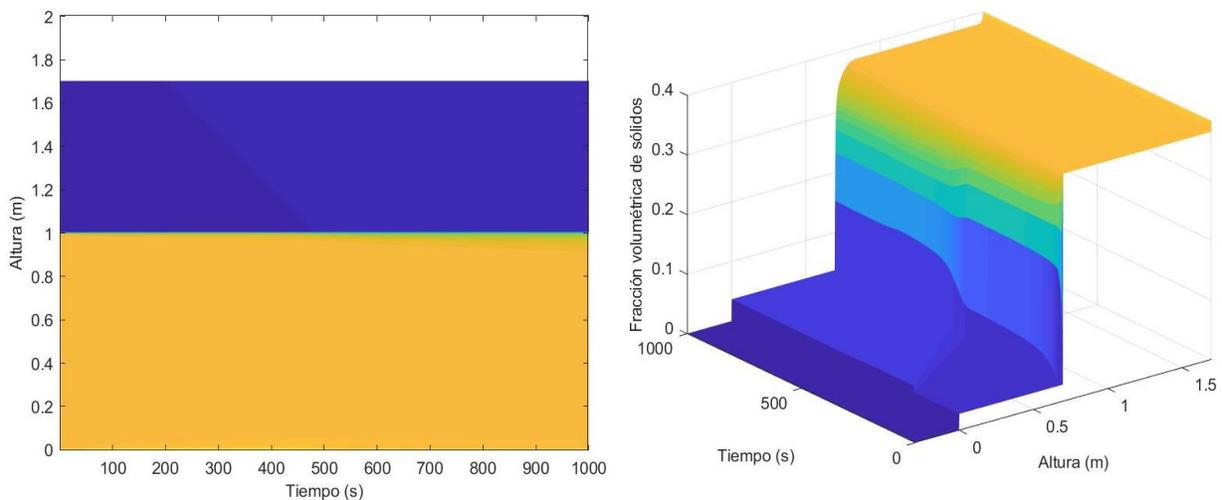


Figura 15 Soluciones de la simulación del lazo de control PI para un cambio escalón positivo en el flujo de sólidos.

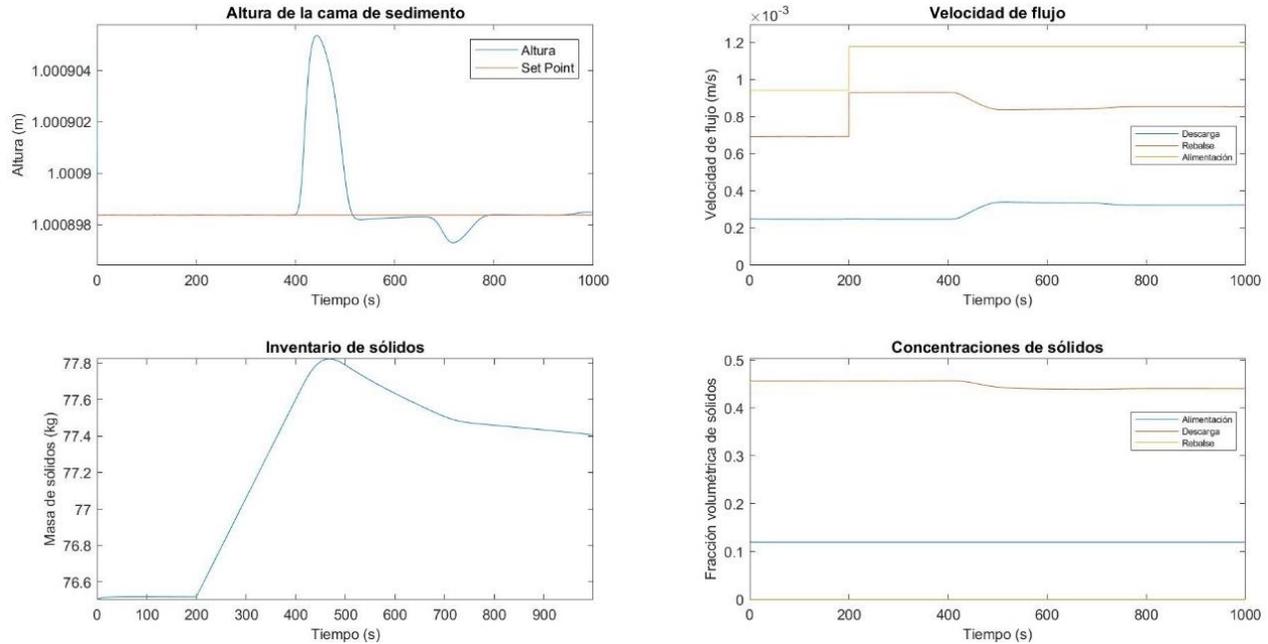


Figura 16 Respuestas dinámicas del sistema ante el cambio escalón positivo en el flujo de alimentación.

El comportamiento más llamativo son los peaks en la altura de cama de sedimento, el primero de ellos ocurre en los 400s, y se debe directamente a la perturbación, el caudal de descarga reacciona rápidamente a este cambio, aumentando su valor hasta volverse constante, este cambio en el caudal, mediante el mismo mecanismo explicado en el caso anterior genera los peaks posteriores, entre peak y peak, tanto la cama de sedimento como el flujo de descarga permanecen inalterados, el tamaño de los peaks así como las modificaciones en el flujo de descarga son cada vez más pequeños.

Si se considera el orden de magnitud de los peaks observados en la cama de sedimento, se observa que el tamaño de estos es mucho menor a la sensibilidad inherente del método experimental elegido para medir la cama de sedimento, en otras palabras, a efectos prácticos los cambios son nulos, sin embargo, debe observarse que el sistema es capaz de tener este tipo de respuestas a consecuencia de dos hechos, primero, la lentitud del crecimiento generado por las perturbaciones, y en segunda instancia, las importantes modificaciones realizadas en el flujo de descarga.

Otro aspecto a tener en consideración es que el inventario no alcanza un estado estacionario, esto es debido a la existencia de una onda de rarefacción en la zona de sedimento que no alcanzó a propagarse hasta la descarga del espesador, esta onda de rarefacción corresponde a un cambio hacia concentraciones menores, explicando la disminución sostenida en el tiempo del inventario.

Si bien la concentración de descarga logró un valor constante en el tiempo, no alcanzó realmente el estado estacionario, esto debido a que la nueva concentración estacionaria en la zona de sedimento está aún propagándose desde la cama de sedimento sin llegar a la descarga, por lo que la concentración en la zona inferior del espesador no corresponde a la de estado estacionario, en otras palabras, la concentración en la descarga aún sufrirá disminuciones apreciables una vez la onda de rarefacción comience a alcanzar la descarga del espesador.

Por su parte la acción lenta (Figura 36) ofrece respuestas muy distintas al caso de la acción rápida, apareciendo inestabilidad.

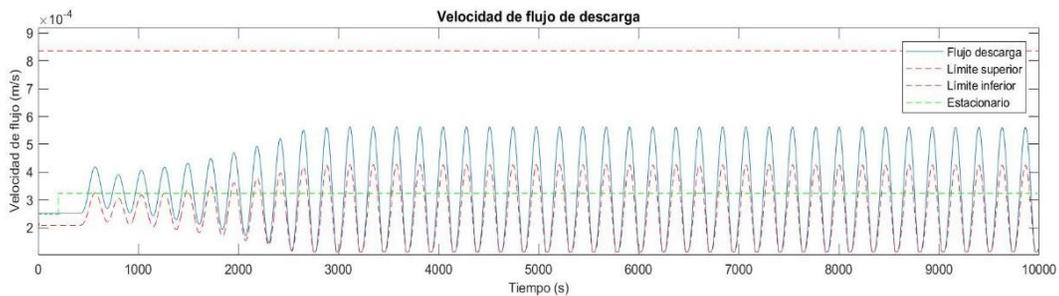


Figura 17 Flujo de descarga y límites para el controlador de acción lenta.

Esta inestabilidad sólo está limitada por la saturación del controlador, y puede entenderse su aparición considerando que el controlador no alcanza a disminuir lo suficiente la amplitud de oscilaciones para el momento en que la modificación en la concentración conjugada llega a la cama de sedimento, lo que obliga a incrementar la amplitud de oscilaciones en el flujo de descarga para enfrentar las nuevas condiciones a las que la cama está sometida, que a su vez genera un aumento en la amplitud de oscilaciones de la concentración conjugada, explicando la resonancia observada.

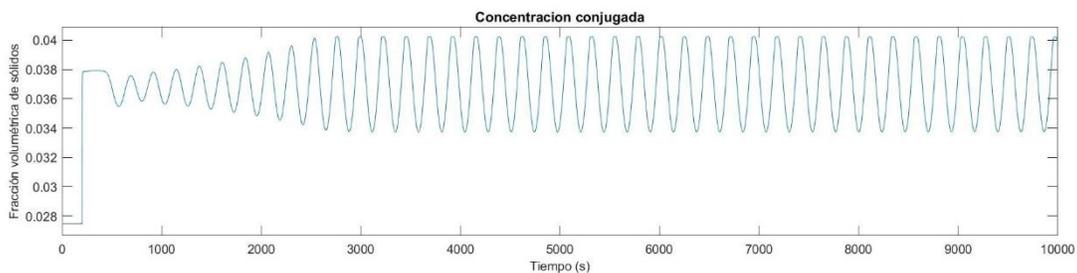


Figura 18 Concentración conjugada para el caso de acción lenta.

5.5. Análisis de las respuestas escalón:

Obtener expresiones matemáticas para las curvas de respuesta escalón resulta mucho más complicado que el caso del lazo abierto, en esta sección se realizará en cambio, un análisis cualitativo de las respuestas escalón estudiando las causas de los comportamientos observados.

El control PI de acción rápida (Figuras 10 y 16) resultó eficiente y eficaz, alcanzando siempre el objetivo de control con rapidez, por su parte el control PI de acción ultra lenta alcanza el objetivo, pero en un tiempo mayor.

Para modificaciones en el set-point (Figura 10), el control PI de acción rápida logra alcanzar su objetivo rápidamente, y también alcanzar el estado estacionario para el sistema completo en tiempos *cortos*.

Para perturbaciones en la alimentación (Figura 16), el control PI de acción rápida logró mantener la cama de sedimento en torno al set point con sólo pequeñas alteraciones producidas por la llegada de nuevas concentraciones conjugadas, sin embargo, el inventario no alcanzaba rápidamente el estado estacionario, la explicación a esto es en todos los casos que el cambio en la alimentación, genera cambios en las concentraciones u_m y u_M , y a la zona de sedimento le toma una gran cantidad de tiempo alcanzar la nueva concentración estacionaria.

El controlador PI de acción lenta (Figuras 34 y 36) ofrece respuestas lentas pero convergentes para cambios en el set-point pero un comportamiento inestable limitado por la saturación del controlador para perturbaciones en la alimentación.

El controlador PI de acción ultra-lenta (Figuras 38 y 40) ofrece respuestas lentas pero convergentes para cambios escalón en el set-point y en la alimentación, sin embargo, para el cambio escalón en la alimentación, el peak que la cama de sedimento presenta es de gran magnitud.

Las respuestas para el control PI considerando especificaciones de acción rápida son mucho más rápidas que para especificaciones de acción ultra-lenta (Compárense las figuras 10 y 16 con 38 y 40), sin embargo, existe otro factor a considerar, y es que, para obtener las rápidas respuestas que se aprecian, el control PI de acción rápida realiza grandes cambios en el flujo de descarga, de modo que la bomba se ve obligada a realizar frecuentemente cambios más abruptos en el flujo de descarga que para su contraparte ultra-lenta, lo que en la práctica se traduce en daños al equipo debido a la reacción que este controlador tendría ante el ruido en las mediciones, las simulaciones de acción lenta (Figura

34 y 36) muestran que para considerar especificaciones menos exigentes no conviene seguir utilizando la sintonización de acción rápida.

Un fenómeno de importancia central que aparece en el caso del control PI de acción rápida²⁰ (Figura 32 y 74) es lo que el autor denomina *falsos estados estacionarios de primera especie* que se definen como períodos de tiempo en los cuales el caudal de descarga y la altura de la cama de sedimento no sufren alteraciones apreciables sin ser el caudal de descarga igual al del estado estacionario ni la concentración de sólidos constante en la zona de sedimentación.

Durante estos períodos, el sistema de control no realiza modificaciones en el flujo de descarga a pesar de que el sistema no está realmente en el estado estacionario. Su mecanismo de aparición puede entenderse teniendo en cuenta los siguientes dos hechos:

- 1) Cambios en el flujo de descarga generan cambios en la concentración conjugada.
- 2) Cambios en la concentración conjugada se generan desde la alimentación, y no afectan a la cama de sedimento hasta que su propagación alcance este punto.

Y es que, una perturbación en la alimentación genera una onda de concentración que se propaga en el espacio desde la alimentación hasta alcanzar la cama de sedimento, este cambio en las condiciones que afectan a la cama, genera una respuesta rápida del controlador para compensar la perturbación, y considerando el primer punto anterior, esta respuesta genera un nuevo cambio en la concentración conjugada, que, de acuerdo al segundo punto se propaga hasta la cama de sedimento donde genera una nueva acción del controlador, repitiendo el ciclo hasta que los cambios en la concentración conjugada y el caudal de descarga eran despreciables

Para controladores de acción rápida, esta iteración de flujos de descarga, convergía efectivamente al caudal que permite la operación óptima en estado estacionario, sin embargo, la demostración de la convergencia o la búsqueda de condiciones suficientes para asegurarla, escapa a los objetivos de este trabajo, otro problema no resuelto aquí asociado al control de acción rápida guarda relación con los peaks máximos observados cada vez que la perturbación alcanzaba la cama de sedimento, y es demostrar que la magnitud de la amplitud de estos peaks sea siempre decreciente, o bien encontrar condiciones suficientes para asegurar este comportamiento.

²⁰ En general este fenómeno debiera darse en cualquier sistema de control de acción rápida, entendido este concepto como un sistema de control que permita una estabilización rápida de la cama de sedimento y flujo de descarga ante la llegada de una perturbación a la cama de sedimento.

Respecto del tipo de onda mediante el cual se propague la nueva concentración conjugada, esta tiene una gran importancia a la hora de definir la forma en que el caudal de descarga reaccionará ante la llegada de estas nuevas condiciones, el comportamiento dinámico que adquirirá el caudal de descarga puede resumirse en las siguientes dos observaciones:

- i) Si la onda es de shock: La modificación en el flujo de descarga será abrupta y responderá a una dinámica equiparable a segundo orden (Figura 32).
- ii) Si la onda es de rarefacción: La modificación en el flujo de descarga será lenta y suave debido al cambio continuo en la concentración conjugada (Figura 16).

Los falsos estados estacionarios de primera especie pueden identificarse considerando el valor en el tiempo de la concentración conjugada, si esta sufrió alguna modificación durante el período dado por el tiempo del retardo asociado a las condiciones actuales de operación, entonces, el equipo tiene esta clase de falso estado estacionario, es importante considerar aquí la dependencia entre el tiempo de propagación de las perturbaciones en la zona de sedimentación y la concentración conjugada.

Existe un segundo tipo de falso estado estacionario que aparece en el caso de acción rápida, que ocurre principalmente ante perturbaciones en la alimentación²¹ (Considerar figuras 16, 32 que ilustran el problema, mientras 42 y 44 muestran lo que ocurre en el largo plazo), que se llamará *falso estado estacionario de segunda especie*, correspondiente al caso en que la altura de cama de sedimento alcanza el set-point y el caudal de descarga adquiere un valor constante durante mucho tiempo²², sin embargo, el inventario continúa su aumento o disminución, este tipo de falsos estacionarios aparecen cuando existen ondas de propagación en la zona de sedimento que aún no acaban de propagarse hasta su destino, y la lenta velocidad de propagación de estas, genera que el estado estacionario no pueda alcanzarse si no hasta mucho tiempo después, deben distinguirse aquí dos casos, cuando la onda se propaga desde la cama de sedimento, y cuando la onda se propaga desde la descarga:

- i) Desde la cama de sedimento: correspondiente al caso en que u_M disminuye su valor, se alcanza el valor estacionario en el flujo de descarga en un tiempo corto, y el inventario sufre disminuciones sostenidas durante un largo tiempo, estas perseveran hasta que la onda llega a la descarga, lo que provoca una lenta disminución del porcentaje de sólidos en la descarga hasta tender asintóticamente al estado estacionario (Figuras 41 y 42) .

²¹ Sin embargo, este comportamiento podría ocurrir también ante modificaciones muy grandes en el set-point.

²² Entendido esto como un tiempo mayor al de propagación de las perturbaciones en la zona de sedimentación.

- ii) Desde la descarga: correspondiente al caso en que u_M aumenta su valor, no se alcanza el valor estacionario en el flujo de descarga en un tiempo corto, el inventario crece sostenidamente en el tiempo, durante este período la concentración en la zona de sedimento crece lentamente hasta alcanzar la cama de sedimento, obligando al controlador a incrementar lentamente el valor del caudal de descarga conforme las nuevas concentraciones van llegando, comportamiento que se sostiene en el tiempo y converge asintóticamente al estado estacionario (Figuras 43 y 44).

En cierto sentido, y con las debidas limitaciones, puede pensarse que la dinámica de un sistema ante perturbaciones en la alimentación está gobernada por los falsos estados estacionarios de primera especie en el corto plazo y por falsos estacionarios de segunda especie en el largo plazo.

El gráfico de la función de flujo límite y el punto de alimentación es un test importante para detectar falsos estados estacionarios de primera especie y falsos estacionarios de segunda especie que se propaguen desde la descarga, en efecto, para que el sistema esté en estado estacionario, el punto de alimentación debe estar ubicado sobre el gráfico de la función de flujo límite durante un tiempo mayor a los retardos promedio en las condiciones de operación, es importante mencionar que corresponde a una condición necesaria, pero no suficiente.

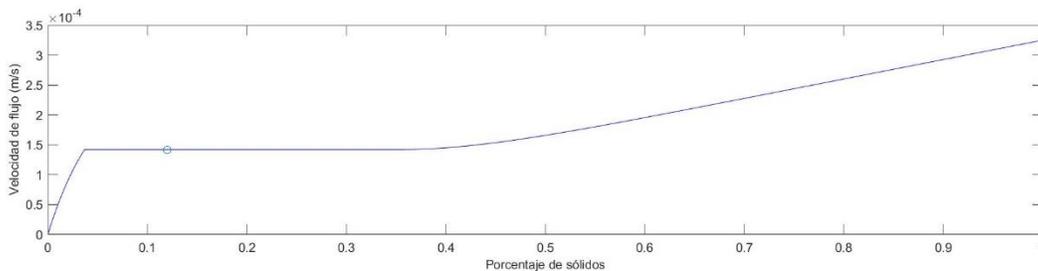


Figura 19 Función de flujo límite y punto de alimentación para un estado estacionario.

En este sentido, la observación de un solo gráfico no es suficiente para asegurar un estado estacionario, la observación de las simulaciones permite decir que la observación simultánea de los gráficos de cama de sedimento, inventario, caudal de descarga y función de flujo límite permiten decidir si el sistema está realmente en el estado estacionario.

Las especificaciones solicitadas al control PI de acción rápida (Figuras 10 y 29) eran respetadas salvo para modificaciones importantes en el set-point, esto se debe principalmente a que el caudal de descarga se reduce hasta alcanzar la saturación mientras la cama de sedimento persigue el set-point,

el comportamiento posterior, está principalmente dominado por falsos estados estacionarios de primera especie.

Para el caso del control PI de acción lenta, ante cambios escalón en la alimentación (Figura 36), se aprecia una inestabilidad, que se produce por la lentitud de la acción del controlador sumada a la relativamente más rápida propagación de los cambios en la concentración conjugada generadas por las propias acciones del controlador, de la respuesta a este controlador puede deducirse la importancia de tener en consideración la dinámica interna del espesador en la sintonización del controlador.

La sintonización de acción ultra-lenta ofrece el mejor panorama para la sintonización industrial de sistemas de control de la cama de sedimento, puesto que no se observan de forma tan evidente estos dos tipos de falsos estados estacionarios, y además logran los objetivos de control ejecutando un menor número de acciones sobre el sistema, sin embargo, en un tiempo mucho mayor.

Manteniendo constante la banda de estabilización, el parámetro adimensional t_s/θ , donde θ corresponde al retardo promedio de las perturbaciones en la concentración conjugada, permite estudiar la estabilidad del sistema de control PI sintonizado con ambos métodos, un problema importante en este sentido es estudiar cuál es el límite de t_s/θ que permite una operación estable ante cambios en la alimentación.

Como θ es una función lineal decreciente de la altura de la cama de sedimento (Ecuaciones 49 y 51), disminuir la altura de la cama permitiría aumentar la zona de estabilidad del sistema, es decir, permitiría utilizar constantes de controlador más bajas.

Las restricciones propuestas para el porcentaje de sólidos en la descarga se mantienen en todo tiempo t en todos los casos de control.

6 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

6.1. Conclusiones y recomendaciones asociados a los resultados teóricos.

Las comparaciones realizadas en el anexo 7.6 para los métodos de determinación de la cama de sedimento muestran que el método III obedece muy bien a la respuesta que tiene la cama de sedimento en el tiempo, mientras el uso del método del inventario muestra falencias importantes, la principal razón para esto es que el método del inventario no tiene en cuenta la existencia ondas de propagación de concentración en el interior del espesador, con todo, el error absoluto es muy pequeño, por lo que en la práctica la diferencia cuantitativa es muy pequeña, la diferencia es esencialmente cualitativa.

Una falencia importante del método utilizado teóricamente para determinar la altura de la cama de sedimento es que se obviaron las fuerzas de arrastre bajo la consideración de que estas son pequeñas frente al empuje que sufre el flotador, si bien resulta una aproximación excelente y simplifica enormemente el problema teórico, obliga a utilizar esferas de radio considerable²³, desarrollar teóricamente una expresión que considere también estas fuerzas permitiría mejorar sustancialmente la fiabilidad del método y determinar parámetros interesantes como la densidad o el radio que debe tener el flotador para tener una medición óptima en ciertas condiciones de operación.

Las simulaciones en lazo abierto resultaron en principalmente tres conclusiones fundamentales que como se mostró es de mucha utilidad en el trabajo de control:

- 1) La existencia de un retardo entre la ocurrencia de una perturbación en la alimentación y la emergencia de respuestas en la cama de sedimento, y la no existencia de un retardo para la respuesta ante un cambio en el caudal de descarga.
- 2) Un comportamiento lineal de la cama de sedimento posterior a la ocurrencia y propagación de una perturbación (dentro de ciertos límites especificados anteriormente).
- 3) Una alteración en el caudal de descarga genera una alteración en la concentración conjugada que se propaga desde el punto de alimentación.

Como se mostró, estos fenómenos pueden cuantificarse mediante expresiones simples que los relacionan con las condiciones de operación y las funciones características, en este sentido, resultan las siguientes dos posibilidades:

²³ Esto con la finalidad de que las fuerzas de empuje sean de mucho mayor magnitud que las de arrastre.

- 1) Caracterizada la pulpa, predecir el comportamiento dinámico en base a estas expresiones simplificando la sintonización y la matematización del control ante pequeñas perturbaciones.
- 2) Utilizar la información dinámica y los fallos de las predicciones para estimar cambios en las funciones de flujo que caracterizan a la suspensión.

Se ofrecen a lo largo del anexos 7.8 algunos ejemplos de aplicación de estas ideas, por ejemplo se correlacionan (bajo importantes limitaciones) las variables del proceso con algunas de las constantes del sistema dinámico, ambas opciones están interrelacionadas y aparecen como posibilidades de desarrollo posterior, por ejemplo, permiten simplificar enormemente el trabajo de sistemas de control predictivo como el sugerido por Aldo Cipriano en [14], incluyendo la posibilidad de utilizar un control predictivo-correctivo sujeto a restricciones.

El procedimiento de sintonización de acción rápida (Ver anexo 7.8.1) permite determinar adecuadamente las constantes de controladores PI con pequeños tiempos de estabilización, sin embargo, el uso de este procedimiento de sintonización para tiempos de estabilización mayores al retardo del sistema es peligroso, pudiendo aparecer inestabilidades como es el caso de las simulaciones de acción lenta (Figura 36).

Por otro lado, en el dominio de los tiempos de estabilización mayores al tiempo de propagación de las perturbaciones se recomienda utilizar la sintonización de acción ultra-lenta, la aplicación de este método de sintonización para tiempos de estabilización pequeños también ofrece buenos resultados, manteniéndose el mismo comportamiento cualitativo de las respuestas de la acción rápida con la aparición de ambas clases de falsos estados estacionarios, en este sentido la sintonización de acción lenta es más segura que la de acción rápida, sin embargo, la acción rápida cumple de mejor manera las solicitudes.

La emergencia de inestabilidades para el controlador de acción lenta, es una de las consecuencias más llamativas de la dinámica interna del espesador, y habla de la importancia de tener en consideración el parámetro t_s/θ a la hora de sintonizar un controlador.

El efecto del parámetro de sobrepaso no fue estudiado en este trabajo, sin embargo, es posible predecir su efecto en base al conocimiento que se tiene del efecto que esta variable tiene sobre un sistema de segundo orden general, la ecuación (176) muestra que el sobrepaso determina al factor de amortiguamiento, mientras la ecuación (177) muestra el efecto del factor del factor de amortiguamiento sobre la frecuencia de natural, indica que menores sobrepasos acercan el factor de

amortiguamiento a 1, lo que a su vez vuelve lenta la respuesta, es decir aumentar el sobrepaso vuelve rápida la respuesta y disminuir el sobrepaso, la vuelve más lenta.

Es importante tener en consideración que θ es también una función de la operación, pues depende linealmente de la altura de la cama de sedimento, así, constantes de controlador que generen comportamientos resonantes para una altura de cama de sedimento, podrían no hacerlo para una altura menor pues darían al controlador el tiempo que necesita para estabilizar el caudal de descarga.

Las simulaciones de los sistemas de control entregan un panorama positivo, bajo las restricciones impuestas, en muchas ocasiones es posible controlar la cama de sedimento, los casos en que no es posible, ocurren sólo en condiciones extremas, o solicitudes muy restrictivas que no corresponden al caso de estudio en este trabajo.

Siempre que se cumpla con $Q_{min} < Q_{est} < Q_{max}$ es posible utilizar los resultados de este trabajo y plantear un sistema de control apropiado, además la forma en que se define la cama de sedimento permite relajar bastante las restricciones impuestas, y trabajar en condiciones fuera de la operación óptima.

El límite operacional que impone un porcentaje de sólidos máximo en la descarga, aparece como un límite importante para asegurar la estabilidad operacional, sin embargo, hay que considerar que esta no es la única variable asociada a la estabilidad en la operación, y otras condiciones podrían emerger de considerar otras restricciones, además la condición considerada requiere de la medición de u_D , un problema no menor experimentalmente, es importante imponer un límite tal vez más restrictivo pero exclusivamente basado en la medición de las variables de alimentación, operación y la caracterización del material.

El control de inventario es posible mediante el control de la altura de la cama de sedimento, este procedimiento puede realizarse mediante el cambio en el set-point de la altura de la cama de sedimento, así, dado un inventario de sólidos deseado, las variables de alimentación, y la caracterización de la pulpa, entendida como densidad y función de flujo batch, es posible calcular el set-point que se impondrá al sistema de control mediante la ecuación:

$$\frac{M_s^d}{\rho_s A} = (H - z_{sb}^{sp})u_m + z_{sb}^{sp}u_M \quad (81)$$

Donde M_s^d es el inventario de sólidos deseado, y z_{sb}^{sp} es el set-point a ingresar al control de la cama de sedimento, los parámetros u_m y u_M pueden ser determinados en base a las condiciones de la

alimentación. Controlar el inventario mediante este método tiene la ventaja de que la cama de sedimento se mantiene controlada mientras el inventario alcanza el valor deseado, pero posee la desventaja de que el inventario puede tener comportamientos complejos y la respuesta dista de ser óptima desde la perspectiva del inventario.

Una aclaración importante es que en este trabajo no se ha mostrado de ninguna forma que el control de la cama de sedimento sea mejor que el control de inventario para la estabilidad operacional del sistema, esto debido a que los efectos de la cama de sedimento y el caudal de descarga sobre la estabilidad no están considerados en este análisis, resta por lo tanto aún realizar un análisis comparativo entre ambas opciones y ponderar qué estrategia de control es más adecuada a los fines de la operación, sin embargo la simpleza de determinar la cama de sedimento mediante el método del inventario parece ser un factor que juega muy a favor de ese método.

Una limitación esencial para la aplicabilidad industrial de las conclusiones de este trabajo es el no uso de floculante, el cual no fue utilizado en este trabajo debido a la gran demanda de material que su uso implicaría (el material floculado no puede reutilizarse en las pruebas como una mera recirculación), sin embargo, esta limitación experimental, no es una limitación teórica, el control de la cama de sedimento es posible también en suspensiones floculadas, donde además, se tiene la unicidad de perfil (La altura de cama de sedimento está determinada por las condiciones operacionales [38], a diferencia del caso no floculado, la no unicidad del caso no floculado se demuestra en el anexo 7.2.2.9).

Si se considera el uso de floculante, es posible asegurar la existencia de una cama de sedimento bien determinada en base a los parámetros de operación y la caracterización del material, [38] en claro contraste con el caso no floculado, donde la altura de cama de sedimento aparece como un parámetro independiente [7], así, la estrategia de control de cama de sedimento adecuada diferirá sensiblemente en el caso floculado.

Los efectos de la floculación sobre la compresibilidad del sedimento se manifiestan por sobre un porcentaje de sólidos llamado porcentaje de sólidos crítico que aparece sobre la discontinuidad, en otras palabras, resultados como el retardo en la respuesta dinámica de la cama de sedimento, o los efectos de las modificaciones en la alimentación o caudal de descarga sobre la concentración conjugada aparecerán inalterados, con el añadido del efecto de la dosificación de floculante sobre la función de flujo batch, sin embargo, la forma en que crece la altura de la cama de sedimento ante perturbaciones, requiere de un estudio distinto.

El método utilizado para sintonizar el controlador PI, sólo tuvo en consideración lograr respuestas que cumplan ciertas especificaciones para la dinámica de la cama de sedimento ante cambios en el set-point, sin embargo, los resultados para el controlador sintonizado mediante el método de acción rápida, muestran que también es deseable lograr los objetivos de control realizando un esfuerzo mínimo²⁴.

La solución planteada para resolver este problema consistió en el uso de una saturación que limitaba en cada instante las acciones controlador a fin de no realizar acciones abruptas entre un instante y otro²⁵, sin embargo, resulta deseable que este problema sea solucionado de manera inherente considerando también el esfuerzo durante la sintonización, la minimización de un funcional que pondere el error cuadrático y el esfuerzo asociado a una estrategia de control para alcanzar un objetivo determinado.

Otro objetivo deseable que no se consideró en la sintonización corresponde al sobrepaso del sistema ante perturbaciones en la alimentación, en el anexo 7.2.2.6 se muestra una simulación que ilustra esta necesidad.

El estudio de los *falsos estados estacionarios* es de una importancia capital en la determinación de la estabilidad del control de la cama de sedimento, en este trabajo se identificaron dos clases de falsos estados estacionarios, sin embargo, esa clasificación probablemente esté lejos de ser exhaustiva, y sus implicaciones no han sido completamente determinadas.

El uso de aproximaciones de Pade para aproximar el retardo en los modelos simplificados resulta delicado pues cuando los retardos del sistema no son pequeños comparados con las constantes de tiempo del sistema, se necesitan aproximaciones de órdenes elevados, que en muchas ocasiones pueden añadir polos inestables a las funciones de transferencia aproximadas del sistema, aún sin ser el sistema en cuestión inestable.

El autor también recomienda al lector probar otros métodos para obtener soluciones numéricas, la condición CFL aparece como una restricción importante para realizar simulaciones suficientemente largas y de buena calidad, en este sentido, utilizar front-tracking es una excelente opción para simular adecuadamente el comportamiento de la columna de sedimentación, puesto que preserva el

²⁴ Con esto el autor se refiere a realizar un controlador que realice el menor número de alteraciones y lo menos abruptas posibles para lograr los objetivos.

²⁵ Entendido esto como en un corto plazo.

comportamiento de las soluciones al modelo, en [39, 40], Bürger señala esta y otras ventajas del método de front-tracking, y lo aplica precisamente a la sedimentación de suspensiones ideales, la principal desventaja de este método es la dificultad de su implementación computacional, en este sentido, otra opción es la implementación de métodos implícitos, mucho menos limitados que los métodos explícitos.

6.2. Conclusiones y recomendaciones asociados a los resultados experimentales.

La des calibración del sensor desarrollado para el seguimiento óptico²⁶ es un problema importante para el futuro desarrollo de pruebas experimentales, se proponen dos soluciones:

- a) Cambio en el método de seguimiento del flotador: se recomienda utilizar otra clase de sensor que se aproveche de algún otro fenómeno electromagnético, es conocido que tres sensores ubicados en distintas posiciones permiten determinar la posición de un objeto.
- b) Recalibración automática: este procedimiento, puede ser realizado mediante programación clásica analizando caso a caso o bien mediante el entrenamiento de una red neuronal sometida a aprendizaje supervisado manualmente, que reconozca la cama de sedimento y realice la recalibración automáticamente.

Los embancamientos producidos por las características del material, la falta de floculación, la tubería utilizada en la descarga²⁷ y el emplazamiento del flujómetro Coriollis en la descarga²⁸, aparecían constantemente como impedimentos para el desarrollo experimental, o comprometían seriamente la calidad de los datos obtenidos, cambiar las cañerías utilizadas para la descarga del espesador permitiría en principio resolver varios de los problemas que impiden realizar las pruebas necesarias, sin embargo, este cambio de tuberías implicaría un cambio completo en el set-up.

²⁶ Entendido esto como la pérdida del objetivo prefijado.

²⁷ Que consiste en una manguera la cual, ante las presiones producidas por la bomba peristáltica en la descarga, se contraía acentuando el embancamiento.

²⁸ Que debido al diseño del equipo no podía ubicarse verticalmente directamente bajo la descarga del espesador como el manual solicita.

7 ANEXOS.

7.1. Diagramas de flujo importantes.

Debido a la importancia de este problema dentro del desarrollo de este trabajo, se presenta el diagrama de flujo del algoritmo que permite obtener las condiciones que permiten un estado estacionario óptimo, está basado en un método de punto fijo que resuelve la ecuación por casos y luego comprueba si la hipótesis era adecuada.

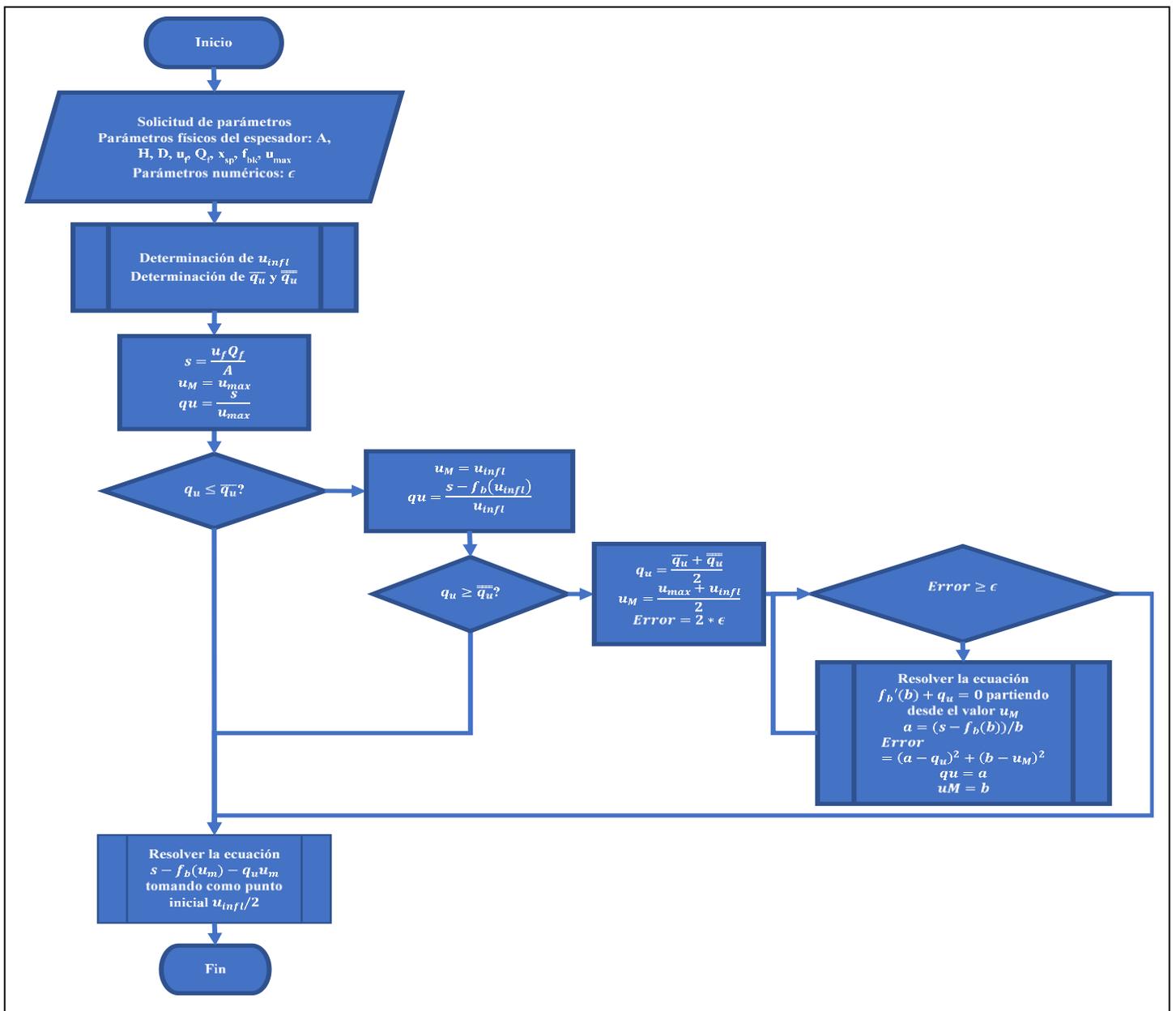


Figura 20 Algoritmo para la determinación de estados estacionarios.

7.2. Simulaciones no incluidas.

Se presentan una serie de simulaciones que fueron de utilidad tanto para el estudio como la generalización de las conclusiones.

7.2.1. Lazo abierto.

7.2.1.1. Cambio negativo en el flujo de descarga.

Se realiza una modificación escalón negativa del -9.5% en el flujo de descarga, es decir de $-1.67 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$:

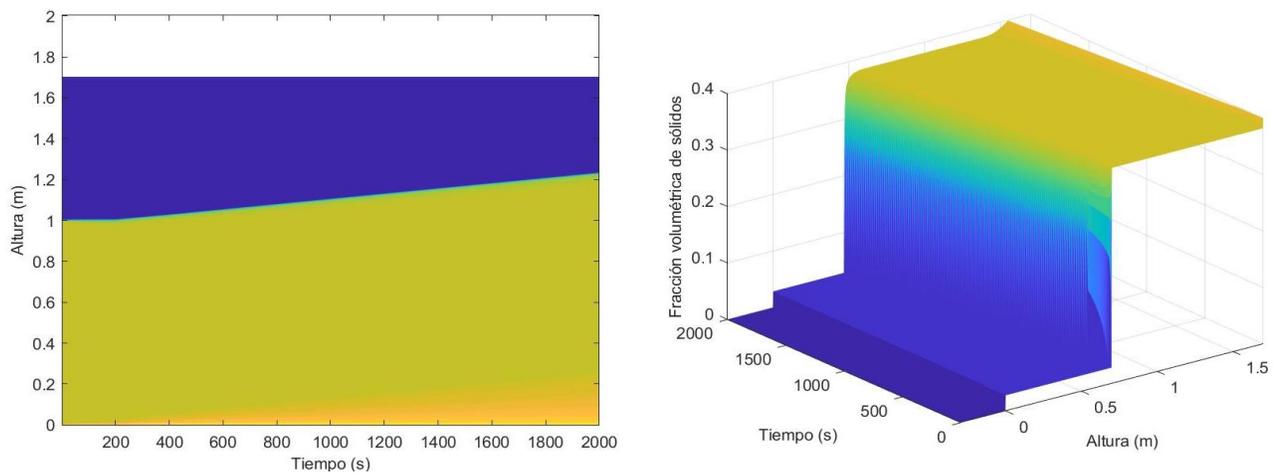


Figura 21 Soluciones a las simulaciones en lazo abierto para el cambio escalón negativo en el flujo de descarga.

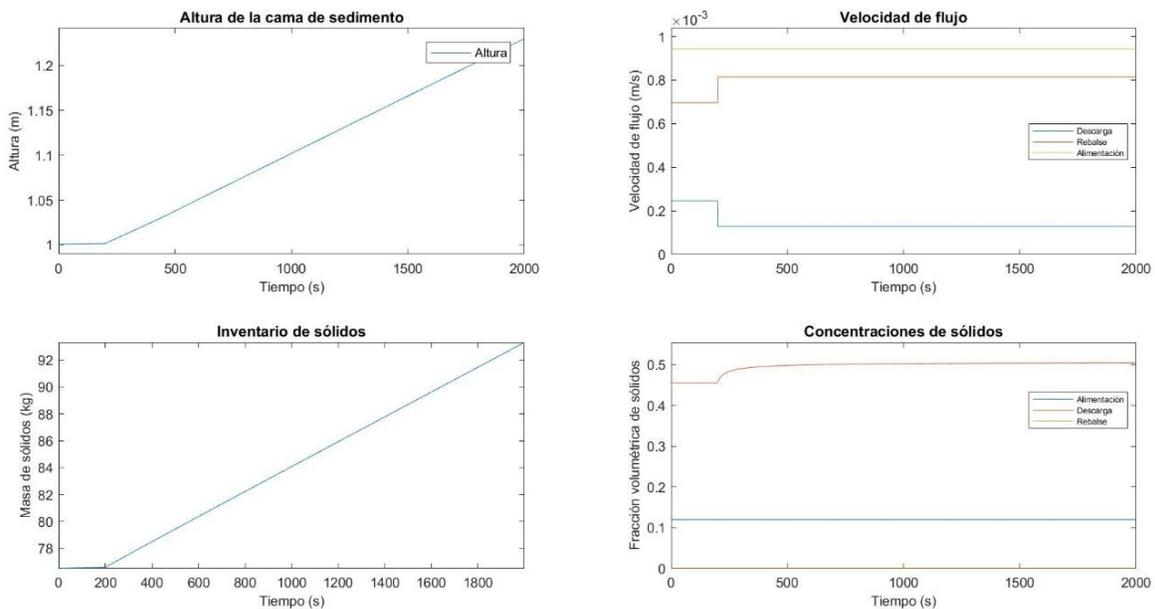


Figura 22 Respuestas dinámicas a cambios escalón negativos en el flujo de descarga.

7.2.1.2. Cambio negativo en el flujo de alimentación.

Se realiza una modificación del -25% en un flujo de alimentación, concretamente de $-1.66 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$ en un tiempo $t = 200\text{s}$:

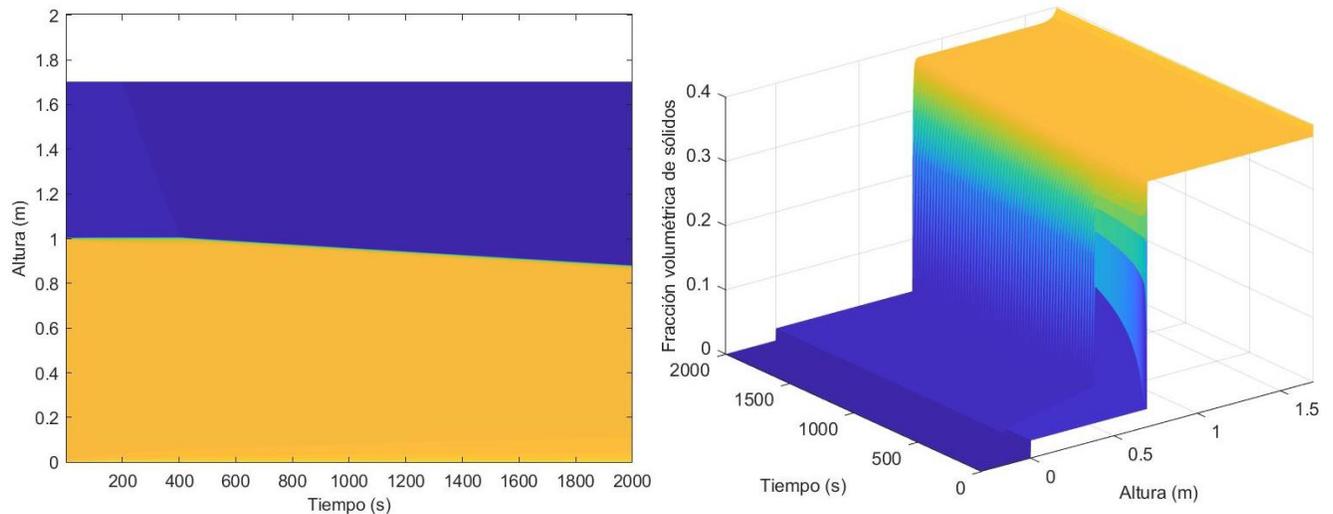


Figura 23 Soluciones a las simulaciones en lazo abierto para el cambio escalón negativo en el flujo de alimentación.

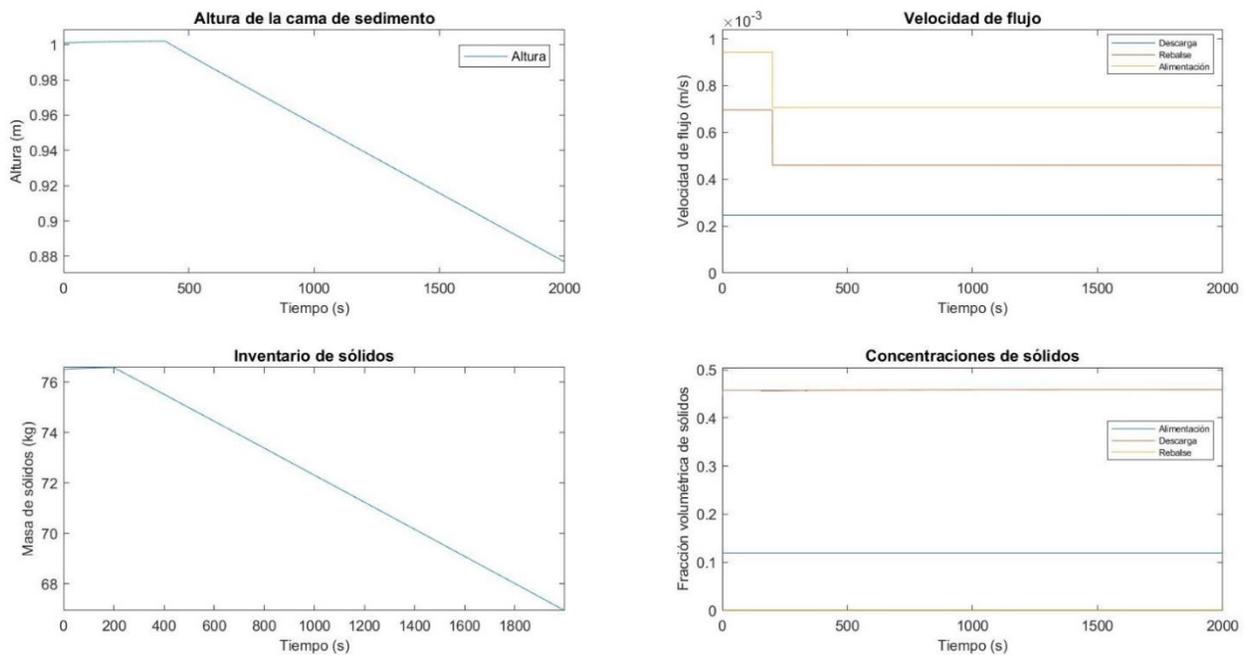


Figura 24 Respuestas dinámicas a cambio escalón negativo en el flujo de alimentación.

7.2.1.3. Cambio positivo en el porcentaje de sólidos en la alimentación.

Se realizan un cambio del 16.7% en la fracción volumétrica de sólidos, concretamente de 0.02 en un tiempo $t = 200s$:

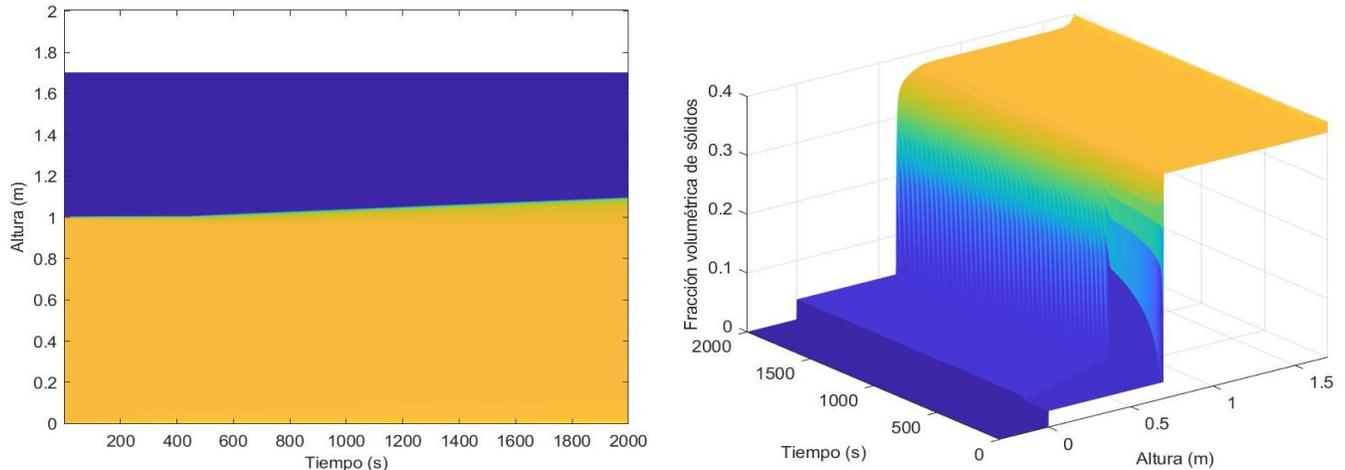


Figura 25 Soluciones de la simulación de lazo abierto para un cambio escalón positivo en el porcentaje de sólidos.

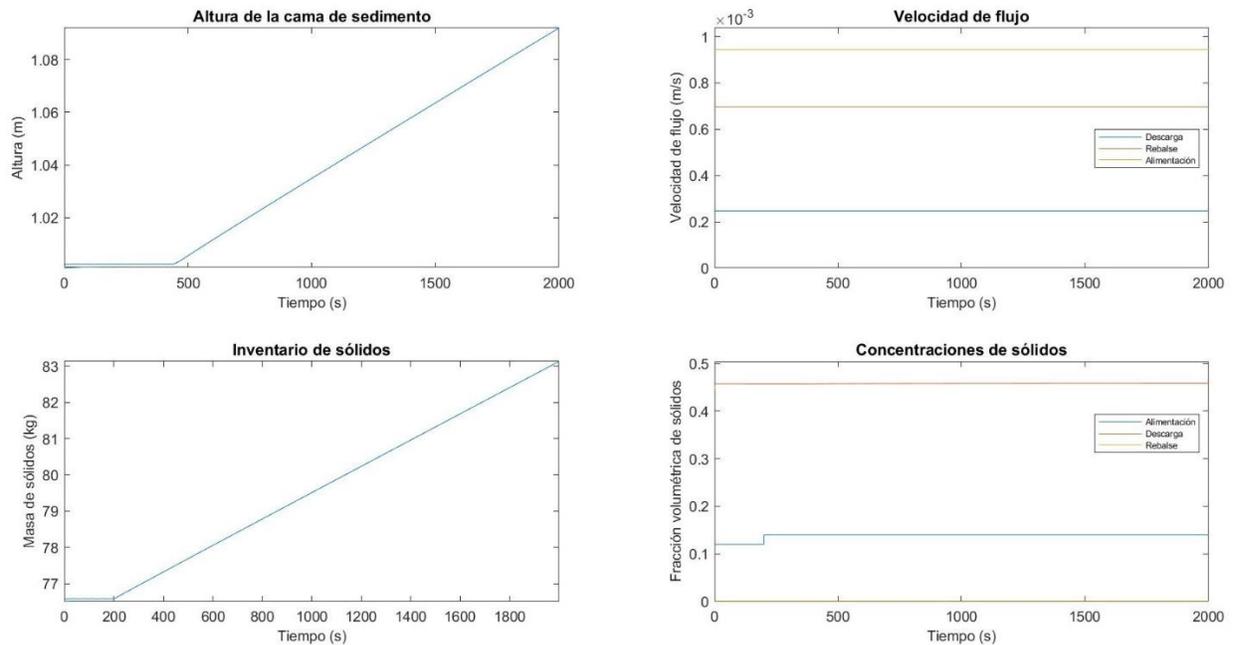


Figura 26 Respuestas dinámicas del sistema ante el cambio escalón positivo en la fracción volumétrica de sólidos.

7.2.1.4. Cambio negativo en el porcentaje de sólidos en la alimentación.

Se realizan un cambio del -16.7% en la fracción volumétrica de sólidos, concretamente de -0.02 en un tiempo $t = 200s$:

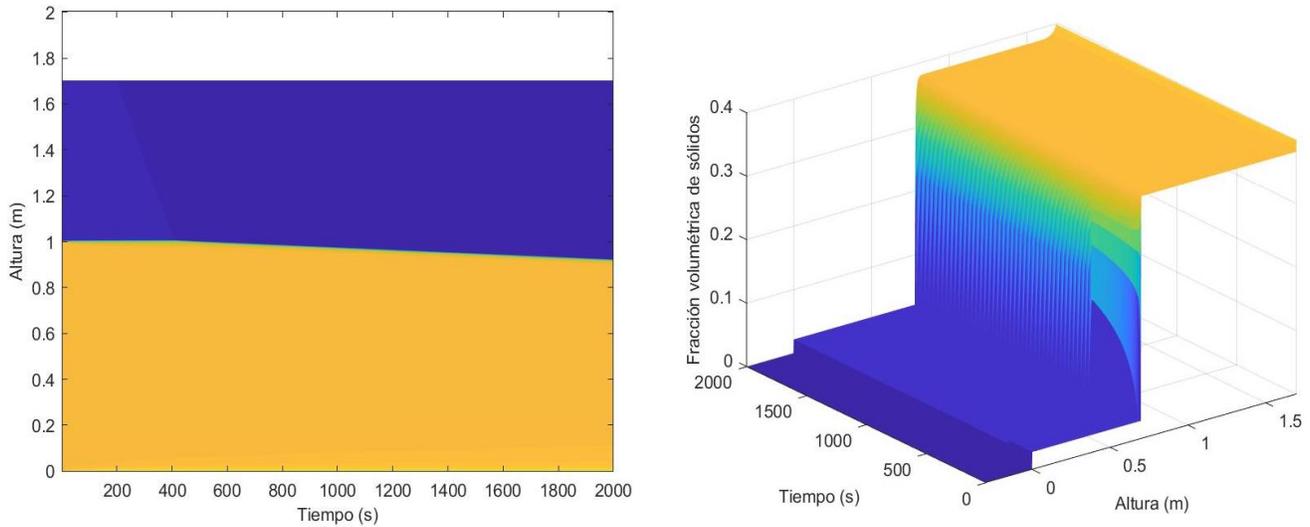


Figura 27 Soluciones de la simulación de lazo abierto para un cambio escalón negativo en el porcentaje de sólidos.

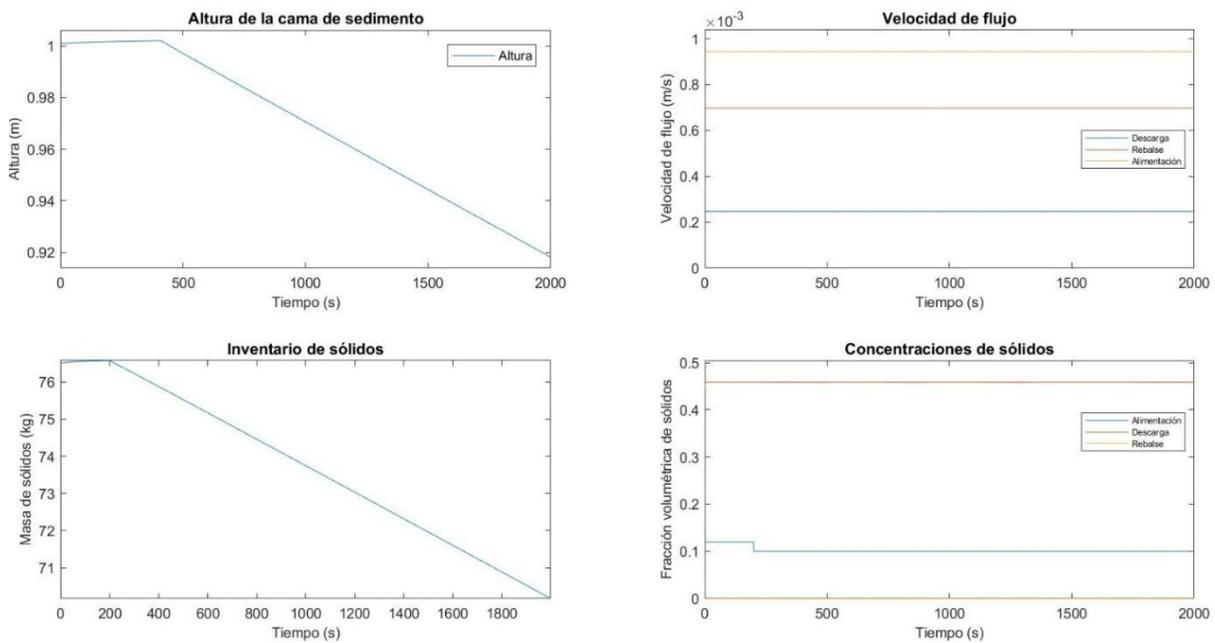


Figura 28 Respuestas dinámicas a cambio escalón negativo en el porcentaje de sólidos de alimentación.

7.2.2. Control PI.

7.2.2.1. Cambio negativo en el set-point para el control de acción rápida.

Se realizan modificaciones en el set-point del -1% , concretamente $-0.01m$, en un tiempo $t = 200s$:

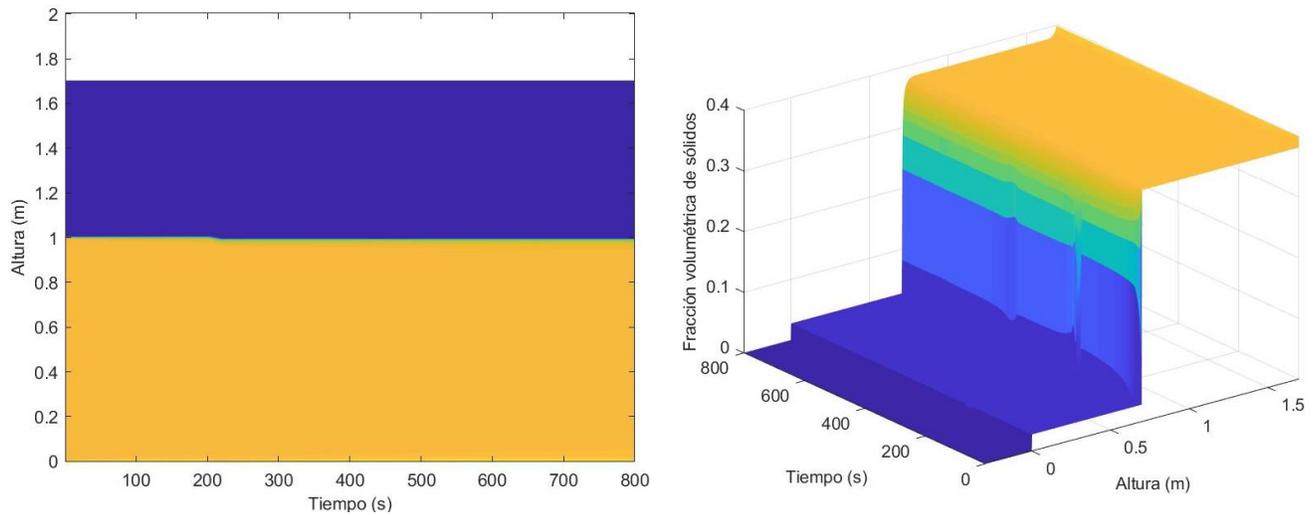


Figura 29 Soluciones para el cambio escalón negativo en el set-point bajo control PI de acción rápida.

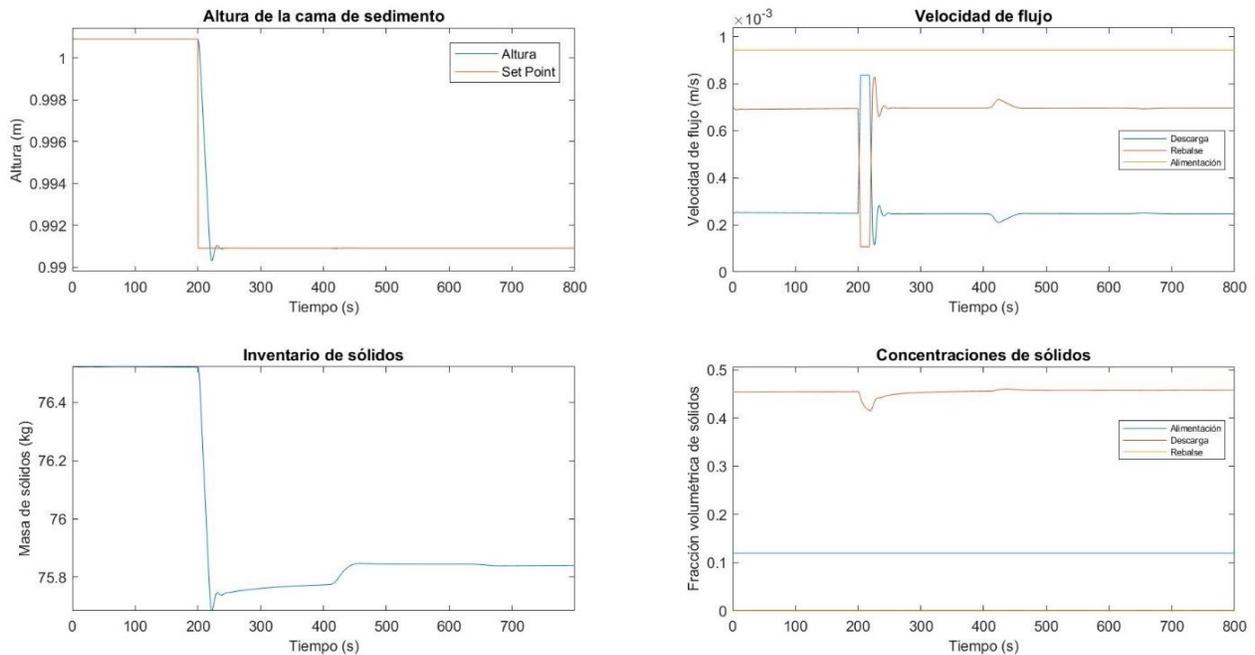


Figura 30 Respuestas dinámicas a un cambio escalón negativo en el set-point.

7.2.2.2. Cambio negativo en la alimentación de sólidos para el control de acción rápida.

Se realizan modificaciones en la alimentación de sólidos del -25% , concretamente de $-2.00 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$ en un tiempo $t = 200\text{s}$.

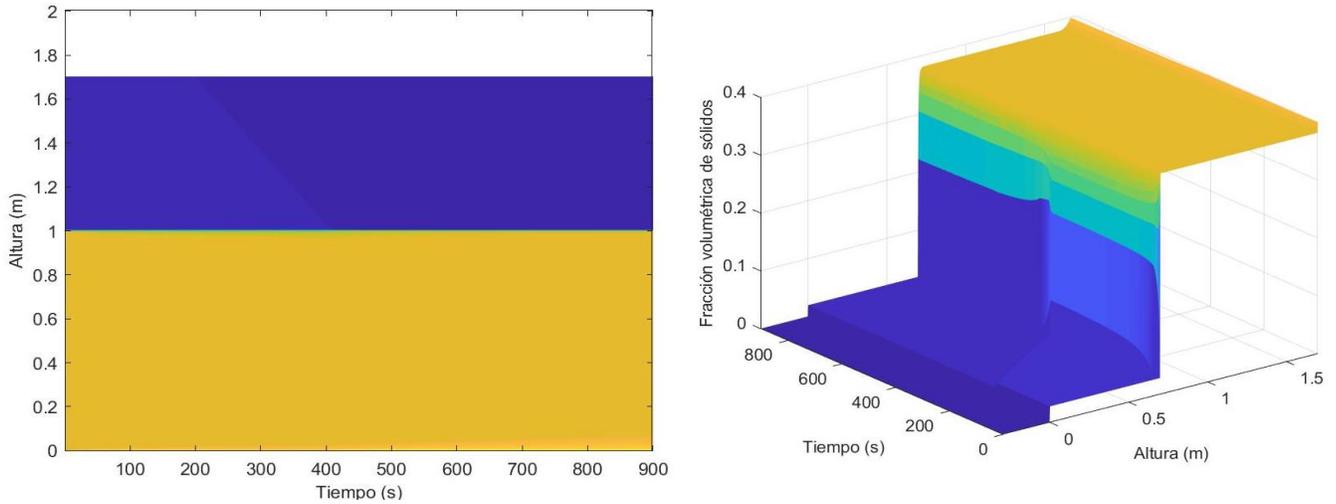


Figura 31 Soluciones para el cambio escalón negativo en el flujo de alimentación bajo control PI.

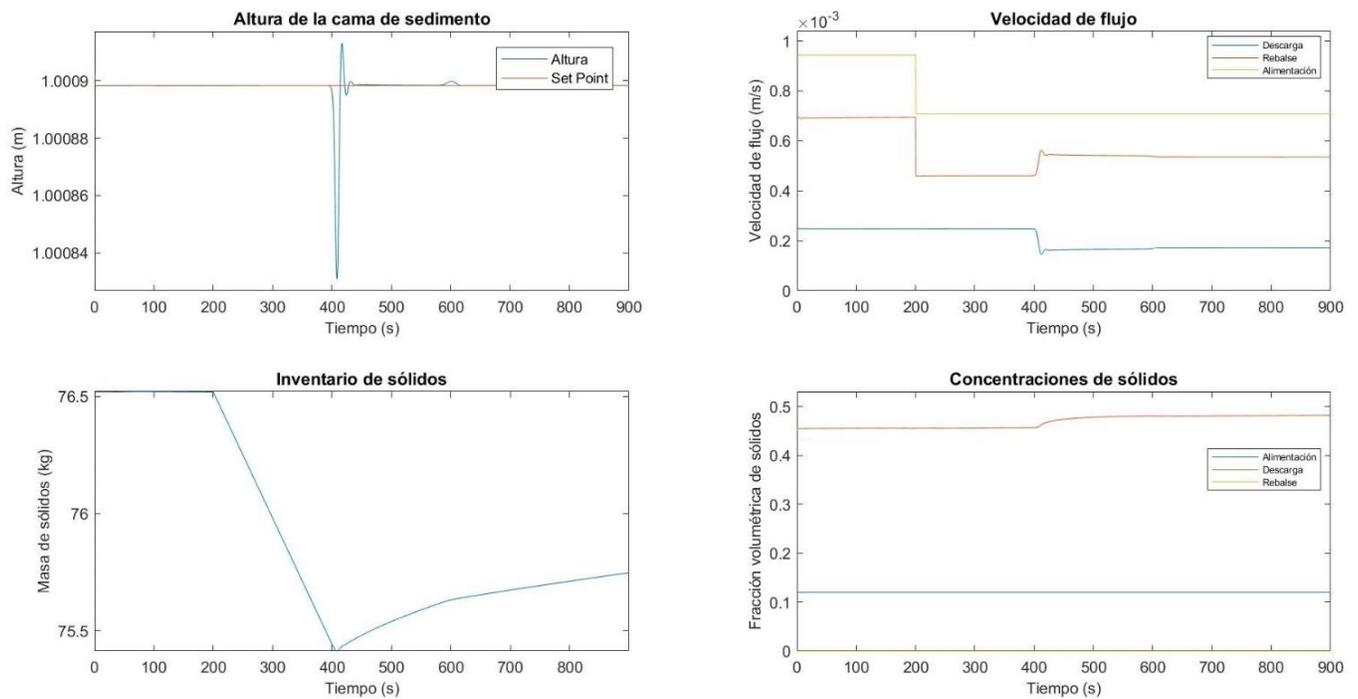


Figura 32 Respuestas dinámicas a un cambio escalón negativo en el flujo de alimentación.

7.2.2.3. Cambio positivo en el set point para el controlador de acción lenta.

Se realiza una modificación del 1% en el set-point de altura de cama de sedimento, concretamente de $0.01m$ en un tiempo $t = 200s$:

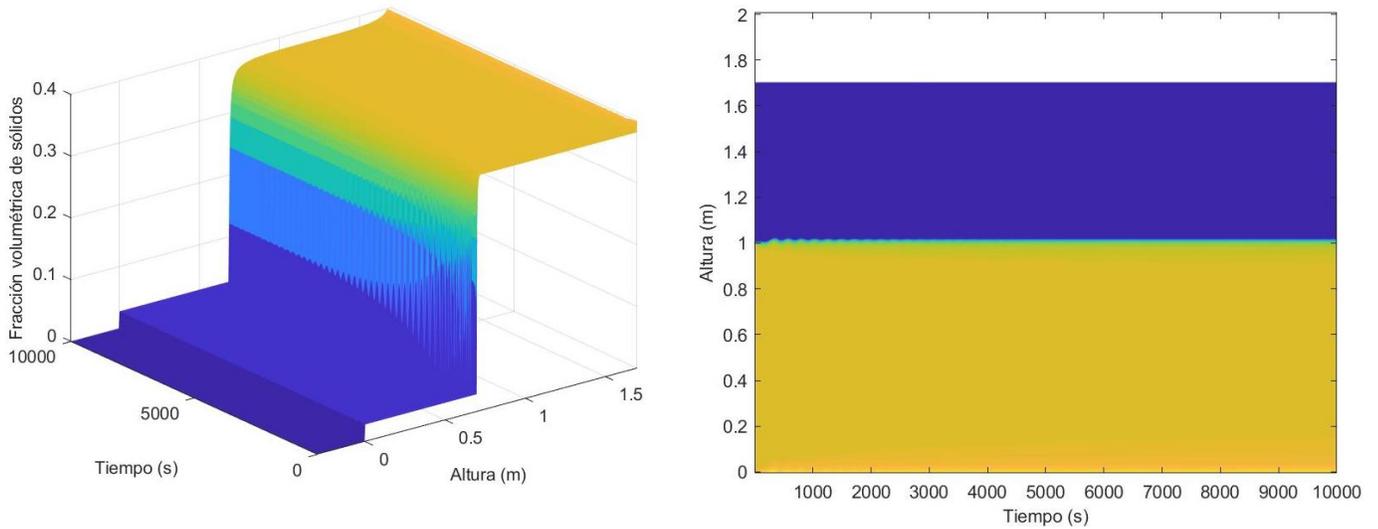


Figura 33 Soluciones para el cambio escalón en el set-point bajo control PI de acción lenta.

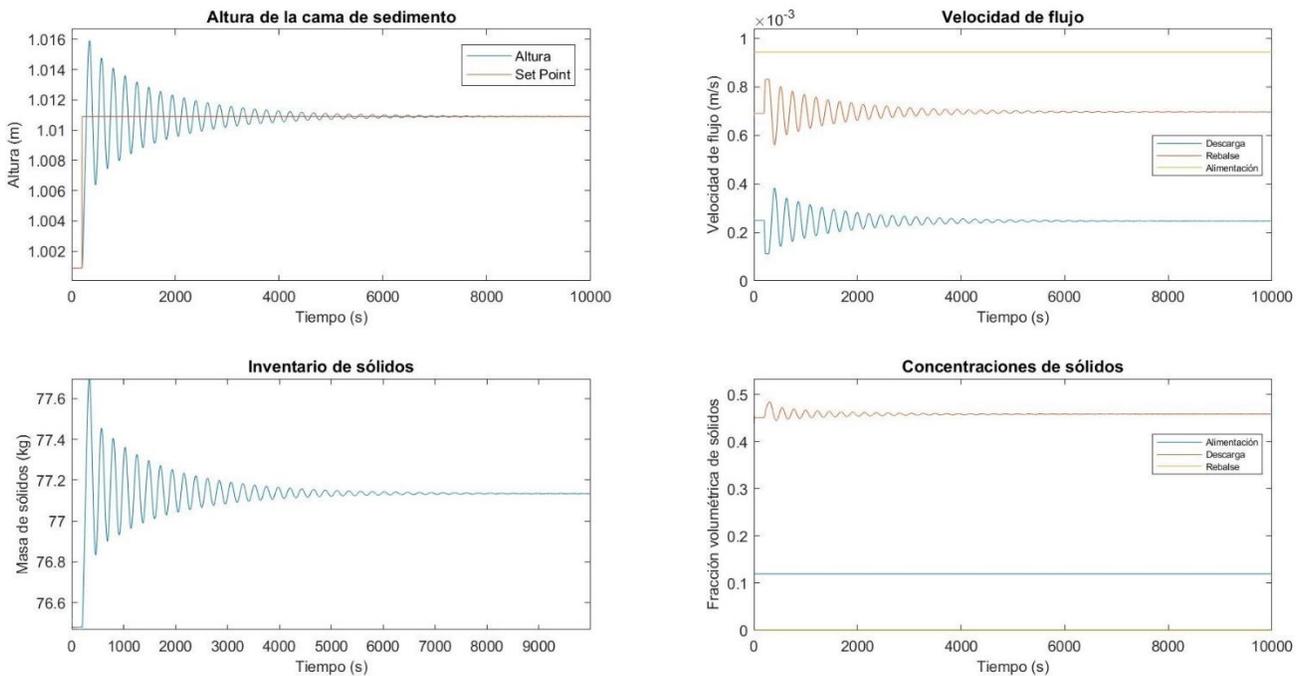


Figura 34 Respuestas dinámicas a un cambio escalón positivo en el set-point bajo control PI de acción lenta.

7.2.2.4. Cambio positivo en la alimentación de sólidos para el controlador de acción lenta.

Se realizan modificaciones en la alimentación de sólidos del 25%, concretamente de $2.0 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$ en un tiempo $t = 200\text{s}$.

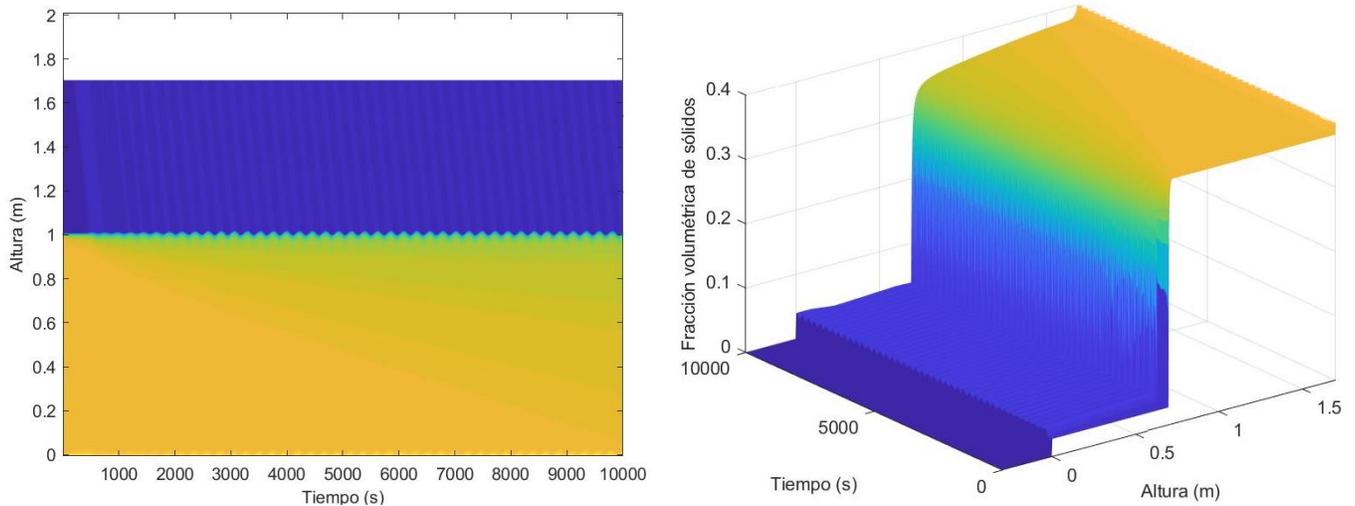


Figura 35 Soluciones para el cambio escalón en la alimentación de sólidos bajo control PI de acción lenta.

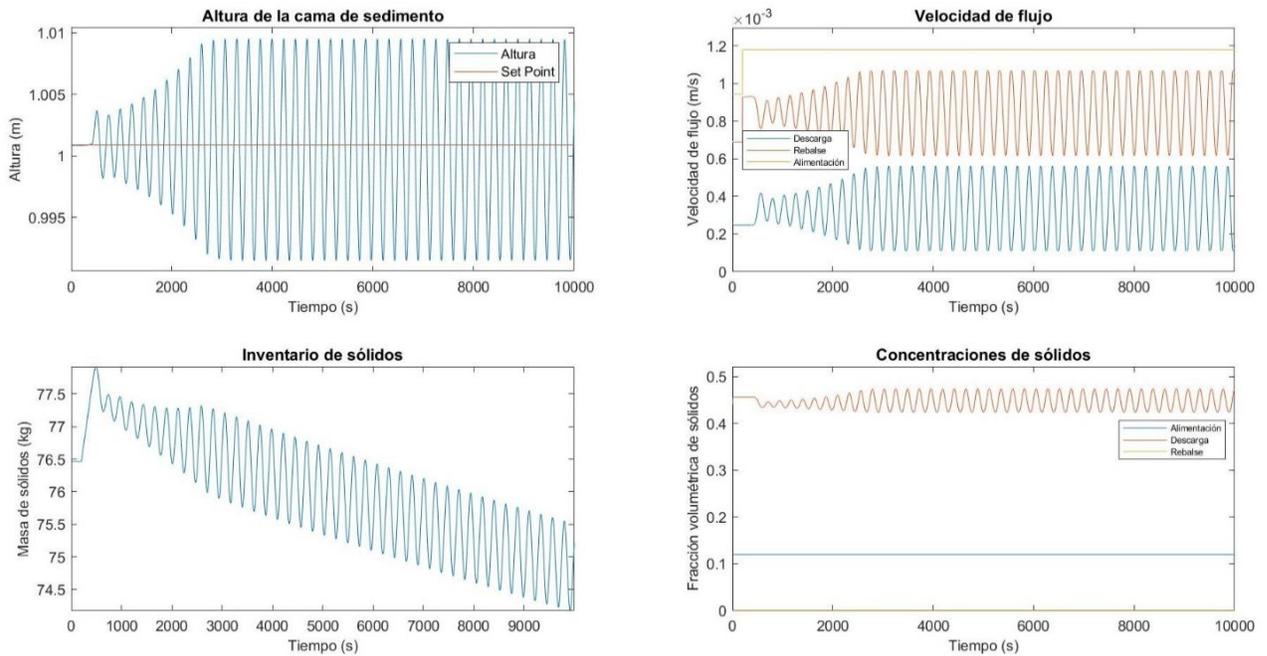


Figura 36 Respuestas dinámicas a un cambio escalón positivo en la alimentación de sólidos bajo control PI de acción lenta.

7.2.2.5. Cambio positivo en el set-point para el controlador de acción ultra-lenta.

Se realiza una modificación del 1% en el set-point de altura de cama de sedimento, concretamente de $0.01m$ en un tiempo $t = 2000s$:

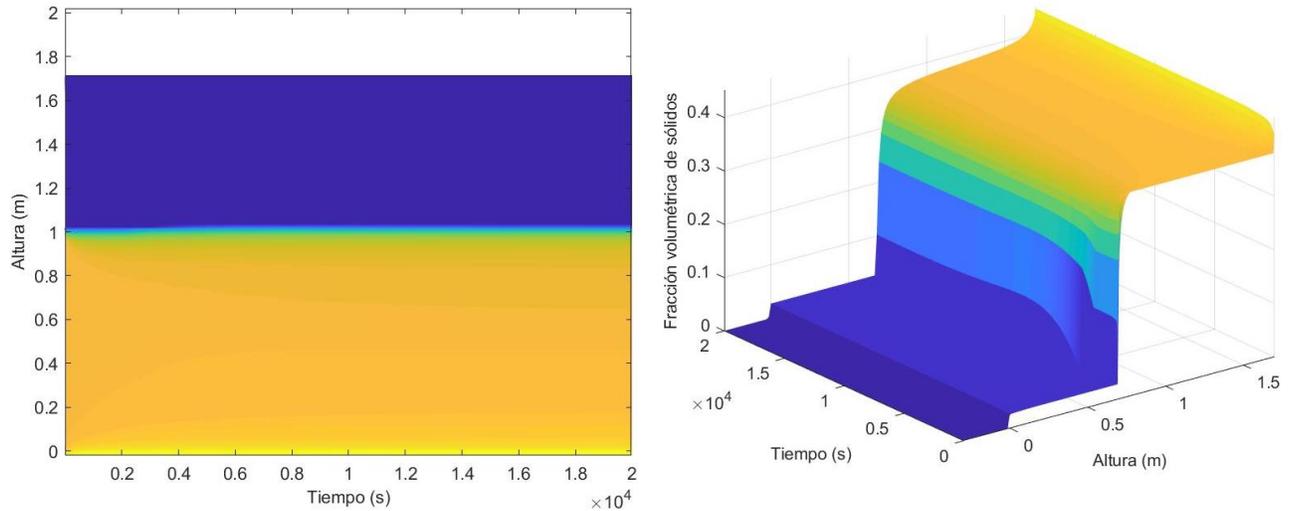


Figura 37 Soluciones para el cambio escalón en el set-point bajo PI de acción ultra lenta.

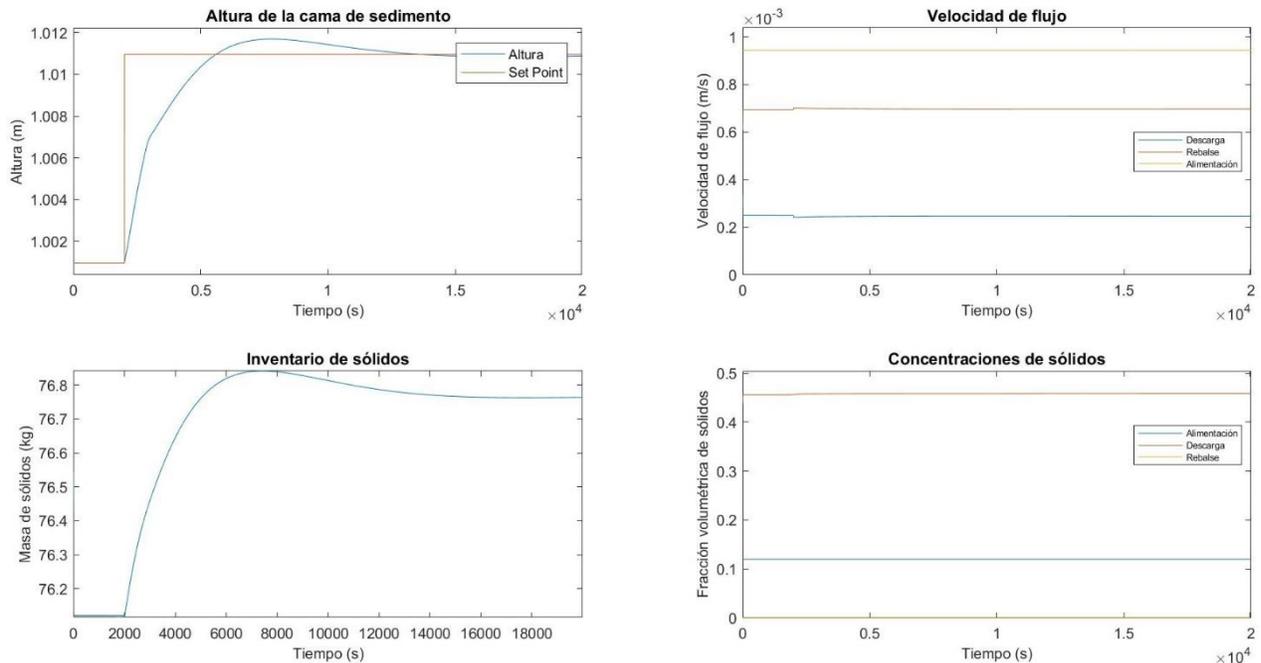


Figura 38 Respuestas dinámicas a un cambio escalón positivo en el set point bajo control PI de acción lenta.

7.2.2.6. Cambio positivo en la alimentación de sólidos para el controlador de acción ultra-lenta.

Se realizan modificaciones en la alimentación de sólidos del 25%, concretamente de $2.0 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$ en un tiempo $t = 2000\text{s}$.

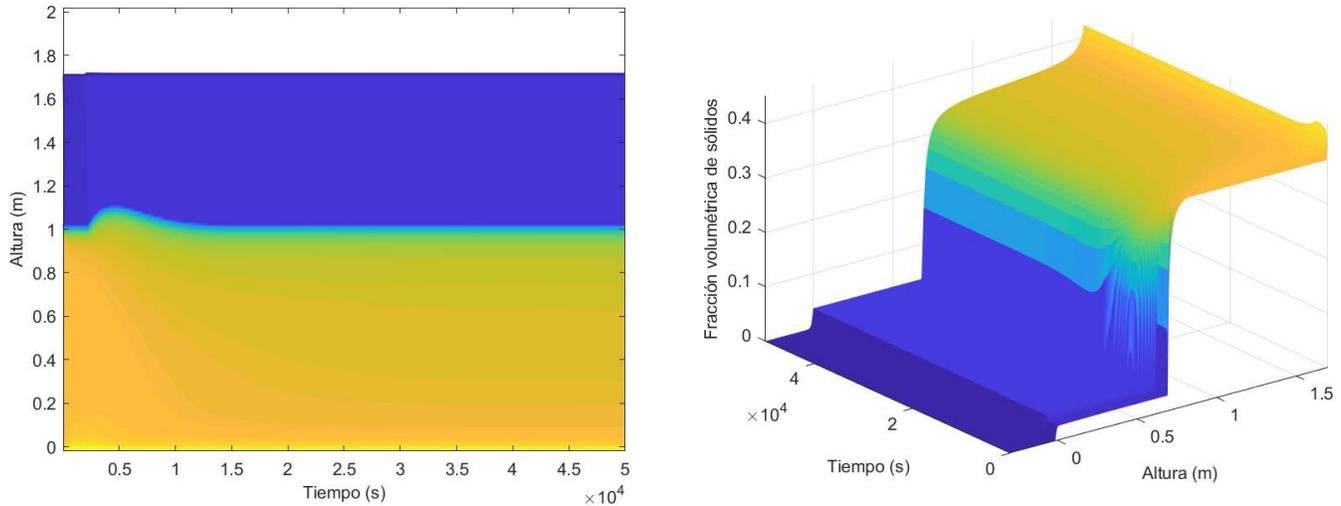


Figura 39 Soluciones para el cambio escalón positivo en la alimentación de sólidos bajo control PI de acción ultra lenta.

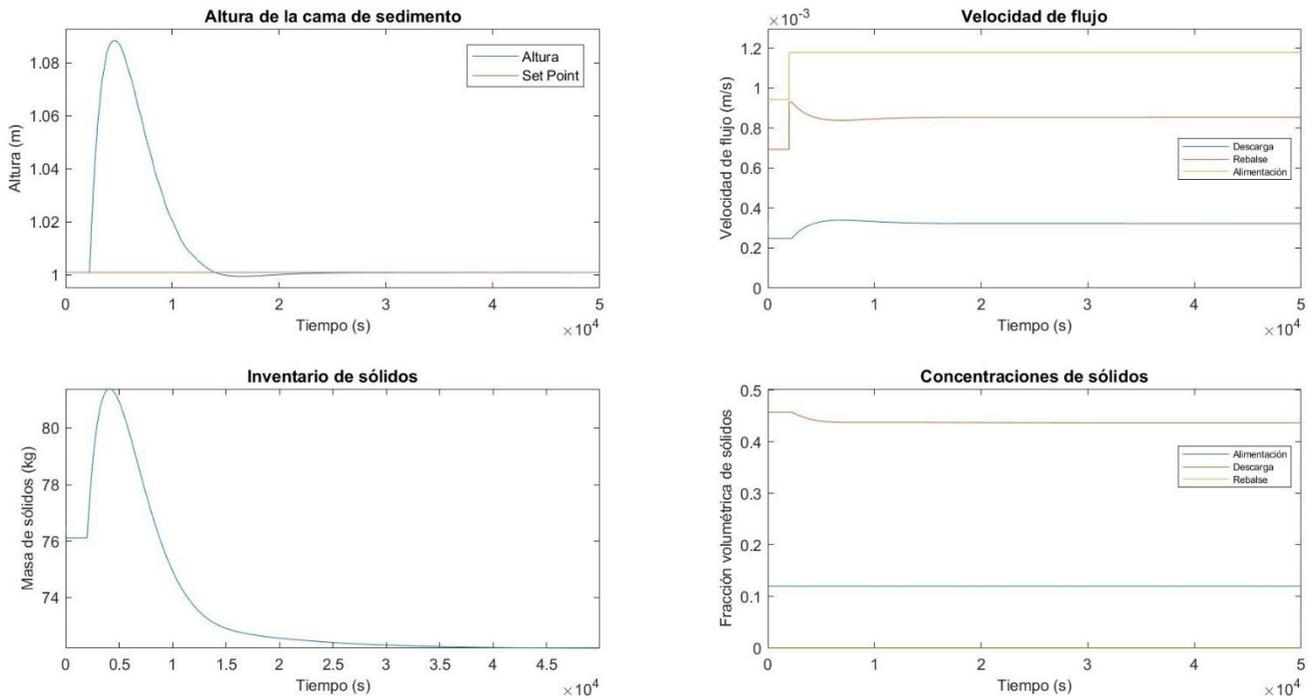


Figura 40 Respuestas dinámicas a un cambio escalón positivo en la alimentación de sólidos bajo control PI de acción ultra lenta.

7.2.2.7. Cambio positivo en la alimentación de sólidos para el controlador de acción rápida (Largo Plazo).

Se realizan modificaciones en la alimentación de sólidos del 25%, concretamente de $2.0 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$ en un tiempo $t = 200\text{s}$, la duración total de la simulación fue de $T = 40000\text{s}$.

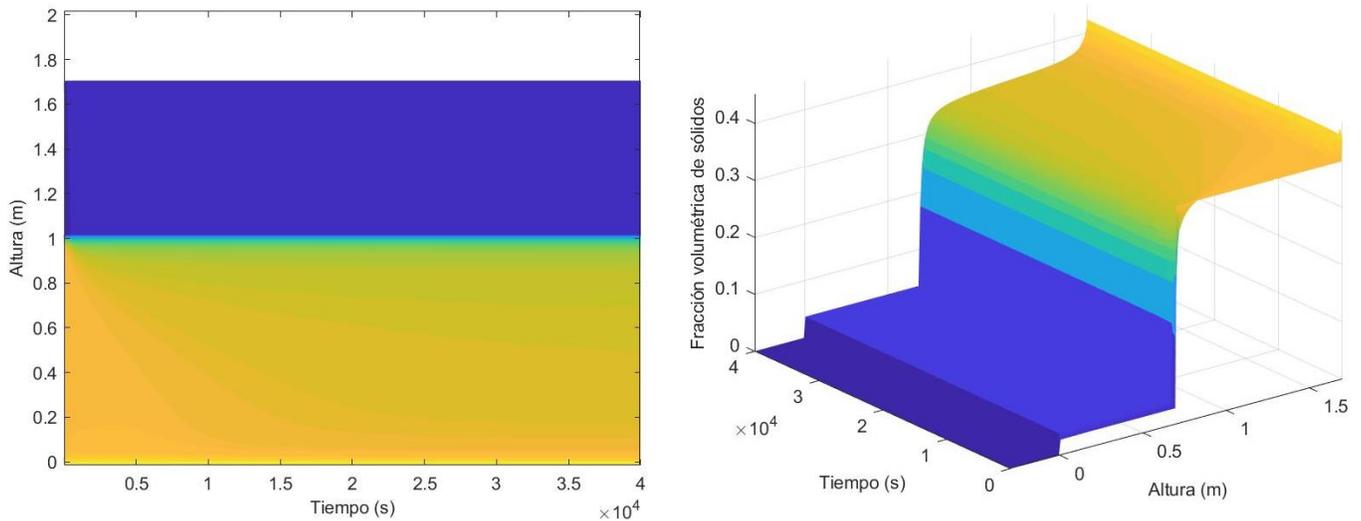


Figura 41 Soluciones para el cambio escalón positivo en la alimentación de sólidos bajo control PI de acción rápida, largo plazo.

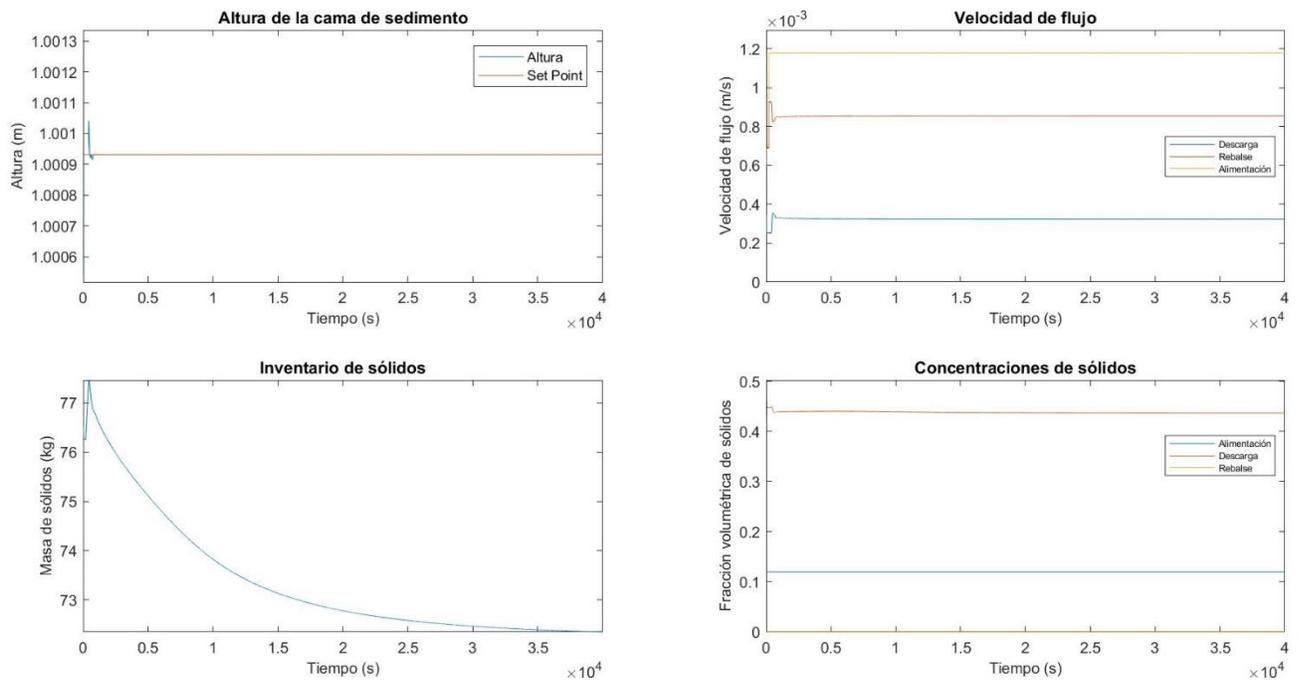


Figura 42 Respuestas dinámicas a un cambio escalón positivo en la alimentación de sólidos bajo control PI de acción rápida, largo plazo.

7.2.2.8. Cambio negativo en la alimentación de sólidos para el controlador de acción rápida (Largo Plazo).

Se realizan modificaciones en la alimentación de sólidos del -25% , concretamente de $-2.00 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$ en un tiempo $t = 200\text{s}$, la duración total de la simulación fue de $T = 40000\text{s}$.

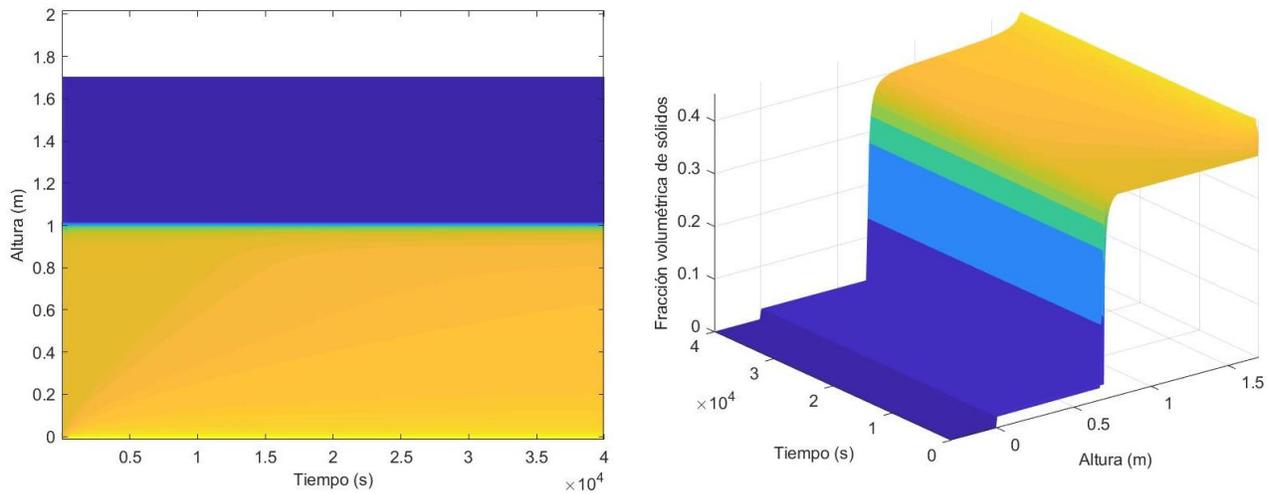


Figura 43 Soluciones para el cambio escalón negativo en la alimentación de sólidos bajo control PI de acción rápida, largo plazo.

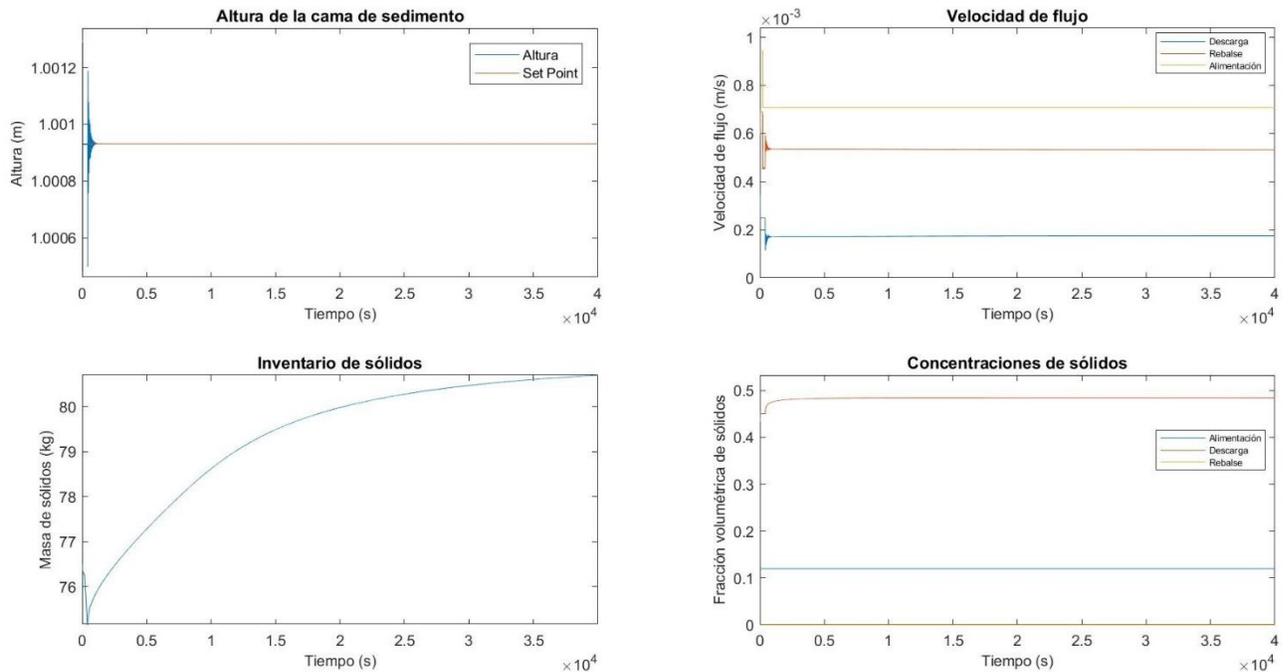


Figura 44 Respuestas dinámicas a un cambio escalón negativo en la alimentación de sólidos bajo control PI de acción rápida, largo plazo.

7.2.2.9. No unicidad de la altura de cama de sedimento.

Se realizan sucesivos cambios en el set point de la altura de cama de sedimento sometidos a un control de acción ultra lenta con constantes dadas por $K_I = 1.16 \times 10^{-6}$ y $K_p = 4.42 \times 10^{-4}$.

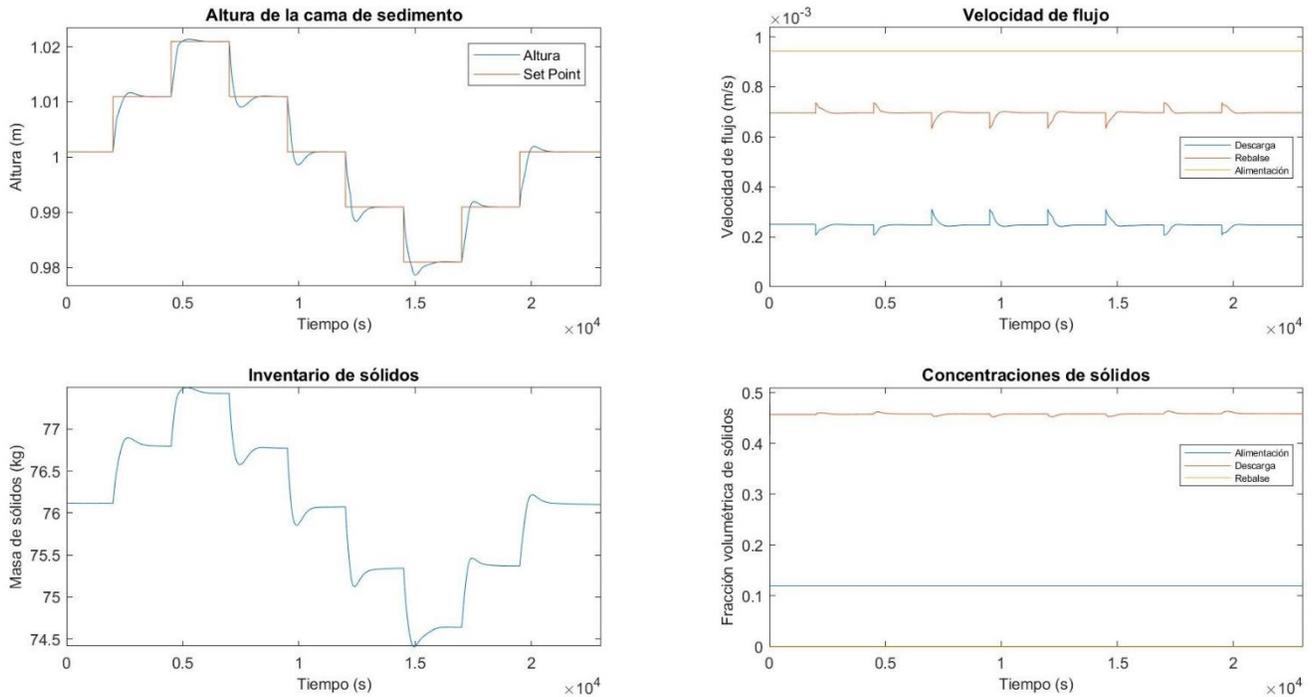


Figura 45 Respuesta dinámica a cambios en el set point de la altura de cama de sedimento bajo control de acción ultra-lenta.

Nótese que tras cada cambio escalón en el set-point, una vez estabilizada la cama de sedimento, el porcentaje de sólidos de la descarga y el caudal de descarga se estabilizan en un valor constante e independiente de la ubicación de la cama de sedimento, es decir, para una alimentación constante, el caudal y el porcentaje de sólidos en la descarga en estado estacionario están prefijados, sin embargo, no la cama de sedimento.

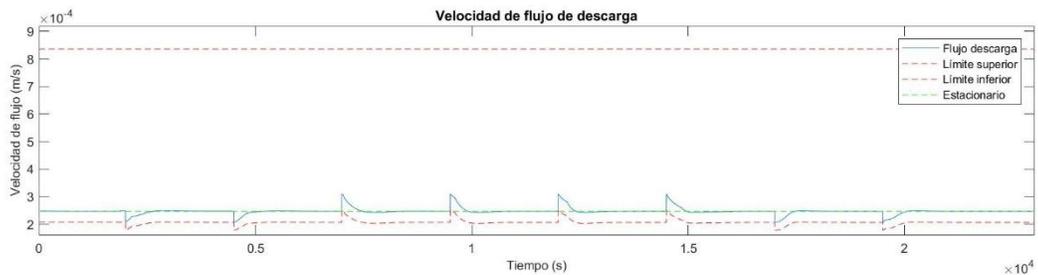


Figura 46 Caudal de descarga, sus límites y su valor estacionario.

7.2.3. Control de lógica difusa.

El diseño de esta estrategia se presenta en el anexo 7.9, una vez definidas las funciones de pertenencia, las reglas de inferencia, y los parámetros de desfusificación los únicos parámetros que quedan por definir son los asociados a la normalización del error y su derivada, los cuales están dados en la siguiente tabla:

Tabla 7 Parámetros controlador de lógica difusa.

Parámetro	Valor
Δh_{ref}	0.05 m
v_{ref}	0.05 m/s
z_{sp}	1.0005 m

Las simulaciones consideradas en esta sección se extendieron por un período de tiempo $T = 1200s$.

7.2.3.1. Respuesta a modificación en el set-point.

Se realizan modificaciones en el setpoint del 1%, concretamente 0.01m, en un tiempo $t = 200s$:

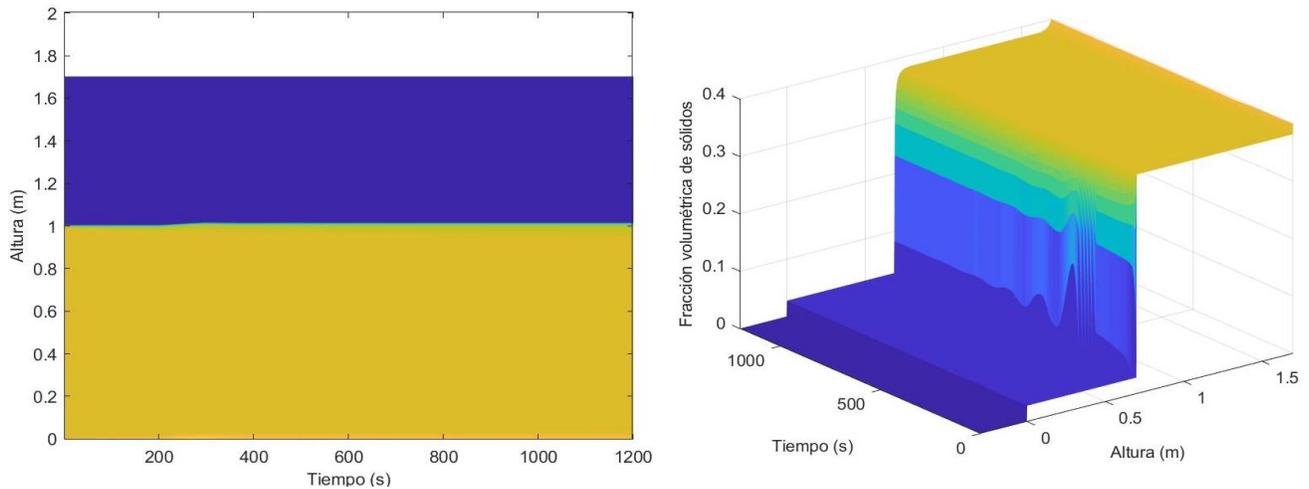


Figura 47 Soluciones de la simulación del lazo de control de lógica difusa para un cambio escalón positivo en el set-point.

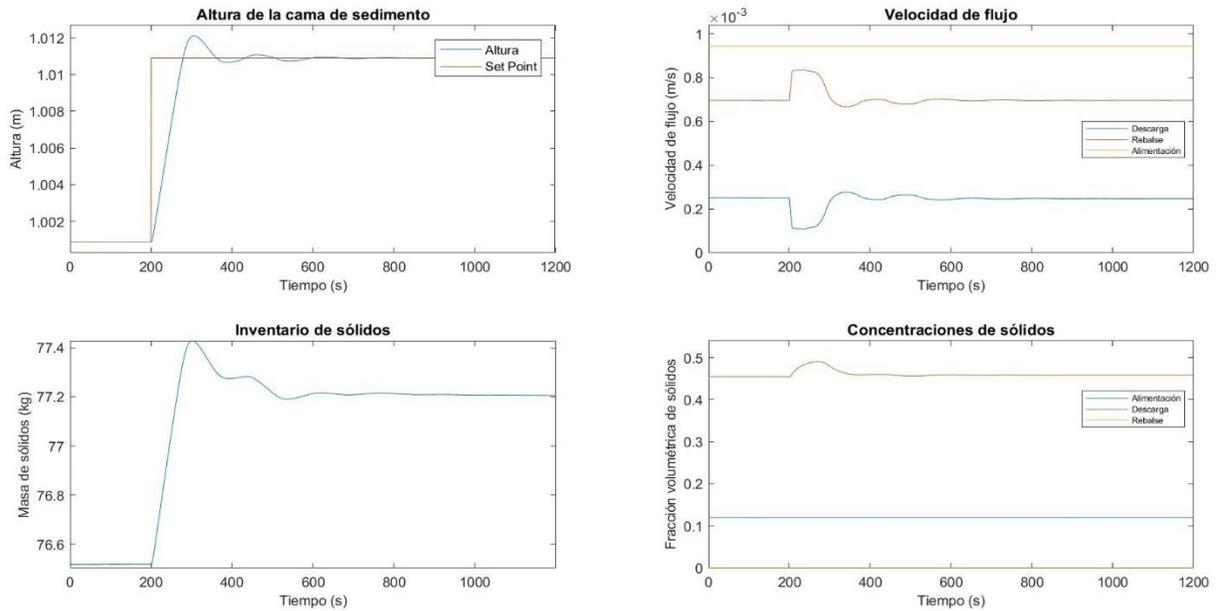


Figura 48 Respuestas dinámicas del sistema ante el cambio escalón positivo de set-point.

La respuesta en cuanto se realiza el cambio en el set-point, es similar a lo observado en el control PI de acción rápida, el caudal de descarga disminuye rápidamente hasta alcanzar la saturación, donde persevera hasta que la cama de sedimento alcanza el set-point, luego, tras un leve sobrepaso, el comportamiento de la cama de sedimento sigue una dinámica equiparable a segundo orden convergiendo al set point sin alteraciones apreciables.

Por su parte el flujo de descarga posee oscilaciones más lentas que el caso del control PI enmascarando el efecto de las modificaciones en la concentración conjugada.

El inventario, la concentración de descarga y el flujo de descarga logran alcanzar el estado estacionario, esto es debido a que, al no haber cambios en la alimentación, las concentraciones u_m y u_M no cambian, y sólo se altera la posición de la cama de sedimento, por lo que, una vez realizadas las acciones de control, no hay ondas de rarefacción importantes propagándose en la zona de sedimento.

7.2.3.2. Respuesta a modificación en la alimentación de sólidos.

Se realizan modificaciones en el flujo de alimentación de sólidos del 25%, concretamente $2.00 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$ en un tiempo $t = 200\text{s}$:

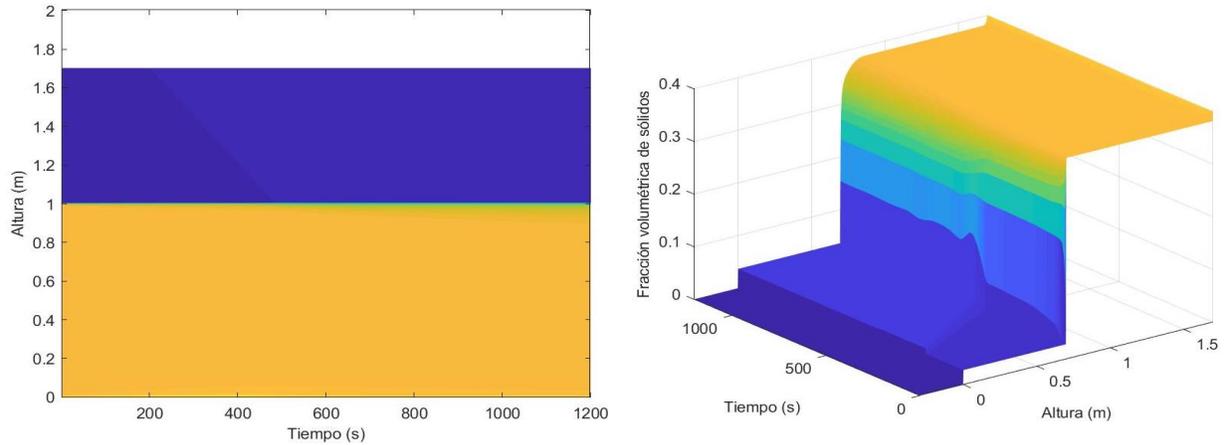


Figura 49 Soluciones de la simulación del lazo de control de lógica difusa para un cambio escalón positivo en la alimentación de sólidos.

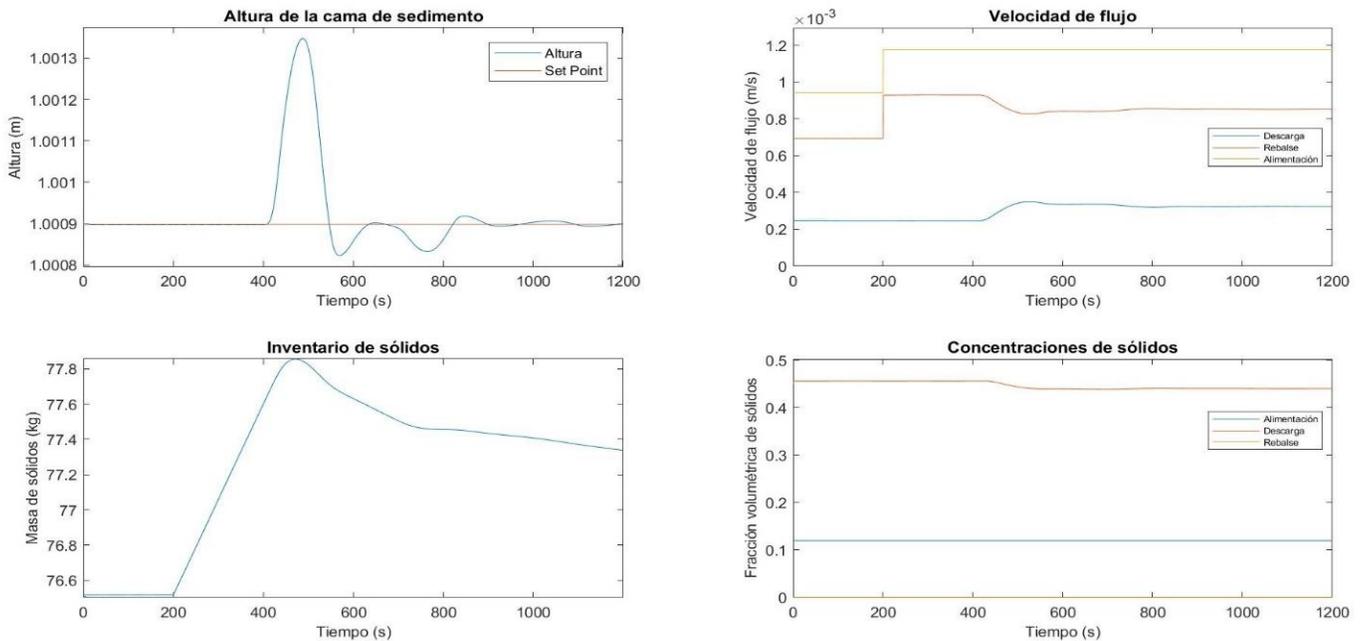


Figura 50 Respuestas dinámicas del sistema ante el cambio escalón positivo en el flujo de alimentación de sólidos.

Tras la propagación de la perturbación, después del segundo 400s, se observa un peak de altura de cama de sedimento, pero acompañado de oscilaciones posteriores, las cuales se ven alteradas por la

llegada de los nuevos valores de la concentración conjugada, lo observado en general responde a las mismas causas que el análogo en control PI, sólo que con una velocidad de respuesta menor.

Se observa un falso estado estacionario de primera especie

7.2.3.3. Cambio negativo en el set-point.

Se realiza un cambio escalón negativo de un -1% en el set-point, concretamente de -0.01m en un tiempo $t=200s$:

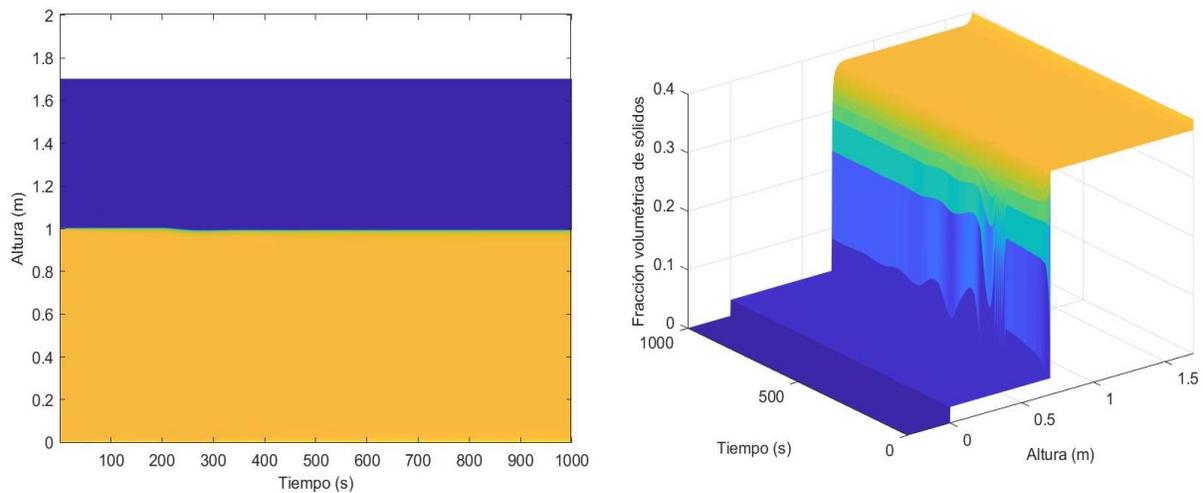


Figura 51 Soluciones para el cambio escalón negativo en el set-point bajo control de lógica difusa.

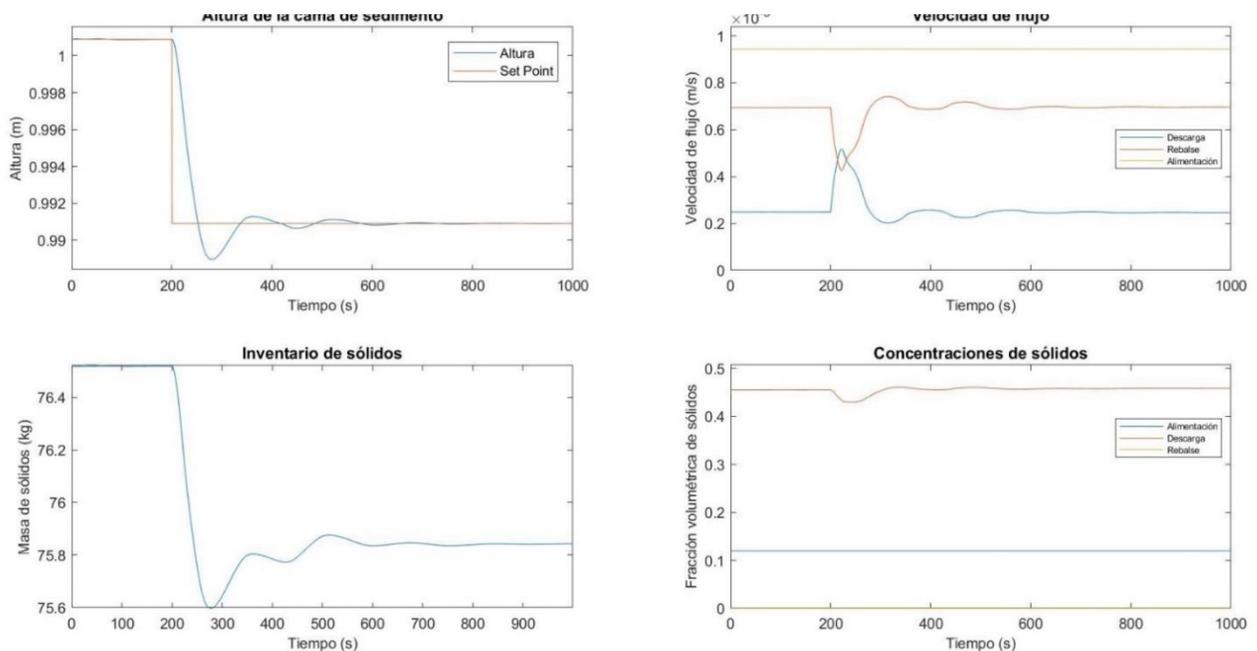


Figura 52 Respuestas dinámicas para el cambio negativo en el set-point bajo el control de lógica difusa.

7.2.3.4. Cambio negativo en la alimentación de sólidos.

Se realizan modificaciones en la alimentación de sólidos del -25% , concretamente de $-2.00 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$ en un tiempo $t = 200\text{s}$:

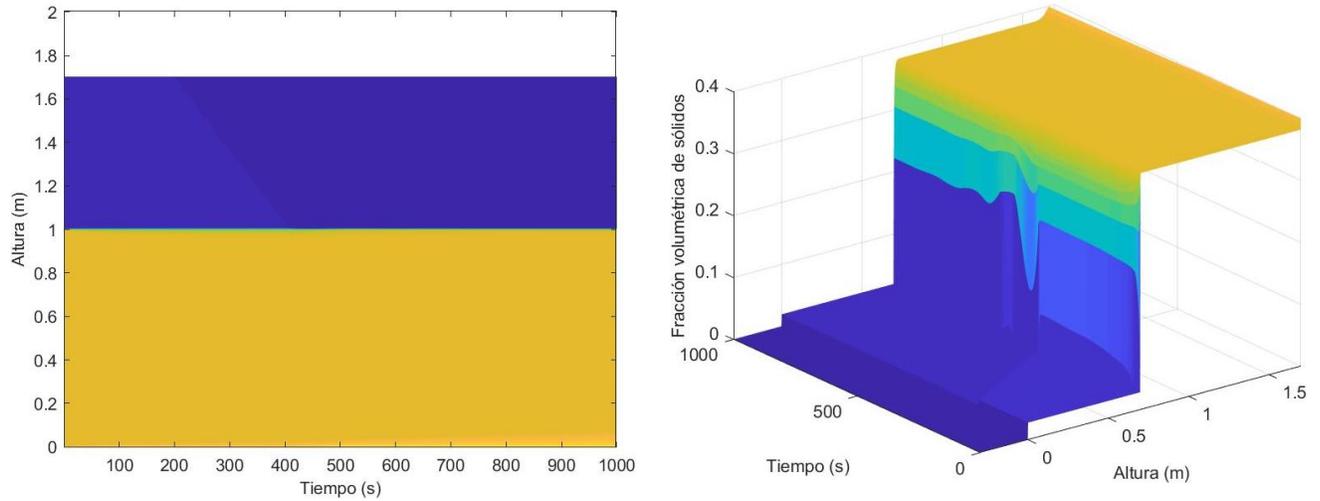


Figura 53 Soluciones para el cambio escalón negativo en la alimentación de sólidos bajo control de lógica difusa.

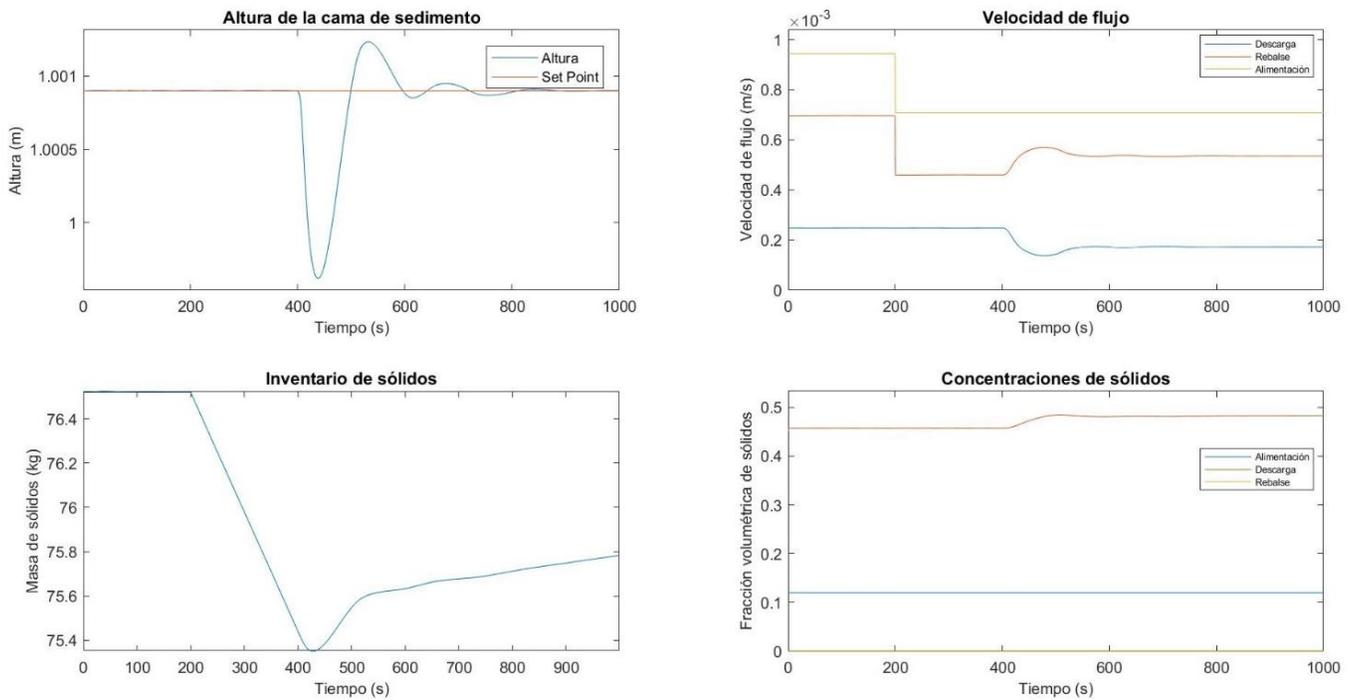


Figura 54 Respuestas dinámicas para el cambio negativo en la alimentación de sólidos bajo control de lógica difusa.

7.3. Zonas del plano Ω de utilidad.

7.3.1. Zonas para estado estacionario dependientes del flujo de descarga.

Se definen los siguientes subconjuntos de Ω , adquieren su relevancia pues permiten determinar el tipo de estado estacionario que se alcanzará en base al conocimiento de la alimentación y el flujo de descarga actual:

$$U_1 := \{(u, y): 0 < q_u u \leq y < \min(f(u_M), f(u))\}, \quad (82)$$

$$U_2 := \{(u, y): u_M < u \leq u_{m\acute{a}x}, f(u_M) < y < f(u), y \geq q_u u\}, \quad (83)$$

$$\ell_1 := \{(u, f(u)): 0 < u < u_m\}, \quad (84)$$

$$\ell_2 := \{(u, f(u_M)): u_m < u \leq u_M\}, \quad (85)$$

$$\ell_3 := \left\{ (u, f(u_M)): u_M < u \leq \frac{f(u_M)}{q_u} \right\}, \quad (86)$$

$$\ell_4 := \{(u, f(u)): u_M < u < u_{m\acute{a}x}\}, \quad (87)$$

$$\ell_5 := \{(u_m, y): y > f(u)\}, \quad (88)$$

$$O_1 := \{(u, y): 0 < u < u_m, y > f(u)\}, \quad (89)$$

$$O_2 := \{(u, y): u_m < u \leq u_M, y > f(u_M)\}, \quad (90)$$

$$O_3 := \{(u, y): u_M < u < u_{m\acute{a}x}, y > f(u)\} \quad y \quad (91)$$

$$p := \{(u_m, f(u_M))\}. \quad (92)$$

En la siguiente figura se presentan gráficamente la función de flujo límite y estas zonas para tres casos:

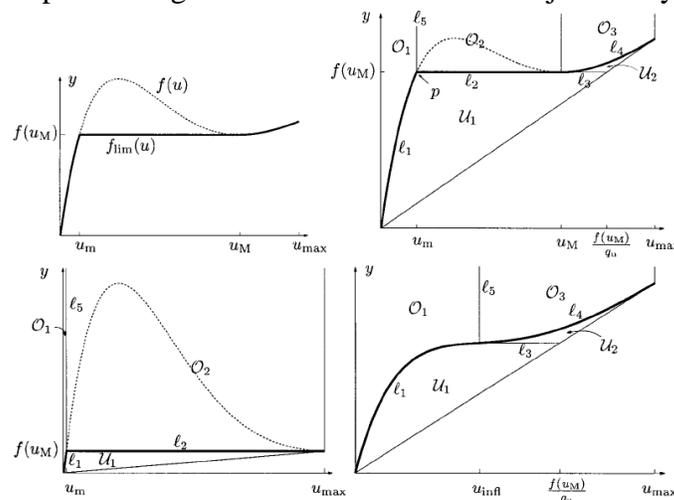


Figura 55 Función de flujo límite y las zonas que define. Arriba a la izquierda: la función de flujo límite. Arriba a la derecha: zonas definidas para $\bar{q}_u < q_u < \overline{q}_u$, Abajo a la izquierda: zonas definidas para $q_u \leq \bar{q}_u$, Abajo a la derecha: zonas definidas para $\bar{q}_u \leq q_u$. Extraído de Diehl 2001.

7.3.2. Zonas para estado estacionario independientes del flujo de descarga.

Las zonas para estado estacionario independientes del flujo de descarga permiten estudiar si existe un caudal de descarga que permita lograr una operación óptima en estado estacionario, y están definidas como sigue:

$$\Lambda_i := \bigcup_{Q_u > 0} \ell_i(Q_u), \quad \text{con} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (93)$$

$$P_1 := \bigcup_{0 < Q_u \leq \bar{Q}_u} p(Q_u), \quad (94)$$

$$P := P_1 \cup P_2, \quad (95)$$

$$\Lambda_{3a} := \Lambda_3 \cap \{(u, y) : y < f_b(u_{infl}) + \bar{q}_u u_{infl}\}, \quad (96)$$

$$\Lambda_{3b} := \Lambda_3 \setminus \Lambda_{3a}, \quad (97)$$

Se grafican estas zonas en la siguiente figura:

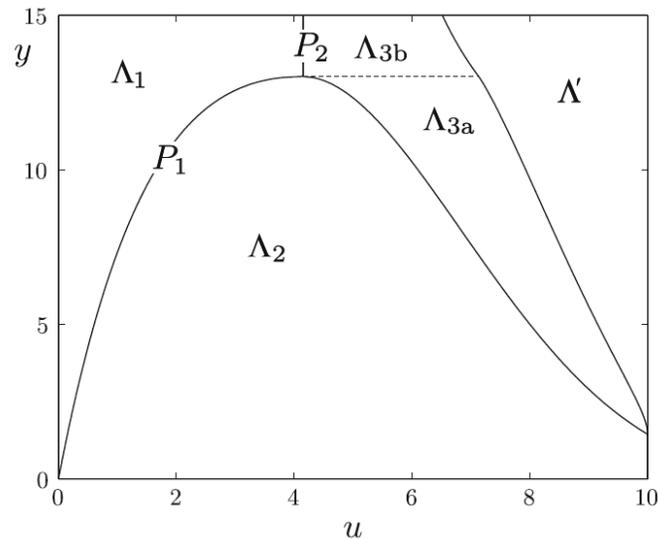


Figura 56 Zonas del plano Ω independientes del flujo de descarga. Extraído de Diehl 2006.

7.3.3. Zonas para determinar respuestas escalón.

Además, existen algunas zonas del plano Ω que permiten separar las respuestas cualitativamente distintas a cambios escalón en la alimentación, se presentan sus definiciones:

$$\mathcal{O}_{2a} = \mathcal{O}_2 \cap \{(u, y): y \leq \hat{f}(u, u_m)\}, \quad (98)$$

$$\mathcal{O}_{2b} = \mathcal{O}_2 \cap \{(u, y): u < u^M, y > f(u)\}, \quad (99)$$

$$\mathcal{O}_{2c} = \mathcal{O}_2 \cap \{(u, y): u \geq u^M, y > f(u^M)\}, \quad (100)$$

$$\mathcal{O}_{3a} = \mathcal{O}_3 \cap \{(u, y): y \leq f(u^M)\}, \quad (101)$$

$$\mathcal{O}_{3b} = \mathcal{O}_3 \cap \{(u, y): f(u) > f(u^M)\}, \quad (102)$$

$$\mathcal{O}_{3c} = \mathcal{O}_3 \cap \{(u, y): f(u) \leq f(u^M) < y\}, \quad (103)$$

$$\mathcal{U}_{2a} = \mathcal{U}_2 \cap \{(u, y): y \leq f(u^M)\}, \quad (104)$$

$$\mathcal{U}_{2b} = \mathcal{U}_2 \cap \{(u, y): y > f(u^M)\}, \quad (105)$$

$$\ell_{4a} = \ell_4 \cap \{(u, y): y \leq u^M\} \quad y \quad (106)$$

$$\ell_{4b} = \ell_4 \cap \{(u, y): y > u^M\}. \quad (107)$$

Su representación gráfica es:

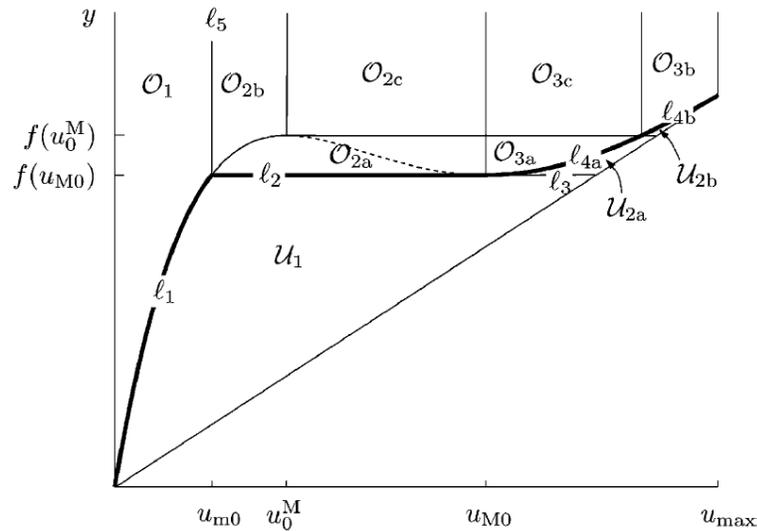


Figura 57 Zonas del plano Ω asociadas a las respuestas escalón.

7.4. Propuestas para la obtención de la altura de la cama de sedimento.

Se presentan aquí algunas de las propuestas de solución que el autor considera relevantes para determinar la altura la cama de sedimento en base a resultados de simulaciones, se presentan los métodos I y II, el método III es parte del desarrollo del trabajo, y se desarrollará en extenso.

7.4.1. Propuesta de solución I

Es conocido que la discontinuidad asociada a la cama de sedimento, pasa por la concentración u_{infl} , esto inspira el primer método, que se basa en determinar en qué punto la concentración alcanza ese valor.

Para un perfil dado de manera funcional, puede determinarse en qué punto se obtiene esa concentración²⁹, y para un perfil dado por valores puntuales, puede realizarse una interpolación lineal a trozos y determinar en qué punto la interpolación pasa por el valor de concentración u_{infl} .

El método tiene la ventaja de ser muy simple de implementar en una simulación, sin embargo, experimentalmente, no es sencillo obtener el perfil de concentraciones en línea, por lo que esta propuesta de solución se descarta debido a las limitaciones experimentales.

Además, se observó durante el desarrollo de las simulaciones que el comportamiento de la solución numérica asociada a este método no era suave en los cambios de intervalo espacial, aunque el cambio en la altura de la cama de sedimento si lo era (Ver anexo 7.6).

7.4.2. Propuesta de solución II

Otra posibilidad consiste en estudiar el comportamiento de la función masa de sólidos acumulada hasta cierta altura, definida como:

$$m_{ac}(z, t) = - \int_H^z \psi_s(z, t) dz. \quad (108)$$

Es relativamente claro que para el caso de un perfil estacionario con discontinuidades esta función sigue el comportamiento de la siguiente figura:

²⁹ De no haber un punto que cumpla esta propiedad, es que existe una discontinuidad que pasa por ese valor, de modo que la ubicación de esa discontinuidad será la altura de la cama de sedimento.

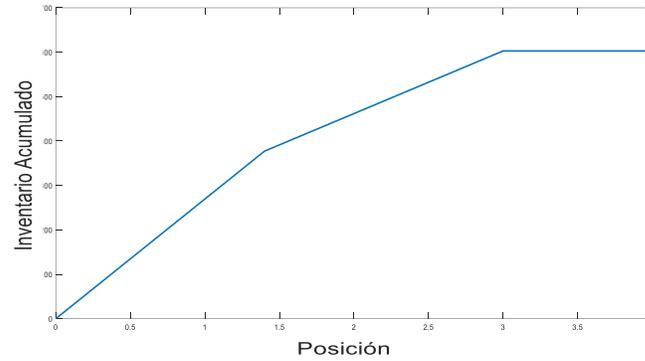


Figura 58 Inventario acumulado para un perfil estacionario críticamente cargado.

Nótese el comportamiento lineal por trozos que se obtiene.

Y, por otro lado, para el caso de un perfil continuo, se tiene un perfil de la forma siguiente:

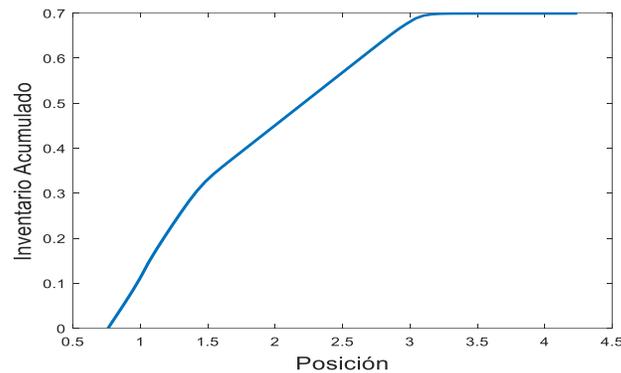


Figura 59 Inventario acumulado para un perfil de concentraciones continuo.

La idea es tratar un perfil ligeramente alejado del comportamiento lineal por trozos como si lo fuera, y así, buscar un perfil continuo, con un número lo más pequeño posible de sub-intervalos que permita aproximar adecuadamente al perfil real, y asumir que la intersección entre las rectas cuyas pendientes cumplan con $u_{infl} \in [m_i, m_{i+1})$ donde m_i es la pendiente de la i -ésima recta de aproximación.

Este método tiene la bondad de que permite obtener un número representativo asociado al perfil de concentración, que coincide exactamente con la altura de la cama de sedimento para el caso de un perfil de tipo estacionario óptimo, sin embargo, la medición del perfil de concentración en una columna de sedimentación no es un problema sencillo y, por tanto, se descarta la aplicación de este método como solución.

7.5. Estudio matemático y experimental del método del flotador.

Supóngase una esfera de radio R , y una densidad fija ρ_d , la fuerza de empuje que sufre esta esfera al estar inmersa en un medio de densidad variable coincide con el peso del material que desplaza, así, el empuje que sufre estará dado por:

$$F_e(z_{sb}, t, r) = \frac{4}{3}\pi g \rho_L R^3 + g(\rho_s - \rho_L)\pi \int_{z_{sb}-R}^{z_{sb}+R} \psi(z, t)(R^2 - (z_{sb} - z)^2) dz. \quad (109)$$

Por su parte el peso de esta esfera será:

$$F_p = \frac{4}{3}\pi g \rho_d R^3. \quad (110)$$

La esfera estará en equilibrio mecánico si ambas fuerzas se igualan, así se deduce que

$$\int_{z_{sb}-R}^{z_{sb}+R} \psi(z, t)(R^2 - (z_{sb} - z)^2) dz = \frac{4}{3} \left(\frac{\rho_d - \rho_L}{\rho_s - \rho_L} \right) R^3. \quad (111)$$

Se define la altura de la cama de sedimento y se denotará como z_{sb} como el centro geométrico de esta esfera.

Para asegurar que el flotador esférico se mantenga en las cercanías de la cama de sedimento, y no se mueva hacia la descarga o hacia el rebalse de la columna de sedimentación producto de los cambios en la fuerza de empuje producidos por posibles perturbaciones y posteriores cambios en el perfil de concentración, es importante asegurar, en primera instancia que el flotador tenga un tamaño lo bastante grande para no verse arrastrado por el movimiento de material y que, además tenga siempre una densidad intermedia entre la densidad asociada a u_m y u_M , valores que se supondrá, no se acercan³⁰, es decir,

$$\sup_{0 < t < T} \rho(u_m(t)) < \rho_d < \inf_{0 < t < T} \rho(u_M(t)). \quad (112)$$

De acuerdo a lo dicho por Diehl en [7, 10, 12, 13, 15], y lo discutido anteriormente respecto de la operación óptima de un espesador, una elección natural sería que el flotador tenga una densidad igual a la asociada al punto de inflexión de la función de flujo batch, pues ese valor se mantendrá siempre entre los valores deseados, sin embargo, otros factores debieran tomarse en consideración a la hora de decidir una densidad adecuada para el flotador.

³⁰ Como se vio en el estudio de los estados estacionarios, de ser iguales ambos valen u_{infl} o bien no corresponden a un estado estacionario de una columna de sedimentación críticamente cargada.

Por ejemplo, la densidad del flotador debiera ser más cercana a la densidad de pulpa en la zona de sedimentación que a la densidad de pulpa de en la zona de sedimento, pues ayuda a evitar que éste quede enterrado en la cama de sedimento producto de la caída de material sobre su zona superior, y además da mayor preponderancia a las fuerzas de empuje impidiendo que el flotador se vea arrastrado por el flujo de material.

Este método posee la ventaja de que tiene una contraparte experimental clara, y permite atribuir un número a un perfil de concentraciones, sin embargo, para perfiles discontinuos, no entrega necesariamente el valor exacto de la altura de la cama de sedimento, sino un valor que puede variar en el intervalo $[\bar{z}_{sb} - R, \bar{z}_{sb} + R]$ donde \bar{z}_{sb} corresponde al valor real de la cama de sedimento, debido a que el centro del flotador puede no estar ubicado en la discontinuidad, en la figura 60 se ilustra el problema:

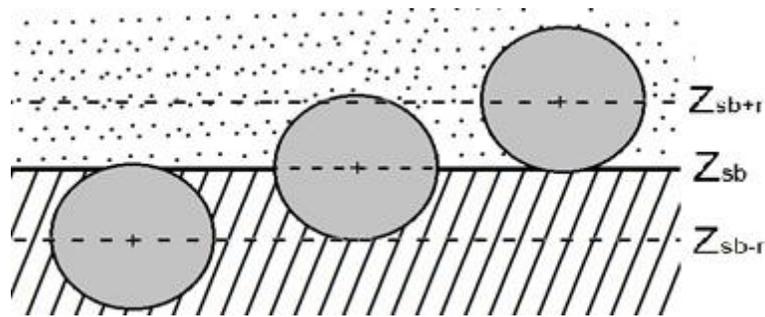


Figura 60 Rango de valores que puede adquirir la posición del centro del flotador, la densidad de la esfera es decreciente de izquierda a derecha.

Naturalmente si la esfera es de menor radio, este problema se reduce considerablemente, lo que obliga a utilizar esferas tan pequeñas como sea posible, notar que este problema se acentúa cuando la densidad de la esfera se acerca a una de las densidades límite.

La ecuación propuesta (111) es complicada de resolver, puesto que depende del perfil de concentraciones y puede no disponerse de una expresión analítica para el perfil en todo tiempo, y aún disponiendo de una expresión analítica, la resolución de esa ecuación sigue siendo un problema complicado de resolver de manera exacta, sin embargo, puede ser simplificado considerablemente si el perfil a estudiar corresponde a una aproximación por subintervalos equi-espaciados donde la concentración sea constante como es el caso de los promedios de celda obtenidos por el método de diferencias finitas, el autor propone el siguiente método numérico que permite resolver el problema con un costo computacional razonable.

Considérese un perfil aproximado por una función seccionalmente constante con intervalos equiespaciados, notar que el flotador puede estar ubicado en cualquier posición interior a la columna de sedimentación, se exigirá que el extremo inferior de la esfera no pase a la descarga, y que el extremo superior no pase del rebalse, es decir, z_{sb} puede variar entre los valores:

$$-B + R \leq z_{sb} \leq H - R. \quad (113)$$

En base a esto defínase el número natural³¹:

$$j_b = \left\lceil \frac{R}{\Delta z} \right\rceil. \quad (114)$$

Fijo un valor de R , y dado un perfil de concentraciones, se puede definir la función

$$H(z_{sb}) = \int_{z_{sb}-R}^{z_{sb}+R} \psi(z, t) (R^2 - (z_{sb} - z)^2) dz - \frac{4}{3} \left(\frac{\rho_d - \rho_L}{\rho_s - \rho_L} \right) R^3. \quad (115)$$

Si además se define la función

$$A(z, z_{sb}) = \begin{cases} R^2 - (z_{sb} - z)^2 & |z - z_{sb}| \leq R \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases} \quad (116)$$

es posible reescribir la función H como sigue:

$$H(z_{sb}) = \int_{-B}^H \psi(z, t) A(z, z_{sb}) dz - \frac{4}{3} \left(\frac{\rho_d - \rho_L}{\rho_s - \rho_L} \right) R^3. \quad (117)$$

Si el perfil de concentraciones es aproximado en un tiempo t , puede ser escrito como:

$$\psi(z) = \sum_{j=-n}^{n+N} U_j \chi_j(z), \quad (118)$$

donde $\chi_j(z)$ es la función característica del j -ésimo intervalo espacial³², considerando esto, es posible reescribir la función H como sigue:

$$H(z_{sb}) = \sum_{j=-n}^{n+N} \int_{-B}^H U_j \chi_j(z) A(z, z_{sb}) dz - \frac{4}{3} \left(\frac{\rho_d - \rho_L}{\rho_s - \rho_L} \right) R^3, \quad (119)$$

y, gracias a las propiedades de la función característica:

³¹ El corchete que se muestra simboliza que, para cualquier número real dado se seleccione el menor número entero mayor o igual a él.

³² Una función característica para un conjunto A vale 1 para los elementos del conjunto y cero para los elementos ajenos a él.

$$H(z_{sb}) = \sum_{j=-n}^{n+N} U_j \int_{z_{j-1}}^{z_j} A(z, z_{sb}) dz - \frac{4}{3} \left(\frac{\rho_d - \rho_L}{\rho_s - \rho_L} \right) R^3. \quad (120)$$

Ahora, supóngase que z_{sb} adquiere valores z_i , tales que i varíe entre j_b y $N - j_b$ y constrúyase un vector con los valores de H en función de los distintos z_{sb} .

Notar que, bajo estas hipótesis, la i -ésima componente de este vector está dada por

$$H_i = \sum_{j=-n}^{n+N} U_j \int_{z_{j-1}}^{z_j} A(z, z_i) dz - \frac{4}{3} \left(\frac{\rho_d - \rho_L}{\rho_s - \rho_L} \right) R^3. \quad (121)$$

Defínase

$$A_{ij} = \int_{z_{j-1}}^{z_j} A(z, z_i) dz, \quad (122)$$

se sigue que

$$H_i = \sum_{j=-n}^{n+N} A_{ij} U_j - \frac{4}{3} \left(\frac{\rho_d - \rho_L}{\rho_s - \rho_L} \right) R^3, \quad (123)$$

esto permite escribir el vector \vec{H} como una función lineal del vector \vec{U}

$$\vec{H} = A\vec{U} - \frac{4}{3} \left(\frac{\rho_d - \rho_L}{\rho_s - \rho_L} \right) R^3 \vec{E}, \quad (124)$$

donde el vector \vec{E} corresponde a un vector columna cuyas componentes valen uno.

Respecto de la matriz A , si los intervalos son equi-espaciados, sólo es necesario obtener la primera fila de elementos, las demás pueden obtenerse mediante la relación recursiva

$$A_{ij} = A_{i+1, j+1}, \quad (125)$$

los términos no considerados en esta relación son todos cero, obsérvese que la matriz A depende exclusivamente de la geometría de la esfera, y la discretización espacial considerada, que se supondrá fija, así que es independiente del tiempo y sólo debe ser calculada una vez, así la única función del tiempo será el perfil de concentraciones discretizado.

Este método permite escribir la función H como una función del perfil de concentraciones, en el que sólo debe aplicarse en cada tiempo una matriz A y luego restar una constante, si se grafica este vector y la posición se obtiene una función cuya intersección con el eje x corresponderá al valor buscado, para resolver este problema en la práctica se recurre a una interpolación lineal por trozos.

En la figura 61 se grafica esta función considerando un flotador con radios diferentes y densidades diferentes, la fuerza se divide en R^3 para permitir que la comparación sea entre parámetros adimensionales del mismo orden de magnitud.

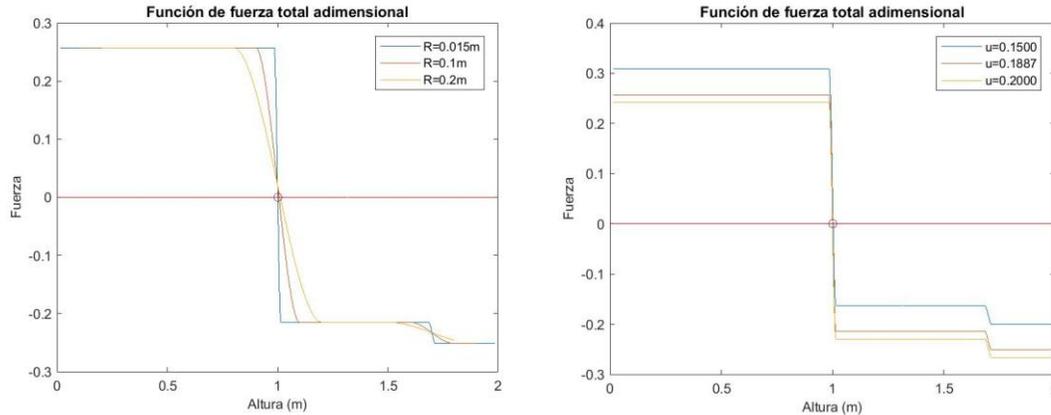


Figura 61 Modificaciones en la función fuerza ante cambios en los parámetros, izquierda: cambios en el radio del flotador, derecha: cambios en la densidad del flotador.

El efecto del aumento de radio se traduce en una suavización de la discontinuidad, mientras el efecto del cambio de densidad del flotador genera simplemente una traslación de la función sobre el eje y, el efecto de los cambios en ambos parámetros sobre las soluciones de la ecuación (111), excede los objetivos de este trabajo.

7.5.1. Demostración de la relación de recurrencia de la matriz A.

La relación de recurrencia deseada es

$$A_{ij} = A_{i+1 j+1}. \quad (126)$$

Escríbase la forma integral de la componente $A_{i+1 j+1}$

$$A_{i+1 j+1} = \int_{z_j}^{z_{j+1}} A(z, z_{i+1}) dz. \quad (127)$$

Una propiedad importante de la función A es que

$$A(z, y) = A(z + h, y + h) \quad \forall h \in \mathbb{R}, \quad (128)$$

que puede probarse mediante simple sustitución en la función definida por la ecuación (116).

Como la discretización es equi-espaciada, se tiene $z_{i+1} = z_i + \Delta z$, y haciendo uso de la propiedad recién mencionada, se obtiene

$$A_{i+1 j+1} = \int_{z_{j-1}+\Delta z}^{z_j+\Delta z} A(z - \Delta z, z_i) dz, \quad (129)$$

hágase la sustitución $w = z - \Delta z$ y se tendrá:

$$A_{i+1 j+1} = \int_{z_{j-1}}^{z_j} A(w, z_i) dw = A_{ij}, \quad (130)$$

que es la relación buscada.

7.5.2. Existencia de soluciones para el método propuesto.

Bajo ciertas hipótesis es posible demostrar la existencia de soluciones para la ecuación (111), no es la intención de este trabajo demostrar esto para el caso más general, si no para las situaciones que competen a este trabajo, se supondrá que la esfera tiene una densidad ρ_{infl} asociada a la pulpa cuyo porcentaje de sólidos es el asociado al punto de inflexión de la función de flujo batch, además de la existencia de una altura de valor z_{sb} tal que

$$u(z) \begin{cases} < u_{infl} & z > z_{sb} \\ > u_{infl} & z < z_{sb} \end{cases} \quad (131)$$

El argumento a seguir puede explicarse sencillamente considerando la siguiente figura:

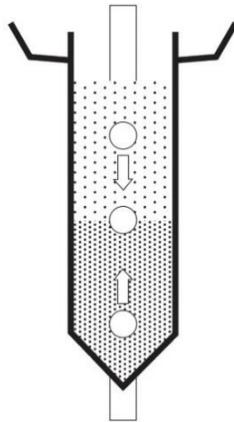


Figura 62 Representación del argumento a utilizar para demostrar la existencia de soluciones para el método propuesto.

En efecto, la definición del método dice que la cama de sedimento está ubicada donde la fuerza total sobre la esfera se anule, si se considera en la figura la esfera ubicada en la parte inferior esta posee una densidad menor al medio que le circunda, en otras palabras, se tendrá la existencia de una fuerza

neta que tiende a levantar la esfera, mientras para la esfera ubicada en la parte superior, al tener una densidad mayor al medio que le circunda, existirá una fuerza neta que tenderá a hacer descender al flotador, es decir, la función fuerza neta alcanza valores positivos y negativos, se demostrará en esta sección que la función fuerza neta es continua espacialmente, de esto y la demostración de que la fuerza neta del sistema alcanza valores positivos y negativos se deducirá la existencia de soluciones para la ecuación (111).

Además, para simplificar la discusión, se considerará que z_{sb} está ubicado en cualquier punto en el intervalo $(-H + r, B - r)$, considérese ahora el valor absoluto de la diferencia entre la función H evaluada en los puntos z^* y $z^* + h$ ambos pertenecientes al intervalo recién mencionado

$$|H(z^*) - H(z^* + h)| = \left| \int_{z^*-R}^{z^*+R} u(z)(R^2 - (z^* - z)^2) dz - \int_{z^*+h-R}^{z^*+h+R} u(z)(R^2 - ((z^* + h) - z)^2) dz \right|, \quad (132)$$

se puede reescribir esta expresión expandiendo la segunda integral y utilizando las propiedades de las integrales como sigue

$$\begin{aligned} |H(z^*) - H(z^* + h)| &= \left| -h \int_{z^*+h-R}^{z^*+h+R} u(z)(2(z^* - z) + h) dz \right. \\ &\quad \left. + \int_{z^*+R}^{z^*+h+R} u(z)(R^2 - (z^* - z)^2) dz - \int_{z^*-R}^{z^*-R+h} u(z)(R^2 - (z^* - z)^2) dz \right|, \end{aligned} \quad (133)$$

gracias a la desigualdad triangular es posible acotar el término derecho por la suma del valor absoluto de cada integral

$$\begin{aligned} |H(z^*) - H(z^* + h)| &\leq |h| \left| \int_{z^*+h-R}^{z^*+h+R} u(z)(2(z^* - z) + h) dz \right| \\ &\quad + \left| \int_{z^*+R}^{z^*+h+R} u(z)(R^2 - (z^* - z)^2) dz \right| \\ &\quad + \left| \int_{z^*-R}^{z^*-R+h} u(z)(R^2 - (z^* - z)^2) dz \right|. \end{aligned} \quad (134)$$

Considerando que la función $u(z)$ es acotada superiormente por el valor u_{max} , además $(R^2 - (z^* - z)^2) \leq R^2$ y $|z_{sb} - z| < R$, se tendrá:

$$|h| \left| \int_{z^*+h-R}^{z^*+h+R} u(z)(2(z^* - z) + h) dz \right| \leq |h|u_{max}(4R^2 + 2R|h|), \quad (135)$$

$$\left| \int_{z^*+R}^{z^*+h+R} u(z)(R^2 - (z^* - z)^2) dz \right| \leq |h|u_{max}R^2 \quad y \quad (136)$$

$$\left| \int_{z^*-R}^{z^*-R+h} u(z)(R^2 - (z^* - z)^2) dz \right| \leq |h|u_{max}R^2. \quad (137)$$

Usando toda esta información puede escribirse

$$0 \leq |H(z^*) - H(z^* + h)| \leq |h|(6u_{max}R^2 + 2|h|u_{max}R), \quad (138)$$

notar que la expresión de la derecha tiende a cero cuando $h \rightarrow 0$, luego, gracias al teorema del acotamiento es posible escribir

$$\lim_{z \rightarrow z^*} H(z) = H(z^*). \quad (139)$$

En otras palabras, la función H es continua en la variable z , se evalúa ahora la función H en los puntos z_1 y z_2 tales que $z_1 \leq z_{sb} - R < z_{sb} + R \leq z_2$

$$H(z_1) = \int_{z_1-R}^{z_1+R} u(z)(R^2 - (z_1 - z)^2) dz - \frac{4}{3} \left(\frac{\rho_d - \rho_L}{\rho_s - \rho_L} \right) R^3. \quad (140)$$

Considerando la condición impuesta para el porcentaje de sólidos, se tiene que en el dominio de integración $u(z) > u_{infl}$ (salvo quizás en un punto, que no aporta a la integral) y por lo tanto:

$$\begin{aligned} H(z_1) &= \int_{z_1-R}^{z_1+R} u(z)(R^2 - (z_1 - z)^2) dz - \frac{4}{3} \left(\frac{\rho_d - \rho_L}{\rho_s - \rho_L} \right) R^3 \\ &> u_{infl} \int_{z_1-R}^{z_1+R} (R^2 - (z_1 - z)^2) dz - \frac{4}{3} \left(\frac{\rho_{infl} - \rho_L}{\rho_s - \rho_L} \right) R^3. \end{aligned} \quad (141)$$

La integral presente en la última expresión puede resolverse obteniendo:

$$H(z_1) > \frac{4}{3} R^3 \left(u_{infl} - \left(\frac{\rho_{infl} - \rho_L}{\rho_s - \rho_L} \right) \right), \quad (142)$$

desarrollando el producto se obtiene:

$$H(z_1) > \frac{4}{3} R^3 \left(\frac{u_{infl}\rho_s - u_{infl}\rho_L - \rho_{infl} + \rho_L}{\rho_s - \rho_L} \right). \quad (143)$$

Considérese además que $\rho_{infl} = u_{infl}\rho_s + (1 - u_{infl})\rho_L$ para obtener:

$$H(z_1) > 0. \quad (144)$$

Considérese además la función evaluada en z_2 :

$$H(z_2) = \int_{z_2-R}^{z_2+R} u(z)(R^2 - (z_2 - z)^2)dz - \frac{4}{3} \left(\frac{\rho_d - \rho_L}{\rho_s - \rho_L} \right) R^3. \quad (145)$$

En el dominio de integración considerado, gracias a las imposiciones hechas sobre el porcentaje de sólidos es posible escribir $u(z) < u_{infl}$ y por lo tanto:

$$H(z_2) < u_{infl} \int_{z_2-R}^{z_2+R} (R^2 - (z_2 - z)^2)dz - \frac{4}{3} \left(\frac{\rho_d - \rho_L}{\rho_s - \rho_L} \right) R^3, \quad (146)$$

integral que puede ser resuelta obteniendo:

$$H(z_2) < \frac{4}{3} R^3 \left(\frac{u_{infl}\rho_s - u_{infl}\rho_L - \rho_{infl} + \rho_L}{\rho_s - \rho_L} \right) = 0, \quad (147)$$

de donde se sigue que:

$$H(z_2) < 0. \quad (148)$$

Luego, la función continua H cumple con $H(z_1) > 0$ y $H(z_2) < 0$, gracias al Teorema de Bolzano es posible asegurar que se anula al menos en un punto z^* en el intervalo $[z_1, z_2]$ y, además considerando las restricciones impuestas a z_1 y a z_2 se puede deducir que $z^* \in (z_{sb} - r, z_{sb} + r)$, límites deducidos también mediante un razonamiento físico.

Esto demuestra la existencia de al menos un punto que puede llamarse altura de cama de sedimento, sin embargo, no demuestra la unicidad y, además, las hipótesis impuestas son en algunos aspectos más restrictivas que la operación óptima de un espesador continuo, ambos problemas quedan como posibilidades de desarrollo posterior.

Respecto de la unicidad, en caso de no poderse asegurar que la solución sea única, el autor propone, para el caso en que el conjunto de soluciones sea conexo, considerar el ínfimo de este conjunto, esta elección tiene su raíz física en las fuerzas de rozamiento viscoso que no se consideraron en el desarrollo matemático, las cuales tenderían a arrastrar el flotador hacia la descarga, justificando la elección del ínfimo como un buen criterio, al ser el ínfimo único, y siempre existir para conjuntos acotados de números reales (que es el caso pues la cama de sedimento es un número mayor o igual a cero) esta elección permite cerrar el problema de la unicidad.

7.6. Comparación de métodos para determinar la altura de la cama de sedimento.

Se utilizan algunas de las simulaciones dinámicas para comparar los métodos de determinación de cama de sedimento, los cuales se nombrarán como sigue:

Método del punto de inflexión (Método I): Basado en la búsqueda de la posición donde el perfil de concentraciones alcanza la concentración u_{infl} , considerado por el autor como el método a utilizar como punto de comparación pues resulta ser el que se basa de manera más directa en la caracterización de la cama de sedimento.

Método del flotador (Método III): Basado en el seguimiento de la posición de un flotador de densidad determinada, su método de obtención y algunos de sus aspectos matemáticos fueron explicados en el apartado anterior.

Método del inventario: que consiste en la aplicación de la ecuación (42), que puede reescribirse como

$$z_{sb} = \frac{1}{u_M - u_m} \left(\frac{M_s}{\rho_s A} - H u_m \right). \quad (149)$$

Suponiendo que esta expresión es válida en cualquier instante t , permite calcular la altura de la cama de sedimento para un espesador, su principal ventaja es que, conociendo el inventario de sólidos en un instante, permite obtener la cama de sedimento en cualquier instante posterior mediante el mero conocimiento de las entradas y las salidas de material del espesador, lo que simplifica enormemente el problema de determinar el comportamiento dinámico de la cama de sedimento volviéndose posible incluso recurrir a métodos analíticos para la sintonización de un controlador, además de la simpleza de su cálculo que depende exclusivamente del inventario y el estado estacionario al que llegaría la operación.

El método del punto de inflexión (Método I) se considerará como la base para la comparación entre el método del inventario y el método del flotador, esto debido a que es el que mejor se asocia a la idea de cama de sedimento, las simulaciones de esta sección fueron realizadas con los mismos parámetros de las simulaciones mencionadas en el capítulo 4.

Se muestran 3 gráficos comparativos de estos tres métodos para ilustrar sus diferencias, uno en lazo abierto, uno en control PI, y otro en control de lógica difusa.

7.6.1. Lazo abierto

Se muestra una comparación de los resultados para los tres métodos basado en la simulación de lazo abierto considerando un cambio escalón positivo en el porcentaje de sólidos.

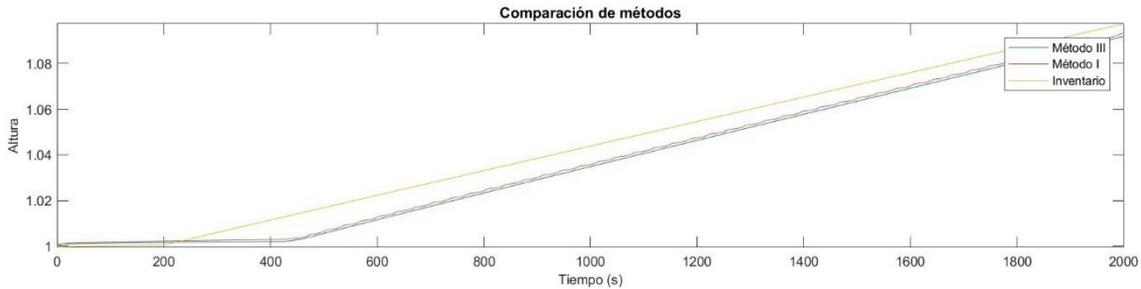


Figura 63 Comparación de resultados obtenidos para la simulación de lazo abierto.

La principal diferencia entre el método del inventario y el método de punto de inflexión (método I) es la existencia de un retardo, o período de tiempo posterior a la ocurrencia de la perturbación en que la altura medida mediante el método del punto de inflexión, no sufre modificación alguna, mientras el método del inventario, que depende de la masa en el espesador comienza a alterarse inmediatamente después de ocurrida la perturbación, esto mientras el método del flotador mantiene esencialmente un comportamiento indistinguible del método del punto de inflexión.

Otra diferencia aparece considerando la pendiente del crecimiento de la cama, esta diferencia se explica considerando que las concentraciones u_m y u_M cambian tras el cambio escalón en la alimentación, alterando sensiblemente la pendiente de la recta, mientras la pendiente asociada al método del inventario permanece constante, este error es menor, sin embargo es de difícil solución, debido a que no es un problema sencillo correlacionar las concentraciones en ambas zonas y el tiempo, mientras un recálculo simple de u_m y u_M en un momento adecuado generaría dos pendientes distintas para tiempos no replicando cualitativamente el comportamiento real de la cama de sedimento.

7.6.2. Control PI

Se muestra una comparación de los resultados para los tres métodos basado en la simulación de control PI considerando un cambio escalón positivo en el porcentaje de sólidos.

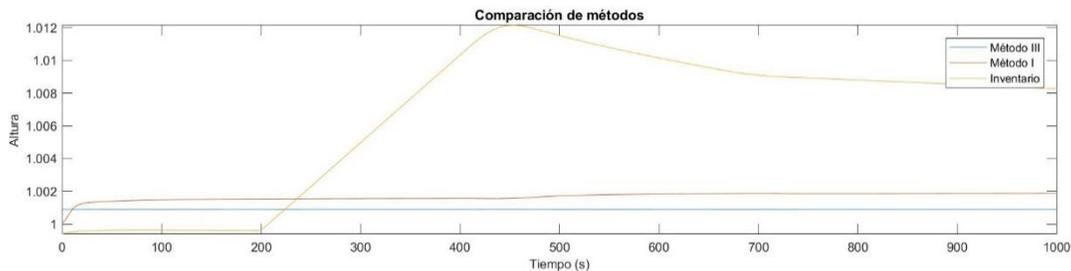


Figura 64 Comparación de métodos para la simulación del sistema de control PI.

Según se aprecia, la cama de sedimento determinada mediante los métodos del punto de inflexión (Método I) y el método del flotador (Método III), apenas sufre modificaciones durante el desarrollo dinámico del proceso, mientras la altura de cama de sedimento determinada con el método del inventario sufre modificaciones importantes, esto debido a la propagación de perturbaciones al interior del espesador, que mantiene un flujo de descarga constante durante un tiempo apreciable, causando un crecimiento lineal en el inventario, hasta que la perturbación llega a la cama de sedimento.

Luego la cama de sedimento determinada en base al método del inventario no alcanza al estado estacionario apreciándose además una diferencia importante entre los valores obtenidos mediante otros métodos, esto es debido a la aparición de un falso estado estacionario de segunda especie debido a la incompleta propagación de las ondas de rarefacción en la zona de sedimento.

Es importante notar que en términos absolutos el error por utilizar un método u otro es mínimo, sin embargo, el método del inventario no es capaz de replicar el comportamiento cualitativo de la cama de sedimento, detectando modificaciones cuando estas aún no aparecen, y perseverando en alteraciones cuando esta ya alcanzó un valor estático.

7.6.3. Control de lógica difusa

La siguiente figura está basada en la simulación del sistema de control de lógica difusa para un cambio escalón negativo en el porcentaje de sólidos en la alimentación.

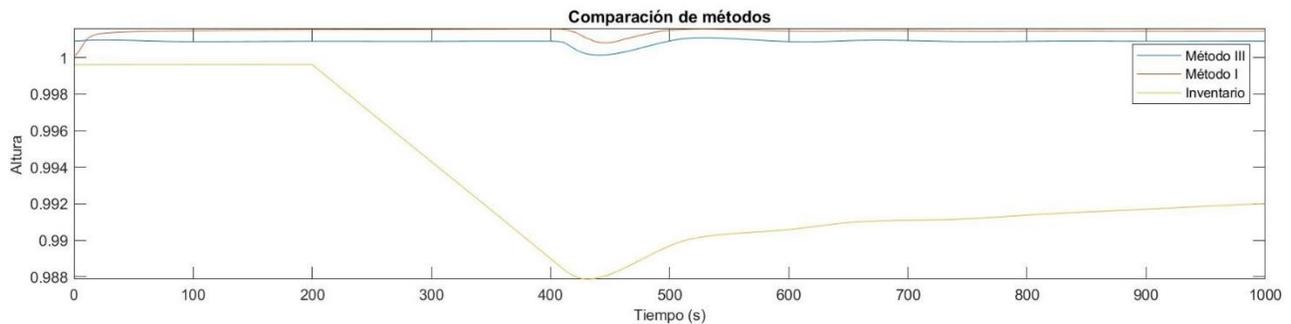


Figura 65 Comparación de los métodos de determinación de altura de cama de sedimento para la simulación del control de lógica difusa.

Se aprecian claras diferencias entre lo obtenido por medio del método del inventario versus el método I, el método del inventario entrega resultados buenos durante los primeros 200s, sin embargo en el instante en que ocurre la perturbación, el inventario disminuye instantáneamente mientras la cama de sedimento permanece inalterada hasta los 420s aproximadamente.

Mientras tanto, el método del flotador (Método III) replica cualitativamente los resultados del método del punto de inflexión (Método I) con una diferencia que se mantiene constante en el tiempo.

Es importante remarcar que las diferencias importantes no son cuantitativas si no cualitativas, el método del inventario no logra captar los fenómenos dinámicos que ocurren con la cama de sedimento como los retardos y la pendiente de crecimiento.

Una ventaja importante que puede apreciarse si se observa con cuidado la figura 55 es que la altura de cama de sedimento producida por el método del punto de inflexión (Método I) no es suave, sufriendo cambios bruscos en su derivada cuando pasa de un sub-intervalo espacial a otro, mientras el método del flotador (Método III) ofrece curvas suaves en el sentido de que no sufre cambios bruscos en la derivada en los cambios de sub-intervalos.

Existen casos en que los tres métodos son casi indistinguibles como, por ejemplo, para el cambio positivo de set-point bajo control PI de acción lenta:

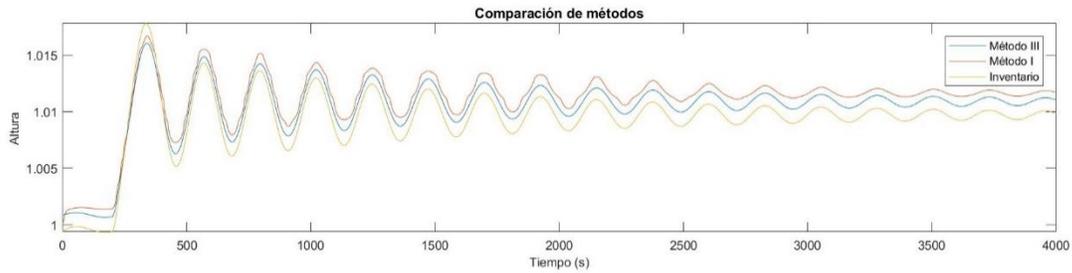


Figura 66 Comparación de métodos para la modificación del set-point.

Aquí la determinación por el método del inventario resulta eficaz, esto se debe a tres razones, primero la escala de las modificaciones, que enmascara los pequeños errores que eran notorios en las comparaciones anteriores, segundo, que el efecto de los cambios en el flujo de descarga sobre la cama de sedimento es instantáneo al igual que en el inventario, por lo tanto es de esperar un comportamiento cualitativamente similar, y tercero, las modificaciones en el set-point, al no ser perturbaciones de la alimentación, no generan cambios en los valores estacionarios u_m y u_M , por lo tanto estos parámetros permanecen constantes.

7.7. Ejemplos de cálculo de los parámetros de los cambios escalón.

En este apartado se aplican las expresiones obtenidas en el capítulo 4 para analizar las respuestas a cambios escalón en lazo abierto consideradas en el mismo capítulo, se comparan además con los valores obtenidos en las simulaciones, que fueron conseguidos ajustando las curvas obtenidas con modelos simples en base a métodos de mínimos cuadrados.

7.7.1. Cambio escalón en el flujo de descarga.

Se considera la respuesta escalón a un cambio positivo en el flujo de descarga de valor $8.3 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$, impuesto al sistema en un tiempo de 200s, obteniéndose la siguiente respuesta:

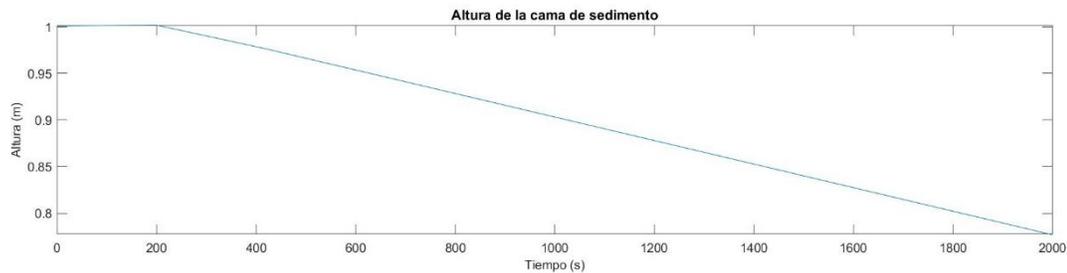


Figura 67 Respuesta escalón ante cambio escalón positivo en el flujo de descarga.

A esta respuesta se le realiza un ajuste lineal considerando puntos posteriores a 200s, cuyos parámetros obtenidos son los siguientes:

Tabla 8 Parámetros del ajuste lineal.

Parámetro	Valor
Intercepto	1.028 m
Pendiente	$-1.26 \times 10^{-4} \text{ m/s}$

Como se vio durante el análisis cualitativo de la respuesta escalón, el retardo asociado a un cambio escalón en el flujo de descarga es nulo.

El siguiente paso es obtener el valor de la pendiente inicial en base al conocimiento que se posee de las soluciones de la ecuación diferencial, la forma de la curva respuesta obtenida permite afirmar que la cama de sedimento corresponde a una onda de choque cuya velocidad de propagación puede calcularse mediante la condición de Rankine-Hugoniot

$$\sigma = \frac{f(u_1) - f(u_2)}{u_1 - u_2}, \quad (150)$$

como a ambos lados de la discontinuidad la concentración permanece esencialmente inalterada tras el cambio escalón en el flujo de descarga se calcula:

$$\sigma = \frac{f_b(0.0276) - f_b(0.3816) + 3.64 \times 10^{-4}(0.0276 - 0.3816)}{0.0276 - 0.3816} = 1.18 \times 10^{-4} \text{ m/s}. \quad (151)$$

El signo positivo de la velocidad de propagación calculado se entiende considerando que el eje coordenado fue considerado positivo hacia abajo.

Por último, considérese el valor del cociente entre la pendiente de crecimiento inicial y la magnitud de la perturbación:

$$K_1 = \frac{1.26 \times 10^{-4} \text{ m/s}}{8.33 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}} = 15.1 \text{ m}^{-2}. \quad (152)$$

El autor realizó también una simulación considerando un cambio escalón de menor magnitud, de valor $1.67 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$, el valor de la pendiente obtenida bajo esta imposición fue de $2.48 \times 10^{-5} \text{ m/s}$, utilizando estos valores para calcular K_1 bajo este cambio escalón se obtiene:

$$K_1 = \frac{2.48 \times 10^{-5} \text{ m/s}}{1.67 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}} = 14.8 \text{ m}^{-2} \quad (153)$$

Que es muy similar al valor de K_1 obtenido mediante el otro cambio escalón, esto dice que el valor de K_1 es con una muy buena aproximación independiente del cambio escalón en el caudal de descarga.

7.7.2. Cambio escalón en el flujo de alimentación.

Se considera la respuesta escalón al cambio positivo en el flujo de alimentación, el cambio considerado fue de $3.33 \times 10^{-7} \text{ m}^3/\text{s}$, el cual fue impuesto al sistema en un tiempo de 200s, la respuesta es de la siguiente forma:

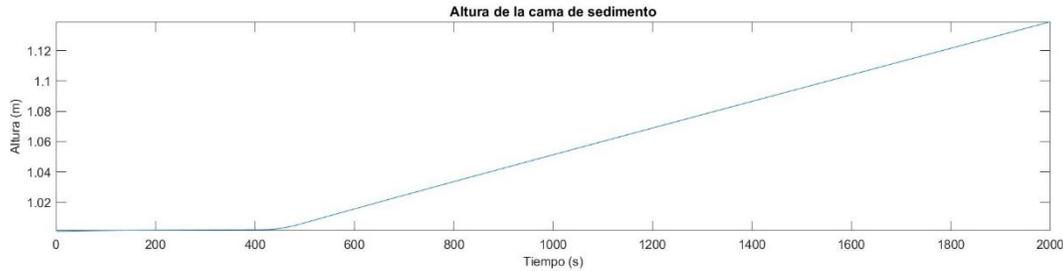


Figura 68 Respuesta escalón ante cambio escalón positivo en el flujo de alimentación.

Se inicia realizando un ajuste lineal a los puntos posteriores a los 500s, los parámetros de la recta de ajuste obtenidos fueron los siguientes:

Tabla 9 Parámetros del ajuste lineal.

Parámetro	Valor
Intercepto	0.963 m
Pendiente	$8.81 \times 10^{-5} \text{ m/s}$

Para obtener el retardo θ a partir de los datos de la simulación, se busca el punto en que esta recta alcanza la altura inicial, es decir, la intersección con el valor $1m$

$$1m = 8.81 \times 10^{-5} \text{ m/s} (\theta + 200s) + 0.963m, \quad (154)$$

a θ se le suman 200s pues la perturbación fue impuesta al sistema en ese momento, resolviendo esta ecuación se obtiene:

$$\theta = 219 \text{ s}, \quad (155)$$

que corresponde al retardo asociado a esta perturbación obtenido a partir de las simulaciones.

Ahora se utilizan las expresiones derivadas en el capítulo 4, primero ha de determinarse si la onda de propagación correspondiente corresponde a un choque o a una onda de rarefacción, para esto debe calcularse el nuevo valor de concentración conjugada u_1 , este puede ser obtenido igualando la

velocidad de flujo de alimentación y la velocidad de flujo en la zona de sedimentación considerando que el flujo de descarga permanece constante, de esta ecuación deben seleccionarse las soluciones tales que $u_1 \leq u_{infl}$:

$$f_b(u_1) + q_u u_1 = q_f u_f, \quad (156)$$

los parámetros de esta ecuación están dados en las tablas 3 y 5, mientras que el valor q_f corresponde al nuevo caudal de alimentación dividido en el área del espesador, la solución a esta ecuación no lineal es

$$u_1 = 0.0379. \quad (157)$$

Resta ahora evaluar f' en las concentraciones u_m^1 y u_1 , cuyos resultados son

$$f'(u_m^1) = 0.0032 \quad y \quad f'(u_m^2) = 0.0024. \quad (158)$$

Notar que se tiene $f'(u_m^1) > f'(u_m^2)$, es decir, la propagación de esta perturbación es mediante una onda de rarefacción.

Con todo, puede usarse la ecuación (51) para estimar una velocidad de propagación para la onda, se utiliza un valor de 0.9 para α , obteniendo

$$\tau = \frac{1.7 - 1 \text{ m}}{0.0031 \text{ m/s} * 0.9 + 0.0024 \text{ m/s} * (1 - 0.9)} = 231.78 \text{ s}. \quad (159)$$

Se adjunta un gráfico del comportamiento del retardo predicho y el error cuadrático versus α .

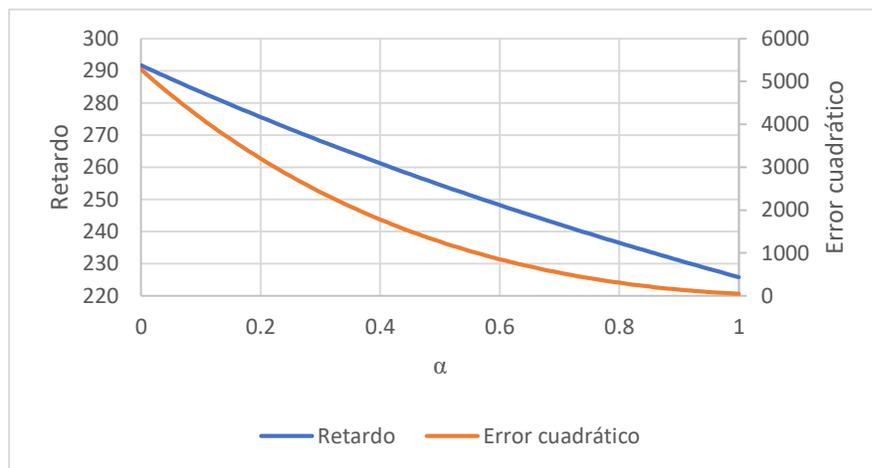


Figura 69 Retardo estimado y error cuadrático versus alfa.

Donde se aprecia que el error cuadrático se hace mínimo cercano al valor de α igual a 1, esto se interpreta como que la velocidad a la que se propaga la perturbación está controlada principalmente por la velocidad de propagación de la concentración inicial en la zona de sedimentación.

El segundo problema es determinar la pendiente de crecimiento inicial en base a los parámetros del problema, para esto, en base a la forma de la solución, puede estipularse que el tipo de propagación asociado a la cama de sedimento es una onda de choque, así la velocidad puede calcularse mediante la condición de Rankine-Hugoniot, sin embargo, para esto deben primero determinarse la concentración de sólidos límite a ambos lados de la cama de sedimento, se determinó anteriormente que uno de los límites adquiere el valor de u_1 , el otro límite puede obtenerse mediante el cálculo de la solución a la siguiente ecuación:

$$f_b(u_2) - f_b(u_1) = (u_2 - u_1)f_b(u_2), \quad (160)$$

Cuya solución es:

$$u_2 = 0.3512 \quad (161)$$

Así, reemplazando ambos valores en la condición de Rankine-Hugoniot se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{f_b(0.3512) - f_b(0.0379) + 2.43 \times 10^{-4} \text{ m/s} (0.3512 - 0.0379)}{0.3512 - 0.0379} \\ &= -8.63 \times 10^{-5} \text{ m/s} \end{aligned} \quad (162)$$

El signo negativo proviene de la elección del eje de coordenadas, cuya dirección positiva apunta hacia abajo, es decir hacia la descarga del espesador, luego, la cama de sedimento sube.

Notar que la pendiente obtenida mediante la simulación tiene un valor de 8.81×10^{-5} m/s, muy cercano al valor obtenido mediante el método propuesto.

Se calcula, además, el resultado del cociente entre la pendiente del incremento en la cama de sedimento y el incremento en el flujo de alimentación

$$K_2 = \frac{8.81 \times 10^{-5} \text{ m/s}}{1.67 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}} = 5.372 \text{ m}^{-2}. \quad (163)$$

7.7.3. Cambio escalón en el porcentaje de sólidos de alimentación.

La perturbación a considerar consistió en un cambio escalón positivo en la fracción volumétrica de sólidos de 0.02, impuesta en un tiempo de 200 s, la curva de respuesta para esta situación es la siguiente:

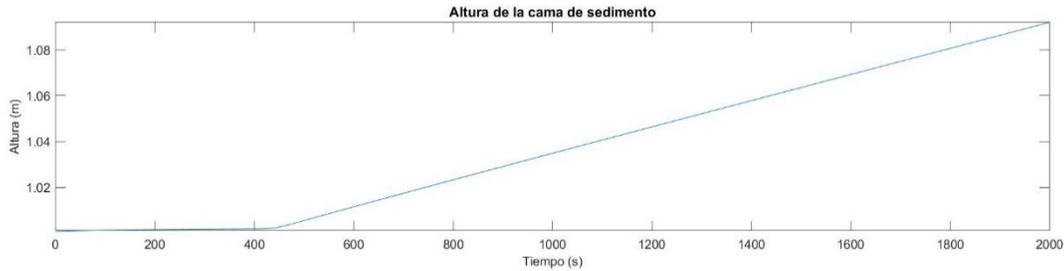


Figura 70 Respuesta escalón ante cambio escalón positivo en el porcentaje de sólidos en la alimentación.

Notar que cualitativamente la respuesta no es distinta al caso anterior, por lo que se seguirá el mismo método, los parámetros del ajuste lineal a la recta de crecimiento de la cama de sedimento fueron los siguientes:

Tabla 10 Parámetros del ajuste lineal.

Parámetro	Valor
Intercepto	0.977 m
Pendiente	5.75×10^{-5} m/s

El retardo obtenido en la simulación puede ser calculado en base a estos valores como sigue

$$1m = 5.75 \times 10^{-5} m/s (\theta + 200s) + 0.977m, \quad (164)$$

cuyo resultado corresponde a un valor de retardo de $\theta = 202$ s.

Lo siguiente es estimar el valor de los parámetros retardo y pendiente en base a los datos del problema, para el retardo, debe primero determinarse el nuevo valor de concentración conjugada u_1 , que es

$$u_1 = 0.0342. \quad (165)$$

Ahora, debe determinarse si la propagación de la perturbación es mediante una onda de choque o rarefacción, para esto resulta necesario calcular los valores:

$$f'(u_m^1) = 0.0031 \quad y \quad f'(u_1) = 0.0026, \quad (166)$$

y como $f'(u_m^1) > f'(u_m^2)$, la propagación de esta perturbación ocurre mediante una onda de rarefacción.

Para calcular el retardo se supone un $\alpha = 0.9$, lo que permite calcular el retardo como sigue

$$\theta = \frac{0.7 \text{ m}}{0.9 * 0.0031 \text{ m/s} + 0.1 * 0.0026 \text{ m/s}} = 230 \text{ s.} \quad (167)$$

Se adjunta también un gráfico del comportamiento de el retardo estimado y el error cuadrático versus alfa.

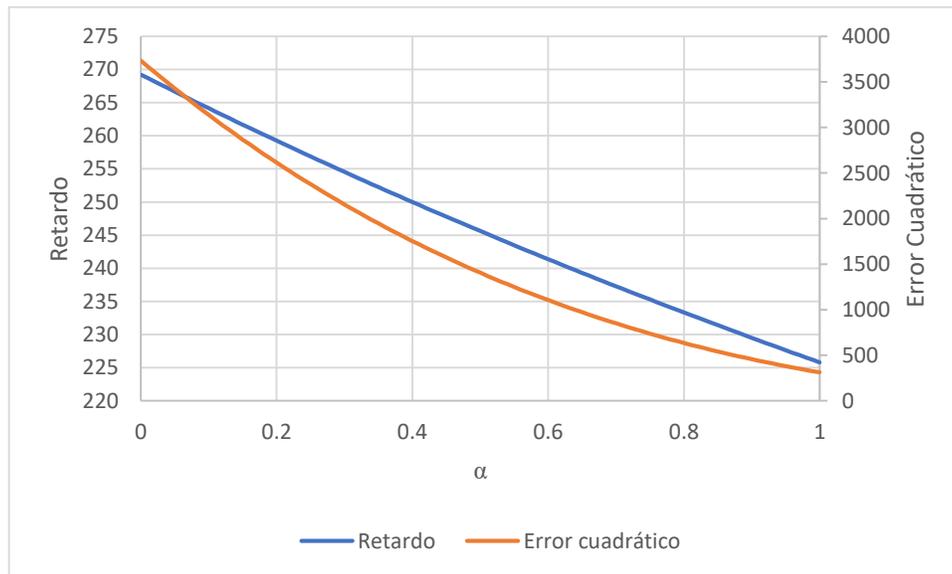


Figura 71 Retardo estimado y error cuadrático en función de alfa.

Nuevamente el error cuadrático es mínimo en torno a $\alpha = 1$.

Por último, es de importancia calcular el valor de la pendiente de crecimiento de la cama de sedimento dividida por la magnitud de la perturbación

$$K_3 = \frac{5.75 \times 10^{-5} \text{ m/s}}{0.02} = 2.88 \times 10^{-3} \text{ m/s.} \quad (168)$$

7.7.4. Reducción de variables.

El comportamiento cualitativamente parecido de los cambios escalón en porcentaje de sólidos y en caudal de alimentación permiten pensar que ambas variables son expresiones de una misma realidad física, la alimentación de sólidos por unidad de tiempo, que, considerando cambios escalón pequeños, permitiría unificar ambos efectos en esta única variable, inspirado en la ecuación (10), se estipula que la variable buscada es $S = Q_f u_f$, para confirmar esto, se considerarán los siguientes cocientes:

$$K'_1 = \frac{K_2}{u_f} \quad K'_2 = \frac{K_3}{Q_f} \quad (169)$$

De ser ambos iguales, permitiría afirmar que para el estudio de la dinámica de la altura de la cama de sedimento en torno al punto de equilibrio y considerando horizontes temporales pequeños comparados con el retardo de las perturbaciones, basta sólo con considerar la variable S .

Los valores numéricos de ambas constantes son $K'_1 = 44.75 \text{ m}^{-2}$ y $K'_2 = 43.19 \text{ m}^{-2}$, es decir, aproximadamente iguales, en otras palabras, trabajar sólo con la variable S para fines de la sintonización está bien justificado, y su constante asociada será renombrada K' .

Recuérdese que esto es desde la perspectiva de la dinámica considerando pequeñas perturbaciones, como se vio en el estudio de los estados estacionarios, en realidad el estado estacionario al que el sistema llega depende de ambas variables por separado.

7.8. Sintonización del controlador PI

Puede utilizarse la información obtenida a partir de las simulaciones de lazo abierto para obtener un modelo lineal simplificado del sistema de control, que puede ser utilizado para sintonizar el controlador PI de acuerdo a algunos objetivos, en particular, aquí se hará en base al sobrepaso y el tiempo de estabilización.

Las características esenciales que serán utilizadas para linealizar el sistema, son las deducidas a partir de las respuestas escalón obtenidas en el capítulo 4, que son las siguientes:

- 1) Para las variables de alimentación se manifiesta un retardo, que no se manifiesta cuando ocurre un cambio en el caudal de descarga.
- 2) Para todos los cambios escalón, se aprecian comportamientos lineales una vez propagadas las perturbaciones al interior del espesador.

Estas características permiten proponer funciones de transferencia asociadas a cada variable de entrada, que en base a las características 1) y 2) adquieren la forma

$$G_i = K_i \frac{e^{-s\theta_i}}{s}, \quad (170)$$

donde θ_i corresponde al retardo asociado a la i -ésima variable de entrada, y k_i corresponde a la pendiente de crecimiento inicial estudiada en el capítulo 4 dividida por la magnitud de la perturbación en la variable de entrada.

Los valores asociados a cada variable de entrada fueron obtenidos en el apartado anterior, donde también se mostró como obtenerlos en otros casos, los valores asociados a cada entrada se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 11 Parámetros de las funciones de transferencia asociadas a las variables de entrada.

Variable de entrada	K_i	θ_i
Caudal descarga (i=1)	15.12	0
Caudal alimentación (i=2)	5.37	219
Porcentaje de sólidos alimentación (i=3)	2.88×10^{-3}	202

Y el diagrama de bloques para el sistema en lazo abierto sería el siguiente:

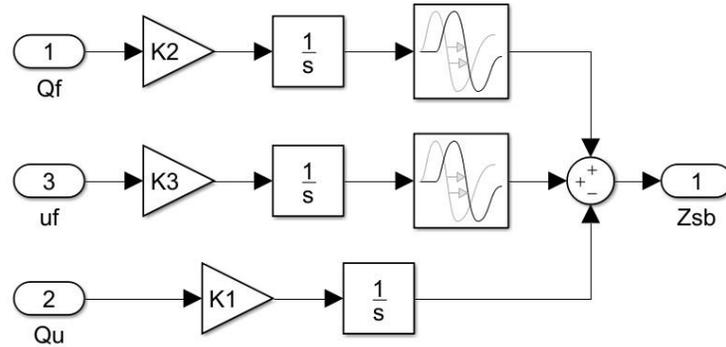


Figura 72 Diagrama de bloques linealizado del sistema en lazo abierto.

Por su parte, se desea estudiar el sistema de control, basado en un control PI, que tiene una función de transferencia dada por

$$G_c = \frac{K_p s + K_I}{s}. \quad (171)$$

Y el diagrama de bloques asociado al sistema de control simplificado sería:

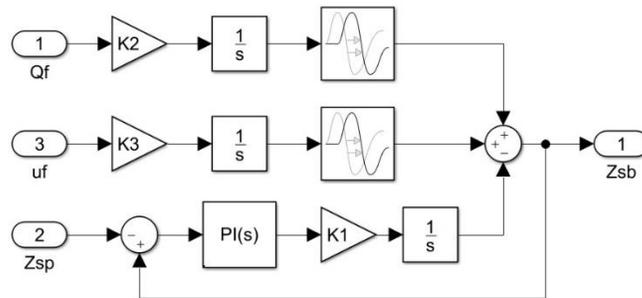


Figura 73 Diagrama de bloques del sistema de control linealizado simplificado 1.

Notar que se ignora la saturación del controlador (los límites de acción impuestos al controlador), y además se omiten las perturbaciones generadas por las acciones de control del sistema, esta última omisión se justifica bajo la suposición de pequeñas perturbaciones, y bajo la hipótesis de acción rápida.

La expresión matemática de este modelo linealizado será

$$\Delta h = \frac{G_c G_1}{1 + G_c G_1} \Delta h_{sp} + \frac{G_2}{1 + G_c G_1} \Delta Q_f + \frac{G_3}{1 + G_c G_1} \Delta u_f. \quad (172)$$

Se renombran las funciones de transferencia asociadas al lazo cerrado como sigue

$$G^1 := \frac{G_c G_1}{1 + G_c G_1} = \frac{(sK_p + K_I)K_1}{s^2 + sK_p K_1 + K_I K_1}, \quad (173)$$

$$G^2 := \frac{G_2}{1 + G_c G_1} = \frac{K_2 s e^{-\theta_2 s}}{s^2 + sK_p K_1 + K_I K_1} \quad y \quad (174)$$

$$G^3 := \frac{G_3}{1 + G_c G_1} = \frac{K_3 s e^{-\theta_3 s}}{s^2 + sK_p K_1 + K_I K_1}. \quad (175)$$

Los polos de estas funciones de transferencia pueden obtenerse resolviendo la ecuación

$$s^2 + sK_p K_1 + K_I K_1 = 0, \quad (176)$$

en este punto es conveniente escribir esta ecuación en su forma estándar

$$s^2 + 2\omega_n \xi s + \omega_n^2 = 0, \quad (177)$$

comparando ambas ecuaciones se obtienen los valores de cada uno de los parámetros

$$\omega_n = \sqrt{K_I K_1} \quad y \quad (178)$$

$$\xi = \frac{K_p K_1}{2\sqrt{K_I K_1}} \quad (179)$$

Polos con parte real negativa permiten asegurar la estabilidad³³ del sistema ante perturbaciones acotadas.

Tras denotar la ecuación de esa manera, los polos adquieren la forma

$$p_{1,2} = -\omega_n \xi \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}, \quad (180)$$

como los parámetros ω_n y ξ son positivos pues en su definición intervienen sólo productos, cocientes y raíces de cantidades positivas, se impondrá que $0 < \xi < 1$ de modo que los polos sean complejos conjugados con parte real negativa y se tenga la estabilidad del sistema, esta condición se traduce en

$$0 < K_p \sqrt{K_1} < 2\sqrt{K_I}. \quad (181)$$

³³ El sentido de la estabilidad mencionada es que entradas acotadas produzcan salidas acotadas.

El segundo problema corresponde a realizar la determinación de las constantes en base a determinadas especificaciones, en particular, en este trabajo dos especificaciones se tendrán en cuenta, asociadas al sobrepaso S^{34} , y al tiempo de estabilización t_s para alcanzar una determinada banda δ^{35} , como es bien conocido estas características se asocian a los parámetros del modelo de segundo orden como sigue

$$S = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad y \quad (182)$$

$$t_s = \ln\left(\frac{1}{\delta\sqrt{1-\xi^2}}\right) \frac{1}{\xi\omega_n}, \quad (183)$$

ambas son de simple despeje pudiéndose obtener

$$\xi = \frac{|\ln(S)|}{\sqrt{\pi^2 + \ln(S)^2}} \quad y \quad (184)$$

$$\omega_n = \ln\left(\frac{1}{\delta\sqrt{1-\xi^2}}\right) \frac{1}{\xi t_s}. \quad (185)$$

Notar que el cálculo de ω_n se realiza en base al conocimiento de ξ , finalmente es posible obtener las constantes de controlador en base a los parámetros de segundo orden mediante las siguientes relaciones

$$K_I = \frac{\omega_n^2}{K_1} \quad y \quad (186)$$

$$K_p = \frac{2\omega_n\xi}{K_1}. \quad (187)$$

La relación $0 < K_p\sqrt{K_1} < 2\sqrt{K_I}$ impone límites a las especificaciones que pueden solicitarse al controlador, en efecto, de esta desigualdad puede deducirse $\sqrt{\omega_n}\xi < 1$ que corresponde a la condición buscada.

Siguiendo este método, se consideran dos tipos de especificaciones diferentes, una para cubrir la acción rápida utilizada en las simulaciones, y otra para acción lenta, más adecuada para la experimentación, como se discute durante este trabajo.

³⁴ Este valor corresponde a un sobrepaso respecto del cambio escalón del set-point.

³⁵ Esta banda se calcula respecto del cambio escalón en el set-point.

7.8.1. Sintonización de acción rápida.

Se define para este caso un controlador de acción rápida como aquel que considera tiempos de estabilización pequeños comparados con los retardos asociados a las perturbaciones del sistema, en este caso, se observó que los retardos fueron del orden de 210 s, las solicitudes realizadas son:

Tabla 12 Solicitaciones para control Pi de acción rápida.

Solicitud	Valor
Sobrepaso	0.271
Tiempo de estabilización	17.2 s
Banda de estabilidad	0.05

Se sigue ahora el método recién presentado para obtener el factor de amortiguamiento y la frecuencia natural como sigue:

$$\xi = \frac{|\ln(0.271)|}{\sqrt{\pi^2 + \ln(0.271)^2}} = 0.384 \quad y \quad (188)$$

$$\omega_n = \ln\left(\frac{1}{0.05\sqrt{1 - 0.384^2}}\right) \frac{1}{0.384 * 17.2 \text{ s}} = 0.465s^{-1}. \quad (189)$$

Notar que el producto del factor de amortiguamiento y la raíz de la frecuencia natural tiene un valor de 0.262 que es menor a 1, lo que implica que las solicitudes son factibles, se calculan ahora las constantes del controlador asociadas a estas solicitudes son

$$K_I = \frac{(0.465s^{-1})^2}{15.12m^{-2}} = 0.0143m^2s^{-2} \quad y \quad (190)$$

$$K_P = \frac{2 * 0.465s^{-1} * 0.384}{15.12m^{-2}} = 0.0236m^2s^{-1}. \quad (191)$$

7.8.2. Sintonización de acción lenta.

Por su parte la acción lenta considera tiempos de estabilización del orden de los retardos asociados a las perturbaciones del sistema, las solicitudes para este caso fueron las siguientes:

Tabla 13 Solicitaciones para control Pi de acción lenta.

Solicitud	Valor
Sobrepaso	0.763
Tiempo de estabilización	336.1 s
Banda de estabilidad	0.05

Siguiendo el mismo método utilizado en la sección anterior, se obtienen los valores para el factor de amortiguamiento y la frecuencia natural

$$\xi = \frac{|\ln(0.763)|}{\sqrt{\pi^2 + \ln(0.763)^2}} = 0.086 \quad y \quad (192)$$

$$\omega_n = \ln\left(\frac{1}{0.05\sqrt{1 - 0.086^2}}\right) \frac{1}{0.086 * 336.1 \text{ s}} = 0.104\text{s}^{-1}. \quad (193)$$

Notar que el producto del factor de amortiguamiento y la raíz de la frecuencia natural tiene un valor de 0.0089 que es menor a 1, lo que implica que las solicitudes son factibles, se calculan ahora las constantes del controlador asociadas a estas solicitudes

$$K_I = \frac{(0.104\text{s}^{-1})^2}{15.12\text{m}^{-2}} = 7.14 \times 10^{-4} \text{ m}^2\text{s}^{-2} \quad y \quad (194)$$

$$K_P = \frac{2 * 0.104\text{s}^{-1} * 0.086}{15.12\text{m}^{-2}} = 1.18 \times 10^{-3} \text{ m}^2\text{s}^{-1}. \quad (195)$$

7.8.3. Generalización del modelo.

Es importante considerar que la sintonización de acción lenta no entrega constantes de controlador que se correspondan con la respuesta dinámica de segundo orden dada por el modelo simplificado de control, esto debido a que la propagación de las perturbaciones producto de las acciones de control es más rápida que la estabilización en sí, generando multitud de soluciones cualitativamente distintas en base al tiempo de propagación de las perturbaciones, los tiempos de estabilización y las condiciones de operación.

El autor propone como siguiente paso en el estudio de este control el trabajo sobre el siguiente lazo, que representa mucho mejor la realidad del sistema:

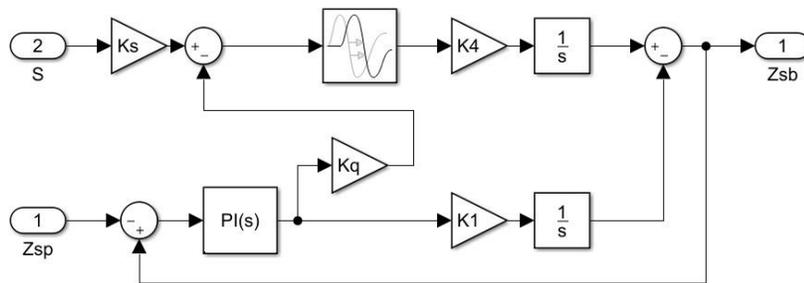


Figura 74 Diagrama de bloques del sistema de control linealizado simplificado 2.

Donde K_s corresponde a la constante que cuantifica el efecto de un cambio en la alimentación de sólidos sobre la concentración conjugada, K_q cuantifica el efecto del caudal de descarga sobre la concentración conjugada, K_4 cuantifica el efecto de un cambio en la concentración conjugada sobre la cama de sedimento, y K_1 cuantifica el efecto de un cambio en el caudal de descarga sobre la altura de la cama de sedimento.

Diagrama que puede ser planteado ante las siguientes suposiciones:

- 1) La acción de control no alcanza en ningún momento la saturación.
- 2) El tiempo de simulación es pequeño comparado con el tiempo que toma a las ondas de rarefacción de la zona de sedimento propagarse hasta alcanzar su destino.
- 3) El tiempo de propagación de las perturbaciones es constante, es decir independiente del caudal de descarga, de la concentración conjugada y de la altura de cama de sedimento, esto implica que las modificaciones en estas tres variables no pueden ser de gran tamaño.

- 4) La propagación de perturbaciones en la zona de sedimentación se realiza mediante ondas de choque (es decir, los cambios en la concentración conjugada serán abruptos).

La figura 6, la figura 67 así como la ecuación (44) justifican que la dependencia funcional de la concentración conjugada con el caudal de descarga corresponda a una ganancia multiplicada por la magnitud del cambio en el caudal de descarga, la dependencia de esta constante con las condiciones de operación y los parámetros de la función constitutiva del material se abordan también más adelante.

Este diagrama de bloques tiene en consideración el efecto del caudal de descarga sobre la concentración conjugada y debiera, en principio, permitir estudiar la estabilidad de sistemas de acción lenta, y si cabe, realizar una sintonización adecuada, sin embargo, la sintonización de este sistema, salvo para casos límite donde θ es muy pequeño o muy grande, es de una complejidad mayor al sistema propuesto anteriormente.

Este diagrama permite observar de mucho mejor manera la aparición de falsos estados estacionarios de primera especie, sin embargo, producto de las suposiciones hechas para construirlo, no considera la aparición de falsos estados estacionarios de segunda especie.

Se propone aquí un análisis de la estabilidad de este sistema, para esto se realiza primero un cálculo de los valores de las distintas constantes presentes en él:

7.8.3.1. Cálculo de K_S y K_4

La constante K_S tiene en consideración el efecto de la alimentación de sólidos sobre la concentración conjugada, para calcularla, se hará uso de la siguiente figura, que muestra cómo cambia la concentración conjugada ante un cambio escalón en la alimentación de sólidos:

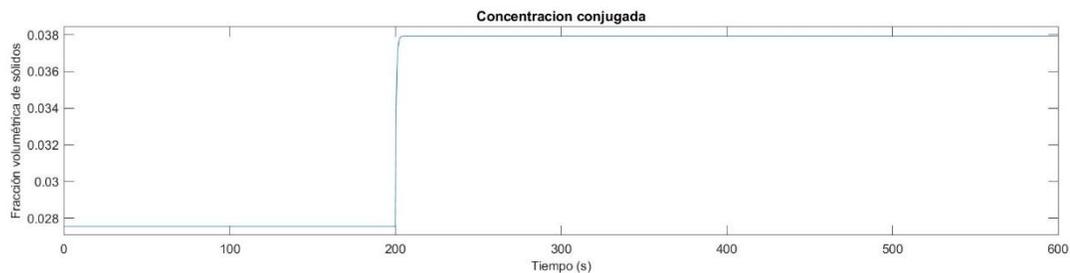


Figura 75 Concentración conjugada ante cambio escalón en la alimentación de sólidos.

Se calcula la constante como el cociente entre la magnitud de la modificación en la concentración conjugada y la modificación en la alimentación de sólidos

$$K_s = \frac{0.0379 - 0.0276}{2.00 \times 10^{-6} m^3 s^{-1}} = 5150 m^{-3} s^1. \quad (196)$$

Por su parte, la constante K_4 tiene en cuenta el efecto de un cambio en la concentración conjugada en la cama de sedimento una vez propagada, para calcular esto, basta considerar que la constante calculada en la sección 7.7.4 representa el efecto que un cambio en la alimentación de sólidos tiene en la cama de sedimento

$$K' = \frac{\text{Crecimiento en la cama de sedimento}}{\text{Cambio en la concentración conjugada}} \quad (197)$$

$$* \frac{\text{Cambio en la concentración conjugada}}{\text{Cambio en la alimentación}} = K_4 K_s,$$

luego:

$$K_4 = \frac{K'}{K_s} = \frac{44 m^{-2}}{5150 m^{-3} s^1} = 8.54 \times 10^{-3} m s^{-1}. \quad (198)$$

7.8.3.2. Cálculo de K_1 y K_q

El valor de K_1 , que corresponde al efecto de un cambio escalón en el caudal de descarga sobre la pendiente de crecimiento de la altura cama de sedimento con el signo cambiado, no sufre alteraciones respecto de lo calculado en la sección 7.7.1, por lo que su valor permanece inalterado por este cambio en el diagrama de bloques, por otro lado, el valor de K_q puede ser calculado a partir de la figura 6

$$K_q = \frac{0.0276 - 0.0266}{8.33 \times 10^{-6} m^3 s^{-1}} = 120 m^{-3} s. \quad (199)$$

Debido a la no linealidad de (44), la constante K_q es bastante sensible respecto de los valores iniciales y finales de Q_u , se utilizará el valor recién calculado, sin embargo, es posible plantear un recálculo más preciso en base a la ecuación mencionada.

7.8.3.3. Funciones de transferencia, aproximaciones y análisis de estabilidad.

Se puede matematizar el diagrama de bloques propuesto en la figura 66 de la siguiente manera

$$z_{sb} = G_1 S + G_2 z_{sp}, \quad (200)$$

recordar que en este contexto, S , z_{sb} y z_{sp} corresponden a la transformada de Laplace de las modificaciones en las variables en el tiempo, aquí las funciones de transferencia G_1 y G_2 adquieren la siguiente forma específica:

$$G_1 = \frac{K_s K_4 s e^{-\theta s}}{s^2 + (K_I + K_p s)(K_1 + K_q K_4 e^{-\theta s})} \quad y \quad (201)$$

$$G_2 = \frac{(K_I + K_p s)(K_1 + K_q K_4 e^{-\theta s})}{s^2 + (K_I + K_p s)(K_1 + K_q K_4 e^{-\theta s})}. \quad (202)$$

Estudiar la estabilidad de este sistema es estudiar el signo de los polos de estas funciones de transferencia, sin embargo, el término exponencial impide hacer esto de forma sencilla, una primera solución es aproximar la exponencial por alguna función racional, se utilizará la aproximación de Pade de primer orden, que está dada por

$$e^{-\theta s} = \frac{1 - \frac{\theta s}{2}}{1 + \frac{\theta s}{2}}. \quad (203)$$

Ambas funciones de transferencia poseen los mismos polos, así que se considerará sólo G_2 en el análisis

$$G_2 = \frac{(K_I + K_p s) \left(K_1 + K_q K_4 \left(\frac{1 - \frac{\theta s}{2}}{1 + \frac{\theta s}{2}} \right) \right)}{s^2 + (K_I + K_p s) \left(K_1 + K_q K_4 \left(\frac{1 - \frac{\theta s}{2}}{1 + \frac{\theta s}{2}} \right) \right)}, \quad (204)$$

desarrollando esta expresión se obtiene

$$G_2 = \frac{(K_I + K_p s) \left(K_1 \left(1 + \frac{\theta s}{2} \right) + K_q K_4 \left(1 - \frac{\theta s}{2} \right) \right)}{s^2 \left(1 + \frac{\theta s}{2} \right) + (K_I + K_p s) \left(K_1 \left(1 + \frac{\theta s}{2} \right) + K_q K_4 \left(1 - \frac{\theta s}{2} \right) \right)}. \quad (205)$$

En este punto sólo es necesario considerar el denominador de esta función de transferencia:

$$p(s) = s^2 \left(1 + \frac{\theta s}{2}\right) + (K_I + K_p s) \left(K_1 \left(1 + \frac{\theta s}{2}\right) + K_q K_4 \left(1 - \frac{\theta s}{2}\right)\right), \quad (206)$$

desarrollando este polinomio se obtiene

$$p(s) = s^3 \left(\frac{\theta}{2}\right) + s^2 \left(1 + \frac{K_p \theta}{2} [K_1 - K_q K_4]\right) + s \left(\frac{K_I \theta}{2} [K_1 - K_q K_4] + K_p [K_1 + K_q K_4]\right) + K_I (K_1 + K_q K_4). \quad (207)$$

Se definen los siguientes términos:

$$a_3 = \frac{\theta}{2}, \quad (208)$$

$$a_2 = 1 + \frac{K_p \theta}{2} [K_1 - K_q K_4], \quad (209)$$

$$a_1 = \frac{K_I \theta}{2} [K_1 - K_q K_4] + K_p [K_1 + K_q K_4] \quad y \quad (210)$$

$$a_0 = K_I (K_1 + K_q K_4), \quad (211)$$

de modo que el polinomio queda escrito como sigue:

$$p(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0. \quad (212)$$

Se debe estudiar el signo de la parte real de los ceros de este polinomio, para esto se utilizar el criterio de Ruth-Hurwitz, cuya primera exigencia es que cada coeficiente de este polinomio sea positivo, lo cual está asegurado para a_3 y a_0 , sin embargo no necesariamente es el caso para a_2 y a_1 , por lo que debe imponerse como condición (se hará explícito al final).

El segundo paso en la aplicación de este criterio es la construcción de la siguiente tabla:

$$\begin{array}{r|ll} s^3 & a_3 & a_1 \\ s^2 & a_2 & a_0 \\ s & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 1 & \beta_1 & \end{array}$$

Donde:

$$\alpha_1 = \frac{a_2 a_1 - a_3 a_0}{a_2}, \quad (213)$$

$$\alpha_2 = \frac{0 * a_2 - 0 * a_3}{a_2} = 0 \quad y \quad (214)$$

$$\beta_1 = \frac{(\alpha_1 a_0 - \alpha_2 a_2)}{\alpha_1} = a_0. \quad (215)$$

El criterio de Ruth-Hurwitz asegura que el número de polos con parte real positiva es igual al número de cambios de signo, de los elementos de la primera columna, es decir, que debe exigirse que a_3 , a_2 , α_1 y β_1 sean todos mayores a cero, es sabido que $a_3 > 0$, y que $\beta_1 = a_0 > 0$, además $a_2 > 0$ por una imposición anterior, luego, la aplicación del criterio sólo suma una condición más que es:

$$\alpha_1 = \frac{a_2 a_1 - a_3 a_0}{a_2} > 0. \quad (216)$$

En resumen, la estabilidad para este modelo simplificado mediante la aproximación de Padé de primer orden exige las siguientes condiciones:

$$a_1 > 0, \quad (217)$$

$$a_2 > 0 \quad y \quad (218)$$

$$\frac{a_2 a_1 - a_3 a_0}{a_2} > 0. \quad (219)$$

Se aplica ahora este criterio a los sistemas de acción rápida y acción lenta como sigue:

Tabla 14 Parámetros de la tabla de Ruth-Hurwitz

Parámetro	Acción Rápida	Acción Lenta
a_0	0.231	0.012
a_1	21.15	1.06
a_2	35.93	2.74
a_3	105	105
α_1	20.47	0.616

Lo que predice que tanto el sistema de acción rápida como el de acción lenta son estables, esto está de acuerdo con las simulaciones basadas en el sistema linealizado a realizarse en la próxima sección, sin embargo, en desacuerdo con lo obtenido en las simulaciones no lineales, es decir, no es capaz de reproducir adecuadamente la aparición de inestabilidades en el sistema.

Por su parte es importante considerar el pequeño valor que tiene α_1 y a_0 para el controlador de acción lenta, es decir, la estabilidad o inestabilidad predicha por este método para el controlador de acción lenta es muy sensible a modificaciones en las constantes que modelan el sistema, así cambios de un

orden de magnitud en las constantes K_4 o K_q generan inestabilidades del sistema, la dependencia de estas constantes con la operación actual puede ser señalada como una causa de este comportamiento.

Se desarrollan ahora las expresiones para aproximaciones de Pade de un orden arbitrario.

La aproximación de Pade de orden n para la exponencial se basa en la siguiente reescritura de esta función

$$e^{-\theta s} = \frac{e^{-\frac{\theta s}{2}}}{e^{\frac{\theta s}{2}}} \approx \frac{p_n\left(-\frac{\theta s}{2}\right)}{p_n\left(\frac{\theta s}{2}\right)}, \quad (220)$$

donde p_n corresponde al polinomio de Taylor de orden n para la exponencial, se reemplaza esta aproximación en la ecuación (201) y se obtiene

$$G_1 = \frac{K_s K_4 s \left(\frac{p_n\left(-\frac{\theta s}{2}\right)}{p_n\left(\frac{\theta s}{2}\right)} \right)}{s^2 + (K_I + K_p s) \left(K_1 + K_q K_4 \left(\frac{p_n\left(-\frac{\theta s}{2}\right)}{p_n\left(\frac{\theta s}{2}\right)} \right) \right)}, \quad (221)$$

si se desarrolla esta expresión se obtiene:

$$G_1 = \frac{K_s K_4 s p_n\left(-\frac{\theta s}{2}\right)}{s^2 p_n\left(\frac{\theta s}{2}\right) + (K_I + K_p s) \left(K_1 p_n\left(\frac{\theta s}{2}\right) + K_q K_4 p_n\left(-\frac{\theta s}{2}\right) \right)}. \quad (222)$$

Y el polinomio cuyo estudio interesa será:

$$q_n(s) = s^2 p_n\left(\frac{\theta s}{2}\right) + (K_I + K_p s) \left(K_1 p_n\left(\frac{\theta s}{2}\right) + K_q K_4 p_n\left(-\frac{\theta s}{2}\right) \right). \quad (223)$$

Polinomio de grado $n + 2$, el tratamiento algebraico de esta expresión puede ser engorroso para polinomios p_n de grado alto, sin embargo, gracias a programas de álgebra computacional como Matlab o Maple, es posible obtener rápidamente expresiones para el polinomio q_n , se adjunta un algoritmo programado en el paquete simbólico de Matlab Symbolic Math Toolbox que, dado un n y las constantes del sistema, calcula la expresión analítica del polinomio q_n , los valores numéricos de los coeficientes del polinomio, las raíces numéricas del polinomio, además de una matriz que representa

la tabla del criterio de Ruth-Hurwitz, debido a las limitaciones de los números *double-precision* y la presencia de factoriales en las ecuaciones, el algoritmo es adecuado para órdenes menores a 21.

Algoritmo 1 Programa en MATLAB para el estudio de la estabilidad del sistema con una aproximación de Pade de orden n.

```

%Se definen las variables simbólicas%
syms s Ki Kp Kl Kq K4 theta
%Se solicita un valor n de entrada correspondiente al orden de la aproximación
de Pade%
n=12; %Ingrésese el orden del polinomio%
%Se solicita el valor numérico de las constantes del sistema%
[vKi vKp vKl vKq vK4 vtheta]=[0.0143 0.0236 15.12 120 0.00854 210];
%Se construye el polinomio de Taylor de orden n para la exponencial%
p =1;
for i=1:n
    p=p+s^i/factorial(i);
end
%Se construye y reporta el polinomio q%
q=
collect (expand (s^2*subs (p, s, theta*s/2) + (Ki+Kp*s) * (Kl*subs (p, s, theta*s/2) +Kq*K4*
subs (p, s, -theta*s/2))), s)
%Se extraen y reportan los coeficientes del polinomio q%
a=coeffs (q, s)
%Se evalúan numéricamente las constantes del sistema en el polinomio q, y se
reporta el polinomio con los coeficientes numéricos%
qq=subs (subs (subs (subs (subs (subs (q, theta, vtheta) , Ki, vKi) , Kp, vKp) , Kl, vKl) , K4, vK4
) , Kq, vKq)
%Se determinan los valores numéricos de las raíces del polinomio q%
r=double (solve (qq, s) );
%Se busca determinar la mayor parte real de entre las raíces del polinomio q%
rmax=max (real (r) );
%Se define una matriz que representa los coeficientes de la tabla de Ruth-
Hurwitz%
M=sym (zeros (n+3, n+3) );
for i=1:ceil ((n+3)/2)
    M(1, i)=a (n+3-2* (i-1) );
end
for i=1:floor ((n+3)/2)
    M(2, i)=a (n+3-2* (i-1) -1) ;
end
for i=3:n+3
    for j=1:n+3-i+1
        M(i, j)=(M(i-1, 1) *M(i-2, j+1) -M(i-2, 1) *M(i-1, j+1) ) /M(i-1, 1) ;
    end
end
M=simplify (M) ;
Mnum=double (subs (subs (subs (subs (subs (subs (M, theta, vtheta) , Ki, vKi) , Kp, vKp) , Kl, vK
1) , K4, vK4) , Kq, vKq) );

```

Se construye ahora la tabla de Ruth-Hurwitz con aproximación de Pade de cuarto orden para el control PI de acción rápida y acción lenta:

Tabla 15 Tabla de Ruth-Hurwitz con una aproximación de Pade de cuarto orden para acción rápida.

s^6	$5.06x10^6$	$1.24x10^6$	$1.31x10^3$	0.231
s^5	$2.12x10^6$	$4.11x10^4$	21.5	
s^4	$1.14x10^6$	$1.23x10^3$	0.231	
s^3	$3.88x10^4$	21.1		
s^2	$6.36x10^2$	0.231		
s	7.04			
1	0.231			

Tabla 16 Tabla de Ruth-Hurwitz con una aproximación de Pade de cuarto orden para acción lenta.

s^6	$5.06x10^6$	$6.71x10^4$	66.2	$1.15x10^{-2}$
s^5	$2.89x10^5$	$2.15x10^3$	1.08	
s^4	$2.94x10^4$	47.5	$1.15x10^{-2}$	
s^3	$1.69x10^3$	0.962		
s^2	30.6	$1.15x10^{-2}$		
s	0.329			
1	$1.15x10^{-2}$			

Hasta orden 4 el método predice estabilidad para ambos controladores, al aumentar el grado de aproximación³⁶, el método predice inestabilidad para el control de acción rápida y la acción lenta.

Más adelante se propondrá un tercer tipo de control, el controlador de acción ultra-lenta con un método de sintonización levemente distinto, la acción ultralenta considera tiempos de estabilización mucho más grandes que el retardo del sistema, esta propiedad permite en principio utilizar el método propuesto para estudiar la estabilidad del sistema en este caso, se probará este método para aproximaciones de Pade de primer y cuarto orden con la finalidad de verificar esta hipótesis.

Tabla 17 Coeficientes polinómicos, y parámetros de la tabla de Ruth-Hurwitz primer orden para acción ultra lenta.

s^3	105	$7.32x10^{-4}$
s^2	1.07	$1.87x10^{-7}$
s	$7.14x10^{-4}$	
1	$1.87x10^{-7}$	

³⁶ El autor utilizó el algoritmo con órdenes menores o iguales a 15 para confirmar esta afirmación.

Tabla 18 Tabla de Ruth-Hurwitz con una aproximación de Pade de cuarto orden para acción ultra lenta.

s^6	5.06×10^6	5.63×10^3	1.07	1.87×10^{-7}
s^5	1.97×10^5	1.09×10^2	7.32×10^{-4}	
s^4	2.83×10^3	1.05	1.87×10^{-7}	
s^3	36.1	7.19×10^{-4}		
s^2	0.99	1.87×10^{-7}		
s	7.13×10^{-4}			
1	1.87×10^{-7}			

En ambos casos los términos de la primera columna de la tabla son positivos, es decir, este método predice estabilidad en ambos casos, es importante mencionar que para orden cinco y superiores, pierde esta propiedad.

7.8.3.4. Simulaciones con el lazo de control propuesto.

Se programa el lazo de control propuesto mediante el software Simulink de Matlab, los parámetros utilizados son los dados en las secciones anteriores, y los cambios escalón son los mismos correspondientes a las simulaciones realizadas anteriormente.

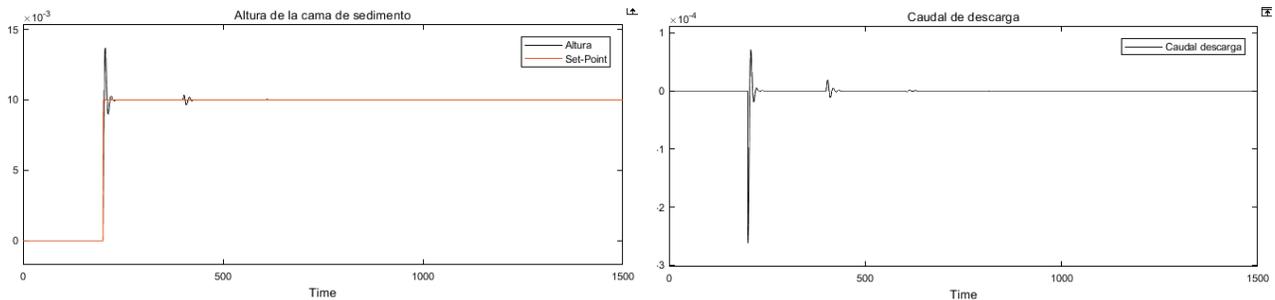


Figura 76 Respuestas dinámicas para un cambio positivo en el set-point para el controlador PI de acción rápida.

Si bien cumple los objetivos de control y representa relativamente bien a la dinámica del sistema mostrando los falsos estados estacionarios de primera especie, la falta de saturación genera que las respuestas sean inconsistentes con las condiciones impuestas al sistema, prediciendo incluso caudales negativos, sin embargo, la versión es adecuada para pequeñas variaciones en el set-point.

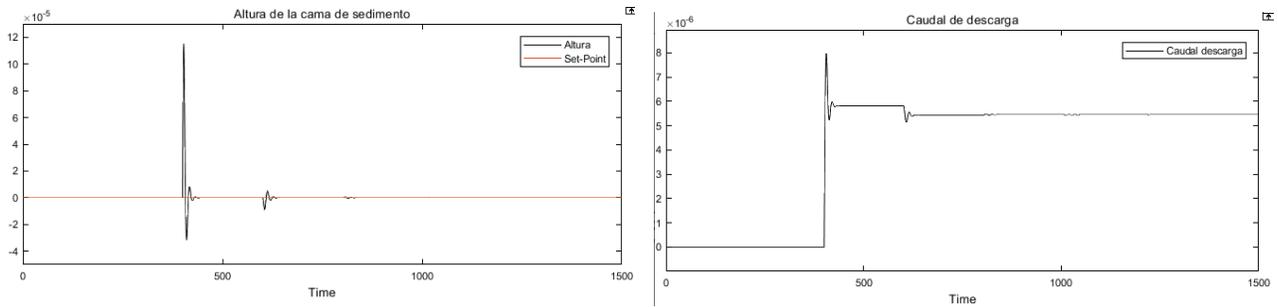


Figura 77 Respuestas dinámicas para un cambio positivo en la alimentación de sólidos para el controlador PI de acción rápida.

Considérense como punto de comparación las figuras 18 y 37, notar que reproduce de manera casi exacta la respuesta cualitativa de la figura 37, mientras que no reproduce bien los resultados de la figura 18, este fallo es debido a que la propagación de la nueva concentración en ese caso es mediante una onda de rarefacción, es decir, la concentración conjugada que llega a la cama de sedimento varía continuamente hasta alcanzar el nuevo valor estacionario.

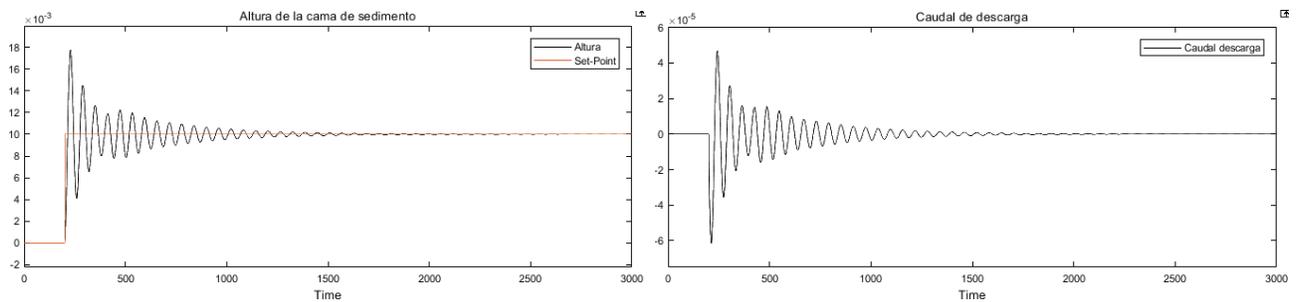


Figura 78 Respuestas dinámicas para un cambio positivo en el set-point para el controlador PI de acción lenta.

Aquí el sistema manifiesta un comportamiento muy similar al que puede observarse en la figura 40.

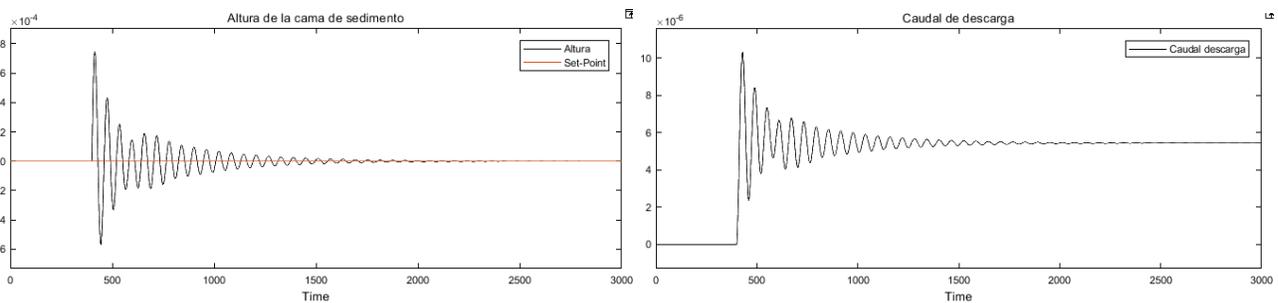


Figura 79 Respuestas dinámicas para un cambio positivo en la alimentación de sólidos para el controlador PI de acción lenta.

Se aprecian diferencias importantes respecto de lo que puede observarse en la figura 42, el modelo no lineal presenta inestabilidades mientras el modelo linealizado si las presenta.

7.8.3.5. Sintonización de Acción Ultra Rápida y Ultra Lenta

Los estudios de estabilidad y las simulaciones recién realizadas demuestran que la aproximación de Pade para la exponencial es inadecuada para la aproximación de los retardos presentes en el sistema, sobre todo en el caso del controlador de acción lenta, esto se debe a que para este controlador la propagación de las perturbaciones es del orden de los tiempos de acción del sistema, mientras la aproximación de Pade funciona bien para retardos pequeños, sin embargo, aún es posible estudiar el sistema en casos límites, cuando el retardo es muy grande y cuando es muy pequeño comparado a la acción del sistema, como se verá el modelo estudiado en el primer apartado de la sección 7.8 corresponde a uno de estos casos:

i) Acción Ultra rápida.

Corresponde al caso límite en que las acciones del controlador son mucho más rápidas que la propagación de perturbaciones en el espesor, el límite a aplicar es $\theta \rightarrow \infty$, lo que genera que $e^{-\theta s} \rightarrow 0$, y las funciones de transferencia se convierten en

$$G_1 = 0 \quad y \quad (224)$$

$$G_2 = \frac{K_1(K_I + K_p s)}{s^2 + K_1(K_I + K_p s)}. \quad (225)$$

Notar que G_2 permanece inalterada respecto de la obtenida en la ecuación (173), al ser esta la función de transferencia utilizada en la sintonización, el método seguido permanece igual, por lo que la sintonización de acción ultra rápida coincide con la de acción rápida.

ii) Acción Ultra lenta.

Este caso límite corresponde al sistema en que las acciones del controlador son mucho más lentas que los retardos del sistema, en otras palabras, este sistema considera que los efectos de sus propias acciones de control se propagan instantáneamente en el espesor, corresponde al caso en que $\theta \rightarrow 0$, lo que se traduce en que $e^{-\theta s} \rightarrow 1$, y las funciones de transferencia del sistema serían:

$$G_1 = \frac{K_s K_4 s}{s^2 + (K_I + K_p s)(K_1 + K_q K_4)} \quad y \quad (226)$$

$$G_2 = \frac{(K_I + K_p s)(K_1 + K_q K_4)}{s^2 + (K_I + K_p s)(K_1 + K_q K_4)}. \quad (227)$$

Se considerarán nuevamente especificaciones del mismo tipo considerado para la sintonización de acción rápida, es decir, tiempo de estabilización y sobrepaso, se sigue el mismo procedimiento, asimilando el denominador de la función de transferencia G_2 a una ecuación cuadrática de forma canónica

$$s^2 + K_p(K_1 + K_q K_4)s + K_I(K_1 + K_q K_4) = s^2 + 2\omega_n \xi + \omega_n^2. \quad (228)$$

Obteniéndose las siguientes expresiones

$$\omega_n = \sqrt{K_I(K_1 + K_q K_4)} \quad y \quad (229)$$

$$\xi = \frac{K_p \sqrt{(K_1 + K_q K_4)}}{2\sqrt{K_I}}. \quad (230)$$

Estas ecuaciones pueden reescribirse como

$$K_I = \frac{\omega_n^2}{(K_1 + K_q K_4)} \quad y \quad (231)$$

$$K_p = \frac{2\xi \omega_n}{(K_1 + K_q K_4)}. \quad (232)$$

Las especificaciones siguen las mismas ecuaciones (202) y (203) que permiten cerrar el problema de la estabilización, considérese el siguiente ejemplo:

Tabla 19 Solicitaciones para control Pi de acción ultra lenta.

Solicitud	Valor
Sobrepaso	0.01
Tiempo de estabilización	10000 s
Banda de estabilidad	0.05

Siguiendo el mismo método utilizado en la sección anterior, se obtienen los valores para el factor de amortiguamiento y la frecuencia natural:

$$\xi = \frac{|\ln(0.01)|}{\sqrt{\pi^2 + \ln(0.01)^2}} = 0.826 \quad (233)$$

$$\omega_n = \ln\left(\frac{1}{0.05\sqrt{1 - 0.826^2}}\right) \frac{1}{0.826 * 10000 \text{ s}} = 4.32 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1} \quad (234)$$

Notar que el producto del factor de amortiguamiento y la raíz de la frecuencia natural tiene un valor de 0.017 que es menor a 1, lo que implica que las sollicitaciones son factibles, se calculan ahora las constantes del controlador asociadas a estas sollicitaciones:

$$K_I = \frac{(4.32 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1})^2}{(15.1 \text{ m}^{-2} + 120 \text{ m}^{-3} * 8.54 \times 10^{-3} \text{ ms}^{-1})} = 1.16 \times 10^{-8} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \quad (235)$$

$$K_P = \frac{2 * 0.826 * 4.32 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}}{(15.1 \text{ m}^{-2} + 120 \text{ m}^{-3} * 8.54 \times 10^{-3} \text{ ms}^{-1})} = 4.43 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad (236)$$

El desempeño de la aplicación de estas constantes se grafica a continuación.

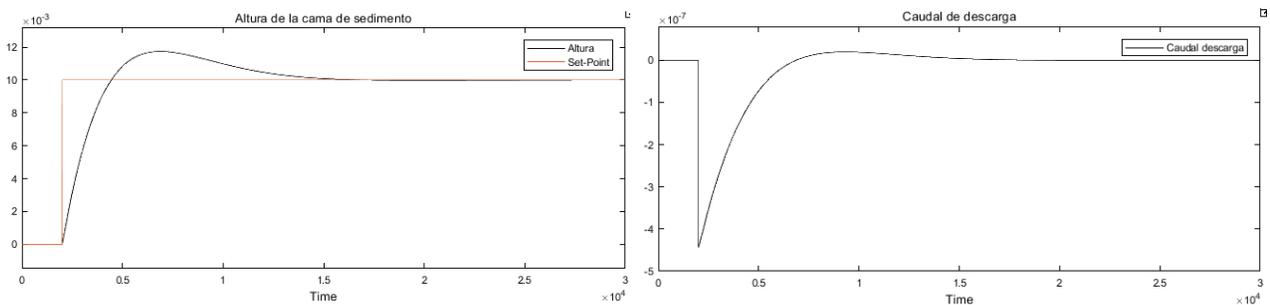


Figura 80 Respuestas dinámicas del sistema de control PI de acción ultra lenta a un cambio positivo en el set-point.

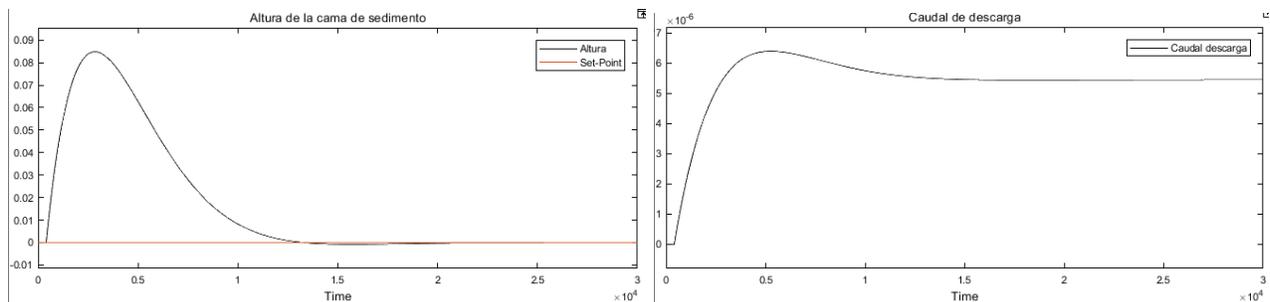


Figura 81 Respuestas dinámicas del sistema de control PI de acción ultra lenta a un cambio positivo en la alimentación de sólidos.

Las respuestas a este tipo de control poseen excelentes propiedades, el sistema es estable, y muy respetuoso respecto a modificaciones en el caudal de descarga, sin embargo, su respuesta es mucho más lenta que su par de acción rápida, prolongándose la dinámica del proceso durante varias horas, con todo, el espesamiento es un proceso lento, por lo que un controlador de acción ultra-lenta aparece como una excelente aproximación para el diseño y sintonización de sistemas de control para espesadores industriales.

7.8.3.6. Dependencia de las constantes del modelo con los parámetros de operación.

El modelo simplificado es capaz de reproducir con éxito comportamientos cualitativos importantes del sistema como la existencia de falsos estados estacionarios de 1ra especie, y estabilidad/inestabilidad para casos límites, sin embargo, posee una serie de limitaciones a tener en consideración, la limitación que se tendrá en cuenta aquí corresponde a la expresión funcional de las funciones de transferencia representadas por K_S y K_q , y es que, para el tipo de respuestas que genera el sistema de control en las simulaciones consideradas, no corresponden realmente a funciones lineales de las entradas, y en su lugar muestran cierta dependencia funcional con la variable de entrada x , la variable de salida y , y de otras variables del sistema de modo que

$$\Delta y = K_i(x, y, z, \dots) \Delta x. \quad (237)$$

La determinación de expresiones funcionales simples para estas constantes aparece como un problema de importancia no menor si se desea mejorar el modelo considerado.

Para K_S , que cuantifica el efecto de la alimentación de sólidos sobre la concentración conjugada, se parte desde la ecuación (44), que se multiplica por el área y posteriormente se deriva implícitamente respecto de S , obteniendo

$$\frac{\partial u_c}{\partial S} = \frac{1}{Af'_b(u_c) + Q_u}. \quad (238)$$

Una primera aproximación sería considerar esta derivada evaluada en el punto de operación como la constante deseada, el valor derivado de esta asunción es

$$K_S = 4627m^{-3}s. \quad (239)$$

Valor cercano al obtenido en 7.8.3.1, sin embargo, depende del valor de la concentración conjugada, se desea correlacionar esta constante con variables de operación de simple medición como las variables de alimentación y descarga, y los parámetros de las funciones constitutivas.

Así, considérese un pequeño cambio dS en la alimentación de sólidos, este genera una pequeña alteración du_c en la concentración conjugada, dada por

$$du_c = \frac{1}{Af'_b(u_c) + Q_u} dS, \quad (240)$$

integrando esta expresión entre las alimentaciones S_1 y S_2 se obtiene:

$$\Delta u_c = \int_{S_1}^{S_2} \frac{1}{Af'_b(u_c) + Q_u} dS. \quad (241)$$

Esta expresión permite evaluar de forma exacta la modificación en la concentración conjugada ante un cambio en la alimentación, esta integral en general no es simple de evaluar, sin embargo, puede resolverse aproximadamente bajo una serie de consideraciones:

Se calcula la derivada de la función de flujo de Richardson y Zaki, obteniéndose:

$$f'_b(u) = f_b(u) \left[\frac{1 - (c + 1)u}{u(1 - u)} \right], \quad (242)$$

si se supone que la concentración es pequeña comparada con el valor de concentración asociado al máximo de la función de flujo batch, se puede suponer que $(1 - u) \approx 1$, luego

$$f'_b(u) \approx f_b(u) \left[\frac{1 - (c + 1)u}{u} \right], \quad (243)$$

además, de la ecuación (60), se tiene que $Af_b(u) = S - Q_u u$:

$$f'_b(u) \approx \frac{(S - Q_u u)}{A} \left[\frac{1 - (c + 1)u}{u} \right]. \quad (244)$$

Se considera en este punto que la función de flujo de Richardson y Zaki previo a alcanzar su máximo manifiesta un comportamiento aproximadamente lineal, en particular se ensaya una función de forma

$$f_b(u) \approx \kappa v_\infty u. \quad (245)$$

El valor de κ puede ser obtenido en base a la minimización de la siguiente función

$$\gamma(\kappa) = \int_0^{\frac{1}{2c+2}} (\kappa v_\infty u - f_b(u))^2 du, \quad (246)$$

donde el límite superior de integración se eligió de modo que llegue hasta la mitad de la concentración asociada al máximo de la función de flujo batch, se desarrolla el cuadrado de binomio en el integrando y se utiliza la linealidad de la integral para escribir lo siguiente

$$\gamma(\kappa) = \kappa^2 \int_0^{\frac{1}{2c+2}} (v_\infty u)^2 du - 2\kappa \int_0^{\frac{1}{2c+2}} f_b(u) v_\infty u du + \int_0^{\frac{1}{2c+2}} f_b(u)^2 du, \quad (247)$$

se renombran los parámetros de modo que la función queda escrita como sigue:

$$\gamma(\kappa) = a^2 \kappa^2 - 2ab\kappa + c^2 \quad (248)$$

Los valores de cada constante pueden ser obtenidos por simple inspección, se realiza una completación de cuadrados, quedando

$$\gamma(\kappa) = (a\kappa - b)^2 + c^2 - b^2, \quad (249)$$

función que se hace mínima al hacerse cero el término elevado al cuadrado, entregando la solución:

$$\kappa = \frac{b}{a} = \frac{\int_0^1 \frac{1}{2c+2} f_b(u) u du}{v_\infty \int_0^1 \frac{1}{2c+2} u^2 du}. \quad (250)$$

Se calcula el valor numérico de κ para la función de flujo que compete, obteniéndose:

$$\kappa = 0.7103. \quad (251)$$

Se adjunta un gráfico que permite visualizar la pertinencia de esta aproximación:

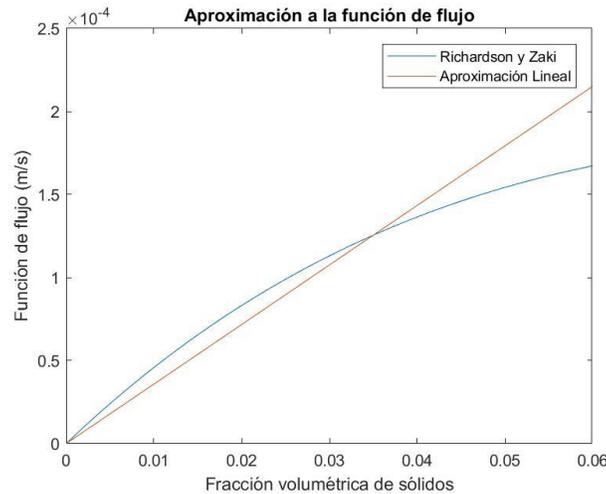


Figura 82 Comparación entre la función de flujo de Richardson y Zaki y la aproximación lineal propuesta.

Utilizando esta forma funcional para la función de flujo batch se obtiene

$$u_c = \frac{S}{A\kappa v_\infty + Q_u}, \quad (252)$$

se reemplaza esta expresión para la concentración conjugada en la ecuación (244), y tras manipulaciones algebraicas se obtiene:

$$f'_b(u) \approx \kappa v_\infty \left[1 - \frac{(c+1)S}{(A\kappa v_\infty + Q_u)} \right]. \quad (253)$$

Si se reemplaza esta expresión en la ecuación (240) se puede escribir tras aproximar los diferenciales por diferencias

$$\Delta u_c \approx \frac{A\kappa v_\infty + Q_u}{[(A\kappa v_\infty + Q_u)^2 - S_1 A\kappa v_\infty (c + 1)]} \Delta S. \quad (254)$$

Nótese la dependencia de esta expresión respecto a S_1 , si se calcula su valor numérico para los parámetros considerados en las simulaciones se obtiene un valor de:

$$K_s = 5219 m^{-3} s, \quad (255)$$

que es un valor muy similar al obtenido en la sección 7.8.3.1.

Un atractivo importante en esta expresión es que ofrece una dependencia funcional entre la constante K_s y la alimentación de sólidos:

$$K_s = \frac{a}{b - S'}, \quad (256)$$

donde a y b son parámetros ajustables positivos.

También esta expresión permite evaluar la integral analíticamente, así, se reemplaza (253) en la integral a resolver obteniéndose

$$\Delta u_c = \int_{S_1}^{S_2} \frac{1}{A\kappa v_\infty \left[1 - \frac{(c+1)S}{(A\kappa v_\infty + Q_u)} \right] + Q_u} dS, \quad (257)$$

que tras algunas manipulaciones algebraicas se puede escribir como:

$$\Delta u_c = -\frac{(A\kappa v_\infty + Q_u)}{A\kappa v_\infty (c + 1)} \int_{S_1}^{S_2} \frac{1}{\left[S - \frac{(A\kappa v_\infty + Q_u)^2}{A\kappa v_\infty (c + 1)} \right]} dS, \quad (258)$$

integral que puede resolverse obteniendo:

$$\Delta u_c \approx -\frac{A\kappa v_\infty + Q_u}{A\kappa v_\infty (c + 1)} \left[\ln \left(\left| S_2 - \frac{(A\kappa v_\infty + Q_u)^2}{A\kappa v_\infty (c + 1)} \right| \right) - \ln \left(\left| S_1 - \frac{(A\kappa v_\infty + Q_u)^2}{A\kappa v_\infty (c + 1)} \right| \right) \right]. \quad (259)$$

Ahora bien, $S_2 = S_1 + \Delta S$:

$$\Delta u_c \approx -\frac{A\kappa v_\infty + Q_u}{A\kappa v_\infty (c + 1)} \left[\ln \left(\left| S_1 - \frac{(A\kappa v_\infty + Q_u)^2}{A\kappa v_\infty (c + 1)} + \Delta S \right| \right) - \ln \left(\left| S_1 - \frac{(A\kappa v_\infty + Q_u)^2}{A\kappa v_\infty (c + 1)} \right| \right) \right]. \quad (260)$$

En este momento, considerando que

$$\begin{aligned} \ln \left(S_1 - \frac{(A\kappa v_\infty + Q_u)^2}{A\kappa v_\infty(c+1)} + \Delta S \right) \\ = \ln \left(1 + \frac{\Delta S}{\left[S_1 - \frac{(A\kappa v_\infty + Q_u)^2}{A\kappa v_\infty(c+1)} \right]} \right) + \ln \left(S_1 - \frac{(A\kappa v_\infty + Q_u)^2}{A\kappa v_\infty(c+1)} \right), \end{aligned} \quad (261)$$

es posible escribir lo siguiente:

$$\Delta u_c \approx - \frac{A\kappa v_\infty + Q_u}{A\kappa v_\infty(c+1)} \left[\ln \left(1 + \frac{\Delta S}{\left[S_1 - \frac{(A\kappa v_\infty + Q_u)^2}{A\kappa v_\infty(c+1)} \right]} \right) \right]. \quad (262)$$

Puede recuperarse la expresión (254) utilizando la aproximación de Taylor $\ln(1+x) \approx x$ para x pequeños.

También interesa disponer de un método para obtener la constante K_q que dependa de las condiciones de operación, este método también se basará en la ecuación (44) y las mismas consideraciones, en efecto, si se multiplica esta por el área del espesor y luego se deriva implícitamente respecto de la variable Q_u se obtiene

$$\frac{\partial u_c}{\partial Q_u} = - \frac{u_c}{Af'_b(u_c) + Q_u} = -u_c \frac{\partial u_c}{\partial S}. \quad (263)$$

Si se utiliza el valor absoluto de esta derivada evaluada en el punto de operación como aproximación para la constante se obtiene:

$$K_q = 143.8m^{-3}s, \quad (264)$$

que corresponde a una buena aproximación al valor obtenido, pero es de interés estudiar la dependencia funcional de esta constante respecto de las condiciones operacionales, para esto, se seguirá un enfoque análogo al considerado anteriormente, si se considera un cambio pequeño dQ_u en el flujo de descarga, este generará un cambio pequeño du_c en la concentración conjugada, ambos cambios están relacionados por

$$du_c = - \frac{u_c}{Af'_b(u_c) + Q_u} dQ_u, \quad (265)$$

integrando esta expresión para un cambio que va desde Q_1 hasta Q_2 se obtiene:

$$\Delta u_c = - \int_{Q_1}^{Q_2} \frac{u_c}{Af'_b(u_c) + Q_u} dQ_u. \quad (266)$$

Las mismas consideraciones anteriores permiten escribir

$$\Delta u_c = \frac{S}{(Q_1 + A\kappa v_\infty)^2 - (c + 1)SA\kappa v_\infty} \Delta Q_u, \quad (267)$$

Así es posible decir que

$$K_q = \frac{S}{(Q_u + A\kappa v_\infty)^2 - (c + 1)SA\kappa v_\infty}. \quad (268)$$

Reemplazando los valores numéricos correspondientes se obtiene que

$$K_q = 154.1m^{-3}s. \quad (269)$$

La dependencia funcional de este parámetro con el caudal de descarga es:

$$K_q(Q_u) = \frac{a}{(Q_u + b)^2 - c^2}, \quad (270)$$

donde a , b y c son parámetros ajustables.

Por su parte, la integral (266) puede reescribirse como sigue:

$$\Delta u_c = - \int_{Q_1}^{Q_2} \frac{S}{(Q_u + A\kappa v_\infty)^2 - (c + 1)SA\kappa v_\infty} dQ_u, \quad (271)$$

integral cuya solución es:

$$\Delta u_c = - \frac{S}{2\sqrt{(c + 1)SA\kappa v_\infty}} \left(\ln \left(\frac{Q_2 + A\kappa v_\infty - \sqrt{(c + 1)SA\kappa v_\infty}}{Q_1 + A\kappa v_\infty - \sqrt{(c + 1)SA\kappa v_\infty}} \right) - \ln \left(\frac{Q_2 + A\kappa v_\infty + \sqrt{(c + 1)SA\kappa v_\infty}}{Q_1 + A\kappa v_\infty + \sqrt{(c + 1)SA\kappa v_\infty}} \right) \right) \quad (272)$$

Puede aquí utilizarse también la expresión de Taylor $\ln(1 + x) \approx x$ para recuperar la expresión (267).

Para determinar K_1 constante que representa el efecto que un cambio en el caudal de descarga tiene sobre la velocidad de la altura de cama de sedimento, se considerará la condición de Rankine-Hugoniot, que modela la velocidad de propagación de una onda de choque

$$\sigma = \frac{f(u^-) - f(u^+)}{u^- - u^+} = \frac{f_b(u^-) - f_b(u^+)}{u^- - u^+} + q_u. \quad (273)$$

Tras derivar parcialmente esta expresión respecto de $Q_u = Aq_u$ se obtiene:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial Q_u} = \frac{1}{A} = K_1, \quad (274)$$

al ser un valor constante e independiente del caudal de descarga se obtiene que K_1 corresponde precisamente a este valor, el valor numérico de esta constante corresponde a 14.1 m^{-2} de acuerdo con los valores obtenidos en la sección 7.7.1.

7.9. Control de lógica difusa.

7.9.1. Definición y conceptualización del control de lógica difusa:

La idea esencial tras este tipo de control es traducir a un lenguaje inequívoco expresiones matemáticamente vagas como “mucho” o “poco” que pasarán a llamarse *variables lingüísticas*, logrando que una máquina emule de cierta manera la forma en la que los seres humanos toman decisiones.

Este tipo de control basa su funcionamiento en información dada, la cual puede basarse en la experiencia de operadores humanos reales, o el conocimiento de los procesos.

La forma en que se traducen las expresiones de “mucho” o “poco” en datos inequívocos se realiza mediante funciones de pertenencia $\mu(x)$, que miden en qué grado una variable adquiere un valor lingüístico³⁷, luego, esta información de pertenencia a los conjuntos difusos de entrada pasa por un *bloque de inferencia* que determina los valores difusos de salida en base a los de entrada de acuerdo a una serie de *reglas de inferencia*, y finalmente, la variable difusa de salida obtenida pasa por un proceso de *desfusificación* que determina la respuesta de control.

Este tipo de controladores ha demostrado una enorme eficacia a la hora de enfrentar problemas reales de control automático, sin embargo, su análisis matemático es un tema muy reciente y no ha alcanzado un grado de avance satisfactorio, la determinación de convergencia o su sintonización óptima de acuerdo a ciertos objetivos es un problema de una dificultad considerable y no se ha resuelto.

El tipo de acción de control es de la forma

$$\Delta m(t_n) = h(e(t_n), \Delta e(t_n)), \quad (275)$$

donde h es alguna función, cuya obtención se estudiará más adelante, este esquema será ligeramente modificado más adelante para considerar los límites que deben imponerse a la acción del controlador.

³⁷ Es decir, en qué grado se asocia lo medido a lo que se llama “mucho”, “poco”, “demasiado”, etc.

7.9.2. Diseño del controlador de lógica difusa.

Las ecuaciones que definen al error y su derivada para el controlador de lógica difusa serán las siguientes

$$e(t_n) = \frac{z_{sb}(t_n) - z_{sb}^{sp}(t_n)}{\Delta h_{ref}} \quad y \quad (276)$$

$$\Delta e(t_n) = \frac{e(t_n) - e(t_{n-1})}{\Delta t v_{ref}}. \quad (277)$$

Las entradas que se admitirán, serán el error experimental y la derivada de este, los valores de las variables lingüísticas que se admitirán serán las cinco siguientes, ambas entradas admitirán esta misma representación difusa:

$$U = \{PA, PB, Z, NB, NA\},$$

donde U corresponderá al conocido como *universo de discurso*, las salidas, estarán definidas dentro de este mismo universo de discurso.

Las funciones de pertenencia asociadas al error serán de tipo triangular, y estarán dadas por:

$$\mu_e(PA) = \max(\min(1, 4e - 2), 0), \quad (278)$$

$$\mu_e(PB) = \max(\min(-4e + 3, 2e), 0), \quad (279)$$

$$\mu_e(Z) = \max(\min(2e + 1, -2e + 1), 0), \quad (280)$$

$$\mu_e(NB) = \max(\min(-2e, 4e + 3), 0) \quad y \quad (281)$$

$$\mu_e(NA) = \max(\min(1, -4e - 2), 0). \quad (282)$$

Las funciones de pertenencia asociadas a la derivada del error serán también de tipo triangular, y estarán definidas de forma equivalente por

$$\mu_{\Delta e}(PA) = \max(\min(1, 4\Delta e - 2), 0), \quad (283)$$

$$\mu_{\Delta e}(PB) = \max(\min(-4\Delta e + 3, 2\Delta e), 0), \quad (284)$$

$$\mu_{\Delta e}(Z) = \max(\min(2\Delta e + 1, -2\Delta e + 1), 0), \quad (285)$$

$$\mu_{\Delta e}(NB) = \max(\min(-2\Delta e, 4\Delta e + 3), 0) \quad y \quad (286)$$

$$\mu_{\Delta e}(NA) = \max(\min(1, -4\Delta e - 2), 0). \quad (287)$$

Se grafican estas funciones (Se omite el gráfico asociado a la derivada del error pues es análogo):

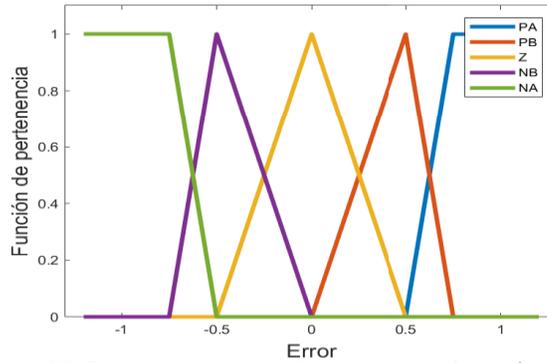


Figura 83 Funciones de pertenencia en función del error.

Así, dados el error y su derivada, es posible obtener los datos difusos de entrada, el problema siguiente es determinar una regla de inferencia adecuada, la cual se resume en la siguiente tabla:

Tabla 20 Reglas de inferencia propuestas para la obtención de la salida del controlador.

$\Delta e \backslash e$	PA	PB	Z	NB	NA
PA	PA	PA	PA	PB	PB
PB	PA	PA	PB	PB	NB
Z	PA	PB	Z	NB	NA
NB	PB	NB	NB	NA	NA
NA	NB	NB	NA	NA	NA

Esto define cualitativamente al control propuesto, resta obtener números que asocien los valores de la función de pertenencia para la salida con los valores difusos de las entradas, esto se realizará mediante la agregación de las reglas difusas recién propuestas.

$$\mu_s(NA) = \max \begin{pmatrix} \min(\mu_e(NA), \mu_{\Delta e}(NA)) \\ \min(\mu_e(NA), \mu_{\Delta e}(NB)) \\ \min(\mu_e(NB), \mu_{\Delta e}(NA)) \\ \min(\mu_e(Z), \mu_{\Delta e}(NA)) \\ \min(\mu_e(NA), \mu_{\Delta e}(Z)) \\ \min(\mu_e(NB), \mu_{\Delta e}(NB)) \end{pmatrix}, \quad (288)$$

$$\mu_s(PA) = \max \begin{pmatrix} \min(\mu_e(Z), \mu_{\Delta e}(PA)) \\ \min(\mu_e(PB), \mu_{\Delta e}(PA)) \\ \min(\mu_e(PA), \mu_{\Delta e}(PA)) \\ \min(\mu_e(PA), \mu_{\Delta e}(PB)) \\ \min(\mu_e(PA), \mu_{\Delta e}(Z)) \\ \min(\mu_e(PB), \mu_{\Delta e}(PB)) \end{pmatrix}, \quad (289)$$

$$\mu_s(NB) = \max \begin{pmatrix} \min(\mu_e(NA), \mu_{\Delta e}(PB)) \\ \min(\mu_e(NB), \mu_{\Delta e}(Z)) \\ \min(\mu_e(Z), \mu_{\Delta e}(NB)) \\ \min(\mu_e(PB), \mu_{\Delta e}(NA)) \\ \min(\mu_e(PB), \mu_{\Delta e}(NB)) \\ \min(\mu_e(PA), \mu_{\Delta e}(NA)) \end{pmatrix}, \quad (290) \quad \mu_s(PB) = \max \begin{pmatrix} \min(\mu_e(NB), \mu_{\Delta e}(PA)) \\ \min(\mu_e(Z), \mu_{\Delta e}(PB)) \\ \min(\mu_e(PB), \mu_{\Delta e}(Z)) \\ \min(\mu_e(PA), \mu_{\Delta e}(NB)) \\ \min(\mu_e(NA), \mu_{\Delta e}(PA)) \\ \min(\mu_e(NB), \mu_{\Delta e}(PB)) \end{pmatrix} \quad (291)$$

$$y \quad \mu_s(Z) = \min(\mu_e(Z), \mu_{\Delta e}(Z)) \quad (292)$$

El problema que resta, es transformar la información difusa de la salida en un valor de salida que represente esta información, este proceso recibe el nombre de defusificación y se realizará en base al método del centro de gravedad.

Así la acción de control será de la forma

$$Q_u(t_n) = \max \left(\min \left(Q_u(t_{n-1}) + \frac{\sum_{\alpha \in U} \mu_s(\alpha) \Delta Q_\alpha}{\sum_{\alpha \in U} \mu_s(\alpha)} \Delta t, Q_{max} \right), Q_{min} \right), \quad (293)$$

Donde los valores ΔQ_α se definen como sigue:

$$\Delta Q_{PA} = 0.1Q_{est}, \quad (294)$$

$$\Delta Q_{PB} = 0.03Q_{est}, \quad (295)$$

$$\Delta Q_Z = 0, \quad (296)$$

$$\Delta Q_{NB} = -0.03Q_{est} \quad y \quad (297)$$

$$\Delta Q_{NA} = -0.1Q_{est} \quad (298)$$

Se presenta a continuación un gráfico de superficie que representa las respuestas que el sistema tendría ante cualquier combinación de entradas normalizadas considerando Q_{est} unitario.

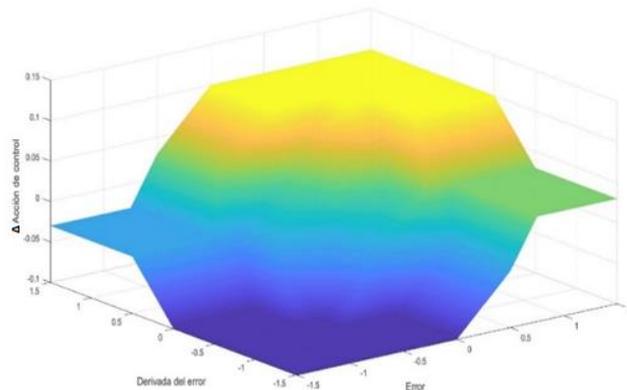


Figura 84 Acciones de control para el controlador de lógica difusa.

7.10. Desarrollo experimental.

7.10.1. Montaje experimental

En la figura siguiente se aprecia el montaje del equipo:

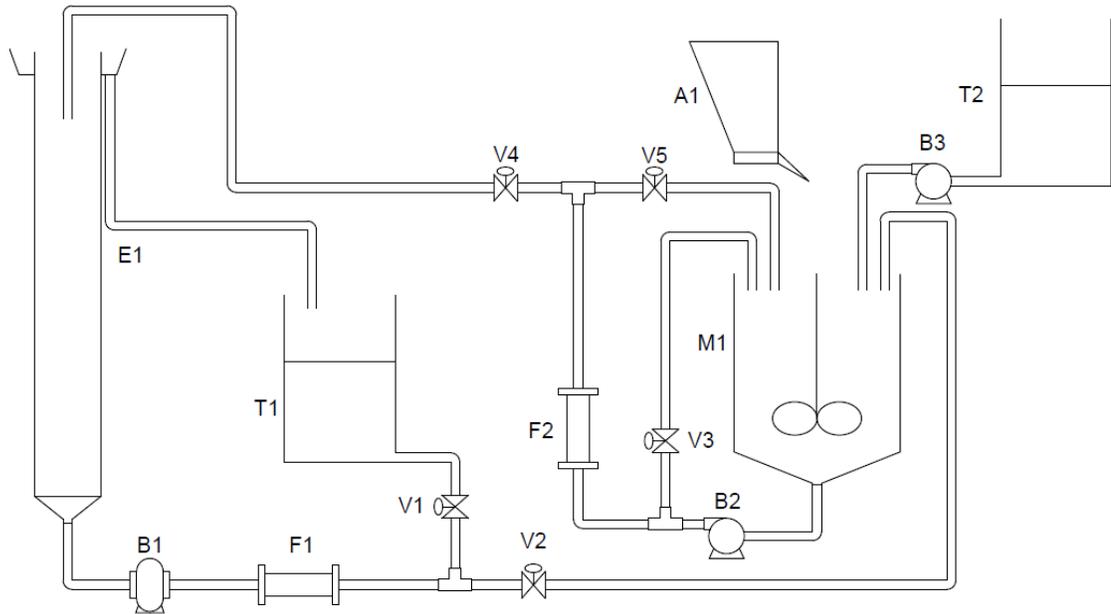


Figura 85 Diagrama del montaje experimental del espesador piloto, representa las conexiones entre los diversos equipos, no sus dimensiones.

7.10.2. Descripción de los equipos y operación.

El equipo central (E1) corresponde a la columna de sedimentación de 2 metros de alto y 30 centímetros de diámetro, la cual es alimentada por una tubería concéntrica al cuerpo cilíndrico del espesador, cuya boca abre ubicada 30 centímetros debajo de la canaleta de rebalse, y alimenta directamente en el interior del mismo.

El equipo cuenta con una rastra, cuyo eje de rotación es concéntrico a la columna de sedimentación, esta rastra es puesta en movimiento por un motor ubicado en la parte superior del montaje y además se cuenta con un visor que permite observar en tiempo real el voltaje y amperaje al que opera este motor con la finalidad de detectar y prevenir situaciones como embancamientos.

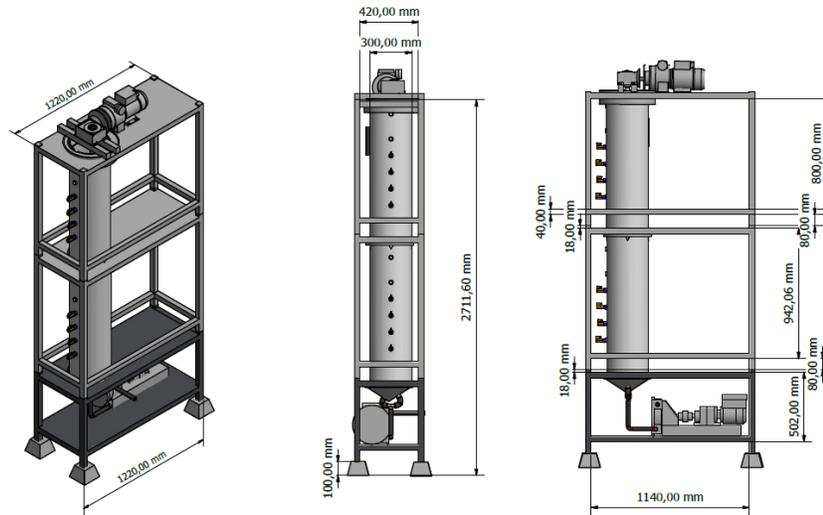


Figura 86 Plano del espesador piloto disponible en el laboratorio.
Cortesía de Edgardo Lorza.

La bomba B1, cuya función es bombear el material en la descarga del espesador, consiste en una bomba peristáltica, cuya capacidad oscila en torno a los 4.2 L/min, una vez atravesada la bomba, el material pasa por F1 que corresponde a un flujómetro Coriollis, que entrega en tiempo real mediciones de flujo volumétrico y densidad de pulpa.

Tras pasar por el flujómetro, el material avanza hacia un estanque agitador (La válvula V1 permanece normalmente cerrada salvo situaciones de emergencia) donde es mezclado con agua, sólido y pulpa recirculada del estanque, cuyas dimensiones son 50 cm de alto, 40 cm de diámetro en su zona más ancha.

El estanque es alimentado desde cinco fuentes distintas:

- Alimentación del material proveniente de la descarga del espesador
- Alimentación de agua proveniente del tanque T2 impulsada por la bomba centrífuga B3, cuyo funcionamiento está sujeto a las instrucciones del controlador, el tanque también puede ser alimentado con agua de forma manual mediante una manguera.
- Alimentación de sólido mediante el alimentador A1, que consta de una parrilla vibratoria, cuyo funcionamiento está sujeto a una señal analógica que
- Dos recirculaciones que pueden ser reguladas mediante sendas válvulas V3, V4 Y V5.

El material en el estanque agitador es succionado y enviado a la alimentación del espesador gracias a la bomba B2 de tipo centrífuga cuya máxima capacidad oscila en torno a los 140 L/min, parte

importante de este material se recircula al estanque agitador mediante la apertura de la válvula V3, mientras la fracción restante va al flujómetro F2 de tipo coriollis que entrega información de flujo y densidad de pulpa, la válvula V5, salvo emergencias, permanece cerrada y la válvula V4 se mantiene abierta, por lo que durante la operación, este flujo alimenta directamente al espesador.

7.10.2.1. Descripción de los sensores y actuadores utilizados, calibración y control:

Se dispone de dos flujómetros de efecto coriollis conectados a la corriente de alimentación y descarga a la columna de sedimentación, los cuales entregan mediciones de flujo volumétrico y densidad de pulpa en tiempo real, para el flujómetro de la descarga F1, ambas señales son de 4-20 mA y se determinó mediante diversas pruebas que las curvas de calibración son

$$\rho = 261.01I - 1044.1 \quad y \quad (299)$$

$$Q = 0.257I - 1.1308, \quad (300)$$

donde ρ es la densidad medida en kg/m^3 , Q es el caudal en L/s e I es la intensidad de corriente asociada a la señal en mA.

Por su parte, el flujómetro F2 que mide flujo volumétrico y densidad de descarga para la corriente de alimentación del espesador genera señales de 4-20 mA para la densidad, y una señal en frecuencia para el flujo volumétrico

$$\rho = 99.11I + 67.37. \quad (301)$$

La señal de densidad de alimentación, es comparada con el valor deseado de densidad de alimentación y se digitaliza, quedando en cero cuando la densidad es menor a la deseada, y uno cuando la densidad es mayor o igual a la deseada.

El contador entrega una medida proporcional al volumen total alimentado al espesador, se calcula en cada instante la derivada temporal de este valor, y se imprime este valor como flujo volumétrico de alimentación.

Por su parte, la curva de calibración del actuador, es decir la bomba peristáltica B2 está dada por:

$$Q = 0.3876I - 1.8304, \quad (302)$$

Donde el caudal se mide en L/min mientras la señal es una señal de corriente y oscila en 4-20mA.

La medición del nivel del estanque agitador es realizada mediante un sensor de conductividad, este fue ingresado en el interior del estanque y entregaba una señal analógica de 4-20 mA, esta señal

analógica se convertía a digital mediante un umbral del 20% de la medición máxima, valor que fue determinado introduciendo el sensor en el interior de distintos materiales y pulpas, comparando los valores obtenidos en estos materiales con los obtenidos en el aire, este proceso de digitalización es automático y forma parte de lo programado en el equipo, se asigna 1 a la detección de material y 0 a la no detección de material³⁸.

El equipo A1 correspondiente a un alimentador de sólidos recibe señales digitales, las cuales interpreta como instrucciones de activar o desactivar una parrilla vibratoria, cuyas vibraciones generan la caída de material al estanque.

El equipo B3 correspondiente a una bomba centrífuga recibe señales del tipo analógicas de 4-20 mA, sin embargo, como se verá, el tipo de señal más adecuado es digital, la solución planteada es que la señal digital sea interpretada como la activación de la bomba a un 20% de su capacidad máxima.

Las señales de densidad del flujómetro coriollis F2 y la señal del sensor de conductividad digitalizada son utilizadas para activar o desactivar los equipos A1 y B3, del modo siguiente:

Tabla 21 Acciones de control para el tanque agitador.

Sensores		Actuadores	
Digital altura	Digital concentración	Alimentación sólido (A1)	Alimentación agua (B3)
Alto (1)	Alto (1)	Desactivar (0)	Desactivar (0)
Alto (1)	Bajo (0)	Activar (1)	Desactivar (0)
Bajo (0)	Alto (1)	Desactivar (0)	Activar (1)
Bajo (0)	Bajo (0)	Activar (1)	Activar (1)

El sensor utilizado para medir la altura de la cama de sedimento fue un diseño propio que consiste de un flotador esférico hueco cuya densidad podía controlarse mediante la adición de bolitas metálicas al interior, este flotador tenía adherida una argolla lo que permitió ubicarlo en torno a un eje que se introdujo en el interior del espesador con el objetivo de mantener el flotador en una posición estable.

³⁸ Notar que la detección de material implica que el nivel está por sobre los detectores del sensor de conductividad (el nivel es adecuado), y la no detección de material implica que el nivel está por debajo del detector (el nivel está por debajo).

A este flotador se le realizó un seguimiento óptico en tiempo real mediante una cámara Microsoft LifeCam Studio, cuya información en video era analizada en tiempo real mediante un programa realizado gracias a las funciones incorporadas en el módulo Vision del software LabView2014 de National Instruments, que permite seleccionar una porción de imagen y posteriormente realizar un seguimiento de esta porción de imagen en el video, entregando la posición del centro geométrico de la porción de imagen considerada en tiempo real, el programa tiene ventajas importantes, como la posibilidad de seleccionar un nuevo objetivo en tiempo real, permitiendo recalibrar el sensor en tiempo real, resolviendo parcialmente problemas como los generados por cambios en la iluminación y la pérdida del objetivo de seguimiento, este flotador tenía adherida una argolla lo que permitía ubicarlo en torno a un eje con la finalidad de mantener una posición estable, pero también tiene limitaciones importantes como la dificultad de visualizar el flotador ante alta turbidez, la descalibración no es anunciada, lo que obliga a estar pendiente del programa, por otro lado, la recalibración no es automática, además de la nula capacidad de responder de manera robusta a cambios importantes de dimensiones (es decir alejamientos o acercamientos) y rotaciones.

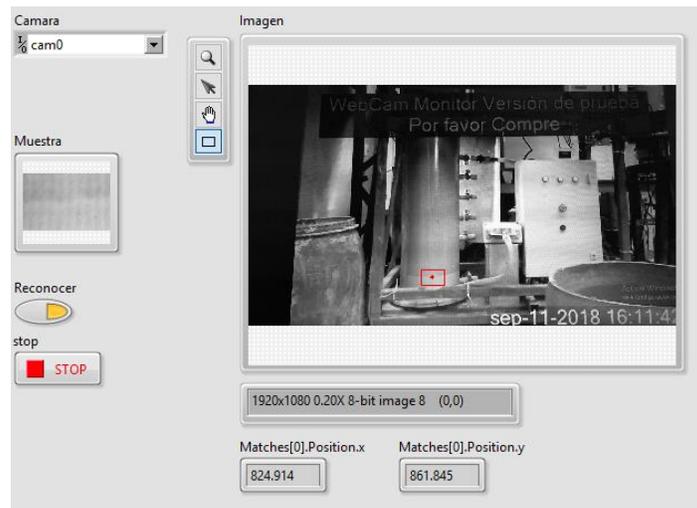


Figura 87 Interfaz gráfica del software de análisis de video.

La bomba B2 se opera de forma manual.

7.10.2.2. Descripción del controlador:

El sistema completo es controlado por un PLC Allen Bradley Logix5564, con los siguientes módulos instalados:

Tabla 22 Módulos disponibles en el PLC del laboratorio.

Ubicación en el Chasis.	Función	Modelo
0	Controlnet	1756CNB-E
1	Conexión ethernet	1756-EN2T\B
2	CPU Controlador	1756-L64B
3	-	MBI56
4	Entrada digital	1756-IB32\B
5	Contador de alta velocidad	1756-HSC\A
6	Salida digital 1	1756-OB16D\A
7	Salida digital 2	1756-OB16D\A
9	Entrada análoga	1756-IF8H
11	Salida análoga	1756-OF8H\A

La programación del controlador fue realizada de acuerdo a las necesidades del protocolo de operación en el programa RSLogix5000.

La interfaz humano-máquina (HMI por sus siglas en inglés) fue desarrollada en el software FactoryTalk, mediante ella es posible activar y desactivar el equipo, modificar sus parámetros principales, realizar monitoreo en tiempo real, dar instrucciones para saltar entre las distintas etapas de operación y activar y desactivar los distintos protocolos de emergencia.

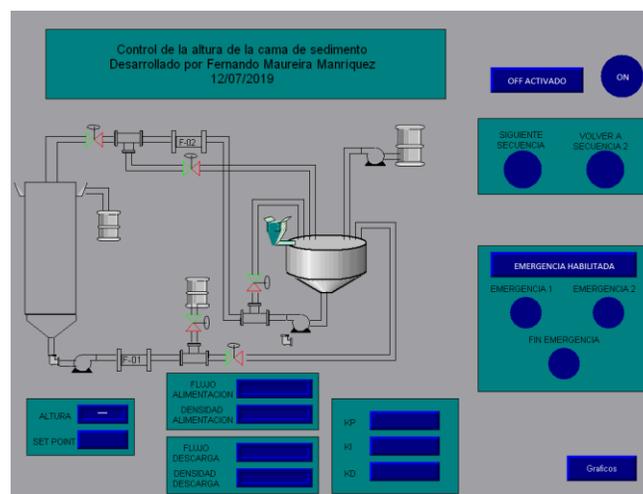


Figura 88 Pantalla principal de la HMI desarrollada por el autor para el control de la altura de la cama de sedimento.

7.10.3. Caracterización del material.

El material inicial, corresponde a cuarzo comercial, fue molido y posteriormente fue puesto en suspensión y sometido a agitación, de esto se extrajo una muestra de material, y se procedió a su caracterización.

7.10.3.1. Densidad:

Medida con un picnómetro, en tres pruebas separadas la densidad obtenida es de $2700 \pm 10 \text{ kg/m}^3$.

7.10.3.2. Distribución granulométrica:

Obtenida mediante difracción de rayos laser en el equipo Sympatec Helos, el p80 es de 158 ± 4 micrones.

7.10.3.3. Velocidad de sedimentación:

Determinada mediante el uso del equipo Seditrack, se prepararon pulpas de 1.2L cuyas fracciones volumétricas de sólidos eran: 0.05, 0.1, 0.15, 0.20 y 0.25, se ingresaban en el equipo, se iniciaba la toma de datos y tras la espera de un tiempo que oscilaba en torno a los 20 minutos se tenían las curvas de sedimentación, que permitieron obtener los siguientes valores para los parámetros de la función de flujo de Richardson y Zaki:

Tabla 23 Parámetros de Richardson y Zaki obtenidos a partir de las mediciones de velocidad de sedimentación.

Parámetro	Valor
v_{∞}	$5.05 \times 10^{-3} \text{ m/s}$
N	9.6

7.10.4. Pruebas continuas:

Resulta esencial definir un protocolo de operación para el espesador, el autor con este fin, plantea un protocolo basado en cinco fases de operación distintas con 2 protocolos de emergencia:

7.10.4.1. Inicio.

Se prenden las luces traseras del espesador, se activa el trabajo de las rastras, se prende la bomba de descarga (aunque no se activará hasta que se envíe la orden desde la HMI), se vigila que las válvulas V2 y V3 estén abiertas, las válvulas V1, V4 y V5 deben estar cerradas, se alimenta agua dentro del estanque agitador M1, luego se energiza el PLC y la bomba B2, se prende el equipo en la HMI y se

inicia la secuencia 1 mediante el botón cambiar secuencia, la válvula V4 se abre lentamente manteniendo una observación constante sobre el valor entregado por el flujómetro F2, que no debe superar los 3 L/min, esto activará lentamente a la bomba B1, que igualará el flujo de alimentación, se espera hasta que todas las mediciones sean estables previo a avanzar a la siguiente secuencia.

7.10.4.2. Llenado.

Se ingresa el flotador al sistema y se inicializa la medición de la posición del mismo cuidando la calibración del programa, se inicia la secuencia 2 en la HMI, esto activa la alimentación de sólidos y se reduce lentamente el flujo de descarga hasta el valor estacionario, si la alimentación de sólidos resulta muy lenta para los intereses del usuario, pueden alimentarse sólidos manualmente directamente al estanque agitador M1, se espera a la formación de la cama de sedimento, se puede modificar la altura de la cama mediante la regulación de la válvula V4, debe sostenerse un monitoreo constante sobre el visor de las variables eléctricas del motor de la rastra, el cual no debe superar bajo ninguna circunstancia los 4 A, de ocurrir, actívese la secuencia Emergencia 2, cuando se alcance un estado estacionario, puede pasarse a la siguiente fase de la operación.

7.10.4.3. Operación.

Se escriben en la HMI los valores de las constantes del controlador y set-point de altura de cama de sedimento deseados, se inicia la secuencia 3 en la HMI, se aplican los cambios escalón deseados, si se desea modificar el flujo de alimentación, se abre la válvula V4, y si se desea modificar la concentración de sólidos en la alimentación se altera el set-point de concentración de sólidos en la HMI, si se desea acelerar este proceso para simular mejor un cambio escalón, se recomienda alimentar de forma manual.

Una vez finalizada la prueba, puede volverse a iniciar volviendo los set-point de la HMI a sus valores originales, si se necesita retirar pulpa del sistema, puede abrirse la válvula V1 hasta llegar a las condiciones iniciales deseadas, si se desea otra acción pueden seguirse los lineamientos del punto anterior.

7.10.4.4. Vaciado.

Una vez finalizada la operación se procede a activar la secuencia 4 en HMI, esta secuencia finaliza el control de la altura de cama de sedimento e iguala el caudal de alimentación y descarga, la pulpa debe retirarse completamente del sistema cambiándola por agua, para esto puede abrirse la válvula V1, o

bien retirar la alimentación de pulpa de descarga al tanque agitador mientras se alimenta con agua ya sea mediante la bomba B3 y asistida de ser necesario con una manguera, esta alimentación se sostiene hasta reducir el contenido en sólidos al mínimo.

Desde la fase de vaciado siempre es posible volver a la fase de llenado mediante el botón *saltar a fase 2* en la HMI.

7.10.4.5. Fin de la operación.

Se pulsa el botón activar apagado que habilita la posibilidad de apagar el equipo, y luego el botón de encendido, en la HMI, esto apaga las bombas y los sistemas de control, luego se procede a apagar la bomba B2, cerrar la válvula V4, desenergizar el PLC, apagar las luces y apagar el motor de las rastras.

7.10.4.6. Protocolo de emergencias.

En todos los casos, para activar el protocolo de emergencias debe pulsarse el botón activar emergencias previo a pulsar el botón del protocolo de emergencia indicado, Emergencia 1 se utiliza para emergencias leves como peligro de embancamiento, subidas de amperaje leves en el visor de las rastras, errores en la determinación de los parámetros o finalización de la operación, por su parte, Emergencia 2 se activa cuando la medida de amperaje del visor del motor de la rastra presenta alteraciones graves, ante embancamientos, o errores graves de determinación de parámetros.

Emergencia 1

Emergencia 1 permite saltar en cualquier momento a la fase de vaciado, activa la bomba de descarga a su máximo y cesa la toma de datos y el sistema de control de la cama de sedimento.

Emergencia 2.

Emergencia 2 activa la bomba de descarga a su máxima capacidad, y envía una señal al variador de frecuencia de la bomba B1 que permite invertir el flujo de la descarga, lo que permite en muchos casos destapar el sistema, una vez solucionado el problema se pulsa *Fin emergencia* en la HMI, lo que activa la secuencia de vaciado.

7.11. Anexo matemático.

Se resumen en este apartado los elementos fundamentales que a juicio del autor son necesarios para obtener una comprensión básica de las herramientas matemáticas y conceptos utilizados para realizar las simulaciones y los análisis.

No se adjuntan las herramientas para el análisis matemático de estas cuestiones, se remite a las referencias [31, 38, 41] para el lector interesado en cuestiones de existencia y unicidad de soluciones.

Para revisiones más profundas y discusiones más generales de los conceptos presentados se remite a las siguientes referencias: [32, 33, 42].

7.11.1. Leyes de conservación hiperbólicas y el método de las características:

Se considerará aquí el caso de leyes de conservación hiperbólicas escalares, para el caso no escalar se remite a [27, 33, 43].

Las leyes de conservación son ecuaciones de la forma

$$u_t + \nabla \cdot (f(u)) = 0, \quad (303)$$

donde u es la solución a la ecuación diferencial, f es una función (posiblemente un vector de funciones escalares) de la función incógnita u , y $\nabla_x \cdot$ corresponde al operador diferencial divergencia calculado respecto de las coordenadas espaciales.

Este tipo de ecuaciones surge generalmente de considerar localmente ecuaciones integrales que representan la variación de cantidades observadas que se conservan en volúmenes de control arbitrarios.

Esto puede entenderse como sigue:

Considérese un volumen de control fijo pero arbitrario B en el espacio tal que encierre alguna cantidad de algún observable que se conserve (En otras palabras, que la variación de este observable en el volumen de control se deba exclusivamente), la densidad volumétrica de este observable será u , y la función que representa la densidad superficial de flujo será f luego, la conservación de esta cantidad implica que

$$\frac{d}{dt} \int_B u dV = - \oint_{\partial B} \vec{f} \cdot \hat{n} dS, \quad (304)$$

donde \hat{n} es un vector unitario normal exterior (que apunta hacia afuera de la superficie cerrada definida como la frontera de B).

Esta es la forma integral de la ley de conservación y es la más general y fundamental debido a que permite funciones u y f discontinuas, si se supone regularidad suficiente para estas funciones, puede utilizarse el teorema de Green para la integral de superficie e introducir la derivada temporal dentro del signo integral para obtener una segunda forma

$$\int_B u_t + \text{div}_x(\vec{f}) dV = 0. \quad (305)$$

Como el volumen de control B es arbitrario, la ley de conservación se sigue de esta ecuación gracias al teorema de localización [18].

Se dice que una ley de conservación unido a condiciones iniciales (es decir, los valores de la función u en todo el espacio para algún tiempo en específico) para la función incógnita es un problema de Cauchy.

Toda ley de conservación escalar puede ser entendida como una ecuación cuasi-lineal en la variable u , que es de la forma

$$a(t, x, u)u_t + b(t, x, u)u_x = c(t, x, u), \quad (306)$$

donde a , b y c son funciones dadas, la solución a este problema puede ser entendida como una superficie $u(t, x)$ que cumpla determinadas restricciones dadas por las condiciones apropiadas (que coincida con alguna curva Γ dada por las condiciones).

La teoría de ecuaciones diferenciales parciales permite determinar soluciones a este tipo de problemas mediante el método de las características, que pide encontrar soluciones al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial t}{\partial s} = a \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial s} = b \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial s} = c \quad , \quad s > s_0 \quad (307)$$

Junto a condiciones iniciales

$$t(s_0, v) = t(v) \quad , \quad x(s_0, v) = x(v) \quad , \quad z(s_0, v) = z(v) \quad , \quad s > s_0 \quad (308)$$

donde los parámetros s y v se definen por conveniencia.

Esto permite parametrizar la solución como sigue:

$$S = \{(t(s, y), x(s, y), z(s, y)) \mid (s, y) \in \mathbb{R}^2\}. \quad (309)$$

Y de ser posible invertir las funciones $t(s, y)$ y $x(s, y)$ para obtener $s(t, x)$ e $y(t, x)$, se puede obtener la solución:

$$u(t, x) = z(s(t, x), y(t, x)). \quad (310)$$

Sin embargo cuando las funciones a , b y c son no lineales, no es posible en general afirmar que las funciones $t(s, y)$ y $x(s, y)$ sean invertibles, esto lleva a dos tipos de situaciones, zonas donde las curvas características se intersectan, y zonas donde no llegan las curvas características [43].

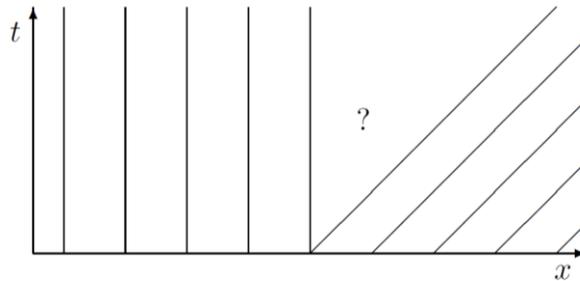


Figura 89 Zonas donde no llegan las curvas características.
Extraído de Renardy (2004).

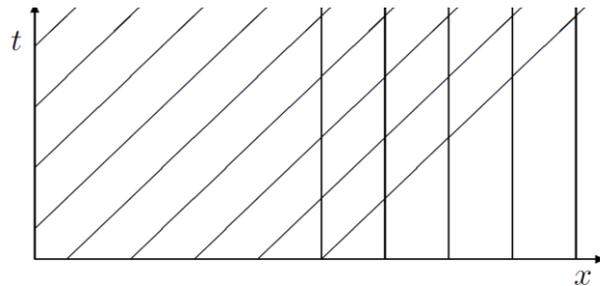


Figura 90 Zonas donde las curvas características se intersectan.
Extraído de Renardy (2004).

El problema de las curvas características que se intersectan puede ser sorteado “cortando” la solución en los puntos en los que resulta multivaluada, sin embargo, esto trae una serie de problemas, el primero a considerar es que este proceso de cortado de la solución implica que la solución podría ser discontinua y, por lo tanto, no será solución de la ecuación diferencial en un sentido clásico, es decir, la función obtenida mediante este procedimiento, no será solución de la ecuación diferencial, este problema da origen al concepto de solución débil.

7.11.2. Soluciones débiles:

Como se vio anteriormente, no siempre se pueden obtener soluciones clásicas³⁹ a las leyes de conservación no lineales, y esto obliga a definir una nueva noción de solución que permita que las soluciones del problema sean funciones discontinuas, para obtener esta nueva definición de solución, se multiplica la ley de conservación por una función g , suficientemente suave y de soporte compacto⁴⁰ contenido en el conjunto sobre el que se busca la solución ($[0, \infty) \times (-\infty, \infty)$), se integra la expresión obtenida en este dominio, luego se integra por partes y, como g tiene soporte compacto, esta se anula en las posiciones espaciales extremas y en tiempos infinitos y se sigue la ecuación

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (ug_t + f(u)g_x) dxdt = \int_{-\infty}^{\infty} u_0 g(x, 0) dx. \quad (311)$$

Es importante notar que esta formulación no depende de que u y $f(u)$ sean continuas o diferenciables.

Definición:

Sea u una función medible de la posición y el tiempo, se dice que u es una solución débil del Problema de Cauchy, si para toda función test ψ se cumple que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (u\Psi_t + f(u)\Psi_x) dxdt = \int_{-\infty}^{\infty} u_0 \Psi(x, 0) dx. \quad (312)$$

No resulta difícil probar que una solución clásica es solución débil, sin embargo, como se ha discutido, no siempre una solución débil es una solución clásica.

Esta noción más general de solución permite aceptar soluciones discontinuas a un problema de Cauchy, sin embargo, producto de esto, se pierde en muchos casos la unicidad, en este sentido deben hacerse dos preguntas, primero, qué tipos de discontinuidades son compatibles con la noción de solución débil y la conservación de la cantidad, y segundo, determinar un criterio que permita de entre las soluciones posibles la que sea físicamente relevante, la primera cuestión se responde con la condición de Rankine-Hugoniot, y la segunda se responde con el concepto de solución de entropía.

³⁹ Entendida solución clásica como una función suave, continua y diferenciable en el dominio de interés.

⁴⁰ Soporte está definido como el conjunto de puntos donde una función es no nula, por su lado, en \mathbb{R}^k , un conjunto compacto es tal que es cerrado y acotado, una función con las propiedades de g adquiere el nombre de función test.

7.11.3. Condición de Rankine-Hugoniot:

La condición de Rankine-Hugoniot permite determinar qué clase de discontinuidades son compatibles con la conservación de la cantidad y con la noción de solución débil, nace del estudio de la formulación débil de la ecuación diferencial parcial en torno a la discontinuidad.

El método de deducción de la ecuación pasa por seleccionar un volumen de control que encierre a la discontinuidad, y estudiar qué ocurre con las variables en los bordes de este volumen al acercarse a la superficie de discontinuidad.

Así, en general la condición de Rankine-Hugoniot ofrece una expresión para la velocidad de propagación de una discontinuidad que pasará a llamarse s (o σ según el autor) en función de los valores que la cantidad y el flujo alcancen en los bordes de la discontinuidad.

La condición para el caso que compete a este trabajo es

$$s = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}. \quad (313)$$

Que es equivalente a la obtenida a partir de los balances integrales de masa.

7.11.4. Condiciones de Entropía:

No hay consenso general acerca de cuáles son las condiciones de entropía más adecuadas para cada problema particular [43], Así existen multitud de condiciones de entropía, Las más utilizadas son las condiciones de entropía de Lax, y de Olienik, las cuales, si bien suelen coincidir relativamente bien, existen algunos casos “patológicos” donde se distinguen sensiblemente.

La idea esencial detrás de las condiciones de entropía, es que la solución físicamente relevante se puede obtener como el caso límite de una ecuación con efecto de la difusión, se puede encontrar una idea de la deducción en los textos de Diehl [44] y Bürger [27].

Con todo, la condición de entropía que se utiliza en este trabajo es la siguiente:

$$s \leq \frac{f(v) - f(u^-)}{v - u^-}, \quad \forall v \in [u^+, u^-] \quad (314)$$

Para todos los valores de v contenidos entre u^+ y u^- (o al revés).

La interpretación de esta idea es que la línea que conecta a los puntos $(u^-, f(u^-))$ y $(u^+, f(u^+))$ debe estar ubicada por debajo del gráfico de f .

7.11.5. Problema de Riemann.

Considérese el problema de resolver la ecuación:

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (315)$$

sujeto a:

$$u(x, 0) = u_i(x) = \begin{cases} u^- & x \leq 0, \\ u^+ & x > 0. \end{cases} \quad (316)$$

Este problema sujeto a condiciones de entropía específicas corresponde al problema de Riemann y su estudio es de importancia fundamental en el estudio matemático de las leyes de conservación, y base para métodos de resolución como el front-tracking [27, 45].

7.11.6. Ondas de rarefacción.

Considérese el problema de Riemann planteado en la sección anterior:

Si f' es monótona decreciente, y $u^- < u^+$, entonces la solución de entropía de este problema será:

$$u(x, t) = \begin{cases} u^- & x \leq \tilde{f}'(u^-)t \\ (\tilde{f}')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) & \tilde{f}'(u^-)t < x < \tilde{f}'(u^+)t \\ u^+ & x \geq \tilde{f}'(u^+)t \end{cases}, \quad (317)$$

donde \tilde{f}' es la envolvente convexa inferior de f' en el intervalo $[u^-, u^+]$, esta solución es continua, y representa a las conocidas como ondas de rarefacción, donde se manifiesta una variación continua entre u^- y u^+ , notar que las curvas de nivel de esta onda corresponden a curvas de la forma $x/t = cte$, es decir, rectas que se extienden desde el punto conflictivo.

7.11.7. Funciones de flujo numérico.

Si bien durante el trabajo se utilizó una función de flujo numérico de Enquist-Osher, una opción a tener en cuenta por su mayor rapidez de cálculo, corresponde a la función de flujo numérico de Godunov, que está definida de la forma siguiente:

$$G_j = G(U_j, U_{j+1}) = \begin{cases} \min_{U_j \leq U \leq U_{j+1}} f_b(U) & \text{para } U_j \leq U_{j+1}, \\ \max_{U_{j+1} \leq U \leq U_j} f_b(U) & \text{para } U_j > U_{j+1}. \end{cases} \quad (318)$$

Cuyo cómputo puede simplificarse mucho si se considera una función de un solo máximo en U_m [34], en este caso es posible proceder de acuerdo al siguiente algoritmo:

Se solicitan las entradas: U_j, U_{j+1}, U_m, f_b .

Si $U_j \leq U_{j+1}$, entonces:

$$G_j = \min(f_b(U_j), f_b(U_{j+1}))$$

En otro caso:

Si $(U_m - U_j)(U_m - U_{j+1}) < 0$

$$G_j = f_b(U_m)$$

En otro caso:

$$G_j = \max(f_b(U_j), f_b(U_{j+1}))$$

Finalizar ciclo condicional.

Finalizar ciclo condicional.

Imprimir G_j .

Algoritmo 2 Algoritmo para determinar el flujo numérico de Godunov.

7.11.8. Condición CFL

Representa un límite al valor que puede tener la relación entre las discretizaciones espaciales y temporales, tal que las soluciones numéricas por métodos explícitos puedan converger efectivamente a las soluciones reales [32, 33], la condición CFL corresponde a una condición necesaria, no suficiente.

Para leyes de conservación, esta condición puede entenderse mediante la idea de la velocidad de propagación de las perturbaciones, si se observa la ecuación (39), es posible notar que esta define el valor de U_j^{i+1} en base a tres concentraciones, U_{j-1}^i, U_j^i y U_{j+1}^i en otras palabras, depende de los valores de concentración en las celdas aledañas, y sólo recibe información de estas tres celdillas, así la velocidad máxima de propagación numérica de velocidad será

$$\lambda = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (319)$$

Ahora, supóngase que la velocidad de propagación real de la información asociada a la solución real de la ecuación diferencial es v tal que $\lambda < |v|$, se tendría entonces que la celda U_j^{i+1} en realidad dependería también de celdas más lejanas, pero el método no tendría esto en consideración, de donde se deduce que la solución numérica no es adecuada, debido a esto debe exigirse que la velocidad de propagación de la información numérica sea igual o más rápida que la velocidad de propagación real de la información, y así

$$\lambda = \frac{\Delta x}{\Delta t} \geq \sup(|v|), \quad (320)$$

que es llamada condición CFL, y corresponde a una condición necesaria para la convergencia de las soluciones numéricas cuando Δx tiende a cero, sin embargo no siempre es una condición suficiente, por lo que a menudo conviene ser aún más restrictivo.

8 BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

- [1] Renner, P., "Opportunities for sustainable development in the use of water resources by the Chilean Mining Industry," Proc. Addendum to the Proceedings of the international Seminar on Paste and Thickened Tailings, pp. 59-66.
- [2] Concha A, F., 2014, Solid-Liquid Separation in the Mining Industry. Cham: Springer International Publishing.
- [3] 2016, "Espesamiento de Pulpas," Boletín Minero, pp. 30-31.
- [4] Betancourt, F., 2019, "Control Strategies for Clarifier-Thickeners Units."
- [5] Betancourt, F., Concha, F., and Sbárbaro, D., 2013, "Simple mass balance controllers for continuous sedimentation," Computers & Chemical Engineering, 54, pp. 34-43.
- [6] Concha A, F., 2001, Manual de Espesamiento y Filtración.
- [7] Diehl, S., 2001, "Operating charts for continuous sedimentation I: Control of steady states," Journal of Engineering Mathematics, 41(2-3), pp. 117-144.
- [8] Bürger, R., and Narváez, A., 2007, "Steady-state, control, and capacity calculations for flocculated suspensions in clarifier-thickeners," Int J Miner Process, 84(1-4), pp. 274-298.
- [9] Diehl, S., 1997, "Dynamic and steady-state behavior of continuous sedimentation," Siam J Appl Math, 57(4), pp. 991-1018.
- [10] Diehl, S., 2006, "Operating charts for continuous sedimentation III: control of step inputs," Journal of Engineering Mathematics, 54(3), pp. 225-259.
- [11] Langlois, J. I., and Cipriano, A., 2019, "Dynamic modeling and simulation of tailing thickener units for the development of control strategies," Minerals Engineering, 131, pp. 131-139.
- [12] Diehl, S., 2005, "Operating charts for continuous sedimentation II: Step responses," Journal of Engineering Mathematics, 53(2), pp. 139-185.
- [13] Diehl, S., 2007, "Operating charts for continuous sedimentation IV: limitations for control of dynamic behaviour," Journal of Engineering Mathematics, 60(3-4), pp. 249-264.
- [14] Sbárbaro, D., and del Villar, R., 2010, Advanced Control and Supervision of Mineral Processing Plants.
- [15] Diehl, S., 2007, "A regulator for continuous sedimentation in ideal clarifier-thickener units," Journal of Engineering Mathematics, 60(3-4), pp. 265-291.
- [16] Bustos, M. C., Concha, F., Bürger, R., and Tory, E. M., 1999, Sedimentation and Thickening.
- [17] Barrientos R, A., Concha, F. 1993, Mecánica racional moderna, Concepción : Universidad de Concepción, Depto. de Ingeniería Metalúrgica.
- [18] Gurtin, M. E., 1981, An Introduction to Continuum Mechanics, Academic Press.
- [19] Bürger, R., 2014, Mecánica del Medio Continuo.
- [20] Bürger, R., 2000, "Phenomenological foundation and mathematical theory of sedimentation-consolidation processes."
- [21] Kynch, G. J., 1952, "A theory of sedimentation," Transactions of the Faraday Society, 48.
- [22] Concha, F., and Bürger, R., 2002, "A Century of Research in Sedimentation and Thickening," KONA Powder and Particle Journal, 20(0), pp. 38-70.
- [23] Concha A, F., and Bustos, M. C., 1991, "Settling velocities of particulate systems, 6. Kynch sedimentation processes: batch settling."
- [24] Richardson, J. F., and Zaki, W. N., 1954, "The sedimentation of a suspension of uniform spheres under conditions of viscous flow," Chemical Engineering Science, 3(2), pp. 65-73.
- [25] Mejías, C., 2015, "Identificación de la función densidad de flujo mediante la medición de curvas de asentamiento de suspensiones y simulación numérica de sedimentación continua."
- [26] Diehl, S., 1996, "A conservation law with point source and discontinuous flux function modelling continuous sedimentation," Siam J Appl Math, 56(2), pp. 388-419.
- [27] Bürger, R., 2018, Apuntes de Leyes de Conservación.
- [28] Comings, E. W., Pruiss, C. E., and DeBord, C., 1954, "Continuous settling and thickening.," Industrial and Engineering Chemistry, 46, pp. 1164-1172.

- [29] COE, K. S., and CLEVENGER, G. H., 1916, "Method of determining the capacity of slime settling tanks. ," Trans. AIME, 1916, vol. 55, pp. p. 203-210.
- [30] Lev, O., Rubin, E., and Sheintuch, M., 1986, "Steady State Analysis of a Continuous Clarifier-Thickener System."
- [31] Diehl, S., 1995, "On Scalar Conservation-Laws with Point-Source and Discontinuous Flux Function," Siam J Math Anal, 26(6), pp. 1425-1451.
- [32] Leveque, R., 2004, Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems.
- [33] Leveque, R., Numerical Methods for Conservation Laws.
- [34] Bürger, R., Diehl, S., Faras, S., Nopens, I., and Torfs, E., 2013, "A consistent modelling methodology for secondary settling tanks: a reliable numerical method," Water Sci Technol, 68(1), pp. 192-208.
- [35] Maljian, M. V., and Howell, J. A., 1978, "Dynamic responde of a continuous thickener to overloading and underloading," Chemical Engineering Research and Design, 56, pp. 55-61.
- [36] Xu, N., Wang, X., Zhou, J. W., Wang, Q. K., Fang, W., and Peng, X. Y., 2015, "An intelligent control strategy for thickening process," Int J Miner Process, 142, pp. 56-62.
- [37] Segovia, J. P., Concha A, F., and Sbarbaro, D., 2011, "On the control of sludge level and underflow concentration in industrial thickeners."
- [38] Burger, R., Karlsen, K. H., and Towers, J. D., 2005, "A model of continuous sedimentation of flocculated suspensions in clarifier-thickener units," Siam J Appl Math, 65(3), pp. 882-940.
- [39] Bürger, R., Karlsen, K. H., Klingenberg, C., and Risebro, N. H., 2003, "A front tracking approach to a model of continuous sedimentation in ideal clarifier–thickener units," Nonlinear Analysis: Real World Applications, 4(3), pp. 457-481.
- [40] Bürger, R., Karlsen, K. H., Risebro, N. H., and Towers, J. D., 2004, "Numerical methods for the simulation of continuous sedimentation in ideal clarifier-thickener units," Int J Miner Process, 73(2-4), pp. 209-228.
- [41] Diehl, S., 1996, "Scalar Conservation Laws with Discontinuous Flux Function: I. The Viscous Profile Condition."
- [42] Bürger, R., 2012, Apuntes de Análisis Numérico III.
- [43] Renardy, M., and Rogers, R. C., 2010, An Introduction to Partial Differential Equations. New York: Springer.
- [44] Diehl, S., 1996, "Introduction to the Scalar Non-Linear Conservation Law."
- [45] Toro, E. F., 2009, Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Berlin: Springer.
- [46] Bustos, M., Paiva, F., Wendland, W., 1990, "Control of Continuous Sedimentation of Ideal Suspensions as an Initial and Boundary Value Problem," Mathematical Methods in Applied Sciences, Vol. 12, pp. 533-548.

Hoja Resumen Memoria de Título

Título: Control automático de la altura de cama de sedimento en un espesador piloto
Nombre Memorista: Fernando Ariel Maureira Manríquez

Modalidad		Profesor(es) Patrocinante(s)	
Concepto			
Calificación			
Fecha		Prof. Daniel Sbarbaro	Prof. Fernando Betancourt
Prof. Eugenia Araneda H.		Ingeniero Supervisor: No aplica.	
		Institución: Universidad de Concepción.	

Comisión (Nombre y Firma)	
Prof. Raimund Burger	

Resumen
<p>Se estudia el problema del control de la altura de cama de sedimento en un espesador operando con una suspensión ideal, se propone un método que permite la determinación de la altura de cama de sedimento de manera teórica y experimental, se aplican una serie de restricciones a la acción de controlador con la finalidad de lograr una serie de objetivos secundarios respecto de la operación, se propone un método de sintonización que permite seleccionar constantes de controlador de acuerdo a ciertas especificaciones, y cómo obtener los parámetros necesarios para este trabajo, en particular, se utilizan dos casos límite para estudiar la sintonización, acción rápida y acción ultralenta que operan de buena manera en sus respectivos dominios de tiempo de estabilización, se estudian en particular dos comportamientos dinámicos, asociados a la propagación de información en el interior de dos zonas del espesador, zona de sedimentación y zona de sedimento.</p>