



**UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA**



CONTROL DE PROTOTIPO DE PLANTA DE PÉNDULO INVERTIDO

POR

Álvaro Vicente Ferdinando Villagra Rolleri

Memoria de Título presentada a la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Concepción para optar al título profesional de Ingeniero(a) Civil Electrónico(a)

Profesor(es) Guía
Alejandro José Rojas Norman

Agosto 2025
Concepción (Chile)

©2025 Álvaro Vicente Ferdinando Villagra Rolleri

©2025 Álvaro Vicente Ferdinando Villagra Rolleri
Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento,
incluyendo la cita bibliográfica del documento.

Agradecimientos

Quiero agradecer profundamente a mi padre y a mi madre, quienes me han apoyado durante toda mi vida de forma incondicional y a quienes debo muchísimo. Gracias a ellos soy la persona que soy. De igual forma, agradezco a mis hermanos quienes han sido ejemplos a seguir.

Agradezco también a mi novia, quien ha estado a mi lado siempre brindándome su apoyo, incluso en los momentos más difíciles.

Dar las gracias a mis amigos y compañeros por siempre tener la mejor disposición, por motivarme y por ayudarme a desconectarme cuando era necesario.

Finalmente, agradezco al gran equipo de académicos y docentes de la Facultad de Ingeniería Eléctrica quienes han sido parte de mi formación y un pilar fundamental en mi vida. En particular al profesor Alejandro Rojas, quien me acompañó en este proceso como guía y mentor, ayudándome inmensamente en el desarrollo de este proyecto.

Resumen

El objetivo de este trabajo es diseñar, implementar y validar de forma experimental estrategias de control para un sistema de péndulo invertido montado sobre un carro móvil. Se abordan los problemas de swing-up y estabilización del movimiento del péndulo.

Para esto, se desarrolló un modelo fenomenológico del sistema mediante dos enfoques: el método de Euler-Lagrange y mediante un análisis de fuerzas basado en las Leyes de Newton. El primero permite un tratamiento desde el punto de vista energético, mientras que el segundo permite una interpretación a partir de las fuerzas involucradas. Ambos métodos entregan el mismo modelo dinámico, demostrando su correcta formulación. Este modelo es linealizado en torno a los puntos de operación estable e inestable, para obtener representaciones del sistema como funciones de transferencia y de espacio de estados.

A partir del modelo, se diseñaron dos estrategias para abordar el problema de swing-up: una basada en el control de energía del péndulo y otra en el control de la posición del carro. Para el problema de estabilización se diseñaron otras dos estrategias: un controlador óptimo Regulador Cuadrático Lineal (LQR) y un esquema basado en controladores PID en cascada.

Cada uno de los controladores diseñados fueron validados utilizando simulaciones en el entorno Simulink de MATLAB y posteriormente implementadas en un prototipo físico diseñado y construido en el laboratorio.

Los resultados experimentales muestran que el controlador por posición para el problema de swing-up y el controlador LQR para el problema de estabilización ofrecen un desempeño superior a las otras estrategias presentadas.

Summary

The objective of this work is to design, implement and experimentally validate control strategies for an inverted pendulum system mounted on a movable cart. This study addresses both the swing-up and stabilization problems of the pendulums motion.

For this purpose, a phenomenological model of the system was developed using two different approaches: the Euler-Lagrange method and a force-based analysis derived from Newton's laws. The first one provides an energy-based formulation, while the second one provides an interpretation based on the acting forces. Both methods result in the same dynamic model, demonstrating its correct formulation. The model was then linearized around both the stable and unstable equilibrium points to obtain system representations in the form of transfer functions and state-space models.

Based on the obtained model, two strategies were developed to solve the swing-up problem: one based on the energy control of the pendulum, and another based on controlling the position of the cart. For the stabilization phase, two additional strategies were designed: an optimal Linear Quadratic Regulator (LQR) and a control scheme based on cascaded PID controllers.

Each of the proposed controllers was validated through simulations in MATLAB's Simulink environment and then implemented on a physical prototype designed and built in the laboratory.

The experimental results show that the position-based swing-up controller and the LQR stabilization controller outperform the other presented strategies.

Tabla de contenidos

Agradecimientos	iii
Resumen	iv
Summary	v
Tabla de contenidos	vi
Lista de tablas	x
Lista de figuras	xi
Nomenclatura	xiii
Abreviaciones	xiv
1. Introducción	1
1.1. Introducción General	1
1.2. Trabajos Previos	2
1.3. Discusión	4
1.4. Hipótesis de Trabajo	7
1.5. Objetivos	7
1.5.1. Objetivo General	7
1.5.2. Objetivos Específicos	7
1.6. Alcances y Limitaciones	8
1.7. Temario y Metodología	8
2. Modelación Fenomenológica del Sistema	9
2.1. Introducción	9
2.2. Análisis dinámico Lagrangiano	9
2.3. Análisis dinámico Newtoniano	12
2.4. Linealización del sistema	14
2.4.1. Linealización del punto de operación estable	14

2.4.2.	Linealización del punto de operación inestable	17
2.5.	Modelación Motor DC	20
2.6.	Representación de Espacio de Estados	21
3.	Prototipo de Planta en Laboratorio	23
3.1.	Introducción.....	23
3.2.	Componentes del prototipo.....	23
3.2.1.	Conjunto Carro-Péndulo	24
3.2.2.	Microcontrolador Mega 2560	25
3.2.3.	Controlador de Motor IBT2	26
3.2.4.	Motor DC RCXAZ TLTAN 35T 550.....	27
3.2.5.	Sensores Encoder 38S6G5-B-G24N.....	28
3.3.	Esquema de conexiones.....	29
4.	Diseño de Controladores	31
4.1.	Introducción.....	31
4.2.	Control de Energía para Movimiento de Swing-Up.....	32
4.3.	Control de Posición para Movimiento de Swing-Up	34
4.4.	Control Estabilizador LQR.....	36
4.5.	Control Estabilizador PID	38
5.	Implementación en Simulink	40
5.1.	Introducción.....	40
5.2.	Descripción de los Modelos de Simulink	40
5.2.1.	Subsistema “Set Point”	42
5.2.2.	Subsistema “SW Energía”	42
5.2.3.	Subsistema “SW Posición”	43
5.2.4.	Subsistema “LQR”.....	44

5.2.5.	Subsistema “PID”	45
5.2.6.	Subsistema “Selector Control”	45
5.2.7.	Subsistema “Planta”	46
5.2.7.1.	Lectura de Sensores.....	47
5.2.7.2.	Control del Actuador.....	48
5.2.7.3.	Subsistema para Simulación	49
6.	Resultados	50
6.1.	Introducción.....	50
6.2.	Metodología de las Pruebas.....	50
6.3.	Resultados de Control de Swing-up	51
6.3.1.	Control por Energía	51
6.3.2.	Control por Posición	53
6.4.	Resultados de Control de Estabilización	54
6.4.1.	Control LQR	54
6.4.2.	Control PID.....	56
6.5.	Resultado de Control Completo Swing-up y Estabilización	61
7.	Conclusiones	62
7.1.	Sumario.....	62
7.2.	Conclusiones.....	62
7.3.	Trabajo Futuro	63
	Referencias	64
	Anexo A. Código MATLAB.....	66
	analisis_fdt.m.....	66
	parametros.m	67
	poleplace_carp.m.....	67

Encoder_arduino.m	68
encoder_arduino.h	70
encoder_arduino.cpp	70

Lista de tablas

Tabla 3.1: Hoja de datos del motor DC RCXAZ TLTAN 35T 550 entregada por el fabricante. .	28
Tabla 3.2: Descripción de los pines del controlador de motor DC.	30
Tabla 6.1: Parámetros de sintonización del controlador de swing-up por energía.....	52
Tabla 6.2: Parámetros de sintonización del controlador de swing-up por posición.	54
Tabla 6.3: Parámetros de sintonización del controlador estabilizador LQR.	56
Tabla 6.4: Parámetros de sintonización del controlador estabilizador PID.....	60

Lista de figuras

Figura 2.1: Diagrama del sistema carro y péndulo.....	9
Figura 2.2: Mapa de polos y ceros, lugar geométrico de las raíces y diagramas de bode de las funciones de transferencia del punto de operación estable.....	16
Figura 2.3: Mapa de polos y ceros, lugar geométrico de las raíces y diagramas de bode de las funciones de transferencia del punto de operación inestable.	18
Figura 3.1: Prototipo físico del sistema carro-péndulo.	23
Figura 3.2: Diagrama en bloques de los componentes del prototipo.	24
Figura 3.3: Imagen de costado del conjunto carro-péndulo.	25
Figura 3.4: Microcontrolador Mega 2560.	25
Figura 3.5: Imagen del controlador de motor IBT2 (izq.) y esquemático del circuito interno (der.).	26
Figura 3.6: Imagen del motor DC RCXAZ TLTAN 35T 550.	27
Figura 3.7: Imagen del encoder incremental 38S6G5-B-G24N.....	28
Figura 3.8: Esquema de conexiones eléctricas de los componentes del prototipo.....	30
Figura 4.1: Diagrama del esquema de control general para problema de swing-up y estabilización.	32
Figura 4.2: Diagrama del control por posición propuesto para el problema de swing-up.	35
Figura 4.3: Casos de conmutación para estrategia de swing-up basada en control de posición. ..	35
Figura 4.4: Diagrama del control LQR propuesto para el problema de estabilización.	36
Figura 4.5: Diagrama del control LQR propuesto para el problema de estabilización.	38
Figura 4.6: Diagrama del control PID propuesto para el problema de estabilización.....	39
Figura 5.1: Estructura general del modelo de Simulink.	41
Figura 5.2: Subsistema “Set Point” del modelo de Simulink.....	42
Figura 5.3: Subsistema “SW Energía” del modelo de Simulink.....	42
Figura 5.4: Subsistema “SW Posición” del modelo de Simulink.....	43
Figura 5.5: Subsistema “LQR” del modelo de Simulink.	44
Figura 5.6: Subsistema “PID” del modelo de Simulink.	45
Figura 5.7: Subsistema “Selector Control” del modelo de Simulink.	46
Figura 5.8: Subsistema “Planta” del modelo de Simulink para control del prototipo.....	47
Figura 5.9: Subsistema “Planta” del modelo de Simulink para realizar simulaciones.....	49
Figura 6.1: Resultados de control de swing-up con controlador por energía.....	51

Figura 6.2: Resultado fallido de control de swing-up con controlador por energía.	52
Figura 6.3: Resultados de control de swing-up con controlador por posición.	53
Figura 6.4: Resultados de control de estabilización con controlador LQR.	55
Figura 6.5: Resultados de control de estabilización con controlador LQR ante perturbación externa.	55
Figura 6.6: Resultados de control de estabilización con controlador PID sin corrección de posición.....	56
Figura 6.7: Resultados de control de estabilización con controlador PID con corrección de posición.....	57
Figura 6.8: Resultados de control de estabilización con controlador PID ante perturbación externa.	57
Figura 6.9: Experimento realizado en el prototipo para identificar sistema de orden reducido....	58
Figura 6.10: Lugar geométrico de las raíces de la función de transferencia discreta identificada.	59
Figura 6.11: Resultados de control de híbrido con LQR y swing-up por posición.	61

Nomenclatura

Escalares

- g : aceleración de gravedad en $\frac{m}{s^2}$.
- M : masa del carro en kg .
- m : masa del péndulo en kg .
- L : longitud del péndulo en m .
- I : momento de inercia del péndulo en $kg \cdot m^2$.
- b : coeficiente de roce asociado al movimiento del carro.
- b_p : coeficiente de roce asociado al movimiento del péndulo.
- x : posición del carro en m .
- \dot{x} : velocidad del carro en $\frac{m}{s}$.
- θ : ángulo del péndulo en rad .
- $\dot{\theta}$: velocidad angular del péndulo $\frac{rad}{s}$.
- i : corriente del motor.
- k_t : constante de torque del motor.
- k_b : constante de fuerza electromotriz del motor.
- R_m : resistencia interna del motor en Ω .
- r : radio de reducción en m .
- r_{es} : radio del engranaje de salida del motor en m .
- r_{red} : radio del engranaje de reducción del motor en m .
- $\dot{\theta}_m$: velocidad angular del eje de salida del motor $\frac{rad}{s}$.
- τ_m : torque generado por el motor en $N \cdot m$.
- K : matriz de ganancias del controlador LQR.
- Q : matriz de ponderación de estados del controlador LQR.
- R : ponderación del esfuerzo de control del controlador LQR.

Abreviaciones

Mayúsculas

- A : amperaje en Ampere.
V : voltaje en Volt.
Hz : frecuencia en Hertz.
N : fuerza en Newton.
T : energía cinética.
V : energía potencial.
E : energía.
PID : proporcional integral derivativo.
SISO : single input single output (sistema de una entrada y una salida).
DCL : diagrama de cuerpo libre.
PWM : pulse width modulation (modulación por ancho de pulso).

Minúsculas

- cm : centímetros.
m : metros.
s : segundos.
kg : kilogramos
mA : miliamperios.
rev : revolución.
ppr : pulsos por revolución.
rad : radianes.
 Ω : resistencia en ohm.

1. Introducción

1.1. Introducción General

En el proceso de formación de un ingeniero, la comprensión de los sistemas dinámicos, y en particular aquellos de naturaleza inestable, representa un desafío y oportunidad fundamental para aplicar conocimientos de modelado, simulación y control. En este contexto, el péndulo invertido se destaca como una plataforma de pruebas ampliamente utilizada en el ámbito de la enseñanza y la investigación debido a las características del sistema y su naturaleza inherentemente inestable. Su estudio no solo permite reforzar conceptos fundamentales de la teoría de sistemas dinámicos y de la teoría de control, sino también explorar y evaluar soluciones prácticas mediante la implementación de controladores en plataformas físicas.

El análisis y control del péndulo invertido es importante dado que tiene aplicaciones directas en el desarrollo de tecnologías avanzadas como lo son los robots bípedos, vehículos autónomos y mecanismos de estabilización de cohetes que utilizan principios similares para mantener la estabilidad en el sistema. Las técnicas y algoritmos empleados en los sistemas mencionados están estrechamente relacionados con aquellos utilizados para mantener al péndulo en su posición invertida, de esta forma, el péndulo invertido representa una base de estudio simple pero valiosa para luego enfrentar desafíos que por su naturaleza son más complejos de prototipar en áreas de la robótica, automatización y la industria aeroespacial.

Si bien se han desarrollado extensas herramientas de simulación avanzada, la implementación física de un sistema sigue siendo una etapa crítica para evaluar el comportamiento real de un sistema y evidenciar errores de modelado y restricciones propias del hardware. Con esta premisa, la construcción de un prototipo de una planta de péndulo invertido adquiere especial relevancia para integrar todos los conocimientos de la teoría y la práctica.

Dada la importancia de contar con plataformas experimentales que permitan contrastar la teoría con la práctica, este proyecto busca desarrollar una herramienta didáctica de fácil acceso que contribuya tanto a la enseñanza como a la investigación en el área del control automático, consolidando en el camino conocimientos teóricos y prácticos, y promoviendo soluciones creativas frente a sistemas dinámicos complejos.

1.2. Trabajos Previos

K. Stimac, "Standup and Stabilization of the Inverted Pendulum", Bachelor dissertation, Dept. Mech. Eng., MIT, Cambridge, MA, 1999. [1]

En este trabajo se plantea una solución completa al control de un péndulo invertido con carro móvil, detallando el proceso desde el modelado con el método de Lagrange, linealización del sistema y diseño de los controladores la representación de espacio de estados. El autor diseña dos rutinas, una para elevar el péndulo (swing-up) basada en un enfoque de energía y otra para estabilizarlo utilizando un controlador de realimentación de estados, también describe una estrategia para cambiar entre las dos rutinas. La implementación física la realiza con Simulink y una tarjeta dSPACE para comunicar señales con su prototipo de planta.

K. Sultan, "Inverted Pendulum, Analysis, Design and Implementation", MATLAB Central File Exchange, July 25 2003. Available: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/3790-inverted-pendulum> [2]

En este artículo se describe un enfoque de control clásico para el sistema de péndulo invertido simple basado en un PID. Se comienza con el modelado del sistema que se desarrolla a partir de un diagrama de cuerpo libre, y se detalla el proceso de control hasta la implementación con componentes reales. El autor diseña un PID analógico con amplificadores operacionales. También muestra una metodología para realizar una compensación en lazo cerrado utilizando SISO Design Tool de MATLAB.

S. Nundrakwang, T. Benjanarasuth, J. Ngamwiwit and N. Komine, "Hybrid Controller for Swinging up Inverted Pendulum System," *2005 5th International Conference on Information Communications & Signal Processing*, Bangkok, Thailand, pp. 488-492, 2005. [8]

En este trabajo se aborda tanto el problema de swing-up como el de estabilización del péndulo invertido, para esto se propone el uso de un controlador híbrido que consta de un controlador PD para el movimiento de swing-up y un controlador LQR para la estabilización. Los autores detallan el proceso de diseño de cada controlador, como también de la condición de cambio de uno a otro. El controlador PD controla la posición del carro y mediante una secuencia de movimientos predefinidos hace al péndulo oscilar cada vez con más energía hasta acercarse a su estado inestable donde el controlador de estado entra en acción. El diseño del controlador PD tiene la limitante de que fue

sintonizada en base a prueba y error, al igual que la trayectoria predefinida. En sus resultados experimentales se evidencia que la estrategia utilizada funciona correctamente.

K.J. Åström, K. Furuta, "Swinging up a pendulum by energy control," *Automatica*, Volume 36, Issue 2, 2000, Pages 287-295. [12]

En este artículo se introduce el enfoque del control por energía para resolver el problema de swing-up. Este trabajo ha sido ampliamente citado en la literatura y presenta un análisis profundo de la dinámica del sistema, estableciendo criterios para aumentar de forma arbitraria la energía presente en el sistema y hacer al péndulo oscilar a partir de su posición estable. Este enfoque energético difiere de las metodologías clásicas que buscan controlar la posición y el ángulo de forma directa, ya que se basa en modificar el nivel de energía total del sistema a través de la entrada de fuerza del sistema, sin requerir la linealización del modelo. El artículo no explora el control para estabilizar el péndulo en su posición inestable, sino que únicamente el control para llevarlo a esa posición.

S. Sehgal and S. Tiwari, "LQR control for stabilizing triple link inverted pendulum system," *2012 2nd International Conference on Power, Control and Embedded Systems*, Allahabad, India, pp. 1-5, 2012. [14]

En este trabajo se aborda el problema de la estabilización del triple péndulo invertido (TIPS) con carro móvil, para esto se propone un controlador de estado LQR. A pesar de que el sistema que se estudia es de dinámicas más complejas que el péndulo invertido simple, la metodología que utilizan para modelar el sistema y diseñar el controlador sirve como referencia dado que presentan en detalle los criterios de diseño utilizados. Los resultados demuestran que el controlador propuesto es exitoso con un pequeño tiempo de asentamiento, sin embargo, el alcance de su estudio se limita a simulaciones en MATLAB.

1.3. Discusión

El péndulo invertido es un sistema dinámico clásico y extensamente estudiado por sus complejidad y características en el ámbito de la teoría de control en ingeniería. Fundamentalmente, el péndulo es un sistema mecánico que consiste en una masa suspendida de un punto pivote que oscila producto una fuerza externa aplicada y la acción de la fuerza de gravedad. El control de este sistema consiste en desarrollar algoritmos que permitan equilibrar al péndulo en una posición invertida, la cual corresponde a una posición inestable del sistema, esto implica que sin una acción externa el sistema tiende siempre a no mantener aquel estado. Las rutinas de control a diseñar tienen en consideración dos aspectos del problema, el posicionamiento controlado del péndulo desde su posición natural hasta la posición invertida inestable (movimiento *swing-up*) analizado en [11], y la estabilización del péndulo en esta última posición, equilibrando el péndulo frente a perturbaciones.

En la literatura, este sistema puede verse configurado de distintas maneras, lo que varía en gran medida sus propiedades y en particular, el enfoque y tipo de la propuesta de control. En el sistema de péndulo invertido con carro móvil (CIP), el péndulo pivota sobre un eje montado en un carro que se desplaza linealmente en un eje. En contraste, el sistema de péndulo invertido rotacional (RIP en la literatura) en [10,11] consiste en un péndulo que pivota unido a un brazo que se mueve en un plano horizontal como consecuencia de la aplicación de un torque. También, basadas en estas dos configuraciones existen sistemas de péndulos invertidos múltiples, como el doble en [13] o triple péndulo invertido (TIP) en [14], donde en el extremo de un péndulo se agrega el pivote para el siguiente. En estos sistemas las dinámicas son considerablemente más complejas debido al mayor número de grados de libertad. También, existe también el péndulo invertido flexible en [16] donde la barra que sujeta la masa presenta propiedades elásticas que introduce nuevos movimientos y dinámicas al problema. Por último, en [18] se explora el control de un péndulo mediante el accionamiento de un volante de reacción que permite cambiar el momento angular del péndulo mediante su giro, el estudio de esta configuración es especialmente interesante para el rechazo de perturbaciones en naves espaciales.

Independiente de la configuración de sistema de péndulo que se utilice el problema tiene características definidas en todas sus variaciones. El sistema es altamente no lineal, por la naturaleza del movimiento oscilatorio del péndulo, las ecuaciones del movimiento contienen términos trigonométricos en fuerzas y momentos. Si bien es posible linealizar los modelos para obtener una versión simplificada, la validez del modelo resultante será únicamente en un rango de movimiento limitado. También es un problema multivariable, las variables de estados presentan términos como

posición, velocidad, y sus contrapartes angulares. Es especialmente difícil trabajar con esta multi variabilidad dado el alto nivel de acoplamiento dinámico entre las variables. Se considera también que el sistema es subactuado, es decir que hay menos actuadores que variables a controlar, lo que implica que el control directo de cada variable de estado no es posible. Por último, el sistema es inherentemente inestable en la zona que se trabaja, lo que implica que, sin un control adecuado cualquier perturbación hará que el sistema decaiga a su posición estable.

Existe una metodología general de solución al problema del control del péndulo invertido la cual consta de tres grandes pasos: modelado del sistema, diseño del controlador y validación de la propuesta de control.

El modelado del sistema es un proceso fundamental que permite un mejor entendimiento del comportamiento dinámico del sistema, la propuesta de control a realizar esta altamente ligada a la información que se pueda extraer en este paso. Los métodos utilizados generalmente para modelar al sistema de forma fenomenológica son: los diagramas de cuerpo libre y el método de Euler-Lagrange. Por una parte, los diagramas de cuerpo libre se reservan para las configuraciones más simples como CIP o RIP de un solo péndulo. En este enfoque se utiliza el diagrama para determinar las fuerzas y momentos que actúan sobre los elementos del sistema. A partir de esto y de la segunda ley de Newton es posible generar equivalencias de fuerzas que dan paso a las ecuaciones de movimiento del sistema. Por otra parte, el método de Euler-Lagrange está basado en los principios de energía del sistema. Para este enfoque se busca en una primera instancia expresiones para la energía cinética y energía potencial del sistema, lo que permite en una segunda instancia reemplazar en la ecuación Lagrangiana y obtener las ecuaciones del movimiento. Al ser este último método un tanto más abstracto que el enfoque de fuerzas, suele utilizarse más comúnmente para las configuraciones de múltiples péndulos o de péndulo flexible. Para el caso del péndulo invertido flexible son necesarias herramientas adicionales para su modelado, por ejemplo, ecuaciones que modelen el comportamiento de resortes u otros elementos elásticos; en particular en [16] se utiliza la ecuación de Rayleigh para modelar el soporte flexible como un conjunto de resortes que sujetan a la masa. Esta etapa suele concluir con una etapa de simulación del sistema para validar las ecuaciones obtenidas.

El diseño y propuesta del controlador está ligado a las características del sistema en particular y también a los objetivos de control que sean impuestos. En algunos casos [4,5,6] solo se busca controlar el péndulo una vez que ya está en su posición invertida. Mientras que en otros casos [8,10] se busca controlar el movimiento de swing-up, como también el equilibrio en la posición invertida. Esto da paso a propuestas de controladores híbridos en donde actúe uno en la primera parte y luego se

transiciones a otro tipo de controlador, lo que permite tener un mejor desempeño. Definir los objetivos de control de antemano permite proponer concretamente el uso de un controlador clásico, alguno más avanzado o alguna combinación de controladores híbridos. Es necesario tener presente que la mayoría de los controladores necesitan ser sintonizados, este proceso puede realizarse con métodos de prueba y error, como también resolviendo problemas de optimización.

La validación de la solución propuesta es el último paso de la resolución del problema. En la mayoría de los casos esto se hace utilizando softwares de cálculo matemático como MATLAB y Simulink antes de pasar a un entorno real. Las simulaciones son una herramienta importante dado que permite probar el desempeño del controlador en diferentes escenarios como perturbaciones externas, cambios en los parámetros del modelo o probar para condiciones iniciales específicas.

Los enfoques de control más utilizados en la bibliografía se pueden resumir como controladores clásicos (PID y LQR), controladores avanzados (SMC y basados en energía), controladores difusos, controladores basados en datos (ANN) y métodos de controladores híbridos. Los controladores clásicos PID que son analizados en son efectivos para estabilizar sistemas linealizados, sin embargo, sufren ante las altas no linealidades e incertidumbres del sistema. Frente a esto suele proponerse el LQR que mediante una retroalimentación de estado completo mejora en gran medida la estabilidad del sistema siendo necesario un modelo dinámico preciso del sistema. Algunos controladores avanzados como SMC son comparados con los métodos clásicos ya mencionados en [10] y demuestran una mayor robustez frente a las perturbaciones, esto a cambio de vibraciones indeseadas las cuales deben ser manejadas de forma aparte. Investigaciones recientes abordan este problema, por ejemplo en [21], se comparan tanto en simulación como en un prototipo experimental distintas variables de controladores SMC para suavizar la acción de control, logrando reducir significativamente el efecto de las vibraciones en los resultados. En cuanto al control difuso estudiado en [4,13] se observa que los de tipo 1 manejan de mejor forma las no linealidades en comparación a los controladores clásicos, sin embargo, siguen viéndose afectados por la incertidumbre del sistema. Se demuestra en [13] que un controlador difuso intervalar de tipo 2 tiene un mejor comportamiento frente a los de tipo 1. Una estrategia más actual explorada en [20] busca combinar estas estrategias, utiliza un controlador LQR para generar datos de entrenamiento a una red neuronal la cual es integrada luego con un controlador difuso en cascada, resultando en mayor estabilidad y robustez en el control del péndulo. Otras alternativas como las exploradas en [6,7,9] proponen controladores basados en datos, los cuales son útiles cuando los modelos no están disponibles o no son de buena calidad, esto a cambio de procesamiento computacional intensivo y altos tiempos de entrenamiento. Finalmente, un

controlador híbrido es propuesto en [8] donde se utiliza una combinación de controlador PD para swing-up y LQR para la estabilización, esto permite aprovechar las fortalezas de ambos enfoques, sin embargo, es necesario tener especial cuidado con la implementación del cambio de uno a otro para garantizar una transición estable, algo que se estudia en [11]. Un enfoque más moderno a la transición de controladores se estudia en [19], en donde buscan optimizar matemáticamente las ganancias de control como los ángulos de conmutación, sin embargo, demuestran que el enfoque más complejo no muestra necesariamente mejores resultados en la implementación.

1.4. Hipótesis de Trabajo

En este trabajo se plantea que es posible desarrollar e implementar controladores basados en estrategias de control de energía, posición, LQR y PID que permitan resolver los problemas de swing-up y estabilización en una planta experimental de desarrollo propio de péndulo invertido con carro móvil.

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo General

Investigar, diseñar, implementar y comparar estrategias de control para la resolución del problema de swing-up y estabilización de un sistema de péndulo invertido con carro móvil, utilizando controladores basados en energía y posición para el swing-up, y controladores LQR y PID para la estabilización.

1.5.2. Objetivos Específicos

1. Desarrollar un modelo matemático del sistema utilizando dos enfoques fenomenológicos, diagrama de cuerpo libre (DCL) y ecuación de Euler-Lagrange (E-L).
2. Diseñar y validar controladores.
3. Implementar lazos de control en planta y evaluar su desempeño utilizando métricas definidas tales como: tiempo de asentamiento, robustez ante perturbaciones, requerimiento de desplazamiento del carro y suavidad en la señal de control con el fin de identificar limitaciones y estrategias de mejora.

1.6. Alcances y Limitaciones

Se realizará un estudio comparativo entre dos controladores para cada problema, de swing-up y de estabilización, en un sistema de péndulo simple invertido con carro móvil.

La implementación será realizada en el ambiente de trabajo Simulink de MATLAB.

Se utilizarán diversos métodos para medir el desempeño de los controladores y se validarán las estrategias diseñadas y las simulaciones realizadas de forma experimental en la planta diseñada en el laboratorio.

Se realizará un exhaustivo análisis de los resultados obtenidos con el fin de identificar fortalezas y aspectos de mejora en el trabajo realizado.

1.7. Temario y Metodología

El trabajo realizado se presenta en este informe en una estructura de siete capítulos. En el Capítulo 1 se establece la base teórica del proyecto como también los objetivos y alcances. En el Capítulo 2 se realiza el modelado dinámico del sistema utilizando los métodos de Lagrange y de Newton, luego se obtienen versiones linealizadas. En el Capítulo 3 se describe la implementación física del prototipo y sus características, detallando los componentes utilizados. En el Capítulo 4 se aborda el diseño de los controladores para la etapa de swing-up y de estabilización. En el Capítulo 5 se presenta el funcionamiento y la implementación de los controladores realizada en Simulink. En el Capítulo 6 se exponen los resultados obtenidos de la implementación de los controladores. Finalmente, en el Capítulo 7 se presentan las conclusiones del trabajo y líneas de trabajo futuro.

2. Modelación Fenomenológica del Sistema

2.1. Introducción

Para el desarrollo de este trabajo, resulta fundamental contar con un modelo matemático que describa con precisión las dinámicas del sistema del péndulo en carro móvil. En esta sección se presentan dos metodologías para la obtención de un modelo: el enfoque basado en energías, mediante la formulación de la Ecuación de Lagrange, y el enfoque basado en fuerzas, utilizando las Leyes de Newton. El uso de dos enfoques distintos permite validar la formulación del modelo, reforzando su consistencia y confiabilidad. El resultado en ambos casos es un mismo modelo no lineal, el cual es posteriormente linealizado en torno a dos puntos de operación. Por último, se obtiene la representación del sistema en espacio de estados, considerando su punto de operación inestable.

2.2. Análisis dinámico Lagrangiano

El método de Lagrange es una herramienta analítica que permite obtener las ecuaciones de movimiento de un sistema físico a partir del análisis de las energías que gobiernan al sistema. El procedimiento inicia determinando un sistema de coordenadas generalizadas, correspondientes a las variables mínimas necesarias para describir por completo el estado del sistema. Luego se determinan la energía cinética y potencial del sistema, con las cuales se construye el Lagrangiano como la diferencia entre ambas. Finalmente se derivan las ecuaciones del movimiento aplicando la ecuación de Lagrange para cada coordenada generalizada, incorporando si corresponde, las fuerzas generalizadas externas aplicadas al sistema.

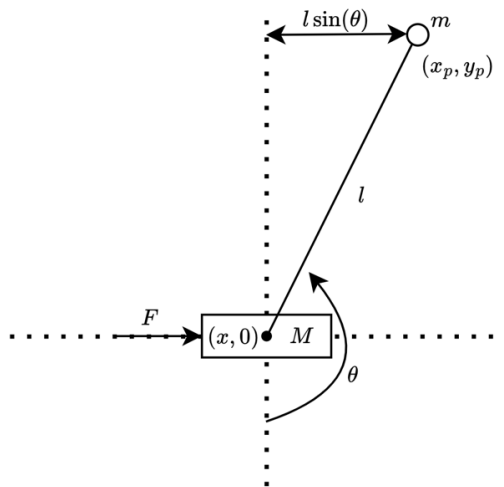


Figura 2.1: Diagrama del sistema carro y péndulo.

El sistema tiene dos grados de libertad, por lo que puede ser descrito utilizando dos coordenadas generalizadas. Para este análisis se escoge la posición horizontal del carro x y el ángulo del péndulo con respecto a la vertical θ . La dirección positiva de la posición del carro es hacia la derecha, mientras que la dirección positiva del ángulo del péndulo es en sentido antihorario.

$$\xi_i = x, \theta \quad (2.1)$$

La energía cinética total del sistema es la suma de la energía cinética del carro, del movimiento traslacional del péndulo y de su movimiento rotacional. La energía cinética del carro se obtiene a partir de la masa y su velocidad en la Ecuación (2.2).

$$T_{carro} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \quad (2.2)$$

La energía traslacional del péndulo se obtiene a partir de su masa y las componentes de velocidad, para esto se expresa en la Ecuación (3.3) su posición en el espacio.

$$\begin{cases} x_p = x + l \sin(\theta) \\ y_p = -l \cos(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_p = \dot{x} + l \cos(\theta) \dot{\theta} \\ \dot{y}_p = l \sin(\theta) \dot{\theta} \end{cases} \quad (2.3)$$

Por tanto, la energía cinética de traslación del péndulo es expresada como se observa en la Ecuación (2.4) y luego al desarrollar utilizando (2.3) se obtiene (2.5).

$$T_{tras.pend.} = \frac{1}{2} m (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2) \quad (2.4)$$

$$T_{tras.pend.} = \frac{1}{2} m [\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\cos(\theta)\dot{\theta} + l^2\dot{\theta}^2] \quad (2.5)$$

La energía cinética rotacional del péndulo se obtiene a partir de su momento de inercia alrededor del centro de masa I , y su velocidad angular, como se observa en la Ecuación (2.6).

$$T_{rot.pend.} = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \quad (2.6)$$

De esta forma, la energía cinética total del sistema se obtiene de la suma de las Ecuaciones (2.2), (2.5) y (2.6).

$$T = T_{carro} + T_{rot.pend.} + T_{tras.pend.} \quad (2.7)$$

$$T = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + ml \dot{x} \cos(\theta) \dot{\theta} + \frac{1}{2} (I + ml^2) \dot{\theta}^2 \quad (2.8)$$

La energía potencial del sistema se obtiene considerando la posición vertical del péndulo, definida en la Ecuación (2.3), su masa y la aceleración de gravedad.

$$V = -mgl \cos(\theta) \quad (2.9)$$

Utilizando las expresiones de energía cinética del sistema, Ecuación (2.8), y la de energía potencial, Ecuación (2.9), se define el Lagrangiano del sistema a partir de la resta como se muestra en la Ecuación (2.10).

$$L = T - V \quad (2.10)$$

$$L = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + ml\dot{x}\cos(\theta)\dot{\theta} + \frac{1}{2}(I + ml^2)\dot{\theta}^2 + mgl\cos(\theta) \quad (2.11)$$

Las ecuaciones del movimiento se obtienen a partir de la ecuación de Lagrange, de la Ecuación (2.12), para cada coordenada generalizada, donde Q_i representa las fuerzas generalizadas como la fuerza aplicada al carro y los momentos disipativos del roce.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_i} = Q_i \quad (2.12)$$

Para la primera coordenada generalizada x , se tiene la ecuación de Lagrange en (2.13).

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = Q_x \quad (2.13)$$

Utilizando la Ecuación (2.11) y sustituyendo en (2.13) se obtiene (2.15), la cual corresponde a la primera ecuación de movimiento del sistema.

$$\frac{d}{dt}\left((M + m)\dot{x} + ml\cos(\theta)\dot{\theta}\right) - 0 = F - b\dot{x} \quad (2.14)$$

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) + b\dot{x} = F \quad (2.15)$$

Para la segunda coordenada generalizada θ , se obtiene la ecuación de Lagrange en (2.16).

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_\theta \quad (2.16)$$

Nuevamente al utilizar la Ecuación (2.11) y sustituyendo en (2.16) se obtiene (2.18), la cual corresponde a la segunda ecuación de movimiento del sistema.

$$\frac{d}{dt}(ml\dot{x}\cos(\theta) + (I + ml^2)\dot{\theta}) - (-ml\dot{x}\dot{\theta}\sin(\theta) - mgl\sin(\theta)) = -b_p\dot{\theta} \quad (2.17)$$

$$ml\ddot{x}\cos(\theta) + (I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl\sin(\theta) + b_p\dot{\theta} = 0 \quad (2.18)$$

Las Ecuaciones (2.15) y (2.18) en el sistema (2.19) representan el modelo que describe el movimiento completo del sistema, donde se evidencia la no linealidad del sistema, dado que incluye términos de senos y cosenos en una de sus variables. También es posible apreciar el acoplamiento de las variables de posición y ángulo, dado que ambas ecuaciones las involucran.

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) + b\dot{x} = F \\ ml\ddot{x}\cos(\theta) + (I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl\sin(\theta) + b_p\dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

2.3. Análisis dinámico Newtoniano

En contraste al método de análisis dinámico de Lagrange, es posible desarrollar un modelo dinámico del sistema de péndulo invertido sobre carro móvil utilizando las leyes de Newton, es decir, con un enfoque basado en las fuerzas y torques que actúan en el sistema.

La Ecuación (2.20) describe las fuerzas que actúan sobre el carro, esta tiene cuatro componentes. $M\ddot{x}$ corresponde a la fuerza inercial debido a su masa y aceleración, $b\dot{x}$ es la fuerza de roce que se opone al movimiento del carro determinada por una constante y la velocidad del carro, N es la fuerza horizontal que genera el péndulo sobre el carro producto de su rotación y F es la fuerza aplicada al carro de forma externa.

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + N = F \quad (2.20)$$

Para calcular la fuerza horizontal N que ejerce el péndulo sobre el carro se deben considerar el momento de fuerza τ y la fuerza centrípeta F_c . Ambos elementos están determinados por la masa y la longitud como también por la velocidad y aceleración angular del péndulo. Estas fuerzas se determinan en las Ecuaciones (2.21) y (2.22).

$$\tau = r \times F_m = l\ddot{\theta} \Rightarrow F_m = \frac{l\ddot{\theta}}{r} = \frac{ml^2\ddot{\theta}}{l} = ml\ddot{\theta} \quad (2.21)$$

$$F_c = \frac{l\dot{\theta}^2}{r} = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{l} = ml\dot{\theta}^2 \quad (2.22)$$

Los componentes de estas fuerzas en el eje x , F_{m_x} y F_{c_x} , se obtienen al descomponer utilizando identidades trigonométricas. N es la suma de los efectos de ambos componentes, como se expresa en la Ecuación (2.23).

$$N = F_{m_x} + F_{c_x} = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \quad (2.23)$$

La primera ecuación de movimiento del sistema se obtiene al reemplazar la Ecuación (2.23) en (2.20) como se observa en (2.24). Al factorizar se obtiene la Ecuación (2.25).

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) = F \quad (2.24)$$

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) = F \quad (2.25)$$

La Ecuación (2.26) describe la suma de torques alrededor del pivote. En el lado izquierdo se encuentran tres términos, τ_g corresponde al torque generado por la acción de gravedad, τ_f al torque de fricción en el pivote y τ_{ext} al torque generado a partir de la fuerza externa. La suma es igual al torque total del péndulo calculado en base a su momento de inercia y aceleración angular.

$$\sum \tau = (I + ml^2)\ddot{\theta} \quad (2.26)$$

$$\tau_g + \tau_f + \tau_{ext} = (I + ml^2)\ddot{\theta} \quad (2.27)$$

Si se determina la expresión para cada torque, se tiene que:

$$-mgl\sin(\theta) - b_p\dot{\theta} - ml\ddot{x}\cos(\theta) = (I + ml^2)\ddot{\theta} \quad (2.28)$$

Reordenando y agrupando (2.25) y (2.28) se observa en (2.30) el modelo que engloba el movimiento del carro y del péndulo del sistema.

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cdot \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \cdot \sin \theta + b\dot{x} = F \\ ml\ddot{x} \cos(\theta) + (I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl\sin(\theta) + b_p\dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

Comparando el modelo obtenido a partir del análisis newtoniano (2.30) y el obtenido a partir del análisis Lagrangiano (2.19) se observa que son idénticos, e implica que ambos enfoques físicos son consistentes. A pesar de que ambos métodos comiencen de un enfoque distinto, de energías o fuerzas, convergen al mismo conjunto de ecuaciones que describen el movimiento del sistema. De esta forma, es posible utilizar el análisis más conveniente con la certeza de tener coherencia física y matemática en el resultado final.

2.4. Linealización del sistema

El modelo dinámico obtenido es no lineal, dado que contiene términos trigonométricos y productos en sus variables. Para aplicar estrategias de control es necesario linealizar el modelo alrededor de un punto de operación. El sistema en cuestión tiene dos: cuando $\theta = 0$ el péndulo cuelga hacia abajo y representa la posición estable, y cuando $\theta = \pi$ el péndulo se encuentra en su posición vertical invertida y representa la posición inestable. Para esto, se considera una pequeña variación ε del ángulo θ alrededor del punto de operación θ_0 .

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon \quad (2.31)$$

$$\dot{\theta} = \dot{\varepsilon} \quad (2.32)$$

Utilizando la Serie de Taylor es posible aproximar funciones como se muestra en la Ecuación (2.33). También se desprecian los términos de mayor orden.

$$f(\theta) \approx f(\theta_0) + \varepsilon \frac{df}{d\theta} \quad (2.33)$$

$$\varepsilon^2 \approx 0 \quad (2.34)$$

2.4.1. Linealización del punto de operación estable

Para $\theta = 0$ se pueden aproximar las funciones trigonométricas utilizando la Ecuación (2.33) como se muestra en (2.35).

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \cos(0) + \theta(-\sin(0)) \approx 1 \\ \sin(\theta) &= \sin(0) + \theta(\cos(0)) \approx \theta \end{aligned} \quad (2.35)$$

Si se sustituyen estos resultados en el sistema de ecuaciones de (2.31) y se desprecian los términos de mayor orden, se obtiene el sistema de la Ecuación (2.36).

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} + b\dot{x} = F \\ ml\ddot{x} + (I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl\theta + b_p\dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

Luego se aplica la transformada de Laplace al sistema resultante de la Ecuación (2.37).

$$\begin{cases} (M + m)s^2X(s) + mls^2\theta(s) + bsX(s) = F(s) \\ mls^2X(s) + (I + ml^2)s^2\theta(s) + mgl\theta(s) + b_p s\theta(s) = 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

Para obtener la función de transferencia del ángulo θ se despeja $X(s)$ de la primera ecuación (2.38) y se sustituye en la segunda (2.39).

$$X(s) = \frac{F(s) - mls^2\theta(s)}{(M + m)s^2 + bs} \quad (2.38)$$

$$mls^2 \left\{ \frac{F(s) - mls^2\theta(s)}{(M + m)s^2 + bs} \right\} + (I + ml^2)s^2\theta(s) + mgl\theta(s) + b_p s\theta(s) = 0 \quad (2.39)$$

Reordenando la expresión se obtiene la función de transferencia de tercer orden.

$$\frac{\Theta(s)}{F(s)} = \frac{-m l s}{\{(I + m l^2)(M + m) - m^2 l^2\} s^3 + \{b(I + m l^2) + b_p(M + m)\} s^2 + \{m g l(M + m) + b_p b\} s + \{m g l b\}} \quad (2.40)$$

Para obtener la función de transferencia de la posición del carro x se despeja $\Theta(s)$ de la segunda ecuación (2.41) y se sustituye en la primera (2.42).

$$\Theta(s) = \frac{-m l s^2 X(s)}{(I + m l^2) s^2 + m g l + b_p s} \quad (2.41)$$

$$(M + m) s^2 X(s) + m l s^2 \left\{ \frac{-m l s^2 X(s)}{(I + m l^2) s^2 + m g l + b_p s} \right\} + b s X(s) = F(s) \quad (2.42)$$

Reordenando la expresión se obtiene la función de transferencia de cuarto orden.

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{(I + m l^2) s^2 + (b_p) s + m g l}{\{(I + m l^2)(M + m) - m^2 l^2\} s^4 + \{b(I + m l^2) + b_p(M + m)\} s^3 + \{m g l(M + m) + b_p b\} s^2 + \{m g l b\} s} \quad (2.43)$$

El mapa de polos y ceros, lugar geométrico de raíces y diagrama de bode de las funciones de transferencia de las Ecuaciones (2.40) y (2.43) se muestran en la Figura 2.2.

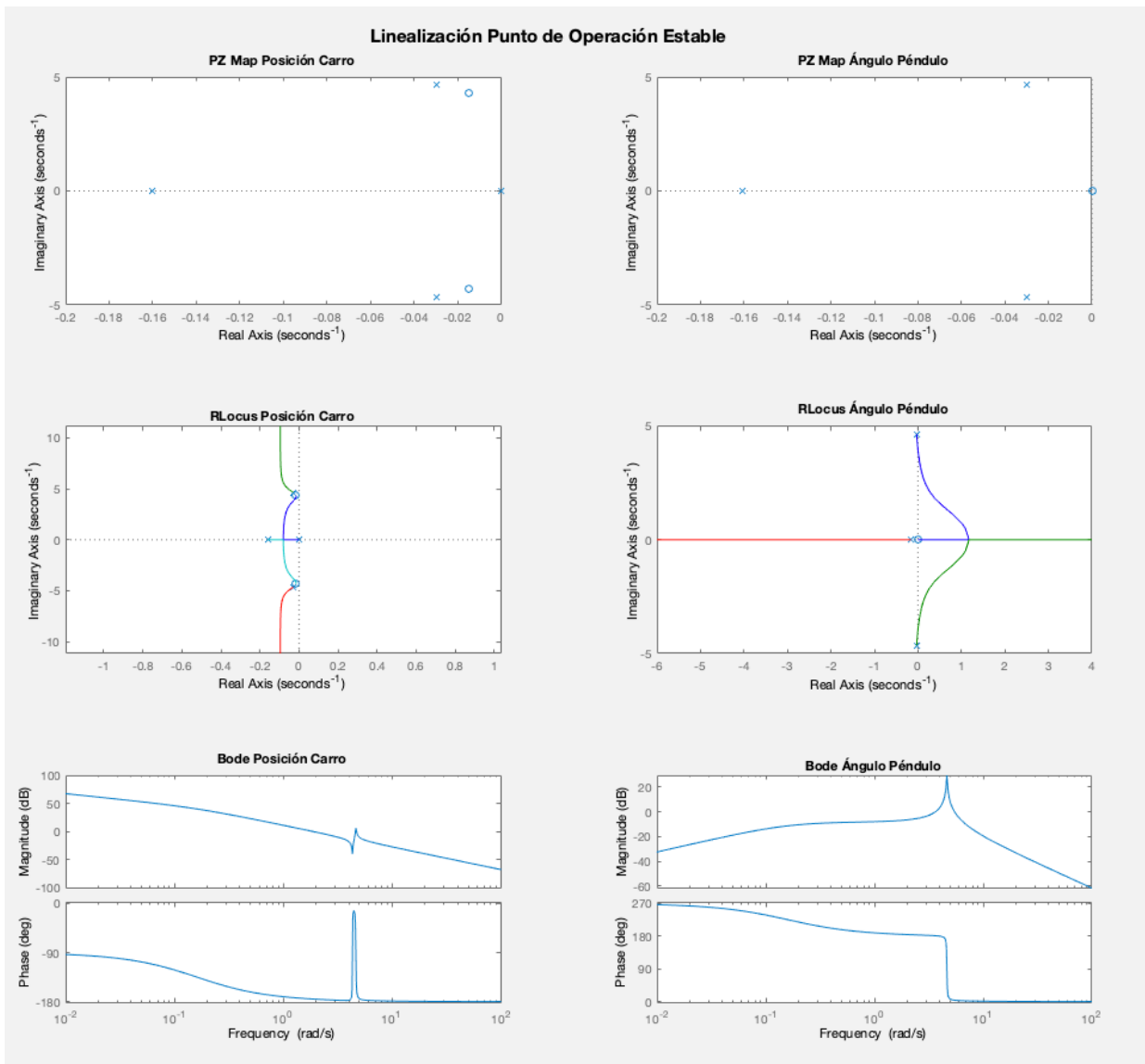


Figura 2.2: Mapa de polos y ceros, lugar geométrico de las raíces y diagramas de bode de las funciones de transferencia del punto de operación estable.

La función de transferencia de la posición del carro presenta cuatro polos y dos ceros en el semiplano izquierdo, mientras que la función de transferencia del ángulo del péndulo presenta tres polos en el semiplano izquierdo y un cero en el origen, reflejando el orden de las Ecuaciones (2.43) y (2.40) respectivamente. Dado que todos los polos están ubicados en el semiplano izquierdo, se confirma que el sistema es estable en esta bajo esta condición.

El lugar geométrico de las raíces confirma que ante un controlador de ganancia proporcional los polos de la posición del carro se mantienen estables para cualquier ganancia, mientras que el ángulo

del péndulo comienza estable, pero existe un valor que torna al sistema inestable cuando los polos cruzan al semiplano derecho.

En los diagramas de Bode se observa que la función de transferencia de la posición del carro presenta una respuesta más atenuada en alta frecuencia, mientras que el ángulo del péndulo presenta un pico de resonancia asociado a la oscilación del péndulo.

2.4.2. Linealización del punto de operación inestable

Para $\theta = \pi$ se pueden aproximar las funciones trigonométricas utilizando la Ecuación (2.33) como se muestra en (2.44).

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \cos(\pi) + \theta(-\sin(\pi)) \approx -1 \\ \sin(\theta) &= \sin(\pi) + \theta(\cos(\pi)) \approx -\theta\end{aligned}\quad (2.44)$$

Si se sustituyen estos resultados en el sistema de ecuaciones de (2.31) y se desprecian los términos de mayor orden, se obtiene el sistema de la Ecuación (2.45).

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} - ml\ddot{\theta} + b\dot{x} = F \\ -ml\ddot{x} + (I + ml^2)\ddot{\theta} - mgl\theta + b_p\dot{\theta} = 0 \end{cases}\quad (2.45)$$

Luego se aplica la transformada de Laplace al sistema resultante de la Ecuación (2.46).

$$\begin{cases} (M + m)s^2X(s) - mls^2\Theta(s) + bsX(s) = F(s) \\ -mls^2X(s) + (I + ml^2)s^2\Theta(s) - mgl\theta(s) + b_p s\Theta(s) = 0 \end{cases}\quad (2.46)$$

Para obtener la función de transferencia del ángulo θ se despeja $X(s)$ de la primera ecuación (2.47) y se sustituye en la segunda (2.48).

$$X(s) = \frac{F(s) + mls^2\Theta(s)}{(M + m)s^2 + bs}\quad (2.47)$$

$$-mls^2 \left\{ \frac{F(s) + mls^2\Theta(s)}{(M + m)s^2 + bs} \right\} + (I + ml^2)s^2\Theta(s) - mgl\theta(s) + b_p s\Theta(s) = 0\quad (2.48)$$

Reordenando la expresión se obtiene la función de transferencia de tercer orden.

$$\frac{\Theta(s)}{F(s)} = \frac{mls}{\{(I + ml^2)(M + m) - m^2l^2\}s^3 + \{b(I + ml^2) + b_p(M + m)\}s^2 + \{b_p b - mgl(M + m)\}s + \{-mglb\}}\quad (2.49)$$

Para obtener la función de transferencia de la posición del carro x se despeja $\Theta(s)$ de la segunda ecuación (2.50) y se sustituye en la primera (2.51).

$$\Theta(s) = \frac{mls^2X(s)}{(I + ml^2)s^2 - mgl + b_p s}\quad (2.50)$$

$$(M + m)s^2X(s) - mls^2 \left\{ \frac{mls^2X(s)}{(I + ml^2)s^2 - mgl + b_p s} \right\} + bsX(s) = F(s)\quad (2.51)$$

Reordenando la expresión se obtiene la función de transferencia de cuarto orden.

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{(I + ml^2)s^2 + (b_p)s - mgl}{\{(I + ml^2)(M + m) - m^2l^2\}s^4 + \{b(I + ml^2) + b_p(M + m)\}s^3 + \{b_p b - mgl(M + m)\}s^2 + \{-mglb\}s} \quad (2.52)$$

El mapa de polos y ceros, lugar geométrico de raíces y diagrama de bode de las funciones de transferencia de las Ecuaciones (2.49) y (2.52) se muestran en la Figura 2.3.

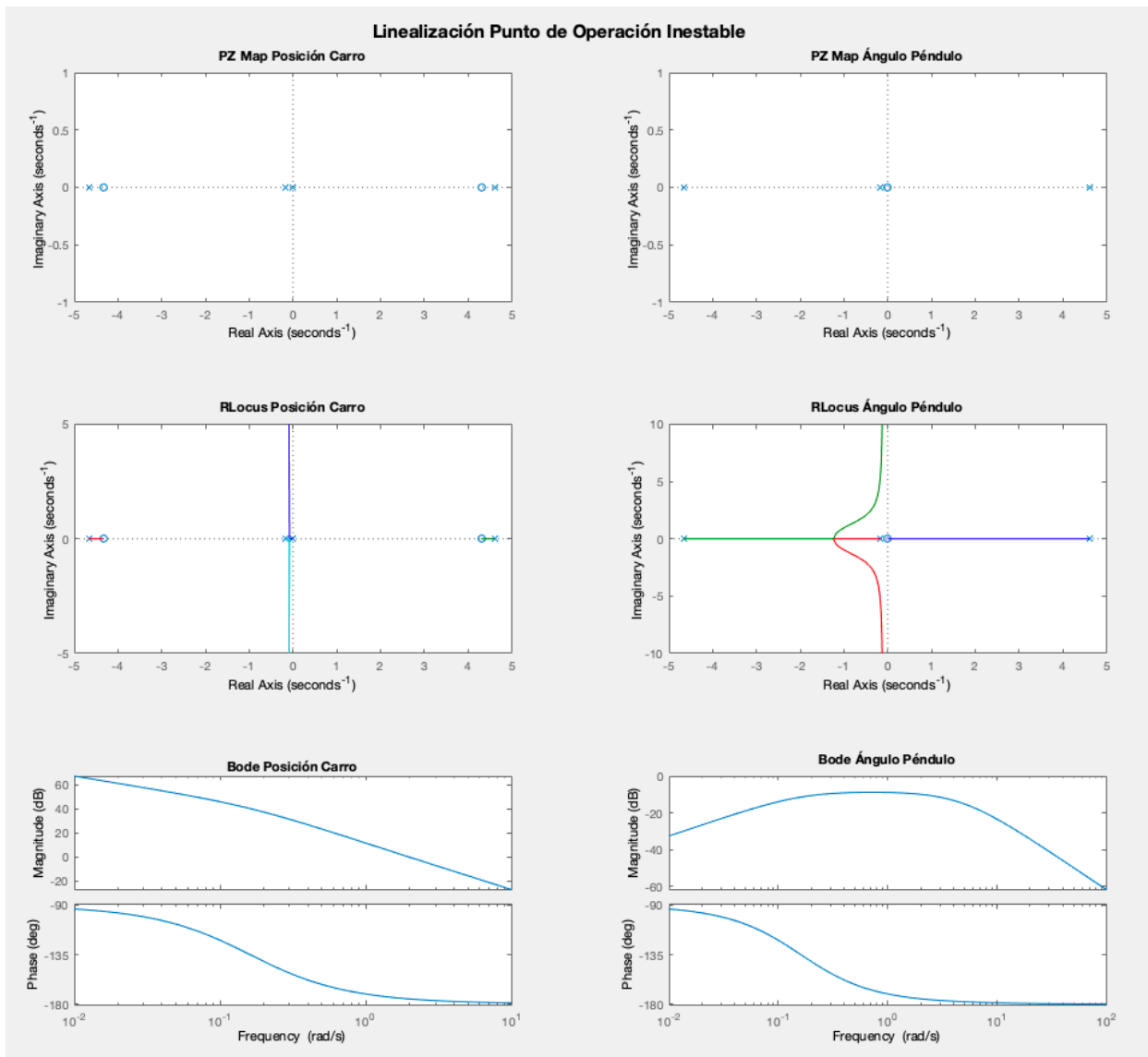


Figura 2.3: Mapa de polos y ceros, lugar geométrico de las raíces y diagramas de bode de las funciones de transferencia del punto de operación inestable.

La función de transferencia de la posición del carro presenta dos polos y un cero en el semiplano izquierdo, un polo en el origen y un polo y cero en el semiplano derecho, mientras que la función de transferencia del ángulo del péndulo presenta dos polos en el semiplano izquierdo, un cero en el origen y un polo en el semiplano derecho, reflejando el orden de las Ecuaciones (2.52) y (2.49) respectivamente. Dado que existen en ambos casos polos en el semiplano derecho, se confirma que el sistema es inestable bajo esta condición. El lugar geométrico de las raíces también refleja este comportamiento ante un controlador de ganancia, dado que existen ramas de polos que se mantienen en el semiplano derecho y nunca cruzan el eje imaginario.

El diagrama de Bode de la posición del carro muestra que su respuesta se atenúa a medida que se aumenta la frecuencia, mientras que el del ángulo del péndulo ya no presenta un pico de frecuencia y la respuesta se atenúa a frecuencias muy bajas y altas.

2.5. Modelación Motor DC

Para completar el modelo dinámico del sistema completo, es necesario modelar la acción del actuador, en este caso un motor de corriente continua. Se busca un modelo que permita relacionar la fuerza generada sobre el carro con la tensión aplicada al motor.

Se considera el modelo eléctrico clásico de un motor DC, donde se relaciona el voltaje aplicado V_m con la corriente del motor i , la constante de torque k_t y la constante de fuerza electromotriz k_b . Se considera además la resistencia interna del motor R_m y la velocidad angular del eje de salida $\dot{\theta}_m$. La ecuación es:

$$V_m = R_m i + k_b \dot{\theta}_m \quad (2.53)$$

El torque entregado por el motor está dado por:

$$\tau_m = k_t i \quad (2.54)$$

Si el torque es transmitido a través de una reducción mecánica como una relación de engranajes, con un radio de reducción r , el torque transmitido produce una fuerza lineal F sobre el carro tal que:

$$F = \frac{\tau_m}{r} \quad \text{donde} \quad r = \frac{r_{es}}{N} \quad (2.55)$$

Donde r_{es} es el radio del eje de salida de la reducción y N es la relación de reducción.

Si se reemplaza la Ecuación (2.54) y (2.55) en la Ecuación (2.53) tal que se elimine la corriente i , se tiene que:

$$F = \frac{k_t V_m - k_b k_t \dot{\theta}_m}{R_m r} \quad (2.56)$$

Luego considerando que la velocidad lineal del carro \dot{x} se relaciona con la velocidad angular del eje del motor mediante:

$$\dot{x} = r \dot{\theta}_m \Rightarrow \dot{\theta}_m = \frac{\dot{x}}{r} \quad (2.57)$$

Se tiene que la Ecuación (2.56) puede escribirse como:

$$F = \frac{k_t V_m r - k_b k_t \dot{x}}{R_m r^2} \quad (2.58)$$

Obteniendo así una expresión que relaciona la fuerza generada por el motor al carro del conjunto carro péndulo en base a la tensión aplicada.

2.6. Representación de Espacio de Estados

Para realizar control lineal es necesario obtener la representación en espacio de estados del modelo dinámico del péndulo invertido. Esta representación es de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (2.59)$$

Donde,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

$$u = V(t)$$

Cabe notar que,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \end{aligned} \quad (2.61)$$

A partir de la forma linealizada de las ecuaciones de estado para el péndulo en su posición invertida de la Ecuación (2.45), se reemplazan las variables según la Ecuación (2.60) para encontrar expresiones para las variables de estado restantes.

$$\begin{cases} (M + m)\dot{x}_2 + m\dot{x}_4 + bx_2 = u \\ m\dot{x}_2 + (I + ml^2)\dot{x}_4 - mglx_3 + b_px_4 = 0 \end{cases} \quad (2.62)$$

De la segunda ecuación de (2.62) es posible despejar \dot{x}_4 para luego reemplazar en la primera y obtener una expresión para \dot{x}_2 .

$$\dot{x}_4 = \frac{-b_px_4 + mglx_3 - m\dot{x}_2}{I + ml^2} \quad (2.63)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{u(I + ml^2) + mlb_px_4 - m^2gl^2x_3 - b(I + ml^2)x_2}{(M + m)(I + ml^2) - m^2l^2} \quad (2.64)$$

Se forma similar, es posible despejar \dot{x}_2 de la primera ecuación de (2.62), para luego reemplazar y obtener una expresión para \dot{x}_4 .

$$\dot{x}_2 = \frac{u - m\dot{x}_4 - bx_2}{M + m} \quad (2.65)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{-mlu - b_p(M + m)x_4 + mgl(M + m)x_3 + mlb_px_2}{(M + m)(I + ml^2) - m^2l^2} \quad (2.66)$$

Luego utilizando las Ecuaciones (2.61), (2.64) y (2.66), es posible representar al sistema en la forma de espacio de estados de la Ecuación (2.59).

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-b(I + ml^2)}{d} & \frac{-m^2 gl^2}{d} & \frac{mlb_p}{d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{mlb}{d} & \frac{mgl(M + m)}{d} & \frac{-b_p(M + m)}{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (I + ml^2) \\ d \\ -ml \\ d \end{bmatrix} u \quad (2.67)$$

Donde se tiene un denominador común d y matrices A y B, tal que

$$d = (M + m)(I + ml^2) - m^2 l^2$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-b(I + ml^2)}{d} & \frac{-m^2 gl^2}{d} & \frac{mlb_p}{d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{mlb}{d} & \frac{mgl(M + m)}{d} & \frac{-b_p(M + m)}{d} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ (I + ml^2) \\ d \\ 0 \\ -ml \\ d \end{bmatrix}$$

Si a este sistema se le agrega el modelo del motor DC obtenido en la Ecuación (2.58) tal que:

$$F = \frac{k_t u r - k_b k_t x_2}{R_m r^2} \quad (2.69)$$

Se tiene que la representación en espacio de estados del sistema completo es:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(I + mL^2)}{d} \left(b + \frac{k_t k_b}{R_m r^2} \right) & \frac{m^2 gl^2}{d} & \frac{-mlb_p}{d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-ml}{d} \left(b + \frac{k_t k_b}{R_m r^2} \right) & \frac{mgl(M + m)}{d} & \frac{-b_p(M + m)}{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (I + ml^2)k_t \\ dR_m r \\ 0 \\ -mlk_t \\ dR_m r \end{bmatrix} u \quad (2.70)$$

Donde se tiene un denominador común d y matrices A y B, tal que

$$d = (M + m)(I + ml^2) - m^2 l^2$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(I + mL^2)}{d} \left(b + \frac{k_t k_b}{R_m r^2} \right) & \frac{m^2 gl^2}{d} & \frac{-mlb_p}{d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-ml}{d} \left(b + \frac{k_t k_b}{R_m r^2} \right) & \frac{mgl(M + m)}{d} & \frac{-b_p(M + m)}{d} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ (I + ml^2)k_t \\ dR_m r \\ 0 \\ -mlk_t \\ dR_m r \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

3. Prototipo de Planta en Laboratorio

3.1. Introducción

Para el desarrollo de este proyecto se utilizó un prototipo real de un sistema carro-péndulo. Este fue construido por el autor en el contexto de una asignatura anterior, en el Laboratorio de Control de Sistemas de la Universidad de Concepción, utilizando componentes electrónicos variados y diversas piezas provenientes de kits de robótica de la marca Makeblock.

Durante el desarrollo de esta memoria de título, el sistema fue adaptado y mejorado para cumplir con los requerimientos de control y experimentación. El prototipo cuenta con el equipamiento necesario para permitir el accionamiento y movimiento del péndulo, la medición del estado completo del sistema y la implementación lazos de control. En la Figura 3.1 se observa una imagen del prototipo en cuestión.

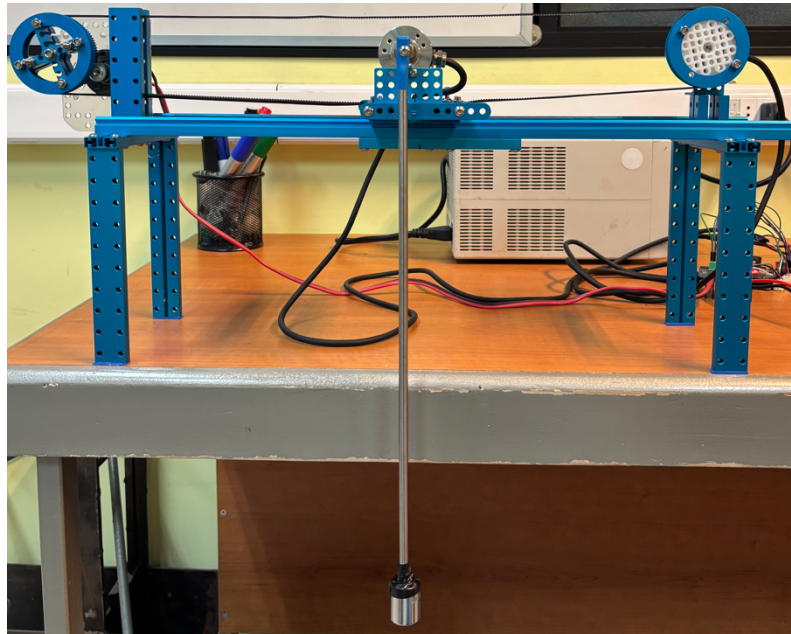


Figura 3.1: Prototipo físico del sistema carro-péndulo.

3.2. Componentes del prototipo

Un diagrama de bloques del sistema y sus componentes electrónicos se observa en la Figura 3.2. El sistema está compuesto por: el conjunto carro/péndulo, un motor DC con un engranaje reductor, un controlador de motor, una fuente de voltaje, dos sensores encoder incrementales, un Arduino Mega y un computador ejecutando Simulink.

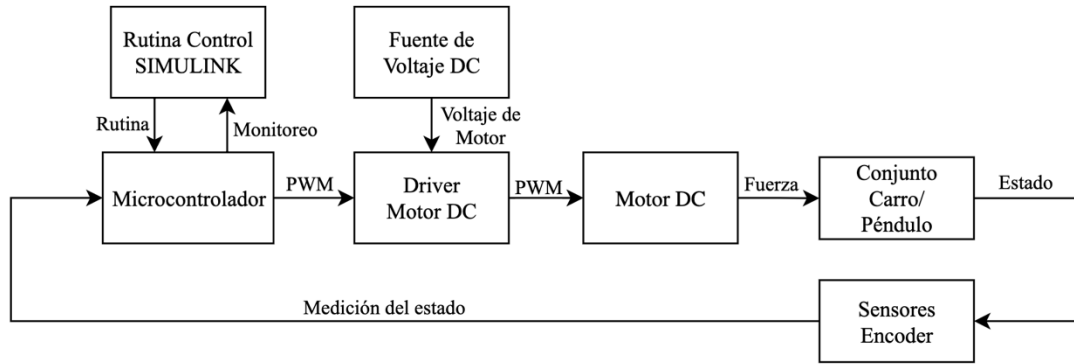


Figura 3.2: Diagrama en bloques de los componentes del prototipo.

A continuación, se detallan los componentes del sistema.

3.2.1. Conjunto Carro-Péndulo

El carro del sistema se desplaza de manera lineal sobre un riel de aluminio, guiado por cuatro rodamientos tipo ranura en V ubicados en su parte inferior. Estos rodamientos encajan sobre el perfil del riel, restringiendo el movimiento del carro a una sola dimensión, como se observa en la Figura 3.3. El riel sobre el cual está montado el carro tiene una extensión de 43.1cm, mientras que el carro tiene una longitud de 7.2cm, es decir, si el carro se encuentra en el centro puede moverse libremente 17.95cm hacia cada extremo.

En la parte superior y a un costado del carro se encuentra montado un sensor encoder, sobre cuyo eje se fija una vara rígida, recta y homogénea, que actúa como péndulo del sistema. De esta forma, se permite el movimiento libre del péndulo en un plano vertical respecto del eje del encoder.

El desplazamiento del carro es generado a partir de un motor DC que transmite el movimiento mediante un engranaje reductor y una correa de distribución dentada acoplada al carro.

El carro posee una masa de 220g, mientras que la vara del péndulo tiene una masa de 48g y una longitud de 39.5cm, al extremo del péndulo se encuentra una masa de 48g. Considerando que el péndulo se modela como una vara uniforme con masa puntual girando alrededor de un extremo, su momento de inercia I se calcula según la siguiente ecuación:

$$I = \frac{1}{3} mL^2 + mL^2 = \frac{1}{3} \cdot 0.048 \cdot 0.395^2 + 0.048 \cdot 0.395^2 = 0.01 [kg \cdot m^2] \quad (3.1)$$

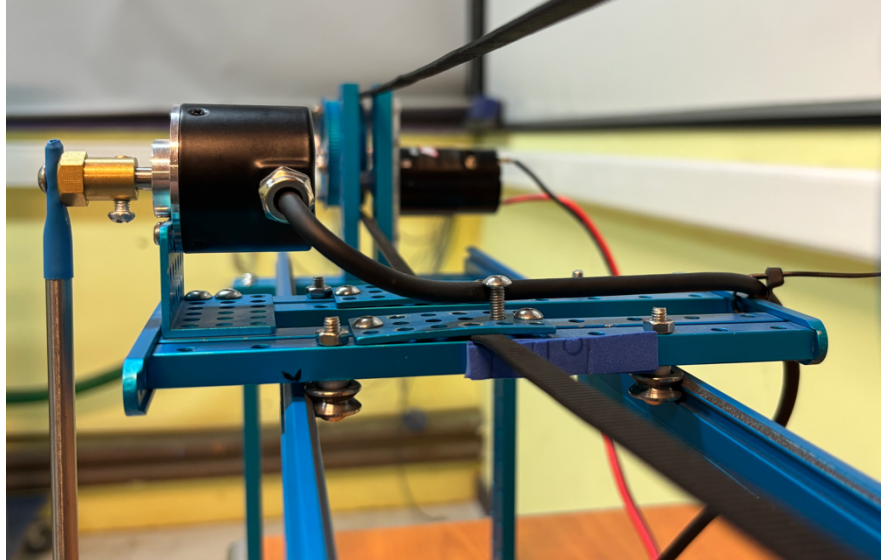


Figura 3.3: Imagen de costado del conjunto carro-péndulo.

3.2.2. *Microcontrolador Mega 2560*

Para la adquisición de datos, lógica de control y comunicación entre el computador y el prototipo se utiliza un microcontrolador Mega 2560 (placa genérica análoga al Arduino Mega 2560), como el que se observa en la Figura 3.4. Este microcontrolador ejecuta en bucle el programa compilado por Simulink y comunica los datos al mismo software para monitorización del sistema.

Este microcontrolador está basado en el chip ATmega2560, 16 pines de entrada/salidas analógicas y tiene 56 pines de entrada/salidas digitales, de los cuales 15 tienen la capacidad de ser salidas PWM. También cuenta con 256kB de memoria para programa. En particular se usa este microcontrolador dado que tiene 6 pines que permiten interrupciones, a diferencia de las placas más comunes como Arduino Uno o Nano que solo cuentan con 2. De estos puertos, se utilizan 4 para obtener las mediciones de los dos sensores encoder.

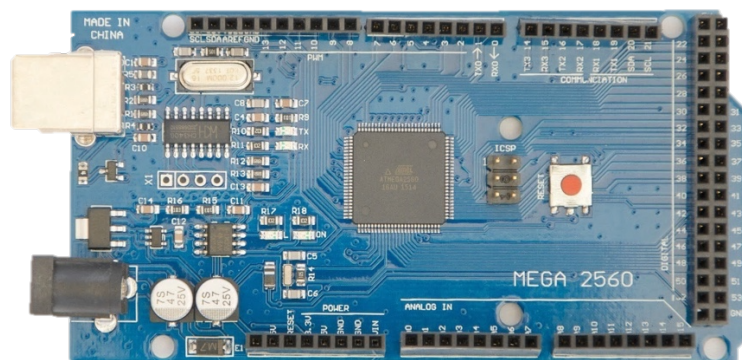


Figura 3.4: Microcontrolador Mega 2560.

3.2.3. Controlador de Motor IBT2

El controlador de motor utilizado en el prototipo es un módulo IBT2 que implementa un puente en H mediante dos circuitos integrados BTS7960B. Esta configuración permite el accionamiento del motor DC en ambas direcciones utilizando dos señales digitales PWM provenientes del microcontrolador.

Este módulo permite trabajar con voltajes de entrada en un rango de 6 a 27V y soporta altas corrientes de hasta 43A, limitado por su capacidad de disipación de calor. La lógica de control trabaja en un rango de voltaje de 3.3 hasta 5V, lo cual lo hace compatible con la mayoría de microcontroladores, y en específico, con la placa Mega 2560. Los circuitos integrados que contiene permiten frecuencias de trabajo hasta 25kHz e implementan protecciones ante voltajes de entrada mayores y menores que el rango de operación normal.

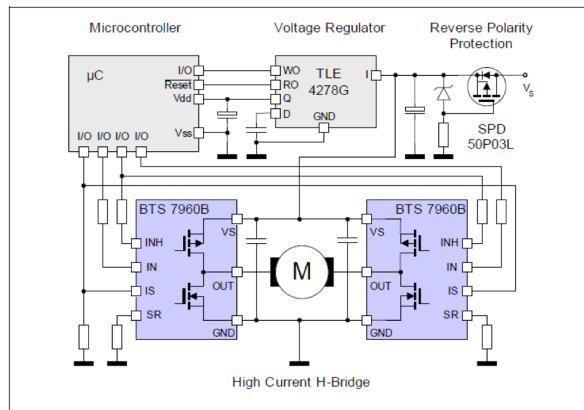
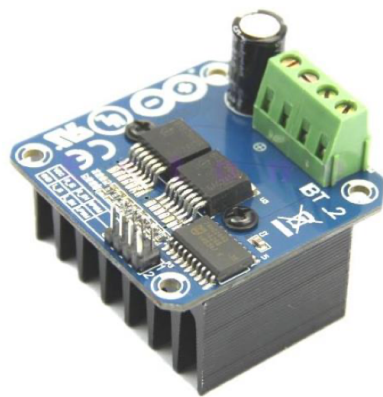


Figura 3.5: Imagen del controlador de motor IBT2 (izq.) y esquemático del circuito interno (der.).

En la Figura 3.5 (izq.) se observa el controlador de motor en cuestión, y en (der) se observa el circuito que implementa en su interior. En esta figura, se observa que el controlador tiene un microcontrolador interno que está alimentado de forma estable por un regulador de voltaje con protección de polaridad inversa. Este se encarga de generar las señales lógicas INH (inhabilitar) e IN (entrada) para controlar los dos CIs BTS 7960B que implementan de forma individual un semipunto con dos MOSFETs internos de tipo P y N. Cuando IN se es colocado en alto e INH en bajo, entonces el transistor superior es activado y conecta la salida OUT al voltaje de la fuente, mientras que en el caso contrario, cuando IN se es colocado en bajo e INH en alto, se activa el transistor inferior y conecta la salida OUT a tierra GND. De esta forma es posible polarizar de forma arbitraria el motor DC que se encuentra conectado a los pines OUT de cada CI.

3.2.4. Motor DC RCXAZ TLTAN 35T 550

El motor utilizado para accionar el carro del sistema carro-péndulo corresponde a un motor DC cepillado modelo RCXAZ TLTAN 35T 550, observar Figura 3.6, utilizado comúnmente en robótica debido a su alta capacidad de torque. El motor es alimentado con un voltaje nominal de 7.4V, y presenta una resistencia interna de 1.5Ω .



Figura 3.6: Imagen del motor DC RCXAZ TLTAN 35T 550.

El eje de salida del motor se encuentra acoplado a un engranaje con un radio r_{es} de 6mm. Este engranaje impulsa un segundo engranaje de radio r_{red} de 2.86cm con una relación de transmisión determinada por el número de dientes de cada engranaje. El engranaje de salida cuenta con 18 dientes, mientras que el eje reductor cuenta con 88 dientes tal que se tiene una relación de transmisión N :

$$N = \frac{88}{18} = 4.89 \quad (3.2)$$

Utilizando la relación de la Ecuación (3.2) se determina el radio efectivo sobre el que actúa la fuerza lineal como:

$$r_{eq} = \frac{r_{red}}{N} = \frac{0.0286}{4.89} = 0.058 \quad (3.3)$$

Las constantes de torque y fuerza electromotriz del motor fueron estimadas a partir de los parámetros entregados por el fabricante que se observan en la Tabla 3.1, considerando el punto de máxima eficiencia. La constante de torque k_t se calcula utilizando la conversión de unidades como sigue:

$$k_t = \frac{\tau}{i} = \frac{310 \text{ g} \cdot \text{cm}}{3.8 \text{ A}} \cdot \frac{0.0098 \text{ N}}{1 \text{ g}} \cdot \frac{0.01 \text{ m}}{1 \text{ cm}} \approx 0.008 \frac{\text{Nm}}{\text{A}} \quad (3.4)$$

Mientras que la constante de fuerza electromotriz se calcula como:

$$k_b = \frac{V_{emf}}{\omega} = \frac{V_m - R_m i}{\frac{2\pi \cdot RPM}{60}} = \frac{7.4 - 1.5 \cdot 3.8}{\frac{2\pi \cdot 6830}{60}} = 0.024 \frac{Vs}{rad} \quad (3.5)$$

Tabla 3.1: Hoja de datos del motor DC RCXAZ TLTAN 35T 550 entregada por el fabricante.

	No load	Max efficiency	MAX HP	Rotor blocked
Current(A)	0.6	3.8	12.5	24.3
Efficiency(%)		76.1	49.7	
Horse Power(W)		22	46	
RPM	7900	6830	3950	
Torque(G.CM)		310	1130	2260
Voltages(V)	7.4V-11.1V			
Temperature(°C)	-10 - 50°C			

3.2.5. Sensores Encoder 38S6G5-B-G24N

Para la medición de estado completa del sistema se utilizan dos encoder incrementales 38S6G5-B-G24N de 1000ppr, observar Figura 3.7. Un encoder se encuentra montado sobre el eje de la polea que mueve el carro, lo que permite medir la posición y velocidad lineal del carro en el riel, mientras que el otro encoder se encuentra montado en el eje de giro del péndulo, lo que permite medir el ángulo y la velocidad angular del péndulo.



Figura 3.7: Imagen del encoder incremental 38S6G5-B-G24N.

Estos sensores funcionan en un rango de 5 a 24V, y entregan señales en dos fases A y B, donde la relación entre estas fases permite detectar la dirección del giro. Si la lectura del sensor se realiza en cuadratura, es decir, detectando flancos de subida y bajada en ambas fases, es posible obtener una resolución de la medición 4 veces mayor a la cantidad de pulsos por revolución del sensor. Para este tipo de medición se tiene en cuenta que las señales del canal A y del canal B están fundamentalmente desfasadas 90° grados entre sí, entonces si se observa que el canal A se adelanta al canal B, se considera que el eje gira en una dirección, y viceversa, si se observa que el canal B se adelanta al canal A, se considera que gira en la dirección contraria. Esto permite conocer la posición de giro del encoder, y a partir de la derivada de esta medición en el tiempo se obtiene la velocidad de giro del sensor.

Al tratarse de encoders incrementales, y no absolutos, es necesario definir una posición arbitraria para iniciar el sistema, esto es, con el péndulo apuntando hacia abajo en su posición estable, y el carro en el punto medio del riel. A partir de esas posiciones se realiza la lectura en cuadratura y se incrementa o decrementa un contador para realizar la medición.

3.3. Esquema de conexiones

En la Figura 3.8 se muestra el esquema de conexiones eléctricas del sistema, donde están representados mediante bloques los componentes electrónicos mencionados. Este esquema permite una visualización del flujo de señales y alimentación de potencia dentro del sistema.

Se observa que el motor DC es accionado mediante el controlador de motor, el cual recibe las señales de control del microcontrolador y es alimentado a su vez por una fuente de voltaje externa. En el controlador, las conexiones RPWM y LPWM corresponden a las entradas de señal PWM para el sentido directo e inverso, respectivamente, mientras que R_EN y L_EN son habilitan la conducción en cada uno de los semipuentes internos y se mantienen activos al estar conectados a 5V. La parte digital del controlador es alimentada a partir del microcontrolador. Estas conexiones se hacen en base a la Tabla 3.2 donde se muestra la función de los pines obtenidas a partir de la hoja de datos.

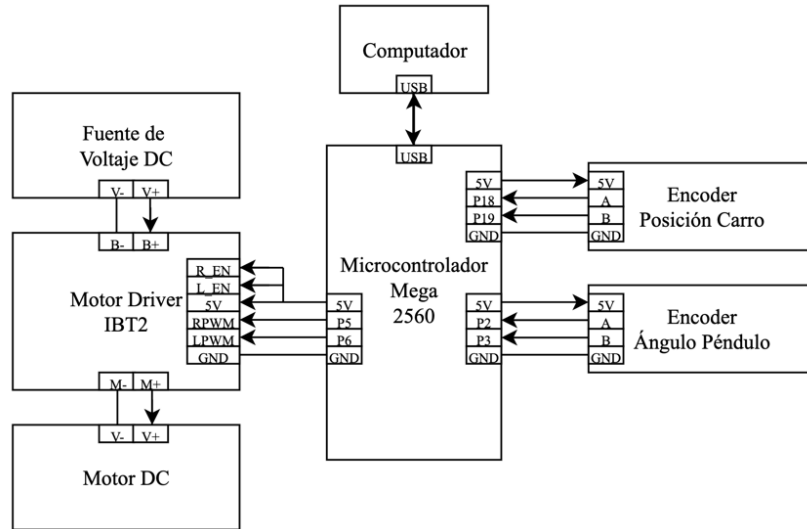


Figura 3.8: Esquema de conexiones eléctricas de los componentes del prototipo.

Tabla 3.2: Descripción de los pines del controlador de motor DC.

Pin No	Function	Description
1	RPWM	Forward Level or PWM signal, Active High
2	LPWM	Reverse Level or PWM signal, Active High
3	R_EN	Forward Drive Enable Input, Active High/ Low Disable
4	L_EN	Reverse Drive Enable Input, Active High/Low Disable
5	R_IS	Forward Drive, Side current alarm output
6	L_IS	Reverse Drive, Side current alarm output
7	Vcc	+5V Power Supply microcontroller
8	Gnd	Ground Power Supply microcontroller

El microcontrolador está conectado mediante el puerto USB al computador, desde donde se alimenta de 5V y también recibe el programa a ejecutar. Una vez cargado y ejecutada la rutina de control en el microcontrolador, este se mantiene conectado al computador de forma que se puedan monitorear las variables internas. El microcontrolador recibe también los pares de señales provenientes de los dos sensores encoder en sus pines que permiten interrupciones.

4. Diseño de Controladores

4.1. Introducción

En este capítulo se abordará el diseño matemático de los controladores que serán posteriormente implementados en el prototipo del laboratorio. Se abordan dos problemáticas principales en el control del sistema: el movimiento de swing-up, encargado de llevar al péndulo desde su posición natural estable hasta la posición invertida inestable, y el control de estabilización, encargado de mantener al péndulo en equilibrio alrededor de dicha posición.

Para cada uno de estos problemas se proponen dos estrategias de control con el objetivo de evaluar su desempeño y determinar cuál es el enfoque más adecuado para controlar el sistema según distintos criterios como: robustez ante perturbaciones, velocidad de respuesta, suavidad de la acción de control y la complejidad en su implementación y sintonización. Los controladores se diseñan de forma independiente dado que los objetivos de cada uno son significativamente distintos.

Para la etapa de swing-up, se diseñan dos controladores. En una primera instancia se diseña un controlador basado en la energía del sistema siguiendo el enfoque propuesto por Furuta en [X], demostrado de ser eficaz en la transferencia de energía al sistema en cuestión. Adicionalmente, se incluye una estrategia de swing-up basada en movimientos controlados de la posición del carro de forma predefinida, esto con el fin de comparar su desempeño frente al método clásico de abordar el problema.

En el caso de la estabilización, se propone un controlador LQR por su amplio uso en la literatura y buen desempeño demostrado en este sistema. Frente a este, se plantea una alternativa basada en controladores PID en cascada como una propuesta clásica y más simple que no requiere un modelo del sistema.

En el diagrama de la Figura 4.1 se propone un esquema de control incluyendo los bloques de control estabilizador y swing-up, como también un bloque selector encargado de conmutar entre ambos según el estado actual del sistema.

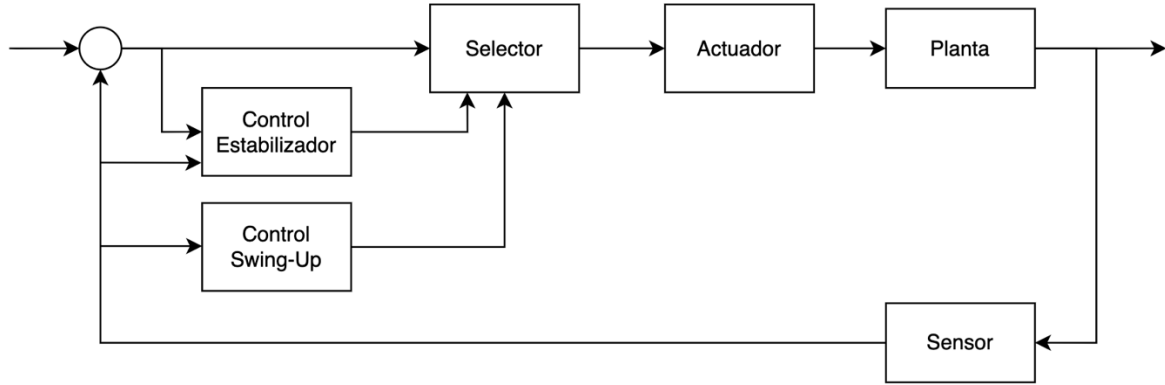


Figura 4.1: Diagrama del esquema de control general para problema de swing-up y estabilización.

4.2. Control de Energía para Movimiento de Swing-Up

El control por energía es una estrategia ampliamente utilizada en la literatura para resolver el problema de swing-up en sistemas de péndulo invertido. Este tipo de control tiene por objetivo modificar la energía mecánica del sistema tal que alcance el valor asociado a la posición invertida, no requiriendo así una trayectoria de referencia predefinida.

La formulación de la estrategia que se detalla a continuación se basa en el enfoque propuesto por Furuta en [12], adaptado al caso de un péndulo montado sobre un carro que se desplaza de forma lineal. En el trabajo de Furuta se presenta un análisis desde un marco referencial de un péndulo que oscila en torno a un punto pivote accionable, tal que no se restringe la topología de un prototipo físico.

El procedimiento comienza determinando la energía total del péndulo, definida como la suma de la energía cinética y la energía potencial.

$$E = T + V \quad (4.1)$$

$$E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}(I + ml^2)\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos(\theta)) \quad (4.2)$$

Si se definen $\theta_d = \pi$ y $\dot{\theta}_d = 0$ correspondientes a la posición invertida deseada, entonces la energía deseada E_d en aquel punto es:

$$E_d = E(\theta_d, \dot{\theta}_d) = \frac{1}{2}(I + ml^2)0^2 + mgl(1 - (-1)) = 2mgl \quad (4.3)$$

Calcular la derivada de la energía con respecto del tiempo permite observar su comportamiento:

$$\frac{dE}{dt} = (I + ml^2)\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta}\sin(\theta) \quad (4.4)$$

A partir de la Ecuación 3.19 (2da ecuación de movimiento) y considerando $u = \ddot{x}$, se tiene que:

$$\ddot{\theta} = \frac{-b_p \dot{\theta} - mgl \sin(\theta) - mlu \cos(\theta)}{(I + ml^2)} \quad (4.5)$$

De esta forma, al reemplazar 4.5 en 4.4 y despreciando el efecto de roce dado que b es muy pequeño, se tiene que:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{E} = -b\dot{\theta}^2 - mlu \cos(\theta) \dot{\theta} \approx -mlu \cos(\theta) \dot{\theta} \quad (4.6)$$

La expresión obtenida implica que la energía del sistema es controlable a partir de la aceleración del carro. El sistema está representado como un integrador con ganancia variable. Para valores $\dot{\theta} = 0$ y $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, es decir, cuando el péndulo cambia de dirección o se encuentra en la horizontal, el lado derecho de la expresión se anula y el sistema se torna incontrolable. Para aumentar la energía del sistema la aceleración del carro u debe ser positiva cuando el término $\cos(\theta) \dot{\theta}$ resulta negativo.

Si se define el error de energía y una función de Lyapunov $V(x)$ como sigue:

$$\Delta E = E - E_d \quad (4.7)$$

$$V(x) = \frac{1}{2} (\Delta E)^2 \quad (4.8)$$

Donde $V(x)$ mide la distancia cuadrática entre la energía actual del sistema y la energía deseada. Esta función es siempre positiva, excepto cuando se anula el error de energía en el estado deseado. Si se deriva V respecto del tiempo se obtiene:

$$\dot{V} = \Delta E \dot{E} \quad (4.9)$$

Y reemplazando la Ecuación 4.6 en 4.9 se tiene:

$$\dot{V} = -\Delta E \cdot mlu \cos(\theta) \dot{\theta} \quad (4.10)$$

Si luego se escoge una ley de control arbitraria de la forma:

$$u = k \cdot \Delta E \cdot \dot{\theta} \cos(\theta) \quad (4.11)$$

Donde $k > 0$ es una ganancia ajustable, se tiene que la derivada de la función de Lyapunov establecida es:

$$\dot{V} = -kml(\Delta E \cdot \cos(\theta) \dot{\theta})^2 \leq 0 \quad (4.12)$$

Lo que implica que la función $V(x)$ decrece siempre y cuando $\dot{\theta} \neq 0$ y/o $\theta \neq 0$, llevando la energía del sistema al valor deseado E_d . Para hacer variar la energía del sistema de la forma más rápida, se utiliza la magnitud de control máxima u_{max} en la dirección correcta como sigue:

$$u = u_{max} \cdot \text{sign}(k \cdot \Delta E \cdot \dot{\theta} \cos(\theta)) \quad (4.13)$$

Furuta en su trabajo establece que, si la ley de control de la Ecuación 4.13 da lugar a vibraciones indeseadas en el control, se puede modificar para reducir las tal que:

$$u = sat_{u_{max}}(k \cdot \Delta E \cdot sign(\dot{\theta}(\cos(\theta)))) \quad (4.14)$$

Donde $sat_{u_{max}}$ representa una función lineal que se satura en u_{max} . En el documento de Furuta [12] se presenta una deducción para determinar la cantidad de balanceos b , en términos de u_{max} , que debe hacer el péndulo para lograr la posición deseada. Si se establece la aceleración máxima del punto pivote como:

$$u_{max} = n \cdot g \quad (4.15)$$

Donde n es un real positivo y g la aceleración de gravedad. Entonces la relación entre b y n es como se muestra en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1: Relación entre n y b según el documento de Furuta.

n	1.33	0.577	0.388	0.296	0.241	0.128
b	1	2	3	4	5	10

De la Tabla 4.1 se deduce que el número de balanceos necesarios aumenta con un n menor. Para lograr un movimiento de swing-up en un solo balanceo se necesita un $n \geq 1.33$, es decir, la aceleración máxima del punto pivote sea como mínimo $u_{max} = 1.33 \cdot g = 13.03 \left[\frac{m}{s^2}\right]$.

4.3. Control de Posición para Movimiento de Swing-Up

En un prototipo de péndulo invertido con carro móvil donde el recorrido del carro está físicamente restringido, la estrategia de swing-up por control de energía del Capítulo 4.2 puede resultar ineficaz, dado que no considera la posición ni velocidad del punto pivote, de forma que no es posible confinar el movimiento. Como alternativa, se presenta a continuación una estrategia de control para el movimiento de swing-up basada en el artículo de Stefan Brock [17].

La idea principal tras la estrategia de control de Stefan es hacer que el carro alterne entre dos posiciones predefinidas de manera controlada, conmutando en momentos en que el péndulo se encuentra en el estado óptimo para la inyección de energía. De esta forma, el controlador cuenta con dos partes principales: un control de posición y una parte de lógica que se encarga de decidir cuándo enviar la señal para que el carro cambie de posición. Esta idea está representada de forma gráfica en la Figura 4.2.

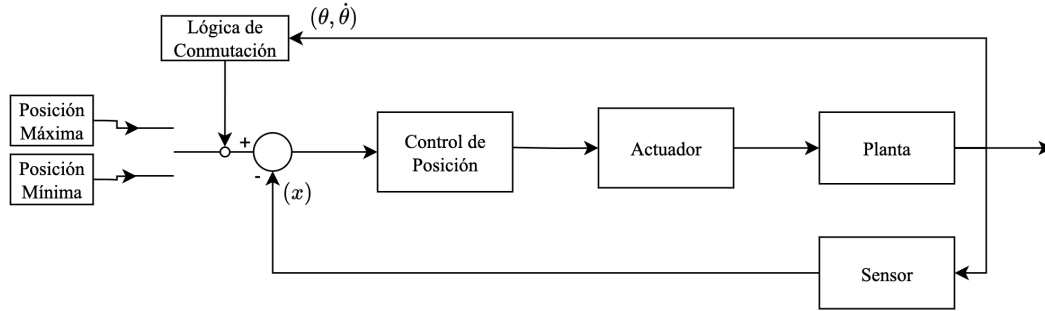


Figura 4.2: Diagrama del control por posición propuesto para el problema de swing-up.

En base a esto, es necesario deducir cuales son las condiciones bajo las cuales se hará conmutar la posición del carro. Para esto es posible recurrir a la Ecuación 4.6 la cual describe la variación de energía en el sistema según la aceleración del carro u . Se analizan los casos es que u es positiva (el carro se mueve hacia la derecha) y cuando u es negativa (el carro se mueve hacia la izquierda):

$$\frac{dE}{dt} \approx -mlu \cos(\theta) \dot{\theta} \quad (4.16)$$

1.- Si u es negativa: se añade energía al sistema si $\dot{\theta} > 0$ y es óptimo cuando $\cos(\theta)$ se acerca a 1, es decir θ es cercano a 0.

2.- Si u es positivo: se añade energía al sistema si $\dot{\theta} < 0$ y es óptimo cuando $\cos(\theta)$ se acerca a 1, es decir θ es cercano a 0.

Estas condiciones sugieren que existe un ángulo ideal θ_{best} para realizar la conmutación, definido como el punto en el que péndulo puede aprovechar mejor la aceleración del carro para incrementar su energía. Esta idea se observa de manera gráfica en la Figura 4.3.

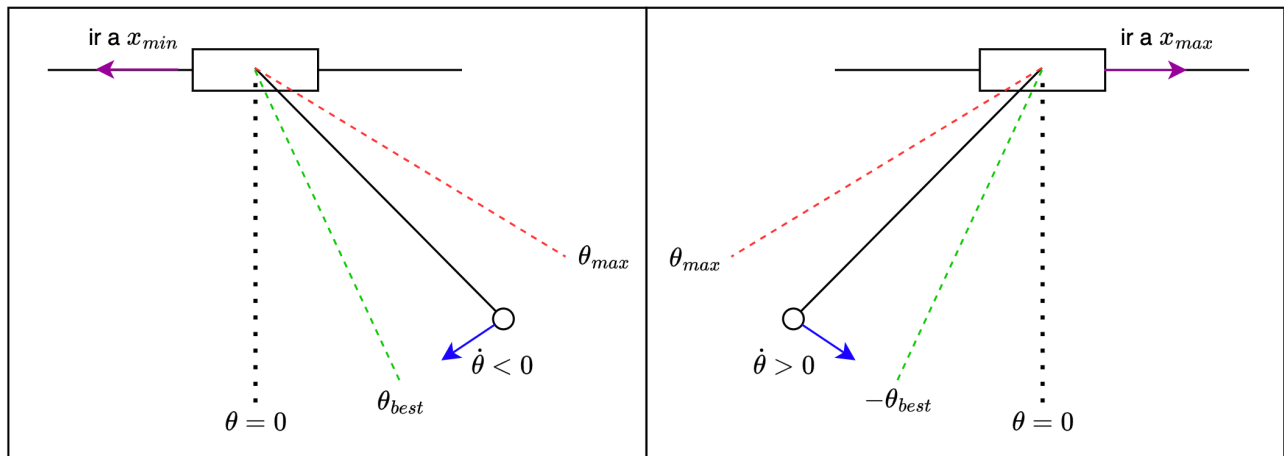


Figura 4.3: Casos de conmutación para estrategia de swing-up basada en control de posición.

Stefan en su documento propone que el ángulo θ_{best} sea calculado como sigue:

$$\theta_{best} = \theta_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t_{acc}\right) \quad (4.17)$$

Donde T es el periodo de oscilación fundamental del péndulo calculado en base a la longitud del péndulo, como se muestra en la Ecuación 4.18, θ_{max} es la amplitud máxima actual de la oscilación del péndulo y t_{acc} es el tiempo que le toma al carro en llegar a su velocidad máxima.

$$T = 2\pi\sqrt{Lg} \quad (4.18)$$

Cabe mencionar que, si bien el carro debe desacelerar al final de cada trayectoria y perder parte de su energía, si el balance neto de energía por ciclo es positivo, entonces el péndulo alcanzará progresivamente la energía necesaria para lograr la posición invertida.

4.4. Control Estabilizador LQR

El controlador LQR (Linear Quadratic Regulator), o regulador cuadrático lineal es una técnica que permite estabilizar sistemas lineales mediante una ganancia en la realimentación de estados que minimiza una función de costo cuadrática. Esta estrategia resulta adecuada para el problema del péndulo invertido ya que como fue demostrado en el Capítulo 2.4 el sistema puede ser linealizado alrededor del punto de operación inestable, permitiendo obtener un modelo lineal controlable. El controlador en cuestión se observa en la Figura 4.4.

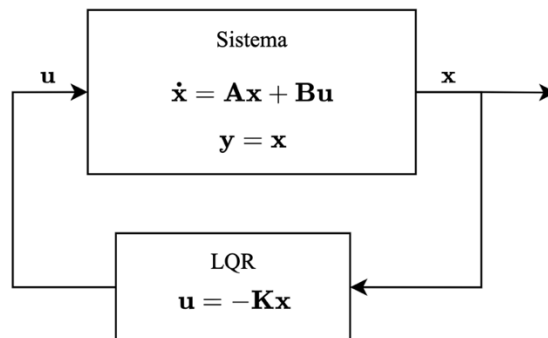


Figura 4.4: Diagrama del control LQR propuesto para el problema de estabilización.

El modelo linealizado del sistema en espacio de estados se expresa de la forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.19)$$

La dinámica del sistema está determinada por los valores propios de la matriz A, obtenidos como las raíces λ del polinomio característico

$$|\lambda I - A| = 0 \quad (4.20)$$

Para intervenir el comportamiento del sistema, se propone una ley de control por realimentación tal que la entrada u es proporcional a los estados mediante una ganancia k :

$$u = -Kx = -(k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_nx_n) \quad (4.21)$$

Tal que,

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n] \quad (4.22)$$

Sustituyendo la ley de control en la ecuación del sistema se tiene que

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax - BKx = (A - BK)x \quad (4.23)$$

Entonces se puede definir la nueva matriz de estado controlado como sigue,

$$A_c = (A - BK) \Rightarrow \dot{x} = A_c x \quad (4.24)$$

La estabilidad del sistema dependerá entonces de los valores propios de la matriz A_c , determinados por el polinomio característico

$$|\lambda I - A_c| = 0 \quad (4.25)$$

Luego es posible, mediante un diseño correcto de la matriz de ganancias K , asignar arbitrariamente los valores propios de A_c , siempre que el sistema determinado por las matrices A y B sean controlable. Es posible verificar la controlabilidad de un sistema lineal mediante el rango de la matriz de controlabilidad C como sigue:

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (4.26)$$

Tal que

$$\text{rank}(C) = n \quad (4.27)$$

Donde n es el número de estados del sistema.

La matriz de ganancia K se calcula de forma que se minimice el siguiente funcional de costo

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (4.28)$$

Donde Q es una matriz simétrica positiva que penaliza las desviaciones de estado respecto del equilibrio, y R es una matriz simétrica positiva que penaliza el esfuerzo de control. Un valor grande en un valor de Q implica que se buscará que el sistema llegue a la estabilidad con mayor rapidez, mientras que un valor grande en R significa que el controlador utilizará un menor esfuerzo de control, haciendo la respuesta más lenta, pero con menor demanda del actuador.

La solución al problema de optimización de la ecuación $X(J)$ se obtiene resolviendo la Ecuación de Riccati Algebraica (ARE)

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (4.29)$$

Donde P es la única solución simétrica. Una vez obtenido P , la matriz de ganancia de retroalimentación K se calcula como:

$$K = R^{-1}B^T P \quad (4.30)$$

Esta metodología asegura que el controlador utiliza la realimentación de los estados de forma óptima, buscando el mejor equilibrio en base a los parámetros definidos de penalización de estados y acción de control en las matrices Q y R . En la práctica este cálculo es resuelto de forma numérica en softwares como MATLAB utilizando la función $lqr(A,B,Q,R)$, que resuelven internamente la matemática presentada y entregan la matriz de ganancias K .

4.5. Control Estabilizador PID

Como alternativa al controlador LQR ampliamente utilizado en la literatura, se propone una estrategia de estabilización del péndulo basada en el uso de controladores PID dispuestos en cascada. Este tipo de controladores son ampliamente utilizados por su simplicidad y fácil implementación.

Un controlador PID (Proporcional Integral Derivativo) calcula la acción de control $u(t)$ a partir de la diferencia entre la señal de referencia $r(t)$ y la señal de salida del sistema $y(t)$. Su expresión en tiempo continuo es:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (4.31)$$

Donde $e(t) = r(t) - y(t)$ es el error, K_p , K_i y K_d son las ganancias proporcional, integral y derivativa respectivamente. La Figura 4.5 muestra un diagrama esquemático del funcionamiento de un controlador PID.

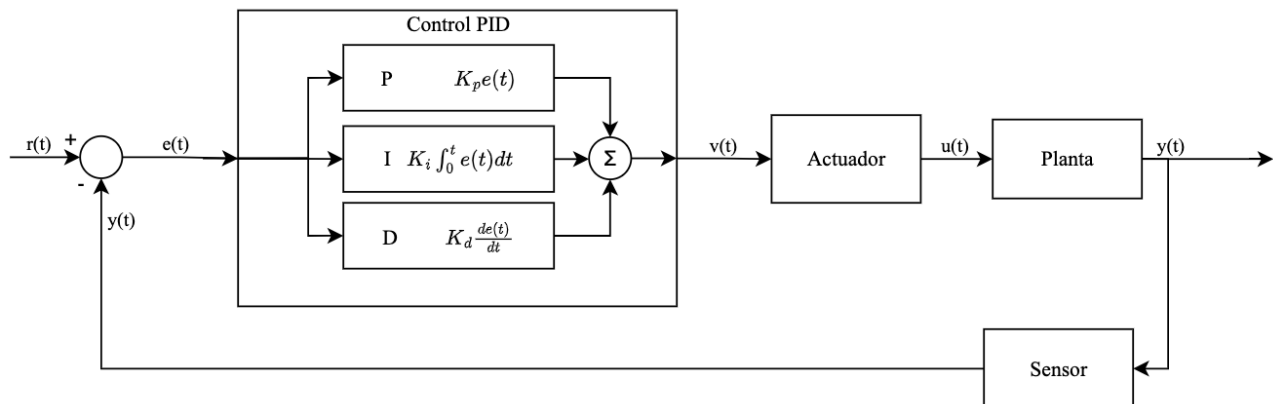


Figura 4.5: Diagrama del control LQR propuesto para el problema de estabilización.

Dado que un controlador PID es una estrategia de control para sistemas SISO, es decir, de una entrada y una salida, no es apto para controlar un sistema subactuado como el péndulo invertido ya que este cuenta con una entrada y dos salidas (el ángulo del péndulo y la posición del carro). Por esta razón se propone el uso de dos controladores PID tal que exista un lazo de control interno y uno externo como sigue:

- Lazo de control externo (ángulo del péndulo): su función es estabilizar el péndulo en la posición invertida $\theta = \pi$, mediante la señal del sensor de ángulo. Su salida genera una señal de referencia de posición para el carro.

- Lazo de control interno (posición del carro): su función actuar sobre el motor para suplir la referencia deseada por el lazo de control externo para mantener el péndulo invertido.

Esta estrategia se ve representada en el diagrama de bloques de la Figura 4.6.

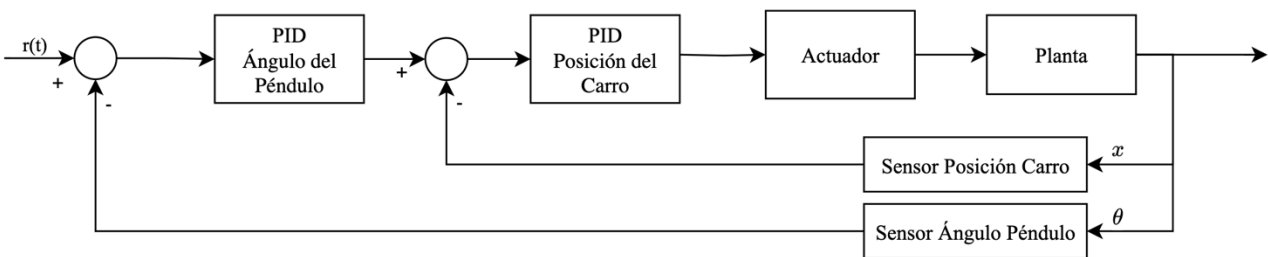


Figura 4.6: Diagrama del control PID propuesto para el problema de estabilización.

Cabe mencionar que, al tener el lazo de posición del carro como esclavo del lazo de ángulo del péndulo no es posible mantener al carro en una posición determinada. Para mitigar la deriva del carro, y evitar que llegue a los límites físicos del sistema, se añade una componente proporcional a la posición $x(t)$ del carro en la entrada del controlador de posición. Esta corrección permite que el carro vuelva al centro del riel cuando el ángulo del péndulo está cerca de la vertical. En base a esto, la referencia de posición es:

$$x_r(t) = v_\theta + K_x x(t) \quad (4.32)$$

Donde v_θ es la salida del controlador de ángulo y K_x es una ganancia proporcional ajustable.

5. Implementación en Simulink

5.1. Introducción

Las rutinas de control descritas en el capítulo anterior fueron validadas e implementadas mediante el entorno Simulink. Para ello, se trabajó con dos modelos distintos según el objetivo, uno orientado a realizar simulaciones utilizando el modelo obtenido del sistema y otro destinado a el control en tiempo real del prototipo físico. Ambos modelos comparten una arquitectura similar, compuesta por los bloques de control, un sistema selector que decide que estrategia aplicar y un sistema representando la planta, ya sea la conexión al prototipo o el modelo simulado.

El entorno gráfico de Simulink permite representar sistemas de manera modular como un diagrama en bloques con enrutamiento de señales, esto facilita el diseño, prueba y monitoreo de las estrategias de control. Además, este software cuenta con la extensión “Simulink Support Package for Arduino Hardware”, que permite compilar programas para que sean ejecutados en tiempo real en microcontroladores tipo Arduino. Esta funcionalidad convierte a Simulink en una herramienta versátil e interesante para el desarrollo de este proyecto.

En el caso de la implementación, la planta es representada mediante un subsistema que se comunica directamente con los sensores y actuadores del prototipo. En cambio, para la simulación, dicho subsistema es reemplazado por un modelo en bloques que resuelve de manera numérica las ecuaciones dinámicas del sistema carro-péndulo.

Este capítulo presenta y describe en detalle el funcionamiento de los modelos implementados en Simulink.

5.2. Descripción de los Modelos de Simulink

La Figura 5.1 muestra el modelo general desarrollado en Simulink, utilizado tanto para la simulación del sistema como para la implementación de los controladores en el prototipo físico. Este modelo está conformado por ocho subsistemas. De forma general, estos son:

- Un subsistema encargado de definir la referencia del sistema (Set Point).
- Cuatro subsistemas que implementan de forma independiente cada una de las estrategias de control descritas en el Capítulo 4 (LQR, PID, Swing-Up por Energía y Swing-Up por Posición).
- Un subsistema que implementa la lógica de conmutación entre el controlador de estabilización y el de swing-up en base al estado actual del sistema.

- Un subsistema final que representa la planta, el cual puede ser configurado para simular, ejecutando el modelo matemático no lineal del sistema o para implementar, interactuando directamente con el prototipo físico.

El vector de estado actual X que alimenta a los controladores, proviene de las señales de salida del subsistema planta. El vector de estados está compuesto por: la posición del carro (x), la velocidad del carro (\dot{x}), el ángulo del péndulo restringido al rango $[0, 2\pi)$ (θ) y la velocidad angular del péndulo ($\dot{\theta}$).

La estructura general del modelo se asemeja a un esquema de control clásico, en donde una referencia es comparada con la salida del sistema para realizar una acción de control que es luego ejecutada por el actuador. Sin embargo, dado que en este caso se tiene múltiples estrategias de control para dos problemáticas distintas, se incorpora un bloque adicional que permite conmutar entre el controlador de swing-up y el controlador de estabilización. Además, se tienen dos selectores manuales que permiten escoger que estrategia implementa el swing-up y cual implementa la estabilización.

Las constantes utilizadas en el modelo son definidas en el espacio de trabajo de MATLAB.

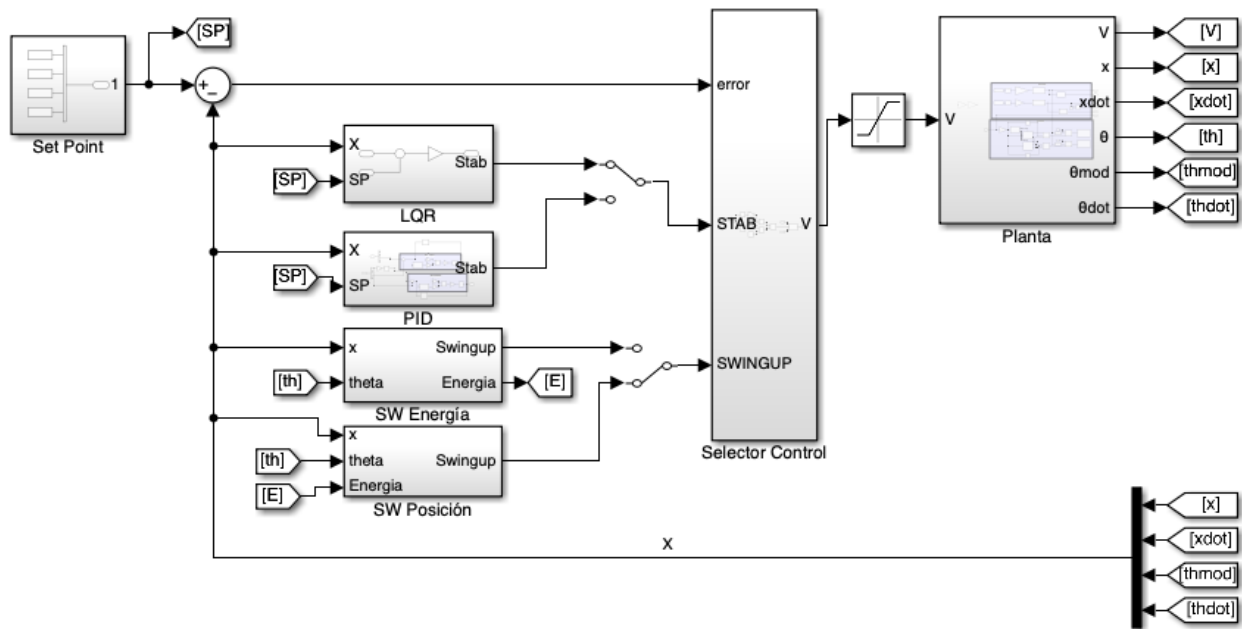


Figura 5.1: Estructura general del modelo de Simulink.

A continuación, se presenta y detalla el funcionamiento de cada subsistema.

5.2.1. Subsistema “Set Point”

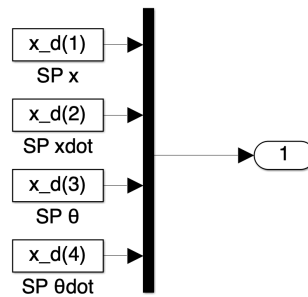


Figura 5.2: Subsistema “Set Point” del modelo de Simulink.

El subsistema mostrado en la Figura 5.2 define el estado deseado del sistema a través los valores del vector x_d , compuesto por cuatro elementos que corresponden en a: la posición del carro, la velocidad del carro, el ángulo del péndulo y la velocidad angular del péndulo.

Para que la linealización realizada del sistema sea válida, se requiere que los valores de la posición del péndulo y velocidad del péndulo sean π y 0, respectivamente. Los otros dos estados, posición y velocidad del carro, se fijan en 0. Estos valores son agrupados mediante un bloque Mux, lo que permite encapsularlos en una única señal vectorial dentro del modelo de Simulink. Los valores deseados pueden ser indexados en otra parte del modelo utilizando un bloque Demux respetando el orden otorgado en este subsistema.

5.2.2. Subsistema “SW Energía”

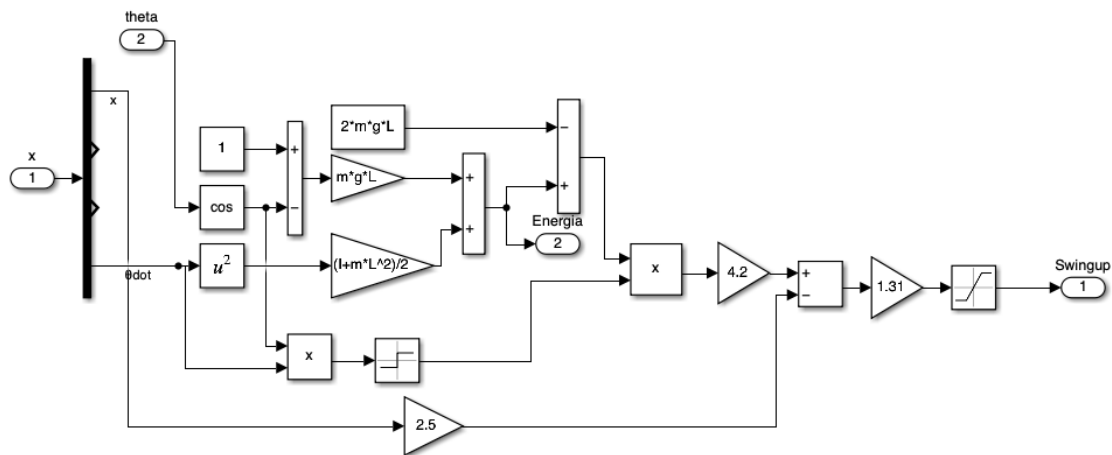


Figura 5.3: Subsistema “SW Energía” del modelo de Simulink.

El subsistema mostrado en la Figura 5.3 implementa el controlador de swing-up basado en energía, descrito en el Capítulo 4.2. Las entradas a este subsistema son el vector de estado actual X y el ángulo del péndulo no restringido, es decir, sin modular en el rango $[0, 2\pi)$, la cual es necesaria para evitar discontinuidades en el cálculo de la energía.

La señal de control es generada a partir de la diferencia entre la energía deseada en la posición vertical y energía la total del sistema, la cual es calculada a partir de la Ecuación 4.2 implementada mediante bloques matemáticos. La ley de control de la Ecuación 4.13 requiere multiplicar este valor por el signo del producto de la velocidad angular del péndulo y su ángulo, para esto se utiliza un bloque Sign. Además, se resta una componente proporcional a la posición del carro, para reducir el desplazamiento acumulado del carro durante el movimiento y evitar que alcance los límites físicos. Por último, a la salida del controlador se encuentra un bloque saturador que limita la acción de control en un rango de $[-ng, ng]$.

5.2.3. Subsistema “SW Posición”

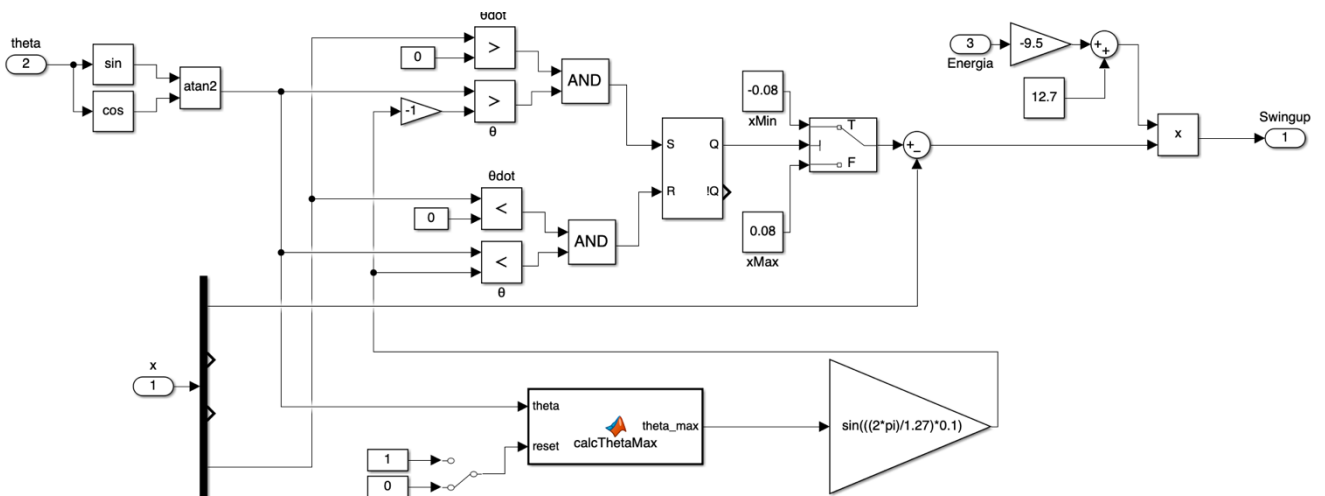


Figura 5.4: Subsistema “SW Posición” del modelo de Simulink.

El subsistema mostrado en la Figura 5.4 implementa el control de swing-up basado en posición, descrito en el Capítulo 4.3. Las entradas a este subsistema son el vector de estado actual X y el ángulo del péndulo no restringido, la cual es restringida al rango $[-180, 180]$ utilizando bloques trigonométricos.

En la parte central del modelo se implementa la lógica descrita en el Capítulo 4.3. Se evalúan condiciones basadas en el ángulo y velocidad angular del péndulo para determinar la dirección en la que debe moverse el carro. Esta lógica activa un Flip-Flop RS que establece el estado de un bloque Switch, el cual conmuta la referencia de posición del carro entre la posición máxima y mínima definida del riel.

El controlador de posición en este subsistema es de tipo proporcional. La ganancia aplicada se modula restando una componente proporcional a la energía actual del sistema, la cual proviene del cálculo realizado en el subsistema de la Figura 5.3. Esta modulación permite que la acción de control sea más leve cuando el péndulo ya posee gran energía, evitando que sobrepase la vertical.

Para mantener el valor de ángulo máximo utilizado en la ley de control presentada en el Capítulo 4.3, se utiliza un bloque función de MATLAB que monitorea la señal de ángulo y mantiene su valor máximo. Esta función también recibe una señal de reset que permite reiniciar el funcionamiento del controlador.

5.2.4. Subsistema “LQR”

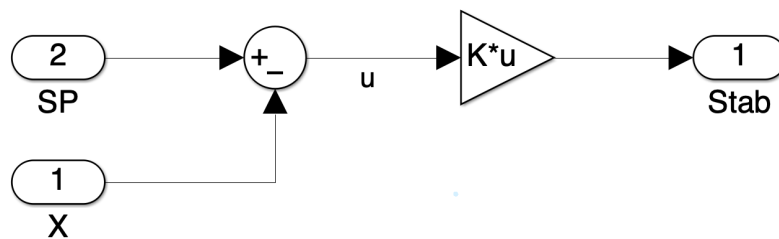


Figura 5.5: Subsistema “LQR” del modelo de Simulink.

El subsistema de la Figura 5.5 implementa el controlador estabilizador por realimentación de estados desarrollado en el Capítulo 4.4. Las entradas al subsistema son el vector de referencia SP (estado deseado) y el vector de estado actual X.

En primer lugar, se calcula el error entre el estado deseado y el estado actual del sistema, mediante la resta de los vectores correspondientes. A continuación, el vector de error es multiplicado por la matriz de ganancias K. Dado que el estado actual fue restado en un comienzo, esta operación describe la ley de control de la Ecuación 4.21.

Los valores del vector de ganancias K se obtienen mediante el comando $lqr(A,B,C,D)$ en MATLAB, donde las entradas al comando son las matrices de estado del sistema.

5.2.5. Subsistema “PID”

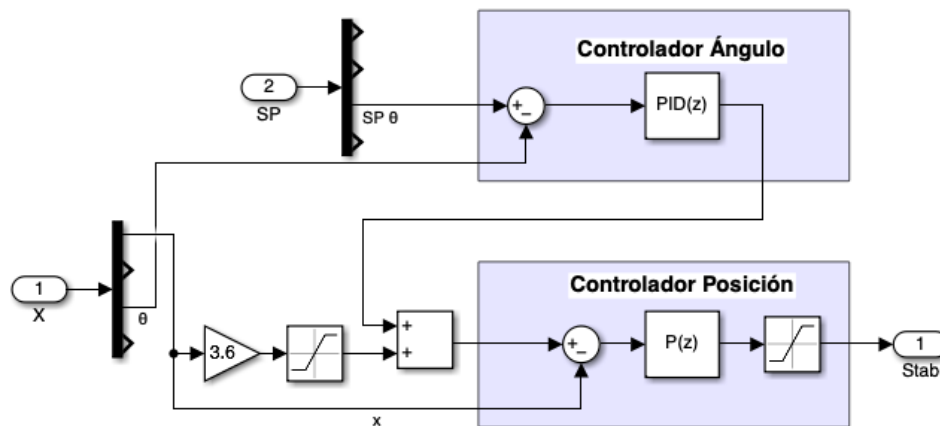


Figura 5.6: Subsistema “PID” del modelo de Simulink.

El subsistema de la Figura 5.6 implementa el controlador de estabilización basado en controladores PID en cascada descrito en el Capítulo 4.5. Las entradas al subsistema son el vector de referencia SP y el vector de estado actual X .

El recuadro superior (Controlador Ángulo) recibe el error entre el ángulo actual del péndulo y la referencia. Este valor es procesado mediante un controlador PID compuesto por una ganancia proporcional, una integral y una derivativa. La salida del controlador de ángulo actúa como señal de referencia para el controlador de posición (Controlador Posición) a la cual se le suma una componente proporcional a la posición del carro, lo que permite compensar la desviación del carro, la suma de estas señales es comparada con el valor actual de la posición del carro. Este último controlador genera la señal de control final, siendo enviada al subsistema “Selector Control”.

5.2.6. Subsistema “Selector Control”

El subsistema mostrado en la Figura 5.7 implementa la lógica de decisión que permite conmutar entre el controlador de swing-up y el de estabilización. Su función es garantizar que el sistema utiliza el controlador adecuado según el estado actual del sistema.

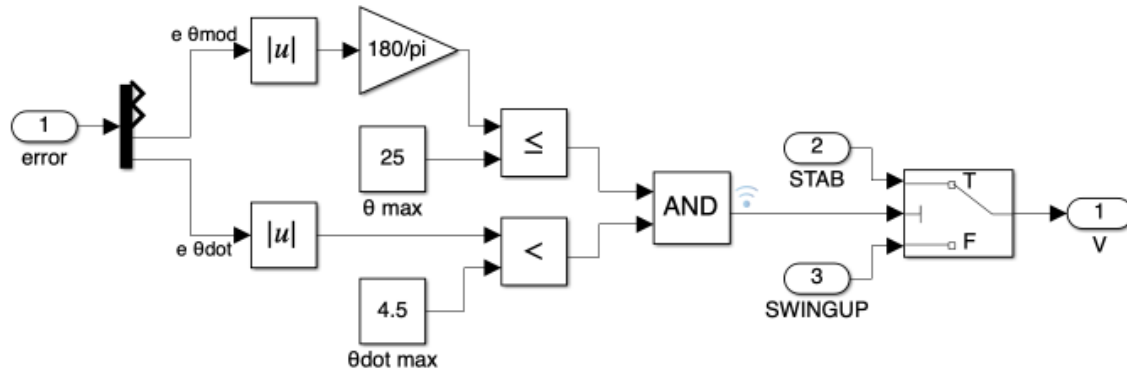


Figura 5.7: Subsistema “Selector Control” del modelo de Simulink.

Las entradas de este subsistema son el error del estado actual con el deseado, y las señales de control de ambos controladores. La salida es la señal del controlador escogido. La lógica interna del sistema verifica dos condiciones:

- Que el valor absoluto del error del ángulo del péndulo sea menor a 25° de la vertical.
- Que el valor absoluto de la velocidad angular del péndulo sea menor a $4.5 \frac{rad}{s}$.

Cuando ambas condiciones se cumplen, se interpreta que el péndulo está suficientemente cerca de la vertical y con baja velocidad angular, por lo que se habilita el controlador de estabilización. Las condiciones se evalúan mediante bloques comparadores y un bloque AND. La salida de este último bloque, establece el estado de un bloque Switch que conmuta entre la señal del controlador de estabilización cuando su entrada es positiva, y la señal del controlador de swing-up cuando es nula.

5.2.7. Subsistema “Planta”

El subsistema que representa la planta en el modelo de Simulink puede tomar dos configuraciones distintas, según el objetivo: una orientada a la implementación en el prototipo físico mediante el uso del microcontrolador, ver Figura 5.8, y otra orientada a realizar simulaciones mediante el modelo no lineal, ver Figura 5.9. A partir de las figuras se aprecia que la estructura interna de los subsistemas cambia, pero las entradas y salidas son las mismas. La entrada es la señal de voltaje que se aplica para generar una fuerza en el carro, mientras que las salidas corresponden al estado completo del sistema: posición y velocidad del carro, ángulo y velocidad angular del péndulo, además se incluye una señal del ángulo del péndulo restringida al rango de $[0, 2\pi)$.

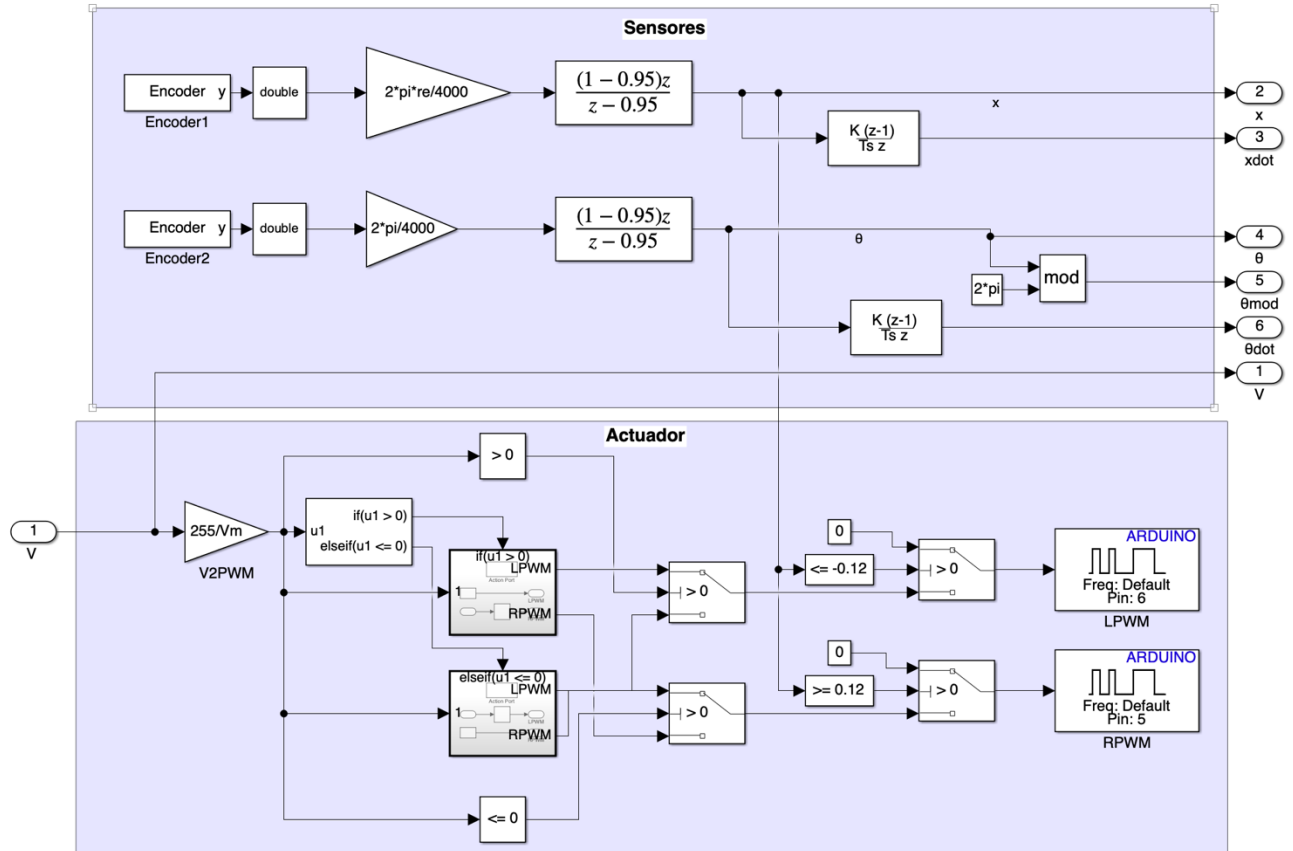


Figura 5.8: Subsistema “Planta” del modelo de Simulink para control del prototipo.

En la Figura 5.8 se muestra el subsistema de planta utilizado para la implementación en el prototipo. En particular, se observan dos principales secciones, la sección superior de adquisición de señales de medición de los sensores encoder, y la sección inferior que implementa la lógica de control del actuador.

5.2.7.1. Lectura de Sensores

La lectura de los sensores encoder se realiza mediante dos bloques Matlab System que ejecutan una rutina llamada Encoder_arduino.m obtenida de la página *File Exchange* de MATLAB, ver Anexo A, la cual interpreta en cuadratura las señales A y B de cada sensor. Esta señal es convertida a una variable tipo double utilizando un bloque Data Type Conversion. Posteriormente, los valores son convertidos a unidades de ingeniería utilizando bloques Gain como sigue:

- Para el sensor de la posición del carro:

$$\frac{x}{Encoder1} = \left(\frac{1rev}{4000cuentas} \right) \left(\frac{2\pi rad}{1rev} \right) \left(\frac{0.0286m}{1rad} \right) \quad (5.1)$$

- Para el sensor del ángulo del péndulo:

$$\frac{\theta}{Encoder2} = \left(\frac{1rev}{4000cuentas} \right) \left(\frac{2\pi rad}{1rev} \right) \quad (5.2)$$

Tras la conversión, las señales son filtradas para reducir el ruido mediante un filtro de primer orden de tipo IIR, con la siguiente función de transferencia en el dominio z:

$$H(z) = \frac{(1 - 0.95)z}{z - 0.95} = \frac{0.05z}{z - 0.95} \quad (5.3)$$

Las mediciones de velocidad (lineal y angular) se obtienen a partir de las mediciones de posición y ángulo mediante bloques Discrete Derivative, que calculan la derivada discreta según la siguiente ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x[n] - x[n - 1]}{T_s} \quad (5.4)$$

5.2.7.2. Control del Actuador

La parte inferior del subsistema de la Figura 5.8 implementa la lógica de control del motor en base a lo descrito en la Tabla 3.1. El motor se acciona mediante dos señales PWM aplicadas a los pines RPWM y LPWM del controlador, siguiendo las siguientes condiciones:

- El motor gira en sentido horario si: RPWM = PWM y LPWM = 0.
- El motor gira en sentido antihorario si: RPWM = 0 y LPWM = PWM.

La señal de control recibida en este subsistema está en el rango del voltaje de motor $[-V_m, V_m]$, por lo que para aplicar correctamente la señal al motor primero se evalúa el signo de la señal, se calcula su valor absoluto, se escala al rango $[0, 255]$ y se envía al pin correspondiente dejando el otro en cero.

Además, se incluyen límites de seguridad para restringir el movimiento del carro dentro del rango físico permitido $[-0.12, 0.12]m$. Si se determina que la posición excede estos límites, se anula la señal de control en aquella dirección, de forma de detener el motor y evitar daños al prototipo.

5.2.7.3. Subsistema para Simulación

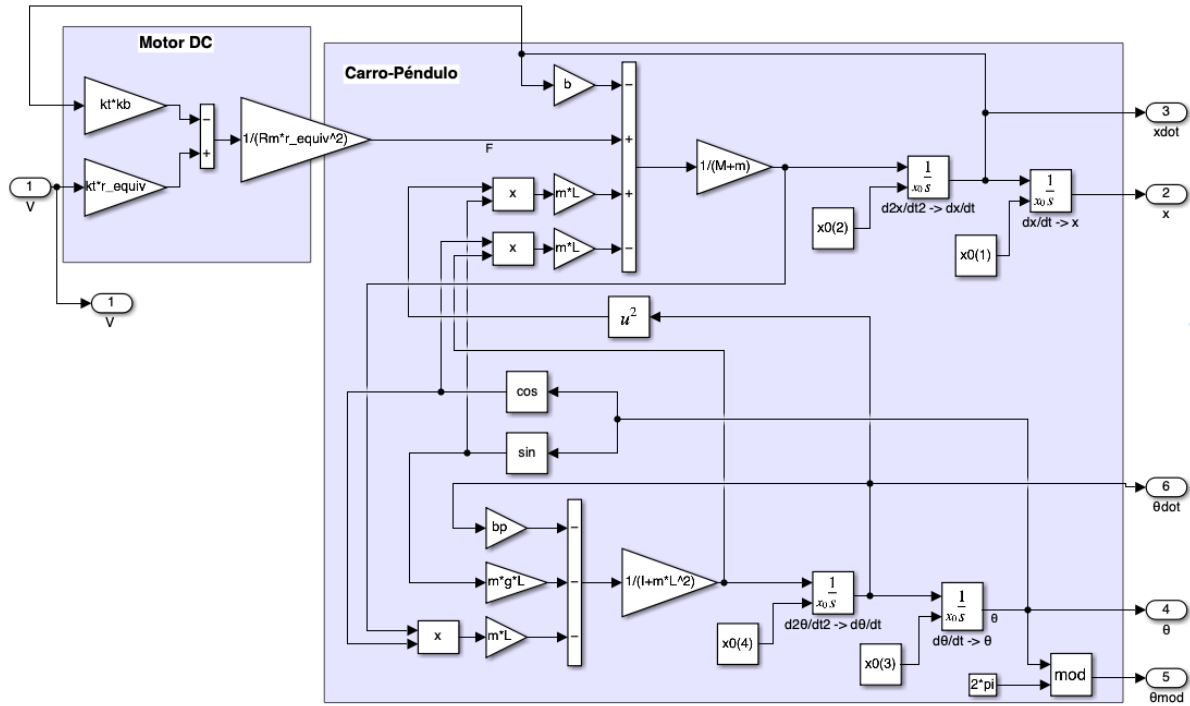


Figura 5.9: Subsistema “Planta” del modelo de Simulink para realizar simulaciones.

El subsistema mostrado en la Figura 5.9 corresponde al modelo utilizado para simular el comportamiento dinámico del sistema carro-péndulo. Este modelo resuelve de manera numérica las ecuaciones diferenciales no lineales obtenidas en el Capítulo 2 y de esta forma poder analizar el desempeño de las estrategias de control de manera previa a su implementación en el prototipo.

En la parte superior izquierda se observa el modelo utilizado para el motor DC, este convierte la señal de voltaje proveniente de los controladores en una fuerza que actúa sobre el carro. El resto del modelo representa el modelo dinámico del sistema carro-péndulo, donde las ecuaciones de movimiento se implementan utilizando operadores matemáticos en forma de bloques. También se emplean bloques Integrator para obtener las variables de estado a partir de sus derivadas. Su valor inicial se puede definir de manera arbitraria mediante un vector de cuatro elementos x_0 establecida en el espacio de trabajo de MATLAB.

El uso del modelo no lineal del sistema, a diferencia de los modelos lineales que solo son válidos en torno al punto de operación, permite validar los controladores en todo el rango de movimiento del péndulo. Esto es especialmente importante para simular de forma continua ambos controladores, de swing-up y de estabilización.

6. Resultados

6.1. Introducción

En este capítulo se presentan y analizan los resultados obtenidos de la validación de los controladores diseñados en el Capítulo 4. Se busca comparar el desempeño de cada estrategia, para los problemas de swing-up y de estabilización, y destacar las ventajas y limitaciones de cada una.

Al final del capítulo, se presenta el desempeño de la estrategia control híbrido mediante swing-up por control de posición y el estabilizador LQR, la cual se identificó como la mejor configuración para el sistema.

6.2. Metodología de las Pruebas

Para evaluar el desempeño de cada controlador se definen dos pruebas estándar aplicadas en tanto en simulación como en la planta real, donde se utilizan en ambos casos las mismas condiciones iniciales. Estas pruebas son:

- Prueba de Swing-up: el péndulo comienza en su estado estable ($\theta = 0$) y debe alcanzar la zona del punto de operación estable. Las métricas en esta prueba son: tiempo para alcanzar la zona de equilibrio, cantidad de movimientos requeridos, requerimiento de desplazamiento del carro y suavidad en la señal de control.

- Prueba de estabilización: el sistema comienza cerca de la posición vertical ($\theta \approx \pi$) y debe mantener el equilibrio del péndulo sin que el carro se desplace fuera del riel. Las métricas en esta prueba son: error en régimen permanente, estabilidad frente a perturbación, y suavidad en la señal de control.

En cada prueba se analizan las señales de: ángulo del péndulo (θ en rad), posición del carro (x en m) y señal de control aplicada al motor (V en V). Para todos los controladores la señal de estado deseado o referencia es igual, tal que:

$$\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

6.3. Resultados de Control de Swing-up

6.3.1. Control por Energía

En la Figura 6.1 se observan los resultados al aplicar la prueba de swing-up al controlador por posición en el prototipo, en donde el movimiento es realizado de forma exitosa.

En la gráfica de desplazamiento del carro se observa un patrón oscilante de amplitud creciente, lo que genera que el ángulo del péndulo aumente progresivamente llevándolo desde la posición estable a la zona de equilibrio. El carro se desplaza alrededor del punto medio del riel alcanzando dentro de un rango de $\pm 0.10\text{m}$, y requiere solo de 5 movimientos para elevar el péndulo realizados en 4.51s.

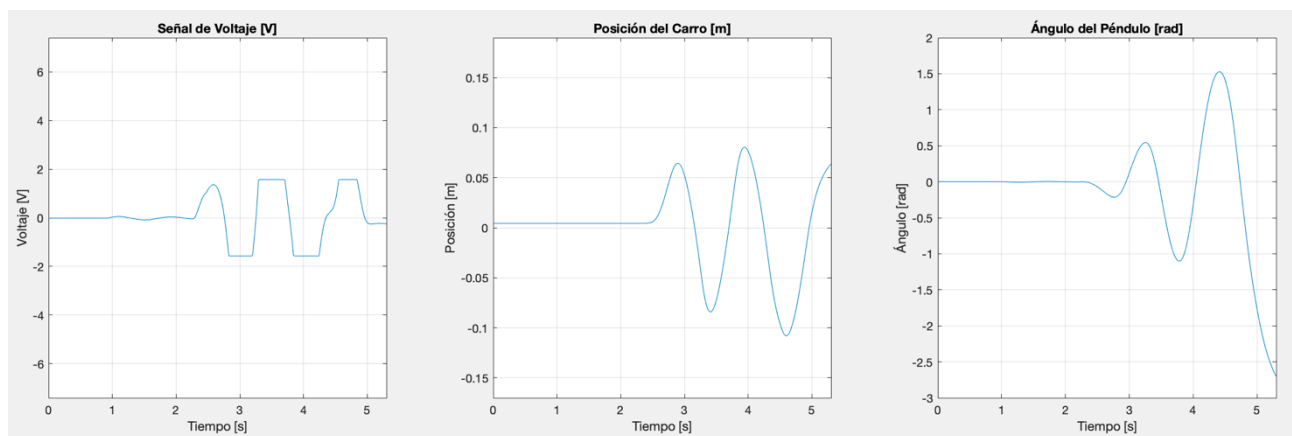


Figura 6.1: Resultados de control de swing-up con controlador por energía.

Si bien en la Figura 6.1 se observa una prueba exitosa, el funcionamiento del controlador es en general errático e inconsistente. En las pruebas realizadas, se logró un éxito aproximadamente 1 de cada 6 intentos, manteniendo las ganancias del controlador sin cambios. En la mayoría de los casos, el péndulo sobrepasa la vertical con un exceso de energía, lo que impide la transición a la estabilización.

Además, se evidenció que el controlador es altamente sensible a los parámetros de sintonía, tal que pequeñas variaciones generan grandes cambios en el comportamiento del sistema, esto dificulta el proceso de sintonización y limita la robustez del método. La falta de restricciones físicas en el desplazamiento del carro también contribuye a que en algunos casos se alcancen los extremos del riel imposibilitando el movimiento.

En la Figura 6.2 se observa una prueba característica en donde el controlador de swing-up no logra elevar el péndulo correctamente. Si bien lo lleva a la vertical, lo hace con demasiada energía y

el controlador estabilizador incluso saturándose, no es capaz de corregir el movimiento y mantener el péndulo en la posición invertida.

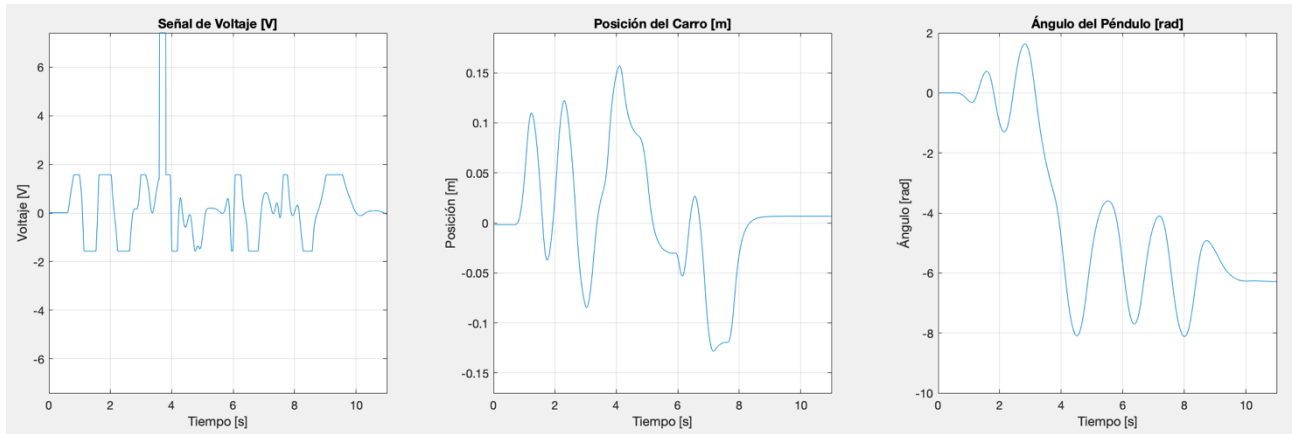


Figura 6.2: Resultado fallido de control de swing-up con controlador por energía.

El controlador de swing-up por energía fue sintonizado mediante un ciclo iterativo de pruebas ajustando progresivamente las ganancias que regulan su funcionamiento. Inicialmente, se fijó una saturación en la señal de control de forma arbitraria, según lo indicado en la Tabla 4.1, con el objetivo de un control suave que requiera de 5 a 10 oscilaciones para alcanzar la vertical. A continuación, se establecieron todas las ganancias en 1 y se evaluó la respuesta del sistema. Luego, se aumentó la ganancia k de forma progresiva tal que el péndulo alcance una posición cercana a la vertical. Este aumento provoca un mayor desplazamiento del carro sobre el riel, por lo que se ajusta de forma creciente la ganancia de corrección de posición. Dado que esta última tiende a disipar la energía del sistema se compensa aumentando levemente la ganancia proporcional a la salida del controlador.

Los parámetros utilizados para la sintonización del controlador se ven de forma resumida en la Tabla 6.1.

Tabla 6.1: Parámetros de sintonización del controlador de swing-up por energía.

Ganancia k	4.2
Ganancia corrección posición	2.5
Ganancia proporcional salida	1.31
Saturación del controlador n	0.18

6.3.2. Control por Posición

La Figura 6.3 muestra los resultados al aplicar la prueba de swing-up al controlador por posición en el prototipo. En base a la señal de voltaje aplicada al motor que presenta una forma oscilatoria con amplitud decreciente, y al ángulo del péndulo que tiene una forma oscilatoria creciente, se observa una inyección de energía controlada al sistema. El movimiento oscilatorio del carro y el péndulo son suaves.

El desplazamiento del carro muestra un movimiento oscilante alrededor del punto medio, alcanzando un máximo de $\pm 0.075\text{m}$, lo cual corresponde en gran medida a las referencias impuestas al control de posición. A medida que el péndulo gana energía se disminuye la ganancia del controlador y se observa que la oscilación del carro pierde magnitud.

El ángulo del péndulo demuestra el proceso de acumulación de energía. Se observa que el péndulo oscila con un aumento gradual en la magnitud. El controlador realiza 15 movimientos en el carro que toman 12.9s en llevar al péndulo desde la posición colgante la zona de equilibrio. Este movimiento puede hacerse más rápido aumentando la ganancia del control de posición, sin embargo, hacer esto puede afectar la estabilidad del sistema.

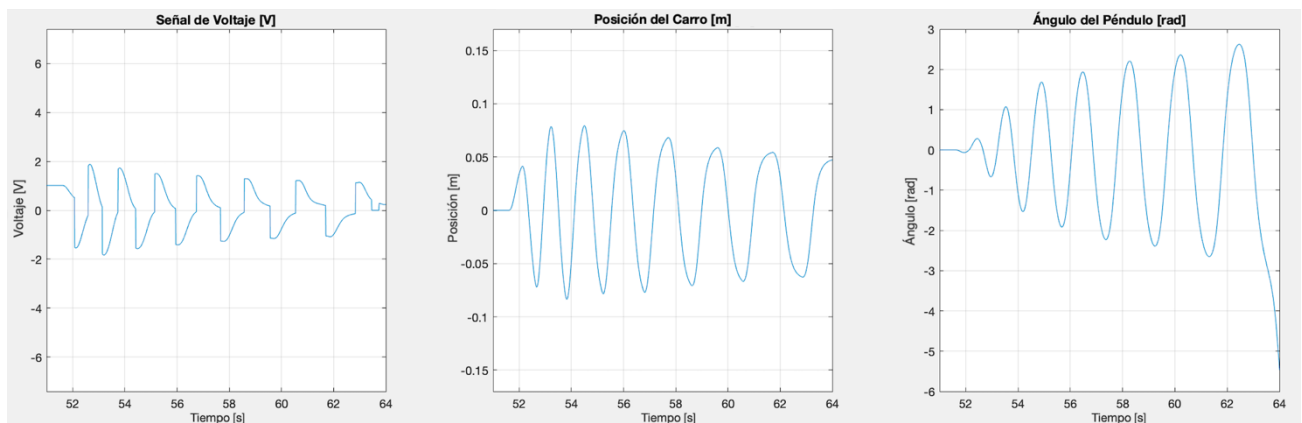


Figura 6.3: Resultados de control de swing-up con controlador por posición.

El controlador de swing-up por posición fue sintonizado mediante un ciclo iterativo de pruebas ajustando progresivamente las ganancias que regulan su funcionamiento. Inicialmente se fijaron las referencias de posición mínima y máxima del carro de forma arbitraria, tal que el movimiento sea acotado dentro de los límites permitidos, dejando un margen de seguridad. A continuación, se fijó la ganancia proporcional en 1 y se fijó en 0 la ganancia de la componente moduladora. Para inducir oscilaciones más amplias que permitan al péndulo acercarse a la posición vertical, se aumenta

progresivamente la ganancia proporcional. Sin embargo, se observa que esto provoca un exceso de energía en la última parte del movimiento que hace que el péndulo sobrepase la vertical. Para mitigar este efecto, se ajusta la ganancia moduladora, de modo que el desplazamiento del carro se haga más suave a medida que aumenta la energía del péndulo.

Los parámetros utilizados para la sintonización del controlador se ven de forma resumida en la Tabla 6.2.

Tabla 6.2: Parámetros de sintonización del controlador de swing-up por posición.

Ganancia proporcional	12.7
Ganancia componente moduladora	-9.52
Referencia posición mínima	-0.08
Referencia posición máxima	0.08

6.4. Resultados de Control de Estabilización

6.4.1. Control LQR

La Figura 6.4 muestra los resultados obtenidos al aplicar la prueba de estabilización al controlador LQR en el prototipo. Como se observa en la gráfica del ángulo del péndulo, el controlador es exitoso en estabilizar al péndulo alrededor de la posición inestable con mínimas desviaciones de ángulo.

La señal de control oscila alrededor de 0V y contiene una componente de alta frecuencia, sin embargo, no alcanza niveles de saturación ($\pm 7.4V$) y se mantiene acotado a un rango de $\pm 1.6V$ aproximadamente. El desplazamiento del carro se mantiene acotado a un rango de $\pm 0.046m$ respecto del centro del riel, lo que implica una oscilación constante del carro, sin embargo, el movimiento se encuentra dentro de los márgenes de operación y no compromete la estabilidad del sistema. De forma similar, el ángulo del péndulo oscila alrededor de $\theta = 0$ con un error máximo de $\pm 0.025rad$.

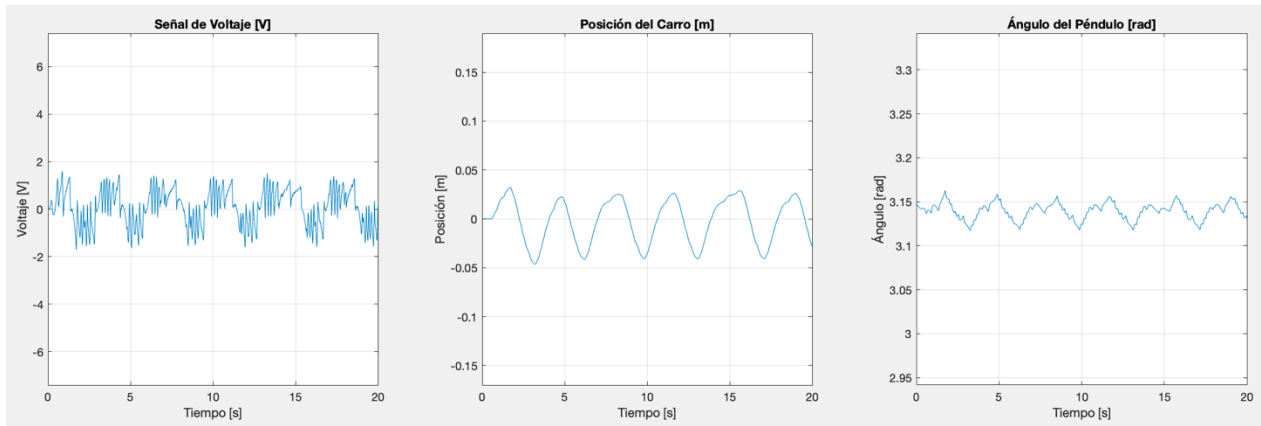


Figura 6.4: Resultados de control de estabilización con controlador LQR.

En la figura 6.5 se muestran los resultados del control LQR ante una presencia de perturbaciones externas. En el desplazamiento del carro se observa que el controlador estaba en régimen estable cuando responde ante perturbaciones en el ángulo del péndulo, para luego volver a régimen estable. En el ángulo del péndulo se observa que el rango de oscilación se amplía a ± 0.07 rad en comparación al régimen estable, sin embargo, el sistema actúa con suficiente rapidez para mantener el péndulo estable. También, se observa que la señal de control oscila alrededor de 0V con una mayor magnitud de ± 3.8 V, sin embargo, no se llega a saturar.

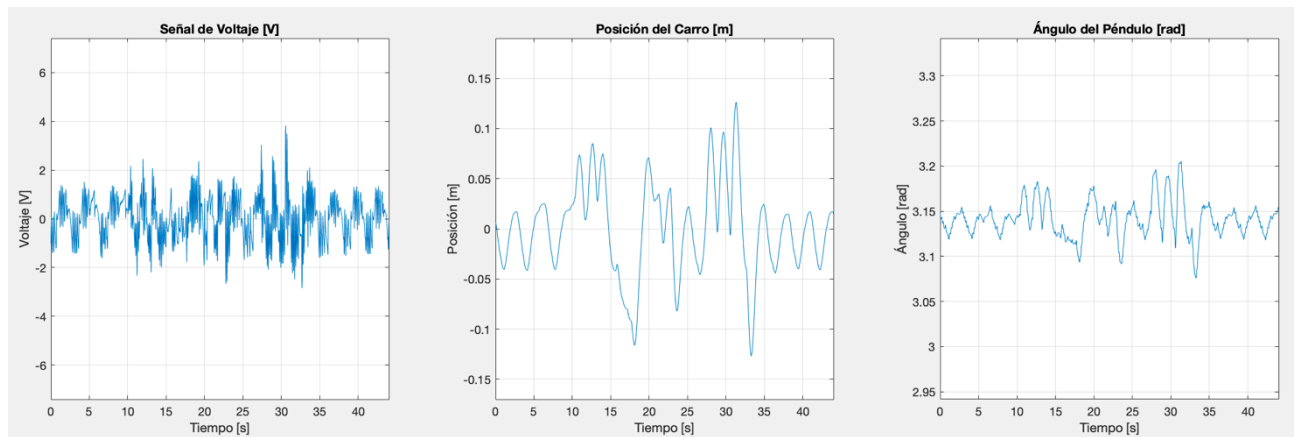


Figura 6.5: Resultados de control de estabilización con controlador LQR ante perturbación externa.

El controlador estabilizador LQR fue sintonizado mediante un ciclo iterativo de pruebas ajustando progresivamente las ganancias de las matrices de ponderación de estado Q y penalización de acción de control R, que regulan su funcionamiento. Inicialmente, se todos los elementos de Q y R

en 1 y se evaluó la respuesta del sistema. Luego, se incrementaron las penalizaciones de estado en pasos de 10 poniendo énfasis en los estados de ángulo del péndulo y posición del carro, con el fin de mejorar la estabilidad del péndulo y reducir el movimiento del carro. Una vez definidos los pesos de la matriz Q, se ajustó progresivamente la ganancia R con el fin de que la respuesta sea más suave sin comprometer la rapidez del sistema.

Los parámetros utilizados para la sintonización del controlador se ven de forma resumida en la Tabla 6.3.

Tabla 6.3: Parámetros de sintonización del controlador estabilizador LQR.

Q	$diag([100, 1, 150, 1])$
R	0.2

6.4.2. Control PID

La Figura 6.6 muestra los resultados obtenidos al aplicar la prueba de estabilización al controlador PID sin corrección de posición del carro en el prototipo. Como se observa en la gráfica de ángulo del péndulo, el controlador es exitoso en un principio pero luego el péndulo cae, esto se debe a que el carro se desplaza hasta el límite del riel.

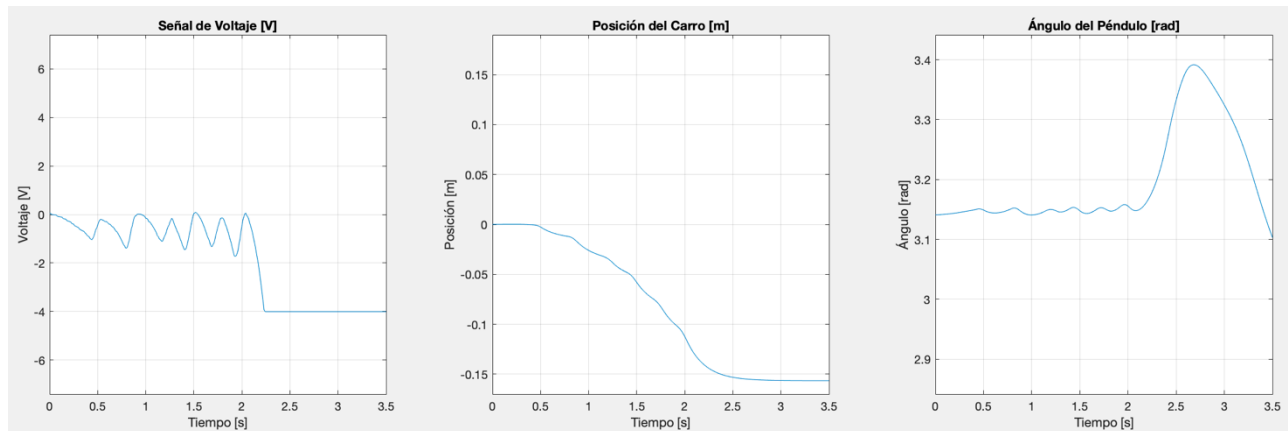


Figura 6.6: Resultados de control de estabilización con controlador PID sin corrección de posición.

La Figura 6.7 muestra los resultados obtenidos al aplicar la prueba de estabilización al controlador PID con corrección de posición del carro en el prototipo, es decir incorporando la componente de posición en la referencia del controlador de posición. Se observa en la gráfica de

ángulo que el controlador es exitoso en mantener al péndulo cercano a la vertical con un error de $\pm 0.08\text{rad}$. En la gráfica de desplazamiento del carro, se observa que se mantiene en una oscilación constante de gran magnitud (0.175m), desplazada del centro del riel. Esto provoca que el carro llegue al extremo del riel y el péndulo caiga. La señal de control oscila alrededor de 0V y contiene una componente de alta frecuencia, sin embargo, no alcanza niveles de saturación ($\pm 7.4\text{V}$) y se mantiene acotado a un rango de $\pm 2\text{V}$ aproximadamente.

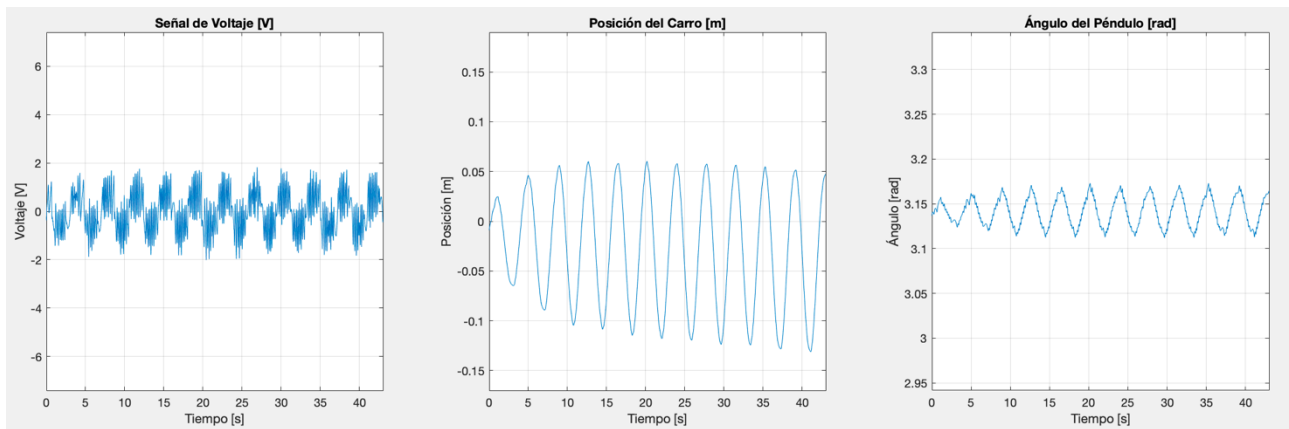


Figura 6.7: Resultados de control de estabilización con controlador PID con corrección de posición.

En la Figura 6.8 se observa el desempeño del controlador ante una mínima perturbación externa, se observa que no es capaz de mantener el péndulo en la posición invertida, incluso saturando la señal de control.

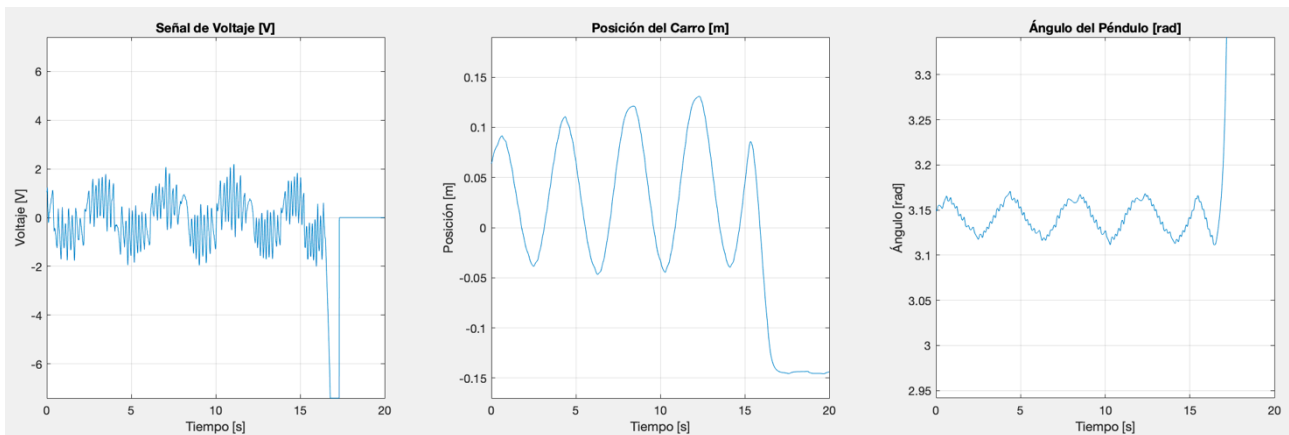


Figura 6.8: Resultados de control de estabilización con controlador PID ante perturbación externa.

Para sintonizar el controlador PID en cascada, se sintonizó primero el lazo interno de posición utilizando el lugar geométrico de las raíces de la respuesta del sistema de orden reducido, luego se sintonizó mediante pruebas iterativas el lazo externo de ángulo y finalmente se ajustó la ganancia de corrección de posición.

Para obtener el modelo reducido de la posición del carro se realizó una prueba en el prototipo aplicando un impulso y se identificó un sistema integrador, con ganancia y constante de tiempo de la forma:

$$G(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)} = \frac{x(s)}{V(s)} \quad (6.2)$$

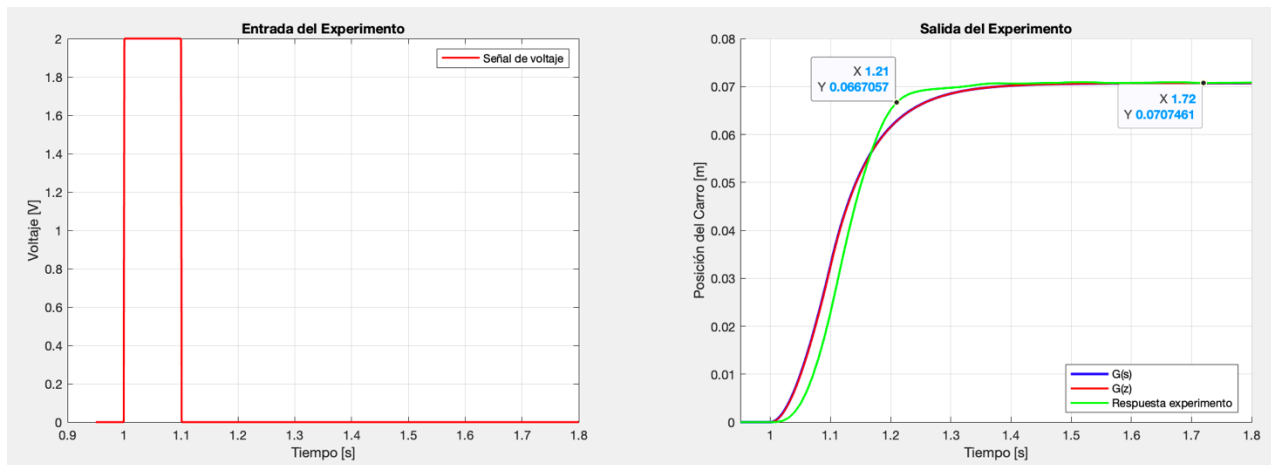


Figura 6.9: Experimento realizado en el prototipo para identificar sistema de orden reducido.

Al observar los resultados del experimento de la Figura 6.9 se determina que la entrada comienza en el segundo 1, tiene una magnitud de 2 durante 0.1s y la salida del sistema se estabiliza en 0.070 aproximadamente, se observa también que el sistema alcanza el 95% del valor final en el instante 1.21s. De esta forma se calcula K y τ como sigue:

$$K = \frac{y_{ss}}{A_{pulsos}} = \frac{0.070}{2 \cdot 0.2} = 0.35 \quad (6.3)$$

$$3\tau = 0.21s \Rightarrow \tau = 0.07s \quad (6.4)$$

Si luego se aproxima esta función de transferencia a tiempo discreto utilizando el retentor de orden cero como sigue:

$$G(z) = Z \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} G(s) \right\} \quad (6.5)$$

Donde T es el tiempo de muestreo y es igual a 0.001s, se tiene:

$$G(z) = K \cdot \frac{z \left(T + \tau \left(e^{-\frac{T}{\tau}} - 1 \right) \right) + \left(\tau \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \right) - T e^{-\frac{T}{\tau}} \right)}{(z - 1) \left(z - e^{-\frac{T}{\tau}} \right)} \quad (6.6)$$

El lugar geométrico de las raíces de la función de transferencia discreta (6.6) se observa en la Figura 6.10. De éste se determina que el sistema reducido es estable ante un controlador de ganancia, y dado que se desea una respuesta sin sobre impulso se selecciona una ganancia alrededor de 10.2.

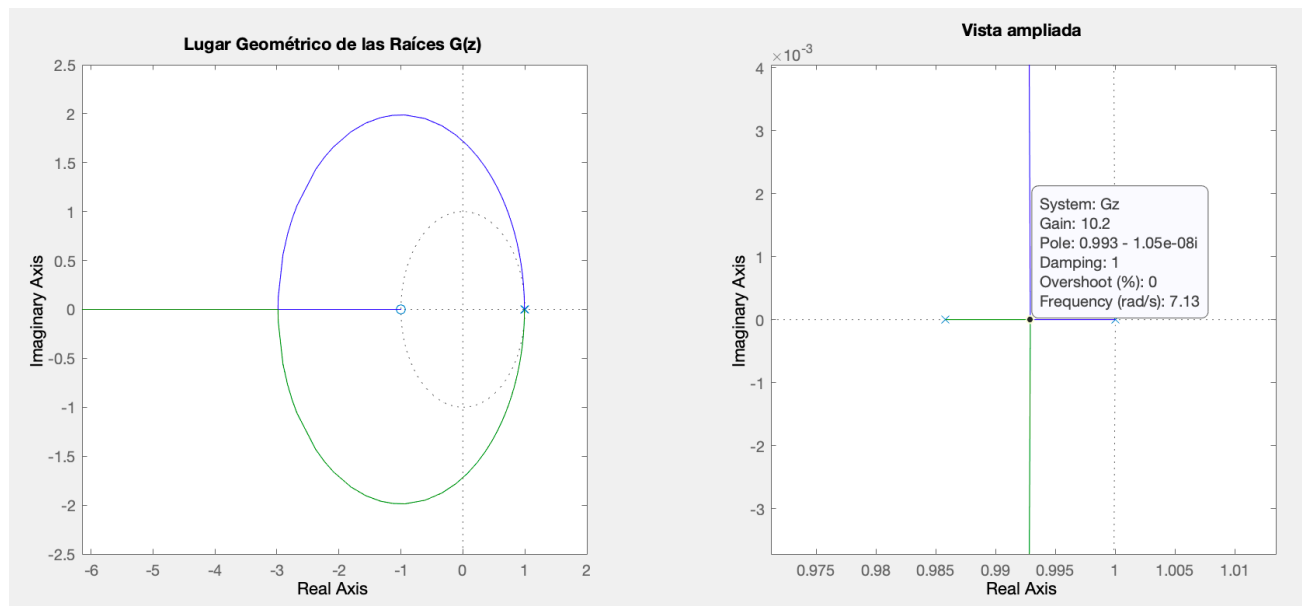


Figura 6.10: Lugar geométrico de las raíces de la función de transferencia discreta identificada.

El lazo exterior se sintonizó mediante un proceso de pruebas iterativas comenzando con la ganancia proporcional para obtener una respuesta rápida del sistema, cuidando que no se generen oscilaciones. Luego se incorporó la ganancia integral para disminuir el error en régimen permanente. Finalmente se ajustó levemente la ganancia derivativa para mejorar la estabilidad del sistema.

Una vez sintonizados los controladores PID se aumenta la ganancia de corrección de posición tal que el carro vuelva al centro a medida que se desvía a los extremos del riel.

Los parámetros utilizados para la sintonización del controlador se ven de forma resumida en la Tabla 6.4.

Tabla 6.4: Parámetros de sintonización del controlador estabilizador PID.

Ganancia proporcional Posición	13
Ganancia proporcional Ángulo	6
Ganancia integral Ángulo	5
Ganancia derivativa Ángulo	0.4
Ganancia corrección posición	3.6
Saturación corrección posición	± 0.8

6.5. Resultado de Control Completo Swing-up y Estabilización

La Figura 6.11 muestra la respuesta del sistema al aplicar la estrategia de control híbrida compuesta por el controlador de swing-up por posición y el controlador de estabilización LQR. A partir de los resultados mostrados en este capítulo, se determinó que estas dos estrategias son las que entregan un mejor desempeño en cada problema.

En la figura se observan distintas dos fases, cuando actúa el controlador de swing-up, los primeros once segundos, y cuando actúa el controlador estabilizador. Durante la primera etapa se observan los movimientos controlados del carro entre las referencias de posición, que generan un movimiento en el péndulo de manera creciente, lo que acumula energía e invierte al péndulo. En la segunda fase, que comienza cuando el péndulo pasa por la vertical, se activa el controlador de estabilización y lo mantiene en la posición invertida. Cuando ocurre la conmutación, se observa un pico a saturación en la señal de voltaje al motor, esto sucede para contrarrestar la trayectoria del péndulo, de lo contrario el péndulo pasa por la vertical y cae.

Este resultado demuestra una integración exitosa entre ambas estrategias, logrando completar la maniobra de swing-up y mantener el equilibrio de forma estable. La transición entre los controladores ocurre sin desestabilizar el péndulo, lo que implica un correcto funcionamiento de ambos controladores en juego.

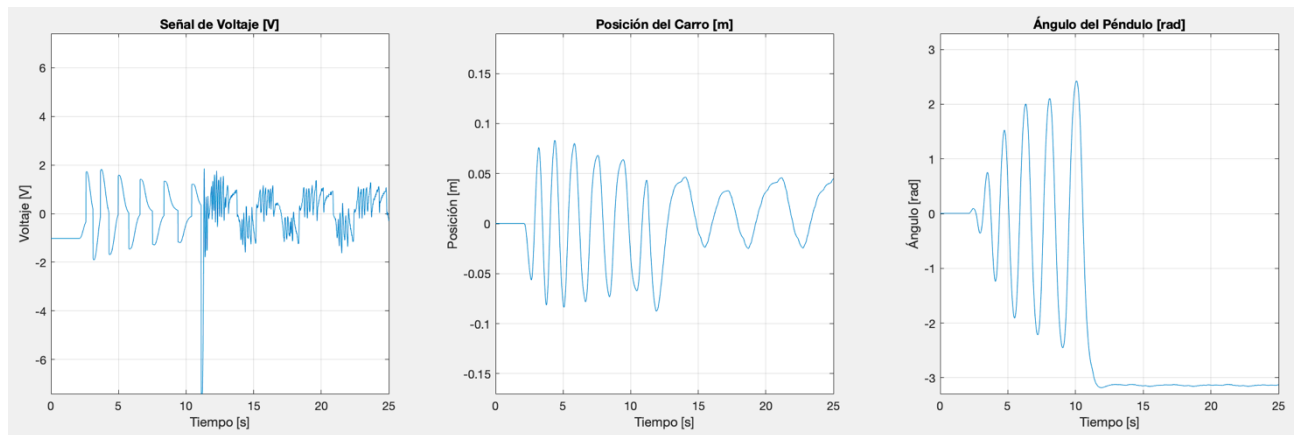


Figura 6.11: Resultados de control de híbrido con LQR y swing-up por posición.

7. Conclusiones

7.1. Sumario

Este trabajo abordó el problema del control de un sistema de péndulo invertido montado sobre un carro móvil, una plataforma ampliamente estudiada por sus carácter no lineal, multivariable, subactuado e inestable. En particular, se trabajó de forma diferenciada con el problema de elevar el péndulo desde la posición estable a la posición invertida (movimiento de swing-up) y el problema de estabilizar el péndulo en la posición invertida (estabilización del péndulo).

Para resolver los problemas de control, se comenzó desarrollando un modelo matemático del sistema mediante dos enfoques fenomenológicos: el método de Euler-Lagrange y un análisis basado en las leyes de Newton. Ambos enfoques permitieron obtener un conjunto de ecuaciones no lineales que describen el comportamiento del sistema. Posteriormente se linealizó el modelo en torno a los puntos de operación estable e inestable.

A partir del modelo, se diseñaron e implementaron cuatro estrategias de control. Dos estrategias están orientadas al movimiento de swing-up, una basada en control de energía y otra basada en el control de la posición del carro. Las otras dos estrategias están orientadas a la estabilización del péndulo en la posición inestable, una basada en control óptimo LQR y otra basada en controladores PID en cascada. Estas estrategias fueron validadas utilizando Simulink e implementadas en un prototipo real construido en el laboratorio.

Las pruebas realizadas fueron evaluadas según un set de métricas que permitieron comparar las estrategias y determinar cuál presenta un mejor desempeño para controlar el sistema.

7.2. Conclusiones

Se desarrolló de forma exitosa un mismo modelo matemático a partir de dos enfoques distintos del sistema carro-péndulo, esto entrega coherencia física y matemática a la formulación del sistema. El sistema de ecuaciones obtenido refleja la dinámica del sistema, y su linealización permitió obtener funciones de transferencias para comprender de mejor forma el sistema.

Se implementaron lazos de control en el prototipo del laboratorio utilizando una arquitectura basada en Simulink y Arduino. El sistema logró operar en tiempo real utilizando un tiempo de muestreo determinado, que permitió el control del sistema.

Se diseñaron, validaron e implementaron dos esquemas de control para el movimiento de swing-up del péndulo. El controlador basado en control de energía logró realizar el movimiento de forma

exitosa, sin embargo presenta poca repetibilidad y la mayoría de las veces se comporta de manera errática, generando un movimiento rápido que es difícilmente controlable por el controlador estabilizador. En cambio, el control de swing-up por posición logró elevar el péndulo de manera exitosa en múltiples pruebas, presenta un comportamiento mucho más suave y controlado, algo deseado para un sistema inestable.

Se diseñaron, validaron e implementaron dos esquemas de control para la estabilización del péndulo. El controlador LQR presentó un comportamiento adecuado y robusto ante perturbaciones, logrando controlar al péndulo con una respuesta rápida, utilizando un menor desplazamiento del carro. En contraste, el controlador PID en cascada mostró la tendencia a desplazar el carro a los extremos del riel y una mayor sensibilidad ante perturbaciones.

El sistema de control híbrido compuesto por swing-up por posición y estabilización LQR es el más efectivo entre los evaluados. Esta configuración entrega una gran precisión y permite el control completo del sistema.

En conclusión, se valida la hipótesis demostrando que si es posible desarrollar e implementar controladores basados en estrategias de control de posición y LQR que permitan resolver los problemas de swing-up y estabilización en una planta de péndulo invertido con carro móvil.

7.3. Trabajo Futuro

En base a lo expuesto en este trabajo, se identifican diversas líneas de investigación que permitirían profundizar en el estudio del sistema péndulo invertido. Una de ellas es la implementación de controladores predictivos basados en modelo, que permitirían anticipar el comportamiento del sistema. Desde un enfoque más moderno, se propone evaluar el desempeño de controladores inteligentes, como redes neuronales o de lógica difusa, que no requieren un modelo exacto del sistema y pueden adaptarse a condiciones variables. En esta misma línea, podría investigarse el uso de controladores adaptativos que sean robustos ante cambios en los parámetros del sistema como cambios en la masa del péndulo o las fricciones del movimiento.

Por otro lado, se sugiere explorar el desempeño del sistema utilizando un actuador de mayor precisión, lo que permitiría mejorar el desempeño de la estabilización en régimen permanente y realizar movimientos más definidos en la etapa de swing-up. También se propone incorporar un control directo sobre la corriente del motor, con el fin de lograr una actuación más precisa y consistente.

Referencias

- [1] A. K. Stimac, "Standup and Stabilization of the Inverted Pendulum", Bachelor dissertation, Dept. Mech. Eng., MIT, Cambridge, MA, 1999.
- [2] K. Sultan, "Inverted Pendulum, Analysis, Design and Implementation", MATLAB Central File Exchange, July 25 2003. Available: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/3790-inverted-pendulum>
- [3] A. Baciú and C. Lazar, "Position Control of a Mobile Inverted Pendulum System Using Model-Free Intelligent Controllers", 2021 23rd International Conference on Control Systems and Computer Science (CSCS), Bucharest, Romania, pp. 15-20, 2021.
- [4] W. Xu, X. Chang, H. Zhang and X. Zhu, "Double Closed-loop Fuzzy Control and VR Simulation of Single Inverted Pendulum", 2021 40th Chinese Control Conference (CCC), Shanghai, China, pp. 230-233, 2021.
- [5] C. Wang, C. Xi, J. Li and B. Zou, "Design of H_∞ Controller for Single Inverted Pendulum based on LMI", 2023 3rd International Conference on Electrical Engineering and Control Science (IC2ECS), Hangzhou, China, pp. 1149-1152, 2023.
- [6] F. Xinxin, K. Yu and J. Huiyu, "Data-driven control for single inverted-pendulum system", Proceedings of the 31st Chinese Control Conference, Hefei, China, pp. 7131-7134, 2012.
- [7] D. Upadhyay, N. Tarun and T. Nayak, "ANN based intelligent controller for inverted pendulum system," *2013 Students Conference on Engineering and Systems (SCES)*, Allahabad, India, pp. 1-6, 2013.
- [8] S. Nundrakwang, T. Benjanarasuth, J. Ngamwiwit and N. Komine, "Hybrid Controller for Swinging up Inverted Pendulum System," *2005 5th International Conference on Information Communications & Signal Processing*, Bangkok, Thailand, pp. 488-492, 2005.
- [9] C. W. Anderson, "Learning to control an inverted pendulum using neural networks," in *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 9, no. 3, pp. 31-37, April 1989.
- [10] M. -T. Vo, H. -N. Duong and V. -H. Nguyen, "Comparative Study Of Swing-Up Controllers: Passivity-Based Swing-Up Control And Sliding Mode Technique Combined Energy-Based Method For Rotational Inverted Pendulum System," *2024 9th International Conference on Applying New Technology in Green Buildings (ATiGB)*, Danang, Vietnam, pp. 218-223, 2024.

- [11] K. Y. Chou and Y. P. Chen, "Energy based swing-up controller design using phase plane method for rotary inverted pendulum," 2014 13th International Conference on Control Automation Robotics & Vision (ICARCV), Singapore, pp. 975-979, 2014.
- [12] K.J. Åström, K. Furuta, "Swinging up a pendulum by energy control," *Automatica*, Volume 36, Issue 2, 2000, Pages 287-295.
- [13] M. Tinkir, M. Kalyoncu, U. Onen and F. M. Botsali, "Pid and interval type-2 fuzzy logic control of double inverted pendulum system," 2010 The 2nd International Conference on Computer and Automation Engineering (ICCAE), Singapore, pp. 117-121, 2010.
- [14] S. Sehgal and S. Tiwari, "LQR control for stabilizing triple link inverted pendulum system," *2012 2nd International Conference on Power, Control and Embedded Systems*, Allahabad, India, pp. 1-5, 2012.
- [15] P. Gautam, "System identification of nonlinear Inverted Pendulum using artificial neural network," 2016 International Conference on Recent Advances and Innovations in Engineering (ICRAIE), Jaipur, India, pp. 1-5, 2016.
- [16] S. K. Gorade, P. S. Gandhi and S. R. Kurode, "Modeling and output feedback control of Flexible Inverted Pendulum on Cart," 2015 International Conference on Power and Advanced Control Engineering (ICPACE), Bengaluru, India, pp. 436-440, 2015.
- [17] S. Brock, "Swing-Up Methods for Inverted Pendulum," 2003 International Conference on Electrical Drives and Power Electronics, Slovakia, 2003.
- [18] R. -A. Cioacă and C. Flutur, "Reaction Wheel Control of an 3D Printed Inverted Pendulum," *2021 23rd International Conference on Control Systems and Computer Science (CSCS)*, Bucharest, Romania, pp. 57-61, 2021.
- [19] B. Sütö and Z. Lendek, "Switching control of a rotary inverted pendulum," *2022 26th International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC)*, Sinaia, Romania, 2022, pp. 111-116.
- [20] S. Wang, "Research on Inverted Pendulum Control Based on Cascade Fuzzy Control and Neural Network Control," *2024 IEEE 2nd International Conference on Image Processing and Computer Applications (ICIPCA)*, Shenyang, China, 2024, pp. 742-747.
- [21] M. Švec, Š. Ileš and J. Matuško, "Sliding Mode Control of Custom Built Rotary Inverted Pendulum," *2020 43rd International Convention on Information, Communication and Electronic Technology (MIPRO)*, Opatija, Croatia, 2020, pp. 943-947.

Anexo A. Código MATLAB

analisis_fdt.m

```
%% Punto Estable
a2 = m*L^2 + I;
a1 = bp;
a0 = m*g*L;
b4 = (M+m)*(m*L^2+I)-m^2*L^2;
b3 = (M+m)*bp+(m*L^2+I)*b;
b2 = (M+m)*m*g*L+bp*b;
b1 = m*g*L*b;
c2 = -m*L;

%Ec. (2.40)
num2 = [c2 0];
den2 = [b4 b3 b2 b1];
G2 = tf(num2,den2);
pole_G2 = pole(G2)
zero_G2 = zero(G2)

%Ec. (2.43)
num1 = [a2 a1 a0];
den1 = [b4 b3 b2 b1 0];
G1 = tf(num1,den1);
pole_G1 = pole(G1)
zero_G1 = zero(G1)

figure()
subplot(3,2,1);pzmap(G1); title('PZ Map Posición Carro');
subplot(3,2,2);pzmap(G2); title('PZ Map Ángulo Péndulo');
subplot(3,2,3);rlocus(G1); title('Rlocus Posición Carro');
subplot(3,2,4);rlocus(G2); title('Rlocus Ángulo Péndulo');
subplot(3,2,5);bode(G1); title('Bode Posición Carro');
subplot(3,2,6);bode(G2); title('Bode Ángulo Péndulo');
sgtitle('Linealización Punto de Operación Estable', 'FontWeight', 'bold');

%% Punto Inestable
a2 = m*L^2 + I;
a1 = bp;
a0 = -m*g*L;
b4 = (M+m)*(m*L^2+I)-m^2*L^2;
b3 = (M+m)*bp+(m*L^2+I)*b;
b2 = -(M+m)*m*g*L+b*bp;
b1 = -m*g*L*b;
c2 = m*L;

%Ec. (2.49)
num2 = [c2 0];
den2 = [b4 b3 b2 b1];
G2 = tf(num2,den2);
pole_G2 = pole(G2)
zero_G2 = zero(G2)

%Ec. (2.52)
num1 = [a2 a1 a0];
den1 = [b4 b3 b2 b1 0];
G1 = tf(num1,den1);
pole_G1 = pole(G1)
zero_G1 = zero(G1)
```

```

figure()
subplot(3,2,1);pzmap(G1); title('PZ Map Posición Carro');
subplot(3,2,2);pzmap(G2); title('PZ Map Ángulo Péndulo');
subplot(3,2,3);rlocus(G1); title('RLocus Posición Carro');
subplot(3,2,4);rlocus(G2); title('RLocus Ángulo Péndulo');
subplot(3,2,5);bode(G1); title('Bode Posición Carro');
subplot(3,2,6);bode(G2); title('Bode Ángulo Péndulo');
sgtitle('Linealización Punto de Operación Inestable', 'FontWeight', 'bold');

```

parametros.m

```

% Sistema Carro/Pendulo
F = 0;           % Fuerza de entrada
m = 0.048;      % Masa del péndulo
M = 0.220;     % Masa del carro
L = 0.395;     % Longitud del péndulo
g = 9.81;      % Gravedad
b = 0.043;     % Coeficiente de fricción carro
bp = 0.0003;   % Coeficiente de fricción de rotación
Tosc = 2*pi*sqrt(L/g); % Periodo de oscilación
I = (1/3)*0.048*L^2+m*L^2; % Momento de inercia
x0 = [0; 0; 0.1; 0]; % [x, dx, θ, dθ] Condiciones iniciales
x_d = [0; 0; pi; 0.0]; % [x, dx, θ, dθ] Estado Deseado

% Motor DC
Vm = 7.4;      % Voltaje de motor
Rm = 1.5;     % Resistencia interna
kt = 0.008;   % Constante de torque
kb = 0.024;   % Constante FEM
rm = 0.012/2; % Radio engranaje motor
N = 88/18;    % Relación de dientes engranaje
re = 0.0572/2; % Radio engranaje salida motor y encoder
r_equiv = re/N; % Radio Equivalente

```

poleplace_carpemd.m

```

% Matrices de estado (u = Vm)
ds = (M+m)*(I+m*L^2)-m^2*L^2;
A = [0 1 0 0;
     0 -(I+m*L^2)*(b+(kt*kb)/(Rm*r_equiv^2))/ds m^2*g*L^2/ds -m*L*bp/ds;
     0 0 0 1;
     0 -m*L*(b+(kt*kb)/(Rm*r_equiv^2))/ds (M+m)*m*g*L/ds -bp*(M+m)/ds];
B = [0; (I+m*L^2)*kt/(ds*Rm*r_equiv); 0; m*L*kt/(ds*Rm*r_equiv)];

eig(A); % Autovalores de la matriz A
rank(ctrb(A,B)); % Controlabilidad del sistema

Q = diag([100, 1, 150, 1]); % Penalización de estado
R = 0.2; % Esfuerzo de control
K = lqr(A,B,Q,R)

```

Encoder_arduino.m

```
classdef Encoder_arduino < realtime.internal.SourceSampleTime ...
    & coder.ExternalDependency ...
    & matlab.system.mixin.Propagates ...
    & matlab.system.mixin.CustomIcon
%
%Read the position of a quadrature encoder.
%
%
% Copyright 2014 The MathWorks, Inc.
%#codegen
%#ok<EMCA>

properties (Nontunable)
    Encoder = 0
    PinA = 2
    PinB = 3
end

properties (Constant, Hidden)
    % AvailablePin specifies the range of values allowed for Pin. You
    % can customize the AvailablePin for a particular board. For
    % example, use AvailablePin = 2:13 for Arduino Uno.
    AvailablePin = 0:53;
    MaxNumEncoder = 3
end

methods
    % Constructor
    function obj = Encoder_arduino(varargin)
        coder.allowpcode('plain');

        % Support name-value pair arguments when constructing the object.
        setProperties(obj,nargin,varargin{:});
    end

    function set.PinA(obj,value)
        coder.extrinsic('sprintf') % Do not generate code for sprintf
        validateattributes(value,...
            {'numeric'},...
            {'real','nonnegative','integer','scalar'},...
            '',...
            'PinA');
        assert(any(value == obj.AvailablePin), ...
            'Invalid value for Pin. Pin must be one of the following: %s', ...
            sprintf('%d ', obj.AvailablePin));
        obj.PinA = value;
    end

    function set.PinB(obj,value)
        coder.extrinsic('sprintf') % Do not generate code for sprintf
        validateattributes(value,...
            {'numeric'},...
            {'real','nonnegative','integer','scalar'},...
            '',...
            'PinB');
        assert(any(value == obj.AvailablePin), ...
            'Invalid value for Pin. Pin must be one of the following: %s', ...
            sprintf('%d ', obj.AvailablePin));
        obj.PinB = value;
    end
end
```

```

end

function set.Encoder(obj,value)
    validateattributes(value,...
        {'numeric'},...
{'real','nonnegative','integer','scalar','>=' ,0,'<=' ,obj.MaxNumEncoder},...
        '','...',
        'Encoder');
    obj.Encoder = value;
end
end

methods (Access=protected)
function setupImpl(obj)
    if coder.target('Rtw')
        % Call: void enc_init(int enc, int pinA, int pinB)
        coder.cinclude('encoder_arduino.h');
        coder.ceval('enc_init', obj.Encoder, obj.PinA, obj.PinB);
    end
end

function y = stepImpl(obj)
    y = int32(0);
    if coder.target('Rtw')
        % Call: int enc_output(int enc)
        y = coder.ceval('enc_output', obj.Encoder);
    end
end

function releaseImpl(obj) %#ok<MANU>
end
end

methods (Access=protected)
%% Define output properties
function num = getNumInputsImpl(~)
    num = 0;
end

function num = getNumOutputsImpl(~)
    num = 1;
end

function flag = isOutputSizeLockedImpl(~,~)
    flag = true;
end

function varargout = isOutputFixedSizeImpl(~,~)
    varargout{1} = true;
end

function flag = isOutputComplexityLockedImpl(~,~)
    flag = true;
end

function varargout = isOutputComplexImpl(~)
    varargout{1} = false;
end

function varargout = getOutputSizeImpl(~)
    varargout{1} = [1,1];
end

```

```

end

function varargout = getOutputDataTypeImpl(~)
    varargout{1} = 'int32';
end

function icon = getIconImpl(~)
    % Define a string as the icon for the System block in Simulink.
    icon = 'Encoder';
end
end

methods (Static, Access=protected)
function simMode = getSimulateUsingImpl(~)
    simMode = 'Interpreted execution';
end

function isVisible = showSimulateUsingImpl
    isVisible = false;
end
end

methods (Static)
function name = getDescriptiveName()
    name = 'Encoder';
end

function b = isSupportedContext(context)
    b = context.isCodeGenTarget('rtw');
end

function updateBuildInfo(buildInfo, context)
    if context.isCodeGenTarget('rtw')
        % Update buildInfo
        rootDir = fullfile(fileparts(mfilename('fullpath')), '..', 'src');
        buildInfo.addIncludePaths(rootDir);
        buildInfo.addIncludeFiles('encoder_arduino.h');
        buildInfo.addSourceFiles('encoder_arduino.cpp', rootDir);
    end
end
end
end
end
end

```

encoder_arduino.h

```

#ifndef _ENCODER_ARDUINO_H
#define _ENCODER_ARDUINO_H
#include "rtwtypes.h"

#ifdef __cplusplus
extern "C" {
#endif

void enc_init(int enc, int pinA, int pinB);
int enc_output(int enc);

#ifdef __cplusplus
}
#endif
#endif // _ENCODER_ARDUINO_H

```

encoder_arduino.cpp

```

#include <Arduino.h>
#include "encoder_arduino.h"

typedef struct
{
    int pinA;
    int pinB;
    int pos;
    int del;
} Encoder;
volatile Encoder Enc[3] = {{0,0,0,0}, {0,0,0,0}, {0,0,0,0}};

// Auxiliary function to handle encoder attachment
static int getIntNum(int pin)
{
    // Returns the interrupt number for a given interrupt pin
    // See http://arduino.cc/it/Reference/AttachInterrupt
    switch(pin) {
        case 2:
            return 0;
        case 3:
            return 1;
        case 21:
            return 2;
        case 20:
            return 3;
        case 19:
            return 4;
        case 18:
            return 5;
        default:
            return -1;
    }
}

// Auxiliary debouncing function
static void debounce(int del)
{
    for (int k = 0; k < del; k++) {
        // can't use delay in the ISR so need to waste some time
        // performing operations, this uses roughly 0.1ms on uno
        k = k +0.0 +0.0 -0.0 +3.0 -3.0;
    }
}

// Interrupt Service Routine: change on pin A for Encoder 0
static void irsPinAEn0(void)
{
    // Read pin B right away
    int drB = digitalRead(Enc[0].pinB);

    // Possibly wait before reading pin A, then read it
    debounce(Enc[0].del);
    int drA = digitalRead(Enc[0].pinA);

    // this updates the counter
    if (drA == HIGH)
    {
        // low->high on A?
        if (drB == LOW) { // check pin B
            Enc[0].pos++; // going clockwise: increment
        }
    }
}

```

```

        else {
            Enc[0].pos--; // going counterclockwise: decrement
        }
    }
    else {
        // must be high to low on A
        if (drB == HIGH) { // check pin B
            Enc[0].pos++; // going clockwise: increment
        }
        else {
            Enc[0].pos--; // going counterclockwise: decrement
        }
    } // end counter update
} // end ISR pin A Encoder 0

```

```

// Interrupt Service Routine: change on pin B for Encoder 0
static void isrPinBEn0(void)
{

```

```

    // read pin A right away
    int drA = digitalRead(Enc[0].pinA);

    // possibly wait before reading pin B, then read it
    debounce(Enc[0].del);
    int drB = digitalRead(Enc[0].pinB);

    // this updates the counter
    if (drB == HIGH) { // low->high on B?
        if (drA == HIGH) { // check pin A
            Enc[0].pos++; // going clockwise: increment
        } else {
            Enc[0].pos--; // going counterclockwise: decrement
        }
    } else {
        // must be high to low on B
        if (drA == LOW) { // check pin A
            Enc[0].pos++; // going clockwise: increment
        } else {
            Enc[0].pos--; // going counterclockwise: decrement
        }
    } // end counter update
} // end ISR pin B Encoder 0

```

```

// Interrupt Service Routine: change on pin A for Encoder 1
static void irsPinAEn1(void)
{

```

```

    // read pin B right away
    int drB = digitalRead(Enc[1].pinB);

    // possibly wait before reading pin A, then read it
    debounce(Enc[1].del);
    int drA = digitalRead(Enc[1].pinA);

    // this updates the counter
    if (drA == HIGH) { // low->high on A?
        if (drB == LOW) { // check pin B
            Enc[1].pos++; // going clockwise: increment
        } else {
            Enc[1].pos--; // going counterclockwise: decrement
        }
    } else { // must be high to low on A

```

```

        if (drB == HIGH) { // check pin B
            Enc[1].pos++; // going clockwise: increment
        } else {
            Enc[1].pos--; // going counterclockwise: decrement
        }
    } // end counter update
} // end ISR pin A Encoder 1

// Interrupt Service Routine: change on pin B for Encoder 1
static void isrPinBEn1(void)
{
    // read pin A right away
    int drA = digitalRead(Enc[1].pinA);

    // possibly wait before reading pin B, then read it
    debounce(Enc[1].del);
    int drB = digitalRead(Enc[1].pinB);

    // this updates the counter
    if (drB == HIGH) { // low->high on B?
        if (drA == HIGH) { // check pin A
            Enc[1].pos++; // going clockwise: increment
        } else {
            Enc[1].pos--; // going counterclockwise: decrement
        }
    } else { // must be high to low on B
        if (drA == LOW) { // check pin A
            Enc[1].pos++; // going clockwise: increment
        } else {
            Enc[1].pos--; // going counterclockwise: decrement
        }
    }
} // end counter update
} // end ISR pin B Encoder 1

// Interrupt Service Routine: change on pin A for Encoder 2
static void irsPinAEn2(void)
{
    // read pin B right away
    int drB = digitalRead(Enc[2].pinB);

    // possibly wait before reading pin A, then read it
    debounce(Enc[2].del);
    int drA = digitalRead(Enc[2].pinA);

    // this updates the counter
    if (drA == HIGH) { // low->high on A?
        if (drB == LOW) { // check pin B
            Enc[2].pos++; // going clockwise: increment
        } else {
            Enc[2].pos--; // going counterclockwise: decrement
        }
    }
    else { // must be high to low on A
        if (drB == HIGH) { // check pin B
            Enc[2].pos++; // going clockwise: increment
        } else {
            Enc[2].pos--; // going counterclockwise: decrement
        }
    }
}

```

```

    } // end counter update
} // end ISR pin A Encoder 2

// Interrupt Service Routine: change on pin B for Encoder 2
static void isrPinBEn2(void)
{
    // read pin A right away
    int drA = digitalRead(Enc[2].pinA);

    // possibly wait before reading pin B, then read it
    debounce(Enc[2].del);
    int drB = digitalRead(Enc[2].pinB);

    // this updates the counter
    if (drB == HIGH) { // low->high on B?
        if (drA == HIGH) { // check pin A
            Enc[2].pos++; // going clockwise: increment
        } else {
            Enc[2].pos--; // going counterclockwise: decrement
        }
    }
    else { // must be high to low on B
        if (drA == LOW) { // check pin A
            Enc[2].pos++; // going clockwise: increment
        } else {
            Enc[2].pos--; // going counterclockwise: decrement
        }
    }
} // end counter update
} // end ISR pin B Encoder 2

// Initialization function called by Encoder System object
extern "C" void enc_init(int enc, int pinA, int pinB)
{
    // enc is the encoder number and it can be 0,1 or 2
    // if other encoder blocks are present in the model
    // up to a maximum of 3, they need to refer to a
    // different encoder number

    // store pinA and pinB in global encoder structure Enc
    // they will be needed later by the interrupt routine
    // that will not be able to access s-function parameters

    Enc[enc].pinA=pinA; // set pin A
    Enc[enc].pinB=pinB; // set pin B

    // set encoder pins as inputs
    pinMode(Enc[enc].pinA, INPUT);
    pinMode(Enc[enc].pinB, INPUT);

    // turn on pullup resistors
    digitalWrite(Enc[enc].pinA, HIGH);
    digitalWrite(Enc[enc].pinB, HIGH);

    // attach interrupts
    switch(enc) {
        case 0:
            attachInterrupt(getIntNum(Enc[0].pinA), irsPinAEn0, CHANGE);
            attachInterrupt(getIntNum(Enc[0].pinB), isrPinBEn0, CHANGE);
            break;

```

```

        case 1:
            attachInterrupt(getIntNum(Enc[1].pinA), irsPinAEn1, CHANGE);
            attachInterrupt(getIntNum(Enc[1].pinB), isrPinBEn1, CHANGE);
            break;
        case 2:
            attachInterrupt(getIntNum(Enc[2].pinA), irsPinAEn2, CHANGE);
            attachInterrupt(getIntNum(Enc[2].pinB), isrPinBEn2, CHANGE);
            break;
    }
}

// Output function called by Encoder System object
extern "C" int enc_output(int enc)
{
    return (double)Enc[enc].pos;
}
// [EOF]

```

**UNIVERSIDAD DE CONCEPCION – FACULTAD DE INGENIERIA
RESUMEN DE MEMORIA DE TITULO**

Departamento : Departamento de Ingeniería Eléctrica
Carrera : Ingeniería Civil Electrónica
Nombre del memorista : Álvaro Vicente Ferdinando Villagra Rolleri
Título de la memoria : Control de Prototipo de Planta de Péndulo Invertido
Fecha de la presentación oral : 27/Agosto/2025

Profesor(es) guía : Alejandro Rojas N.
Profesor(es) revisor(es) : José Espinoza C. y Daniel Sbarbaro H.
Concepto :
Calificación :

Resumen (máximo 200 palabras)

El trabajo presenta el diseño, validación e implementación de estrategias de control para un sistema de péndulo invertido sobre carro móvil en los problemas de swing-up y de estabilización. Se desarrolló un modelo fenomenológico utilizando dos enfoques distintos, el método de Euler Lagrange, basado en energía y mediante un análisis de fuerzas basado en las leyes de Newton. Ambos métodos conducen al mismo modelo dinámico, el cual es linealizado alrededor de los dos puntos de operación del sistema para obtener representaciones en funciones de transferencia y espacio de estados.

En base al modelo se diseñan dos estrategias de control para la etapa de swing-up, una mediante control de energía y otra basada en el control de la posición del carro. Para la estabilización del péndulo se diseña un controlador óptimo LQR y un controlador basado en un esquema PID en cascada. Cada estrategia fue implementada en un prototipo físico desarrollado en el laboratorio. Los resultados obtenidos demuestran que la estrategia de swing-up por posición tiene un mejor desempeño para elevar el péndulo en un espacio reducido, mientras que el controlador LQR presenta un desempeño superior frente al esquema PID, tanto en robustez ante perturbaciones como estabilidad general del sistema.