UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

Construcción de Acción Gravitacional Con Tensores Invariantes en Teoría de Chern-Simons

La geometría diferencial subyace del estudio de las leyes del universo...

Por: Pablo Andrés Castillo Guarda

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Concepción para optar al título de Físico.

Octubre 2024

CONCEPCIÓN, CHILE

Profesor Guía: Dr. Julio Oliva

Profesor Co-Guía: Dr. Fernando Izaurieta

Comisión:

- Dr. Fernando Izaurieta
- Dr. Julio Oliva
- Dr. Andrés Anabalón

Para la mujer que me dio la concepción... Para la familia que me resguardó...

AGRADECIMIENTOS

En estos largos años, ha sido una odísea de muchos obstáculos, sudor y lágrimas. Gracias a la motivación principalmente de mi familia, mi padre Alex, mi madre Marcela, mis hermanos Felipe y Rosario, mis abuelos Gladys, Ruben, Luis (QEPD) e Inés María (QEPD). Quienes la mayor parte, me veían llegar los meses correspondientes de vuelta de Concepción a Copiapó, en la cual muchas veces llegue con los hombros derrotados, sin querer seguir dando la pelea o tirar la toalla e abandonar todo el progreso en ese entonces. Sin embargo, había que discernir entre la motivación y las capacidades de seguir aprendiendo, fueron algunas personas de los que conocí durante mi pregrado, los que abrieron mis ojos y clarificar hacía donde quería ir y especializarme. En esas largas noches de estudio u otras ocaciones con mis amigos, conversación y consideranlos siempre mis hermanos(as) y futuro colegas a Francisco Barriga, Fabián Jofré, Pablo Navarrete, Sanjay Ramchandani, Santiago Vega, Diego Ojeda, Ayleen Contreras, Leonardo Sanhueza, Angelo Yáñez, Martín Quijada, Fernanda Vera, Javier Cabellos, Arelly Núñez, Nicolás Cáceres, María Jose Fuentes y por supuesto, sin olvidar a mis mentores y profesores guías Dr. Fernando Izaurieta y Dr. Julio Oliva. Por la ayuda constante y paciencia que tuvieron al momento de resulver dudas, los consejos y más que nada, la perseverancia. Por último y no menos importante, dar en agradecimiento a la persona que ha hecho de este último proceso menos estresante y dandome fé de lo bueno que podré ser en algún momento de mi vida como futuro científico, Dafne Durán, mi pareja, mi apoyo incondicional, mi lugar seguro y el amor que tanto quise.

Dar agradecimientos al profesor Dr. Guillermo Rubilar por entregarme sus conocimientos sobre los Tópicos de La Teoría Relatividad General, su estructura desde cero, sus conversaciones en el ramo guíado Tópicos en Física II, enseñarme detalladamente los campos gravitomagnéticos y los cafés que nunca faltaron. También al profesor Dr. Félix Borotto por sus consejos y buena disposición. Dr. Ricardo Troncoso, por su amabilidad de darme su conocimiento y la confianza de

largas conversaciones de motivación.

Resumen

Las formas de transgresión nos dan información de cómo los elementos del grupo de simetría sobre el fibrado se mapean sobre el espacio-tiempo o la variedad base M. Es decir, estas formas son proyectables y nos permiten identificar las trayectorias sobre la variedad $n-$dimensional y, para ello, analizaremos la teoría de Gauge a través de estas formas de transgresión para un grupo de simetría arbitrario. Para ello, consideraremos dos conexiones sobre un fibrado principal totalmente independientes y propias de las formas de transgresión, en este caso, el vielbein y la conexión de spín para contextualizarlo con la Relatividad General. Usando el método de separación de subespacios, el cual nos permite dividir la acción transgresora en términos del *bulk*(volúmen) y de borde, para luego separar cada uno de ellos en trozos que reflejen la física asociada con una cierta elección de grupo de simetría. Cabe destacar que en esta tesis estudiaremos un caso particular de las formas de transgresión, llamadas las formas de Chern-Simons, y cuál es la dinámica cuando imponemos para una de las conexiones independientes es $\bar{\mathbf{A}} = 0$ y a través del Método de Separación en Subespacios encontrar la acción correspondiente al lagrangeano de CS.

Abstract

The transgression forms give us information on how the elements of the symmetry group on the fiber bundle map about the space-time or M-base manifold. That is, these forms are projectable and allow us to identify trajectories on the $n-$dimensional manifold and, for this purpose, we will analyze Gauge theory via these transgression forms for an arbitrary symmetry group. For this purpose, we will consider two connections on a principal fiber bundle totally independent and proper to the transgression forms, in this case, the vielbein and the spin connection to contextualize it with General Relativity. Using the subspace separation method, which allows us to split the transgression action in terms of the *bulk*(volume) and boundary, and then separate each of them into chunks that reflect the physics associated with a certain choice of symmetry group. It is worth nothing that in this thesis we will study a particular case of the transgresion forms, called the Chern-Simons forms, and what the dynamics is when we impose for one of the independent connections $\bar{\mathbf{A}} = 0$ and through the Method of Separation in Subspaces find the action corresponding to the CS Lagrangian.

Índice general

Índice de cuadros

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción

Está tesis describen una clase de teorías de gauge en espacio-tiempos de dimensionalidad impar cuyo funcional de acción es la integral de una forma de transgresión. Las formas de transgresión son funciones de dos potenciales de gauge (uno-formas conexiones) independientes, cada uno con su correspondiente intensidad de campo (dos-forma curvatura). Su principal característica es su invariancia bajo transformaciones de gauge para un grupo o supergrupo de Lie arbitrario. Los lagrangeanos transgresores pueden ser considerados como una generalización de los lagrangeanos de Chern–Simons (CS). Por un lado, la forma de CS corresponde al caso particular de una transgresión en que una de las conexiones es puesta igual a cero; por otro, una forma de transgresión puede, en general, ser escrita como la diferencia entre dos formas de CS, una para cada conexión, más una forma exacta. Escogiendo apropiadamente el grupo de gauge, los lagrangeanos transgresores y de CS permiten realizar, si bien sólo en dimensiones impares, el viejo anhelo de interpretar la gravitaci´on como una teoría de gauge. Debe destacarse que esta realización es lograda no en el contexto de una teoría de Yang–Mills, sino para una acción carente de una métrica de background, en el espíritu de Relatividad General.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Relatividad General y Geometría Diferencial

En la Teoría de Einstein se asume que el campo gravitacional viene descrito por un **espacio-tiempo** curvo *cuadridimensional*, esto quiere decir que de las ecuaciones de campo debe tener un tensor de curvatura no nulo y una métrica que no tiene componentes linealmente independientes. Cuando estudiamos la ondas gravitacionales, por lo general se usa la métrica linealizada con perturbaciones de orden mayor, que la desarrollaremos más adelante. Pero esta teoría, la llamada Teoría de Gauge-Poincaré el cual existen poderosos métodos de geometría diferencial describir los fenómenos gravitatorios en términos de propiedades geométricas del espacio-tiempo de cuatro dimensiones colector. Técnicamente, la estructura métrica y la curvatura de Riemann formaron el núcleo de GR como teoría de un campo gravitatorio macroscópico. Más tarde, se reconoció que las otras tres interacciones físicas (electromagnética, débil y fuerte) también pueden geometrizarse haciendo uso del enfoque teórico de norma de Yang-Mills, y surgió una pregunta natural. Sí la teoría de la gravedad puede ser consistentemente formulado en el marco de referencia. La respuesta no es tan simple como podría parecer al principio. El punto sútil es que el modelo estándar se basa en los grupos de simetría fundamental que actúan en los espacios internos, mientras que la gravedad está meramente relacionada con la simetría del propio espacio-tiempo. En el GR de Einstein, el papel central lo juega el grupo de las traducciones locales del espacio-tiempo (difeomorfismos), que es directamente reflejado en el hecho de que la correspondiente corriente de Noether de traslación –el tensor de energía-momento– es la fuente física del campo gravitatorio. Al mismo tiempo, el grupo de Poincaré (producto semidirecto del grupo de Lorentz por el grupo de las traducciones) juega un papel importante en la teoría de alta energía física; recordemos que las partículas elementales se clasifican por masa y espín en la teoría de la representación de la Grupo Poincaré. La teoría de Yang-Mills, es una teoría explicitamente construida en base de conexiones.

2.1.1. Métrica.

Cuando hablamos de lo que es métrica, se denomina como al espacio métrico que cuenta con una ley para para poder definir una distancia sobre una variedad Riemanniana $M^{(d)}$ $d-$dimensional, pero más que un concepto es un objeto geómetrico como tal. Generalmente, su notación viene dada como $g_{\mu\nu}$, donde los índices nos indican que esta definida sobre un espacio-tiempo curvo. En el más estudiado es el que supone que la distancia entre dichos puntos está dada por la siguiente expresión:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \tag{2.1.1}$$

donde $g_{\mu\nu}$ son componentes de un tensor covariante de segundo orden, simétrico y es el que recibe el nombre de **tensor métrico**. En consecuencia, se asegura que el ds sea una cantidad escalar y se le denomina **elemento de línea**.

2.1.2. Vectores covariantes

Consideremos un campo escalar ϕ definido en una región de la variedad. En un SC x tendremos una dependencia explícita $\phi(x)$, y podemos calcular las derivadas de ϕ respecto a las coordenadas x^i, es decir, el gradiente del campo ϕ, $\partial\phi/\partial x^i$, que define nuevos campos. Análogamente, si usamos un nuevo SC $\bar{x}$, tendremos otras funciones explícitas $\phi(\bar{x})$ y podemos calcular el correspondiente gradiente $\frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}^i}$. En un punto P dado, podemos relacionar estos gradientes usando la transformación coordenada la regla de la cadena:

$$\boxed{\frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}^i}(\bar{x}(P)) = \frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^i}(P)\frac{\partial\phi}{\partial x^j}(x(P)).} \tag{2.1.2}$$

Veamos que en esta expresión, las derivadas respectoa las nuevas coordenadas de un campo escalar definen un nuevo tipo de objeto, que llamaremos **vector**

covariante [15]. Sin embargo, es mejor definir estas nuevas cantidades en otro lenguaje, llamado en el lenguaje **Riemann-Cartan**, en donde la geometría diferencial juegan un papel importante. En geometría diferencial, el concepto de paralelismo está codificado por una conexión llamada conexión affín ó que dentro de la literatura son los llamados símbolos de Christoffel ${\Gamma^\alpha}_{\beta\eta}$. No obstante, sabemos que la derivada parcial de un tensor no define un nuevo tensor bajo transformaciones generales de coordenadas (TGC's) (esto es debido a que la resta de los vectores definidos en distintos puntos, implica que si las derivadas de un vector se anulan en un Sistema Coordenado, entonces éstas no se anulan necesariamente en otro). Ahora necesitamos definir una nueva cantidad tensorial que nos diga el como cambian estos vectores de forma paralela. Es decir, una nueva derivada que apartir de la conexión affín y campo vectorial es posible definir la siguiente derivada

$$\nabla_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - {\Gamma^\alpha}_{\nu\mu} A_\alpha \tag{2.1.3}$$

donde el operador ∇_ν es llamada **derivada covariante**.
En Relatividad General se asume que hay un mínimo número de campos dinámicos, por lo que dentro la teoría los únicos grados de libertad son los grados de libertad métricos, para esto en necesario imponer un constraint. El cual en términos matemáticos este tensor es el llamado Torsión

$$T^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu}. \tag{2.1.4}$$

La conexión affín que viene a satisface el paralelismo y es conocida como los símbolos de Christoffel

$${\Gamma^\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$$

Donde nos damos cuenta que el paralelismo esta codificado a través de la métrica $g_{\mu\nu}$. Por lo tanto, en las siguientes secciones véremos un nuevo formalismo matemático llamado el de Riemann-Cartan .

2.1.3. Acción de Einstein-Hilbert con $\Lambda \neq 0$

Existe una densidad lagrangiana invariante que nos entrega las ecuaciones de campo. Dado esto, Hilbert útilizo el escalar de curvatura de Ricci R, la linealidad de las ecuaciones de las derivada de segundo orden de $g_{\mu\nu}$. De manera que la acción de Einstein-Hilbert con constante cosmológica

$$S^{(4)}_{EH} = \int d^4x\sqrt{-g}(R - 2\Lambda).$$

Tal que su variación nos conduce a las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$$

Donde $G_{\mu\nu}$ es el llamado tensor de Einstein.

2.2. Geometría de Riemann-Cartan

En 1922 Élie Cartan conjeturó que la relatividad general debe ser extendida incluyendo la torsión afín, que permite un tensor de Ricci asimétrico. La extensión de la geometría de Riemann para incluir torsión afín ahora se conoce como geometría de Riemann-Cartan. Una geometría de Riemann-Cartan se determina unívocamente por:

1. una elección del campo tensorial métrico (que especifica todas las longitudes de los vectores y los ángulos entre los vectores), un campo de torsión afín, y
2. el requisito de que las longitudes y los ángulos se preserven por traslación paralela (como en la geometría de Riemann donde la torsión es cero).

Una geometría de Riemann es una geometría de Riemann-Cartan con la torsión cero, así que es determinada unívocamente por un tensor métrico.

2.2.1. Relatividad en geometría a la Cartan: *Espacio-Tiempo* como variedad

El principio de equivalencia define al espacio-tiempo como una variedad $M^{(4)}$ d-dimensional, donde es suave, diferenciable y con singularidades aisladas. Tal que en cada punto $x \in M^{(4)}$ corresponde a un espacio vectorial, en este caso un espacio tangente D-dimensional con notación T_x con una signatura Lorentziana $(-, +, .., +)$. Este principio se ve cuando pasamos de un abierto M a un abierto del espacio tangente T_x, esto significa que se hace un cambio en el sistema de referencia a la de un observador cuando experimenta caída libre. A esto es lo que llamamos isomorfismos, la cual nos da la manera de relacionar el espacio M y

T_x. También, no esta demás decir que la estructura de variedad y el conjunto de todos los espacios corresponde al fibrado tangente $T_pM^{(d)}$.
La estructura métrica del espacio tiempo

$$g = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu \otimes dx^\nu,$$

podemos considerar las matrices de cambio de base $dx^\mu = e^a e^\mu{}_a$. La metrica nos queda que

$$g = \eta_{\mu\nu} e^a(x) \otimes e^b(x).$$

En particular, un observador **inercial** corresponde la funciones de un embebimiento

$$X : \mathbb{R} \to M^{(4)}$$

los cuales en un cierto parche coordenado puede escribirse como

$$X^\mu = X^\mu(\tau) \tag{2.2.1}$$

2.2.2. El vielbeine

Este isomorfismo es el alma de la teoría ya que nos asegura la validez del principio de equivalencia, por ello es sumamente importante y el nombre que le otorgamos dependerá de la dimensión en que estemos trabajando, por ejemplo, en D-dimensiones (para un número arbitrario D), son llamados vielbeine, del alemán *viel=muchas* y *bein(e)=piernas*, es decir, muchas patas. En 1-dimensión es llamado einbein, en 2- dimensiones zweibeine, en 3-dimensiones dreibeine, en 4-dimensiones vierbeine. Este isomorfismo tiene la misma cantidad de patas tanto en la base ortonormal (la cuál estará representada por índices latinos) como en la base coordenada (con índices griegos).

Este isomorfismo es justo un cambio de coordenadas en el espacio-tiempo, con el conjunto de cada espacio tangente de todos los puntos de la variedad T_x. Con esto, podemos definir una transformación de coordenadas locales x^μ en un abierto en la variedad $\mathcal{M}$ con el marco ortonormal de coordenadas z^a en el espacio de

Minkowski T_x. La matriz jacobiana es

$$\frac{\partial z^a}{\partial x^\mu} = e^a{}_\mu,$$

podemos definir 1 a 1 los tensores correspondientes a cada espacio.

Sí consideramos una separación en las coordenadas de $\mathcal{M}$ con el espacio de Minkowski T_x entre dos puntos de forma infinitesimal sobre la misma variedad nos queda la 1-forma

$$dz^a = e^a{}_\mu dx^\mu. \tag{2.2.2}$$

Así, la longitud de de arco T_x será $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dz^a dz^b$, lo cual empuja a una métrica sobre $\mathcal{M}$, ya que nos lleva a la métrica

$$ds^2 = \eta_{ab} e^a{}_\mu(x) e^b{}_\nu, (x) dx^\mu dx^\nu$$

donde la métrica en $\mathcal{M}$ es definida como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^a{}_\mu(x) e^b{}_\nu(x), \tag{2.2.3}$$

esto implica también, para la métrica inversa en el espacio plano

$$\eta^{ab} = g^{\mu\nu} e^a{}_\mu e^b{}_\nu, \tag{2.2.4}$$

donde $g^{\mu\nu}$ es el inverso de $g_{\mu\nu}$ y η^{ab} es el inverso η_{ab}. Multipliquemos a ambos lados de 2.2.4 por $\eta_{bc} e^c{}_\lambda$ con el objetivo de mostrar que ambas ecuaciones son equivalentes entre sí,

$$\begin{aligned} \eta^{ab}\eta_{bc} e^c{}_\lambda &= g^{\mu\nu} e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{bc} e^c{}_\lambda \\ \delta^a_c e^c{}_\lambda &= g^{\mu\nu} e^a{}_\mu \eta_{bc} e^b{}_\nu e^c{}_\lambda \end{aligned}$$

donde el término $\eta_{bc}e^b{}_\nu e^c{}_\lambda$ es la métrica $g_{\nu\lambda}$

$$\begin{aligned}
\delta^a_c e^c{}_\lambda &= g^{\mu\nu} e^a{}_\mu g_{\nu\lambda} \\
e^a{}_\lambda &= e^a{}_\nu g_{\nu\lambda} \\
e^a{}_\lambda &= e^a{}_\lambda .
\end{aligned}$$

Observemos la ec. 2.2.3, vemos que determina la métrica, por consiguiente, el vielbein codifica toda la información de metricidad y del tamaño sobre la variedad.

2.2.3. Conexión de Lorentz

Sea una $u^a(x) \in T_x$ un vector de Lorentz, es decir, esta transformación esta definida como

$$u^a = \Lambda^a{}_b u^b \tag{2.2.5}$$

Sin embargo, la derivada de sus componentes no varía como el vector de Lorentz, es decir, la expresión (2.2.5) bajo la acción de la derivada,

$$du^a = \Lambda^a{}_b du^b + d\Lambda^a{}_b u^b .$$

Recordemos que la **Relatividad General** es una teoría que no contiene observadores de forma privilegiada, es decir, el término $d\Lambda^a{}_b$. Necesitamos que sea invariante bajo el grupo de Lorentz.
Lo primero es que transportaremos de forma paralela un vector de la forma $u^a(x+dx)$ sobre el espacio tangente T_x, operacionalmente hablando

$$\begin{aligned}
u^a(x+dx) &= u^a(x) + \omega^a{}_{b\mu} u^b(x) dx^\mu \\
&= u^a(x) + dx^\mu \left[\partial_\mu u^a(x) + \omega^a{}_{b\mu}(x) u^b(x)\right] \\
&= u^a(x) + dx^\mu D_\mu u^a(x)
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

donde la 1−forma $\omega^a{}_{b\mu}$ es la conexión que define el transporte paralelo en el grupo de Lorentz es un espacio tangente. Así, definimos la derivada covariante en función de la nueva conexión como

$$D_\mu u^a(x) = \partial_\mu u^a(x) + \omega^a{}_{b\mu}(x) u^b \tag{2.2.7}$$

de la ecuación (2.2.7) notamos que el operador D_μ mide la taza de cambio de un tensor al transportar de forma paralelamente entre dos puntos infinitamente cercanos ó x y $x + dx$.
Consideremos la transformación para $\omega^a{}_{b\mu}(x)$ bajo el grupo de Lorentz

$$\omega^a{}_{b\mu}(x) = \Lambda^a{}_c(x)\Lambda_b{}^d(x)\omega^c{}_{c\mu}(x) + \Lambda^a{}_c(x)\partial_\mu\Lambda_b{}^c(x). \tag{2.2.8}$$

Por consiguiente, hemos demostrado que el término $\omega^a{}_{b\mu}$ transforma como conexión. Lo relevante, es que nos proporciona la información del transporte paralelo en cada punto de la variedad.

2.2.4. Tensores invariantes

El grupo $SO(D-1,1)$ contiene dos tensores invariantes bajo transformaciones, el tensor métrico de Minkowski y el símbolo de Levi-Civita el cual es un tensor completamente antísimetrico. Además, estos tensores están definidos con una estructura algébraica sobre el grupo del Lorentz, el transporte sobre una variedad bien definida debe ser constante, es decir, que la derivada covariante debe de satisfacer

$$\begin{aligned} d\eta_{ab} &= D\eta_{ab} = 0 \\ d\epsilon_{a_1 a_2 \ldots a_D} &= D\epsilon_{a_1 a_2 \ldots a_D} = 0 \end{aligned}$$

al desarrollar la primera expresión

$$D\eta_{ab} = -\omega^c{}_b\eta_{ac} - \omega^c{}_a\eta_{cb} \tag{2.2.9}$$

como $d\eta_{ab} = D\eta_{ab} = 0$, entonces

$$0 = -\omega^c{}_b\eta_{ac} - \omega^c{}_a\eta_{cb}$$

$$\omega^c{}_b\eta_{ac} = \omega^c{}_a\eta_{cb} \tag{2.2.10}$$

así, nos damos cuenta que la conexión de spín satisface las siguientes identidades tanto como para la métrica de Minkowski y los símbolos de Levi-Civita

$$\omega_{ab} = -\omega_{ba}$$

$$\epsilon_{b_1 a_2 \ldots a_D}\omega^{b_1}{}_{a_1} + \epsilon_{a_1 b_2 \ldots a_D}\omega^{b_2}{}_{a_1} + \ldots + \epsilon_{a_1 a_2 \ldots b_D}\omega^{b_D}{}_{a_1} = 0$$

Nos damos cuenta que la conexión de spín es totalmente antisimétrica en los índices espacio temporales.

2.2.5. Torsión y curvatura

La geometría de Riemann-Cartan subyace en el corazón de las teoría actuales de la gravedad. Nos da una noción más explicita y una comprensión más completa de nuestro universo, el estudio del espacio-tiempo y su interacción con la materia a nivel geométrico. En el convencionalismo de la *Teoría de la Relatividad General*, al mencionar las conexiones involucradas, los símbolos de Christoffel, el término de torsión es

$$T^{\lambda}{}_{\mu\nu} = 0. \tag{2.2.11}$$

Recordemos que esto viene de la definición transporte paralelo, al transportar paralelamente un vector $\vec{V} = V^{\rho}\partial_{\rho}$ en donde el paralelogramo no se "cierra" [véase Refs. [15]], esto significa que se llegan a puntos distintos sobre la variedad. Viene descrita por la expresión

$$L^{\mu}M^{\nu}[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]V^{\rho} = L^{\rho}M^{\nu}\mathcal{R}^{\rho}{}_{\omega\mu\nu}V^{\omega} - L^{\mu}M^{\nu}T^{\lambda}{}_{\mu\nu}\nabla_{\lambda}V^{\rho}.$$

Consideremos una variedad bien definida, notemos que las derivadas covariantes no conmutan, es decir, $D = D_{\mu}dx^{\mu}$, para que sea covariante, la conexión de espín $\omega^{a}{}_{b}$ debe transformar bajo las transformaciones de Lorentz como

$$\omega^{a}{}_{b} = \Lambda^{a}{}_{c}(\omega^{c}{}_{d} + \delta^{c}_{d})\Lambda_{b}{}^{d}, \tag{2.2.12}$$

cabe recordar que la conexión $\omega^{a}{}_{b}$ no transforma como tensor en el grupo $SO(d-\eta_{-}, \eta_{-})$. Para el formalismo de primer orden, vamos a definir unos objetos geométricos llamados **curvatura** y **torsión**.

Se define como la 1-forma T^a la derivada covariante del vielbein

$$T^a \equiv De^a = de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b. \tag{2.2.13}$$

Mientras que la derivada exterior de la 1-forma de la torsión es

$$DT^a \equiv D(De^a) = D(de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b),$$

con un poco de álgebra, demostramos que

$$DT^a = (d\omega^a{}_b + \omega^a{}_b \wedge \omega^b{}_c) \wedge e^b,$$

con esto, definimos la 2-forma la expresión anterior como **curvatura**

$$R^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b, \tag{2.2.14}$$

por lo tanto, la ecuación (2.2.13) podemos reescribirla como

$$T^a = R^a{}_b \wedge e^b$$

las expresiones (2.2.14) y (2.2.13) son las llamadas **ecuaciones de estructura de Mauren-Cartan**.

2.2.6. Teoría de Grupos y Grupos de Lie

Un grupo es un conjuto de elementos dotado por de un producto que satisface cuatro hipótesis básicas, las cuales dan coherencia interna al sistema. Son las propiedades básicas de un conjunto razonable y reversible de **transformaciones**. Debido a ello, el concepto de grupo captura en forma aparamente paradójica el concepto de **simetría**: un objeto simétrico es el aquel que no cambia bajo la acción de un grupo. Es un **invariante** bajo la acción del mismo. Por ejemplo, en una esfera simétrica con respecto de rotaciones en torno a su centro.
Los elementos de un grupo, cumplen axiomas bajo una operación binaria

$$\cdot : G \times G$$

el cual satisfacen el siguiente axióma

1. $\forall a, b \in G, a \cdot b \in G \Longrightarrow$ **Cerrado**.
2. $\forall a, b \in G, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \Longrightarrow$ **Asociativo**
3. $\exists e \in G$, $\forall a \in G$, $e \cdot a = a \cdot e = a \Longrightarrow$ **Identidad**
4. $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G$, $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e \Longrightarrow$ **Inverso**

Algo importante a notar que el conjunto de transformaciones consecutivas, no necesita ser conmuntativo

$$a \cdot b \neq b \cdot a$$

existen los llamados grupos que cumplen la propiedad de conmutatividad, los grupos **abeliano**.
Empezaremos describiendo los **grupos de Lie**, estos grupos son continuos y sus elementos está en relación 1 a 1 con los elementos de una variedad **diferenciable** $n-$dimensional.

Consideremos una variedad diferenciable, se definen como elementos de un espacio vectorial g, en donde los elementos del grupo Lie, pueden escribirse como $g = e^{\mathbf{X}}$ en donde $\mathbf{X}$ son elementos de un espacio vectorial sobre un campo K. Si consideramos el producto cerrado sobre G

$$e^{\mathbf{X}}e^{\mathbf{Y}} = e^{\mathbf{Z}}$$

se cumple que $\mathbf{Z} \in \mathfrak{G}$. Sin embargo, esta operación viene descrita por la fórmula de Dykin-Poincaré-Baker-Campbell-Hausdorff. Por otro lado, el álgebra debe ser cerrada bajo el conmutador $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$. Esto es a la que llamamos el álgebra de Lie $\mathfrak{G}$ asociada al grupo de Lie G. Estos elementos $\mathbf{X},\ \mathbf{Y},\ \mathbf{Z} \in \mathfrak{G}$ satisfacen la identidad de Jacobi, además, es común elegir una base l.ie dentro de $\mathfrak{G}$ y son las llamadas bases generadoras del álgebra de Lie expresadas como

$$\left\{T_A\right\}_{N=1}^{N}$$

donde cada elemento de $\mathfrak{G}$ de la base puede escribirse como $\mathbf{X} = x^A T_A$. Podemos describir el álgebra con constantes de estructura $C_{AB}{}^C$ en la misma base como

$$[T_A, T_B] = C_{AB}{}^C T_C$$

estas constantes de estructura satisfacen también la identidad de Jacobi.

Una interpretación geométrica de los grupos de **Lie**, no es algo trivial poder responder de como se "ven"de manera física, para ello es necesario comprender que existe una herramienta llamada **pushforward de bracktes de Lie** y se define como un embebimiento de una variedad $N^{(n)}$, $M^{(d)}$ de menor a mayor dimensión, respectivamente. Donde viene definido el corchete de Lie como

$$[\vec{U}, \vec{V}] = X_*[\vec{u}, \vec{v}]$$

dado esto, el grupo G para que se comporte como una variedad debe cumplir algunas propiedades (para el caso del grupo de Lie), existe un embebimiento en el lado izquierdo. Sus características, dicen que sí se define sobre toda variedad un campo vectorial sobre el grupo G, un campo $\vec{U}^{(L)}$ izquierdo de la variedad, este debe ser invariante ante un pushforward,

$$L_{g*}\vec{U}^{(L)} = \vec{U}^{(L)},$$

al igual que que cada vector, los campos vectoriales contienen un dual, para el caso de un campo vectorial invariante izquierdo, también tiene un dual $\theta^A \in \Omega^1(G)$

$$\theta^A = T^A{}_\mu dx^\mu$$

es la llamada 1-forma de **Mauren-Cartan** sobre el grupo G. El conjunto de las 1-formas forman una base para el espacio de las 1-formas sobre G. Si consideramos los coeficientes constantes, la forma de Mauren-Cartan satisface la ecuación

$$d\theta^D = -\frac{1}{2} C_{AB}{}^D \theta^A \wedge \theta^B \tag{2.2.15}$$

si despejamos la ecuación

$$R^A \equiv d\theta^D + \frac{1}{2}C_{AB}{}^C\theta^A \wedge \theta^B = 0 \tag{2.2.16}$$

esta es la llamada curvatura de gauge y es una 2-forma $R^A \in \Omega^2(G)$. Este campo, satisface la identidad de Jacobi,

$$\begin{aligned} d(d\theta^D + \frac{1}{2}C_{EP}{}^D\theta^E \wedge \theta^P) = 0 \\ d^2\theta^D + \frac{1}{2}C_{EP}{}^D(d\theta^E \wedge \theta^P - \theta^P \wedge d\theta^E) = 0 \end{aligned}$$

al desarrollar esta expresión, con las propiedades del producto exterior

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}C_{EP}{}^D C_{MN}{}^E \frac{1}{3!}\delta^{PMN}_{CAB}\theta^C \wedge \theta^A \wedge \theta^B = 0 \\ -\frac{1}{3!}(C_{AB}{}^E C_{EC}{}^D + C_{BC}{}^E C_{EA}{}^D + C_{CA}{}^E C_{EB}{}^D)\theta^A \wedge \theta^B \wedge \theta^C = 0 \end{aligned}$$

nos damos cuenta que la identidad de Jacobi, vienen expresados en función de las constantes de estructuras. Esto quiere decir que todo grupo y álgebra de Lie pueden ser expresadas como matrices mediante la expresión

$$C_{AB}{}^E C_{EC}{}^D + C_{BC}{}^E C_{EA}{}^D + C_{CA}{}^E C_{EB}{}^D = 0,$$

reescribimos con una conmutación de índices,

$$C_{AB}{}^E C_{EC}{}^D = C_{AE}{}^D C_{BC}{}^E - C_{BE}{}^D C_{AC}{}^E. \tag{2.2.17}$$

Podemos definir las matrices $\mathbb{T}_A$ de componentes

$$[\mathbb{T}_A]^D{}_E = C_{AE}{}^D \tag{2.2.18}$$

si usamos la ecuación (2.2.18) en la ecuación (2.2.17),

$$\begin{aligned} C_{AB}{}^E[\mathbb{T}_E]^D{}_C &= [\mathbb{T}_A]^E{}_E[\mathbb{T}_B]^E{}_C - [\mathbb{T}_B]^E{}_E[\mathbb{T}_A]^E{}_C, \\ [\mathbb{T}_A, \mathbb{T}_B] &= C_{AB}{}^E\mathbb{T}_C. \end{aligned}$$

Aquí, encontramos la **representación adjunta** $\mathbb{T}_A = Ad(T_A)$ del álgebra de Lie, por lo tanto, el álgebra siempre puede representarse como una base $n \times n$ de matrices. Lo relevante de todo esto es que la acción adjunta sobre el álgebra, deja invariante el álgebra, como se muestra en el siguiente conmutador

$$[Ad_g(\mathbf{T}_A), Ad_g(\mathbf{T}_B)] = g^{-1}\mathbf{T}_A g g^{-1}\mathbf{T}_B g - g^{-1}\mathbf{T}_B g g^{-1}\mathbf{T}_A g \qquad (2.2.19)$$

vemos que en el lado derecho de la ecuación (2.2.20), son los conmutadores de Lie

$$\begin{aligned}[Ad_g(\mathbf{T}_A), Ad_g(\mathbf{T}_B)] &= g^{-1}[\mathbf{T}_A, \mathbf{T}_B]g \\ &= C_{AB}{}^{C} g\mathbf{T}_C g^{-1} \\ &= C_{AB}{}^{C} Ad_g(T_C)\end{aligned} \qquad (2.2.20)$$

dada está operación, demostramos que ante la **acción adjunta** deja invariante el álgebra.

Podemos definit un p-forma, es decir, $\alpha^{(p)} \in \Omega^{(p)}(M^{(d)}) \otimes \mathfrak{G}$ valuada sobre el mismo álgebra de Lie. Entonces, consideraremos una variedad de $M^{(d)}$ y un álgebra de Lie $\mathfrak{G}$

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha^A(x) \otimes \mathbf{T}_A \\ &= \frac{1}{p!}\alpha^A{}_{\mu_1 \ldots \mu_p}(x) dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_p} \otimes \mathbf{T}_A\end{aligned}$$

el corchete de Lie también se puede generalizar oara una p y q-forma diferenciales, y de forma explicita, viene dado por

$$\begin{aligned}\left[\alpha^{(p)}, \beta^{(q)}\right] &= \alpha^{(p)} \wedge \beta^{(q)} - (-1)^{pq}\beta^{(q)} \wedge \alpha^{(p)} \\ &= \alpha^A \wedge \beta^B \otimes \mathbf{T}_A\mathbf{T}_B - (-1)^{pq}\beta^B \wedge \alpha^A \otimes \mathbf{T}_B\mathbf{T}_A \\ &= \alpha^A \wedge \beta^B \otimes [\mathbf{T}_A, \mathbf{T}_B] \\ &= \alpha^A \wedge \beta^B C_{AB}{}^{C} \otimes \mathbf{T}_C\end{aligned}$$

seguimos la misma lógica de las demás expresiones cuando calculamos los corchetes de Lie. Vamos a definir sobre la variedad una 1-forma $\theta \in \Omega^1(G) \otimes \mathfrak{G}$ como

$$\theta = gdg^{-1} \qquad (2.2.21)$$

dada la ecuación (2.2.21) la derivamos exteriormente

$$\begin{aligned} d\theta &= d(gdg^{-1}) \\ &= dg \wedge dg^{-1} - d^2g^{-1} \wedge g \\ &= dg \wedge dg^{-1} \end{aligned}$$

ahora si, calculamos el producto exterior entre la as 1-formas

$$\begin{aligned} \theta \wedge \theta &= -gdg^{-1} \wedge gdg^{-1} \\ &= -d\theta \end{aligned}$$

al despejar la ecuación nos queda lo siguiente

$$d\theta + \theta \wedge \theta = 0 \tag{2.2.22}$$

notemos que la expresión es identica a las ecuaciones de **Mauren-Cartan**.
Hemos comprendido que se pueden describir álgebras de Lie usando campos vectoriales invariante, las matrices de la representación adjunta y 1-formas de **Mauren Cartan**.
Vamos a considerar la 1-forma de Mauren-Cartan,

$$\theta = \frac{1}{2}\theta^{ab}{}_{\mu}dx^{\mu} \otimes \mathbf{J}_{ab} \tag{2.2.23}$$

para calcular la forma explicíta de las ecuaciones de Mauren-Cartan, si tomamos la ecuación (2.2.22), entonces

$$d\theta = \frac{1}{2}\partial_{\mu}\theta^{ab}{}_{\mu}dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \otimes \mathbf{J}_{ab} \tag{2.2.24}$$

así, para el producto

$$\begin{aligned}
\theta\wedge\theta &= \left(\frac{1}{2}\theta^{ab}{}_{\mu}dx^{\mu}\otimes\mathbf{J}_{ab}\right)\left(\frac{1}{2}\theta^{cd}{}_{\nu}dx^{\nu}\otimes\mathbf{J}_{cd}\right)\\
&= \frac{1}{4}\theta^{ab}{}_{\mu}\theta^{cd}{}_{\nu}dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}\otimes\mathbf{J}_{ab}\mathbf{J}_{cd}\\
&= \frac{1}{8}(\theta^{ab}{}_{\mu}\theta^{cd}{}_{\nu}-\theta^{cd}{}_{\nu}\theta^{ab}{}_{\mu})dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}\otimes\mathbf{J}_{ab}\mathbf{J}_{cd}\\
&= \frac{1}{8}dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}\otimes\left(\theta^{ab}{}_{\mu}\theta^{cd}{}_{\nu}\mathbf{J}_{ab}\mathbf{J}_{cd}-\theta^{cd}{}_{\nu}\theta^{ab}{}_{\mu}\mathbf{J}_{ab}\mathbf{J}_{cd}\right)\\
&= \frac{1}{8}dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}\otimes\theta^{ab}{}_{\mu}\theta^{cd}{}_{\nu}(\mathbf{J}_{ab}\mathbf{J}_{cd}-\mathbf{J}_{cd}\mathbf{J}_{ab})\\
&= \frac{1}{8}\theta^{ab}{}_{\mu}\theta^{cd}{}_{\nu}dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}\otimes[\mathbf{J}_{ab},\mathbf{J}_{cd}]
\end{aligned}$$

así, concluimos que

$$\theta\wedge\theta = \frac{1}{8}\theta^{ab}{}_{\mu}\theta^{cd}{}_{\nu}dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}\otimes[\mathbf{J}_{ab},\mathbf{J}_{cd}] \tag{2.2.25}$$

usando las matrices podemos desarrollar el álgebra de Lie en $\mathfrak{so}(d-\eta_{-},\eta_{-})$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{J}_{ab},\mathbf{J}_{cd}] &= \eta_{bd}\mathbf{J}_{ca}-\eta_{ad}\mathbf{J}_{eb}+\eta_{bc}\mathbf{J}_{ad}-\eta_{ac}\mathbf{J}_{bd}\\
&= \left(\eta_{bd}\delta^{e}_{c}\delta^{f}_{a}-\eta_{ad}\delta^{e}_{c}\delta^{f}_{b}+\eta_{bc}\delta^{e}_{a}\delta^{f}_{d}-\eta_{ac}\delta^{e}_{b}\delta^{f}_{d}\right)\mathbf{J}_{ef} = \frac{1}{2}\mathcal{C}_{abcd}{}^{ef}\mathbf{J}_{ef}\\
&= 2\left(\eta_{b[d}\delta^{[f}_{a]}\delta^{e]}_{c}-\eta_{c[a}\delta^{[e}_{c]}\delta^{f]}_{d}\right)\mathbf{J}_{ef}
\end{aligned}$$

si reemplazamos en la ecuación (2.2.25)

$$\begin{aligned}
\theta\wedge\theta &= \theta^{ab}{}_{\mu}\theta^{cd}{}_{\nu}\frac{1}{16}4\left(\eta_{b[d}\delta^{[f}_{a]}\delta^{e]}_{c}-\eta_{c[a}\delta^{[e}_{c]}\delta^{f]}_{d}\right)dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}\otimes\mathbf{J}_{ef}\\
&= \frac{1}{4}\theta^{ab}{}_{\mu}\theta^{cd}{}_{\nu}\left(\eta_{bd}\delta^{f}_{a}\delta^{e}_{c}-\eta_{ca}\delta^{e}_{b}\delta^{f}_{d}\right)dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}\otimes\mathbf{J}_{ef}\\
&= \frac{1}{4}\theta^{ab}{}_{\mu}\theta^{cd}{}_{\nu}\left(\eta_{bd}\delta^{f}_{a}\delta^{e}_{c}+\eta_{bd}\delta^{e}_{a}\delta^{f}_{c}\right)dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}\otimes\mathbf{J}_{ef}\\
&= \frac{1}{2}\theta^{ab}{}_{\mu}\theta^{cd}{}_{\nu}\eta_{bd}\delta^{f}_{a}\delta^{e}_{c}dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}\otimes\mathbf{J}_{ef}\\
&= \frac{1}{2}\theta^{fb}{}_{\mu}\theta^{ed}{}_{\nu}\eta_{bd}dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}\otimes\mathbf{J}_{ef}
\end{aligned}$$

al reemplazar en la ecuación (2.2.22) de Mauren-Cartan

$$\begin{aligned} d\theta + \theta \wedge \theta &= 0 \\ \frac{1}{2}\partial_\mu \theta^{ab}{}_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu \otimes \mathbf{J}_{ab} + \frac{1}{2}\theta^{bd}{}_\mu \theta^{cd}{}_\nu \eta_{bd} dx^\mu \wedge dx^\nu \otimes \mathbf{J}_{ab} &= 0 \\ \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \theta^{ab}{}_\nu + \theta^{bd}{}_\mu \theta^{cd}{}_\nu \eta_{bd}\right) dx^\mu \wedge dx^\nu \otimes \mathbf{J}_{ab} &= 0 \end{aligned}$$

notemos que $dx^\mu \wedge dx^\nu \otimes \mathbf{J}_{ab}$ es una base para las 1-formas dentro del grupo $\Omega^{(1)}(SO(d-\eta_-, \eta_-)) \otimes \mathfrak{so}(n-\eta_-, \eta_-)$, en consecuencia, vemos que las componentes explicitas θ^{ab} en las ecuaciones de Mauren-Cartan son

$$\partial_\mu \theta^{ab}{}_\nu + \theta^{bd}{}_\mu \theta^{cd}{}_\nu \eta_{bd} = 0$$

2.2.7. Fibrados

La definición de un fibrado consiste en elementos a un conjunto espacios topológico como el que llamamos E, M, y F y además, incluye un mapeo continuo y biyectivo de la forma

$$\pi : E \to M$$

en donde E es el espacio total, M es el espacio base y F es la fibra y π la proyección [veáse Refs. [7] y [14]]. Es importante notar que los fibrados deben cumplir un trivialización de localidad

$$proy_1 \circ \phi \circ \pi^{-1}(x) = x \tag{2.2.26}$$

donde $proy_1$ se define como proyección natural entre el producto de los espacio U y F, de forma más explicíta

$$proy_1 : U \times F \to U$$

se exige para $x \in U$ en la ecuación (2.2.26) (ver el artículo) . Cada uno de los conjuntos abierto U_α tiene asociado un homeomorfismo de la forma

$$\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F$$

el conjunto de pares $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ forma una trivialización local del fibrado. Así, para todo $x \in M$ la pre-imagen $\pi^{-1}(x)$ es homeomórfica a F y será llamado **fibrado**.

2.2.8. Funciones de Transición

Para describir el fibrado completo en términos de la trivialización local , es necesario encontrar condiciones de juntura en las intersecciones no vacías entre distintos abiertos. Dos abierto U_α y U_β de intersección no nula $U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$, sus respectivos homeomorfismos ϕ_α y ϕ_β en general mapearán en formas distintas en forma $\pi^{-1}(U_i \cap U_j)$ en $(U_i \cap U_j) \times F$,

$$\begin{aligned}\phi_\alpha(p) =& (\pi(p), y_\alpha(p)) = (x, y_\alpha(p))\\ \phi_\beta(p) =& (\pi(p), y_\beta(p)) = (x, y_\beta(p))\end{aligned}$$

en donde $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, $y_\alpha \in F$. Se componen los homeomorfismos de ϕ_α y α_β^{-1}, tenemo que

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta(x, y_\beta) = (x.\tau_{\alpha\beta}(x) y_\beta) \tag{2.2.27}$$

donde $\tau_{\alpha\beta}(x)$ le llamaremos función de transición [véase Refs. [**?**]], estas vienen definidos como lo siguiente y deben satisfacer algunas condiciones de consistencia, respectivamente:

$$\tau_{\alpha\beta}(x) : F \to F$$

1. $\tau_{\alpha\alpha}(x) = \mathbf{1}_F$ (operador identidad sobre F),
2. $\tau_{\alpha\beta}(x) = \tau_{\beta\alpha}^{-1}(x)$
3. $\tau_{\alpha\gamma}(x) = \tau_{\alpha\beta}\tau_{\beta\gamma}(x)$.

la condición 3 es la llamada *condición de cociclo y debe cumplirse para el caso de* $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \varnothing$. Cabe destacar que los operadores forman un grupo G el cual corresponde a un grupo de Lie. Corresponde a un grupo de simetría que actúa por la derecha de la fibra, el cual le llamaremos fibrado principal. Este tipo de fibrado representa el bloque básico de construcción de la teoría de gauge [veáse [14]].

2.2.9. Sección Local

Dado un encubrimiento sobre el abierto $\{U_\alpha\}$ se define como sección local σ_α como un mapeo sobre sobre P (*ver artículo*[7])

$$\sigma_\alpha : U_\alpha \to P$$

tal que $\forall x \in U_\alpha$ se cumple que

$$\pi \circ \sigma_\alpha(x) = x$$

las secciones locales σ_α y σ_β sobre $U_\alpha \cap U_\beta$ están relacionadas entre sí a través de las funciones de transición

$$\tau_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$$

se dice que es una sección natural cuando un homeomorfismo local en la trivialización $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$. En efecto, dado un homeomorfismo ϕ_α se ve como

$$\sigma_\alpha(x) = \phi_\alpha^{-1}(x, e)$$

en donde e es la identidad G. Es importante que el inverso es cierto, por ende induce a un homeomorfismo local recíproco. En consecuencia, las secciones locales naturales

$$\sigma_\alpha(x) y_\alpha(p) = \sigma_\beta(x) y_\beta(p)$$

y por lo tanto,

$$\sigma_\beta(x) = \sigma_\alpha(x) y_\alpha(p) y_\beta^{-1}(x) \tag{2.2.28}$$

como $y_\alpha(p)(x) = \tau_{\alpha\beta}(x) y_\beta(x)$ entonces

$$\sigma_\beta(x) = \sigma_\alpha(x) \tau_{\alpha\beta}(x) \tag{2.2.29}$$

2.2.10. Transformaciones de Gauge

En este caso, el fibrado siempre tendrá una estructura del tipo $U \times G$. Dado esto, es posible descomponer el espacio tangente en una suma directa como $T_pP = V_pP \oplus H_pP$ en donde V_pP corresponde al espacio tangente o subespacio vertical a la fibra y H_pP es el dual o el subespacio horizontal. Dado esto, nos centraremos en el subespacio vertical de la fibra, demostrando que podemos definir una conexión $\mathbb{A}$ sobre el fibrado que debe satisfacer algunas condiciones en relación con el álgebra de Lie.

Sea $\mathbb{A} \in \Omega^1(P) \otimes \mathfrak{g}$ 1-forma sobre la fibra P valuada en el álgebra de Lie, debe de satisfacer las siguientes condiciones

1. La 1-forma $\mathbb{A}$ es continua y suave sobre P,
2. para todo $Y \in V_pP$ se cumple que

$$\mathbb{A}(Y) = \theta(y_\alpha(p))(y_{\alpha *}Y) = \mathbf{Y}$$

3. y la acción derecha del grupo viene dada por

$$R_g(\mathbb{A}(pg)) = g^{-1}\mathbb{A}(p)g$$

Es importante notar que la segunda condición implica que $\mathbb{A}$ se le asocia a cada vector del espacio V_pP su correspondiente elemento del álgebra de Lie. Por consiguiente, una **transformación de gauge** $\mathbf{A}_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha) \otimes \mathfrak{g}$ como

$$\mathbf{A}_\alpha = \sigma_\alpha^*(\mathbb{A}) \tag{2.2.30}$$

Por lo tanto, sobre los abiertos U_α y U_β, en su interesección $U_\alpha \cap U_\beta$ tenemos dos conexiones de gauge $\mathbf{A}_\alpha$ y $\mathbf{A}_\beta$. Esto significa, que las secciones locales σ_α y σ_β se relacionan a través de la funciones de transición $\tau_{\alpha\beta}$, ambas conexiones de gauge, deben de estar relacionadas igualmente [*ver* [**?**]]. Las conexiones de gauge en la intersección no nula de ambos abiertos se relacionan en la siguiente expresión:

$$\mathbf{A}_\beta = \tau_{\alpha\beta}^{-1}\mathbf{A}_\alpha\tau_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}^{-1}d_M\tau_{\alpha\beta} \tag{2.2.31}$$

esta ecuación en Física es la que llamamos ***transformaciones de gauge***. Notemos que desde el punto de vista del fibrado siempre existe una función de transición $\tau_{\alpha\beta}(x)$que pertenece al grupo de símetria G y que podemos descomponer el espacio tangente en cada punto de P. A partir de ahora, durante la tesis, ocuparemos la notación no tan sobrecargada y más popular en la literatura en donde escribiremos para $\tau_{\alpha\beta} = g$

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = g^{-1}\mathbf{A}g + \theta \tag{2.2.32}$$

donde anteriormente habíamos definido en la ecuación 2.2.22 la $1-$forma de Mauren-Cartan.

2.2.11. Derivada covariante y Curvatura

2.2.12. Polinomios invariantes

Consideremos un álgebra de Lie $\mathfrak{G}$ y su correspondiente campo K. Nos enfocaremos en mapeos multilineales del tipo

$$\langle \bullet, ..., \bullet \rangle : \mathfrak{G}^n \to K,$$

lo que llamaremos polinomios, pues la naturaleza multilineal de estos, implica que su estructura

$$\langle \mathbf{Z_1}, \cdots, \mathbf{Z_n} \rangle = Z_1^{A_1} \cdots Z_{1n}^{A_n} K_{A_1 \ldots A_n}$$

donde el campo K

$$K_{A_1 \ldots A_n} = \langle \mathbf{T_{A_1}}, \cdots, \mathbf{T_{A_n}} \rangle \in K$$

también se cumple la propiedad adjunta de (**??**), es decir

$$\langle g\mathbf{Z}_1 g^{-1}, \cdots, g\mathbf{Z}_n g^{-1} \rangle = \langle \mathbf{Z}_1, \cdots \mathbf{Z}_n \rangle$$

Es por esto, que dada cualquier parte antisimétrica dentro del polinomio va a crear un conmutador que mapea la misma álgebra sobre el mapeo multilineal, anteriormente mencionado. En general, sólo sobrevive la parte simétrica del polinomio.

Dada una representación matricial para cualquier grupo y su álgebra, es posible demostrar que la traza siempre provee un tensor invariante

$$tr\left(g\mathbf{T}_{A_1}g^{-1}gT_{A_2}g^{-1}\cdots g\mathbf{T}_{A_{n-1}}g^{-1}g\mathbf{T}_{A_n}g^{-1}\right) = tr\left(g\mathbf{T}_{A_1}\mathbf{T}_{A_2}\cdots\mathbf{T}_{A_{n-1}}\mathbf{T}_{A_n}g^{-1}\right)$$
$$tr\left(g\mathbf{T}_{A_1}g^{-1}gT_{A_2}g^{-1}\cdots g\mathbf{T}_{A_{n-1}}g^{-1}g\mathbf{T}_{A_n}g^{-1}\right) = tr\left(\mathbf{T}_{A_1}\cdots\mathbf{T}_{A_n}\right)$$

si consideramos un elemento del grupo de Lie cercano a la identidad $g = 1 + \lambda$ y $\mathbf{Z} \in \mathfrak{G}$ el termino de primer orden junto con el corchete de Lie, nos lleva a la condición de invariacia para un polinomio para el álgebra de Lie

$$\langle[\lambda, \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2\cdots\mathbf{Z}_n]\rangle = 0$$

pues, es una de las maneras más elegantes de introducir la invariacia de algún objeto.

2.2.13. Proyección de Formas

Sea una forma $\mathbb{H}$, se dice que es proyectable cuando satisface la condición

$$\mathcal{D}\mathbb{H} = d_p\mathbb{H} \tag{2.2.33}$$

[Ver Apéndice A] donde $\mathcal{D}$ es la derivada covariante y d_p es la derivada exterior sobre el fibrado P, es importante notar que la forma $\mathbb{H}$ sobre el fibrado P debe de ser invariante ante la acción derecha del grupo de símetria $R_g^*\mathbb{H} = \mathbb{H}$, por consecuencia, la proyección $\mathbf{H}$ debe de estar definido localmente sobre el espacio base M. Así, provistos de la definición de polinomio invariante y proyección de formas, consideraremos ahora un importante resultado conocido como Teorema de Chern–Weil.

2.3. Teorema de Chern-Weil y Método de Separación de Subespacios en Teoría de Chern-Simons.

El teorema de Chern-Weil nos provee un manera de calcular invariantes topológicos para variedades de dimensión par y formas lagrangianas quasi-invariantes en dimensiones impares, relacionando el campo de la gravedad y la teorías de gauge.

A continuación, haremos la demostración del teorema a partir de los fibrados principales y la conexiones que comparten el grupo de simetrías con las variedades diferenciables.

2.3.1. Demostración del teorema de Chern-Weil

Consideremos un fibrado principal π sobre el grupo de simetría G, directamente desde una conexión $\mathbb{A} \in \Omega^1(P) \otimes \mathfrak{g}$ y la curvatura como una $\mathbb{F} \in \Omega^2(P) \otimes \mathfrak{g}$. También, consideremos un tensor invariante simétrico bajo el grupo de simetría G. Sea $\langle \mathbf{T}_{A_1} \cdots \mathbf{T}_{A_{n+1}} \rangle$

$$\langle \mathbb{F}^{n+1} \rangle = \langle \mathbb{F} \cdots \mathbb{F} \rangle$$

$\langle \mathbb{F}^{n+1} \rangle$ siempre es cerrada sobre el fibrado, es decir, $d_P \langle \mathbb{F}^{n+1} \rangle = 0$ y proyectable, por lo que, satisface la ecuación (2.2.33). Dado esto, la proyección $\langle \mathbf{F}^{n+1} \rangle$ también es cerrada sobre el espacio base M *(Espacio-Tiempo)*, análogamente se cumple $d_M \langle \mathbf{F}^{n+1} \rangle = 0$.

Consideremos dos conexiones sobre el fibrado $\mathbb{A}$ y $\bar{\mathbb{A}}$, sus respectivas curvaturas $\mathbb{F}$ y $\bar{\mathbb{F}}$, la diferencia $\langle \mathbb{F}^{n+1} \rangle - \langle \bar{\mathbb{F}}^{n+1} \rangle$ es una forma exacta y proyactable sobre el fibrado. La forma $\langle \mathbb{F}^{n+1} \rangle$ al ser proyectable, es directo mostrar que es invariante ante la acción derecha del grupo de simetría. En efecto,

$$R_g^* \langle \mathbb{F}^{n+1} \rangle = \langle \mathbb{F}^{n+1} \rangle$$

Por otro lado, como la forma $\mathbb{F}$ es un tensor, se le asocia los vectores sobre $T_P P$, debe de satisfacer la condición (2.2.33)

$$d_P \langle \mathbb{F}^{n+1} \rangle = \mathcal{D} \langle \mathbb{F}^{n+1} \rangle$$

Es directo probar que el polinomio $\langle \mathbf{F}_\alpha^{n+1} \rangle$ es la proyección de $\langle \mathbb{F}^{n+1} \rangle$ sobre M. Se puede demostrar que que mediante la identidad de Bianchi que la forma es cerrada. Como $\langle \mathbb{F}^{n+1} \rangle$ es proyectable, esto implica que $\langle \mathbf{F}_\alpha^{n+1} \rangle$ es proyectable sobre M, dándole una nueva notación $\langle \mathbf{F}^{n+1} \rangle$. Esta forma, corresponde a la $(n+1)-$***ésimo***

carácter de Chern,

$$ch_{n+1}(\mathbf{F}) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{i}{2\pi}\right)^{n+1}\langle \mathbf{F}^{n+1}\rangle$$

vamos a considerar las conexiones sobre le fibrado $\mathbb{A}$ y $\bar{\mathbb{A}}$, la diferencia

$$\mathbb{O} = \mathbb{A} - \bar{\mathbb{A}}$$

representa los vectores verticales sobre la diferencia de la conexión sobre el fibrado. También, podemos reescribir una nueva conexión en términos de esta, que interpola a $\mathbb{A}$ y $\bar{\mathbb{A}}$

$$\mathbb{A}_t = \bar{\mathbb{A}} + t\mathbb{O}$$

podemos escribir la curvatura aplicando la derivada la derivada covariante sobre $\mathbb{A}_t$

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_t &= \mathcal{D}\mathbb{A}_t \\ &= d_P\mathbb{A}_t + \frac{1}{2}[\mathbb{A}_t, \mathbb{A}_t]\end{aligned}$$

como $[\mathbb{A}_t, \mathbb{A}_t] = 2\mathbb{A}^2$, nos queda que

$$\mathbb{F}_t = d_P\mathbb{A}_t + \mathbb{A}_t^2$$

al desarrollar $d_p\mathbb{A}_t$ junto a la interpolación de las conexiones

$$\mathbb{F}_t = \bar{\mathbb{F}} + t\bar{\mathcal{D}}\mathbb{O} + t^2\mathbb{O}^2 \tag{2.3.1}$$

el término $t\bar{\mathcal{D}}\mathbb{O}$ sale al desarrollar la derivada exterior de $\mathbb{A}_t$ y considerando la condición (2.2.33). Veamos que si derivamos de forma total respecto a t la expresión de la curvatura (2.3.1), nos queda que

$$\frac{d\mathbb{F}_t}{dt} = \bar{\mathbb{D}}\mathbb{O} + 2t\mathbb{O}^2,$$

pero como $\mathbb{O}^2 = \frac{1}{2}[\mathbb{O}, \mathbb{O}]$,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{F}_t}{dt} &= \bar{\mathcal{D}}\mathbb{O} + t[\mathbb{O}, \mathbb{O}] \\ &= \mathcal{D}_t\mathbb{O} \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

donde $\bar{\mathcal{D}}\mathbb{O} = d_P\mathbb{O} + [\bar{\mathbb{A}}, \mathbb{O}]$. Dado esto, la diferencia de los polinomios se da como lo siguiente

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{F}^{n+1} \rangle - \langle \bar{\mathbb{F}}^{n+1} \rangle &= (n+1) \int_0^1 \left\langle \frac{d\mathbb{F}_t^{n+1}}{dt} \right\rangle dt \\ &= (n+1) \int_0^1 \left\langle \frac{d\mathbb{F}_t}{dt} \mathbb{F}_t^n \right\rangle dt \end{aligned}$$

habíamos visto de la ecuación (2.3.2) nos queda que

$$= (n+1) \int_0^1 \langle \mathcal{D}_t \mathbb{O} \mathbb{F}_t^n \rangle dt$$

al aplicar la identidad de Bianchi, es decir $\mathcal{D}_t \langle \mathbb{F}^n \rangle = 0$, entonces

$$\begin{aligned} &= (n+1) \int_0^1 \mathcal{D}_t \langle \mathbb{O} \mathbb{F}_t^n \rangle dt \\ &= (n+1) \int_0^1 d_P \langle \mathbb{O} \mathbb{F}_t^n \rangle dt \end{aligned}$$

el cambio de la derivada resulta de la condición de invarianza de un polinomio. Por otro lado, también $\langle \mathbb{O}\mathbb{F}_t \rangle$ al ser una cantidad tensorial, es proyectable globalmente sobre el fibrado

$$\langle \mathbb{F}^{n+1} \rangle - \langle \bar{\mathbb{F}}^{n+1} \rangle = d_P \mathbb{Q}^{(2n+1)}_{\mathbb{A} \leftarrow \bar{\mathbb{A}}}$$

donde $\mathbb{Q}^{(2n+1)}_{\mathbb{A} \leftarrow \bar{\mathbb{A}}}$ es la llamada $(2n+1)-$ forma transgresión sobre el fibrado. Por otro lado, es directo probar que la forma de transgresión sobre el espacio M. Dado que sobre el fibrado, la forma $\mathbb{Q}^{(2n+1)}_{\mathbb{A} \leftarrow \bar{\mathbb{A}}}$ es proyectable, por lo tanto, las formas de transgresión sobre el espacio M o simplemente ***transgresión***,

$$\langle \mathbf{F}^{n+1} \rangle - \langle \bar{\mathbf{F}}^{\mathbf{n+1}} \rangle = d\mathbf{Q}^{(2n+1)}_{\mathbf{A} \leftarrow \bar{\mathbf{A}}} \tag{2.3.3}$$

2.3.2. Teorías de Chern-Simons y formas de transgresión

2.3.3. Formas de Chern-Simons

Como habíamos visto anteriormente, en la definición de transgresión, se interpolaron dos conexiones y con ellas se contruyo una nueva conexión parametrizada sobre el fibrado

$$\mathbb{A}_t = \bar{\mathbb{A}} + t(\mathbb{A} - \bar{\mathbb{A}}).$$

Sucede que, sobre el fibrado, ninguna conexión puede ser nula, pues si imponemos que $\bar{\mathbb{A}} = 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_t &= t\mathbb{A} \\ \mathbb{F}_t &= td_P\mathbb{A} + t^2\mathbb{A}^2 \end{aligned}$$

estas dos no corresponden ni a una conexión ni a una curvatura sobre el fibrado, respectivamente. Sin embargo, la segunda parte del desarrollo del **Teorema de Chern-Weil** sigue siendo válido, es decir,

$$\langle \mathbb{F}^{n+1} \rangle = d\mathbb{Q}^{(2n+1)}_{\mathbb{A}\leftarrow 0}$$

donde $\mathbb{Q}^{(2n+1)}_{\mathbb{A}\leftarrow 0}$ es la llamada ***forma de Chern-Simons*** sobre P. Como habíamos mencionado anteriormente, debido a que $\mathbb{A}_t = t\mathbb{A}$, no es conexión y $\mathbb{F}_t = td_P\mathbb{A}+t^2\mathbb{A}$ no es una curvatura, la forma de Chern-Simons no es invariante y por ende, no es proyectable sobre el espacio-tiempo, esto quiere decir que dada los *pullback's* de secciones locales σ^*_α y σ^*_β sobre la forma $\mathbb{Q}^{(2n+1)}_{\mathbb{A}\leftarrow 0}$ son distintos en cada uno de los abiertos respectivos U_α y U_β. De esta manera, sólo esta definido sobre un abierto en particular sobre el espacio-tiempo M, es decir, están definidos solo de manera local sobre el *espacio-tiempo*, dada las constribuciones [13]

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{(2n+1)}_{\mathbb{A}\leftarrow 0} &= \sigma^*\mathbb{Q}^{(2n+1)}_{\mathbb{A}\leftarrow 0} \\ &= (n+1)\int_0^1 dt \langle \mathbf{A}(td_M\mathbf{A} + t^2\mathbf{A})^n \rangle \end{aligned}$$

Si consideramos el abierto U_α lo podemos expresar como la derivada exterior de la forma de **Chern-Simons** sobre U_α de manera loca,

$$\langle \mathbf{F}^{n+1} \rangle = d_M \mathbf{Q}_\alpha^{(2n+1)}, \tag{2.3.4}$$

es importante recordar que para el abierto U_β se define de manera análoga.

2.4. Homotopía

Cuando consideramos un espacio base M de dimensión par, $d = 2n$ y carece de bordes, la integral del n-ésimo carácter de Chern sobre el espacio base es un invariante topológico. en efecto, integrando la expresión (2.3.3) con $\partial M = \varnothing$, entonces

$$\int_M \langle \mathbf{F} \rangle = \int_M \langle \bar{\mathbf{F}} \rangle = cte.$$

donde $\mathbf{F}$ y $\bar{\mathbf{F}}$ son curvaturas provenientes de dos conexiones totalmente independientes. En la siguiente sección extenderemos la definición de invariante topológico para variades con borde.

2.4.1. Operadores de homotopía

El lagrangiano de la transgresión

$$\mathcal{L}_T^{2n+1}(A_1, A_0) = k(n+1) \int_0^1 dt \langle \theta F_t^{n-1} \rangle$$

tiene, en principio, toda la información necesaria acerca de la teoría. Sin embargo, se trabaja con grupos o subgrupos de gauge bien determinados que contienen diferente subgrupos, los cuales tienen un claro significado físico. Por esta razón, resulta necesario desdoblar el lagrangiano $\mathcal{L}_T^{2n+1}(A_1, A_0)$ en partes que reflejen de explicitamente del la estructura del grupo. Este desdoblamiento describe las formas de Chern-Simons y transgresión. Una manera de ver, de un modo intuitivo, la relación entre los lagragianos de Chern-Simons de transgresión, es considerar el teorema de Chern-Weil. Además, la ecuación describe la dinámica de una teoría con dos campos independientes: las $1-$formas conexión de gauge A_0 y A_1.

$$dQ_{2n+1}(A_1, A_0) + dQ_{2n+1}(A_2, A_1) + dQ_{2n+1}(A_0, A_2) = 0 \qquad (2.4.1)$$

donde A_1, A_2, A_0 son tres $1-$formas conexión independientes, evaluadas en una misma álgebra de Lie. Desde el lema de Poincaré se tiene que la suma de las tres formas de transgresión y estas pueden escribirse localmente como una derivada total

$$Q_{2n+1}(A_1, A_0) + Q_{2n+1}(A_2, A_1) + Q_{2n+1}(A_0, A_2) = -dQ_{2n}(A_2, A_1, A_0) \quad (2.4.2)$$

Cabe destacar que no se puede determinar una forma explícita $Q_{2n}(A_2, A_1, A_0)$ con el teorema de Chern-Weil. Con la expresión de la identidad triangular. Es importante notar que, usaremos el cambio de notación de $Q_{2n+1}(A_1, A_0)$ a $\mathbf{Q}^{(2n+1)}_{\mathbf{A_1 \leftarrow A_0}}$, de manera génerica, la flecha nos indica el sentido de orientación del bulk.
El caso que analizaremos ahora, es que el teorema de Chern-Weil es un caso especial de la formúla extendida de homotopía de Cartán. Para mostrar esto vamos a considerar los siguientes elementos. Sea una $\{A\}_{i=0}^{r+1}$ un conjunto de $1-$formas conexión de gauge sobre el un fibrado d-dimensional basado en una variedad $\mathcal{M}$. Sea además T_{r+1} un simplex $(r+1)-$dimensional orientado, parametrizado por el conjunto de $\{t^i\}_{i=0}^{r+1}$ donde estos parámetros satisfacen,

$$t^i \in [0, 1], \qquad \sum_{i=0}^{r+1} t^i = 1$$

Esta última expresión implica una combinación lineal de la forma

$$A_t = \sum_{i=0}^{r+1} t^i A_i,$$

Transforma como una conexión de gauge en la misma forma que hace cada A_i. Estas conexiones pueden venir asociados como elementos del simplex T_{r+1} y se pueden denotar como $T_{r+1} = \{A_0, A_1, ..., A_{r++1}\}$. Por otro lado, las derivadas exteriores sobre la variedad y el simplex $\mathcal{M}$ y T_{r+1}, respectivamente, son denotadas por d y d_t y además, cabe destacar que son operadores impares y por ende, anticonmutan. Consideraremos un operador par de antiderivación l_t, el cual incremetan el grado de dt y disminuye el grado de dx, de forma más formal [veáse Refs. [11]]

$$l_t : \Omega^p(M) \times \Omega^q(T_{r+1}) \longrightarrow \Omega^{p-1}(M) \times \Omega^{q+1}(T_{r+1}),$$

al igual que las derivadas anteriores mencionadas, este operador también satisface la regla de Leibniz. Este es definido de modo que constituya un álgebra gradada junto a las derivadas dy dt

$$d^2 = d_t^2 = \{d, d_t\} = 0 \tag{2.4.3}$$

$$[l_t, d] = d_t \tag{2.4.4}$$

$$[d_t, l_t] = 0 \tag{2.4.5}$$

Este operador puede actuar l_t sobre los polinomios $\{\mathbf{A}_t, \mathbf{F}_t, d_t\mathbf{A}_t.d_t\mathbf{F}_t\}$, es decir, para l_t $(m, q) \to (m-1, q+1)$, los demás operadores, están definidos sobre el álgebra de forma usual mientras que se satisfagan las ecuaciones y además, el álgebra de los polinomios cerrada es dada por

$$\begin{aligned} l_t\mathbf{A}_t &= 0 \\ l_t\mathbf{F}_t &= d_t\mathbf{A}_t \end{aligned}$$

En la siguiente sección, vamos a considerar la **fórmula de homotopía extendida de Cartan** para demostrar que para un caso en particular, se puede reproducir el **teorema de Chern-Weil**.

2.4.2. Formula de homotopía extendida de Cartan

Sea $f(l_t)$ una función del operador l_t, utilizando la expresión en serie de potencias de f, podemos escribir conmutador de $f(l_t)$ junto con la derivada exterior como [veáse Refs. [10]]

$$\begin{aligned} [f(l_t), d] &= \left[\sum_n \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) l_t, d\right] \\ &= \sum_n \frac{1}{n!} f^n(0)[l_t, d] \end{aligned}$$

Por otro lado $[l_t, d] = d_t$, entonces

$$[l_t, d] = [l_t, d]l_t^{n-1} + ... + l_t^{n-1}[l_t, d] \tag{2.4.6}$$

al desarrollar el conmutador

$$[l_t, d] = d_t l_t^{n-1} + l_t d_t l_t^{n-2} + ... + l_t^{n-2} d_t l_t + l_t^{n-1} d_t \tag{2.4.7}$$

del álgebra tenemos que $[d_t, l_t]$ podemos escribir $[l_t^n, d] = n l_t^{n-1} d_t$, y por lo tanto, podemos reescribir el corchete $[f(l_t), d]$ como

$$[f(l_t), d] = \left(\sum_n \frac{f^{(n)(0)}}{(n-1)!} l_t^{n-1} \right) = f'(l_t) d_t = d_t f'(l_t) \tag{2.4.8}$$

En particular, podemos hacer la elección para $f(l_t) = e^{l_t}$, dicha derivada, $f'(l_t) = e^{l_t}$, así el conmutador

$$[e^{l_t}, d] = d_t e^{l_t} = e^{l_t} d_t \tag{2.4.9}$$

Luego, dada una $(m, q)-$forma sobre $\mathcal{M} \times T_{r+1}$ podemos aplicar sobre los polinomios π en las formas $(A_t, F_t, d_t A_t, d_t F_t)$ se tiene que

$$d_t e^{l_t} \pi = e^{l_t} d\pi - d e^{l_t} \pi$$

reescribimos la identidad como

$$\begin{aligned}
d_t \frac{d}{dl_t} \sum_p \frac{1}{p!} l_t^p \pi &= \sum_p \frac{1}{p!} l_t^p d\pi - d \sum_p \frac{1}{p!} l_t^p \pi \\
\sum_p d_t \frac{1}{(p-1)!} l_t^{p-1} \pi &= \sum_p \frac{1}{p!} l_t^p d\pi - \sum_p d \frac{1}{p!} l_t^p \pi \\
d_t \frac{1}{(p-1)!} l_t^{p-1} \pi &= \frac{1}{p!} l_t^p d\pi - d \frac{1}{p!} l_t^p \pi \\
\frac{1}{(p-1)!} d_t l_t^{p-1} \pi &= \frac{1}{p!} [l_t, d] \pi
\end{aligned}$$

Esta ecuación es la versión diferencial de la formula extendida de homotopía de Cartan.

Sea π un polinomio invariante de la forma $\{A_t, F_t, d_t A_t . d_t F_t\}$ y una $(m, q)-$forma sobre $\mathcal{M} \times T_{r+1}$, es decir, es una $m-$forma en dx^μ y una $q-$forma en dt, por lo tanto, el polinomio queda definido como

$$\pi = \langle \mathbf{F}_t^{n+1} \rangle$$

Utilizando las relaciones del álgebra definidas en unas páginas anterior, consideramos la versión diferencial de la fórmula extendida de la homotopía de Cartan

$$\frac{1}{p!} d_t l_t^p \pi = \frac{1}{(p+1)!} [l_t^{p+1}, d] \pi \tag{2.4.10}$$

donde $m \geqslant p$ ya que el operador l_t disminuye el grado de la forma diferencial sobre la variedad $\mathcal{M}$. Si integramos la ecuación anterior sobre el simplex T_{r+1}

$$\frac{1}{p!} \int_{T_{r+1}} d_t l_t^p \pi = \frac{1}{(p+1)!} \int_{T_{r+1}} [l_t^{p+1}, d] \pi \tag{2.4.11}$$

al utilizar el teorema de Stokes sobre el mismo, podemos integrar directamente el lado izquierdo de la ecuación

$$\frac{1}{p!} \int_{\partial T_{r+1}} l_t^p \pi = \frac{1}{(p+1)!} \int_{T_{r+1}} (l_t^{p+1} d\pi - d l_t^{p+1} \pi) \tag{2.4.12}$$

Ahora notemos que, dado que π es una $(m, q)-$forma, la cantidad $l_t^{p+1}\pi$ debe de ser $(m-p, q+p+q)-$forma. Denotando $r = q + p$, se tiene que $l_t^{p+1}\pi$ es una $(r+1)-$forma sobre el simplex T_{r+1}, así, la ecuación toma la forma

$$\frac{1}{p!} \int_{\partial T_{r+1}} l_t^p \pi = \frac{1}{(p+1)!} \int_{T_{r+1}} l_t^{p+1} d\pi - \frac{(-1)^{r+1}}{(p+1)!} d \int_{T_{r+1}} l_t^{p+1} \pi \tag{2.4.13}$$

Si consideramos por $(2n, 0)-$forma diferencial $\langle \mathbf{F}_t^n \rangle$ se tiene que $q = 0$ y $p = r$. Entonces el polinomio viene expresado como la traza simetrizada $\pi = \langle \mathbf{F}_t^n \rangle$, entonces tomando (2.4.13) nos queda que

$$\frac{1}{p!} \int_{\partial T_{r+1}} l_t^p \langle \mathbf{F}_t^n \rangle = \frac{(-1)^p}{(p+1)!} d \int_{T_{r+q}} l_t^{p+1} \langle \mathbf{F}_t^n \rangle \tag{2.4.14}$$

Para el caso en el que $\boxed{p = 0}$.

Para ello, el borde del simplex es dado por los puntos extremos y además, las conexiones de gauge $T_1 = (\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1)$. Así, la conexión homotópica es dada por

$$\mathbf{A}_t = t^0\mathbf{A}_0 + t^1\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_0 + t^1(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_0)$$

nuestra integral (2.4.14)

$$\begin{aligned}\frac{1}{0!}\int_{\partial T_1} l_t^0\langle \mathbf{F}_t^n\rangle &= \frac{(-1)^0}{(0+1)!}d\int_{T_1} l_t\langle \mathbf{F}_t^n\rangle \\ \int_{\partial T_1}\langle \mathbf{F}_t^n\rangle &= d\int_{T_1} l_t\langle \mathbf{F}_t^n\rangle\end{aligned}$$

al aplicar el operador antiderivada de homotopía en el lado derecho de la integral y al integrar sobre el borde del simplex en el lado izquierdo de la ecuación

$$\langle \mathbf{F}_1^n\rangle - \langle \mathbf{F}_0^n\rangle = d\int_{T_1} n\langle \mathbf{F}_t^{n-1}(d_tA_t)\rangle$$

Ahora bien, las derivadas para el parámetro de modo que

$$\begin{aligned}d_t\mathbf{A}_t &= (A_1 - A_0)dt, \\ \mathbf{F}_t &= tF + (t^2 - t)A^2\end{aligned}$$

Así, la fórmula extendida de homotopía de Cartan, toma la siguiente forma

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{F}_1^n\rangle - \langle \mathbf{F}_0^n\rangle &= d\left(n\int_0^1 dt\langle \mathbf{F}_t^{n-1}(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_0)\rangle\right) \\ &= d\mathbf{Q}^{2n+1}_{\mathbf{A}_1\leftarrow\mathbf{A}_0}\end{aligned}$$

aquí hemos reproducido el **Teorema de Chern-Weil**.

Ahora analicemos el caso para $\boxed{p=1}$, nuestra ecuación (2.4.14) queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\frac{1}{1!}\int_{\partial T_{1+1}} l_t\langle \mathbf{F}_t^{n+1}\rangle &= -\frac{1}{2}d\int_{T_2} l_t^2\langle \mathbf{F}_t^n\rangle \\ \int_{\partial T_2} l_t\langle \mathbf{F}_t^{n+1}\rangle &= -\frac{1}{2}d\int_{T_2} l_t^2\langle \mathbf{F}_t^n\rangle\end{aligned}$$

Si aplicamos el operador antiderivada l_t Resolviendo la integral del lado izquierdo de la ecuación, la conexión $\mathbf{A}_t = t^0\mathbf{A}_0 + t^1\mathbf{A}_1 + t^2\mathbf{A}_2$, por lo que en el borde del simplex, junto a las conexiones de gauge $T_2 = (\mathbf{A}_0\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)$, esta corresponde

$$\partial(\mathbf{A}_0\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2) = (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2) - (\mathbf{A}_0\mathbf{A}_2) + (\mathbf{A}_0\mathbf{A}_1)$$

entonces

$$\int_{\partial T_2} l_t\langle \mathbf{F}_t^{n+1}\rangle = \int_{(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)} l_t\langle \mathbf{F}_t^{n+1}\rangle - \int_{(\mathbf{A}_0\mathbf{A}_2)} l_t\langle \mathbf{F}_t^{n+1}\rangle + \int_{(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)} l_t\langle \mathbf{F}_t^{n+1}\rangle \tag{2.4.15}$$

en el lado derecho de la ecuación anterior, cada integral corresponde a una forma de transgresión sobre

$$\int_{\partial T_2} l_t\langle \mathbf{F}_t^{n}\rangle = \mathbf{Q}^{(2n+1)}_{\mathbf{A}_2\leftarrow\mathbf{A}_1} - \mathbf{Q}^{(2n+1)}_{\mathbf{A}_2\leftarrow\mathbf{A}_0} + \mathbf{Q}^{(2n+1)}_{\mathbf{A}_1\leftarrow\mathbf{A}_2} \tag{2.4.16}$$

en la expresión (2.4.16) para la forma de transgresión sobre las conexiones $\mathbf{A_1}$ y $\mathbf{A_0}$,

$$\int_{\partial T_2} l_t\langle \mathbf{F}_t^{n+1}\rangle = \mathbf{Q}^{(2n+1)}_{\mathbf{A}_2\leftarrow\mathbf{A}_1} + \mathbf{Q}^{(2n+1)}_{\mathbf{A}_1\leftarrow\mathbf{A}_2} + \frac{1}{2}d\int_{T_2} l_t^2\langle \mathbf{F}_t^{n+1}\rangle, \tag{2.4.17}$$

al desarrollar junto con la derivada homotópica

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}l_t^2\langle \mathbf{F}_t^{n+1}\rangle &= \frac{1}{2}n(n+1)\langle l_t^2\mathbf{F}_t\mathbf{F}_t^n\rangle \\ &= \frac{1}{2}n(n+1)\langle (d_t\mathbf{A}_t)^2\mathbf{F}_t^n\rangle,\end{aligned}$$

donde $d(t^0+t^1+t^2)=0$

$$\begin{aligned}d_t\mathbf{A} &= dt^0\mathbf{A}_0 + dt^1\mathbf{A}_1 + dt^2\mathbf{A}_2 \\ d_t\mathbf{A}_t &= dt^0(\mathbf{A}_0-\mathbf{A}_1) + dt^2(\mathbf{A}_2-\mathbf{A}_1)\end{aligned}$$

al desarrollar $(d_t\mathbf{A})^2$, debido a que $d^2=0$ nos queda lo siguiente

$$(d_t\mathbf{A}_t)^2 = 2dt^0dt^1(\mathbf{A}_0-\mathbf{A}_1)(\mathbf{A}_2-\mathbf{A}_1),$$

dado esto,

$$\frac{1}{2}l_t^2\langle \mathbf{F}_t^{n+1}\rangle = -n(n+1)dt^0dt^1\langle(\mathbf{A}_0-\mathbf{A}_1)(\mathbf{A}_2-\mathbf{A}_1)\mathbf{F}_t^n\rangle \tag{2.4.18}$$

ahora bien, es conveniente, definir nuevos parámetros de integración

$$\begin{aligned} t &= 1 - t^0 \\ s &= t^2 \end{aligned} \tag{2.4.19}$$

por lo tanto, la integral sobre T_2 queda como

$$\begin{aligned} \int_{T_2} \frac{l_t^2}{2} \langle \mathbf{F}_t^{n+1} \rangle &= \int_{T_2} n(n+1) dt ds \langle (\mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_1)(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \mathbf{F}_{st}^{n-1} \rangle \\ &= n(n+1) \int_0^1 dt \int_0^s \langle (\mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_1)(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \mathbf{F}_{st}^{n-1} \rangle \\ &= \mathbf{Q}^{(2n)}_{\mathbf{A}_2 \leftarrow \mathbf{A}_1 \leftarrow \mathbf{A}_0} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{F}_{st}$ es la curvatura de la nueva conexión parámetrizada,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_t &= t^0 \mathbf{A}_0 + t^1 \mathbf{A}_1 + t^2 \mathbf{A}_2 \\ &= \mathbf{A}_0 + t(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_0) + s(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \end{aligned}$$

al reemplazar en la expresión (2.4.17) obtenemos la famosa ecuación triangular

$$\mathbf{Q}^{(2n+1)}_{\mathbf{A}_2 \leftarrow \mathbf{A_0}} = \mathbf{Q}^{(2n+1)}_{\mathbf{A}_2 \leftarrow \mathbf{A}_1} + \mathbf{Q}^{(2n+1)}_{\mathbf{A}_1 \leftarrow \mathbf{A}_2} + d\mathbf{Q}^{(2n)}_{\mathbf{A}_2 \leftarrow \mathbf{A}_1 \leftarrow \mathbf{A}_0}. \tag{2.4.20}$$

2.5. Acción de Chern-Simon Gravitacional

El que bajo transformaciones de gauge una forma de Chern–Simons varíe localmente en un término de borde implica que una acción de Chern–Simons puede definirse sólo módulo términos de borde

$$\mathcal{S}^{(2n+1)}_{CS} = \int_M \mathcal{L}^{(2n+1)}_{CS}(\mathbf{A}) + \int_{\partial M} X^{(2n)} \tag{2.5.1}$$

Esto significa que la acción de Chern–Simons tiene asociadas las ecuaciones del movimiento para $\mathbf{A}$

$$\langle \mathbf{T}_A \mathbf{F}^n \rangle|_M = 0 \tag{2.5.2}$$

pero no resulta posible definir condiciones de borde sólo a partir del principio de acción.

2.5.1. Simetrías

La acción considerada presenta dos simetrías. La primera, es la invariancia bajo difeomorfismos sobre M, debida a la utilización de formas diferenciales para llevar a cabo la construcción. La segunda, es la invariancia bajo transformaciones de gauge del grupo de simetría, garantizada por el hecho de que estamos usando una forma de transgresión como Lagrangeano. Dadas estas simetrías, el teorema de Noether nos garantiza la existencia de cargas conservadas asociadas a ellas. Como veremos a continuación, para el caso de la forma del lagrangeano Transgresor las cargas de Noether asociadas a difeomorfismos y a simetrías de gauge son no sólo conservadas on-shell (i.e., sobre estados que satisfacen las ecuaciones del moviemiento), sino que en general en forma off-shell (i.e., para cualquier configuración). Esto esta de acuerdo con el hecho de que, ya que el Lagrangeano completo corresponde a una anomalía, la teoría debería ser en principio libre de anomalías. Por otra parte, es interesante señalar que estas cargas de Noether conducen a resultados finitos y consistentes con el formalismo Hamiltoniano en el caso de gravedad y en particular en el caso de Agujeros Negros, haciendo así de gravedad en dimensiones impares una teoría tan consistente como su contraparte en dimensiones pares en este sentido.

2.5.2. Formas de Transgresión como Lagrangiano

Las teorías de gauge de Yang–Mills son teorías de conexión. Esto quiere decir que su campo fundamental, es decir, el potencial de gauge, es una conexión. Estas teorías dependen directamente de la existencia de una variedad espacio-tiempo sin dinámica que tiene una métrica background fija, es decir, sin grados de libertad. En contraposición, en Relatividad General, la teoría que describe la cuarta interacción fundamental, la construcción difiere de las teorías que constituyen el modelo estándar en, a lo menos, dos puntos fundamentales.
Cabe destacar que la **Relatividad General** no es una teoría de gauge dado que el campo fundamental no esta descrito por potenciales, sino por el tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Aunque en esta teoría existe la conexión de Levi-Civita que queda completamente determinada [17] [6] [5][3] .

Podemos considerar una teoría de gauge sobre una variedad $(2n+1)-$dimensional

$\mathcal{M}$ la acción

$$S_T^{(2n+1)}[\mathbf{A}, \bar{\mathbf{A}}] = k \int_{\mathcal{M}} \mathbf{Q}^{(2n+1)}_{\mathbf{A}\leftarrow\bar{\mathbf{A}}}, \tag{2.5.3}$$

k es una constante y $\mathbf{Q}^{(2n+1)}_{\mathbf{A}\leftarrow\bar{\mathbf{A}}}$ es la forma de transgresión definida en la expresión (2.3.3). En esta acción, podemos ver la presencia de dos conexiones de gauge totalmente independientes $\mathbf{A}$ y $\bar{\mathbf{A}}$. La interpretación física de esto se aclarará en la siguiente sección (*para construir una acción de Chern-Simons para la gravedad*). Se define el **lagrangiano transgresor** como

$$\mathcal{L}_T^{(2n+1)} = k(n+1)\int_0^1 dt \langle \boldsymbol{\theta} \mathbf{F}_t^n \rangle, \tag{2.5.4}$$

dado esto, es posible construir un lagrangiano en base a la identidad triangular (2.4.20)

$$\mathcal{L}_T^{(2n+1)} = k\mathbf{Q}^{(2n+1)}_{\mathbf{A}\leftarrow\tilde{\mathbf{A}}} - k\mathbf{Q}^{(2n+1)}_{\bar{\mathbf{A}}\leftarrow\tilde{\mathbf{A}}} + kd\mathbf{Q}^{(2n)}_{\mathbf{A}\leftarrow\tilde{\mathbf{A}}\leftarrow\bar{\mathbf{A}}}. \tag{2.5.5}$$

Por otro lado, sí realizamos variaciones independientes en (2.5.3) para ambas conexiones independientes $\mathbf{A}$ y $\bar{\mathbf{A}}$ obtenemos después de un poco de álgebra [Ver Apéndice B]

$$\delta S_T^{(2n+1} = (n+1)k\int_{\mathcal{M}} (\langle \delta \mathbf{A} \mathbf{F}_t^n \rangle - \langle \delta \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{F}}_t^n \rangle) + (n+1)k \int_{\partial\mathcal{M}} \int_0^1 \langle \delta\theta \mathbf{F}_t^n \rangle, \tag{2.5.6}$$

en la acción (2.5.3) es directo desmotrar que es un invariante de gauge, tanto como la conexiones independientes y las respectivas curvaturas. Esto nos lleva a que $\langle \theta \mathbf{F}_t^n \rangle$ es un polinomio invariante. Por ahora, lo consideraremos el caso más general con dos conexiones independientes.
Recordemos que que la forma de Chern-Simons, tomamos el caso en partícular cuando $\bar{\mathbf{A}} = 0$

$$Q^{(2n+1)}_{A\leftarrow 0} = (n+1)\int_0^1 dt \langle \mathbf{A}(td\mathbf{A} + t^2\mathbf{A})^n \rangle$$

El lagrangiano de **Chern-Simons** en $d = 2n+1$ dimensiones es definido como la función local en presencia de la conexión de gauge $\mathbf{A}$ o cuando $\bar{\mathbf{A}} = 0$

$$\mathcal{L}_{CS}^{(2n+1)} = (n+1)k\int_0^1 dt \langle \mathbf{A}(td\mathbf{A} + t^2\mathbf{A}^2)^n \rangle \tag{2.5.7}$$

Es importante recalcar que las formas de Chern-Simons están definidas de forma local sobre el espacio base y el lagrangiano trangresor esta definido globalmente sobre toda la variedad $\mathcal{M}$. Así, es posible reescribir el lagrangiano transgresor como

$$\mathcal{L}_T^{(2n+1)} = \mathcal{L}_{CS}^{(2n+1)}(\mathbf{A}) - \mathcal{L}_{CS}^{(2n+1)}(\bar{\mathbf{A}}) + kd\mathbf{Q}^{(2n)}_{\mathbf{A}\leftarrow\mathbf{0}\leftarrow\bar{\mathbf{A}}} \tag{2.5.8}$$

Es interesante observar que el término $kd\mathbf{Q}^{(2n+1)}_{\mathbf{A}\leftarrow\mathbf{0}\leftarrow\bar{\mathbf{A}}}$ no contribuye a las ecuaciones de movimiento para las conexiones independientes de $\mathbf{A}$ y $\bar{\mathbf{A}}$ pero, si juega un rol regularizador, el cual, nos asegura la invariancia completa del Lagrangeano.

2.5.3. Formulación del Método

El método de separación de subespacios para el lagrangeano transgresor (2.5.4), consiste en una aplicación iterativa de la identidad triangular

$$\mathbf{Q}^{(2n+1)}_{\mathbf{A}\leftarrow\bar{\mathbf{A}}} = \mathbf{Q}^{(2n+1)}_{\mathbf{A}\leftarrow\tilde{\mathbf{A}}} + \mathbf{Q}^{(2n+1)}_{\tilde{\mathbf{A}}\leftarrow\bar{\mathbf{A}}} + d\mathbf{Q}^{(2n)}_{\mathbf{A}\leftarrow\tilde{\mathbf{A}}\leftarrow\bar{\mathbf{A}}}. \tag{2.5.9}$$

Aquí $\mathbf{Q}^{(2n+1)}_{\mathbf{A}\leftarrow\tilde{\mathbf{A}}\leftarrow\bar{\mathbf{A}}}$ está dada por

$$\mathbf{Q}^{(2n+1)}_{\mathbf{A}\leftarrow\tilde{\mathbf{A}}\leftarrow\bar{\mathbf{A}}} = n(n+1)\int_0^1 dt \int_0^s \langle(\mathbf{A}-\tilde{\mathbf{A}})(\tilde{\mathbf{A}}-\bar{\mathbf{A}})\mathbf{F}_{st}^{n-1}\rangle \tag{2.5.10}$$

donde $\mathbf{F}_{st}^{n-1}$ es la curvatura asociada a la conexión.
Es importante saber que, si bien cada término en el lado derecho de (2.4.20) depende de la conexión $\tilde{\mathbf{A}}$, esta conexión ”intermedia” cobra especial relevancia al analizar propiedades de invariancia de la forma de transgresión. Recordemos que para CS imponemos que $\bar{\mathbf{A}} = 0$

$$\mathbf{Q}^{(2n+1)}_{CS}(\mathbf{A}) = \mathbf{Q}^{(2n+1)}_{\mathbf{A}\leftarrow 0}. \tag{2.5.11}$$

La no preservación de la igualdad $\bar{\mathbf{A}} = 0$ bajo transformaciones de gauge es la raíz de la pseudo-invariancia del lagreangeano de CS. Dado esto, al analizar la curvatura $\mathbf{F}_{\mathbf{st}}$ asociada a la conexión $\mathbf{A}_{st}$, nos da una clara forma de desacoplar las ecuaciones de movimiento, mostrando en efecto la acción puede escribirse como la suma de dos acciones de CS más un término de borde. La presencia de este término de borde es crucial para asegurar la invariancia de la forma de

transgresión, razón por la cual no puede ser ignorado.
Para el método de separación en subespacios puede ser usado para encontrar versiones explícitas de lagrangeanos transgresores en el contexto de teorías de gauge en dimensiones impares y SUGRA en $d = 11$ [veáse [9]].

El método puede ser descrito esquemáticamente por medio de la siguiente serie de pasos (véase Refs. [10]):

1. Identificar los subespacios relevantes presentes en el álgebra de gauge , i.e. escribir $\mathfrak{g}= V_0 \otimes \cdots \otimes V_p$.
2. Escribir las conexiones $\mathbf{A}$ y $\bar{\mathbf{A}}$ como como sumas de trozos valuados en cada uno en un subespacio distinto, $\mathbf{A} = a_0 + \cdots a_p$, $\bar{\mathbf{A}} = \bar{a}_0 + \cdots \bar{a}_p$.
3. Usar la ecuación (2.4.20),

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_0 =& \bar{\mathbf{A}},\\ \mathbf{A}_1 =& a_0 + \cdots a_{p-1},\\ \mathbf{A_2} =& \mathbf{A}.\end{aligned}$$

4. Repetir el paso 3 con la transgresión $\mathbf{Q}_{\mathbf{A}_1 \leftarrow \mathbf{A}_0}$

Como un ejemplo del método, mostraremos a continuación como es posible escribir un lagrangeano transgresor o de Chern-Simons para gravedad [veáse [10]].

2.5.4. Gravedad en Teoría de Transgresión y Chern-Simons.

En esta sección, consideraremos brevemente como puede reobtenerse gravedad a través de las herramientas matemáticas desarrolladas en las secciones anteriores. Para un análisis de la física asociada a gravedad en dimensiones más altas. La gravedad de **Transgresión** y **Chern-Simons** contiene en forma natural altas potencias de la curvatura, por lo que resulta interesante notar en este punto una interesante relación con teoría de cuerdas [18]. En el contexto de teoría de cuerdas, se genera una teoría efectiva para gravedad en $D = 10$, considerando el álgebra en semigrupos abelianos resonante para la teoría M [Veáse Refs. [16**?**][1] [5] [4]].

2.5.5. La Acción de Chern-Simons

El álgebra y el tensor invariante para construir será el álgebra de (A)dS, generada por $\mathbf{J}_{ab}$ y $\mathbf{P}_a$, con las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned}
[\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_b] =& \frac{1}{\ell^2}\mathbf{J}_{ab} \\
[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{P}_c] =& \eta_{cb}\mathbf{P}_a - \eta_{ca}\mathbf{P}_b \\
[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{J}_{cd}] =& \eta_{cb}\mathbf{J}_{ad} - \eta_{ca}\mathbf{J}_{bd} + \eta_{db}\mathbf{J}_{ca} - \eta_{da}\mathbf{J}_{bc}
\end{aligned}$$

la elección del polinomio invariante dado las matrices de Dirac [veáse Refs. [[8]]],

$$\langle \mathbf{J}_{a_1 a_2 \cdots a_{2n-1} a_{2n}} \mathbf{P}_{a_{2n+1}} \rangle = 2^n \varepsilon_{a_1 \cdots a_{2n+1}} \tag{2.5.12}$$

Con las demás componentes igual a 0. Recordemos que el lagrangeano de Chern-Simons se escribe,

$$\mathcal{L}_{CS}^{(2n+1)} = k\mathbf{Q}_{\mathbf{A}\leftarrow\mathbf{0}}^{(2n+1)} \tag{2.5.13}$$

con k una constante adimensional arbitraria. Por otro lado, tenemos que el lagrangeano de Chern-Simons corresponde al lagrangeano de Love-Lock. consideremos las conexiones valuadas en el álgebra

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} =& \omega + \mathbf{e} \\
\bar{\mathbf{A}} =& \bar{\omega} + \bar{\mathbf{e}}
\end{aligned}$$

donde la componentes

$$\begin{aligned}
\omega =& \frac{1}{2}\omega^{ab}\mathbf{J}_{ab} \\
\mathbf{e} =& \mathbf{e}^a\mathbf{P}_a \\
\bar{\omega} =& \frac{1}{2}\bar{\omega}^{ab}\mathbf{J}_{ab} \\
\bar{\mathbf{e}} =& \bar{\mathbf{e}}^a\mathbf{P}_a
\end{aligned}$$

Bajo transformaciones de gauge valuada en el subgrupo de Lorentz, $\mathcal{SO}(2n,1)$, las conexiones de spín ω^{ab} y $\bar{\omega}^{ab}$ transforman como conexión de Lorentz, y $\mathbf{e}^a$, $\bar{\mathbf{e}}^a$ transforma como vector de Lorentz, es decir, lo podemos identificar como *vielbein*.

Para el caso de Chern-Simons, consideremos la conexiones [veáse Refs. [12]]

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_0 =& 0 \\
\mathbf{A}_1 =& \omega \\
\mathbf{A}_2 =& \omega + \mathbf{e}
\end{aligned}
$$

bajo esto, de la identidad triangular (2.4.20) nos queda lo siguiente

$$
\mathcal{L}_{CS}^{(2n+1)}(\omega + \mathbf{e}) = k\mathbf{Q}^{(2n+1)}_{\omega+\mathbf{e}\leftarrow\omega} + k\mathbf{Q}^{(2n+1)}_{\omega\leftarrow 0} + kd\mathbf{Q}^{(2n)}_{\omega+\mathbf{e}\leftarrow\omega\leftarrow 0} \tag{2.5.14}
$$

Veamos que el término $\mathbf{Q}^{(2n+1)}_{\omega\leftarrow 0} = 0$, esto se debe a la forma del tensor invariante contraído con el símbolo de Levi-Civita y como el lagrangeano de Chern-Simons está escrito solamente en términos de borde, podemos escribir lo siguiente

$$
\mathcal{L}_{CS}^{(2n+1)}(\omega + \mathbf{e}) = k\mathbf{Q}^{(2n+1)}_{\omega+\mathbf{e}\leftarrow\omega} \tag{2.5.15}
$$

entonces al desarrollar

$$
\mathbf{Q}^{(2n+1)}_{\omega+\mathbf{e}\leftarrow\omega} = (n+1)\int_0^1 \langle \theta \mathbf{F}_t^n \rangle \tag{2.5.16}
$$

nos va a quedar lo siguiente,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q}^{(2n+1)}_{\omega+\mathbf{e}\leftarrow\omega} =& (n+1)\int_0^1 dt \langle (\omega + \mathbf{e} - \omega)\mathbf{F}_t^n \rangle \\
=& 2^n (n+1)\int_0^1 dt \langle \mathbf{e}\mathbf{F}_t^n \rangle .
\end{aligned}
$$

En general, para dos conexiones $\mathbf{A}$ y $\bar{\mathbf{A}}$, las respectivas curvaturas vienen dada por la identidad

$$
\mathbf{F}_t = \bar{\mathbf{F}} + tD_{\bar{\mathbf{A}}}\theta + \theta^2
$$

con $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{A} - \bar{\mathbf{A}}$. Además, sabemos que para todas las distintas conexiones sobre el espacio-tiempo $\mathbf{A}_t = \bar{\mathbf{A}} + t(\mathbf{A} - \bar{\mathbf{A}})$, entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_t =&\mathcal{D}_t\mathbf{A}_t\\ =&\mathcal{D}(\omega + \mathbf{e} + \boldsymbol{\theta}^2)\\ =&d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega] + t\mathcal{D}_\omega\mathbf{e} + t^2\frac{1}{2}[\mathbf{e},\mathbf{e}]\end{aligned}$$

notemos que aparece $\mathbf{T} = \mathcal{D}_\omega\mathbf{e}$ y $\mathbf{R}^{ab}$, donde es la torsión y la curvatura de Lorentz, respectivamente. Por lo tanto, de manera más compacta, podemos expresar como

$$\mathbf{F}_t = \mathbf{R} + t\mathbf{T} + t^2\mathbf{e}^2 \tag{2.5.17}$$

con las componentes,

$$\begin{aligned}\mathbf{R} =&\frac{1}{2}\mathbf{R}^{ab}\mathbf{J}_{ab},\\ \mathbf{T} =&\mathbf{T}^a\mathbf{P}_a,\\ \mathbf{e}^2 =&\frac{1}{2}\mathbf{e}^a\mathbf{e}^b\mathbf{J}_{ab},\end{aligned}$$

Por otro lado, recordemos que las componentes de la curvatura $R^{ab} = \omega^{ab} + \omega^a{}_c\omega^{cd}$ y la torsión $T^a = de^a + \omega^a{}_b e^b$, por lo tanto, la forma de Chern-Simons, nos queda que

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^{(2n+1)}_{[\omega+\mathbf{e}]\leftarrow\omega} =&2^n(n+1)\int_0^1 dt\langle\mathbf{e}(\mathbf{R} + t\mathbf{T} + t^2\mathbf{e}^2)^n\rangle\\ =&2^n(n+1)\int_0^1 dt\left\langle\mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\mathbf{R}^{ab}\mathbf{J}_{ab} + t\mathbf{T}^e\mathbf{P}_e + t^2\frac{1}{2}\mathbf{e}^c\mathbf{e}^d\mathbf{J}_{cd}\right)^n\right\rangle\end{aligned}$$

dado los polinomios invariantes, nos queda que

$$k\mathbf{Q}^{(2n+1)}_{[\omega+\mathbf{e}]\leftarrow\omega} = 2^n k(n+1)\int_0^1 dt\langle\mathbf{e}(\mathbf{R} + t^2e^2)^n\rangle$$

o de forma más explícita, tenemos que el lagrangeano gravitacional para Chern-Simons

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(2n+1)}_{CS}(\omega + \mathbf{e}) = \frac{k}{\ell^2}(n+1)\int_0^1 & dt\varepsilon_{a_1\cdots a_{2n+1}}(R^{a_1a_2} + t^2e^{a_1a_2})\wedge\cdots\wedge\\ &\wedge\cdots\wedge(R^{a_{2n-1}a_{2n}} + t^2e^{a_{2n-1}a_{2n}})e^{2n+1} + dX^{(2n)}_{CS}\end{aligned}$$

Notemos que tenemos lagrangeano de Gravedad de Lanczos-Lovelock generalizado para $2n+1$ [veáse Refs. [2]]. En este caso, el lagrangeano corresponde a una forma de transgresión, esta es solamente cuasi-invariante bajo transformaciones de gauge. Debido a que $\omega + \mathbf{e}$ no es una conexión e invariante de gauge pero, al contrario, $\mathbf{e}$ si es una conexión. En efecto, haciendo las transformaciones de gauge infinitesimal, para un elemento arbitrario $\lambda \in \mathcal{SO}(2n, 2)$

$$\begin{aligned}\delta(\omega + \mathbf{e}) =&\mathcal{D}_{\omega+\mathbf{e}}(\omega + \mathbf{e})\\ =&-\lambda^{a}{}_{b}e^{b} + D_{\omega}\lambda^{a} + D_{\omega}\lambda^{ab} + e^{a}\lambda^{b} - e^{b}\lambda^{a}\end{aligned}$$

Esta ecuación corresponden a las transformaciones de gauge infinitesimales para $\omega+\mathbf{e}$, pero el término de $\delta\omega = D_{\omega}\lambda^{ab}+e^{a}\lambda^{b}-e^{b}\lambda^{a}$ no corresponde a una transformación de gauge. En consecuencia, estas transformaciones no dejan invariante $\mathbf{Q}^{(2n+1)}_{[\omega+\mathbf{e}]\leftarrow\omega}$. El hecho de que $\mathbf{Q}^{(2n+1)}_{[\omega+\mathbf{e}]\leftarrow\omega}$ sea cuasi-invariante está íntimamente ligado con la forma del tensor invariante. En realidad, seguimos el mismo razonamiento que el teorema de Chern-Weil, la curvatura

$$\left\langle(\mathbf{R} + \mathbf{T} + \mathbf{e}^{2})^{n+1}\right\rangle - \left\langle\mathbf{R}^{n+1}\right\rangle = d\mathbf{Q}^{(2n+1)}_{[\omega+\mathbf{e}]\leftarrow\omega}. \tag{2.5.18}$$

Como vimos anteriormente, $\delta\omega = D_{\omega}\lambda^{ab} + e^{a}\lambda^{b} - e^{b}\lambda^{a}$ no es un invariante de gauge, entonces, $\left\langle\mathbf{R}^{n+1}\right\rangle$ no es invariante. En general la forma $\mathbf{Q}^{(2n+1)}_{[\omega+\mathbf{e}]\leftarrow\omega}$ varía en términos no cerrados. Sin embargo, dada la elección del tensor de invariante $\left\langle\mathbf{R}^{n+1}\right\rangle = 0$. Por lo tanto, tenemos que

$$\left\langle(\mathbf{R} + \mathbf{T} + \mathbf{e}^{2})^{n+1}\right\rangle = d\mathbf{Q}^{(2n+1)}_{[\omega+\mathbf{e}]\leftarrow\omega}. \tag{2.5.19}$$

y dado que $\left\langle(\mathbf{R}+\mathbf{T}+\mathbf{e}^{2})^{n+1}\right\rangle$ es invariante de gauge, $\mathbf{Q}^{(2n+1)}_{[\omega+\mathbf{e}]\leftarrow\omega}$ es cuasi-invariante.

Por otro lado, la acción de *Chern-Simons* nos queda que

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{(2n+1)}_{CS} = \frac{(n+1)k}{\ell^{2}}\int_{M}\int_{0}^{1}\varepsilon_{a_{1}\cdots a_{2n+1}}(R^{a_{1}a_{2}} + t^{2}e^{a_{1}a_{2}}) \wedge \cdots \wedge\\ \wedge \cdots \wedge (R^{a_{2n-1}a_{2n}} + t^{2}e^{a_{2n-1}a_{2n}})e^{2n+1} + \int_{\partial M} X^{(2n)}\end{aligned}$$

Para obtener esta acción consiste en visualizar la forma de CS como un caso particular de objetos formas de transgresión vistos anteriormente. El formalismo del lagrangeano transgresor facilita enormemente la obtención de expresiones invariantes de Lorentz para lagrangeanos gravitacionales de CS, y permite encontrar una forma explícita para el término de borde X_{CS}^{2n}.

2.5.6. Lagrangeano Transgresor Gravitacional

Habíamos visto anteriormente que el lagrangeano transgresor es

$$\mathcal{L}_{\mathcal{T}}^{(2n+1)}(\omega+\mathbf{e},\bar{\omega}) = k\mathbf{Q}_{[\omega+\mathbf{e}]\leftarrow\omega}^{(2n+1)} + k\mathbf{Q}_{\omega\leftarrow\bar{\omega}}^{(2n+1)} + kd\mathbf{Q}_{[\omega+\mathbf{e}]\leftarrow\omega\leftarrow\bar{\omega}}^{(2n+1)} \tag{2.5.20}$$

donde el término $k\mathbf{Q}_{[\omega+\mathbf{e}]\leftarrow\omega}^{(2n+1)}$ corresponde al lagrangeano de Chern-Simons, dada la forma del tensor invariante lo que nos queda es

$$\mathcal{L}_{\mathcal{T}}^{(2n+1)}(\omega+\mathbf{e},\bar{\omega}) = \mathcal{L}_{CS}^{(2n+1)}(\omega+\mathbf{e}) + kd\mathbf{Q}_{[\omega+\mathbf{e}]\leftarrow\omega\leftarrow\bar{\omega}}^{(2n+1)}. \tag{2.5.21}$$

El lagrangeano transgresor y el de Chern-Simons, solo difieren en el término de borde ó una derivada total en el caso particular de CS. El término de borde podemos calcularlo gracias a la formula de homotopía de Cartan, nos queda que para el método de separación de subespacios

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_0 =& \bar{\omega},\\ \mathbf{A}_1 =& \omega,\\ \mathbf{A}_2 =& \omega+\mathbf{e}.\end{aligned}$$

donde el término de borde

$$k\mathbf{Q}_{\omega+\mathbf{e}\leftarrow\omega\leftarrow\bar{\omega}}^{(2n)} = kn(n+1)\int_0^1 dt\int_0^1 ds\big\langle \mathbf{e}\theta\mathbf{F}_{st}^{n-1}\big\rangle \tag{2.5.22}$$

con la interpolación $\theta = \omega - \bar{\omega}$, $\mathbf{F}_{st}$ la curvatura asociada a la conexión $\mathbf{A}_{st} = \bar{\omega} + t\theta + s\mathbf{e}$

$$\mathbf{F}_{st} = \bar{\mathbf{R}} + \mathcal{D}_{\bar{\omega}}(s\mathbf{e}+t\theta) + s^2e^2 + st[\theta,\mathbf{e}] + t^2\theta^2. \tag{2.5.23}$$

Con (2.2.14) en (2.5.22), nos queda que

$$X_{CS}^{2n} = k\mathbf{Q}_{\omega+\mathbf{e}\leftarrow\omega\leftarrow\bar{\omega}}^{(2n)} = kn(n+1)\int_0^1 dt\int_0^1 ds\big\langle \mathbf{e}\theta(\bar{\mathbf{R}} + \mathcal{D}_{\bar{\omega}}t\theta + s^2e^2 + t^2\theta^2)^{n-1}\big\rangle. \tag{2.5.24}$$

Reuniendo los trozos, el lagrangeano transgresor toma la forma

$$\mathcal{L}_{\mathcal{T}}^{(2n+1)} = 2^n k(n+1)\int_0^1 dt\langle \mathbf{e}(\mathbf{R}+t^2e^2)^n\rangle \\ + kn(n+1)\int_0^1 dt\int_0^1 ds\Big\langle \mathbf{e}\theta(\bar{\mathbf{R}}+\mathcal{D}_{\bar{\omega}}t\theta+s^2e^2+t^2\theta^2)^{n-1}\Big\rangle$$

Este lagrangeano corresponde a un lagrangeano de Chern-Simons más un término de borde que incluye un campo dinámico extra en forma de conexión $\bar{\omega}$. Al variar el lagrangeano anterior, tenemos que las ecuaciones de movimiento

$$\Big\langle \mathbf{J}_{ab}(\mathbf{R}-\mathbf{e}^2)^{n-1}\mathbf{T}\Big\rangle = 0$$
$$\Big\langle \mathbf{P}_{a}(\mathbf{R}+\mathbf{e}^2)^{n}\mathbf{T}\Big\rangle = 0$$

La forma más explicíta de las ecuaciones de movimiento, dada la forma del tensor invariante

$$0=\varepsilon_{aba_1\cdots 2n-1}\left(R^{a_1a_2}+\frac{1}{l^2}e^{a_1}e^{a_2}\right)\times\cdots\times\left(R^{a_{2n-3}a_{2n-2}}+\frac{1}{l^2}e^{a_{2n-3}}e^{a_{2n-2}}\right)T^{a_{2n-1}}$$

$$0 \quad = \quad \varepsilon_{aa_1\cdots 2n}\left(R^{a_1a_2}+\frac{1}{l^2}e^{a_1}e^{a_2}\right)\ \times\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \times\ \left(R^{a_{2n-1}a_{2n}}+\frac{1}{l^2}e^{a_{2n-1}}e^{a_{2n}}\right)$$

Dado esto podemos construir una acción generalizada para $2n+1$ dimensiones con un término de borde extra para las conexiones de $\mathcal{S}_{CS}^{(2n+1)}[\omega+\mathbf{e},\bar{\omega}]$

$$\mathcal{S}_{CS}^{(2n+1)}[\omega+\mathbf{e},\bar{\omega}] = k(n+1)\int_{\mathcal{M}}\int_0^1 dt\langle \mathbf{e}(\mathbf{R}+t^2e^2)^n\rangle \\ + kn(n+1)\int_{\partial\mathcal{M}}\int_0^1 dt\int_0^1 ds\Big\langle \mathbf{e}\theta(\bar{\mathbf{R}}+\mathcal{D}_{\bar{\omega}}t\theta+s^2e^2+t^2\theta^2)^{n-1}\Big\rangle.$$

Finalmente, hemos construido la acción de Chern-Simons gravitacional con el término de borde apartir del método separación de sub espacios.

Capítulo 3

Conclusión

En este capítulo final resumimos los resultados principales obtenidos en la Tesis. Las formas de transgresión permiten definir teorías de gauge en dimensiones impares con un funcional de acción completamente invariante bajo transformaciones de gauge. La conexión con los lagrangeanos de CS es analizada en detalle, poniendo énfasis en los aspectos relacionados con la pérdida de la invariancia de gauge. La fórmula extendida de la homotopía de Cartan es utilizada como base para un método de separación en subespacios para lagrangeanos transgresores. El método permite separar un lagrangeano en lagrangeanos parciales para los distintos subespacios del álgebra de gauge. Las identidades involucradas, derivadas de la FEHC, son también de ayuda para clarificar la conexión entre transgresión y CS. En trabajos futuros, esto se puede extender a una generalización de más de 2 conexiones independientes, cuando entramos en el área de la supergravedad de Chern-Simons (SUGRA CS), podemos encontrar números de Grassman evaluados en la variedad espacio-tiempo, lo que implica la existencia de campos fermiónicos.

Bibliografía

[1] Aros, R., Contreras, M., Olea, R., Troncoso, R., and Zanelli, J. (2000). Conserved charges for even dimensional asymptotically AdS gravity theories. *Phys. Rev. D*, 62:044002.

[2] Banados, M., Troncoso, R., and Zanelli, J. (1996). Higher dimensional Chern-Simons supergravity. *Phys. Rev. D*, 54:2605–2611.

[3] Bandos, I. A., de Azcarraga, J. A., Picon, M., and Varela, O. (2005). On the formulation of D = 11 supergravity and the composite nature of its three-form gauge field. *Annals Phys.*, 317:238–279.

[4] de Azcarraga, J. A., Izquierdo, J. M., Picon, M., and Varela, O. (2004). Extensions, expansions, Lie algebra cohomology and enlarged superspaces. *Class. Quant. Grav.*, 21:S1375–1384.

[5] Edelstein, J. D., Hassaine, M., Troncoso, R., and Zanelli, J. (2006). Lie-algebra expansions, Chern-Simons theories and the Einstein-Hilbert Lagrangian. *Phys. Lett. B*, 640:278–284.

[6] Hassaine, M., Troncoso, R., and Zanelli, J. (2004). Poincare invariant gravity with local supersymmetry as a gauge theory for the M-algebra. *Phys. Lett. B*, 596:132–137.

[7] Izaurieta, F. (2006). Tesis doctoral. *Universidad de Concepción.*

[8] Izaurieta, F., Ramirez, R., and Rodriguez, E. (2012). Dirac Matrices for Chern-Simons Gravity. *AIP Conf. Proc.*, 1471:118–123.

[9] Izaurieta, F., Rodriguez, E., and Salgado, P. (2005). On transgression forms and Chern-Simons (super)gravity.

[10] Izaurieta, F., Rodriguez, E., and Salgado, P. (2007). The Extended Cartan homotopy formula and a subspace separation method for Chern-Simons supergravity. *Lett. Math. Phys.*, 80:127–138.

[11] Manes, J., Stora, R., and Zumino, B. (1985). Algebraic Study of Chiral Anomalies. *Commun. Math. Phys.*, 102:157.

[12] Mora, P., Olea, R., Troncoso, R., and Zanelli, J. (2004). Finite action principle for Chern-Simons AdS gravity. *JHEP*, 06:036.

[13] Mora, P., Olea, R., Troncoso, R., and Zanelli, J. (2006). Transgression forms and extensions of Chern-Simons gauge theories. *JHEP*, 02:067.

[14] Nakahara, M. (2017). *Geometry Topology and Physics, Second Editiom.* IOP 2003.

[15] Rubilar, G. (2023). *Teoría General de la Relatividad: Tópicos en Relatividad General.* GitHub - licencia GPL v3.

[16] Troncoso, R. (1996). *Supergravedad en Dimensiones Impares*. PhD thesis, Universidad de Chile.

[17] Zanelli, J. (2000). Chern-Simons gravity: From (2+1)-dimensions to (2n+1)-dimensions. *Braz. J. Phys.*, 30:251–267.

[18] Zanelli, J. (2005). Lecture notes on Chern-Simons (super-)gravities. Second edition (February 2008). In *7th Mexican Workshop on Particles and Fields.*

Apéndice A

A1. Formas Proyectables

Sea la $1-$forma $\mathbb{H}$, debemos de considerar los vectores $(\mathbf{X_1}...\mathbf{X}_q) \in T_pP$ que se satisface la condición de $d_p\mathbb{H} = \mathcal{D}\mathbb{H}$,

$$\begin{aligned}
d_P\mathbb{H}(\mathbf{X}_1 \cdots \mathbf{X}_q) &= d_P\pi^*\mathbf{H}(\mathbf{X}_1 \cdots \mathbf{X}_q) \\
&= \pi^* d_M\mathbf{H}(\mathbf{X}_1 \cdots \mathbf{X}_q) \\
&= d_M\mathbf{H}(\pi^*\mathbf{X}_1 \cdots \pi^*\mathbf{X}_q) \\
&= \pi^* d_M\mathbf{H}(\mathbf{X}_1^h \cdots \mathbf{X}_q^h) \\
&= d_p\mathbb{H}(\mathbf{X}_1^h \cdots \mathbf{X}_q^h) \\
&= d_p\mathbb{H} \circ h(\mathbf{X}_1 \cdots \mathbf{X}_q) \\
&= \mathcal{D}\mathbb{H}(\mathbf{X}_1 \cdots \mathbf{X}_q)
\end{aligned}$$

por lo tanto, verificamos que la expresión

$$d_P\mathbb{H} = \mathcal{D}\mathbb{H}$$

A2. Variación de Lagrangiano Transgresor

Consideremos las transformaciones infinitesimales:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' =& \mathbf{A} + \delta\mathbf{A} \\
\bar{\mathbf{A}} \rightarrow \bar{\mathbf{A}} =& \bar{\mathbf{A}} + \delta\bar{\mathbf{A}}
\end{aligned}
$$

Para $\delta\theta = \delta\mathbf{A} - \delta\bar{\mathbf{A}}$; $\delta\mathbf{A}_t = \delta\bar{\mathbf{A}} + t\delta\theta$. El lagrangeano transgresor varía como

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}^{(2n+1)}_{\mathbf{A}\leftarrow\bar{\mathbf{A}}} =& k(n+1)\int_0^1 dt\delta\langle\theta\mathbf{F}_t^n\rangle \\
=& k(n+1)\left[\int_0^1 dt\langle\delta\theta\mathbf{F}_t^n\rangle + \int_0^1 dt\langle\theta\delta\mathbf{F}_t^n\rangle\right] \\
=& k(n+1)\left[\int_0^1 dt\langle\delta\theta\mathbf{F}_t^n\rangle + \int_0^1 dt\langle\theta\mathbf{F}_t^{n-1}\delta\mathbf{F}_t^n\rangle\right] \\
=& k(n+1)\left[\int_0^1 dt\langle\delta\theta\mathbf{F}_t^n\rangle + \int_0^1 dt\langle\theta\mathcal{D}_t\delta\mathbf{A}_t\mathbf{F}_t^n\rangle\right]
\end{aligned}
$$

Completando la derivada

$$
\langle\theta\mathcal{D}_t\delta\mathbf{A}_t\mathbf{F}_t^{n-1}\rangle = \langle\mathcal{D}_t\theta\delta\mathbf{A}_t\mathbf{F}_t^{n-1}\rangle + d\langle\delta\mathbf{A}_t\theta\mathbf{F}_t^{n-1}\rangle \tag{A2.1}
$$

La identidad de Bianchi: Derivada covariante a lo largo de la curva

$$
\mathcal{D}_t\mathbf{F}_t = 0 \tag{A2.2}
$$

Usando las siguientes identidades:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbf{F}_t =& \mathcal{D}_t\theta \\
\frac{d}{dt}\delta\mathbf{A}_t =& \delta\theta
\end{aligned}
$$

Dada la regla de Leibniz

$$
n\langle\theta\mathcal{D}_t\delta\mathbf{A}_t\mathbf{F}_t^{n-1}\rangle = \frac{d}{dt}\langle\delta\mathbf{A}_t\mathbf{F}_t^n\rangle - \langle\delta\theta\mathbf{F}_t^n\rangle \tag{A2.3}
$$

Al sustituir

$$
n\langle\theta\mathcal{D}_t\delta\mathbf{A}_t\mathbf{F}_t^{n-1}\rangle = \frac{d}{dt}\langle\delta\mathbf{A}_t\mathbf{F}_t\rangle - \langle\delta\theta\mathbf{F}_t^n\rangle + nd\langle\delta\mathbf{A}_t\theta\mathbf{F}_t^{n-1}\rangle \tag{A2.4}
$$

En el lagrangeano transgresor

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}^{(2n+1)}_{\mathbf{A}\leftarrow\bar{\mathbf{A}}} =& k(n+1)\left[\int_0^1 dt\frac{d}{dt}\langle\delta\theta\mathbf{F}_t^n\rangle + \int_0^1 dt\langle\delta\mathbf{A}_t\theta\mathbf{F}_t^{n-1}\rangle\right]\\ =& k(n+1)\left(\langle\delta\mathbf{A}\mathbf{F}\rangle - \langle\delta\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{F}}^n\rangle\right) + n(n+1)d\int_0^1 dt\langle\delta\mathbf{A}_t\theta\mathbf{F}_t^{n-1}\rangle\end{aligned}$$

Donde las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{F}^n\mathbf{G}_A\rangle|_M = 0\\ \langle\bar{\mathbf{F}}^n\mathbf{G}_A\rangle|_M = 0\end{aligned} \tag{A2.5}$$

y las condiciones de borde

$$\int_0^1 dt\langle\delta\mathbf{A}_t\theta\mathbf{F}_t^{n-1}\rangle|_{\partial M} = 0. \tag{A2.6}$$