



Universidad de Concepción
Campus Los Ángeles
Escuela de Educación
Departamento de Ciencias Básicas



LA HABILIDAD DE REPRESENTAR EN EL CURRÍCULUM DE ENSEÑANZA MEDIA EN CHILE

Seminario para optar al Título Profesional de Profesor de Matemática y Educación
Tecnológica con el grado de Licenciado en Educación.

Seminarista

Juan Paulo Rocha Domínguez

Profesor Guía

Dra. Marianela Isabel Castillo Fernández
Profesora Matemática y Computación, Licenciada en Educación
Doctora en Matemática

Los Ángeles, marzo 2021.

Comisión evaluadora

Dra. Marianela Isabel Castillo Fernández
Profesora Matemática y Computación, Licenciada en Educación
Doctora en Matemática

Dr. Cristian Gamaliel Pérez Toledo
Ingeniero Civil Electrónico
Doctor en Ciencias Aplicadas, Mención Ingeniería Matemática

Mg. Jorge Edgardo Cid Anguita
Profesor de Matemáticas y Física
Magister en Enseñanza de las ciencias, Mención Matemáticas

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento.

© 2021 Juan Paulo Rocha Domínguez

Dedicatoria.

A mis padres, Juan y Fresia, quienes me dieron la vida y me inculcaron desde siempre el valor de la educación, a mi hermana Margarita quien ha sido un ejemplo a seguir, a mi cuñado Luis y a mi pequeño sobrino L. Mateo fuente de apoyo y alegría, a mi hermana Nicole quien es mi orgullo y ejemplo de dedicación, a mi hijo Joaquín quién es mi inspiración y la alegría de mi vida, a mi compañera de vida y mejor amiga Patricia quién es mi pilar fundamental y me apoyo siempre en este proceso, a mis abuelos y familia en general que son mis raíces, a mis amigos que son apoyo incondicional.

A los profesores de mi carrera quienes me formaron, a la profesora Marianela quien fue mi guía y apoyo en este proceso y me tuvo infinita paciencia y para terminar a los tíos de la biblioteca con quien siempre pude compartir y conversar durante mis años de estudio.

Resumen

En el presente estudio se indaga sobre la habilidad de representar y su inherente relación con las habilidades argumentar y comunicar, resolver problemas y modelar que se han incorporado en el currículum de Educación Media en Chile, además se busca recoger información de cómo se desarrolla la habilidad de representar en relación con el profesor y el estudiante.

Para esta investigación se hace una revisión bibliográfica de la literatura disponible con respecto a las habilidades matemáticas que están incluidas en el currículum escolar chileno, con énfasis en la habilidad de representar. La información recopilada se presenta como una monografía.

Esta revisión bibliográfica reúne información relevante para la comprensión del rol y uso de la habilidad de representar y de las habilidades: argumentar y comunicar, resolver problemas y modelar en el proceso de enseñanza aprendizaje, desde una perspectiva nacional e internacional con aspectos y ejemplos relativos al profesor y al estudiante.

Palabras Claves: habilidad representar, habilidad matemática, competencia, resolver problemas, procesos matemáticos.

Abstract

This study investigates the skill to represent and its inherent relationship with the skills of arguing and communicating, solving problems and modeling that have been incorporated into the curriculum of Secondary Education in Chile, and it also seeks to collect information on how the skill is developed to represent in relation to the teacher and the student.

For this research, a bibliographic review is made of the available literature regarding the mathematical skills that are included in the Chilean school curriculum, with emphasis on the skill to represent. The information collected is presented as a monograph.

This bibliographic review gathers relevant information for the understanding of the role and use of the skill to represent and the skills: to argue and communicate, solve problems and model in the teaching-learning process, from a national and international perspective with aspects and examples related to the teacher and student.

Key Words: skill to represent, mathematical skill, competence, problem solving, mathematical processes.

Índice

Dedicatoria.....	4
Resumen.....	5
Abstract.....	6
Índice	7
Índice de Ilustraciones	9
Introducción	11
Capítulo I: Planteamiento del problema, Objetivos de Investigación y Metodología	13
1. Planteamiento del problema.....	13
2. Objetivos de investigación.....	16
3. Metodología de investigación.....	17
Capítulo II: Información recopilada	20
1. Habilidades Matemáticas.....	20
1.1.¿Qué es una Habilidad Matemática?	20
1.2 Habilidad v/s Competencia Matemática.	22
1.3 Habilidad/Capacidad.....	26
1.4 Relación de los conceptos Capacidad / Habilidad / Competencia.....	29
2 Habilidades matemáticas en el Currículum Nacional.....	30
2.1 Resolver problemas.....	31
2.2 Representar.....	32
2.2 Argumentar y comunicar	34
2.3 Modelar	35
3 Las habilidades matemáticas en el Currículo de Singapur.	37
3.1 Curriculum de Matemática en Singapur.	40
3.2 Temas y grandes ideas	41
3.3 Marco Curricular.....	42

3.4 Competencias para el Siglo XXI.....	46
4 Qué significa representar en Matemática.....	47
4.1 Significado de la palabra representar en el ámbito de la Matemática.....	47
4.2 Habilidad de Representar en Matemática (Definiciones)	49
5 Cómo el profesor desarrolla la habilidad de representar en sus estudiantes... 51	
5.1 Prácticas que debe aplicar el profesor para el desarrollo de la habilidad de representar.....	51
5.2 ¿Por qué usar distintas representaciones en el aula de matemática?.....	58
5.3 Ejemplos de usos de distintas representaciones	61
6 Relación de la habilidad de representar con las otras habilidades presentes en el currículum.....	68
6.1 Resolver problemas.....	68
6.2 Modelar	70
6.3 Argumentar y comunicar	71
Capítulo III: Conclusiones y Reflexión	73
1. Conclusión	73
2. Reflexión.....	75
Bibliografía	77

Índice de Ilustraciones

Ilustración N ° 1. Capacidades sobre la función cuadrática y su contribución al desarrollo de competencias matemáticas. Fuente: (Lupiañez & Rico, 2008, p. 43)..	28
Ilustración N ° 2. Relación entre competencias, capacidades y tareas. Fuente: (Lupiañez & Rico, 2008, p. 41)	29
Ilustración N ° 3. Themes and Big Ideas. Fuente: (Ministry of Education of Singapore, 2019, p. 5)	41
Ilustración N ° 4. Mathematics syllabuses: Secondary one to four. Fuente: (Ministry of Education of Singapore, 2019, p. 9)	43
Ilustración N ° 5. Mathematics Curriculum Framework. Fuente: (Ministry of Education of Singapore, 2019, p. 10).	45
Ilustración N ° 6. Descripción niveles dimensión Diversidad de representaciones. Fuente: (CIAE, INEE y Mineduc, 2018, p. 34).	55
Ilustración N ° 7. Ejemplos por niveles de la dimensión Diversidad de representaciones. Fuente: (CIAE, INEE y Mineduc, 2018, p. 35).	55
Ilustración N ° 8. Descripción niveles dimensión Promoción del pensamiento en torno a las matemáticas. Fuente: (CIAE, INEE y Mineduc, 2018, p. 40).	56
Ilustración N ° 9. Ejemplos por niveles de la dimensión Promoción del pensamiento en torno a las matemáticas. Fuente: (CIAE, INEE y Mineduc, 2018, p. 40).....	57
Ilustración N ° 10. Descripción niveles dimensión Cierre matemático de la actividad. Fuente: (CIAE, INEE y Mineduc, 2018, p. 40).	57
Ilustración N ° 11. Ejemplos por niveles de la dimensión Cierre matemático de la actividad. Fuente: (CIAE, INEE y Mineduc, 2018, p. 41).	58
Ilustración N ° 12. Intervalo en recta numérica. Fuente: Míguez (2005, p. 25)....	62

Ilustración N ° 13. Gráfica senoidal. Fuente: Míguez (2005, p. 25).....	62
Ilustración N ° 14. Comprender el concepto de fracción y la relación parte todo. Fuente: (MINEDUC, 2016, p. 14)	64
Ilustración N ° 15. Representaciones no habituales de fracciones. Fuente: (MINEDUC, 2016, p. 15)	64
Ilustración N ° 16. Visualizar y justificar, a partir de diferentes representaciones. Fuente: (MINEDUC, 2016, p. 15)	65
Ilustración N ° 17. Problema de los precios. Fuente: (Espinoza et al. 2018, p. 32)	65
Ilustración N ° 18. Tabla de la caracterización de los procesos de la habilidad de representar. Fuente: (Espinoza et al. 2018, p. 32).....	66
Ilustración N ° 19. Proceso: Entender y utilizar las relaciones entre diversas representaciones de la misma entidad. Fuente: (Espinoza et al. 2018, p. 33).....	66
Ilustración N ° 20. Proceso: Escoger y traducir representaciones en otras: por ejemplo, para resolver el siguiente problema. Fuente: (Espinoza et al. 2018, p. 33)	67
Ilustración N ° 21. Proceso: Usar representaciones para interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos (construcción de modelo intermedio). Fuente: (Espinoza et al. 2018, p. 33)	67
Ilustración N ° 22. Gráfico: Trayectoria de un proyectil. Fuente: (Míguez, 2005, p. 23)	70
Ilustración N ° 23. Gráfico: Curva exponencial. Fuente: (Míguez, 2005, p. 24) ...	70

Introducción

Al revisar las Bases curriculares de 3° y 4° medio de Chile, vemos que en ellas se estipula que “uno de los objetivos de estas Bases Curriculares, de acuerdo a la legislación vigente, es la formación ciudadana, lo que está en directa relación con el desarrollo de las habilidades para el siglo XXI MINEDUC (2015, p. 17). Se debe entender que, según el nuevo enfoque internacional en educación y ahora también nacional, ya no solo basta con la enseñanza de conocimientos inherentes a alguna asignatura como matemática, sino que también se resalta la importancia de desarrollar habilidades que le permitan al estudiante utilizar estos conocimientos ya sea en su etapa escolar, en su vida cotidiana, incorporándolas a la tecnología actual (las tecnologías útiles en el siglo XXI) o en lo que sea que este se vaya a desempeñar o a emprender.

Las habilidades expuestas por el MINEDUC (2015,2019) son: Representar, Resolver problemas, Argumentar y Comunicar, y Modelar las que se desarrollan al resolver problemas rutinarios y no rutinarios. El presente trabajo busca estudiar e indagar respecto de la habilidad de representar, en relación a esto el MINEDUC (2015, p. 316) menciona que, para “trabajar en Matemática, se requiere utilizar diferentes formas de representación. En estos niveles, se propone también que los estudiantes transiten fluida y progresivamente desde lo concreto hasta el lenguaje simbólico”.

En una primera parte se plantea el estudio de la habilidad de representar en conjunto con las otras habilidades propuesto por el Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] a través de la recopilación de información presente en diversos documentos como artículos y marcos curriculares.

En una segunda parte se exponen la información recogida en la forma de una Monografía. Entre los temas estudiados se inicia con el estudio del concepto de habilidad matemática y su relación con los conceptos de capacidad, procesos y competencia matemática. Por otro lado, se indaga en las habilidades matemáticas presentes en las Bases Curriculares chilenas y también en el currículum de Singapur durante la enseñanza Media o Secundaria, todo esto porque al modernizar las Bases

Curriculares de Chile se estudia el sistema educativo de diversos países que destacan a nivel internacional por tener modelos educativos exitosos y un buen desarrollo social y económico, tal es el caso de Singapur. Si bien el objeto de estudio es la habilidad de representar, se hace imprescindible comenzar primero de manera general estudiando el resto de las habilidades presentes en el currículum de Chile y también las de otros programas de estudio para finalmente decantar en la habilidad de representar, ya que entre las habilidades matemáticas hay una estrecha relación.

Una vez entrando en el área de estudio deseada, se inicia por el concepto de representar, que es de uso cotidiano en el quehacer matemático, pero de una complejidad poco intuitiva. Con este concepto se avanza en la habilidad de representar donde se busca definir la habilidad, qué se debe hacer para desarrollar la habilidad en los estudiantes, se buscan ejemplos en que se haga uso de diversas representaciones o que se ocupen representaciones con un el objetivo de desarrollar la habilidad de representar y se termina el capítulo con la relación de la habilidad de representar con las habilidades de resolver problemas, argumentar y comunicar, y la de modelar. Estas relaciones entre las habilidades de algún modo u otro van siendo evidentes desde el inicio de esta investigación.

Finalmente, en el tercer capítulo se presentan las conclusiones de la información recogida para este estudio respecto de la habilidad de representar y su relación con las otras habilidades, así como también la reflexión del autor.

Capítulo I: Planteamiento del problema, Objetivos de Investigación y Metodología

En este capítulo se presenta el planteamiento del problema referente a la habilidad de representar y el énfasis que muestran los currículum nacional e internacional en el desarrollo de habilidades. Además, se presenta el objetivo general, los objetivos específicos y la metodología usada para la investigación.

1. Planteamiento del problema

El MINEDUC ha implementado nuevas Bases Curriculares en todos los niveles educativos. En el caso de la enseñanza media esto se ha hecho en dos documentos, uno de 7° básico a 2° medio y otro de 3° y 4° medio. Así, el MINEDUC (2019, p. 17), deja claro que “la Ley General de Educación (Ley 20.370) establece una nueva normativa respecto de la estructura del ciclo escolar, que redefine la Educación Media y le otorga una duración de seis años (...)”, en consecuencia, la Enseñanza Media comprenderá los niveles de 7° básico a 4° medio. Es importante detallar los nuevos lineamientos en las bases curriculares y la expansión de la enseñanza media, dado que el interés de este estudio se centra en el desarrollo de habilidades con énfasis en la habilidad representar en la asignatura de matemática en Enseñanza Media de Chile.

De acuerdo con las Bases Curriculares de 7° básico a 2° medio, en el ámbito del conocimiento y la cultura, se proponen varios objetivos generales, a continuación, se mencionan los que tienen una mayor relevancia para este estudio MINEDUC (2015):

- “Pensar en forma reflexiva, evaluando y utilizando información y conocimientos, de manera sistemática y metódica, para la formulación de proyectos y resolución de problemas”. (p. 12)

- “Comprender y utilizar conceptos y procedimientos matemáticos básicos, relativos a números y formas geométricas, en la resolución de problemas cotidianos, y apreciar el aporte de la matemática para entender y actuar en el mundo”. (p. 12)

Para 3° y 4° medio en el ámbito personal y social, entre otros objetivos generales, el MINEDUC (2019, p. 17), plantea lo siguiente: “Desarrollar capacidades de emprendimiento y hábitos, competencias y cualidades que les permitan aportar con su trabajo, iniciativa y creatividad al desarrollo de la sociedad”, en el ámbito del conocimiento y la cultura se destaca el objetivo: “comprender y aplicar conceptos, procedimientos y formas de razonamiento matemático para resolver problemas numéricos, geométricos, algebraicos y estadístico, y para modelar situaciones y fenómenos reales, formular inferencias y tomar decisiones fundadas” MINEDUC (2019, p. 18).

Con lo anterior, queda en evidencia el nuevo enfoque de la educación para la Enseñanza Media, donde no solo se busca que los estudiantes adquieran conocimientos, sino que, además los estudiantes sean capaces de usar estos conocimientos en diversos aspectos de la vida cotidiana.

El MINEDUC (2019, p. 24) estipula que cada asignatura tiene un enfoque donde “se explicitan también los énfasis teóricos y las perspectivas disciplinares desde las cuales se espera que los docentes y estudiantes aborden los conocimientos, habilidades y actitudes incluidos en los Objetivos de Aprendizaje”. En la asignatura de matemática, este enfoque señala que “pone énfasis en la relación entre el conocimiento matemático, el aprendizaje de la matemática y sus aportes a la formación de las personas. La resolución de problemas, el razonamiento matemático y estadístico, el modelamiento, la representación, la argumentación y la comunicación siguen siendo aspectos centrales para la formación y el hacer de la asignatura Matemática en la escuela” (MINEDUC, 2019, p.103).

El enfoque para la enseñanza Media de la asignatura de matemática es prácticamente el mismo, y en él se destaca que los estudiantes deben adquirir conocimientos, actitudes y habilidades con el fin de aprender matemática y en el que

la resolución de problemas es uno de los aspectos centrales. En cuanto a las habilidades, el MINEDUC (2016, p. 8 y 9), destaca cuatro habilidades que los profesores deben desarrollar y potenciar en sus estudiantes durante su etapa escolar: Resolución de Problemas, Argumentar y Comunicar, Modelamiento Matemático y Representar.

La importancia de la habilidad representar es mencionada por el MINEDUC (2016), citando a (Duval, 1999), donde se enuncia que “manejar una variedad de representaciones matemáticas de un mismo concepto y transitar fluidamente entre ellas, permitirá a las y los estudiantes lograr un aprendizaje significativo y desarrollar su capacidad de pensar matemáticamente” y además menciona que “toda representación debe transformarse de modo tal que puedan extraerse de ellas variados conocimientos, y así, no solo comunicar datos, sino que también transformar una representación para hacer explícito lo implícito”.

En este nuevo paradigma educativo, el desarrollo de habilidades tiene un papel fundamental y aunque se quiere indagar en la habilidad de representar, no se puede dejar de lado el resto de las habilidades mencionadas por el MINEDUC, pues estas habilidades matemáticas se utilizan muchas veces de forma simultánea, así lo menciona (Font, Godino y Gallardo, 2013), citados por MINEDUC (2016. P. 12), quienes proponen que “cuando un estudiante realiza y evalúa una tarea matemática, activa un conglomerado formado por situaciones problema, representaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos”.

Todo esto nos lleva a plantear las siguientes preguntas que guían esta investigación monográfica:

P1. ¿Qué son las habilidades matemáticas?

P2. ¿Cómo se relaciona la habilidad de representar con los contenidos presentes en el currículum de Matemática?

P3. ¿Qué significa representar en Matemática?

P4. ¿De qué manera se puede desarrollar la habilidad de representar en los estudiantes?

P5. ¿Cómo se relaciona la habilidad de representar con las otras habilidades presentes en el currículum de Matemática?

2. Objetivos de investigación

A continuación, se presenta el objetivo general y los objetivos específicos de la investigación.

Objetivo general de la investigación:

- Estudiar la habilidad de representar, su relación con el currículum de Matemática en Educación Media de Chile recopilando información de cómo se desarrolla la habilidad de representar en relación con el profesor y al estudiante.

Para alcanzar el objetivo general se definen los siguientes objetivos específicos:

OE1. Indagar sobre la habilidad de representar y su presencia en el currículum de Educación Media chileno.

OE2. Mostrar ejemplos sobre situaciones en que se aplique la habilidad de representar por parte de los profesores.

OE3. Mostrar ejemplos sobre situaciones en que se aplique la habilidad de representar por parte de los estudiantes.

OE4. Determinar la relación de la habilidad representar con las habilidades: argumentar y comunicar, resolución de problemas y modelamiento presentes en el currículum de Educación Media del sistema escolar chileno.

3. Metodología de investigación

La metodología utilizada en esta investigación corresponde a una revisión de la literatura, la cual “implica detectar, consultar y obtener la bibliografía (referencias) y otros materiales que sean útiles para los propósitos del estudio, de donde se tiene que extraer y recopilar la información relevante y necesaria para enmarcar nuestro problema de investigación” (Hernández et al., 2010, p. 53). Esta revisión permite extraer la información necesaria para responder las preguntas planteadas y con ello cumplir los objetivos de esta investigación.

Los objetivos de la revisión de la literatura son los siguientes (Guirao, 2015):

- Identificar las aproximaciones teóricas elaboradas sobre el tema.
- Identificar las evidencias disponibles más actuales.
- Resumir información sobre un tema o problema.

La revisión de los artículos de investigación se basa en los siguientes pasos propuestos por Díaz (2012, p. 19):

Paso 1. Hojear el artículo: consiste en “leer los nombres de los autores, Mira el año en que fue escrito. Interpreta el título del artículo, Identifica las secciones en que está dividido, Mira las gráficas, figuras, tablas o fotos, Mira la bibliografía, si es reciente y relacionada con el tema”.

Paso 2. Leer el resumen del artículo: implica tratar de entender “lo más posible, Identifica el argumento central del artículo, Mira sus conclusiones.”

- Paso 3.** Dar una primera lectura rápida: implica “marca todos los conceptos y palabras técnicas que no entiendes, Al terminar la primera lectura, reflexiona y toma nota sobre lo que entendiste, así como de las dudas que te hayan surgido.”
- Paso 4.** Buscar los conceptos que no entendiste, ya sea en un diccionario especializado o en páginas web acreditadas, “no necesariamente tienes que buscar todas las palabras y conceptos que no entendiste, sino aquellos que tu piensas que son fundamentales para comprender y enjuiciar las ideas principales del artículo.”
- Paso 5.** Volver a leer el artículo detenidamente, ahora, conociendo la terminología científica del tema tratado, “toma nota de las preguntas que te vayan surgiendo”. Luego “resume las ideas y las principales conclusiones” e “intenta contestar las preguntas directrices durante la segunda o tercera lectura del artículo.”
- Paso 6.** Reflexionar críticamente sobre el artículo, “pon a prueba la validez del artículo, Disecciona con precisión sus partes fundamentales. Puedes utilizar las preguntas críticas como guía.”

La revisión de los documentos que no corresponden a artículos de investigación (por ejemplo, las Bases Curriculares y otros documentos ministeriales) se adaptan los pasos de Díaz (2012), utilizando principalmente los pasos 3, 4 y 5.

Los resultados de la investigación se presentan como una monografía o investigación monográfica que corresponde a una “descripción y tratado especial de determinada parte de una ciencia, o de algún asunto en particular” (Real Academia Española, 2020). Para este trabajo, tal asunto, son las habilidades necesarias para aprender matemática, en especial la habilidad de representar, y su relación con las habilidades de Argumentar y Comunicar, Modelar y Resolver Problemas, sugeridas por el MINEDUC para la enseñanza de la asignatura de Matemática en la Enseñanza Media. Para tales efectos se analiza la literatura internacional, revisando por ejemplo: el currículum escolar de Singapur (país que obtiene los mejores resultados en pruebas internacionales), lo que plantea el marco teórico de pruebas con estándares internacionales como es el caso de la prueba PISA, también la pauta de observación

de clases llamado Manual Promate (financiado por el Fondo Conjunto de Cooperación Chile-México), y también la revisión de algunas tesis doctorales y artículos de revistas especializadas en ciencias sociales y educación.

De la literatura revisada se logran identificar los puntos de interés en los que este estudio pone énfasis, los que corresponden a:

- Las habilidades necesarias para aprender matemática a nivel escolar.
- El desarrollo de habilidades en los estudiantes, haciendo hincapié en la habilidad de representar.
- Como el profesor desarrolla las habilidades en sus estudiantes, en especial la habilidad de representar.
- Ejemplificar diversas situaciones en las cuales se pone en práctica la habilidad de representar.

Capítulo II: Información recopilada

En este capítulo se presenta la información recopilada en la revisión de la literatura. Esta información se refiere a la habilidad de representar y por consecuencia a las habilidades de Resolver problemas, Argumentar y Comunicar, y Modelar. Se inicia de una forma deductiva, es decir, con el concepto de habilidad matemática, su relación con la terminología a nivel internacional, las habilidades propuestas por el MINEDUC que se basa en modelos educativos internacionales exitosos, donde destaca el de Singapur, para finalmente decantar en la habilidad de representar y los temas inherentes a esta.

1. Habilidades Matemáticas.

Al estudiar el concepto de habilidad matemática usado por el MINEDUC, se encontró que este se relaciona con los conceptos de competencia y capacidad matemática. En las siguientes secciones se recopila información sobre estos conceptos y como se relacionan.

1.1. ¿Qué es una Habilidad Matemática?

Para poder comprender lo que es una habilidad matemática, un buen punto de inicio, es investigar el significado de palabra habilidad, la cual según la Real Academia Española (2020), tiene varias acepciones, dos de ellas son: “capacidad y disposición para algo” y “cada una de las cosas que una persona ejecuta con gracia y destreza”. De estas definiciones se entiende que el ser hábil requiere o implica tener la capacidad de ejecutar algo con éxito. Enseguida, en el contexto de educación Araya Ramírez (2014, p. 2), en su tesis doctoral dice que una habilidad: “es resultado de la asimilación de conocimientos y hábitos por lo que prestan la mayor atención a su estructura

funcional y se ocupan menos de cómo actúa el sujeto con esos conocimientos y hábitos en los diferentes niveles de sistematicidad del contenido”.

Por otra parte, aparece el concepto de habilidad directamente ligado al de pensamiento, es decir el concepto de habilidad cognitiva, siguiendo esta idea Ferrer (2013, p. 23), plantea que “las habilidades cognitivas se refieren a las distintas habilidades intelectuales demostradas por los individuos al desarrollar una tarea; esto le permite al sujeto apropiarse del conocimiento para resolver problemas y transformar su entorno”, el mismo autor al seguir profundizando en el concepto de habilidad cognitiva cita a Rigney (1978), citado por Herrera (2003, p. 1), que al referirse al concepto establece que:

Las habilidades cognitivas son entendidas como operaciones y procedimientos que puede usar el estudiante para adquirir, retener y recuperar diferentes tipos de conocimientos y ejecución ...suponen del estudiante capacidades de representación (lectura, imágenes, habla, escritura y dibujo), capacidades de selección (atención e intención) y capacidades de autodirección (auto programación y autocontrol). (p. 1)

De lo anterior se puede sintetizar que una habilidad es lo que permite a un estudiante o sujeto poner en práctica o funcionamiento sus conocimientos para resolver una determinada situación.

Teniendo una idea global de lo que es una habilidad asociada al ámbito del pensamiento, es que nos adentramos en el campo de la matemática y ahora se necesita definir lo que es una habilidad matemática. Para Ferrer (2013, p. 54), el concepto de habilidad matemática se estudia bajo la idea que aparece en el libro de “Metodología de la enseñanza de la Matemática para la escuela primaria (1975), de autores alemanes (de la antigua RDA)”, en el que citando a H. Hernández, H. González, definen las habilidades matemáticas como: “los componentes automatizados que surgen durante la ejecución de acciones con un carácter preferentemente matemático y que posteriormente pueden ser empleados en acciones análogas”. Mientras que Rico (2006, p. 49), define el concepto de habilidad matemática considerando el estudio del concepto de habilidad y el papel de la resolución de problemas en el aprendizaje de la matemática, así para este autor:

la habilidad matemática es la construcción, por el alumno, del modo de actuar inherente a una determinada actividad matemática, que le permite buscar o utilizar conceptos, propiedades, relaciones, procedimientos matemáticos, utilizar estrategias de trabajo, realizar razonamientos, juicios que son necesarios para resolver problemas matemáticos. (p. 49)

Por tanto, se puede concluir que una habilidad matemática es lo que permite a un estudiante poner en práctica o funcionamiento sus conocimientos matemáticos con el fin de resolver una determinada situación y que además le permita apropiarse de nuevos conocimientos y aplicarlos en situaciones nuevas o semejantes a la anterior.

El estudio del concepto de habilidad matemática da cuenta que no es un concepto ampliamente utilizado, debido a ello es que hay pocos estudios que mencionen o utilicen el concepto, más aún en español. No obstante, al seguir investigando el concepto, este aparece relacionado con los conceptos de competencia matemática, capacidad y procesos matemáticos. La situación anteriormente descrita, será estudiada en la siguiente sección con el ánimo de comprender más en profundidad lo que es una habilidad matemática.

1.2 Habilidad v/s Competencia Matemática.

En diversos estudios, aparece el concepto de competencia matemática, ligado también a los conceptos de habilidades, capacidades, o procesos matemáticos. En esta sección se analiza la relación que hay entre ellos, además, cómo son utilizados por los distintos currículums internacionales, pruebas internacionales y diversos documentos especializados en educación.

Al iniciar con el concepto de competencia matemática, es importante hacer notar que para Espinoza et al. (2011, p. 17), la competencia matemática es lo mismo que la alfabetización matemática, en la misma línea Artunduaga et al. (2015, p. 21), propone que: “en PISA se considera la competencia como dominio de estudio, equivalente a la noción de alfabetización matemática, y supone un modo global de entender y hacer

matemática, como a su vez comprender la naturaleza del conocimiento matemático. (OCDE, 2003)”.

Ahora, según Ramírez (2009), citado por Rico (2006, p. 58), afirma que : “ser competente en matemáticas implica tener habilidad para usar los conocimientos con flexibilidad, y aplicar con propiedad lo aprendido en un contexto, a otro contexto”, por otro lado Espinoza et al. (2011) y Rico (2000), indican que: “el Proyecto PISA entiende por competencia el conjunto de capacidades puestas en juego por los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando resuelven o formulan problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones”.

En ambas definiciones, los conceptos de habilidad y capacidad parecen estar subordinados al de competencia matemática, la competencia matemática parece ser mucho más amplia que los conceptos de habilidad o capacidad matemática. De los párrafos anteriores, se concluye que ser competente en matemática o la competencia matemática, implica tener la capacidad y habilidad de poner en práctica los conocimientos adquiridos por un estudiante y dar solución a un problema matemático.

Para poner en contexto el concepto de competencia matemática, estudios como el de Espinoza et al. (2011, p. 5 y 17), dan cuenta que el concepto es utilizado a nivel internacional a través del enfoque por competencias, que surge con bastante fuerza en tres proyectos internacionales:

- El proyecto MAT789, realizado por Paulo Abrantes en Portugal, brevemente descrito como “La reforma curricular portuguesa que propone una caracterización de las competencias matemáticas. (Abrantes, 2001)”
- El proyecto KOM en Dinamarca, dirigido por Mogens Niss, que trata “la incorporación de competencias matemáticas al currículum danés. (Mogen Niss, 2002)”
- “El proyecto PISA que se apropia de las competencias propuestas por Niss para sustentar su marco teórico. (OCDE, 2003)”

Además, Espinoza et al. (2011, p. 17) propone que “en estas tres experiencias, el listado de competencias matemáticas corresponde a procesos matemáticos tales como razonar, argumentar, representar, calcular, modelar, resolver problemas y comunicar” y unos párrafos más adelante insiste en que “Desarrollar procesos no es una idea nueva; existen numerosos currículos y proyectos que, de alguna manera, han insertado los procesos, incluso en otros términos (habilidades, capacidades)”. En este estudio se da por hecho que las competencias matemáticas son directamente procesos matemáticos o al menos, de acuerdo con la apreciación de los autores, se ocupan en el mismo sentido.

Siguiendo a Abrantes (2001), citado por Espinoza et al. (2011), expresa que, en la reforma curricular de la Educación básica en Portugal, realizada mediante el enfoque por competencias, se propusieron siete aspectos claves en la actividad matemática escolar, luego estos siete aspectos los identifica como “competencias matemáticas, expresan los modos en que los estudiantes deben actuar cuando hacen matemáticas, es decir, los procesos a cuyo dominio debe estar orientada la formación. Estas competencias matemáticas enuncian expectativas de aprendizaje a largo plazo”. Estas siete competencias son:

- Pensar matemáticamente
- Razonamiento y argumentación matemática
- Comunicar matemáticamente
- Demostrar
- Resolver problemas
- Uso de Tic y herramientas de apoyo
- Abstracción

Por otra parte, según Rico (2006, p. 58), en PISA se habla del concepto de competencias generales y competencias globales, se dice que las “competencias o procesos generales dan concreción a la competencia global o alfabetización matemática”, se menciona también, que el sistema educativo debe centrar la evaluación “en el estudiante, en su aprendizaje y en el significado funcional de dicho aprendizaje, que se expresa mediante las capacidades mostradas sobre una serie de

competencias generales”. Podemos señalar que aquí al usar el término capacidad, se hace alusión a que las capacidades son las que contribuyen a la formación de las competencias generales.

Luego, para Rico (2006, p. 64), un primer sentido de la competencia matemática se asocia a competencia global, y esta competencia global se condice con lo que menciona Artunduaga et al. (2015), y es que se ha “considerado la competencia como dominio de estudio. Esta idea la hemos visto como equivalente a la de alfabetización matemática y supone un modo global de entender el hacer matemáticas y la propia naturaleza del conocimiento matemático” y en este sentido “el estudio PISA propone medir de modo continuo el conjunto de capacidades de los estudiantes, como expresión de su competencia”. Como segundo sentido para competencia matemática, Rico (2006, p. 64), considera a “las competencias como conjunto de procesos generales que deben ponerse en práctica al resolver problemas matemáticos, por medio de cuya realización se muestra la competencia general. Estas competencias singularizan y concretan la finalidad global, estableciendo capacidades y habilidades específicas que ayudan a modular los objetivos, a establecer tareas escolares y caracterizar las propuestas de trabajo y las evaluaciones”.

Siguiendo a (OECD, 2004, p. 40), citado por Rico (2006, p. 58), especifica que competencias generales, en sentido de procesos generales, propuestas por esta prueba son:

- Pensar y razonar
- Argumentar
- Comunicar
- Modelar
- Plantear y resolver problemas
- Representar
- Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones
- Usar herramientas y recursos

El concepto de procesos también es usado por Godino et al. (2004, p. 38), en el libro denominado *Didáctica de las matemáticas para maestros*. En este libro se dice que “en la actividad matemática aparecen también una serie de procesos que se articulan en su estudio, cuando los estudiantes interaccionan con las situaciones - problemas, bajo la dirección y apoyo del profesor”, de aquí es posible entender que cuando se habla de procesos, en realidad se está haciendo en el mismo sentido de las competencias generales o procesos matemáticos de PISA, mientras que al hablar de situaciones-problemas se refiere a resolver problemas.

Los procesos matemáticos que menciona Godino et al. (2004, p. 38) son:

- Resolución de problemas.
- Representación
- Comunicación
- Justificación
- Conexión
- Además, se añade el proceso de Institucionalización.

Podemos observar que el uso del concepto de competencia matemática tiene ciertas ambigüedades y el sentido que se le da puede variar según donde se use, ya sea en los currículum educativos de diversos países y en las pruebas internacionales principalmente

1.3 Habilidad/Capacidad

Según Rico (2006, p. 58), al referirse a las competencias como procesos matemáticos, expresa que “en el estudiante, en su aprendizaje y en el significado funcional de dicho aprendizaje, que se expresa mediante las capacidades mostradas sobre una serie de competencias generales”, luego también dice “en el estudiante, en su aprendizaje y en el significado funcional de dicho aprendizaje, que se expresa mediante las capacidades mostradas sobre una serie de competencias generales”. De

estas citas, podemos concluir que las capacidades son las que contribuyen a la formación de las competencias generales o de habilidades matemáticas.

Luego, para Lupiáñez & Rico (2008, p. 43), relacionan las capacidades con las competencias matemática generales a través de una tabla (Ilustración 1) y lo hace de la siguiente forma: “Esta descripción genérica de un objetivo de aprendizaje para todo un curso nos da información para tomar decisiones sobre qué competencias interesa desarrollar y, por tanto, qué capacidades hay que esperar que los escolares alcancen sobre cada tema de ese curso”.

Por otra parte, el MINEDUC (2015, 2019), expresa que los objetivos de aprendizajes son objetivos que se orientan a al logro de los contenidos o de las habilidades que se requieren desarrollar durante la enseñanza media.

Así, podemos relacionar los objetivos de aprendizaje como capacidades y que buscan conseguir es el desarrollo de competencias o de las habilidades matemáticas. En la Ilustración N°1, se propone una tabla en que se aprecian las capacidades como objetivos de aprendizaje en relación con la función cuadrática y como estas capacidades buscan conseguir el desarrollo de una o más competencias o habilidades matemáticas. La importancia de lo anterior es como concretizar una competencia o habilidad matemática a través de las capacidades u objetivos de aprendizaje.

Capacidades	Competencias matemáticas						
	PR	A	C	M	RP	R	LS
Interpretar y manejar convenios habituales de representación: $f(x) =$, uso de “=”, variables, etc.			×			×	×
Describir verbalmente situaciones asociables matemáticamente con una función cuadrática			×	×	×		
Describir situaciones y contextos en los que se encuentran formas u objetos parabólicos			×	×	×		

PR: pensar y razonar, A: argumentar, C: comunicar, M: modelizar, RP: resolver problemas, R: representar, LS: lenguaje simbólico.

Ilustración N ° 1. Capacidades sobre la función cuadrática y su contribución al desarrollo de competencias matemáticas. Fuente: (Lupiáñez & Rico, 2008, p. 43)

Por otro lado, en la Ilustración N°2, se muestra la relación que hay entre capacidad (objetivo de aprendizaje orientado al logro de habilidades), competencia (habilidades matemáticas) y tarea (problema matemático resolver). Al ver el esquema podemos ver que el rol del profesor es primordial en la enseñanza, porque es quien articula todo el proceso de aprendizaje, comienza escogiendo o seleccionado un objetivo de aprendizaje, que puede estar orientado al desarrollo de competencias o habilidades matemáticas, luego gestiona una tarea o situación problema que con el fin de anticipar las posibles acciones que pueden llevar a cabo los estudiantes para ejecutar o poner en acción cierta capacidades (objetivos de aprendizajes orientados al logro de habilidades y contenidos que son las que contribuyen a obtener una competencia o habilidad matemática.

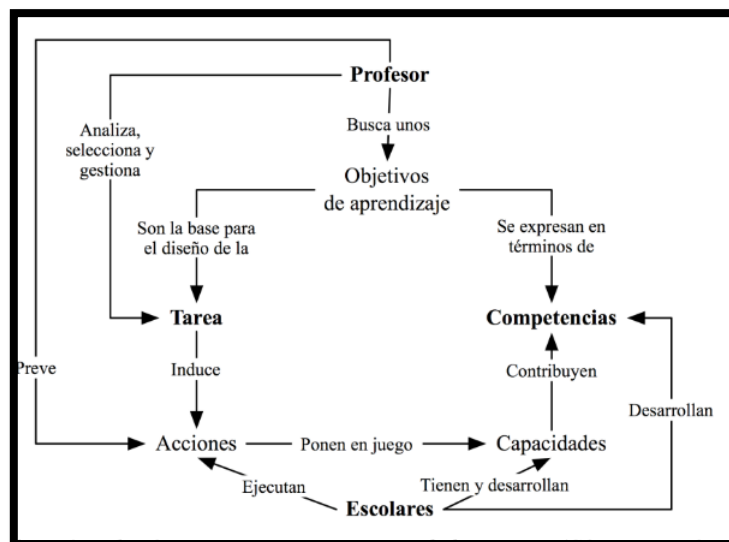


Ilustración N ° 2. Relación entre competencias, capacidades y tareas. Fuente: (Lupiáñez & Rico, 2008, p. 41)

1.4 Relación de los conceptos Capacidad / Habilidad / Competencia

Para cerrar esta sección, se definirán y relacionaran los conceptos estudiados en los puntos que siguen:

- La competencia matemática global la entenderemos como lo que se espera de un estudiante al final de la etapa escolar, donde el estudiante deberá poseer un conjunto de capacidades y habilidades matemáticas (competencias generales o proceso matemáticos) que al ponerse en juego servirán para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando resuelven o formulan problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones.
- Las competencias generales son los denominados también procesos o habilidades matemáticas, que son lo que permite a un estudiante poner en práctica o funcionamiento sus conocimientos matemáticos con el fin de resolver una determinada situación y que además le permita apropiarse de nuevos conocimientos y aplicarlos en situaciones nuevas o semejantes a la anterior, son progresivas es decir aumentan con el paso de los niveles escolares y dan concreción a la competencia global.

- Las competencias matemáticas o procesos generales descritas en PISA por Rico (2006, p. 58), los aspectos destacados por Abrantes (2001) citados por Espinoza et al. (2011), y los procesos matemáticos utilizados por Godino et al. (2004, p.38), son en esencia, las mismas habilidades matemáticas propuestas en las Bases curriculares de la Educación Media en Chile por el MINEDUC (2015,2019), eso sí, fueron estudiadas, agrupadas y adaptadas para su uso.
- También es importante subrayar que, así como para PISA, la competencia matemática global y competencia matemática general están relacionadas, pues una está subordinada a la otra, pero tienen significados distintos. Para esta investigación el concepto competencia usado por el MINEDUC está en concordancia con el de Competencia global y el de habilidades matemáticas está en sintonía con el de competencia matemática general o procesos matemáticos.
- Por último, el término capacidad está en armonía con los aprendizajes esperados propuestos en las Bases curriculares chilenas (los que se proponen para lograr habilidades), entonces ciertas capacidades o aprendizajes esperados son los objetivos que se orientan a desarrollar una habilidad matemática.

2 Habilidades matemáticas en el Currículum Nacional

El MINEDUC (2015, 2019) destaca 4 habilidades en matemática para estudiantes de educación media, tales habilidades son: Resolver problemas, Argumentar y Comunicar, Modelar, Representar. A continuación, se detallan cada una de ellas.

2.1 Resolver problemas

Al referirse a la habilidad de Resolver problemas en matemática, el MINEDUC (2015), expresa en las Bases Curriculares de 7° a 2° medio que:

Aprender a resolver problemas es tanto un medio como un fin en la adquisición de una buena educación matemática. Se habla de resolver problemas (en lugar de ejercicios) cuando la o el estudiante logra solucionar una situación problemática dada, contextualizada o no, sin que se le haya indicado un procedimiento a seguir. Para ello, necesita usar estrategias, comprobar y comunicar: los alumnos y las alumnas experimentan, escogen o inventan y aplican diferentes estrategias (ensayo y error, usar metáforas o algún tipo de representación, modelar, simulación, transferencia desde problemas similares ya resueltos, por descomposición, etc.), comparan diferentes vías de solución y evalúan las respuestas obtenidas y su pertinencia. (p. 97)

Desde ya es pertinente destacar dos aspectos de esta definición. El primero está implícito en la frase: “resolver problemas es tanto un medio como un fin”, es decir, se requiere que el estudiante desarrolle la habilidad de resolver problemas, para lograr desarrollar esta y las otras habilidades, el estudiante se debe enfrentar a una situación o problema que requiera de la matemática para ser solucionado. El segundo aspecto implica que, al resolver un problema, el estudiante no solo pone en práctica una habilidad de forma aislada, si no que va a poner en juego más de una en el mismo problema.

Al resolver un problema matemático, el estudiante pondrá también fomentar:

el pensamiento reflexivo, crítico y creativo. Cabe destacar que la importancia de la habilidad de resolver problemas debe ser desarrollada y aplicada frecuentemente en problemas tanto rutinarios como no rutinarios. En este contexto, muchas veces lo que más aporta al aprendizaje de las y los estudiantes no es la solución de un problema matemático, sino el proceso de búsqueda creativa de soluciones. (p. 97)

Es esencial que muchas de las situaciones a las que se enfrentan los estudiantes sean diversas y en diferentes contextos, esto permitirá el desarrollo de la habilidad. Por otro lado, se requiere que: “el o la estudiante logre plantearse nuevos problemas y resolverlos, utilizando conocimientos previos e investigando sobre lo que desconoce, pero que es necesario para llegar a la resolución”.

En las Bases Curriculares de 3° y 4° medio, planteadas por el MINEDUC (2019), respecto a Resolver problemas propone que:

Es la habilidad que desarrolla una persona para reunir, organizar, combinar y aplicar en forma apropiada conocimientos matemáticos, a fin de responder a problemas no rutinarios y rutinarios de una forma diferente a las ya conocidas. Implica realizar procesos tales como identificar información conocida, inferir datos, elegir y usar diferentes representaciones, buscar estrategias y ejecutar caminos de solución o heurísticas, anticipar o estimar resultados posibles, monitorear el proceso general, experimentar ensayo y error, reconocer soluciones y generalizar las estrategias exitosas. (p. 316)

Como ya se ha resaltado, las situaciones problemáticas permiten a los estudiantes poner en práctica sus conocimientos en matemática, para que estos conocimientos sean útiles y puedan ser usados en distintas situaciones y contextos, necesitan de las habilidades. A medida que se avanza de nivel escolar, los contenidos y problemas matemáticos irán aumentando su grado de dificultad y esto conlleva a un mayor desarrollo de las habilidades matemáticas.

Además, el resolver problemas “es un componente central del razonamiento matemático, propicia el pensamiento crítico y la creatividad, y contribuye a la vez que se nutre de las habilidades de representación, modelamiento y argumentación” (MINEDUC, 2019, p. 316).

2.2 Representar

Respecto de la habilidad Representar el MINEDUC (2015, p. 97), propone en las Bases Curriculares de 7° a 2° medio que los estudiantes “transiten fluidamente desde la representación concreta hacia la pictórica, para más tarde avanzar progresivamente hacia un lenguaje simbólico”.

Entre las ventajas más significativas de la habilidad de representar, se puede mencionar que “permite relacionar el conocimiento intuitivo con una explicación formal de las situaciones, ligando diferentes niveles de representación (concreto,

pictórico y simbólico); potenciar la comprensión, memorización y explicación de las operaciones, relaciones y conceptos matemáticos; y brindarles a las expresiones matemáticas un significado cercano”.

En esta etapa escolar se busca que los estudiantes logren desarrollar y fomentar sus conocimientos a través:

del “aprender haciendo” en situaciones concretas, traduciéndolas a un nivel gráfico y utilizando símbolos matemáticos; de esa manera, logran un aprendizaje significativo y desarrollan su capacidad de pensar matemáticamente. Específicamente, se espera que extraigan información desde el entorno y elijan distintas formas de expresar esos datos (tablas, gráficos, diagramas, metáforas, símbolos matemáticos, etc. (p. 97)

En las propias definiciones propuestas por el MINEDUC, se pone de manifiesto que la habilidad de representar permite al estudiante extraer información de una situación dada ya sea para presentarla y exponerla o para dar solución a un problema matemático.

Por último, las Bases Curriculares de 3° y 4° medio, respecto de la habilidad Representar el (MINEDUC, 2019), establece que “para trabajar en Matemática, se requiere utilizar diferentes formas de representación”, además se espera que:

los estudiantes transiten fluida y progresivamente desde lo concreto hasta el lenguaje simbólico. En particular, se espera que extraigan información del entorno y elijan distintas formas de expresar esos datos (tablas, gráficos, diagramas de flujo, metáforas, representaciones digitales y símbolos matemáticos) según las necesidades de la actividad o la situación específica; que usen e interpreten representaciones concretas, pictóricas o simbólicas para resolver problemas; y que identifiquen la validez y las limitaciones de esas representaciones según el contexto. (p. 316)

Enfatizar la importancia de que los estudiantes puedan utilizar distintas representaciones y aplicarlas de la manera más adecuada según el contexto del problema o situación que estén resolviendo.

2.2 Argumentar y comunicar

En las Bases curriculares de 7° a 2° medio con respecto a la habilidad de Argumentar y Comunicar, el (MINEDUC, 2015) expone que:

La habilidad de argumentar se desarrolla principalmente al tratar de convencer a otros de la validez de los resultados obtenidos. Es importante que las alumnas y los alumnos tengan la oportunidad de describir, explicar, argumentar y discutir, sus soluciones y sus inferencias a diversos problemas, escuchándose y corrigiéndose mutuamente. Así aprenderán a generalizar conceptos, a utilizar un amplio abanico de formas para comunicar sus ideas, utilizando metáforas y representaciones. (p. 98)

Como hemos mencionado, para diversos currículums argumentar y comunicar son dos habilidades distintas, sin embargo, están estrechamente ligadas, lo que implica que no hay una sin la otra, ya que para poder argumentar respecto de la veracidad de un resultado o solución a un problema necesariamente debemos comunicarlo, ya sea de forma oral o escrita. Además, se plantea que:

En la Educación Media se apunta principalmente a que los alumnos y las alumnas establezcan la diferencia entre una argumentación intuitiva y una argumentación matemática, y que sean capaces de interpretar y comprender cadenas de implicaciones lógicas; así podrán hacer predicciones eficaces en variadas situaciones y plantear conjeturas, hipótesis, ejemplos y afirmaciones condicionadas. (p. 98)

De esta parte, se puede destacar el hecho de que la matemática es en sí misma una poderosa herramienta que hace uso del razonamiento lógico y por tanto esto constituye una sólida base para construir una argumentación.

Como el resto de las habilidades, la de argumentar y comunicar no se trabaja de forma aislada, esta será puesta en práctica por los estudiantes al resolver alguna situación problemática e incluso utilizando la habilidad de representar como apoyo del argumento y de la comunicación. Otra cosa que se puede decir es que la habilidad de comunicar y representar aparece directamente ligada en algunos currículums internacionales.

De manera análoga, en las Bases Curriculares de 3° y 4° medio el MINEDUC (2019), plantea que:

La habilidad de Argumentar y Comunicar se pone en juego principalmente cuando el estudiante tiene la oportunidad de expresarse oralmente y por escrito, de distintas maneras, sobre cuestiones matemáticas que incluyen desde explicar las propiedades básicas de los objetos familiares, los cálculos, procedimientos y resultados, hasta los patrones y tendencias de los datos, las ideas y las relaciones más complejas; entre ellas, las relaciones lógicas. (p. 315)

El Argumentar y comunicar, supone la habilidad que los estudiantes deben desarrollar para dar entender sus conclusiones y resultados, pero ello de manera lógica y fundamentada, utilizando la matemática para sostener o rechazar sus resultados o conclusiones. Otro aspecto de esta habilidad es que permite:

Reflexionar sobre los procedimientos, propios o de otros, comparar o sostener intercambios sobre situaciones matemáticas problemáticas optimiza el proceso de aprendizaje. Para lograrlo, es importante que el docente ofrezca la oportunidad a sus estudiantes de escribir, explicar y discutir colectivamente soluciones, argumentos e inferencias sobre diversos problemas, escuchándose y corrigiéndose mutuamente. (p. 315)

El rol del profesor es primordial, ya que debe seleccionar las situaciones pertinentes, que permitan a sus estudiantes llegar a los resultados usando sus propios conocimientos y además, con el fin de lograr el desarrollo de la habilidad de argumentar y comunicar debe brindarles a los estudiantes el espacio y la oportunidad de explicar sus resultados, ya sea a sus pares o al propio profesor.

2.3 Modelar

En cuanto a la habilidad de Modelar, según lo expuesto por el MINEDUC (2015), en las Bases Curriculares de 7° a 2° medio se:

considera que modelar es construir un modelo físico o abstracto que capture parte de las características de una realidad para poder estudiarla, modificarla y/o evaluarla; asimismo, ese modelo permite buscar soluciones, aplicarlas a otras realidades (objetos, fenómenos, situaciones, etc.), estimar, comparar impactos y representar relaciones. Así, las alumnas y los alumnos aprenden a usar variadas formas para representar datos, y a seleccionar y aplicar los métodos matemáticos apropiados y las herramientas adecuadas para resolver problemas. (p. 98)

El modelar, supone que los estudiantes ajusten un problema de la vida real o de una disciplina cualquiera, a uno que utilice conceptos u objetos propios de la matemática, con ayuda de este modelo matemático el estudiante debe poder dar respuestas o soluciones a problemas de la vida real. Aquí es donde los conceptos y objetos matemáticos cobran sentido para el estudiante y hacen que logre un mejor aprendizaje y relación con la matemática. También, se tiene que:

Al construir modelos, los alumnos y las alumnas descubren regularidades o patrones y son capaces de expresar esas características fluidamente, sea con sus propias palabras o con un lenguaje más formal; además, desarrollan la creatividad y la capacidad de razonamiento y de resolución de problemas, y encuentran soluciones que pueden transferir a otros contextos. (p. 98)

Para este ciclo se espera que el estudiante:

- “Use modelos y entienda y aplique correctamente las reglas que los definen.
- Seleccione modelos, comparándolos según su capacidad de capturar fenómenos de la realidad.
- Ajuste modelos, cambiando sus parámetros o considerando buenos parámetros de un modelo dado”.

El usar modelos, implica que los estudiantes apliquen sus conocimientos y además pongan en práctica su creatividad, con el fin de ajustar estos modelos a situaciones reales o de diferentes contextos, tal como se expresa a continuación: “La capacidad de modelar se puede aplicar en diversos ámbitos y contextos que involucren operaciones matemáticas con números reales y/o con expresiones algebraicas, análisis de datos, probabilidad de ocurrencia de eventos y sistemas geométricos”.

Una forma sencilla de enseñar matemática y que ayuda a los estudiantes a comprender los contenidos, es el uso de metáforas o analogías, ya que relaciona las experiencias personales con el conocimiento formal, brindando un significado cercano a la matemática. El uso de metáforas se asimila a la construcción o empleo de modelos matemáticos. Un ejemplo de esto es explicar las funciones como una máquina que transforma los números.

En cuanto a la habilidad de Modelar el MINEDUC (2019), en las Bases Curriculares de 3° y 4° medio, define que:

Modelar es un proceso que se inicia en una observación y análisis en el mundo natural o social, que se traslada a la matemática y termina verificando, también el mundo natural o social, si el modelo matemático da o no cuenta de los rasgos esenciales de lo modelado. Los propósitos de un modelo pueden ser: describir, explicar, diseñar, predecir o tomar decisiones. Modelar es el proceso que se inicia y termina en el mundo concreto “real” y es analizado a partir del mundo de la abstracción matemática. (p. 315)

Se puede acentuar la importancia de como la matemática por su abstracción se convierte en una eficaz herramienta para modelar y dar explicaciones y soluciones a problemas de la vida real.

Modelar, también se considera como “la habilidad para construir versiones o representaciones simplificadas (sean concretas, gráficas o abstractas) de situaciones o fenómenos, que pueden ser expresadas mediante tablas, diagrama de flujos, maquetas, simulaciones o mediante el lenguaje y símbolos de la matemática”. Nuevamente esto es una evidencia de la constante interacción entre las habilidades.

3 Las habilidades matemáticas en el Currículo de Singapur.

Para iniciar, es importante recordar que Singapur es el país que ha liderado la prueba internacional TIMMS según la Agencia de Calidad de la Educación (2017, p. 30), por lo que es pertinente hablar del currículum escolar de Singapur, e identificar la importancia que se da al desarrollo de habilidades además de los conocimientos y las actitudes en este sistema escolar tan exitoso. En Chile, los cambios aplicados en la asignatura de matemática, que se evidencian en las Bases Curriculares, tienen una base y un sustento en el sistema escolar de Singapur, entre otros sistemas educativos exitosos también a nivel internacional.

Por otro lado, al investigar sobre el currículum de Singapur se tiene que Fan & Zhu, (2007), citados por Turizo et al. (2019, p. 192), mencionan que “enseñar

matemáticas en el currículum de Singapur tanto para primaria como para secundaria, tuvo como objetivo, centrarse en la solución de problemas, lo cual comenzó en 1970 y fue fortaleciéndose a partir de 1990”. Esto reafirma el rol central de la resolución de problemas en este sistema educativo, no es el único pilar, pero sin duda es uno fundamental, así lo destacan diversos estudios.

El Ministerio de Educación de Singapur (2012), citado por Espinoza et al., (2018, p. 92), determina que: “el propósito general del currículum de matemáticas es asegurar que todos los estudiantes alcancen un nivel de dominio que les servirá para la vida”, en consecuencia, los objetivos generales para la educación matemática en Singapur están enfocados a:

- “adquieran y apliquen conceptos y habilidades matemáticas;
- desarrollen habilidades cognitivas y metacognitivas, a través del enfoque de resolución de problemas matemáticos; y
- desarrollen actitudes positivas hacia las matemáticas”

De lo anterior, se observa que las habilidades están al centro del enfoque educativo y también se resalta la importancia de las matemáticas en la vida diaria. Referente a la enseñanza secundaria de Singapur el Ministry of Education of Singapore (2019) dice que:

Secondary education is a stage where students discover their strengths and interests. It is also the final stage of compulsory mathematics education. Students have different needs for and inclinations towards mathematics. For some students, mathematics is just a tool to be used to meet the needs of everyday life. For these students, formal mathematics education may end at the secondary levels. For others, they will continue to learn and need mathematics to support their future learning. For those who aspire to pursue STEM education and career, learning more advanced mathematics early will give them a head start. (p. 2)

Con respecto a este punto, es relevante destacar que el Ministry of Education of Singapore (2019), es totalmente consciente del hecho que para algunos estudiantes de secundaria los contenidos y habilidades desarrolladas en matemática a este nivel serán suficientes y útiles en su vida, pero para quienes tengan otros intereses, como una carrera universitaria, tienen la posibilidad de tomar cursos más avanzados de

matemáticas. Con respecto a la educación secundaria en Singapur, se enuncian los siguientes objetivos (Ministry of Education of Singapore, 2019, p. 2):

- to ensure that all students will achieve a level of mastery of mathematics that will enable them to function effectively in everyday life; and
- for those who have the interest and ability, to learn more mathematics so that they can pursue mathematics or mathematics-related courses of study in the next stage of education.

El primer objetivo propone alcanzar un dominio de las matemáticas que les permita desenvolverse en la vida diaria y el segundo estipula que quienes tengan los intereses, puedan profundizar sus estudios en matemática y así facilitar la siguiente etapa educativa.

El Ministry of Education of Singapore (2019, p. 2), ha formado cinco programas de estudios para la educación secundaria, los que están hechos para atender las diferentes necesidades, intereses y habilidades de los estudiantes. Los tres primeros son obligatorios y están orientados a desarrollar el primero de los objetivos, mientras que los dos siguientes son optativos y buscan desarrollar el segundo de los objetivos propuesto en el currículum.

También se detalla el énfasis clave que se le da a la asignatura y que se presenta en tres puntos (Ministry of Education of Singapore, 2019, p. 3).

- En el primer punto se destaca la continuidad del desarrollo de los procesos matemáticos críticos, desde la primaria a la secundaria, que son razonamiento matemático, comunicación y modelado.
- En el segundo punto busca desarrollar una conciencia de la naturaleza de las matemáticas y de lo que llaman Big Ideas (grandes ideas), las que son fundamentales para la disciplina y que aportan coherencia y conexiones para diferentes temas.

- En el tercer punto se realiza la metacognición de los estudiantes mediante la promoción del aprendizaje y la reflexión.

3.1 Currículum de Matemática en Singapur.

Ahora, al profundizar en el currículum de educación secundaria de Singapur, aparece una descripción de la matemática que es interesante para esta investigación y que muestra a continuación (Ministry of Education of Singapore, 2019):

Mathematics can be described as a study of the properties, relationships, operations, algorithms, and applications of numbers and spaces at the very basic levels, and of abstract objects and concepts at the more advanced levels. Mathematical objects and concepts, and related knowledge and methods, are products of insight, logical reasoning and creative thinking, and are often inspired by problems that seek solutions. Abstractions are what make mathematics a powerful tool for solving problems. Mathematics provides within itself a language for representing and communicating the ideas and results of the discipline. (p. 5)

De la descripción anterior, se rescata la intencionalidad de la matemática como asignatura escolar, ya que va desde los niveles más básicos donde se estudian las propiedades, algoritmos, conceptos, etc. hasta los niveles más avanzados donde los conceptos y objetos matemáticos son abstractos. La manera de llegar a niveles avanzados es mediante el razonamiento lógico, el pensamiento creativo y que son inspirados mediante la resolución de problemas. Con ello el poder de abstracción de la matemática permite resolver problemas y también se puede usar como un lenguaje para representar y comunicar los resultados de la disciplina.

3.2 Temas y grandes ideas

Respecto de la naturaleza de la matemática, el Ministry of Education of Singapore (2019, p. 5), propone que se derivan cuatro temas recurrentes y que aparecen en la ilustración:

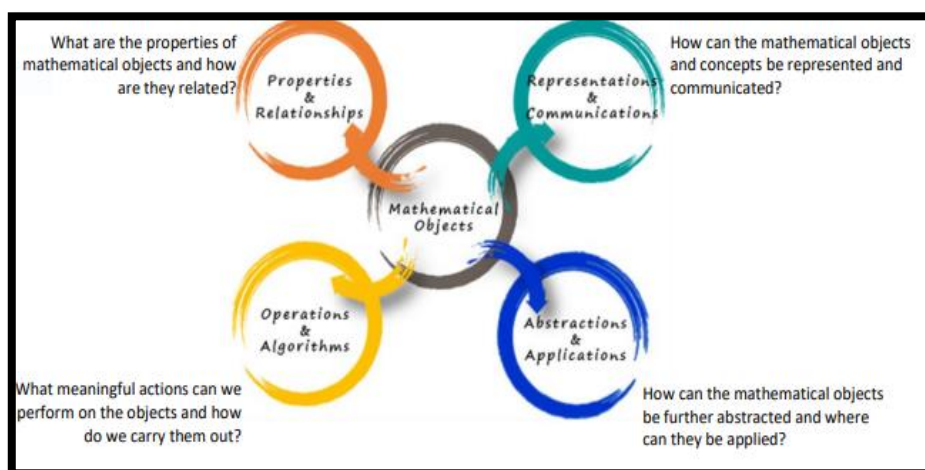


Ilustración N° 3. Themes and Big Ideas. Fuente: (Ministry of Education of Singapore, 2019, p. 5)

Los puntos observados en la Ilustración N°3 están planteados con el fin de dar respuesta a determinadas interrogantes las que se expresan a continuación;

1. **Properties and Relationships:** este ítem corresponde a propiedades y relaciones y se busca responder a la pregunta: ¿Cuáles son las propiedades de los objetos matemáticos y cómo se relacionan?
2. **Operations and Algorithms:** en este punto denominado operaciones y algoritmos, se busca responder a la pregunta ¿Cuáles son las propiedades de los objetos matemáticos y cómo están relacionadas?
3. **Representations and Communications:** para ítem, representaciones y comunicaciones, se busca dar respuesta a ¿Cómo pueden los objetos y conceptos matemáticos ser representados y comunicados dentro y fuera de la disciplina?

4. Abstractions and Applications: el último punto, abstracciones y aplicaciones, busca responder la pregunta ¿Cómo se pueden abstraer más los objetos matemáticos y dónde se pueden aplicar?

Es de interés de esta investigación monográfica reparar especialmente en la habilidad de representar, así se profundiza en lo que propone el Ministry of Education of Singapore (2019, p. 5), como uno de los grandes temas para a la asignatura de matemática, es decir, Representations and Communications. Respecto de las representaciones y comunicaciones se argumenta que la representación es parte primordial de la matemática, donde se incluyen símbolos, notaciones, gráficos, tablas y figuras geométricas que son utilizados universalmente para representar estos conceptos. Así, se expresa la estrecha relación del lenguaje, la matemática y la representación, lo que estipula que la comunicación es necesaria para la difusión del conocimiento matemático e incluye a profesionales y público en general, además para hacerlo es necesario presentar un argumento o prueba formal, y también las representaciones apropiadas para que el conocimiento y aporte del área pueda ser entendido por las masas.

Dentro del mismo tema, se hace alusión a los diagramas, los que se describen como representaciones visuales concisas de objetos matemáticos o del mundo real que sirven para comunicar las propiedades de los objetos y facilitar la resolución de problemas. Los diagramas incluyen tablas y gráficos. Por ejemplo, el plano cartesiano, como un diagrama se utiliza para representar las relaciones ente dos conjuntos de valores.

3.3 Marco Curricular.

Para Espinoza et al. (2018, p. 93), “El Método Singapur busca el logro de los objetivos anteriores a través de una estructura pentagonal que articula el desarrollo de conceptos, habilidades, procesos matemáticos, metacognición y actitudes necesarias para el aprendizaje, cuyo foco central es la resolución de problemas en contextos significativos”. En la misma situación Turizo et al. (2019, p. 193), menciona que “el

Ministerio de Educación de Singapur plantea cinco principios básicos para enseñar las matemáticas que se aplican en los distintos niveles. Es así como existe un eje central alrededor de estos elementos, el cual es la Solución de problemas, ...”. La estructura pentagonal queda representada en el siguiente esquema.

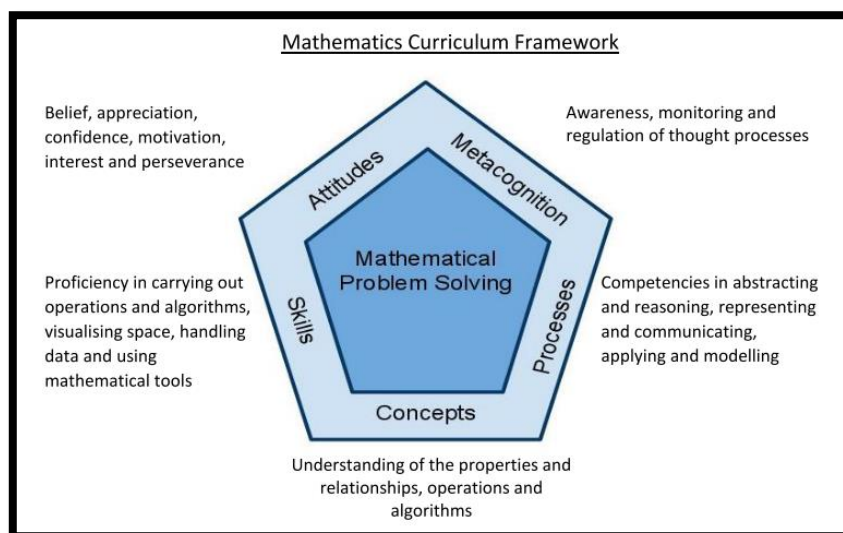


Ilustración N ° 4. Mathematics syllabuses: Secondary one to four. Fuente: (Ministry of Education of Singapore, 2019, p. 9)

De la ilustración N°4, se puede obtener la siguiente información: (Ministry of Education of Singapore, 2019, p. 9)

- **Conceptos (Concepts):** se conviene que comprender los conceptos matemáticos, sus propiedades y relaciones con los algoritmos, son fundamentales para resolver problemas. Al mismo tiempo estos conceptos matemáticos están interrelacionados entre sí. En conjunto con lo anterior, en secundaria se tratan los conceptos relacionados con el algebra, números, probabilidad y estadística, geometría y calculo (para cursos optativos).
- **Habilidades (Skills):** se resume que ser competente en la realización de las operaciones, algoritmos, manejo de datos y uso de diferentes herramientas matemáticas es imprescindible para resolver problemas. Se debe mencionar que estas habilidades no están en el sentido de competencias o habilidades matemáticas, sino más bien en sintonía de las capacidades o los objetivos de aprendizaje.

- Actitudes (Attitudes): se afirma que las actitudes positivas influyen en la disposición al usar la matemática para resolver distintos problemas y situaciones, estas actitudes incluyen el aprecio hacia la matemática, lo que a su vez motiva al estudiante y lo hace perseverar cada vez que se enfrenta a un problema.
- Metacognición (Metacognition): se refiere a esto como la capacidad de controlar los procesos de pensamiento de uno mismo, en particular la selección y el uso de estrategias de resolución de problemas, incluyendo el seguimiento y regulación del propio pensamiento y aprendizaje.
- Procesos (Processes): se establece que los procesos matemáticos (para este estudio habilidades matemáticas) son las prácticas, de los matemáticos y quienes son usuarios de las matemáticas, útiles para resolver problemas y construir nuevos conocimientos. Dichos procesos son: abstracción, razonar, representar y comunicar, aplicar y modelar. Se propone que la abstracción de la matemática es lo que la hace tan poderosa y aplicable, el justificar y generalizar un resultado implica razonar, expresar nuevas ideas al público implica representar, comunicar y utilizar símbolos y convenciones de escritura implica usar el lenguaje matemático y el aplicar la matemática en el mundo real implica modelar. Todo lo anterior se puede resumir en el diagrama que sigue, en el que se muestra el proceso de modelado matemático.

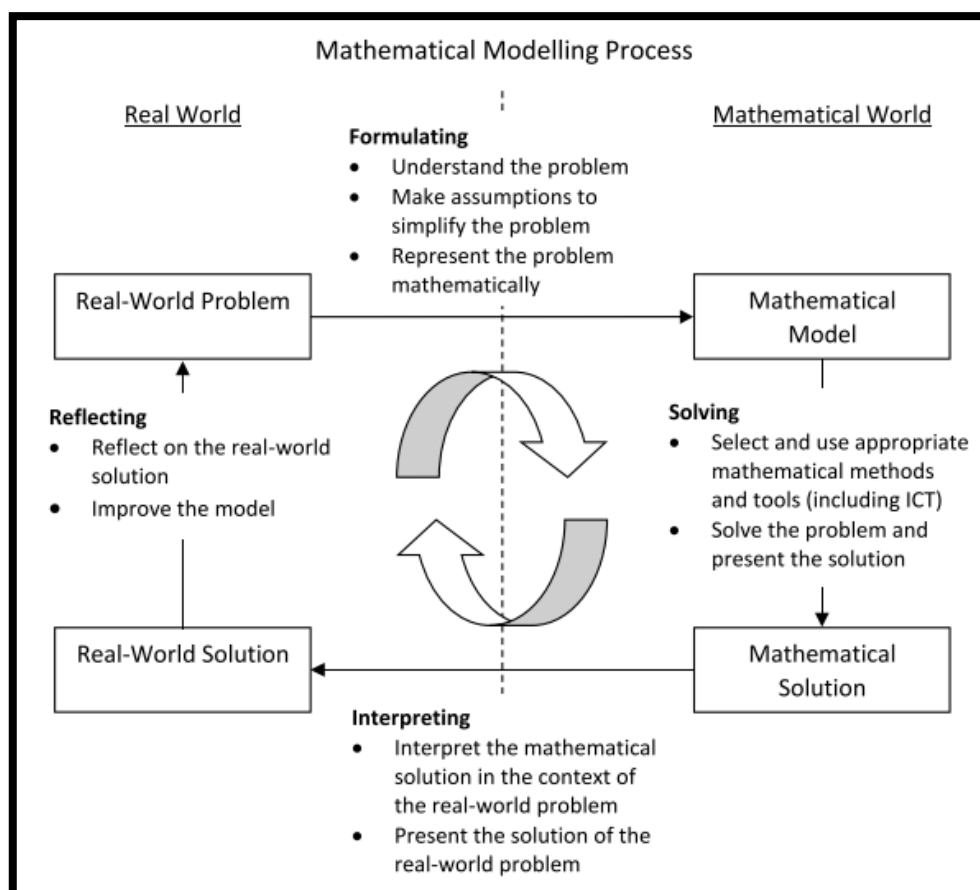


Ilustración N ° 5. Mathematics Curriculum Framework. Fuente: (Ministry of Education of Singapore, 2019, p. 10).

En el diagrama de la ilustración N°5, se puede apreciar como interactúan de forma cíclica los procesos matemáticos y como estos procesos son activados por el estudiante, quien al enfrentarse a un problema de la vida real, primero lo comprende, luego hace suposiciones para simplificarlo y lo representa matemáticamente, llegando así, a un modelo matemático, donde selecciona métodos y herramientas matemáticas (incluidas las TIC's) para encontrar una solución matemática, esta solución debe interpretarse en el contexto real del problema generando así, una solución en el mundo real, establecido esto, se procede a reflexionar sobre la solución encontrada en el mundo real para mejorar el modelo matemático y volver a iniciar el ciclo descrito.

3.4 Competencias para el Siglo XXI

Respecto a las Competencias para el siglo XXI que se describen en el currículum de Singapur, MOE (2017), citado por Turizo et al. (2019), formula que:

en Singapur creen plenamente que la buena educación matemática de sus estudiantes generara grandes cambios, es por esto que trabajan bajo la premisa que “el aprendizaje de las matemáticas es la clave en todo sistema educativo que tenga como objetivo preparar a sus ciudadanos para una vida productiva en el siglo XXI. (p. 193)

Por otro lado, la Agencia de Calidad de la Educación (2017), menciona que:

en Singapur, el lineamiento va un paso más allá al conectar constantemente, mediante las TIC, el proceso de aprendizaje al mundo real y enfatizar las competencias del siglo XXI. En Matemática, se utilizan las herramientas TIC para ayudar a los estudiantes a comprender conceptos mediante visualización, representación y simulación. (p. 91)

El Ministry of Education of Singapore (2019, p. 11), estipula que el programa de estudios de secundaria apoya y estimula las competencias para el siglo XXI, esto lo hace de tres formas que se mencionan a continuación:

1. Los propios contenidos relevantes para las necesidades del siglo XXI proporcionan las bases para aprender muchas aplicaciones de la matemática que son importantes el mundo de hoy.
2. La pedagogía es la encargada de crear oportunidades para que los estudiantes piensen críticamente, razonen lógicamente, se comuniquen claramente, trabajen de manera individual y grupal y utilicen las TICS cuando sea oportuno.
3. Los problemas contextualizados aumentan la conciencia de los estudiantes sobre los problemas locales y mundiales. Se toma como ejemplo, el caso de los problemas de salud en la población y se estimula a los estudiantes a entender los problemas que enfrenta su propio país y el resto del mundo.

4 Qué significa representar en Matemática.

Se estudia el concepto de representar con el fin de dar una base sólida para la comprensión de lo que es la habilidad de representar, esta información se presenta en los puntos que siguen.

4.1 Significado de la palabra representar en el ámbito de la Matemática

Según la Real Academia Española (2020), la palabra Representar tiene 10 acepciones, dos de la cuales se rescatan para esta investigación ya que están en concordancia con la habilidad matemática estudiada, la primera es “hacer presente algo con palabras o figuras que la imaginación retiene”, mientras que la segunda corresponde a “ser imagen o símbolo de algo, o imitarlo perfectamente”. Es importante tener en cuenta estos significados para luego enlazarlos con el concepto de la habilidad de representar.

Kaput (1987), citado por Martínez et al. (1996, p. 363), asociado al concepto de representar menciona que se “da por supuesta la consideración de dos entidades relacionadas, pero funcionalmente separadas». Uno de estos entes se denomina el objeto representante (o representación), el otro es el objeto representado.” A la vez, establece que hay “implícita cierta correspondencia entre el mundo de los objetos representantes y el mundo de los objetos representados.” Este autor también detalla que “«cualquier especificación particular de la noción de representación debería describir, al menos, cinco entidades»”, las que menciona como: “los objetos representados, los objetos representantes, qué aspectos del mundo representado se representan, qué aspectos del mundo representante realizan la representación y la correspondencia entre ambos mundos o conjuntos.”

Para Dancing y Sosa (1993), citado por Martínez et al. (1996, p. 363), el término representación se usa para referirse a “cualquier cosa que puede evaluarse semánticamente”. Luego Artunduaga et al. (2015), expresa que:

de las representaciones puede decirse que: son verdaderas; se refieren a; son verdaderas de algo; son acerca de algo; son precisas; etc. Contenido es el término técnico utilizado para denominar aquello que en una representación la hace semánticamente evaluable. Así, de un enunciado, se dice que tiene como contenido una proposición o condición de verdad; de un término, se dice que tiene un concepto como contenido; de una gráfica, que expresa una relación adecuada entre sus componentes. Desde este planteamiento son representaciones las expresiones simbólicas, los enunciados, los diagramas, los gráficos y otras notaciones usuales de las matemáticas. Estos contenidos son objeto de estudio en matemáticas. (p. 20)

Se puede decir que representar es hacer una imagen o símbolo, que debe referirse o capturar, de forma precisa ciertas características de un contenido matemático.

Rico (2006, p. 59) habla de la dualidad del concepto representar y establece los conceptos de representación interna y externa, donde al referirse a la representación interna, cita a Hiebert y Carpenter (1992), que estipulan que “para pensar sobre ideas matemáticas necesitamos representarlas internamente, de manera que permita a la mente operar sobre ellas”. Luego, al mencionar las representaciones externas, plantea lo siguiente:

Para pensar sobre ideas matemáticas y comunicarlas necesitamos representarlas de algún modo. La comunicación requiere que las representaciones sean externas, tomando la forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos. [...]. El conocimiento matemático es accesible solamente a partir de las representaciones externas, que son los datos para este conocimiento. El fenómeno de la representación también concierne al funcionamiento mismo del pensamiento, ocupa una posición central en el aprendizaje de las matemáticas. (p. 59)

Para profundizar en la idea de los conceptos de representación interna y externa, Espinoza et al. (2011); Rico (2006), indican que:

Desde el interés de la educación matemática hemos de considerar los conceptos matemáticos conectados con la actividad mental de las personas. Sostenemos que cada concepto matemático viene establecido por sus diferentes significados

y usos y, por tanto, por sus representaciones. Son los usos de cada concepto los que establecen por extensión su campo semántico, y cada modo significativamente distinto de entender un concepto necesita de simbolización propio, de algún modo de representación para ser distinguible. Abocamos así en la distinción entre representaciones internas y externas. Las representaciones internas u objetos del pensamiento, ubicadas en las mentes individuales de los sujetos, son distintas de las representaciones externas, de carácter semiótico, dadas por signos, símbolos o gráficos. (p. 59)

Si bien, al pensar ideas matemáticas se necesitan de representaciones internas que permite a la mente operar sobre ellas, estas están en la mente de cada persona, y por tanto para comunicar tales ideas se necesita de representaciones externas, estas toman forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos concretos. Para este estudio referente a la habilidad de representación, se ocupará de las representaciones externas, pues para que el conocimiento matemático sea accesible debe ser representado externamente, estas representaciones externas son de carácter semiótico, es decir dadas por signos, símbolos o gráficas.

4.2 Habilidad de Representar en Matemática (Definiciones)

Al estudiar el concepto habilidad de representar, en correspondencia al concepto utilizado por el MINEDUC en sus Bases Curriculares, aparece también a nivel internacional con mucho más fuerza el concepto de la competencia representar, descrito en diversos sistemas educativos, pruebas estandarizadas y estudios internacionales. Así, en concordancia con lo estipulado por Artunduaga et al. (2015, p. 20), las competencias matemáticas son los llamados procesos matemáticos que también aparecen en diversos currículos como capacidades o habilidades, en esta dirección es coherente estudiar la competencia o proceso representar en el mismo sentido de la habilidad representar.

Llama la atención lo que Artunduaga et al. (2015, p. 22), menciona respecto de las competencias matemáticas, indicando que hay un número significativo de currículums que las han implementado y que también existe un déficit de estudios

asociados a las competencias matemáticas, lo que empeora con la competencia matemática representar.

Rico (2006, p. 59), recoge estas dos definiciones de la competencia matemática representar:

- Citando a Espinoza et. al (2009), “es comprendida como la capacidad de usar el lenguaje simbólico, formal y técnico, descodificando y traduciendo dicho lenguaje y entendiendo sus relaciones con el lenguaje natural: Al igual que, escoger diferentes formas de representación dependiendo el contexto, la situación y el propósito”.
- Ahora al citar a Niss & Højgaard (2011), es definida “como un proceso que comprende ser capaz de entender (por ejemplo, descodificar, interpretar, distinguir entre)”.

También es importante explicitar que acciones realiza el estudiante para poner en práctica la habilidad de representar. Así, Artunduaga et al. (2015, p. 22), basado en PISA, establece que esta habilidad o “competencia incluye (a) decodificar, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representación de objetos matemáticos y situaciones, así como las interrelaciones entre las distintas representaciones; y (b) escoger y relacionar diferentes formas de representación de acuerdo con la situación y el propósito”. En el mismo sentido la OCDE (2006, p. 106), citado por Godino et al. (2004, p. 38), estipula que esta habilidad se corresponde a “la capacidad de descodificar, codificar, traducir, interpretar y distinguir distintas formas de representación de objetos y situaciones matemáticos”.

Recogiendo las ideas y definiciones anteriores, se puede entender la habilidad de representar como la capacidad de usar el lenguaje formal, simbólico y técnico y, por tanto, decodificar y traducir el lenguaje y entender sus relaciones con el lenguaje natural. Además de ser capaz de escoger y relacionar diversas formas de representación dependiendo de la situación o propósito.

5 Cómo el profesor desarrolla la habilidad de representar en sus estudiantes.

Algunos indicios de lo que debe hacer el profesor, aparecen en el libro *Didáctica de las matemáticas para maestros*, Godino et al. (2004, p. 38), basado en Los Principios y Estándares 2000 del NCTM, se refiere a la habilidad de representar en termino de proceso de Representación y que implica por parte del profesor el “uso de recursos verbales, simbólicos y gráficos, traducción y conversión entre los mismos”.

5.1 Prácticas que debe aplicar el profesor para el desarrollo de la habilidad de representar.

Siguiendo con la idea de encontrar pistas y repuestas a la interrogante ¿cómo el profesor desarrolla la habilidad de representar en sus estudiantes?, es que resulta útil estudiar las pautas de observación de clases, como es el caso de la pauta Promate.

La razón, es que esta pauta es el resultado del estudio de los aspectos o dimensiones que son importantes y relevantes en la práctica de la enseñanza de la matemática. Para CIAE, INEE y Mineduc (2018, p. 6), define que Promate “se enfoca precisamente en las prácticas de enseñanza de las matemáticas de profesores principiantes en primaria y secundaria”. Por otro lado, esto se relaciona directamente con la idea de este párrafo y queda en evidencia en el objetivo de esta pauta, el cual es “caracterizar las prácticas de enseñanza de las matemáticas de los profesores que se encuentran en sus primeros años de servicio”.

Con el fin de obtener algunas ideas de lo que se espera de los profesores con respecto a las habilidades, en específico a la de representar, y además revelar que prácticas participan en este proceso, es que al estudiar Promate, vemos que “el análisis de dichas prácticas se organiza en Dimensiones agrupadas en dos Dominios y una

sección destinada a recabar información complementaria” (CIAE, INEE y Mineduc, 2018, p. 6).

El primer dominio la CIAE, INEE y Mineduc (2018, p. 6) lo designa como Dominio Gestión general de la clase y “comprende aspectos de la práctica docente que, por un lado, sientan una base de funcionamiento mínimo en cualquier clase” y por otro lado “promueven que todos los estudiantes tengan oportunidades de participación”. Este dominio agrupa las siguientes dimensiones:

- Monitoreo del trabajo de los estudiantes.
- Clima de aula.
- Uso del tiempo para la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas.

El segundo grupo de dimensiones están agrupadas bajo el nombre de Dominio Gestión de la enseñanza de las matemáticas. Es el dominio de mayor interés para esta investigación, puesto que (CIAE, INEE y Mineduc, 2018):

Comprende aspectos de la práctica docente que promueven procesos de pensamiento o competencias matemáticas que aparecen como metas en los currículos mexicano y chileno, y que están en sintonía con lo que la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) describe como “alfabetización matemática” en la prueba PISA (OCDE, 2017). (p. 7)

Respecto de esto es importante comentar que estos procesos matemáticos o competencias matemáticas son las que el MINEDUC denomina como habilidades matemáticas.

También se especifica que las dimensiones inherentes al Dominio Gestión de la enseñanza de las matemáticas son:

- “Promoción del lenguaje matemático.
- Diversidad de representaciones.
- Diversidad de procedimientos o estrategias.
- Promoción del pensamiento en torno a las matemáticas.
- Uso de errores y dificultades como instancia de aprendizaje.
- Uso de las producciones matemáticas de los estudiantes.

- Cierre matemático de la actividad.
- Errores matemáticos”.

Cabe mencionar que, de todas estas dimensiones, las que generan un especial interés son aquellas que tienen directa relación con las habilidades o competencias matemáticas. Estas dimensiones indican lo que el profesor debe dominar para lograr aprendizajes en sus estudiantes y fomentar el desarrollo de la habilidad de representar, por este motivo se destacan las siguientes:

Diversidad de representaciones: Se observa si el profesor o los estudiantes utilizan distintas representaciones para el desarrollo de la actividad matemática y si se explicita la conexión entre ellas. Tanto las representaciones como las conexiones pueden ser propuestas por el profesor o los estudiantes.

Promoción del pensamiento en torno a las matemáticas: Se observa si el profesor promueve en sus estudiantes el pensamiento en torno a las matemáticas.

Cierre matemático de la actividad: Se observa si el profesor plantea un cierre matemático que incluya una síntesis, reflexión o reconocimiento de los conocimientos, ideas, procedimientos o competencias matemáticas trabajadas y si promueve que los estudiantes participen. (p. 7)

Como se menciona previamente, la pauta Promate también está orientada hacia las prácticas del profesor que promueven el desarrollo de habilidades y lo refleja claramente en una de las afirmaciones que sirvieron en la construcción de sus bases, la que dice (CIAE, INEE y Mineduc, 2018):

que ciertas prácticas de enseñanza son más pertinentes que otras para promover los aprendizajes que se proponen en los enfoques didácticos actuales, que enfatizan habilidades del pensamiento de orden superior. Capacidades para argumentar, razonar, inventar, comunicar y justificar, entre otras, requieren actividades en el aula que enfrenten a los estudiantes a situaciones matemáticas en las que puedan desarrollar estrategias de solución, las comparen y discutan, hagan conjeturas, tengan oportunidad para experimentar y practicar. (p. 10)

La importancia de un documento como este, es que establece de forma clara las prácticas que un profesor debe ejecutar en el aula para desarrollar habilidades matemáticas en sus estudiantes, además de como él mismo debe emplearlas, por ejemplo, para desarrollar la habilidad de representar, utiliza distintas representaciones como un recurso para la enseñanza de los distintos contenidos a sus estudiantes.

Por otro lado, en la pauta se establecen distintos niveles en cada dimensión, luego “cada dimensión describe el aspecto de la práctica de enseñanza que valora, así como tres niveles de desempeño vinculados a prácticas esperables de los profesores principiantes”. (CIAE, INEE y Mineduc, 2018, p. 30). Los niveles de desempeño son incipiente, medio y competente. Al momento de aplicar esta pauta, se le asigna un puntaje a cada dimensión, el que va de 1 a 5, así, en incipiente se tiene puntaje 1, en medio puede obtener puntaje 2, 3 o 4 y en competente puntaje 5, además se agrega el codificado No Observado, en caso de que la dimensión no ocurra.

En la misma pauta de observación de clase se explicitan las acciones que el profesor debe hacer para demostrar que dentro de su práctica docente domina las distintas dimensiones.

En particular para la dimensión Diversidad de representaciones, el manual dice que: “El uso de distintas representaciones se refiere a: la utilización de más de una representación en un mismo sistema (concreto, gráfico, numérico, simbólico, etcétera), y también a la utilización de más de una representación en distintos sistemas” (CIAE, INEE y Mineduc, 2018, p. 34). Además, establece que “la conexión entre representaciones se observa cuando el profesor o un estudiante las compara estableciendo equivalencias, similitudes, diferencias o limitaciones”.

También resulta de interés la especificación que hace la pauta para clasificar al profesor evaluado en el nivel incipiente, medio o competente, lo que se describe en el siguiente recuadro:

Incipiente	Medio	Competente
No se utilizan representaciones. ○ se utiliza sólo una representación. ○ el profesor coarta la posibilidad de que se utilice más de una representación.	Se utilizan dos o más representaciones, pero no se explicita la conexión entre ellas.	Se utilizan dos o más representaciones, explicitando la conexión entre ellas.

Ilustración N ° 6. Descripción niveles dimensión Diversidad de representaciones. Fuente: (CIAE, INEE y Mineduc, 2018, p. 34).

Para esta dimensión se ejemplifican acciones que el profesor debería demostrar poseer durante su práctica docente habitual y que debe mostrar también en la observación de clases, algunas de esas acciones se muestran en la tabla que sigue:

Ejemplos		
Incipiente	Medio	Competente
Se trabaja adición de fracciones solamente de manera simbólica.	Se trabaja adición de fracciones de manera simbólica y gráfica, pero no se conectan dichas resoluciones.	Se trabaja adición de fracciones de manera simbólica y gráfica. Se hace la conexión entre numerador y denominador y las partes de la representación gráfica, y se explica el procedimiento haciendo uso de ambas representaciones.
La única representación que se utiliza para un conjunto de datos cualitativos son los gráficos de barra.	Un grupo de estudiantes representa un conjunto de datos cualitativos usando un pictograma y otros estudiantes utilizan un gráfico de barras. El profesor muestra al grupo ambos gráficos y los nombra, pero no se analizan las diferencias y similitudes.	El profesor representa un conjunto de datos cualitativos usando un pictograma y un gráfico de barras. Se analizan las diferencias y similitudes.
Un alumno propone graficar el problema para resolverlo, pero el profesor descarta su intervención.	Un alumno explica a sus compañeros cómo resolvió un problema utilizando un gráfico. Otro alumno comenta cómo lo resolvió utilizando una ecuación. No hay conexión entre ambas representaciones.	Un alumno explica cómo resolvió un problema utilizando un gráfico, el profesor junto con los estudiantes, lo comparan utilizando ecuaciones.
El profesor, para contextualizar la actividad que trabajará, menciona un evento deportivo y va anotando en el pizarrón los nombres de los atletas y disciplinas que los estudiantes mencionan. No se observan representaciones, dado que no hay trabajo matemático.		

Ilustración N ° 7. Ejemplos por niveles de la dimensión Diversidad de representaciones. Fuente: (CIAE, INEE y Mineduc, 2018, p. 35).

Para la dimensión Promoción del pensamiento en torno a las matemáticas, el manual establece que es el profesor quien fomenta “el pensamiento en torno a las matemáticas” al plantear “preguntas o requerimientos” que tienen o incluyan alguna de estas características: (CIAE, INEE y Mineduc, 2018)

- Provocan a los estudiantes a pensar y analizar ideas, conceptos o procedimientos.
- Demandan elaboración y comunicación de argumentos y conjeturas.
- Implican extensión de una situación (ejemplo: cambiar las condiciones, generalizar, analizar invariantes, etcétera).
- Relacionan el contenido que se está abordando con los conocimientos previos (señalando similitudes, diferencias, ejemplos usados en uno y otro momento, conclusiones a las que se llegó, etcétera).
- Utilizan conocimientos cotidianos y de sentido común como soporte o como punto de partida para abordar o interpretar una situación matemática. (p. 40)

Al igual que en la dimensión anterior, revisaremos bajo que acciones observables, el manual clasifica al profesor en los distintos niveles:

Incipiente	Medio	Competente
Las preguntas o requerimientos no cumplen con ninguna de las características listadas.	<p>Se plantean preguntas o requerimientos que cumplen con alguna de las características listadas.</p> <p>Sin embargo, ocurre alguna de las siguientes. El profesor:</p> <ul style="list-style-type: none"> • No da a los estudiantes un tiempo razonable para sus elaboraciones. • Acepta respuestas cortas, sin argumentación. • Interrumpe las respuestas de los estudiantes, contesta sus propias preguntas o toma respuestas cortas o parciales de los estudiantes y él las completa. • No logra reformular un problema o pregunta que queda sin respuesta, aun cuando ha dado tiempo a los estudiantes para que respondan. 	<p>Se plantean preguntas o requerimientos que cumplan con alguna de las características listadas.</p> <p>Además, ocurre lo siguiente. El profesor:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Da a los estudiantes un tiempo razonable para sus elaboraciones. • Si los estudiantes dan respuestas cortas o sin argumentación, el profesor solicita que las amplíen y expliquen. • Permite que los estudiantes elaboren sus respuestas sin intervenir. • Si un problema o pregunta queda sin respuesta, lo reformula para que los estudiantes puedan abordarlo desde otra perspectiva.

Ilustración N ° 8. Descripción niveles dimensión Promoción del pensamiento en torno a las matemáticas. Fuente: (CIAE, INEE y Mineduc, 2018, p. 40).

Es más, la pauta también entrega ejemplos de las acciones que los profesores deben hacer para evidenciar, mediante la observación de clases, que manejan una determinada dimensión. Para la Promoción del pensamiento en torno a las matemáticas, estas acciones se muestran en la siguiente tabla:

Ejemplos		
Incipiente	Medio	Competente
El profesor hace preguntas cerradas del tipo ¿Cuánto es $3 + 5$? ¿qué cuerpo geométrico es éste? ¿qué categoría de la variable tiene mayor frecuencia?, sin pedir que se profundice o argumente la respuesta.	El profesor hace preguntas del tipo ¿Cómo puedes comenzar a trabajar en esto? ¿por qué ese procedimiento permite resolver este problema? ¿cómo sabes que es el gráfico adecuado? ¿por qué éste es el patrón y no este otro? Sin embargo, los estudiantes no tienen tiempo suficiente para elaborar (argumentos, explicaciones, justificaciones, hipótesis o conjeturas).	El profesor hace preguntas del tipo ¿Qué tienen en común estos procedimientos? ¿cuáles son todas las respuestas posibles? ¿cómo puedes saber si se cumple en otros casos? ¿puedes pensar en otra forma que permita resolver el problema? Si cambiamos estas condiciones en el problema, ¿se puede resolver de la misma forma? Además, los estudiantes tienen un tiempo razonable para elaborar (argumentos, explicaciones, justificaciones, hipótesis o conjeturas).

Ilustración N ° 9. Ejemplos por niveles de la dimensión Promoción del pensamiento en torno a las matemáticas. Fuente: (CIAE, INEE y Mineduc, 2018, p. 40).

La última dimensión que se menciona es el Cierre matemático de la actividad, se considera que este se efectúa (CIAE, INEE y Mineduc, 2018).

cuando hay una síntesis, reflexión o reconocimiento de los conocimientos, ideas, procedimientos o competencias matemáticas trabajadas, con el fin de que se reconozcan aspectos clave en el contexto de la clase o en la vida diaria. El profesor promueve la participación de los estudiantes cuando realiza preguntas o requerimientos que permiten a los estudiantes participar de la actividad de cierre matemático. El cierre puede suceder al final o a lo largo de la clase. (p. 40)

Al igual que en todas las dimensiones especificadas en este manual, aparecen los aspectos de la práctica docente que el profesor debe mostrar para ser clasificado en los distintos niveles, se muestran en el recuadro:

Incipiente	Medio	Competente
El profesor no realiza un cierre matemático de la actividad.	El profesor realiza un cierre matemático de la actividad sin promover que los estudiantes participen.	El profesor realiza un cierre matemático de la actividad promoviendo que los estudiantes participen.

Ilustración N ° 10. Descripción niveles dimensión Cierre matemático de la actividad. Fuente: (CIAE, INEE y Mineduc, 2018, p. 40).

El siguiente recuadro destaca la lista de ejemplos en que el profesor demuestra esta dimensión:

Ejemplos		
Incipiente	Medio	Competente
Luego de una actividad de cálculo mental, el profesor felicita a los estudiantes por su esfuerzo y entusiasmo.	Después de una actividad de cálculo mental, el profesor distingue las distintas estrategias de cálculo utilizadas y destaca su uso en la vida cotidiana.	Luego de una actividad de cálculo mental, el profesor y los estudiantes distinguen las distintas estrategias de cálculo utilizadas y destacan su uso en la vida cotidiana.
El profesor pregunta a los estudiantes si disfrutaron la actividad, sin hacer referencia a los aprendizajes abordados.	El profesor conecta el objetivo y los aspectos clave estudiados en la clase con las actividades que los estudiantes desarrollaron. Luego, deja de tarea dos páginas del libro.	El profesor hace varias preguntas a los estudiantes sobre lo que aprendieron, obteniendo respuestas escuetas. Frente a ello, él se encarga de sistematizar y conectar el propósito de la clase con cada una de las actividades desarrolladas.
Como actividad final, cada equipo presenta la gráfica que construyó. Entre todos señalan diferencias y similitudes, y corrigen errores.	Como actividad final, cada equipo presenta la gráfica que construyó. Cuando los equipos terminan, el profesor hace una síntesis con los aspectos clave estudiados: "recuerden que para construir una gráfica deben recopilar la información, definir qué pondrán en cada eje, etiquetar los ejes, definir y conservar la escala".	Como actividad final, cada equipo presenta la gráfica que construyó. Cuando los equipos terminan, el profesor pregunta cuál gráfica representa mejor la información y solicita que argumenten sus respuestas basándose en los aspectos clave estudiados.

Ilustración N ° 11. Ejemplos por niveles de la dimensión Cierre matemático de la actividad. Fuente: (CIAE, INEE y Mineduc, 2018, p. 41).

El objetivo de un profesor es enseñar a sus estudiantes, es por esto que es relevante saber y ser consciente de cuáles son las prácticas que el profesor puede utilizar para favorecer el aprendizaje de los estudiantes y desarrollar la habilidad de representar en conjunto con las otras habilidades.

5.2 ¿Por qué usar distintas representaciones en el aula de matemática?

El rol de un profesor es esencial para el aprendizaje de matemática en un estudiante y también lo son sus prácticas en el aula, una de las prácticas inherentes al profesor es su discurso, referente a esto Godino et al. (2004, p. 80), plantea lo que es importante y destaca que los diferentes “modos de representar, pensar, hablar, ponerse

de acuerdo o en desacuerdo - es central para que los estudiantes comprendan las matemáticas como un dominio de investigación humana con modos característicos de conocimiento”.

La importancia del uso de distintas representaciones en el aula, también es expresada por Kaput(1996) y Duval(1998), citados por Espinosa(2005), citados por Artunduaga et al. (2015, p. 22), quienes “coinciden al señalar sobre la necesidad de utilizar diferentes sistemas de representación de un objeto matemático para su aprendizaje”, además Solar (2011), menciona que “el desarrollo de la competencia matemática representar requiere de tareas que movilicen en los estudiantes determinadas capacidades, como por ejemplo, justificar la utilidad de los procedimientos empleados para alcanzar unos determinados resultados o relacionar diferentes representaciones”. Se deja claro lo importante que es usar distintas representaciones tanto como para la enseñanza como para el aprendizaje, además podemos destacar el hecho de que ciertas capacidades se orientan al logro de habilidades, porque son estas capacidades las que nos ayudaran a la concreción y evolución de la habilidad de representar.

Godino et al. (2004, p. 28) por su parte señala que “la actividad matemática se realiza necesariamente en un “contexto de representación”, por ejemplo, los números naturales se pueden representar con material como cerillas (IIII IIII), con puntos, con una representación poligonal, y también con el sistema de notación decimal”, además agrega que “los estudiantes también deberían ser capaces de reconocer el mismo objeto matemático de conocimiento en otros contextos de representación y usarlo”.

Siguiendo la idea Duval (2006, p. 144 y 145), con relación a la importancia de usar distintos sistemas de representación cita a Niss & Højgaard (2011, p. 52), quienes “afirman que para llevar a cabo una relación comunicativa en, con y acerca de las matemáticas, se requiere utilizar símbolos y diferentes tipos de representaciones como principio dialógico en la identificación de los objetos matemáticos”. Aquí se relaciona la representación directamente con la comunicación y se destaca la importancia que esto tiene.

Según Godino et al. (2004, p. 28), las disciplinas científicas reúnen un conjunto de conocimientos con unas características propias y una determinada estructura y organización internas, la particularidad del conocimiento matemático con respecto al resto de las ciencias es su enorme poder como instrumento de comunicación, conciso y sin ambigüedades, una de las características que le confiere este poder es la representación, que por su amplia utilización de diferentes sistemas de notación simbólica (números, letras, tablas, gráficos, etc.), la hace útil para representar de forma precisa informaciones de naturaleza muy diversa, poniendo de relieve algunos aspectos y relaciones no directamente observables y permitiendo anticipar y predecir hechos situaciones o resultados que todavía no se han producido.

Se puede decir que el usar distintas representaciones en el aula tiene variados beneficios, como fortalecer el discurso del profesor ya que, al utilizar variedad de representaciones de los contenidos, logra una mayor comprensión por parte de los estudiantes, además comunicar una cierta conclusión o resultado matemático implica hacer uso de diversas representaciones para identificar un cierto objeto matemático. La matemática por su diversidad de representaciones es útil para explicar hechos e informaciones de diversa naturaleza.

Por otro lado, para Sataloff et al. (1997, p. 33), la representación tiene un rol central en la construcción del conocimiento matemático y argumenta que “todas las cuestiones aritméticas tratan sobre objetos, eventos, acciones y de las relaciones entre ellos, de manera tal que el conocimiento matemático es una representación simbólica de los mismos”. Se propone que el proceso para llegar a la representación simbólica no se da de forma automática “sino que el niño tiene que aprender un código en términos del cual representará sus experiencias”, este proceso inicia cuando “los niños hacen representaciones concretas en donde un objeto (una ficha por ejemplo) representa otro (una manzana)” y luego estas representaciones iniciales se van transformando paulatinamente “y pasan a ser representaciones pictóricas y/o simbólicas”. Este proceso es una forma gradual de enseñar como aprender a representar el conocimiento matemático para llegar a la representación simbólica.

5.3 Ejemplos de usos de distintas representaciones

Para esta sección se exponen distintas situaciones en que se usan representaciones o la habilidad de representar.

Situación 1: Según Godino et al. (2004, p. 39), al relacionar la representación con el uso de diversos lenguajes conviene que “la manera de expresar nuestras ideas influye en cómo las personas pueden comprender y usar dichas ideas”, es decir, en el contexto de la matemática distintas representaciones de un mismo objeto matemático sirven para explicar y explicitar diversos usos.

Ejemplo 1.1 Como ejemplo se propone que “es diferente la comprensión que tenemos de los números naturales cuando los representamos mediante dígitos o mediante la recta numérica”.

Situación 2: Para Míguez (2005, p. 25), refiriéndose a la representación gráfica, con respecto a los numerales con valores posicionales y las expresiones algebraicas tradicionales, dice que “son las formas simbólicas más importantes para registrar información cuantitativa”, pero insiste en otras que son bastante comunes como las representaciones gráficas y menciona que “las más conocidas son aquellas que hacen corresponder números con los puntos de una recta numérica o pares de números con los puntos del plano”.

Ejemplo 2.1 A continuación, propone el dos ejemplos explicando las ventajas de una representación gráfica reconociendo también sus limitaciones:

Las condiciones sobre variables como $|x - 2| \leq 3$ son bastante comunes en el álgebra y sus aplicaciones. Las soluciones pueden darse en una forma simbólica análoga, pero se ha vuelto común representar los resultados en la gráfica de una recta numérica (figura 5). Aunque sin lugar a duda esta representación no es tan concisa ni de tanta utilidad para la ejecución de cálculos como la versión simbólica, comunica de inmediato una representación completa de la condición cuantitativa. (p. 25)

Además, se describe que “los intervalos marcados en una recta numérica proporcionan una representación conveniente de los puntos que satisfacen”.

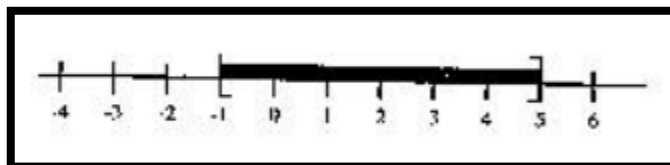


Ilustración N ° 12. Intervalo en recta numérica. Fuente: Míguez (2005, p. 25)

Ejemplo 2.2 En un segundo ejemplo, se argumenta que las representaciones visuales son bastante eficaces cuando se quiere explicar que una variable está en función de otra. El ejemplo es el siguiente:

La posición de un émbolo con un recorrido de 4 pulgadas en un motor que opera a 3 000 rpm está dada por la función $y = 2 \text{ sen}(100\pi t)$, donde t es el tiempo medido en segundos. El patrón de las posiciones del émbolo es ilustrado de manera adecuada por la gráfica de una función (figura 6). Como en la gráfica de la recta numérica, esta imagen visual de una relación entre dos variables no es particularmente eficaz como ayuda para realizar cálculos, pero comunica el patrón periódico significativo del movimiento del émbolo en una forma que es mucho menos evidente en la forma simbólica. (p. 25)

Respecto de la Ilustración N°13, se describe que “una gráfica sinoidal representa el movimiento de un émbolo, comunicando cierto tipo de información de manera más eficaz que las fórmulas algebraicas comunes”.

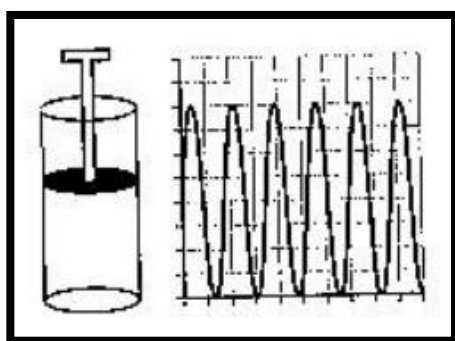


Ilustración N ° 13. Gráfica sinoidal. Fuente: Míguez (2005, p. 25)

Ejemplo 2.3 Siguiendo la situación 3, pero adhiriendo la tecnología de la que disponemos actualmente, expone la siguiente situación:

El uso de rectas numéricas y gráficas de coordenadas es una técnica matemática muy conocida. Sin embargo, el advenimiento de calculadoras y software de computadora con capacidades de graficación ha tenido un efecto significativo sobre la facilidad para producir gráficas y, por tanto, sobre su utilidad. Ahora es posible generar gráficas con rapidez y precisión tanto a partir de fórmulas como de datos numéricos tomados de experimentos científicos o de grandes bases de datos cuyo acceso ha sido posible gracias a las computadoras. Como resultado, las representaciones gráficas se están haciendo cada vez más comunes y complejas. (p. 25)

Lo propuesto por Míguez (2005), tiene directa relación con lo que se menciona respecto de las habilidades o competencias para el siglo XXI, donde el correcto uso de las tecnologías disponibles es vital para el desarrollo de habilidades, actitudes y conocimientos.

Parece importante mencionar que con respecto al uso de las gráficas hechas por computadores u otro aparato como las calculadoras gráficas, se ha dejado ver en “experimentos iniciales han revelado el hecho de que los mensajes proporcionados por las gráficas no son captados por los alumnos jóvenes con tanta facilidad como sería de esperarse, al tiempo que los efectos de escala y la limitada área de visión inherente a los monitores de computadoras dan lugar a sorprendentes conceptos erróneos de percepción”.

Situación 3: El MINEDUC (2016), propone una secuencia de problemas que relacionan la habilidad de representar con la construcción del concepto de fracción, y se explica:

el concepto de fracción como relación parte-todo en contextos continuos. Cabe destacar que las y los estudiantes deben relacionar las diferentes representaciones de divisiones congruentes, de tal manera que progresivamente comprendan que la división de un todo no implica figuras congruentes, sino figuras con igual superficie/ área. Además, cabe señalar que los problemas planteados a continuación son ejemplos que procuran orientar el desarrollo de la habilidad de representar. (p. 14)

Observación: la secuencia consta de 10 ejemplos, pero solo presentamos tres de ellos.

Ejemplo 3.1 Se explica que los ejemplos expuestos en las ilustraciones 1,2 y 3 “buscan que las y los estudiantes puedan analizar y reconocer, en una primera etapa, las representaciones habituales o más comunes para representar fracciones”.

Respecto de la Ilustración N°14, se comenta que “con problemas similares” los estudiantes “deben comprender la relación que hay entre el concepto de fracción y la relación parte todo en superficies”.

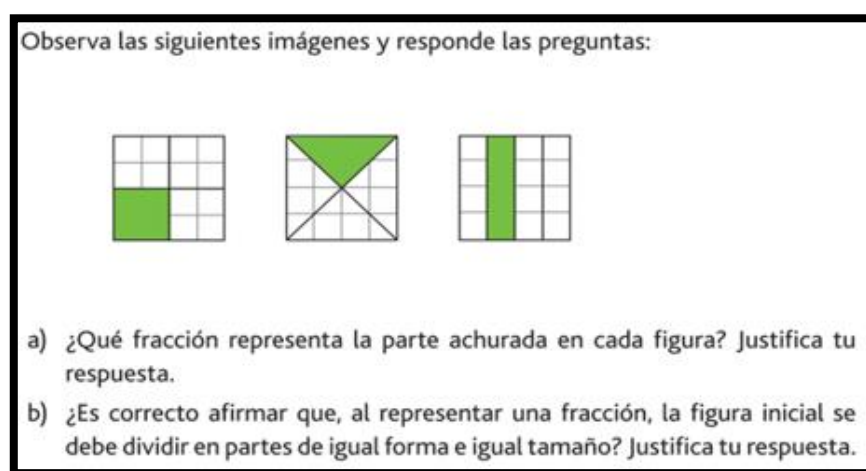


Ilustración N ° 14. Comprender el concepto de fracción y la relación parte todo. Fuente: (MINEDUC, 2016, p. 14)


En la Ilustración N°15, se explica que “los estudiantes pueden identificar representaciones no habituales de fracciones”, al enfrentarse a una situación como esta.



Ilustración N ° 15. Representaciones no habituales de fracciones. Fuente: (MINEDUC, 2016, p. 15)

De la Ilustración N°16, los estudiantes “pueden aprender a visualizar y justificar, a partir de diferentes representaciones, si la fracción $\frac{1}{2}$ y la fracción $\frac{3}{6}$ son equivalentes”.

Observa las siguientes imágenes y responde.



Con los ejemplos 1, 2, 3, 4 y 5 se busca desarrollar la habilidad de representar. No obstante, las habilidades de resolución de problemas y argumentar y comunicar también son habilidades que se desarrollan al mismo tiempo.

a) ¿Qué parte pintada puede representar la fracción $\frac{1}{4}$? Justifica tu respuesta.
 b) ¿Qué parte pintada puede representar la fracción $\frac{1}{2}$? Justifica tu respuesta.


Ilustración N° 16. Visualizar y justificar, a partir de diferentes representaciones. Fuente: (MINEDUC, 2016, p. 15)

Situación 4: Espinoza et al., (2018, p. 32), propone un ejemplo en que se muestra la competencia representar (habilidad de representar), además se describen procesos (aprendizajes esperados) que integra la habilidad de representar:

Ejemplo 4.1 En primera instancia se presenta un problema que es presentado a continuación en la ilustración N°17:

Problema.

“Considera los precios de los siguientes productos y responde la pregunta”



Si alguien realizó la operación: $120 + 150 = 270$. ¿Qué quería saber?

Ilustración N° 17. Problema de los precios. Fuente: (Espinoza et al. 2018, p. 32)

La siguiente tabla en la ilustración, describen los aprendizajes esperados que integran la habilidad de representar:

3.2.4.2. Representación	
Procesos	Caracterización de los procesos
Entender y utilizar las relaciones entre diversas representaciones de la misma entidad	Considera entender y utilizar diferentes representaciones que pueden darse a una misma entidad matemática (o modelo).
Escoger y traducir representaciones en otras	Traducir una representación de una entidad matemática en otra representación de la misma entidad.
Usar representaciones para interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos (construcción de modelo intermedio)	Atribuirle un significado a las representaciones y utilizarlas dentro de un contexto (fenómenos físicos, sociales y matemáticos) para interpretar datos.

Ilustración N ° 18. Tabla de la caracterización de los procesos de la habilidad de representar. Fuente: (Espinoza et al. 2018, p. 32).

Para ilustrar la movilización de cada proceso de la competencia representación, presentaremos una actividad para cada uno de los procesos que la componen:

Proceso 1: “Entender y utilizar las relaciones entre diversas representaciones de la misma entidad: por ejemplo, en la siguiente situación los niños deben entender que un número se puede escribir como la suma de otros dos”.

Escribe tres números que sumen 453.

$$\boxed{} + \boxed{} + \boxed{} = \boxed{453}$$

Ilustración N ° 19. Proceso: Entender y utilizar las relaciones entre diversas representaciones de la misma entidad. Fuente: (Espinoza et al. 2018, p. 33)

Proceso 2: “Escoger y traducir representaciones en otras: por ejemplo, para resolver el siguiente problema: Tengo 86 dulces y regalo 9, ¿cuántos dulces me quedan? Un niño, podría resolverlo como aparece en la siguiente ilustración: Entonces:”

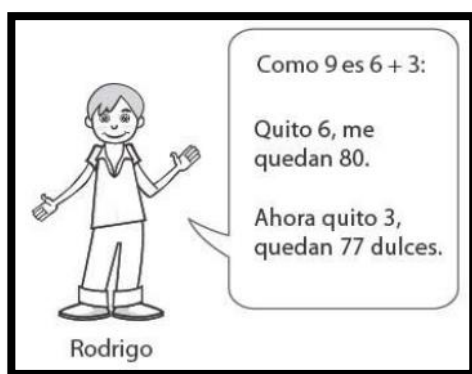


Ilustración N ° 20. Proceso: Escoger y traducir representaciones en otras: por ejemplo, para resolver el siguiente problema. Fuente: (Espinoza et al. 2018, p. 33)

Respecto de la Ilustración N°20 se hace el siguiente comentario: “el sustraendo 9, lo traduce a la representación $6 + 3$ que, en este caso, es la más conveniente para realizar el cálculo?”

Proceso 3: “Usar representaciones para interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos (construcción de modelo intermedio): por ejemplo, para la siguiente situación, la utilización de una representación gráfica o esquema permite relacionar los datos con la incógnita: Problema:”

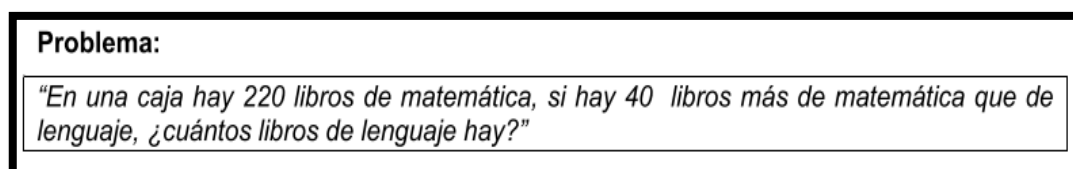


Ilustración N ° 21. Proceso: Usar representaciones para interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos (construcción de modelo intermedio). Fuente: (Espinoza et al. 2018, p. 33)

Situación 4: Se propone la siguiente situación “un número par se puede escribir como $2n$. Esta expresión es equivalente a $(n + 1) + (n - 1)$. Pero esta última expresión nos da una nueva información ya que muestra que todo número par es la suma de dos impares consecutivos” (Godino et al. 2004, p. 28).

6 Relación de la habilidad de representar con las otras habilidades presentes en el currículum

En esta sección se busca estudiar la relación entre la habilidad de representar y las demás habilidades presentes en el currículum chileno, a través de la revisión de literatura internacional.

Con el fin de tener una idea de lo relacionadas que están las habilidades (competencias) matemáticas entre sí y en especial con la habilidad de resolver problemas, la (OCDE, 2003), citado por Espinoza et al. (2018), estipula que las:

competencias se entremezclan y a menudo es necesario, al ejercitar las matemáticas, recurrir al mismo tiempo a muchas competencias, de manera que el intentar evaluar las competencias por separado resultaría por lo general una tarea artificial y una compartimentación innecesaria del área. Las diferentes competencias que presenten los alumnos variarán considerablemente de una persona a otra. (p. 29)

Recordemos que la habilidad o competencia resolver problemas presenta un rol fundamental en el currículum de distintos sistemas educativos como el de Singapur, Finlandia, Canadá, Alemania y Chile, entre otros, al igual que en pruebas internacionales como PISA.

6.1 Resolver problemas

Para PISA, el poner en práctica la habilidad plantear y resolver problemas pone en juego dos cosas importantes, por una parte “plantear, formular y definir diferentes tipos de problemas matemáticos (puros, aplicados, de respuesta abierta, cerrados)”, y por otra parte el “resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías” (Rico, 2006, p. 59), por su parte Godino et al. (2004, p. 40-41) menciona que al resolver problemas matemáticos “los estudiantes deberán adquirir modos de pensamiento adecuados, hábitos de persistencia, curiosidad y confianza ante situaciones no familiares que les serán útiles fuera de la clase de matemáticas. Incluso

en la vida diaria y profesional es importante ser un buen resolutor de problemas”. De lo que definen estos autores, se puede inferir que la habilidad de resolver problemas en matemáticas involucra usar conocimientos, capacidades matemáticas para resolver una situación problemática en diversos contextos o situaciones de la vida de un estudiante.

Por otra parte, Lupiáñez & Rico (2008, p. 40), dicen que “las capacidades que desarrollan los escolares en los distintos temas de matemáticas contribuyen, en mayor o menor medida, a la evolución de sus competencias, y esas capacidades se muestran al afrontar tareas”, es importante mencionar que se considera el afrontar tareas como una forma de resolver problemas.

Estableciendo una relación entre resolver problemas y representar es que Míguez (2005), menciona que:

El primer paso para resolver problemas de manera eficaz es analizar el problema e identificar los conceptos numéricos que se ajusten a las condiciones del mismo. Pero esta es sólo una parte de la etapa representativa de la solución de problemas, la descripción conceptual de lo que se conoce. La solución de problemas también requiere la inferencia de nueva información que proporcione una nueva perspectiva. En las matemáticas esta inferencia se apoya invariablemente en técnicas sistemáticas para representar y manipular información. (p. 23)

Este autor establece dos tipos de conocimientos, uno de ellos lo define como conocimiento procesal e “incluye las técnicas requeridas para representar información y para ejecutar las operaciones que produzcan soluciones de problemas numéricos específicos”, esto se puede relacionar con los aprendizajes esperados orientados al logro de habilidades, por otra parte, menciona el conocimiento conceptual el que se puede asociar al logro de contenidos. Míguez (2005), ejemplifica la situación descrita en las siguientes ilustraciones:

En la Ilustración N°22, se representa la trayectoria y altitud de un proyectil en función del tiempo de vuelo a través de una gráfica en la que se observa la curva parabólica típica.

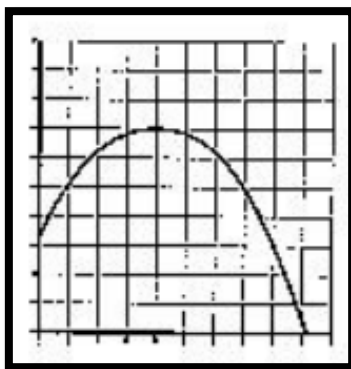


Ilustración N ° 22. Gráfico: Trayectoria de un proyectil. Fuente: (Míguez, 2005, p. 23)

En la Ilustración N°23, “la curva exponencial común representa la ecuación que describe el crecimiento de la población de un país”.

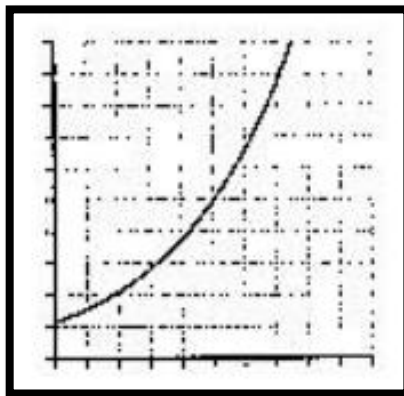


Ilustración N ° 23. Gráfico: Curva exponencial. Fuente: (Míguez, 2005, p. 24)

6.2 Modelar

El Ministry of Education of Singapore (2019, p. 5), se refiere a modelar como abstracciones de situaciones o fenómenos de la vida cotidiana que emplean objetos y representaciones matemáticas, como ejemplo de lo anterior se menciona que este fenómeno puede ser modelado por una función, así como un objeto del mundo real puede ser modelado por un objeto geométrico y un fenómeno aleatorio puede ser modelado por la distribución de probabilidad para diferentes resultados. Se tiene que la visión de los modelos son aproximaciones o simplificaciones de problemas del mundo real, además se destaca que los modelos emplean suposiciones por lo tanto

tienen limitaciones con ellos los resultados que se generen de este modelo debe ser verificadas.

Por otra parte, es de interés las capacidades que un estudiante debe lograr para desarrollar la habilidad de modelar, algunas de ellas son (Rico, 2006):

(a) estructurar el campo o situación que va a modelarse; (b) traducir la realidad a una estructura matemática; (c) interpretar los modelos matemáticos en términos reales: trabajar con un modelo matemático; (d) reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados; (e) comunicar acerca de un modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones); y (f) dirigir y controlar el proceso de modelización. (p. 59)

6.3 Argumentar y comunicar

Se destaca que para el Ministerio de Educación de Chile Argumentar y Comunicar es una sola habilidad, mientras que, en la mayoría de los estudios internacionales asociados al tema, son dos habilidades distintas e incluso aparecen con diferentes nombres. Por esta razón sea recabado información por separado.

Refiriéndose a argumentar, (Ortiz & Carreño, 2018), explican que “es un proceso que el docente debe desarrollar, promoviendo la creación de un ambiente de debate y gestionando ciertas condiciones para promoverla”, Sarda (2003), citado por Ortiz & Carreño (2018), plantea que “cuando debemos elegir, justificar o refutar diferentes opciones o explicaciones y lo hacemos fundamentadamente defendiendo los puntos de vista, entonces estamos en presencia de la argumentación”.

Ahora para Godino et al. (2004), al referirse a argumentar, lo hacen bajo el concepto de justificación, y expresan que:

El razonamiento matemático y la demostración son componentes esenciales del conocimiento matemático entendido éste de la manera integral que proponemos. Mediante la exploración de fenómenos, la formulación de conjeturas matemáticas, la justificación de resultados, sobre distintos contenidos matemáticos y diferentes niveles de complejidad los alumnos apreciarán que las matemáticas tienen sentido. (p. 28)

Son importantes las capacidades que un estudiante debe realizar para desarrollar la habilidad matemática Argumentar. Rico (2006), expone que:

conocer lo que son las pruebas matemáticas y cómo se diferencian de otros tipos de razonamiento matemático; seguir y valorar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos; disponer de sentido para la heurística (¿Qué puede —o no— ocurrir y por qué?); y crear y expresar argumentos matemáticos. (p. 59)

El argumentar implica comunicar y fundamentar una idea o respuesta, esta puede hacer usos de distintas representaciones como prueba o ayuda para fundamentar o refutar la idea.

Como ya se ha mencionado en esta investigación, según Godino et al. (2004, p. 28), que cita a Niss & Højgaard (2011, p. 52), quienes “afirman que para llevar a cabo una relación comunicativa en, con y acerca de las matemáticas, se requiere utilizar símbolos y diferentes tipos de representaciones como principio dialógico en la identificación de los objetos matemáticos”. Un poco más arriba destacábamos lo importante que usar distintas representaciones con la comunicación, y viceversa, en el sentido de que la comunicación hace uso de distintas representaciones y de la matemática por su enorme poder como instrumento de comunicación, conciso y sin ambigüedades (Rico, 2006, p. 59).

En seguida cuando Rico (2006, p. 59), habla de la habilidad Comunicar, espera que un estudiante pueda:

- a. “expresarse uno mismo en una variedad de vías, sobre temas de contenido matemático, de forma oral y también escrita;
- b. entender enunciados sobre estas materias de otras personas en forma oral y escrita.”

Capítulo III: Conclusiones y Reflexión

En este capítulo se presentan las conclusiones de la información recogida y presentada en la investigación, además de la reflexión personal del autor.

1. Conclusión

Al estudiar el término habilidad matemática se puede conectar con los conceptos de competencia y capacidad, así según el lenguaje usado por el MINEDUC se concluye que cuando se habla de competencia matemática, esta tiene un sentido global y se refiere al dominio que logra el estudiante en la asignatura para usar actitudes, conocimientos y habilidades en la resolución de cualquier situación que requiera de la matemática. Respecto de la habilidad matemática es lo que permite a un estudiante poner en práctica o funcionamiento sus conocimientos y capacidades matemáticas con el fin de resolver una determinada situación y que además le permita apropiarse de nuevos conocimientos y aplicarlos en situaciones nuevas o semejantes a la anterior. Las habilidades se obtienen de forma paulatina a través de los años de escolaridad y dan concreción a la competencia matemática. Para lograr las habilidades matemáticas el estudiante debe mostrar ciertas capacidades que en Chile tienen directa relación con objetivos de aprendizaje orientados al logro de habilidades.

Al finalizar este estudio, podemos decir que las habilidades que se presentan en las Bases curriculares de Enseñanza Media por el MINEDUC, Representar, Resolver Problemas, Argumentar y Comunicar, y Modelar se obtienen de forma paulatina a través de los distintos niveles escolares y se desarrollan en conjunto con las otras habilidades.

La habilidad de representar implica el uso de representaciones externas, es decir, del uso de símbolos y gráficos que son aquellas representaciones que son empleadas usualmente para aprender y enseñar matemática. Por otro lado, la habilidad de representar implica mostrar capacidades como el uso de diversas representaciones para

un mismo objeto matemático y ser capaz de comprender y establecer claramente la conexión de estas representaciones y la conexión que se pueda establecer entre ellas, esta capacidad debe ser usada y dominada tanto por profesores como por los estudiantes. En la práctica docente el uso de distintas representaciones se considera una práctica que es característica de un profesor que puede ser calificado como competente.

La habilidad de representar se desarrolla de forma paulatina a través del tiempo y durante toda la etapa escolar y de forma secuencial, donde en primer lugar se comienza con el uso de material concreto, pasando por lo pictórico hasta llegar a las representaciones simbólicas o abstractas pudiendo también transitar de una a la otra cuando se estime conveniente.

Los ejemplos muestran el uso de diversas representaciones y como estas son de uso cotidiano en el enseñar y aprender matemática, el hecho de usar la notación simbólica de diversas funciones y el gráfico correspondiente para destacar otros aspectos como la relación entre las variables es un ejemplo en el que se puede destacar que diferentes representaciones pueden ser útiles en distintos aspectos del contenido y aun así entre ellas es posible establecer una conexión o relación entre ambas representaciones.

La habilidad de representar no se desarrolla por separado de las otras habilidades presentes en el currículum chileno, así el resolver problemas es el medio por el cual se pueden poner en prácticas las habilidades y a la vez se busca que el estudiante adquiera la habilidad de solucionar estas situaciones y para esto muchas veces se necesita representar la información contenida en el problema de un cierto modo o representar la solución, el comunicar y argumentar necesita de la representación para dar a conocer un resultado matemático ya sea de forma simbólica o a través de una tabla o gráfico que a la vez pueden ser usadas para justificar la validez del resultado y para terminar el modelar se puede interpretar como una representación de una situación de la vida real a través de un modelo matemático que recoge ciertas características de la situación y que sirve para dar solución a un conjunto de situaciones similares.

Lo estipulado en los párrafos anteriores sirvió para la recopilación de información respecto de las habilidades matemáticas y en específico la de representar, aportando puntos de vista de diferentes currículum, pruebas internacionales y otros documentos, ayudando a la comprensión de cómo se desarrolla una habilidad en el estudiante, de las prácticas que debe poseer el profesor respecto de este tema y como se relaciona la habilidad de representar con las otras habilidades mencionadas.

2. Reflexión

Los cambios y modificaciones hechos por el MINEDUC en las Bases Curriculares de Enseñanza Media están en concordancia con los modelos educativos actuales a nivel internacional, los que a su vez están basados en modelos exitosos que buscan estar en sintonía con los requerimientos del siglo XXI y que además destacan en las pruebas internacionales de ciencias y matemáticas, las evidencias apoyan a que el desarrollo de actitudes, habilidades y conocimientos son el camino para mejorar la enseñanza de la matemática.

Con el fin de mejorar la educación chilena y llevar a cabo lo propuesto en las bases curriculares, considerando al profesor como articulador fundamental en el proceso enseñanza aprendizaje, es que en torno a él se han implementado una serie de medidas como el aumentar las exigencias e incentivos para quienes estudian pedagogía, mejora en los sueldos y mayores exigencias a los profesores, sin embargo siguen quedando dudas con respecto a diferentes aspectos de la enseñanza y surgen las siguientes preguntas en relación a la práctica del profesor en una situación real; ¿es posible que los profesores desarrollen a cabalidad las habilidades matemáticas en sus estudiantes, considerando que el grueso de Escuelas y Liceos públicos y subvencionados chilenos presentan un alto número de estudiantes por sala?, ¿el profesor es capaz de desarrollar las habilidades matemáticas teniendo en cuenta el gran número de contenidos en la enseñanza media?, ¿tiene el profesor el tiempo para cumplir las exigencias del MINEDUC y a la vez estructurar una clase adecuada para desarrollar habilidades matemáticas en sus estudiantes?.

El desarrollo de habilidades matemáticas en los estudiantes, como representar, es fundamental para que ellos se apropien del conocimiento matemático y lo usen como una poderosa herramienta en el aspecto de sus vidas que lo requiera, es por esto que el desarrollar habilidades debe ser esencial en el quehacer diario de un profesor de matemática.

Bibliografía

- Agencia de Calidad de la Educación. (2017). Informe Nacional TIMSS 2015.
Recuperado de:
http://archivos.agenciaeducacion.cl/informe_nacional_de_resultados_TIMSS_2015.pdf
- Araya, N. (2014). Las habilidades del pensamiento y el aprendizaje significativo en matemática, de escolares de quinto grado en Costa Rica. 14. Recuperado de:
<http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/aie/article/view/14744/14087>
- Artunduaga, P., Muñoz, M., & Coronado, A. (2015). Una caracterización de la competencia matemática representar: el caso de la función lineal. *Amazonia Investiga*, 4(7), 19–28. Recuperado de:
<https://www.amazoniainvestiga.info/index.php/amazonia/article/view/691>
- CIAE, INEE y Mineduc (2018). Manual Promate. Pauta de observación de clases de matemáticas impartidas por profesores principiantes. México: autor.
- Díaz, J. (2012). Guía práctica de lectura crítica de artículos científicos originales en Ciencias de la Salud. Instituto Nacional de Gestión Sanitaria, 1–288.
Recuperado de:
https://www.sepeap.org/wp-content/uploads/2015/06/Guia_practica_de_lectura.pdf
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de La Real Sociedad Matemática Española*, 9, 143–168. Recuperado de:
http://cmapspublic.ihmc.us/rid=1JM80JJ72-G9RGZN-2CG/La_habilidad_para_cambiar_el_registro_de_representacion.pdf

- Espinoza, L., Matus, C., Barbe, J., Fuentes, J., & Márquez, F. (2018). Qué y cuánto aprenden de matemáticas los estudiantes de básica con el método Singapur: evaluación de impacto y de factores incidentes en el aprendizaje, enfatizando en la brecha de género. *Calidad En La Educación*, (45), 90-131. Recuperado de: <https://doi.org/10.31619/caledu.n45.16>
- Espinoza, L., Rojas, F., Ortiz, A., González, E., & Ulloa, R. (2011). Propuesta metodológica de trabajo docente para promover competencias matemáticas en el aula, basadas en un Modelo de Competencia Matemática (MCM). 219. Recuperado de: <https://centroestudios.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/100/2017/07/Informe-Final-Horacio-Solar-UCSC-F511091.pdf>
- Ferrer, M. (2013). La resolución de problemas en la estructuración de un sistema de habilidades matemáticas en la escuela media cubana. *Journal of Chemical Information and Modeling*, 53(9), 1689–1699.
- Godino, J. (Director) (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. ISBN: 84-933517-1-7. Recuperado de: <http://www.ugr.es/local/jgodino/>
- Guirao G., Silamani J. (2015). Utilidad y tipos de revisión de literatura. *Ene*, 9(2), 0–0. Recuperado de: <https://doi.org/10.4321/s1988-348x2015000200002>
- Hernández, R., Fernández, C., Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación*. Distrito Federal, México: McGraw-Hill.
- Lupiáñez, J. y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA*, ISSN-e 1887-3987, Vol. 3, No. 1, 2008, Págs. 35-48, 3(1), 35–48.

Martínez, C., Romero, R., & Albaladejo, L. (1996). De estructuras. 15(3), 361–371.

Recuperado de:

https://www.mendeley.com/catalogue/313f7a1f-1ff9-313c-9186-b168a0d09d3f/?utm_source=desktop&utm_medium=1.19.8&utm_campaign=open_catalog&userDocumentId=%7Bd88231de-00c3-417d-ad73-c50d7e1c76ca%7D

Míguez, Á. (compilador) (2005). Didáctica de la Aritmética (selección de lecturas).

Caracas: UNA. Recuperado de:

https://issuu.com/karo0787/docs/dida_cc_81ctica_20de_20la_20aritme

MINEDUC. (2015). Bases curriculares de 7° a 2° medio. Recuperado de:

<https://www.curriculumnacional.cl/portal/Educacion-General/Matematica/>

MINEDUC. (2016). Habilidad de Representar. Recuperado de:

<https://media.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/28/2016/09/3-hab.-resolver-problemas-web.pdf>

MINEDUC. (2019). Bases Curriculares 3o y 4o medio. Recuperado de:

https://curriculumnacional.mineduc.cl/614/articles-91414_bases.pdf

Ministry of Education of Singapore. (2019). Mathematics syllabuses: Secondary one to four. Recuperado de:

https://www.moe.gov.sg/-/media/files/secondary/syllabuses-nt/maths/2020-nt-maths_syllabus.pdf?la=en&hash=0F666F9B9A0CECD1E003630A35F3CF4B6C1475FF

Ortiz, A., & Carreño, C. (2018). Condiciones que promueven la habilidad de argumentar en el aula matemática de una escuela municipal en Chile. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 54, 60–77. Recuperado de: <http://www.fisem.org/www/union/revistas/2018/54/03.pdf>

REAL ACADEMIA ESPAÑOLA: Diccionario de la lengua española, 23.^a ed.,
[versión 23.4 en línea]. Recuperado de:

<https://dle.rae.es>

Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. IV Simposio de La Sociedad Española de Investigación En Educación Matemática, 4(1), 219–311. Recuperado de:

https://www.researchgate.net/publication/28318960_Sobre_las_Nociones_de_Repreentacion_y_Compreension_en_la_Investigacion_en_Educacion_Matemati_ca

Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. PNA, 1(2), 47-66.

Recuperado de:

<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2238336>

Sataloff, R. T., Johns, M. M., & Kost, K. M. (1997). La enseñanza de las matemáticas desde la perspectiva sociocultural del desarrollo cognoscitivo.

Turizo, L., Carreño, C., & Crissien, T. (2019). El Método Singapur: reflexión sobre el proceso enseñanza – aprendizaje de las matemáticas *. Article, 12(23), 183–199.

Recuperado de:

https://www.coruniamericana.edu.co/publicaciones/ojs/index.php/pensamiento_americano/index