

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

Profesor Patrocinante:
Dr.-Ing. Cristián Molina

Estudio teórico de las vibraciones torsionales y radiales de una
transmisión de engranajes rectos

Brian Cleveland Poo

Tesis para optar al Grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería con mención en Ingeniería Mecánica

Concepción, Abril de 2022

RESUMEN

A lo largo de la historia, las transmisiones de engranajes han jugado un rol fundamental en diversos procesos de la industria y la vida cotidiana. En muchos casos forman parte de procesos o máquinas consideradas críticas dentro de la producción. Una falla no detectada a tiempo en una transmisión de engranajes puede traer grandes pérdidas económicas, e incluso pérdidas humanas en los casos más extremos. Por estos motivos es que el estudio en torno al mejoramiento y el diagnóstico de fallas en cajas reductoras es fundamental. Las transmisiones de engranajes pueden tener comportamientos complejos y difíciles de cuantificar, por lo que su estudio puede abordarse de muchas perspectivas diferentes y con diversos propósitos.

Las desviaciones geométricas juegan un rol fundamental en la vida útil y en el desempeño de las transmisiones. Estos errores contribuyen a la excitación del sistema debido a que introducen perturbaciones en la transferencia de movimiento de las ruedas dentadas en el proceso de engrane. Los estándares de calidad AGMA establecen un sistema de clasificación de calidad de engranajes y definen métodos y prácticas recomendadas para la medición de desviaciones geométricas.

Motivado por lo anterior, este estudio busca analizar los efectos de los errores geométricos sobre la dinámica de una transmisión de engranajes rectos a partir de un modelo dinámico de 6 grados de libertad que permite integrar los efectos de los errores geométricos en la dinámica del sistema. Para lograr los objetivos propuestos se hace una descripción de los errores geométricos de una transmisión de engranajes rectos y se modelan de una forma simplificada para incorporarlos en el modelo propuesto de la transmisión. Se realizan simulaciones numéricas del sistema para obtener la respuesta dinámica frente a diferentes magnitudes de errores geométricos y bajo diferentes niveles de carga. Con este enfoque teórico simplificado es posible analizar el comportamiento del sistema aislando efectos externos o efectos debido a la complejidad de los errores geométricos reales.

Los resultados muestran que una variación en la magnitud de las desviaciones geométricas genera efectos diferentes sobre el sistema que los generados por variaciones de carga. Se establece la relación entre la magnitud de las desviaciones geométricas y la intensidad vibratoria tanto rotacional como traslacional. Adicionalmente se identifica que las desviaciones geométricas introducen no-linealidades en el sistema. El efecto de estas no-linealidades se observará en el sistema en frecuencias específicas dependiendo del contenido espectral de las desviaciones geométricas.

NOMENCLATURA

Símbolos latinos

c_{ij}	: Amortiguamiento del elemento $i = p, c$, en la dirección $j = x, y$.
C_c	: Amortiguamiento crítico.
D_{o_i}	: Diametro externo del elemento $i = p, c$.
D_{b_i}	: Diametro de base del elemento $i = p, c$.
d_T	: Diametro de tolerancia.
f_{ni}	: Frecuencia natural del modo de vibrar $i = 1, \dots, 6$.
f_{niH}	: Frecuencia natural del modo de vibrar $i = 1, \dots, 6$ de alta rigidez.
f_{niL}	: Frecuencia natural del modo de vibrar $i = 1, \dots, 6$ de baja rigidez.
f_{nd_i}	: Frecuencia natural amortiguada del modo de vibrar $i = 1, \dots, 6$.
f_{eng}	: Frecuencia de engrane.
f_p	: Frecuencia de rotación del piñón.
F_α	: Desviación total del perfil.
$F_{H\alpha}$: Desviacion de pendiente del perfil.
J_i	: Inercia respecto de su centro geométrico del elemento $i = p, c$.
K_e	: Rigidez de engrane equivalente.
K_{ei}	: Rigidez de engrane equivalente para un solo diente.
k_{ij}	: Rigidez del elemento $i = p, c$, en la dirección $j = x, y$.
L_{ab}	: Largo de la línea de acción.
$L_{\alpha c}$: Largo funcional del perfil.
m	: Módulo.
m_i	: Masa del elemento $i = p, c$.
m_n	: Módulo normal.
p_b	: Paso de base.
p_c	: Paso circular.
q_t	: Longitud del arco de acción.
r_{b_i}	: Radio de base del elemento $i = p, c$.
r_{p_i}	: Radio de paso del elemento $i = p, c$.
r_c	: Razón de contacto.
x_i	: Grado de libertad de traslación horizontal del elemento $i = p, c$.
y_i	: Grado de libertad de traslación vertical del elemento $i = p, c$.
Z_i	: Número de dientes del elemento $i = p, c$.

Símbolos griegos

β	: Parámetro del método de integración de Newmark.
γ	: Parámetro del método de integración de Newmark.
ξ	: Factor de amortiguamiento.
λ	: Valor propio.
ϕ	: Ángulo de presión.
μ	: Parámetro de endurecimiento de resorte no-lineal.
θ_g	: Período de engrane (en dominio angular).
θ_i	: Grado de libertad de rotación del elemento $i = p, c$.
Ψ_i	: Modo de vibrar, correspondiente a la frecuencia $i = 1, \dots, 6$.
ω_0	: Frecuencia natural del sistema lineal.
ω_n	: Frecuencia natural.
ω_d	: Frecuencia natural amortiguada.
κ	: Desplazamiento angular de un diente sobre L_{ab} .

Abreviaturas

AGMA	: American Gear Manufacturerers Association.
DTE	: Dynamic transmission error.
ET	: Error de transmisión.
FFT	: Fast Fourier transform.
GL	: Grado de libertad.
LTE	: Loaded transmission error.
NLTE	: Non-loaded transmission error.
SFT	: Single flank testing.
DFT	: Double flank testing.

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1	Relación entre los diferentes tipos de ET y su efecto en el sistema.	9
1.2	Esquema de una transmisión de engranajes rectos.	10
1.3	Modelo equivalente del engrane.	10
1.4	Esquema del contacto entre dientes sobre la línea de acción.	11
1.5	Cambio en la posición de aplicación de la carga en un diente.	11
1.6	(a) Rigidez equivalente de un diente y (b) función de rigidez de engrane.	12
1.7	Modelo dinámico propuesto.	12
2.1	Ejemplo de medición de NLTE.	15
2.2	Comparación entre grados “A” y “G”.	16
3.1	Espectro cascada de la señal DTE - variación del grado de calidad “A”.	18
3.2	Espectro cascada de la señal DTE - variación de nivel de carga.	19
3.3	Espectro cascada de la señal DTE - variación del grado de calidad “G”.	20
3.4	Valor RMS de la señal DTE v/s grado de calidad “A” bajo diferentes niveles de carga.	22
3.5	Valor \dot{y}_{pRMS} v/s grado de calidad “A” bajo diferentes niveles de carga.	22
3.6	Valor RMS de la señal DTE v/s grado de calidad “G” bajo diferentes niveles de carga.	23
3.7	Valor \dot{y}_{pRMS} v/s grado de calidad “G” bajo diferentes niveles de carga.	23
4.1	Espectro cascada de la señal DTE - variación del grado de calidad “G”.	24
4.2	Señal NLTE de segundo orden $e(\theta)_{HO}$	26
4.3	Espectro cascada de la señal DTE con NLTE de segundo orden bajo diferentes niveles de carga.	26
5.1	Codificador óptico incremental.	33
5.2	Sistema óptico para capturar las posiciones angulares de las ruedas dentadas.	33
5.3	Diferencia entre la desviación de índice y de paso individual [AGMA 2015-1].	35
5.4	A la izquierda, instrumento de medición <i>double-probe</i> ; a la derecha, instrumento <i>single-probe</i> con sistema indexador [AGMA 2015-1].	36
5.5	Diferencia entre SFT y DFT [AGMA 915-1].	37
5.6	Lectura de ensayo SFT con errores de paso de orden superior, sin filtrar [AGMA 915-1].	37
5.7	Rigidez de engrane para un período θ_g	39
5.8	Frecuencias naturales en función del ángulo del piñón θ_p	40
5.9	Representación gráfica de los modos de vibrar.	41

ÍNDICE DE CONTENIDO

1	Introducción	6
1.1	Marco teórico	6
1.2	Objetivos	8
1.3	Descripción del error de transmisión	8
1.3.1	Error de transmisión geométrico (NLTE)	8
1.3.2	Error de transmisión estático (LTE)	9
1.3.3	Error de transmisión dinámico (DTE)	9
1.3.4	Relación entre NLTE, LTE y DTE.	9
1.4	Modelo dinámico	10
1.4.1	Modelo del proceso de engrane	10
1.4.2	Rigidez de engrane	11
1.4.3	Ecuaciones de movimiento	12
2	Modelación del NLTE	14
2.1	Norma AGMA de calidad de engranajes: mediciones tangenciales	14
2.2	Simulación del grado de calidad AGMA “A” y del NLTE	15
2.3	Simplificación: grado de calidad “G”	16
3	Simulación numérica	17
3.1	Caso 1: variación del grado de calidad “A”	18
3.2	Caso 2: variación en la magnitud de la carga	18
3.3	Caso 3: variación del grado de calidad “G”	20
3.3.1	Valores RMS: comparación entre DTE y velocidad vertical del piñón	21
4	Discusión	24
4.1	Resultados del caso 1 – variación del grado de calidad AGMA “A”	24
4.2	Resultados del caso 2 – variación de la magnitud de la carga	25
4.3	Resultados del caso 3 – variación del grado de calidad “G”	27
4.4	Valores RMS: comparación	27
5	Conclusiones y perspectivas	29
5.1	Conclusiones	29
5.2	Perspectivas	30
	Referencias	31
	Anexos	33

CAPÍTULO 1

Introducción

Las transmisiones de engranajes son equipos industriales de transmisión de potencia mecánica, los cuales se utilizan para aumentar o reducir la velocidad o el torque transmitido de un equipo a otro. Estos equipos son frecuentemente parte de sistemas considerados críticos para la producción. Una falla repentina en una transmisión puede tener consecuencias operacionales catastróficas e incluso poner en peligro la vida de las personas.

El análisis de vibraciones en transmisiones de engranajes permite detectar fallas aún cuando se presentan de forma incipiente sin afectar la integridad mecánica de la máquina, permitiendo tomar acciones preventivas o correctivas con la menor cantidad de tiempo perdido. El comportamiento dinámico de una transmisión es más bien un fenómeno complejo el cual es estudiado desde diferentes aristas y con diferentes propósitos. En este análisis el foco de estudio son las desviaciones geométricas, su influencia en la dinámica del sistema y entender el comportamiento del sistema bajo diferentes condiciones de carga y diferentes magnitudes de desviaciones geométricas.

1.1 Marco teórico

Debido a la importancia de las transmisiones de engranajes en el ámbito civil e industrial, se han realizado diversos estudios a lo largo de la historia. Los estudios relacionados con el comportamiento dinámico han tomado diferentes enfoques, como la optimización del diseño de ruedas dentadas para disminuir las cargas dinámicas, o bien centrados en técnicas que permiten el diagnóstico de fallas mediante el análisis de vibraciones [Mark 2015].

El modelamiento de la dinámica puede abordarse utilizando modelos de elementos finitos o bien utilizando modelos de parámetros discretos. Al utilizar esta última aproximación es posible modelar por separado los diferentes elementos que afectan el comportamiento dinámico y estudiar la influencia de cada uno de ellos en el sistema. En la aproximación mediante elementos finitos el proceso de engrane se modela al utilizar elementos de contacto entre los dientes de la rueda motriz y la conducida, para luego obtener las respuestas vibratorias. En general, según la bibliografía revisada, se ha visto que los estudios que utilizan elementos finitos se centran en el cálculo de esfuerzos de contacto y en obtener la rigidez de engrane; mientras que para el estudio del comportamiento vibratorio los modelos de parámetros concentrados son los más utilizados debido a que representan de buena forma la física del sistema y son menos costosos computacionalmente.

En [Amabili 1997] se estudió la respuesta en estado estacionario y la estabilidad de un modelo de dos grados de libertad de un par de engranajes rectos. Se estudió la influencia de la variación paramétrica de rigidez, del amortiguamiento y de los errores geométricos en el sistema. De los resultados expuestos en dicho estudio se concluye que la respuesta en estado estacionario es altamente sensible a los errores geométricos presentes en el sistema.

En el estudio [Bartelmus 2001] se presenta una recopilación de modelos de transmisión con diferentes grados de libertad y concluye que las fuerzas dinámicas en los dientes se incrementan de dos a tres veces en condiciones de operación inestables o bajo resonancia. Una transmisión de una etapa trabaja en resonancia cuando la frecuencia de engrane f_g es cercana a la frecuencia natural f_n del sistema.

En un caso industrial real, es común que una transmisión trabaje en condiciones de carga variable. La mayoría de las investigaciones asumen que las cargas del sistema son constantes y debido a este motivo en [Chaari et al. 2012] se estudió una transmisión de una etapa con condiciones de carga variable aplicando técnicas de análisis como la Short Time Fourier Transform (STFT) y la Smoothed Wigner-Ville Distribution (SWVD). Como conclusión principal se obtuvo que es necesario obtener información precisa del valor y de la variabilidad de la carga para poder diagnosticar con precisión.

Otros estudios relevantes incluyen la modelación dinámica considerando el efecto de la fricción y el error de transmisión como excitación del sistema [Jia et al. 2003], [Howard et al. 2001]. En particular en [Mark 1978] y [Mark 1979] se derivaron expresiones para describir el error de transmisión estático (STE) y analizar su influencia en las funciones de transferencia de la transmisión.

Como la rigidez de engrane es una variable fundamental al momento de modelar un sistema dinámico, investigaciones como las realizadas en [Fernandez et al. 2013], [Fernandez et al. 2015] y [Mohammed et al. 2014] se enfocan en la influencia de los errores geométricos en la rigidez de engrane para varios casos de carga y también para el caso de pérdida material en un flanco o agrietamiento de la base de un diente [Chaari et al. 2008].

Finalmente en el estudio realizado por [Inalpolat et al. 2015] se presenta un modelo dinámico de 6 GL, en el cual se estudia el contenido frecuencial de la respuesta dinámica incluyendo los errores de paso mediante una señal medida con un Single Flank Test (SFT). Es importante destacar que dicho modelo trabaja la hipótesis de que la rigidez de engrane varía con periodicidad constante en el tiempo lo que genera ciertas incompatibilidades físicas para el caso de velocidad variable. En [Trujillo 2015] se presenta un modelo dinámico torsional de 2 GL, que modela la rigidez de engrane en función del ángulo de rotación y además se analiza la transmisión operando con diferentes casos de falla.

A partir de los estudios previamente mencionados se obtienen elementos para formular el modelo dinámico que en conjunto con la modelación de las desviaciones geométricas permite presentar este nuevo análisis detallado respecto de los efectos de las desviaciones geométricas en el sistema bajo diferentes condiciones.

1.2 Objetivos

El objetivo principal de este estudio es entender la influencia de las desviaciones geométricas en la respuesta dinámica de una transmisión de engranajes rectos. Para lograr el objetivo principal se plantean los siguientes objetivos específicos:

- Modelar las desviaciones geométricas de forma representativa de acorde a la norma AGMA aplicando simplificaciones que permitan visualizar claramente los fenómenos de interés manteniendo la congruencia con el fenómeno físico real.
- Evaluar la respuesta dinámica del sistema incluyendo desviaciones geométricas de las ruedas dentadas bajo diferentes condiciones de carga y de magnitud de las desviaciones geométricas según el estándar de calidad de engranajes AGMA.
- Analizar la sensibilidad del sistema frente a variaciones de la magnitud de la carga y de la magnitud de las desviaciones geométricas.

1.3 Descripción del error de transmisión

El error de transmisión (ET) se define como “la diferencia entre la posición actual del engranaje de salida y la posición que ocuparía si la transmisión fuese ideal”. Evidentemente existen múltiples razones por las cuales la posición del engranaje de salida puede desviarse de la posición angular ideal, como por ejemplo los errores geométricos propios del proceso de fabricación o debido al desgaste, la deformación elástica de los dientes, los efectos dinámicos entre otros. Debido a este motivo es que es necesario identificar el estado de carga y las condiciones cinemáticas de la transmisión al momento de referirse al ET. Existen tres tipos de clasificaciones para el ET:

- Error de transmisión geométrico o sin carga (“non-loaded transmission error”, NLTE).
- Error de transmisión estático o con carga (“loaded transmission error, LTE)
- Error de transmisión dinámico (“dynamic transmission error, DTE)

La medición del error de transmisión consiste en medir la posición del eje de entrada y de salida mediante un encóder incremental. Mayor detalle puede observarse en Anexo A1.

1.3.1 Error de transmisión geométrico (NLTE)

El error de transmisión geométrico refleja las desviaciones a la cinemática ideal de una transmisión. La medición del NLTE captura las desviaciones al perfil de involuta de los dientes, errores de posición de dientes y cualquier otra desviación geométrica producto del proceso de manufactura o del desgaste de las ruedas dentadas (ver Anexo A2). Naturalmente, las desviaciones mencionadas anteriormente generan cambios en la cinemática ideal del proceso de engrane debido a que se pierde la forma ideal del perfil de involuta (tanto en forma como posición) y en consecuencia la transmisión de movimiento no será uniforme y a velocidad constante. Para medir el NLTE, la transmisión debe estar sometida a cargas mínimas y a bajas velocidades.

1.3.2 Error de transmisión estático (LTE)

En el proceso de engrane existen cargas inherentes a la transmisión de potencia las cuales generan deformaciones elásticas en los dientes de la transmisión. Aún si se tuviesen engranes geoméricamente perfectos, las cargas anteriormente mencionadas generarían deflexiones en la base de los dientes y además pequeñas deformaciones producto de las presiones de contacto de Hertz. Adicionalmente, a medida que ocurre el proceso de engrane, el número de pares de dientes en contacto cambia en el tiempo generando una redistribución de las fuerzas de engrane y por ende las deflexiones y deformaciones también son variables. El LTE se mide bajo condiciones de carga de operación y a bajas velocidades para asilar cualquier efecto dinámico de la medición.

1.3.3 Error de transmisión dinámico (DTE)

El DTE se obtiene realizando las mediciones a con carga y a velocidades de operación. Bajo estas condiciones, los efectos inerciales y dinámicos del sistema se ven reflejados en la medición. Debido a las perturbaciones geométricas y los efectos anteriormente descritos el engranaje de salida oscilará en torno a la posición ideal. Es importante notar que el DTE es la respuesta dinámica angular del sistema a causa de las desviaciones geométricas y a la variación paramétrica de rigidez observada en el LTE.

1.3.4 Relación entre NLTE, LTE y DTE.

Como se mencionó anteriormente el DTE es definido por la respuesta dinámica del sistema frente a las excitaciones introducidas por los errores geoméricos y a la excitación producto de la variación paramétrica de rigidez. En la literatura revisada se observó que, si bien cada uno de estos fenómenos son discutidos por separado, rara vez se hace un alto para establecer la relación que tienen entre cada uno y cómo afectan el comportamiento dinámico del sistema. La relación entre ellos que se presenta en este trabajo contempla consideraciones expuestas por [Randall 2011]. En la figura 1.1 se observa gráficamente su relación. Es importante notar que al NLTE y al LTE se les atribuye como la principal causa de vibraciones en transmisiones de engranajes, pero luego de realizar una revisión bibliográfica exhaustiva se puede afirmar que no existen estudios que establezcan la predominancia de uno sobre otro, en función de las condiciones de cada caso.

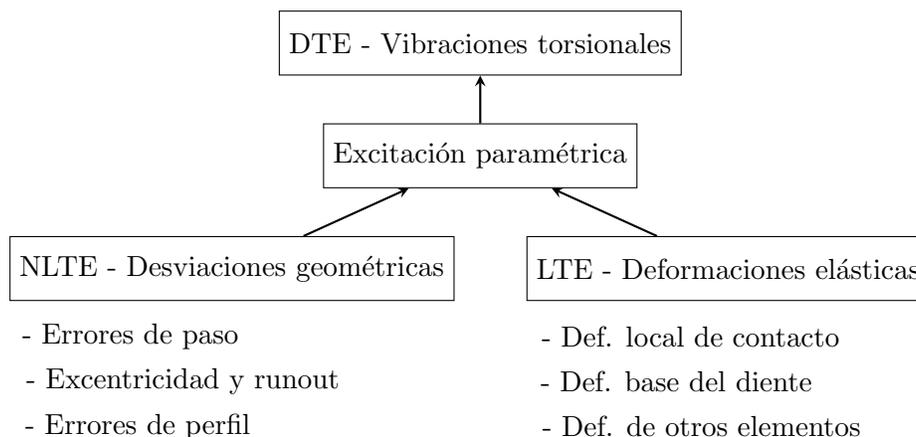


Figura 1.1: Relación entre los diferentes tipos de ET y su efecto en el sistema.

1.4 Modelo dinámico

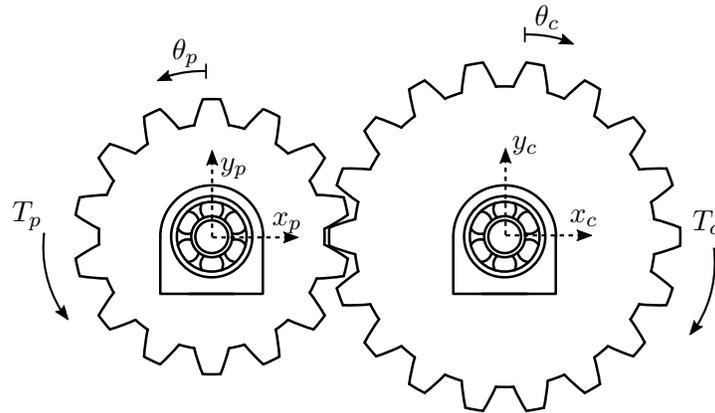


Figura 1.2: Esquema de una transmisión de engranajes rectos.

El modelo dinámico se compone de dos ruedas rígidas que representan las ruedas dentadas y un elemento elástico que representa los dientes en contacto. Los rodamientos y ejes son representados mediante elementos elásticos lineales. Acoplado a todos los elementos elásticos del modelo se encuentra en paralelo un amortiguador viscoso representando la disipación de energía inherente a cualquier elemento elástico real. Como resultado se obtiene un modelo de 6 grados de libertad (6-DOF, “degrees of freedom”, ver figura 1.2): dos grados de libertad traslacionales y uno torsional para cada rueda dentada. La rigidez del sistema queda definida como función de la posición angular del piñón permitiendo al modelo adaptarse a condiciones de velocidad variable e incluir desviaciones geométricas en el dominio ángulo. Mayor detalle puede encontrarse en [Cleveland 2016].

1.4.1 Modelo del proceso de engrane

El proceso de engrane se modela conectando las ruedas anteriormente mencionadas mediante un elemento elástico de rigidez variable. La rigidez equivalente considera tres rigideces conectadas en serie que representan las rigideces de cada diente y la rigidez debido al contacto según la teoría de contacto de Hertz. (ver figura 1.3). Adicionalmente se incluye un amortiguador viscoso representando las pérdidas de energía producto del roce viscoso entre dientes en contacto. Finalmente, en serie se considera un elemento para incorporar las desviaciones geométricas $e(\theta)$ que simula una desviación del punto de contacto ideal entre dientes.

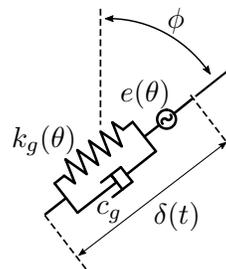


Figura 1.3: Modelo equivalente del engrane.

El conjunto de elementos descritos permite simular las fuerzas de engrane aplicadas en el radio de base de las ruedas, en donde $\delta(t)$ cuantifica la deflexión de los dientes proyectada en la línea de acción.

1.4.2 Rigidez de engrane

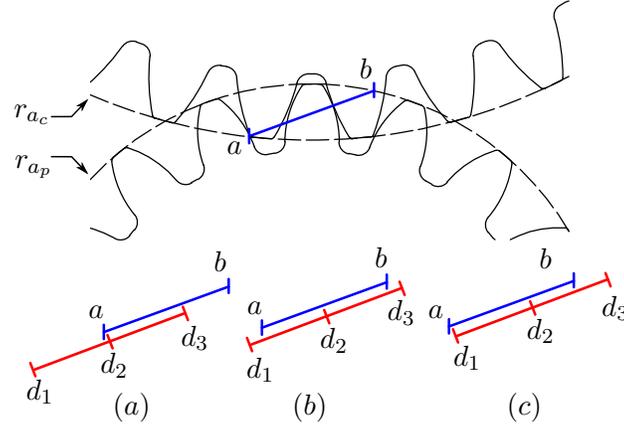


Figura 1.4: Esquema del contacto entre dientes sobre la línea de acción.

La rigidez de engrane es calculada al aplicar la fuerza de contacto sobre un diente (producto de la acción de engrane) mientras el punto de contacto se desplaza sobre el flanco del diente, sobre la línea de acción, mientras el diente se traslada y rota. En la figura 1.4 se presenta un esquema del proceso de engrane entre dos ruedas dentadas. La línea de acción es representada mediante el segmento \overline{ab} . Los puntos de contacto de tres pares de dientes consecutivos son representados mediante: d_1 , d_2 y d_3 . Debido a las características del perfil de involuta estos puntos de contacto son equidistantes y se trasladan en línea recta sobre la línea de acción. En la etapa (a) se encuentra d_3 una posición avanzada del recorrido sobre la línea de acción, mientras que d_2 comienza a engranar. Por otro lado, en la etapa (b) d_3 ya no se encuentra sobre la línea de acción indicando que este par de dientes ya no se encuentra en contacto. Luego, en la etapa (c) vuelve a entrar en contacto otro par de dientes: d_1 . Con este esquema se representa la cinámica del proceso de engrane, ilustrando la variación de número de pares de dientes en contacto. En la figura 1.5 se observa como el punto de aplicación de la fuerza se mueve a medida que el diente se traslada y rota.

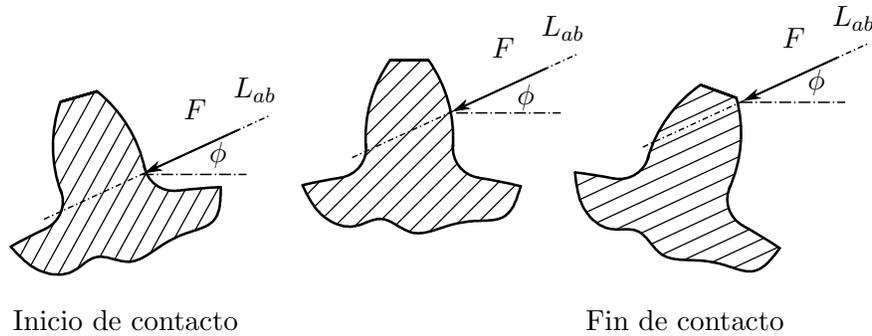


Figura 1.5: Cambio en la posición de aplicación de la carga en un diente.

El resultado es una función de rigidez (ver figura 1.6) definida por la geometría del engranaje y las propiedades mecánicas en función de la posición angular del piñón.

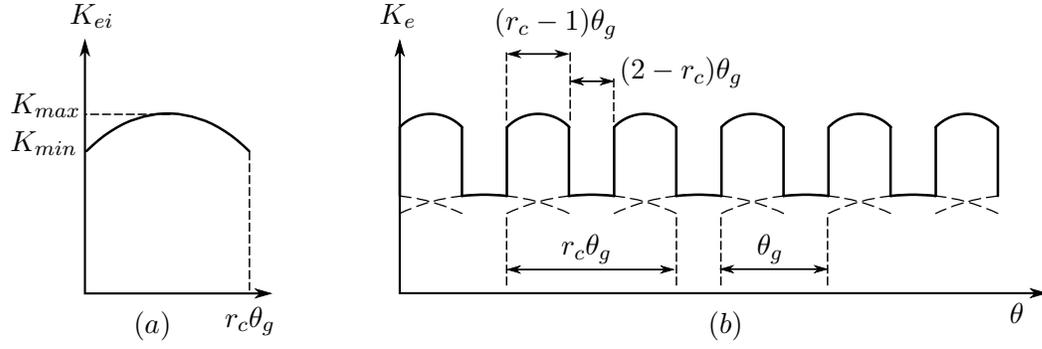


Figura 1.6: (a) Rigidez equivalente de un diente y (b) función de rigidez de engrane.

en donde:

- K_{ei} : rigidez equivalente de un diente.
- K_{max} : valor máximo de rigidez de un diente.
- K_{min} : valor mínimo de rigidez de un diente.
- r_c : razón de contacto.
- L_{ab} : longitud de la línea de acción.
- θ_g : período de engrane (en dominio ángulo).

Los valores de rigidez y parámetros geométricos para construir esta función fueron extraídos de [Chaari et al 2009].

1.4.3 Ecuaciones de movimiento

Al acoplar el elemento de la figura 1.3 con las ruedas de radio base R_b el modelo de la transmisión queda ensamblado según la figura 1.7.

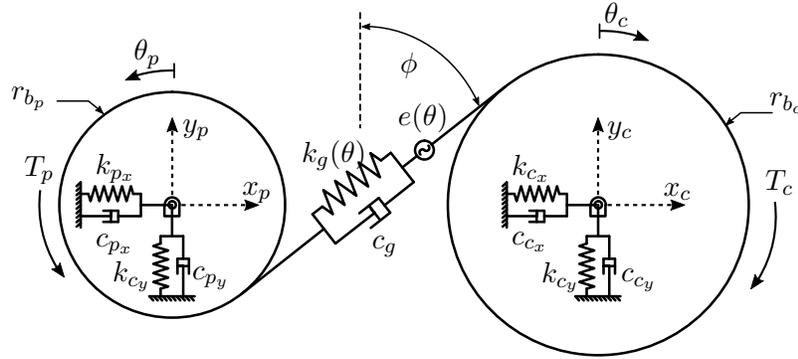


Figura 1.7: Modelo dinámico propuesto.

Las ecuaciones de movimiento quedan expresadas en función de $\delta(t)$ que cuantifica la compresión equivalente de los dientes en contacto. Notar que en la ec. 1.1 el signo negativo corresponde a la compresión del elemento descrito.

$$\begin{aligned} \delta(t) = & x_c(t) \sin(\phi) + y_c(t) \cos(\phi) - x_p(t) \sin(\phi) \\ & - y_p(t) \cos(\phi) + \theta_c(t)r_{bc} - \theta_p(t)r_{bp} - e(\theta) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Las ecuaciones de movimiento del sistema se obtienen mediante el método de Newton aplicado a las ruedas del sistema. Para cada rueda, se cuenta con tres grados de libertad: horizontal, vertical y angular. Al realizar los diagramas del cuerpo libre resultan las ecuaciones de movimiento de la ec. 1.2 a la ec. 1.7. Al reemplazar la ec. 1.1 en las ecuaciones ec. 1.2 a la ec 1.7 se obtiene la forma final de las ecuaciones de movimiento.

$$m_p \ddot{x}_p(t) + c_{p_x} \dot{x}_p(t) + k_{p_x} x_p(t) - c_g \dot{\delta}(t) \sin(\phi) - k_g(\theta) \delta(t) \sin(\phi) = 0 \quad (1.2)$$

$$m_p \ddot{y}_p(t) + c_{p_y} \dot{y}_p(t) + k_{p_y} y_p(t) - c_g \dot{\delta}(t) \cos(\phi) - k_g(\theta) \delta(t) \cos(\phi) = 0 \quad (1.3)$$

$$J_p \ddot{\theta}_p(t) - c_g \dot{\delta}(t) r_{b_p} - k_g(\theta) \delta(t) r_{b_p} = T_p \quad (1.4)$$

$$m_c \ddot{x}_c(t) + c_{c_x} \dot{x}_c(t) + k_{c_x} x_c(t) + c_g \dot{\delta}(t) \sin(\phi) + k_g(\theta) \delta(t) \sin(\phi) = 0 \quad (1.5)$$

$$m_c \ddot{y}_c(t) + c_{c_y} \dot{y}_c(t) + k_{c_y} y_c(t) + c_g \dot{\delta}(t) \cos(\phi) + k_g(\theta) \delta(t) \cos(\phi) = 0 \quad (1.6)$$

$$J_c \ddot{\theta}_c(t) + c_g \dot{\delta}(t) r_{b_c} + k_g(\theta) \delta(t) r_{b_c} = T_c \quad (1.7)$$

CAPÍTULO 2

Modelación del NLTE

Para modelar los errores geométricos de las ruedas dentadas es necesario entender cómo los errores son clasificados y medidos. La calidad geométrica de ruedas dentadas tiene un impacto considerable en el comportamiento dinámico de las transmisiones. Las desviaciones geométricas afectan la transferencia de movimiento de un engranaje al otro como resultado de diferencias en la posición del punto de contacto ideal, desviándose del perfil de involuta tanto en posición como en forma.

2.1 Norma AGMA de calidad de engranajes: mediciones tangenciales

El estándar AGMA 2015-1-A01 define un sistema de grados de calidad en base a mediciones tangenciales al círculo de paso realizadas en los flancos de la rueda dentada. Se definen 10 grados de calidad desde "A2" a "A11", donde "A2" es el grado de mayor calidad. El estándar se complementa con el documento AGMA 915-1-A02 que establece la metodología y las prácticas recomendadas para la medición de las mediciones tangenciales. La normativa establece dos principales métodos para determinar la calidad geométrica: a) mediciones individuales b) medición compuesta "single flank composite testing – (SFT)", ver Anexo A3. Para los engranajes de mayor calidad el segundo método es una alternativa permitida por el estándar.

La medición de elementos individuales consiste en realizar mediciones de algunos parámetros para un grupo de dientes de determinado (ver tabla 4.3, Anexo A2). Por otro lado, la medición SFT consiste en medir directamente el NLTE en un banco de pruebas, con un engranaje patrón manteniendo la distancia entre centros constante. Esta medición reflejará la cinemática y la transferencia de movimiento como una medición angular directa. Debido a estos motivos este estudio se centrará en las mediciones SFT. Un ejemplo de NLTE puede verse en la figura 2.1.

Para determinar la calidad geométrica de una rueda dentada el estándar especifica la medición de los siguientes parámetros:

- Total single flank composite deviation F_{is}
- Tooth-to-tooth single flank composite deviation (filtered) f_{is}
- Contact pattern c_p

La desviación F_{is} reflejará los efectos de la posición de los flancos (desviaciones de índice), desviaciones de perfil, excentricidad entre otras. La desviación f_{is} (filtrada) es una señal obtenida

a partir de filtrar el primer orden de la señal F_{is} , eliminando el efecto de la excentricidad permitiendo evaluar desviaciones propias de cada diente. Los efectos del patrón de contacto no son parte de este estudio.

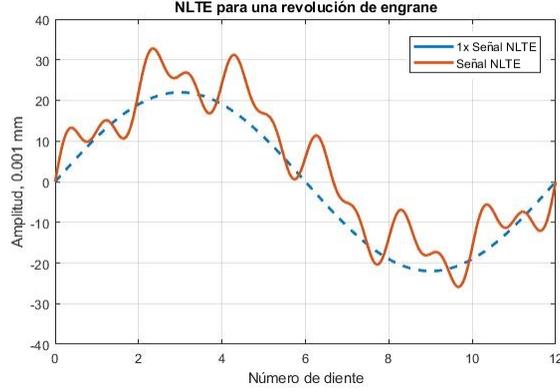


Figura 2.1: Ejemplo de medición de NLTE.

2.2 Simulación del grado de calidad AGMA “A” y del NLTE

Debido a que la excentricidad no es parte del alcance de este análisis, el parámetro principal a evaluar es la “single flank composite deviation” f_{is} .

El estándar AGMA 2015-1-A01 define la siguiente ecuación para calcular la desviación máxima permisible f_{isT} para cada grado de calidad “A” en términos del módulo normal m_n y el diámetro de tolerancia d_T de la rueda dentada a evaluar. Ver ec. 2.1.

$$f_{isT}(A) = (0,03m_n + 0,003d_T + 2) * \sqrt{2}^{(A-5)} \quad (2.1)$$

La simulación de las desviaciones geométricas es incorporada en el modelo dinámico mediante el elemento $e(\theta)$. Este elemento introduce una perturbación geométrica en la cinemática del sistema. La señal es dependiente de la posición angular del piñón θ_p multiplicada por el número de dientes Z_p . La amplitud de la señal es equivalente a la máxima desviación permisible para cada grado A de calidad f_{isT} .

$$e(\theta) = f_{isT}(A) * \sin(Z_p\theta_p) \quad (2.2)$$

Esta formulación es una simplificación de una señal NLTE medida y considera solo los errores geométricos de primer orden a $Z_p\theta_p$. Señales NLTE de mayor complejidad pueden ser simuladas al incluir las componentes del espectro FFT de una señal NLTE real medida en el dominio de ángulo. Es importante destacar que es esperable que un error de transmisión real tenga un contenido espectral de mayor orden al de la simplificación aquí propuesta debido a la naturaleza estocástica de los errores geométricos y que estos sean muy variados. El objetivo de utilizar esta simplificación es evitar introducir componentes de orden superior y simplificar el análisis. En algunos sistemas, como, por ejemplo, los sistemas no lineales es posible observar en la repuesta múltiplos de las frecuencias de excitación incluso cuando estas poseen sólo una frecuencia fundamental.

2.3 Simplificación: grado de calidad “G”

El grado de calidad establecido por la norma AGMA posee un incremento exponencial entre un grado de calidad y otro a medida que el grado “A” aumenta. Se propone un grado de calidad “G” lineal para evaluar la sensibilidad del sistema ante cambios de incremento constante, ver ec. 2.3.

$$f_{isT}(G) = (2,53 * 10^{-7})G + 3,29 * 10^{-6}; \quad (2.3)$$

Una comparación entre ambos grados de calidad puede ser vista en la figura 2.2. Los coeficientes fueron seleccionados de forma que el grado de calidad “A7” y “G7” sean de la misma magnitud.

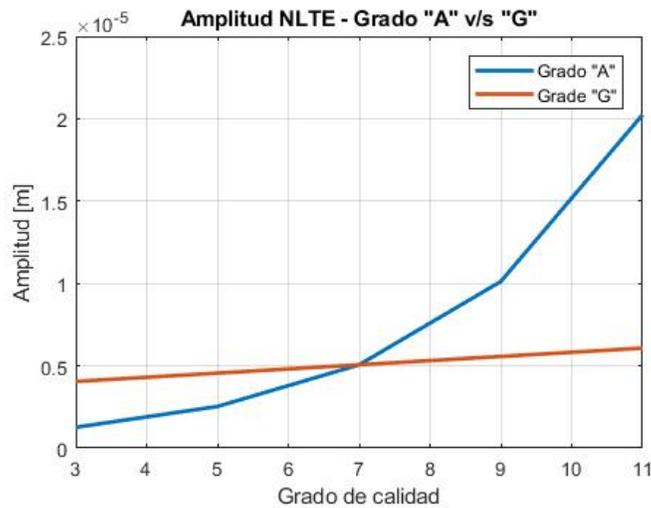


Figura 2.2: Comparación entre grados “A” y “G”.

El grado de calidad “G” propuesto es utilizado para evaluar la sensibilidad del sistema ante cambios a intervalos fijos en la amplitud de la señal $e(\theta)$.

CAPÍTULO 3

Simulación numérica

La respuesta del sistema es obtenida a través del método β de integración numérica de Newmark como se explica en [Cleveland 2016]. Los parámetros de las propiedades mecánicas del sistema pueden encontrarse en el Anexo A5, mientras que los parámetros del método de integración en el Anexo A6.

Para determinar las frecuencias naturales del sistema se resolvió el sistema de ecuaciones de movimiento como un problema de valores propios. Los resultados pueden observarse en Anexo A7.

La respuesta del sistema se obtiene para cada caso y el desplazamiento, velocidad y aceleración para cada grado de libertad es almacenado. Todos los resultados secundarios son obtenidos a partir de estas variables. En este estudio se hace énfasis en el DTE debido a que representa el error de transmisión dinámico. Por definición el DTE captura sólo los movimientos en dominio angular, por lo que en este estudio se calcula como:

$$DTE(t) = \theta_c(t)r_{bc} - \theta_p(t)r_{bp} \quad (3.1)$$

y en la velocidad vertical del piñón \dot{y}_p como si un sensor estuviese ubicado en uno de los descansos del piñón. La respuesta del sistema es analizada espectralmente utilizando la transformada rápida de Fourier (FFT). Los valores RMS de la señal DTE y de la velocidad del piñón son calculados para evaluar la intensidad vibratoria.

Para evaluar el efecto tanto de la magnitud de las desviaciones geométricas f_{isT} y de la magnitud de la carga T_m , se realizan simulaciones variando cada parámetro independientemente y se organizan de la siguiente forma:

- Caso 1 – variación del grado “A”: señal NLTE con amplitud según grado AGMA “A”.
- Caso 2 – variación del nivel de carga T_m .
- Caso 3 - variación del grado “G”: señal NLTE con amplitud según grado “G” propuesto.

El espectro de la respuesta del sistema es analizado y la amplitud de cada componente espectral de interés es registrada. En la respuesta del sistema se observan componentes del segundo y cuarto modo de vibrar del sistema y sus amplitudes son comparadas para cada caso.

3.1 Caso 1: variación del grado de calidad “A”

Para el caso 1 se considera una carga constante de 20 [Nm] aplicada al sistema y la respuesta es calculada cinco veces cambiando la magnitud de la función de desviación geométrica como se explicó en la sección 2.2 para los grados de calidad “A3”, “A5”, “A7”, “A9” y “A11”. La amplitud de cada componente espectral se presenta para el grado de calidad “A3” en la tabla 3.1. Las amplitudes entre grados de calidad subsecuentes son comparadas y los resultados son presentados en la tabla 3.2. La amplitud obtenida para cada componente espectral se presenta en la tabla 4.7 (Anexo A8) y pueden observarse en el espectro cascada de la figura 3.1.

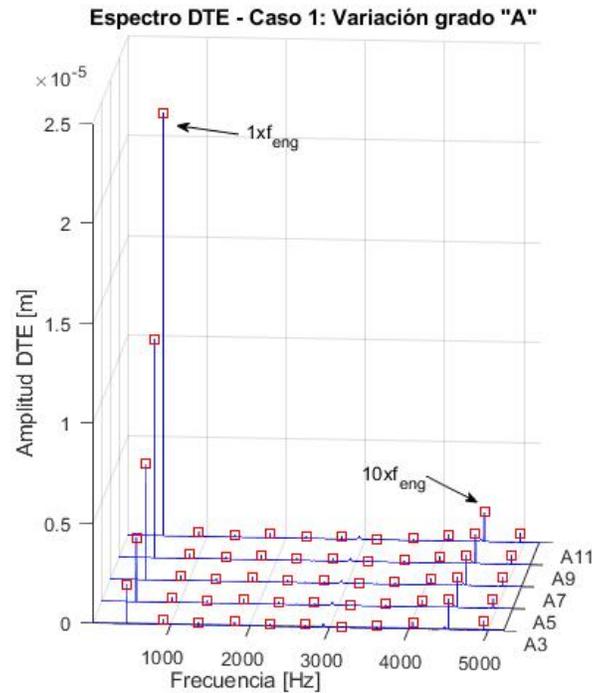


Figura 3.1: Espectro cascada de la señal DTE - variación del grado de calidad “A”.

3.2 Caso 2: variación en la magnitud de la carga

Para el caso 2, el grado de calidad AGMA se mantiene fijo en “A7” y se varía la carga entre 16 [Nm] y 24 [Nm] con un incremento de 2 [Nm] entre simulaciones. La amplitud para cada componente espectral se presenta para $T_m = 16$ [Nm] en la tabla 3.3. Las amplitudes de las componentes para cada nivel de carga consecutivo son comparadas y los valores se presentan en la tabla 3.4. La amplitud obtenida para cada componente espectral se presenta en la tabla 4.8 (Anexo A8) y pueden observarse en el espectro cascada de la figura 3.2. Se selecciona el grado de calidad “A7” de forma arbitraria debido a que corresponde al valor central de los grados de calidad con el objetivo de comparar con los otros casos propuestos de este estudio.

Tabla 3.1: Amplitud de las componentes espectrales para grado de calidad “A3” @ $T_m = 20$ [Nm].

Frec.	A3 - [m]
$1 \times f_{eng}$	$1,94 * 10^{-06}$
$2 \times f_{eng}$	$2,32 * 10^{-07}$
$3 \times f_{eng}$	$1,07 * 10^{-07}$
$4 \times f_{eng}$	$2,13 * 10^{-07}$
$5 \times f_{eng}$	$1,05 * 10^{-07}$
$6 \times f_{eng}$	$1,22 * 10^{-07}$
$7 \times f_{eng}$	$5,48 * 10^{-08}$
$8 \times f_{eng}$	$1,04 * 10^{-07}$
$9 \times f_{eng}$	$3,24 * 10^{-07}$
$10 \times f_{eng}$	$1,50 * 10^{-06}$
ω_{n2}	$1,57 * 10^{-07}$
$\omega_{n2} - f_{eng}$	$1,49 * 10^{-08}$
$\omega_{n2} + f_{eng}$	$4,40 * 10^{-09}$
ω_{n4}	$1,26 * 10^{-07}$
$\omega_{n4} - f_{eng}$	$4,04 * 10^{-08}$
$\omega_{n4} + f_{eng}$	$4,12 * 10^{-08}$

Tabla 3.2: Comparación del incremento de la amplitud de las componentes espectrales entre grados de calidad “A”.

Frec.	A5/A3	A7/A5	A9/A7	A11/A9
$1 \times f_{eng}$	65,7%	79,5%	88,7%	94,0%
$2 \times f_{eng}$	0,2%	-0,2%	-2,2%	-7,5%
$3 \times f_{eng}$	0,2%	0,5%	1,0%	2,5%
$4 \times f_{eng}$	0,2%	0,3%	0,7%	1,3%
$5 \times f_{eng}$	-0,2%	-0,4%	-0,8%	-1,4%
$6 \times f_{eng}$	0,8%	1,7%	3,4%	6,8%
$7 \times f_{eng}$	-0,1%	-0,2%	-0,3%	-0,7%
$8 \times f_{eng}$	-0,3%	-0,7%	-1,5%	-3,1%
$9 \times f_{eng}$	-0,3%	-0,7%	-1,4%	-2,9%
$10 \times f_{eng}$	0,0%	-0,1%	-0,2%	-0,3%
ω_{n2}	1,0%	0,2%	5,3%	9,6%
$\omega_{n2} - f_{eng}$	1,0%	-0,9%	6,0%	8,3%
$\omega_{n2} + f_{eng}$	0,3%	-0,8%	2,4%	5,2%
ω_{n4}	-2,8%	0,7%	-0,8%	1,9%
$\omega_{n4} - f_{eng}$	-3,1%	0,7%	-1,1%	1,6%
$\omega_{n4} + f_{eng}$	-2,5%	0,5%	-1,2%	1,1%

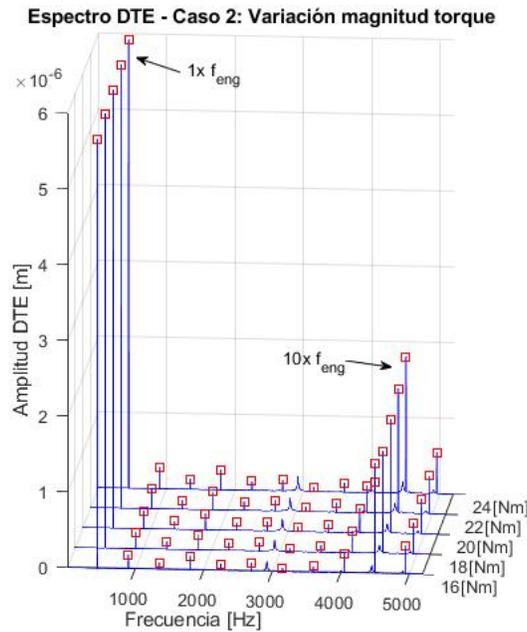


Figura 3.2: Espectro cascada de la señal DTE - variación de nivel de carga.

Tabla 3.3: Amplitud de las componentes espectrales para $T_m = 16$ [Nm] @ “A7”.

Frec.	$[m]@T_m = 16[Nm]$
$1 \times f_{eng}$	$5,65 * 10^{-06}$
$2 \times f_{eng}$	$1,86 * 10^{-07}$
$3 \times f_{eng}$	$8,58 * 10^{-08}$
$4 \times f_{eng}$	$1,72 * 10^{-07}$
$5 \times f_{eng}$	$8,38 * 10^{-08}$
$6 \times f_{eng}$	$1,00 * 10^{-07}$
$7 \times f_{eng}$	$4,37 * 10^{-08}$
$8 \times f_{eng}$	$8,22 * 10^{-08}$
$9 \times f_{eng}$	$2,57 * 10^{-07}$
$10 \times f_{eng}$	$1,20 * 10^{-06}$
ω_{n2}	$1,29 * 10^{-07}$
$\omega_{n2} - f_{eng}$	$1,22 * 10^{-08}$
$\omega_{n2} + f_{eng}$	$3,55 * 10^{-09}$
ω_{n4}	$9,51 * 10^{-08}$
$\omega_{n4} - f_{eng}$	$3,05 * 10^{-08}$
$\omega_{n4} + f_{eng}$	$3,10 * 10^{-08}$

Tabla 3.4: Amplitud de las componentes espectrales - comparación entre niveles de carga.

Frec. $T_m =$	18/16	20/18	22/20	24/22 [Nm]
$1 \times f_{eng}$	1,16%	1,15%	1,14%	1,12%
$2 \times f_{eng}$	12,3%	11,0%	9,9%	9,0%
$3 \times f_{eng}$	12,6%	11,1%	10,0%	9,1%
$4 \times f_{eng}$	12,4%	11,0%	9,9%	9,0%
$5 \times f_{eng}$	12,3%	11,1%	9,9%	9,0%
$6 \times f_{eng}$	12,4%	10,8%	9,9%	9,0%
$7 \times f_{eng}$	12,5%	11,1%	10,0%	9,1%
$8 \times f_{eng}$	12,3%	11,1%	9,9%	9,0%
$9 \times f_{eng}$	12,4%	11,1%	9,9%	9,0%
$10 \times f_{eng}$	12,4%	11,1%	9,9%	9,0%
ω_{n2}	13,2%	8,9%	9,7%	9,1%
$\omega_{n2} - f_{eng}$	14,1%	7,6%	9,7%	9,3%
$\omega_{n2} + f_{eng}$	12,8%	9,5%	10,0%	9,0%
ω_{n4}	18,2%	9,9%	3,7%	14,5%
$\omega_{n4} - f_{eng}$	18,2%	9,5%	3,7%	14,9%
$\omega_{n4} + f_{eng}$	18,0%	10,4%	4,0%	13,7%

3.3 Caso 3: variación del grado de calidad “G”

Para el caso 3, a diferencia del caso 1, se considera en la función de desviación geométrica el grado de calidad “G” propuesto y se evalúa de “G3 a “G11”. La amplitud de cada componente espectral se presenta para el grado de calidad “G3” en la tabla 3.5. Las amplitudes entre grados de calidad subsecuentes son comparadas y los resultados son presentados en la tabla 3.6. La amplitud obtenida para cada componente espectral se presenta en la tabla 4.9 (Anexo A8) y pueden observarse en el espectro cascada de la figura 3.3.

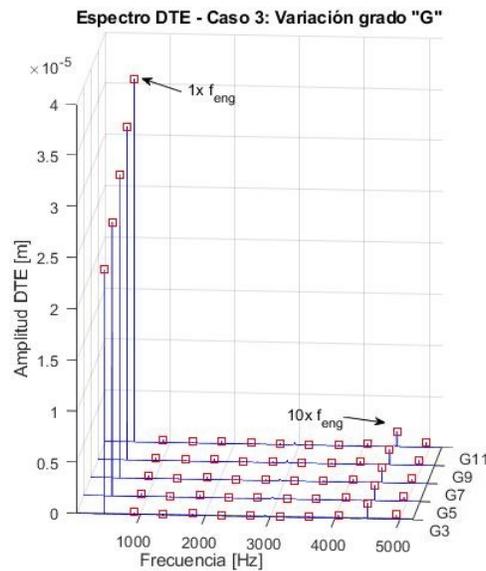


Figura 3.3: Espectro cascada de la señal DTE - variación del grado de calidad “G”.

Tabla 3.5: Amplitud de las componentes espectrales para grado de calidad “G3” @ $T_m = 20$ [Nm].

Frec.	G3
$1 \times f_{eng}$	$4,76 * 10^{-06}$
$2 \times f_{eng}$	$2,32 * 10^{-07}$
$3 \times f_{eng}$	$1,07 * 10^{-07}$
$4 \times f_{eng}$	$2,14 * 10^{-07}$
$5 \times f_{eng}$	$1,05 * 10^{-07}$
$6 \times f_{eng}$	$1,24 * 10^{-07}$
$7 \times f_{eng}$	$5,47 * 10^{-08}$
$8 \times f_{eng}$	$1,03 * 10^{-07}$
$9 \times f_{eng}$	$3,21 * 10^{-07}$
$10 \times f_{eng}$	$1,5 * 10^{-06}$
ω_{n2}	$1,57 * 10^{-07}$
$\omega_{n2} - f_{eng}$	$1,48 * 10^{-08}$
$\omega_{n2} + f_{eng}$	$4,36 * 10^{-09}$
ω_{n4}	$1,27 * 10^{-07}$
$\omega_{n4} - f_{eng}$	$4,07 * 10^{-08}$
$\omega_{n4} + f_{eng}$	$4,13 * 10^{-08}$

Tabla 3.6: Comparación del incremento de la amplitud de las componentes espectrales entre grados de calidad “G”.

Frec.	G5/G3	G7/G5	G9/G7	G11/G9
$1 \times f_{eng}$	10,8%	9,7%	8,9%	8,1%
$2 \times f_{eng}$	-0,1%	-0,1%	-0,1%	-0,1%
$3 \times f_{eng}$	0,1%	0,1%	0,1%	0,1%
$4 \times f_{eng}$	0,1%	0,1%	0,1%	0,1%
$5 \times f_{eng}$	-0,1%	-0,1%	0,0%	-0,1%
$6 \times f_{eng}$	0,3%	0,4%	0,3%	0,3%
$7 \times f_{eng}$	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
$8 \times f_{eng}$	-0,1%	-0,2%	-0,1%	-0,1%
$9 \times f_{eng}$	-0,1%	-0,2%	-0,1%	-0,1%
$10 \times f_{eng}$	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
ω_{n2}	0,9%	-0,5%	0,6%	2,1%
$\omega_{n2} - f_{eng}$	1,2%	-0,8%	0,6%	3,4%
$\omega_{n2} + f_{eng}$	0,7%	-0,7%	0,4%	1,3%
ω_{n4}	1,2%	-4,2%	-2,7%	1,6%
$\omega_{n4} - f_{eng}$	1,2%	-4,6%	-2,9%	1,8%
$\omega_{n4} + f_{eng}$	1,2%	-3,8%	-2,5%	1,2%

3.3.1 Valores RMS: comparación entre DTE y velocidad vertical del piñón

Los valores RMS del DTE y de la velocidad vertical del piñón son calculados variando el grado de calidad AGMA para tres niveles de carga constante: 16, 20 y 24 [Nm]. Los valores RMS son calculados a partir de la forma de onda de cada señal. El valor RMS del DTE para cada nivel de carga puede observarse en la figura 3.4 y para el caso del valor RMS de la velocidad vertical del piñón \dot{y}_{pRMS} en la figura 3.5. Los valores obtenidos pueden observarse en la tabla 3.7. El incremento de los valores RMS para cada señal, entre grados de calidad consecutivos es comparado y los resultados se presentan en la tabla 3.8.

Tabla 3.7: Valores RMS de las señales DTE y \dot{y}_p variando grado de calidad “A”.

$T_m = 16[Nm]$	A3	A5	A7	A9	A11
$DTE_{rms}(\times 10^{-06})$	3,11	3,58	4,90	8,13	15,1
$\dot{y}_{pRMS}(\times 10^{-02})$	1,52	1,52	1,52	1,53	1,54
$T_m = 20[Nm]$					
$DTE_{rms}(\times 10^{-06})$	3,80	4,21	5,41	8,49	15,4
$\dot{y}_{pRMS}(\times 10^{-02})$	1,90	1,90	1,90	1,90	1,91
$T_m = 22[Nm]$					
$DTE_{rms}(\times 10^{-06})$	4,50	4,87	5,96	8,89	15,6
$\dot{y}_{pRMS}(\times 10^{-02})$	2,28	2,28	2,28	2,28	2,28

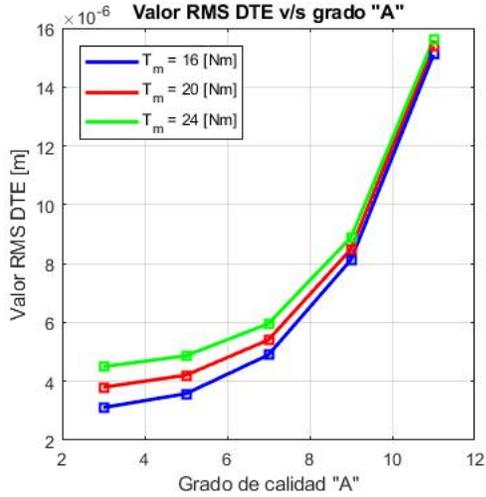


Figura 3.4: Valor RMS de la señal DTE v/s grado de calidad "A" bajo diferentes niveles de carga.

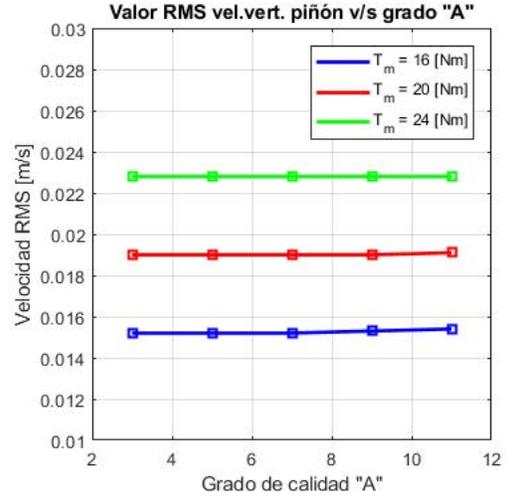


Figura 3.5: Valor \dot{y}_{pRMS} v/s grado de calidad "A" bajo diferentes niveles de carga.

Tabla 3.8: Valores RMS para las señales DTE y \dot{y}_p - comparación entre grados de calidad "A".

$T_m = 16$ [Nm]	A5/A3	A7/A5	A9/A7	A11/A9
DTE_{rms}	15,1%	36,9%	66,0%	86,2%
\dot{y}_{pRMS}	0,05%	0,18%	0,31%	0,94%
$T_m = 20$ [Nm]				
DTE_{rms}	10,9%	28,5%	56,9%	81,2%
\dot{y}_{pRMS}	0,03%	0,15%	0,11%	0,50%
$T_m = 24$ [Nm]				
DTE_{rms}	8,2%	22,5%	49,1%	76,0%
\dot{y}_{pRMS}	0,00%	0,03%	-0,03%	0,18%

Los valores RMS fueron también calculados para el grado de calidad "G" propuesto para comparar con el grado de calidad AGMA "A". El valor RMS del DTE para cada nivel de carga puede observarse en la figura 3.6 y para el caso del valor RMS de la velocidad vertical del piñón \dot{y}_{pRMS} en la figura 3.7. Los valores obtenidos pueden observarse en la tabla 3.9. El incremento de los valores RMS para cada señal, entre grados de calidad consecutivos es comparado y los resultados se presentan en la tabla 3.10.

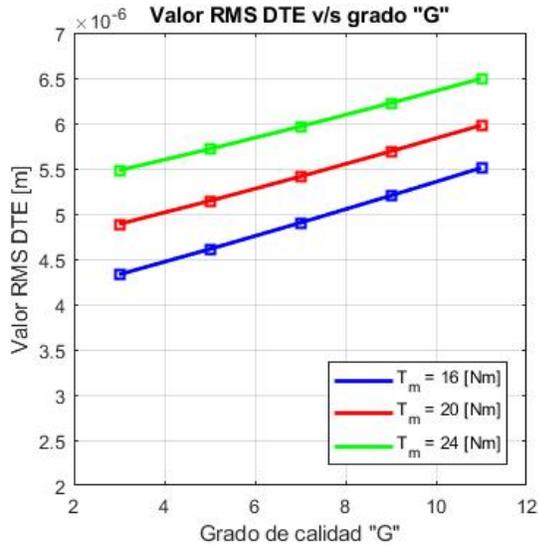


Figura 3.6: Valor RMS de la señal DTE v/s grado de calidad "G" bajo diferentes niveles de carga.

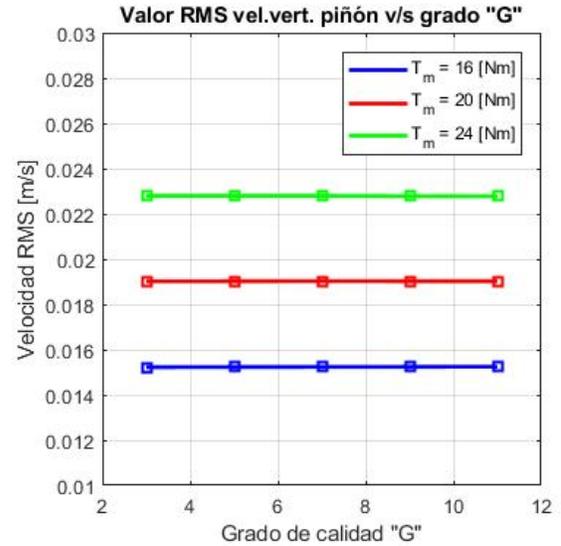


Figura 3.7: Valor \dot{y}_{pRMS} v/s grado de calidad "G" bajo diferentes niveles de carga.

Tabla 3.9: Valores RMS de las señales DTE y \dot{y}_p variando grado de calidad "G".

$T_m = 16[Nm]$	G3	G5	G7	G9	G11
$DTE_{rms}(\times 10^{-06})$	4,33	4,61	4,90	5,20	5,51
$\dot{y}_{pRMS}(\times 10^{-02})$	1,52	1,52	1,52	1,52	1,52
$T_m = 20[Nm]$					
$DTE_{rms}(\times 10^{-06})$	4,89	5,14	5,41	5,69	5,98
$\dot{y}_{pRMS}(\times 10^{-02})$	1,90	1,90	1,90	1,90	1,90
$T_m = 24[Nm]$					
$DTE_{rms}(\times 10^{-06})$	5,48	5,72	5,96	6,22	6,49
$\dot{y}_{pRMS}(\times 10^{-02})$	2,28	2,28	2,28	2,28	2,28

Tabla 3.10: Valores RMS para las señales DTE y \dot{y}_p - comparación entre grados de calidad "G".

$T_m = 16[Nm]$	G5/G3	G7/G5	G9/G7	G11/G9
DTE_{rms}	6,5%	6,3%	6,1%	5,9%
\dot{y}_{pRMS}	0,06%	0,02%	0,03%	0,03%
$T_m = 20[Nm]$				
DTE_{rms}	5,2%	5,2%	5,2%	5,1%
\dot{y}_{pRMS}	0,02%	0,02%	-0,01%	-0,01%
$T_m = 24[Nm]$				
DTE_{rms}	4,3%	4,3%	4,4%	4,3%
\dot{y}_{pRMS}	0,00%	0,01%	-0,06%	-0,03%

CAPÍTULO 4

Discusión

A continuación se presenta el análisis de resultados para cada caso presentado y las observaciones a los diferentes fenómenos observados durante el desarrollo de este estudio.

4.1 Resultados del caso 1 – variación del grado de calidad AGMA “A”

En la figura 3.1 se observa que $1 \times f_{eng}$ aumenta su amplitud de forma exponencial. Este comportamiento puede explicarse debido a que la desviación máxima permitida f_{isT} en la amplitud de la función de las desviaciones geométricas $e(\theta)$ aumenta de forma exponencial. El 3^{er}, 4^{to} y 6^{to} armónico de la f_{eng} también experimentan un aumento en su amplitud pero no en la misma proporción que f_{eng} . Al contrario de lo esperado los armónicos restantes experimentan una disminución en su amplitud a medida que el grado de calidad AGMA “A” aumenta. Las componentes de orden superior de f_{eng} experimentan una variación de amplitud considerablemente menor a la variación experimentada por f_{eng} indicando que los efectos de las desviaciones geométricas, que en este caso son de primer orden, se verán reflejados a f_{eng} debido a que coinciden en frecuencias.

Es importante destacar que, en el desarrollo matemático de las ecuaciones de movimiento, al incluir los términos asociados a los errores de transmisión se obtienen términos de grados superiores que ser desarrollados utilizando identidades trigonométricas, las ecuaciones de movimiento terminan con una forma que no permite visualizar si el sistema tendrá comportamiento lineal para algunos casos con antelación.

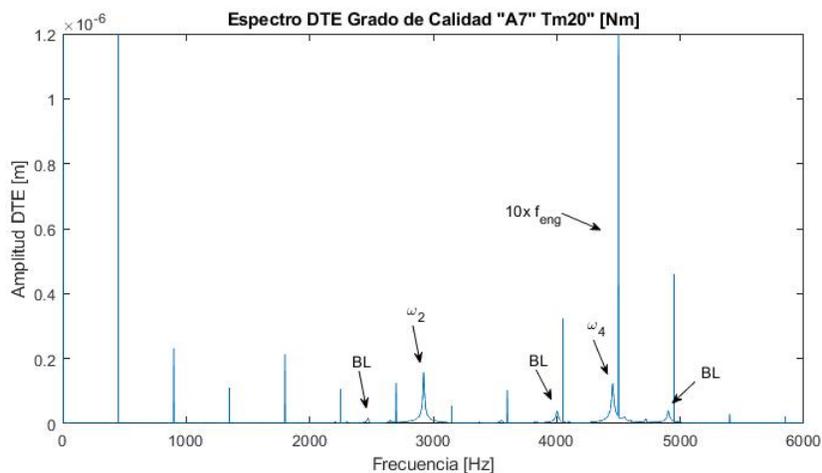


Figura 4.1: Espectro cascada de la señal DTE - variación del grado de calidad “G”.

Adicionalmente, en la respuesta (ver fig. 4.1) se observan las frecuencias naturales ω_2 y ω_4 junto con bandas laterales separadas a f_{eng} , asociadas al segundo y cuarto modo de vibrar. Estas frecuencias corresponden a vibraciones transientes debido a la variación paramétrica de la rigidez de engrane, producto de la variación en el número de pares de dientes en contacto. Solo los modos de vibrar II, IV y VI son activados debido a que en el análisis modal se observa que estos modos de vibrar corresponden a modos en donde se acoplan todos los grados de libertad del sistema, mientras que el modo I corresponde al modo de vibrar de cuerpo rígido y los modos III y V corresponden a modos donde el piñón y la corona se desplazan libremente perpendicular a la línea de acción (modos no activados, ver Anexo A7). El aumento de amplitud de las frecuencias naturales es esperable debido a que la señal del error de transmisión es equivalente a introducir una fuerza externa al sistema, ya que se encuentra en los términos multiplicativos de la matriz de rigidez. La magnitud de esta fuerza externa aumenta con el grado de calidad “A” excitando las frecuencias naturales con mayor intensidad. Es importante que mencionar que el décimo armónico de la f_{eng} se encuentra cerca de una zona resonante del sistema, por lo que se observa con una amplitud mayor que el resto de las componentes de orden superior de la f_{eng} .

4.2 Resultados del caso 2 – variación de la magnitud de la carga

Se observa que la componente de mayor amplitud corresponde a la $1 \times f_{eng}$. Cuando la carga aumenta desde 16 [Nm] a 24 [Nm] se observa que la respuesta del sistema es lineal. Las componentes de orden superior de f_{eng} y las frecuencias naturales experimentan un aumento de amplitud de aproximadamente 10,7% a excepción de la $1 \times f_{eng}$ que experimenta un aumento de sólo un 1,1% para cada nivel de carga. En las componentes espectrales de la respuesta del sistema que coinciden en frecuencia con las componentes espectrales del NLTE se observa que el aumento de amplitud no se comporta según lo esperado. Se observa que en dichas frecuencias, la respuesta del sistema tiene un comportamiento no-lineal debido a que las componentes no aumentan todas en una misma proporción cuando se produce un aumento lineal en la carga del sistema.

Se realizó un análisis de fases entre la señal DTE y la señal NLTE que demostró que no existe relación entre las fases del NLTE y el efecto observado, ver tabla 4.1.

Tabla 4.1: Fases de las componentes de f_{eng} y NLTE.

Frec.	Phase ϕ [°]
NLTE(t)	-90,0
$1 \times f_{eng}$	-92,5
$2 \times f_{eng}$	-37,3
$3 \times f_{eng}$	-152,5
$4 \times f_{eng}$	-79,3
$5 \times f_{eng}$	-1,9
$6 \times f_{eng}$	-132,7
$7 \times f_{eng}$	+139,2
$8 \times f_{eng}$	+34,2
$9 \times f_{eng}$	+108,4
$10 \times f_{eng}$	+173,4

A modo de comprobación, la fase inicial del NLTE fue manualmente modificada no observando ningún cambio en el fenómeno observado. Para complementar se realizó un análisis considerando una señal NLTE de mayor complejidad $e(\theta)_{HO}$, agregando una componente de

segundo orden (ver ec. 4.1). Los coeficientes de la ec. 4.1 fueron seleccionados arbitrariamente con el objetivo de mantener a la amplitud máxima de la señal NLTE permitiendo agregar una componente de segundo orden. Así la magnitud máxima de la fuerza generada producto de esta perturbación se mantiene constante en ambos casos. El comportamiento fue observado tanto en $1x f_{eng}$ y en $2x f_{eng}$, confirmando que tiene estricta relación con la composición espectral del NLTE. El espectro cascada puede observarse en la figura 4.3 y la comparación de amplitudes de las componentes entre niveles de carga puede verse en la tabla 4.2.

$$e(\theta)_{HO} = 0,6470 f_{isT}(A) \sin(Z_p \theta_p) + 0,5 f_{isT}(A) \sin(2Z_p \theta_p) \quad (4.1)$$

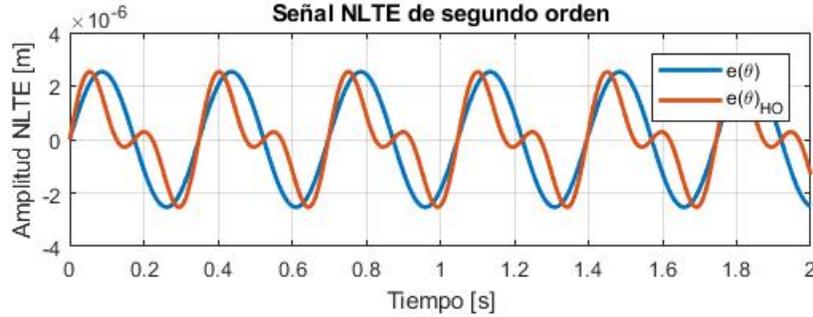


Figura 4.2: Señal NLTE de segundo orden $e(\theta)_{HO}$.

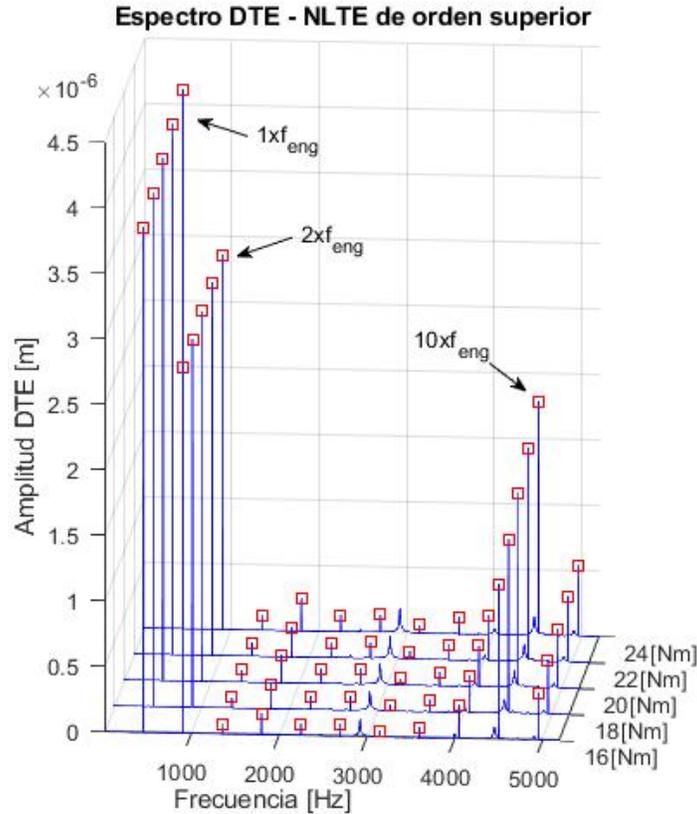


Figura 4.3: Espectro cascada de la señal DTE con NLTE de segundo orden bajo diferentes niveles de carga.

Tabla 4.2: Amplitud de las componentes de la señal DTE - comparación para diferentes niveles de carga.

Frec. $T_m =$	18/16	20/18	22/20	24/22 [Nm]
$1 \times f_{eng}$	1,7%	1,7%	1,7%	1,6%
$2 \times f_{eng}$	0,6%	0,6%	0,6%	0,6%
$3 \times f_{eng}$	14,7%	12,8%	11,3%	10,2%
$4 \times f_{eng}$	13,1%	11,6%	10,4%	9,4%
$5 \times f_{eng}$	12,4%	11,2%	10,0%	9,1%
$6 \times f_{eng}$	13,2%	11,6%	10,4%	9,5%
$7 \times f_{eng}$	12,8%	11,4%	10,2%	9,3%
$8 \times f_{eng}$	12,7%	11,4%	10,2%	9,2%
$9 \times f_{eng}$	12,7%	11,4%	10,2%	9,2%
$10 \times f_{eng}$	12,7%	11,3%	10,2%	9,2%

4.3 Resultados del caso 3 – variación del grado de calidad “G”

El grado de calidad linealizado “G” se formuló con el propósito de evaluar la sensibilidad del sistema. La amplitud de las desviaciones geométricas se incrementa aproximadamente un 10% entre grados consecutivos. Considerar que el aumento de carga del caso 2 lo hace en una proporción similar.

Como era esperado, la componente $1 \times f_{eng}$ experimenta un aumento en su amplitud de aproximadamente 9,3% (en promedio). La componente $2 \times f_{eng}$, experimenta una variación no-lineal, mientras que las componentes de orden superior presentan una variación lineal, ya sea incremento o decremento (dependiendo de la componente) constante entre grados de calidad “G”.

4.4 Valores RMS: comparación

El valor DTE_{RMS} y el valor RMS de la velocidad vertical del piñón \dot{y}_{pRMS} fueron comparados para relacionar la respuesta torsional con la respuesta traslacional del sistema, simulando lo que un sensor de vibraciones convencional capturaría en uno de los descansos.

En primera instancia puede observarse que el valor RMS de la señal DTE tiene una estrecha relación con la amplitud del NLTE. A medida que el grado de calidad AGMA “A” se incrementa, el valor RMS de la señal DTE lo hace en la misma proporción (válido también para el grado de calidad “G” propuesto).

El efecto de la carga también puede ser observado. Las simulaciones realizadas para los diferentes niveles de carga indican que cuando el grado de calidad cambia desde “A9” a “A11”, el valor RMS del DTE se incrementa, pero este lo hace en menor medida (de 86% a 76%) cuando la carga aumenta de 16 [Nm] a [24 Nm]. Esto indica que incrementar la carga a la cual está sometida la transmisión, disminuirá el incremento del valor DTE_{RMS} producto del aumento de la magnitud de las desviaciones geométricas, en otras palabras, el efecto del NLTE es más pronunciado para cargas más pequeñas. El valor global de vibración será mayor debido al aumento de carga, pero el sistema será menos sensible a los errores geométricos.

Los resultados muestran que el aumento del valor RMS de la señal DTE no se ve reflejado de forma apreciable en el valor global de la velocidad vertical del piñón. Si observamos los resultados del caso 3, al aumentar la amplitud de la función de errores geométricos en un 10%, produce un

aumento de 6% en el valor DTE_{RMS} y solo un 0,39% en el valor global de la velocidad vertical del piñón cuando la carga aplicada T_m es de 16 [Nm] y 0,13% cuando T_m es de 24 [Nm]. Por otro lado, cuando la magnitud de la carga aumenta en aproximadamente 10%, el valor RMS de la señal DTE aumenta 5% aproximadamente y un 10% para el valor RMS de la velocidad vertical del piñón.

CAPÍTULO 5

Conclusiones y perspectivas

5.1 Conclusiones

A partir de los resultados expuestos en este trabajo se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- La variación de la magnitud del NLTE tiene efectos diferentes en la respuesta dinámica del sistema que los producidos por variaciones en la magnitud de la carga aplicada. Para el caso del NLTE se observa que la amplitud vibratoria de las componentes que coinciden con el contenido espectral de la señal NLTE, mientras que las variaciones de las componentes restantes son en menor proporción y en algunos casos a incrementos negativos. Para el caso de las variaciones en la magnitud de la carga aplicada, las componentes que coinciden con el contenido espectral de la señal NLTE aumentan su amplitud en una proporción mas baja que en las componentes restantes.
- La relación entre la magnitud de la amplitud del NLTE y la intensidad vibratoria de DTE es directa. Para el modelo presentado un incremento de la magnitud de la amplitud del NLTE del $\sim 10\%$, generó un aumento de un $\sim 5,2\%$ en el valor DTE_{RMS} , mientras que un aumento de la magnitud de la carga de un $\sim 10\%$ aumentó el valor DTE_{RMS} en un $\sim 5,1\%$. Por otro lado, el valor RMS de la velocidad vertical del piñón \dot{y}_{pRMS} no experimentó un incremento apreciable. Se concluye que es más probable detectar los efectos de las desviaciones geométricas en la respuesta torsional del sistema que en la respuesta traslacional.
- El aumento de la carga atenúa el efecto de desviaciones geométricas en aumento. Los valores globales serán mayores debido a mayores cargas, pero el sistema será menos sensible al aumento de la magnitud de los errores geométricos.
- Las desviaciones geométricas introducirán no-linealidades en el sistema. El efecto de estas no-linealidades se observará en el sistema en frecuencias específicas dependiendo del contenido espectral de las desviaciones geométricas.

5.2 Perspectivas

Para futuros trabajos se presentan las siguientes perspectivas con el objetivo de seguir desarrollando esta línea de estudios:

- Realizar simulaciones utilizando una señal real medida de NLTE tomando su descomposición espectral e incorporarla con términos de orden superior al modelo.
- Realizar un análisis experimental en banco de ensayos, capturar la señal NLTE y evaluar la respuesta traslacional y torsional del sistema frente a diferentes niveles de carga, considerando el ajuste de parámetros del modelo para representar los elementos del banco de ensayos.
- Incorporar en la formulación del modelo los efectos de la película de lubricante y evaluar los efectos en los casos presentados en este estudio

Referencias

Amabili M., Rivola A. (1997) - Dynamic analysis of spur gear pairs: steady-state response and stability of the sdof model with time-varying meshing damping. *Mechanical Systems and Signal Processing* (1997) 11(3), 375-390.

Bartelmus W. (2001) - Mathematical modelling and computer simulations as an aid to gearbox diagnostics. *Mechanical Systems and Signal Processing* (2001) 15(5), 855-871.

Chaari F., Bartelmus W., Zimroz R., Fakhfakh T., Haddar M. (2012) - Gearbox vibration signal amplitude and frequency modulation. *Shock and Vibration* 19 (2012) 635-652.

Chaari F., Baccar W., Slim M., Haddar M. (2008) - Effect of sappling or tooth breakage on gearmesh stiffness and dynamic response of a one stage spur gear transmission. *European Journal of Mechanics and Solids* (2008) 671-705.

Chaari F., Fakhfakh T., Haddar M. (2009) - Analytical modelling of spur gear tooth crack and influence on gearmesh stiffness. *European Journal of Mechanics and Solid* 28 (2009) 461-468.

Cleveland (2016) - Estudio teórico de las vibraciones torsionales y radiales de una transmisión de engranajes. Memoria de Título, Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Concepción.

Fernández del Rincón A., Viadero F., Iglesias M. (2013) - A model for the study of meshing stiffness in spur gear transmissions. *Mechanism and Machine Theory* 61 (2013) 30-58.

Fernández del Rincón A., Iglesias M., de-Juan A. (2015) - Gear transmission dynamics: Effects of index and run out errors. *Applied Acoustics* (2015)

Inalpolat et al. (2015) - Influence of Indexing Errors on Dynamic Response of Spur Gears. *Mechanical Systems and Signal Processing* 60-61 (2015) 391-405

Howard I., Jia S., Wang J. (2001) - The dynamic modelling of a spur gear in mesh including friction and a crack. *Mechanical Systems and Signal Processing* (2001) 15(5), 831-853.

Jia S., Howard I., Wang J. (2003). The dynamic modeling of multiple pairs of spur gears in mesh, including friction and geometrical errors. *International Journal of Rotating Machinery*, 9; 437-433, 2003.

Mark. W.D. (1978). Analysis of the vibratory excitation of gear systems: basic theory. *Journal of the Acoustical Society of America* 63 (5)(1978) 1409-1430.

Mark W.D. (1979). Analysis of the vibratory excitation of gear systems II: tooth error representations, approximations and application. *Journal of the Acoustical Society of America* 66 (6)(1979) 1758.

Mark W.D. (2015). Time-synchronous-averaging of gear-meshing-vibration transducer responses for elimination of harmonic contributions from the mating gear and the gear pair. *Mechanical Systems and Signal Processing* 62-63 (2015) 21-29.

Mohamed O., Rantatalo M., Aidanpää J. (2014). Dynamic modelling of a one-stage spur gear system and vibration-based tooth crack detection analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing* 54-55 (2015) 293–305.

Randall, R.B. (2011) - *Vibration-Based Condition Monitoring: Industrial, Aerospace and Automotive Applications*. Jhon Wiley and Sons 2011.

Trujillo (2015) - *Modelo dinámico de una transmisión de engranajes de una etapa incluyendo fallas*. Memoria de Título, Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Concepción.

Anexos

A1. Medición del error de transmisión

Existen diversas posibilidades en cuanto a la medición del error de transmisión ET, sin embargo en la práctica se observa que predomina el uso de codificadores ópticos incrementales o *encoders* (en inglés, nombre comercial).

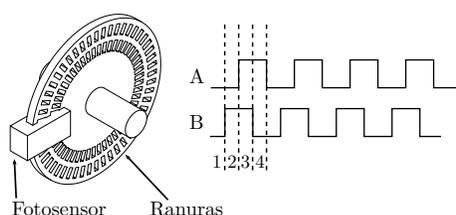


Figura 5.1: Codificador óptico incremental.

Un *encoder* es un dispositivo que consta de una rueda ranurada y un fotosensor. El fotosensor emite pulsos eléctricos al detectar la presencia de luz emitida desde el otro extremo de la rueda. Las ranuras están dispuestas de tal manera que se obtienen dos señales en forma de pulsos cuadrados con un desfase de 90° . Estas señales pueden ser procesadas de forma de obtener la posición angular, velocidad angular y sentido de rotación, ver figura 5.1.

En la práctica el procedimiento para medir el error de transmisión entre dos ruedas dentadas consiste en capturar la posición angular de la rueda motriz y calcular a través de la relación de transmisión, la posición ideal de la rueda guiada. Una vez obtenida la posición ideal de la rueda de salida, ésta se compara con la posición real medida por el *encoder* y se obtiene la señal del error de transmisión. El montaje de los dispositivos se puede observar en la figura 5.2.

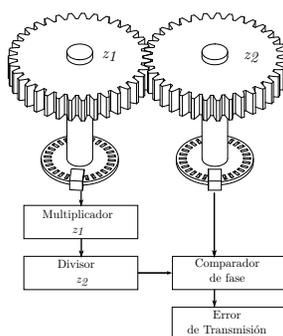


Figura 5.2: Sistema óptico para capturar las posiciones angulares de las ruedas dentadas.

A2. AGMA 2015-1-A01 - parámetros de medición

El estándar AGMA 2015-1-A01 especifica una serie de métodos para establecer la calidad geométrica de engranajes. La cantidad de parámetros a medir dependerá de el grupo de medición. Uno de los métodos consiste en realizar mediciones individuales mientras que el otro consiste en una medición compuesta denominada “single flank composite testing” (SFT). Si se selecciona el método de mediciones individuales, la norma exige medir un número de parámetros mayor para los grados de calidad más precisos. El método de mediciones SFT es suficientemente preciso para ser utilizado incluso en los grados de calidad más preciso.

Tabla 5.1: Parámetros a medir por grupo

Grupo	Grado	Parámetros mínimos	Método alternativo
Low (L)	A10-A11	F_p, f_{pt}, s	Grupo M, H s, método radial
Medium (M)	A6-A9	$F_p, f_{pt}, s, F_\alpha, F_\beta$	Grupo H
High (H)	A2-A5	$F_p, f_{pt}, s, F_\alpha, f_{f\alpha}, f_{H\alpha}$ $F_\beta, f_{f\beta}, f_{H\beta}$	F_{is}, f_{is} c_p, s

donde:

- F_p : desviación de índice, total o acumulada
- f_{pt} : desviación de índice
- F_α : desviación de perfil, total
- $f_{f\alpha}$: desviación de forma de perfil
- $f_{H\alpha}$: desviación de pendiente de perfil
- F_β : desviación de hélice, total
- $f_{f\beta}$: desviación de forma de hélice
- $f_{H\beta}$: desviación de pendiente de hélice
- F_{is} : single flank composite, total
- f_{is} : single flank composite, tooth-to-tooth
- c_p : patrón de contacto
- s : ancho de diente

A3. Desviaciones geométricas

Para establecer el grado de calidad primero es necesario realizar mediciones de diferentes elementos de una rueda dentada, por lo que se establecen las siguientes definiciones:

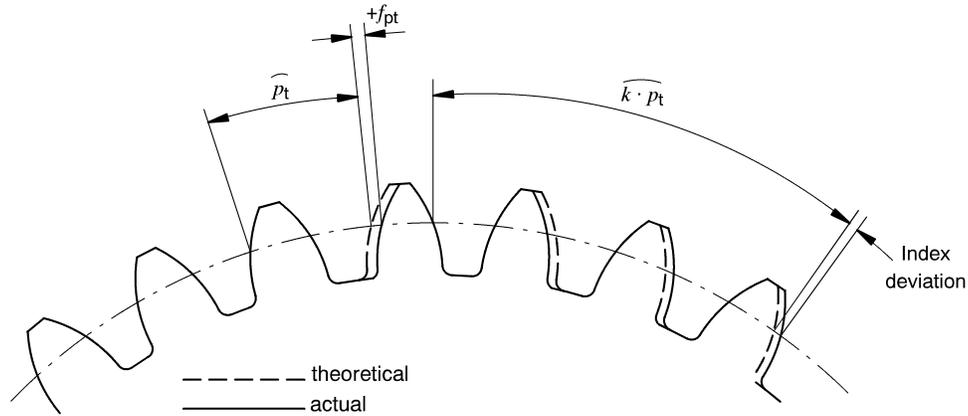


Figura 5.3: Diferencia entre la desviación de índice y de paso individual [AGMA 2015-1].

Desviación de índice: Es la desviación en la posición de un flanco de diente respecto de su posición teórica. Se toma como referencia un flanco previamente definido. Cuando el flanco medido se encuentra más cercano al flanco de referencia (siguiendo siempre el sentido de medición, horario o anti-horario) que la posición teórica, la desviación es negativa. De forma análoga, cuando el flanco se encuentra más alejado del flanco de referencia que la posición teórica, la desviación se considera positiva, ver figura 5.3.

Desviación de paso individual, f_{pt} : Desviación en la posición de un flanco respecto de su posición teórica utilizando como referencia un flanco de diente adyacente. La principal diferencia entre la desviación de paso individual y la desviación de índice es que la desviación de índice toma como referencia un flanco determinado para todas las mediciones, mientras que en la de paso individual, la desviación se va midiendo siempre relativa a un flanco adyacente (con la misma orientación de perfil), ver figura 5.3.

Desviación de paso acumulada, F_p : Se define como la mayor diferencia algebraica entre el mayor y menor valor de desviación de índice.

Desviaciones de perfil: Las desviaciones de perfil se componen por la suma de: el largo funcional del perfil, L_{ac} , que cuantifica el largo efectivo de contacto entre dientes; la desviación total de perfil, F_α ; la desviación de forma del perfil, $f_{f\alpha}$ y por último la desviación de pendiente del perfil, $F_{H\alpha}$. Su descripción detallada puede encontrarse en [Cleveland 2015].

Runout, radial: El *runout* radial es formado por variaciones en la distancia perpendicular al eje de rotación de una rueda dentada. Se compone por la excentricidad del círculo de paso y la falta de redondez del mismo (*Out-of-roundness*).

Excentricidad: la excentricidad se define como la diferencia entre el centro de rotación de la rueda dentada y el centro del círculo de paso.

Out-of-roundness (falta de redondez): La falta de redondez es una variación radial irregular del círculo de paso, excluyendo los efectos producto de la excentricidad.

A4. Metrología de ruedas dentadas

Para medir los diferentes parámetros que exigen las normas para establecer el grado de calidad de un engranaje pueden utilizarse tres métodos de diferente naturaleza.

- Inspección individual de elementos
- Single flank composite testing (SFT)
- Double flank composite testing (DFT)

La inspección individual de elementos consiste en un conjunto de procedimientos para realizar diferentes mediciones las cuales cuantifican las desviaciones independientemente. Por ejemplo, mediante un instrumento se establece el espesor de diente y mediante otro instrumento, de diferente naturaleza, se verifican las desviaciones de paso. En la figura 5.4 se observan dos métodos para medir desviaciones de paso.

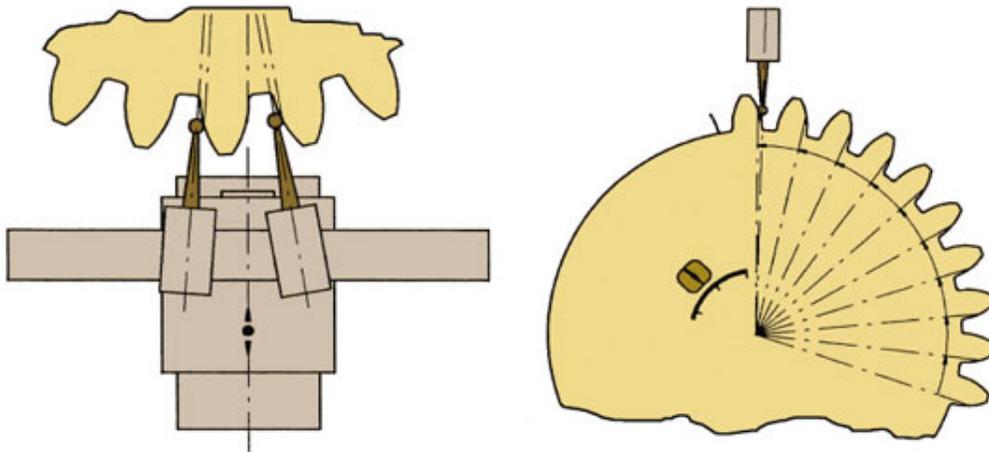


Figura 5.4: A la izquierda, instrumento de medición *double-probe*; a la derecha, instrumento *single-probe* con sistema indexador [AGMA 2015-1].

La medición mediante el método SFT y DFT se basan en medir las desviaciones utilizando un engranaje patrón el cual engrana con el engranaje a ensayar. El ensayo SFT y DFT difieren en que en el primero las ruedas dentadas engranan con la distancia entre centros fija y se mide mediante *encoders* el error de transmisión geométrico. En el segundo caso, las ruedas dentadas engranan sin backlash con la distancia entre centros variable. Los ejes están unidos a un sistema que permite la traslación de uno de ellos y se encuentra conectado a un elemento elástico o contrapeso para mantener las ruedas dentadas en contacto. En el DFT los dientes de ambas ruedas, al engranar sin backlash, entran en contacto con ambos flancos, mientras que en el SFT solo lo hacen con uno por diente. En la figura 5.5 se ilustra la diferencia entre ambos métodos y en la figura 5.6 se observa un ejemplo de lectura de SFT.

Dentro de la literatura revisada se indica que para los casos donde se requiere un grado de calidad más preciso, se prefiere utilizar el método de inspección individual de elementos [Maitra 1994]. Cuando se trata de producción en masa, los métodos SFT y DFT son suficientes para asegurar el grado de calidad geométrica. La normativa AGMA indica explícitamente que los métodos SFT

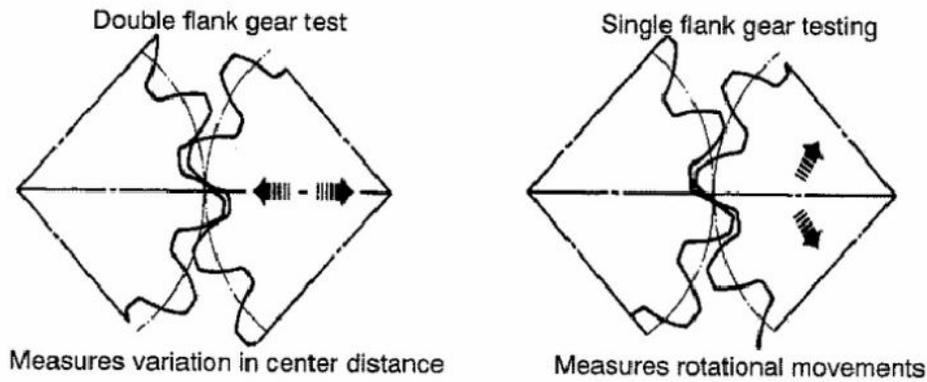


Figura 5.5: Diferencia entre SFT y DFT [AGMA 915-1].

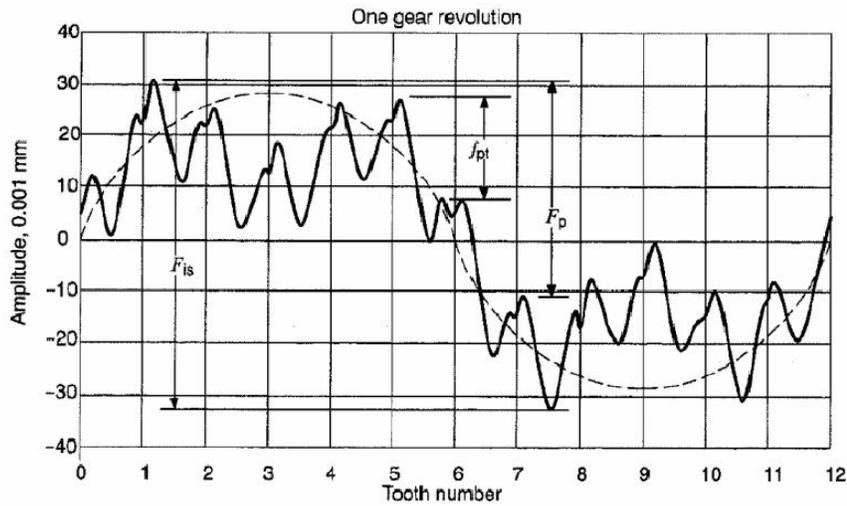


Figura 5.6: Lectura de ensayo SFT con errores de paso de orden superior, sin filtrar [AGMA 915-1].

y DFT no son comparables, pero no indica en qué casos debe utilizarse uno u otro, y establece que el método debe ser acordado entre el fabricante y el usuario. Del funcionamiento del SFT y DFT, se observa que en el segundo caso, en la medición se observarían desviaciones presentes en ambos flancos de cada diente, pero sin poder determinar cuál de ellos posee desviaciones, ni en qué proporción. En la mayoría de la literatura revisada se utiliza el SFT ya que la medición registra directamente el ET.

A5. Parámetros del modelo de la transmisión

Para la simulación numérica, los datos geométricos de las ruedas dentadas se obtuvieron de [Inalpolat 2015]. En cuanto a la rigidez y amortiguamiento de los rodamientos se consideraron todos de igual magnitud, valores también obtenidos de [Inalpolat 2015]. Los valores referenciales para la rigidez de engrane se obtuvieron del estudio realizado por [Chaari et al. 2009]. La tabla 5.2 resume los parámetros utilizados.

Tabla 5.2: Parámetros del modelo.

Descripción	Piñón	Corona	Unidades
Nº de dientes Z_i	18	35	-
Módulo m	4	4	[mm]
Ángulo de presión	20	20	[°]
Ancho del diente	20	20	[mm]
Masa m_i	0,64	2,41	[kg]
Inercia J_i	$4,14 \times 10^{-4}$	$5,9 \times 10^{-3}$	[kg m^2]
Radio primitivo r_{c_i}	36	70	[mm]
Radio base r_{b_i}	33,8	65,8	[mm]
Razón de contacto m_p		1,608	-
Rigidez mín. de engrane K_{min}		$2,1 \times 10^8$	[N/m]
Rigidez máx. de engrane K_{max}		$1,3 \times 10^8$	[N/m]
Amortiguamiento de engrane c_g		8×10^{-7}	[Ns/m]
Rigidez de los rodamientos k_{i_j}		1×10^9	[N/m]
Amort. de los rodamientos c_{i_j}		200	[Ns/m]

A6. Parámetros de la simulación

Los resultados de la simulación se obtienen a partir del método de integración directa de Newmark. Los parámetros del algoritmo son los siguientes:

Tabla 5.3: Simulation parameters.

Variable	Valor	Unidad
Tiempo de simulación	0,4	[s]
Paso de tiempo	$1e-6$	[s]
Resolución en frecuencias	2,5	[Hz]
Frecuencia máxima	$5e5$	[Hz]
Parámetro de Newmark β	0,5	[-]
Parámetro de Newmark γ	0,5	[-]

A7. Análisis modal

Debido a que el sistema posee rigidez variable, las frecuencias naturales del sistema también varían. Se analiza el problema de la forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \vec{0} \quad (5.1)$$

que se puede transformar en un problema de valores propios de la forma:

$$[\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}] \{\Psi_i\} = \vec{0} \quad (5.2)$$

donde λ_i son los valores propios y al reemplazarlos en la ec. (5.2) se obtienen los vectores propios. Las frecuencias naturales se relacionan con los valores propios según $f_i = \sqrt{\lambda_i}$ y los vectores propios representan los modos de vibrar. Para obtener los valores propios es necesario calcular:

$$\det[\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}] = 0 \quad (5.3)$$

Dado que la matriz de rigidez \mathbf{K} depende de θ , el problema de valores propios se resolvió numéricamente para un período de engrane θ_g . La rigidez de engrane para un período de engrane θ_p puede observarse en la figura 5.7.

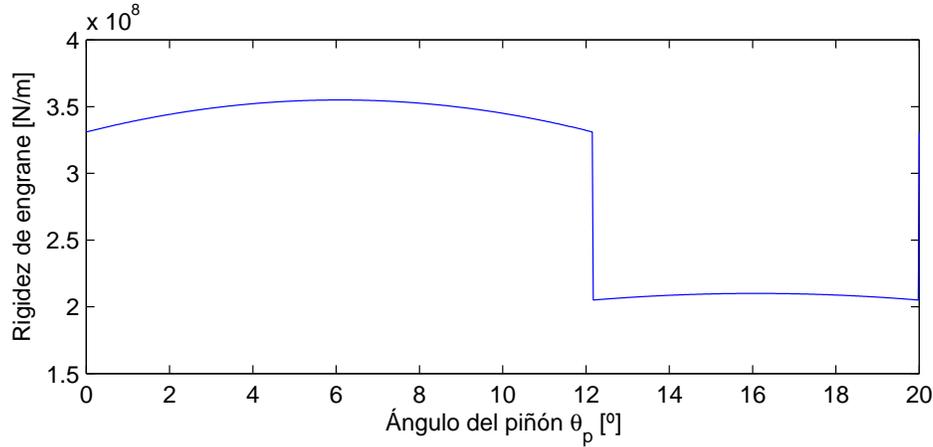


Figura 5.7: Rigidez de engrane para un período θ_g .

Se calcularon las frecuencias naturales y los modos de vibrar para cada valor de rigidez de engrane. Debido a que la rigidez de engrane varía y además posee una discontinuidad, las frecuencias naturales varían de la misma forma. En la parte donde las frecuencias naturales varían de forma continua, se observa una variación de 168 [Hz] en el caso más extremo. Para una frecuencia natural determinada f_{ni} , se calcula el valor medio \bar{f}_{ni} donde i denota al modo de vibrar asociado. La primera frecuencia natural del sistema f_{n1} es cero debido a que el sistema posee un movimiento de cuerpo rígido.

En la figura 5.8 se observa la variación de las demás frecuencias naturales del sistema en función del ángulo del piñón θ_p . En la tabla 5.4 se presenta un resumen de las frecuencias naturales del sistema.

Se define Ψ como la matriz modal cuyas columnas son los vectores propios asociados a los diferentes modos de vibrar del sistema. Los modos de vibrar no cambian de forma considerable cuando la rigidez del sistema varía de forma continua. Cuando la rigidez del sistema cambia de forma abrupta debido a la discontinuidad de la función de rigidez, los modos de vibrar

Tabla 5.4: Resumen de las frecuencias naturales del sistema.

Modo	Freq.	Frecuencia media \bar{f}_{ni} [Hz]	Valor máximo [Hz]	Valor mínimo [Hz]
I	f_{n1}	0	0	0
II	f_{n2}	2921	2956	2866
III	f_{n3}	3237	3237	3237
IV	f_{n4}	4455	4654	4159
V	f_{n5}	6295	6295	6295
VI	f_{n6}	7875	8301	7280

cambian de forma no despreciable. Se denota mediante Ψ_H para los modos cuando la rigidez es alta, y Ψ_L cuando la rigidez es baja.

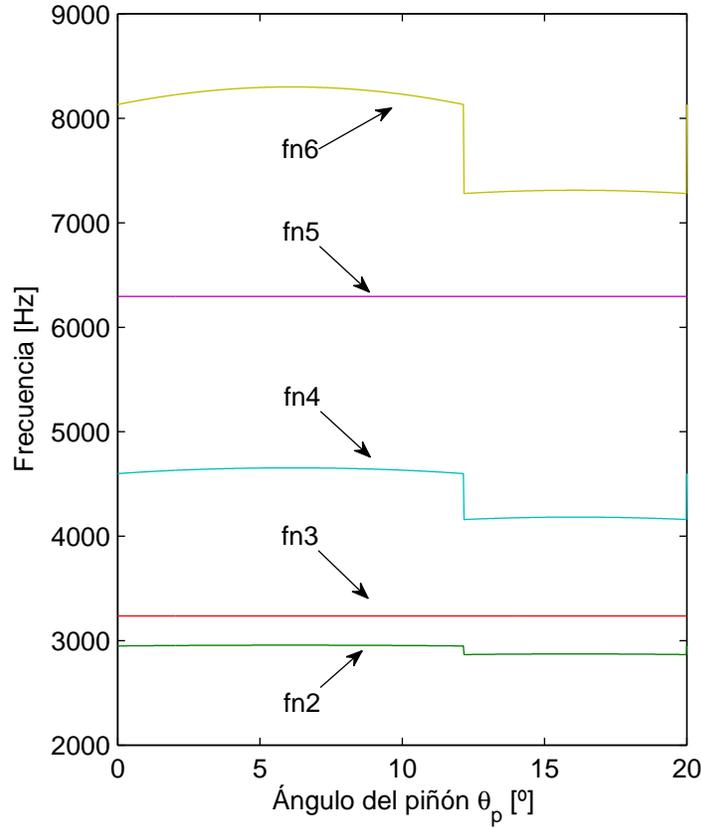


Figura 5.8: Frecuencias naturales en función del ángulo del piñón θ_p .

Modo	I	II	III	IV	V	VI	
$\Psi_H =$	$\begin{bmatrix} 0,0000 & -0,0018 & 0,0000 & -0,0078 & -0,9397 & -0,0153 \\ 0,0000 & -0,0050 & 0,0000 & -0,0215 & 0,3420 & -0,0419 \\ 0,8893 & 0,9905 & 0,0000 & 0,9906 & 0,0000 & -0,9899 \\ 0,0000 & 0,0086 & -0,9397 & -0,0033 & 0,0000 & 0,0020 \\ 0,0000 & 0,0237 & 0,3420 & -0,0091 & 0,0000 & 0,0056 \\ 0,4573 & -0,1347 & 0,0000 & -0,1347 & 0,0000 & 0,1346 \end{bmatrix}$						(5.4)

$$\Psi_L = \begin{bmatrix} 0,0000 & -0,0017 & 0,0000 & -0,0051 & -0,9397 & -0,0250 \\ 0,0000 & -0,0047 & 0,0000 & -0,0141 & 0,3420 & -0,0687 \\ 0,8893 & 0,9907 & 0,0000 & 0,9907 & 0,0000 & -0,9882 \\ 0,0000 & 0,0064 & -0,9397 & -0,0043 & 0,0000 & 0,0021 \\ 0,0000 & 0,0175 & 0,3420 & -0,0118 & 0,0000 & 0,0059 \\ 0,4573 & -0,1348 & 0,0000 & -0,1348 & 0,0000 & 0,1344 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

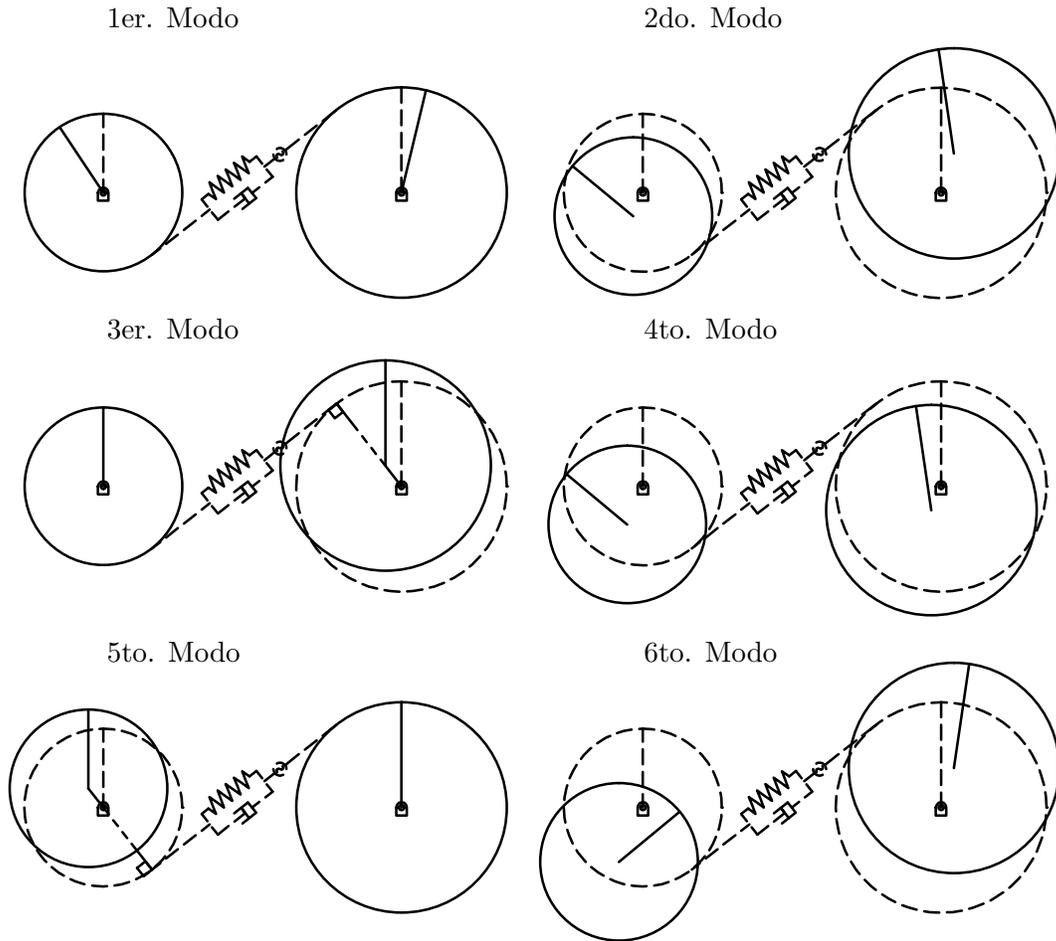


Figura 5.9: Representación gráfica de los modos de vibrar.

Como se observa en la figura 5.8, las frecuencias naturales correspondientes al 3er. y 5to. modo de vibrar, permanecen constantes al variar la rigidez de engrane. Si observamos la figura 5.9, los modos de vibrar asociados a estas frecuencias naturales corresponden a modos de vibrar donde tanto el piñón como la corona vibran de forma independiente, en dirección perpendicular a la línea de acción. Esto se debe a que el modelo propuesto no considera variaciones en la línea de acción, por lo tanto es posible de seleccionar un sistema de coordenadas alineado con la línea de acción en donde el movimiento de las ruedas puede quedar representado por sólo una coordenada traslacional, y así reducir el número de grados de libertad del sistema. En la práctica, los sensores de vibraciones se ubican en las direcciones vertical y horizontal, y al utilizar un sistema de coordenadas alineado con la línea de acción, no representa directamente esta situación. Adicionalmente, dado que estas frecuencias no dependen de la variación en la rigidez de engrane, el 3er. y 5to. modo de vibrar no se excitarán por lo que la respuesta vibratoria no tendrá componentes a f_{n3} y f_{n5} .

A8. Amplitud de las componentes espectrales de la respuesta del sistema

Las amplitudes de cada componente espectral de f_{eng} y ω_n son presentadas para cada simulación:

Tabla 5.5: Amplitudes de f_{eng} y ω_n y sus componentes para el caso 1.

Frec.	A3	A5	A7	A9	A11
$1x f_{eng}$	$1,94 * 10^{-06}$	$3,22 * 10^{-06}$	$5,78 * 10^{-06}$	$1,09 * 10^{-05}$	$2,12 * 10^{-05}$
$2x f_{eng}$	$2,32 * 10^{-07}$	$2,32 * 10^{-07}$	$2,32 * 10^{-07}$	$2,27 * 10^{-07}$	$2,10 * 10^{-07}$
$3x f_{eng}$	$1,07 * 10^{-07}$	$1,07 * 10^{-07}$	$1,07 * 10^{-07}$	$1,08 * 10^{-07}$	$1,11 * 10^{-07}$
$4x f_{eng}$	$2,13 * 10^{-07}$	$2,14 * 10^{-07}$	$2,14 * 10^{-07}$	$2,16 * 10^{-07}$	$2,18 * 10^{-07}$
$5x f_{eng}$	$1,05 * 10^{-07}$	$1,05 * 10^{-07}$	$1,05 * 10^{-07}$	$1,04 * 10^{-07}$	$1,02 * 10^{-07}$
$6x f_{eng}$	$1,22 * 10^{-07}$	$1,23 * 10^{-07}$	$1,25 * 10^{-07}$	$1,29 * 10^{-07}$	$1,38 * 10^{-07}$
$7x f_{eng}$	$5,48 * 10^{-08}$	$5,47 * 10^{-08}$	$5,46 * 10^{-08}$	$5,45 * 10^{-08}$	$5,41 * 10^{-08}$
$8x f_{eng}$	$1,04 * 10^{-07}$	$1,03 * 10^{-07}$	$1,03 * 10^{-07}$	$1,01 * 10^{-07}$	$9,80 * 10^{-08}$
$9x f_{eng}$	$3,24 * 10^{-07}$	$3,23 * 10^{-07}$	$3,20 * 10^{-07}$	$3,16 * 10^{-07}$	$3,07 * 10^{-07}$
$10x f_{eng}$	$1,50 * 10^{-06}$	$1,50 * 10^{-06}$	$1,50 * 10^{-06}$	$1,50 * 10^{-06}$	$1,49 * 10^{-06}$
ω_{n2}	$1,57 * 10^{-07}$	$1,59 * 10^{-07}$	$1,59 * 10^{-07}$	$1,67 * 10^{-07}$	$1,83 * 10^{-07}$
$\omega_{n2} - f_{eng}$	$1,49 * 10^{-08}$	$1,51 * 10^{-08}$	$1,50 * 10^{-08}$	$1,59 * 10^{-08}$	$1,72 * 10^{-08}$
$\omega_{n2} + f_{eng}$	$4,40 * 10^{-09}$	$4,41 * 10^{-09}$	$4,38 * 10^{-09}$	$4,48 * 10^{-09}$	$4,71 * 10^{-09}$
ω_{n4}	$1,26 * 10^{-07}$	$1,23 * 10^{-07}$	$1,23 * 10^{-07}$	$1,22 * 10^{-07}$	$1,25 * 10^{-07}$
$\omega_{n4} - f_{eng}$	$4,04 * 10^{-08}$	$3,92 * 10^{-08}$	$3,94 * 10^{-08}$	$3,90 * 10^{-08}$	$3,96 * 10^{-08}$
$\omega_{n4} + f_{eng}$	$4,12 * 10^{-08}$	$4,01 * 10^{-08}$	$4,03 * 10^{-08}$	$3,98 * 10^{-08}$	$4,03 * 10^{-08}$

Tabla 5.6: Amplitudes de f_{eng} y ω_n y sus componentes para el caso 2.

Frec.	$T_m = 16[Nm]$	$T_m = 18[Nm]$	$T_m = 20[Nm]$	$T_m = 22[Nm]$	$T_m = 24[Nm]$
$1 \times f_{eng}$	$5,65 * 10^{-06}$	$5,71 * 10^{-06}$	$5,78 * 10^{-06}$	$5,85 * 10^{-06}$	$5,91 * 10^{-06}$
$2 \times f_{eng}$	$1,86 * 10^{-07}$	$2,09 * 10^{-07}$	$2,32 * 10^{-07}$	$2,55 * 10^{-07}$	$2,78 * 10^{-07}$
$3 \times f_{eng}$	$8,58 * 10^{-08}$	$9,66 * 10^{-08}$	$1,07 * 10^{-07}$	$1,18 * 10^{-07}$	$1,29 * 10^{-07}$
$4 \times f_{eng}$	$1,72 * 10^{-07}$	$1,93 * 10^{-07}$	$2,14 * 10^{-07}$	$2,35 * 10^{-07}$	$2,57 * 10^{-07}$
$5 \times f_{eng}$	$8,38 * 10^{-08}$	$9,41 * 10^{-08}$	$1,05 * 10^{-07}$	$1,15 * 10^{-07}$	$1,25 * 10^{-07}$
$6 \times f_{eng}$	$1,00 * 10^{-07}$	$1,13 * 10^{-07}$	$1,25 * 10^{-07}$	$1,37 * 10^{-07}$	$1,49 * 10^{-07}$
$7 \times f_{eng}$	$4,37 * 10^{-08}$	$4,92 * 10^{-08}$	$5,46 * 10^{-08}$	$6,01 * 10^{-08}$	$6,55 * 10^{-08}$
$8 \times f_{eng}$	$8,22 * 10^{-08}$	$9,23 * 10^{-08}$	$1,03 * 10^{-07}$	$1,13 * 10^{-07}$	$1,23 * 10^{-07}$
$9 \times f_{eng}$	$2,57 * 10^{-07}$	$2,88 * 10^{-07}$	$3,20 * 10^{-07}$	$3,52 * 10^{-07}$	$3,84 * 10^{-07}$
$10 \times f_{eng}$	$1,20 * 10^{-06}$	$1,35 * 10^{-06}$	$1,50 * 10^{-06}$	$1,65 * 10^{-06}$	$1,80 * 10^{-06}$
ω_{n2}	$1,29 * 10^{-07}$	$1,46 * 10^{-07}$	$1,59 * 10^{-07}$	$1,74 * 10^{-07}$	$1,90 * 10^{-07}$
$\omega_{n2} - f_{eng}$	$1,22 * 10^{-08}$	$1,39 * 10^{-08}$	$1,50 * 10^{-08}$	$1,64 * 10^{-08}$	$1,79 * 10^{-08}$
$\omega_{n2} + f_{eng}$	$3,55 * 10^{-09}$	$4,00 * 10^{-09}$	$4,38 * 10^{-09}$	$4,82 * 10^{-09}$	$5,25 * 10^{-09}$
ω_{n4}	$9,51 * 10^{-08}$	$1,12 * 10^{-07}$	$1,23 * 10^{-07}$	$1,28 * 10^{-07}$	$1,47 * 10^{-07}$
$\omega_{n4} - f_{eng}$	$3,05 * 10^{-08}$	$3,60 * 10^{-08}$	$3,94 * 10^{-08}$	$4,09 * 10^{-08}$	$4,70 * 10^{-08}$
$\omega_{n4} + f_{eng}$	$3,10 * 10^{-08}$	$3,65 * 10^{-08}$	$4,03 * 10^{-08}$	$4,19 * 10^{-08}$	$4,77 * 10^{-08}$

Tabla 5.7: Amplitudes de f_{eng} y ω_n y sus componentes para el caso 3.

Frec.	$G3$	$G5$	$G7$	$G9$	$G11$
$1 \times f_{eng}$	$4,76 * 10^{-06}$	$5,27 * 10^{-06}$	$5,78 * 10^{-06}$	$6,29 * 10^{-06}$	$6,81 * 10^{-06}$
$2 \times f_{eng}$	$2,32 * 10^{-07}$	$2,32 * 10^{-07}$	$2,32 * 10^{-07}$	$2,31 * 10^{-07}$	$2,31 * 10^{-07}$
$3 \times f_{eng}$	$1,07 * 10^{-07}$	$1,07 * 10^{-07}$	$1,07 * 10^{-07}$	$1,07 * 10^{-07}$	$1,07 * 10^{-07}$
$4 \times f_{eng}$	$2,14 * 10^{-07}$	$2,14 * 10^{-07}$	$2,14 * 10^{-07}$	$2,14 * 10^{-07}$	$2,14 * 10^{-07}$
$5 \times f_{eng}$	$1,05 * 10^{-07}$	$1,05 * 10^{-07}$	$1,04 * 10^{-07}$	$1,04 * 10^{-07}$	$1,04 * 10^{-07}$
$6 \times f_{eng}$	$1,24 * 10^{-07}$	$1,24 * 10^{-07}$	$1,25 * 10^{-07}$	$1,25 * 10^{-07}$	$1,26 * 10^{-07}$
$7 \times f_{eng}$	$5,47 * 10^{-08}$	$5,46 * 10^{-08}$	$5,46 * 10^{-08}$	$5,46 * 10^{-08}$	$5,46 * 10^{-08}$
$8 \times f_{eng}$	$1,03 * 10^{-07}$	$1,03 * 10^{-07}$	$1,03 * 10^{-07}$	$1,02 * 10^{-07}$	$1,02 * 10^{-07}$
$9 \times f_{eng}$	$3,21 * 10^{-07}$	$3,21 * 10^{-07}$	$3,20 * 10^{-07}$	$3,20 * 10^{-07}$	$3,20 * 10^{-07}$
$10 \times f_{eng}$	$1,50 * 10^{-06}$	$1,50 * 10^{-06}$	$1,50 * 10^{-06}$	$1,50 * 10^{-06}$	$1,50 * 10^{-06}$
ω_{n2}	$1,57 * 10^{-07}$	$1,59 * 10^{-07}$	$1,58 * 10^{-07}$	$1,59 * 10^{-07}$	$1,62 * 10^{-07}$
$\omega_{n2} - f_{eng}$	$1,48 * 10^{-08}$	$1,50 * 10^{-08}$	$1,49 * 10^{-08}$	$1,50 * 10^{-08}$	$1,55 * 10^{-08}$
$\omega_{n2} + f_{eng}$	$4,36 * 10^{-09}$	$4,39 * 10^{-09}$	$4,36 * 10^{-09}$	$4,38 * 10^{-09}$	$4,44 * 10^{-09}$
ω_{n4}	$1,27 * 10^{-07}$	$1,28 * 10^{-07}$	$1,23 * 10^{-07}$	$1,20 * 10^{-07}$	$1,22 * 10^{-07}$
$\omega_{n4} - f_{eng}$	$4,07 * 10^{-08}$	$4,12 * 10^{-08}$	$3,93 * 10^{-08}$	$3,81 * 10^{-08}$	$3,88 * 10^{-08}$
$\omega_{n4} + f_{eng}$	$4,13 * 10^{-08}$	$4,17 * 10^{-08}$	$4,02 * 10^{-08}$	$3,92 * 10^{-08}$	$3,97 * 10^{-08}$