



Universidad de Concepción
Dirección de Postgrado
Facultad de Ingeniería
Programa de Magíster en Ciencias de la Ingeniería con mención en Ingeniería
Mecánica

Simulación numérica de un hidrociclón utilizando Dinámica de Fluidos Computacional



Tesis para optar al grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería con mención en
Ingeniería Mecánica

DANIEL ANDRÉS PÉREZ VILLALOBOS
CONCEPCIÓN-CHILE
2017

Profesor Guía: Dr. Cristian Rodríguez Godoy
Dr. Pablo Cornejo Olivares
Dpto. de Ingeniería Mecánica, Facultad de Ingeniería
Universidad de Concepción

Resumen

En la industria minera, una de las etapas claves en el procesamiento de minerales es la conminución, en donde se reduce el tamaño del material hasta dimensiones lo suficiente finas para continuar en las etapas posteriores de tratamiento y refinación. Para esto es necesario una clasificación por tamaño del mineral, en la cual el material apto continúa el proceso y el no apto es nuevamente tratado hasta obtener un tamaño apropiado. Este proceso es en donde operan principalmente los hidrociclones, los cuales son alimentados con una mezcla del mineral con agua (lodo), y cuyo comportamiento hidrodinámico y clasificación es dependiente de las condiciones del flujo y características de la mezcla. Uno de los problemas estudiados por varios investigadores es el *roping* en hidrociclones (supresión del núcleo de aire, aumento excesivo de la concentración de sólidos en el bajo flujo e incremento de partículas de gran tamaño en el sobre flujo), sin embargo, aún no se han desarrollado teorías concretas que involucren todas las variables presentes en este fenómeno.

El objetivo de la presente tesis es desarrollar un modelo matemático en el código comercial ANSYS Fluent 14.5, que permita analizar el comportamiento hidrodinámico al interior del hidrociclón y el tipo de descarga a través del bajo flujo. Se ha considerado partículas monodispersas de 3 tamaños diferentes presentes en la mezcla, a concentración constante, a la cual se varía la velocidad/presión de alimentación.

Los resultados muestran que la operación de un hidrociclón, analizada desde el punto de vista del tipo de descarga (*spray*, *semi-roping* o *roping*) es función del tamaño de las partículas presentes en la mezcla y de la velocidad/presión con que esta ingresa al equipo. Un aumento en la velocidad/presión, para los 3 tamaños de partículas considerados, genera un aumento de la concentración en el bajo flujo con el aumento de tamaño de las partículas. Simultáneamente, el incremento en la velocidad/presión de alimentación causa una caída en la concentración de sólidos a través del sobre flujo, con mayor efecto para las partículas de mayor tamaño. Por otro lado, el ángulo

de descarga a través del bajoflujo decae con el aumento de la velocidad/presión y tamaño de partícula. El paso desde una descarga *spray* hacia *roping* es detectado con el cambio del espectro de frecuencia de las fluctuaciones de presión, con altas amplitudes a bajas frecuencias en la descarga en *spray* y señales ruidosas en todo el espectro de frecuencias en el *roping*.

De la investigación realizada se concluye que el modelo desarrollado permite comprender en mayor profundidad las variables involucradas que generan el *roping* en hidrociclones. Tanto el tamaño de las partículas como la velocidad/presión de alimentación influyen en el comportamiento hidrodinámico al interior del hidrociclón (velocidades y núcleo de aire) y en la descarga (ángulo y concentración de sólidos). Así también, es posible detectar el tipo de descarga a través del bajoflujo en función del análisis de las fluctuaciones de presión en las paredes del equipo y el espectro asociado.



Tabla de contenido

Resumen	ii
Índice de figuras	vi
Índice de tablas	viii
Dedicatoria	ix
Agradecimientos	x
Nomenclatura	xi
1 Introducción	1
1.1 El hidrociclón	1
1.2 <i>Roping</i>	3
1.3 Estudios en Dinámica de Fluidos Computacional	4
1.4 Objetivos del estudio	5
2 Marco teórico	6
2.1 Principios de conservación	6
2.1.1 Conservación de la masa	6
2.1.2 Conservación del momentum	6
2.2 Ecuaciones de Navier-Stokes	7
2.3 Turbulencia	8
2.4 Reynolds Stress Model	9
2.5 Modelo multifase Euleriano	10
2.5.1 Fracción volumétrica	11
2.5.2 Ecuaciones de continuidad	11

2.5.3	Coeficientes de intercambio de interfase	12
2.5.3.1	Coeficiente de intercambio fluido-fluido	12
2.5.3.2	Coeficiente de intercambio fluido-sólido	13
2.5.3.3	Presión de sólido	13
2.5.3.4	Función de distribución radial	14
2.5.3.5	Esfuerzos de corte sólidos	14
2.5.3.6	Temperatura granular	15
3	Modelo computacional	16
3.1	Modelo geométrico	16
3.2	Grilla computacional	17
3.3	Condiciones de borde	19
3.4	Configuración de ANSYS Fluent 14.5	20
3.5	Casos de estudio	21
4	Resultados y discusión	22
4.1	Validación	22
4.2	Descarga	25
4.3	Análisis de velocidad axial y tangencial	31
4.4	Núcleo de aire	34
4.5	Fluctuaciones de presión en pared	35
5	Conclusiones y trabajo futuro	41
5.1	Conclusiones	41
5.2	Trabajo futuro	42
	Referencias	43

Índice de figuras

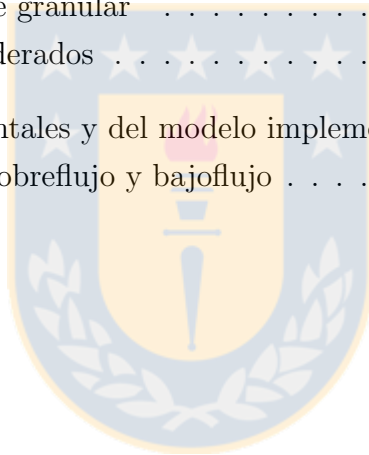
1	Esquema de un hidrociclón	2
2	Descarga tipo <i>spray</i> (izquierda) y <i>roping</i> (derecha)	4
3	Geometría del hidrociclón de laboratorio	17
4	Mallado del volumen de control	18
5	Discretización <i>O-grid</i>	18
6	Condiciones de borde	19
7	Posiciones de referencia	23
8	Velocidad axial a (a) 60 mm (c) 120 mm y (e) 170 mm de la superficie superior; velocidad tangencial a (b) 60 mm (d) 120 mm y (f) 170 mm de la superficie superior. (●) medición experimental y (—) datos simulación	24
9	Contorno de fracción volumétrica y ángulo de descarga para el Caso I, velocidad de entrada a (a) 8.6 psi (b) 33.2 psi y (c) 70.5 psi	26
10	Contorno de fracción volumétrica y ángulo de descarga para el Caso II, presión de entrada a (a) 7.4 psi (b) 25.8 psi y (c) 58.8 psi	26
11	Contorno de fracción volumétrica y ángulo de descarga para el Caso III, presión de entrada a (a) 4.8 psi (b) 8.6 psi y (c) 14.0 psi	27
12	Presión de alimentación vs ángulo de descarga	27
13	Presión de alimentación vs fracción volumétrica en sobreflujo	29
14	Presión de alimentación vs fracción volumétrica en bajoflujo	29
15	Selectividad vs presión	30
16	Velocidad axial (izquierda) y tangencial (derecha); Caso I	32
17	Velocidad axial (izquierda) y tangencial (derecha); Caso II	33
18	Velocidad axial (izquierda) y tangencial (derecha); Caso III	33
19	Presión de alimentación vs diámetro del núcleo de aire	34

20	Ángulo de descarga vs diámetro del núcleo de aire	35
21	Forma de onda (izquierda) y espectro (derecha); caso I a 2.3 m/s	36
22	Forma de onda (izquierda) y espectro (derecha); caso I a 4.6 m/s	37
23	Forma de onda (izquierda) y espectro (derecha); caso I a 6.9 m/s	37
24	Forma de onda (izquierda) y espectro (derecha); caso II a 2.3 m/s	38
25	Forma de onda (izquierda) y espectro (derecha); caso II a 4.6 m/s	38
26	Forma de onda (izquierda) y espectro (derecha); caso II a 6.9 m/s	39
27	Forma de onda (izquierda) y espectro (derecha); caso III a 2.3 m/s . . .	39
28	Forma de onda (izquierda) y espectro (derecha); caso III a 3.45 m/s . . .	40
29	Forma de onda (izquierda) y espectro (derecha); caso III a 4.3 m/s . . .	40



Índice de tablas

1	Características geométricas del hidrociclón	16
2	Condiciones de solución	20
3	Factores de relajación	20
4	Descripción de la fase granular	21
5	Datos de casos considerados	21
6	Resultados experimentales y del modelo implementado	23
7	Datos de sólidos en sobreflujo y bajoflujo	28



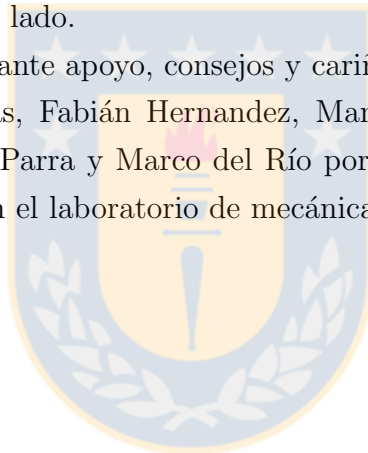
Dedicatoria

Dedicado a todos quienes me acompañaron de alguna u otra forma en esta etapa de mi vida:

A Javiera Carolina González Mora, con quien conocí lo que es el mas profundo y verdadero amor. Por que has sido mi fiel compañera y pareja durante todos estos años estando siempre a mi lado.

A mi familia, por su constante apoyo, consejos y cariño.

A mis amigos Alexis Salas, Fabián Hernandez, Manuel Moncada, Diego Gayoso, Walter Pampaloni, Pedro Parra y Marco del Río por su compañía y hacer amenas las tardes de simulación en el laboratorio de mecánica computacional.



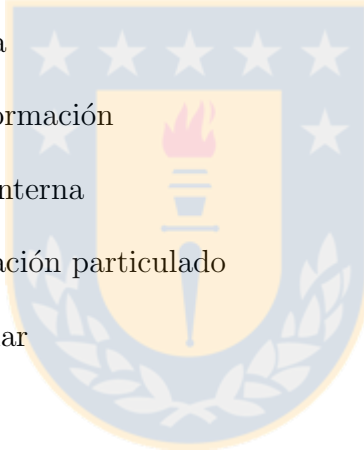
Agradecimientos

Agradezco al Centro de Recursos Hídricos para la Agricultura y Minería por el financiamiento recibido para el desarrollo de la investigación.



Nomenclatura

α	Fracción volumétrica
δ_{ij}	Delta de kronecker
$\dot{m}$	Transferencia de masa
μ	Viscosidad dinámica
$\bar{\bar{\tau}}$	Tensor esfuerzo-deformación
ϕ	Ángulo de fricción interna
τ_p	Coeficiente de relajación particulado
Θ_s	Temperatura granular
A_i	Área de interfase
C_D	Coeficiente de arrastre
d	Diámetro
e_{ss}	Coeficiente de restitución de partículas
f	Función de arrastre
$g_{0,ss}$	Función de distribución radial
K	Coeficiente de intercambio de momentum
V	Volumen
$\mathbf{g}$	Aceleración de gravedad



Re	Número de Reynolds
ρ	Densidad
τ	Tensor esfuerzo
e_{ij}	Tensor de velocidad de deformación
p	Presión
t	Tiempo
u	Velocidad
$\mathbf{u}, \mathbf{v}$	Vector velocidad



1 Introducción

1.1 El hidrociclón

Los hidrociclones son equipos de clasificación hidráulica continua, ampliamente utilizados en la industria minera en circuitos de recirculación de molienda [1] y posterior selección del tamaño de material requerido o bien como espesadores y recuperadores de agua en fases posteriores [2]. Su estructura de compone de un cuerpo cilíndrico, un cuerpo cónico, ápice, buscador de vórtice y una tubería de alimentación tangencial al cuerpo, ver Figura 1. Su simplicidad, alta capacidad, bajo mantenimiento y costo de operación y el hecho de ser compactos son características por las cuales son principalmente utilizados a diferencia de otros clasificadores existentes en la industria.

En el procesamiento de minerales, la clasificación corresponde a la operación en que los componentes de una mezcla son clasificados por tamaño. El mecanismo que permite la separación es la sedimentación de las partículas sujetas a fuerzas de cuerpo como la gravedad y centrífuga. El producto de esta clasificación se divide en dos fracciones, una compuesta de material particulado fino, denominado *overflow* o sobreflujo, y otra compuesta de material particulado grueso denominado *underflow* o bajoflujo. Los hidrociclones trabajan con un flujo de alimentación en donde sus características como presión, fracción volumétrica de sólidos y distribución del tamaño de partícula son relativamente constantes. Cambios en el punto de operación o características del flujo generan un cambio en el comportamiento interno del equipo, el cual puede desembocar en puntos de operación inestables e indeseables como la descarga tipo *roping*, proceso en el cual se suprime el núcleo de aire y se genera una descarga con elevados contenidos de partículas gruesas a través del sobreflujo y un aumento en la concentración de sólidos a través del bajoflujo. En este sentido, el proceso deseable está asociado a descargas de tipo *spray*, en el cual se observa la

existencia de un núcleo de aire y una descarga de la mezcla en forma cónica, los tipos de descarga se observan en la Figura 2. De esta forma, la operación óptima se asocia a descargas de tipo *spray* y cercanas al *roping*, mientras que procesos indeseados se asocian a descargas tipo *semi-roping* o *roping*, los cuales son caracterizados por una buena o mala calidad en la clasificación del mineral, lo cual es visible posteriormente en la curva de clasificación [3].

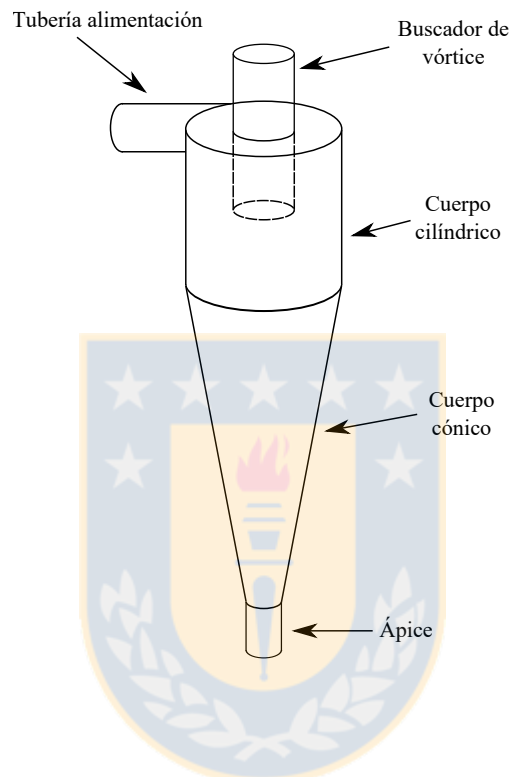


Figura 1. Esquema de un hidrociclón. Fuente: elaboración propia.

El diseño de estos equipos se basa en consideraciones geométricas y las características del flujo con que son alimentados, de esta forma se selecciona el tamaño y cantidad de ciclones requeridos. También existen diseños basados en simulación matemática. A pesar que el desarrollo de los hidrociclones data de los años 60, actualmente no existe un conocimiento pleno de los procesos internos asociados al flujo. Se han desarrollado mediciones experimentales basadas en velocímetros de laser Doppler [4], cámaras de alta velocidad [5, 6], tomografías de impedancia eléctrica [7], entre otras, estas técnicas permiten un acercamiento al conocimiento interno del hidrociclón.

1.2 *Roping*

La importancia del *roping* en la clasificación de un hidrociclón es crucial en la operación y diseño de plantas de procesamiento de minerales. El punto de operación óptimo de un hidrociclón está asociado a una descarga cercana al *roping* [8], en donde existe un núcleo de aire definido, mientras puntos de operación no deseable son asociados a descargas de tipo *semi-roping* (transición) y *roping* en donde hay una tendencia a disminuir el tamaño del núcleo hasta el colapso de este, por lo que la fracción de sólidos que escapan a través del ápice es mucho mayor a lo requerido, debido a esto es que en casos extremos puede llevar al bloqueo en el ápice del hidrociclón. Otra característica que presenta el *roing* es la baja velocidad rotacional del fluido a través del ápice y bajo flujo, debido a esto se observa la descarga como un chorro que no permite el ingreso de aire, en tanto la descarga en *spray*, en la cual se desarrolla una velocidad rotacional mayor, genera un ángulo en el flujo de descarga y la presencia de un núcleo de aire.

Si bien la literatura especializada documenta este tipo de casos y se han desarrollado modelos de *roping*, estos no son lo suficientemente claros y difieren en cuanto a resultados entre si. Se debe tener en cuenta que el fenómeno es función del tamaño de partícula y la distribución del tamaño de estas, la fracción de sólido presente en la mezcla y la velocidad/presión de alimentación del equipo. Se han realizado investigaciones de *roping* en hidrociclones, en donde la distribución de tamaño de partícula, concentración de sólidos y parámetros geométricos como la relación de diámetro de bajo flujo/sobreflujo son factores que generan este fenómeno [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15], este último tiene vital importancia en la generación del *roping*. La relación de diámetros del bajo flujo/sobreflujo es de vital importancia en el diseño, ya que para valores inferiores a 0.34 siempre existirá *roping*, entre 0.34 y 0.5 dependerá de las características particulares del flujo previamente mencionadas y finalmente para valores entre 0.5 y 0.9 existirá siempre descarga en *spray* [16]. También se ha realizado un análisis de diversos modelos de *roping* en donde se concluye que el volumen de sólidos a través del bajo flujo puede predecir el fenómeno, sin embargo, esto no se puede generalizar a mezclas con partículas mas gruesas y el *roping* aún parece difícil de estimar [17].

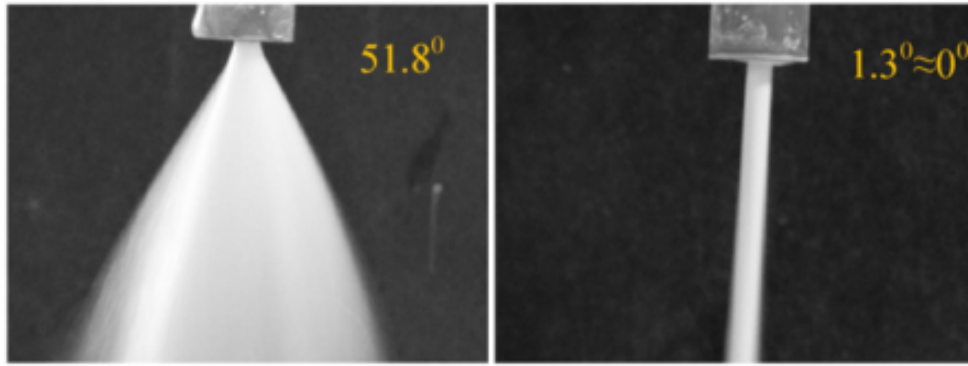


Figura 2. Descarga tipo *spray* (izquierda) y *roping* (derecha) [6].

1.3 Estudios en Dinámica de Fluidos Computacional

Dada la alta complejidad del flujo rotacional, por sus características turbulentas y su alta curvatura (no linealidades), en conjunto con el desarrollo de computadores de gran capacidad, se presenta la Dinámica de Fluidos Computacional (CFD por sus siglas en inglés; *Computational Fluid Dynamics*) como una herramienta poderosa en el estudio del flujo en hidrociclones, considerando la selección de los modelos apropiados [18]. En primer lugar, las simulaciones permiten ahorrar tiempo y costos que las mediciones experimentales no permiten, en segundo lugar, los modelos matemáticos (una vez validados) permiten analizar en profundidad las características particulares del flujo, cuyo acceso experimental requiere el uso de costosa tecnología. Los estudios realizados se han enfocado en diversos tópicos como: modelado del núcleo de aire [19], análisis del flujo interno [20], optimización [21], diseño de nuevas geometrías [22], entre otros. Los modelos y simulaciones realizadas a lo largo de los años han demostrado que los modelos *Large Eddy Simulation* (LES) y *Reynolds Stress Model* (RSM) describen con mayor exactitud las características del flujo (campo de velocidad, turbulencia, etc). Entre estos, los modelos LES han demostrado obtener resultados con menores errores en las velocidades que se desarrollan [22] y las dimensiones del núcleo de aire [19], sin embargo, el modelo RSM actualmente es el modelo más óptimo al cual se pueden acoplar modelos Eulerianos-Eulerianos multifase [23] que permitan describir las diversas fases al interior del equipo. La mayoría de las investigaciones se han realizado para evaluar la curva de clasificación del hidrociclón. Se han utilizado modelos Eulerianos-Lagrangianos conocidos como *Lagrangian Particle Tracking* (LPT) [24, 25, 26, 27, 28, 29, 30]

en donde la descripción del movimiento de las partículas se realiza mediante un balance de fuerzas en estas. Estos modelos tienen la ventaja de requerir un bajo costo computacional (inferior a modelos mas complejos), sin embargo, solo obtiene resultados aceptables para bajas concentraciones del sólido ($\leq 10\%$) en el flujo primario. La presencia de altas concentraciones de sólidos en las mezclas con las que se trabaja en la industria requiere el uso de modelos multifases más complejos que permitan calcular de forma mas cercana a la realidad la interacción de las diversas fases presentes. El modelo *Mixture model* (una simplificación del modelo Euleriano) ha generado buenos resultados en la simulación de la interacción fluido-fluido y fluido-sólido [31, 32, 33]. Finalmente el modelo Euleriano, también conocido como *full Eulerian model*, es el mas complejo y completo modelo multifase disponible actualmente [34], sin embargo requiere un costo computacional elevado. Se han realizado pocos estudios relativos al análisis del *roping* en CFD. Uno de los casos considera la simplificación en donde se no se simula la fase gaseosa (aire), por ende solo considera una sola fase líquida y una alta fracción de sólidos en la mezcla [35]. Otro estudio analiza el comportamiento y el tipo de descarga del hidrociclón en función de la variación del diámetro del ápice y tamaño del hidrociclón [36]. Actualmente son pocos los estudios en donde se complementan los análisis experimentales de modelos de *roping* con modelos matemáticos, que permitan ahondar más detalladamente en el comportamiento del hidrociclón y permitan desarrollar teorías que involucren todas las variables que influyen en el proceso.

1.4 Objetivos del estudio

Los objetivos de la presente investigación se detallan a continuación:

- Modelar y simular el hidrociclón de laboratorio ensayado por Hsieh en 1988.
- Validar el modelo con datos obtenidos de la literatura.
- Realizar un análisis del efecto del tamaño de partícula y velocidad de alimentación, sobre la forma de descarga (desde *spray* a *roping*) a través del bajo flujo, velocidades internas y fluctuaciones de presión en la pared.
- Correlacionar las fluctuaciones de presión en la pared del hidrociclón, en forma de onda y espectro, y forma del bajo flujo (*spray*, *semi-roping* y *roping*) con los puntos de operación asociados.

2 Marco teórico

En el presente capítulo se detalla la teoría que describe el comportamiento general de los fluidos, modelación de la turbulencia en la subescala y modelación de flujos compuestos por varias fases interactuantes entre si.

2.1 Principios de conservación

Las ecuaciones que describen los movimientos de un fluido son representadas matemáticamente de acuerdo a lo que se establece en las leyes de conservación de la física, estas son la conservación de la masa, momentum y energía. Esta última se excluye ya que no se aplica al modelo utilizado.

2.1.1 Conservación de la masa

La tasa de incremento de masa dentro de un elemento de fluido es equivalente a la tasa neta de flujo de masa en las caras del elemento. En su forma diferencial queda expresada de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1)$$

Considerando un fluido incompresible la Ecuación 1 queda de la siguiente forma:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2)$$

2.1.2 Conservación del momentum

De acuerdo a la segunda ley de Newton , la fuerza neta sobre un elemento de fluido es igual a la tasa de variación del momentum. Existe dos tipos de fuerzas que

actúan sobre un elemento: de superficie (presión y viscosas) y de cuerpo (gravedad, centrífuga, inercia, electromagnética, entre otras).

Para un elemento de fluido la segunda ley de Newton en la dirección 1 (a modo de ejemplo) se describe según:

$$\left(\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\partial \tau_{j1}}{\partial x_j} dV \quad (3)$$

Generalizando, la i -ésima componente de la fuerza superficial por unidad de volumen se expresa como $\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$ en donde se utiliza la propiedad de simetría $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. Sea $\mathbf{g}$ la fuerza de cuerpo por unidad de masa y $\rho \mathbf{g}$ la fuerza de cuerpo por unidad de volumen, la ley de Newton toma la siguiente forma:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (4)$$

Esta ecuación también llamada ecuación de Cauchy del movimiento, relaciona la aceleración con la fuerza neta en un elemento.

2.2 Ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones de Navier-Stokes describen el comportamiento de un fluido. La siguiente ecuación constitutiva describe el tensor de esfuerzos de un elemento de fluido:

$$\tau_{ij} = - \left(p + \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (5)$$

La ecuación del movimiento para un fluido Newtoniano se obtiene sustituyendo la Ecuación 5 en la Ecuación 4 de Cauchy:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(2\mu \varepsilon_{ij} - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{u}) \delta_{ij} \right) \quad (6)$$

Esta es la forma general de las ecuaciones de Navier-Stokes. Considerando que la temperatura en el fluido no varía significativamente, la viscosidad no se considera como dependiente de la temperatura, por tanto puede salir de la derivada y la ecuación se reduce a:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \mu \left(\nabla^2 u_i + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right) \quad (7)$$

donde

$$\nabla^2 u_i \equiv \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2} \quad (8)$$

Considerando un fluido incompresible ($\nabla \cdot \mathbf{u}=0$) y utilizando notación vectorial, la ecuación se reduce a:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (9)$$

2.3 Turbulencia

Muchos de los fluidos con los que se trabaja en ingeniería se caracterizan por su naturaleza turbulenta. Estos se caracterizan por los siguientes aspectos:

- Aleatoriedad. Son flujos irregulares, caóticos e impredecibles.
- Altamente no lineales. Este aspecto se ve reflejado en números adimensionales como el número de Reynolds (Re) cuando exceden un valor crítico. Las no linealidades de un flujo generan vórtices de diversas escalas.
- Difusividad. Dada la mezcla macroscópica de las partículas de fluido, los flujos turbulentos se caracterizan por altas tasas de difusión de momentum y calor.
- Vorticidad. Se caracterizan por altos niveles de vorticidad fluctuante. Las estructuras identificables en un flujo turbulento son llamados vórtices, torbellinos o remolinos (*eddie* por su concepto en inglés), los de mayor tamaño contienen mayores cantidades de energía y están limitados por el dominio que los contiene al fluido. La energía desciende desde los remolinos grandes hacia los remolinos mas pequeños mediante interacciones no lineales y finalmente es disipada (calor) por difusión viscosa en los de menor tamaño, cuyas dimensiones son del orden de los milímetros.

- Disipación: los flujos turbulentos requieren de una alimentación continua de energía que compense las pérdidas viscosas asociadas a la transferencia de energía.

Considerando el rango de tamaños de las estructuras turbulentas que abarca desde kilómetros hasta milímetros, se han desarrollado modelos que son capaces de modelar la turbulencia a diferentes escalas y precisión. Tres son las categorías principales que permiten modelar los flujos turbulentos:

- *Reynolds-averaged Navier Stokes* (RANS): el carácter turbulento del fluido es promediado en el tiempo. Debido a la promediación de las ecuaciones referentes al flujo aparecen términos extra. Los modelos de esta categoría se caracterizan por un costo computacional bajo (en su mayoría), por lo que son modelos ampliamente utilizados en el campo de la ingeniería.
- *Large Eddy Simulation* (LES): este método involucra un filtrado especial de las ecuaciones de Navier-Stokes en forma transiente, calcula directamente los remolinos de mayor tamaño y parametriza los más pequeños. Estos métodos utilizan modelos de sub-grilla para la modelación de los pequeños remolinos. Debido a que estos modelos requieren mallas más finas que los modelos RANS son más precisos en las características del flujo pero a un mayor costo computacional.
- *Direct numerical simulation* (DNS): como su nombre lo explicita, resuelve directamente las ecuaciones de Navier-Stokes en mallas lo suficientemente finas que permitan abarcar el espectro hasta la escala de Kolmogorov, en donde se calcula tanto el flujo medio como todas las fluctuaciones turbulentas. El costo computacional es extremadamente elevado por lo que es utilizado principalmente en el área de la investigación.

2.4 Reynolds Stress Model

El modelo Reynolds Stress Model (RSM) es el más completo y complejo de los modelos RANS. Resuelve una ecuación de conservación por cada componente del tensor esfuerzo de Reynolds (6) y una para la tasa de disipación, en total resuelve 7 ecuaciones diferenciales por celda.

La ecuación de transporte que describe las componentes del tensor esfuerzo de Reynolds $\overline{\rho u'_i u'_j}$ se describe a continuación:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho u'_i u'_j}) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{\rho u'_k u'_i u'_j}) = D_{T,ij} + D_{L,ij} + P_{ij} + \phi_{ij} + \epsilon_{ij} \quad (10)$$

El término $D_{T,ij}$ es la difusión turbulenta, $D_{L,ij}$ la difusión molecular, P_{ij} la producción de esfuerzos, ϕ_{ij} el término presión-deformación y ϵ_{ij} la tasa de disipación. Se detallan a continuación:

$$D_{T,ij} \equiv -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{\rho u'_i u'_j u'_k} + \overline{p'(\delta_{kj} u'_i + \delta_{ki} u'_j)} \right) \quad (11)$$

$$D_{L,ij} \equiv \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i u'_j}) \right) \quad (12)$$

$$P_{ij} \equiv -\rho \left(\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \quad (13)$$

$$\phi_{ij} \equiv p' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \quad (14)$$

$$\epsilon \equiv -2\mu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} \quad (15)$$

Los términos $D_{T,ij}$, ϕ_{ij} y ϵ_{ij} requieren modelación adicional para obtener la solución de la Ecuación 10.

2.5 Modelo multifase Euleriano

El modelo multifase Euleriano es el más completo disponible en ANSYS Fluent, el cual considera fases individuales (gas, líquido y sólido) que interactúan entre ellas. La cantidad de fases presentes en una simulación queda limitada unicamente por la capacidad de memoria y cálculo computacional. Sus principales características se detallan a continuación:

- La presión es compartida por todas las fases.
- Las ecuaciones de continuidad y momentum son resueltas para cada fase.
- Permite designar fases granulares (interacción líquido-sólido).

2.5.1 Fracción volumétrica

La descripción de un modelo multifase como un continuo interpenetrante implica la incorporación de la fracción volumétrica por cada fase presente, la cual se denota por α_q . Este concepto representa la fracción de volumen que ocupa cada fase en una celda, se define por:

$$V_q = \int_V \alpha_q dV \quad (16)$$

donde se cumple que:

$$\sum_{q=1}^n \alpha_q = 1 \quad (17)$$

2.5.2 Ecuaciones de continuidad

Una vez introducido el término de fracción volumétrica, es necesario incluirlo en las ecuaciones de conservación de las fases existentes. La ecuación de continuidad de la masa queda definida como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_q \rho_q) + \nabla \cdot (\alpha_q \rho_q \mathbf{v}_q) = \sum_{p=1}^n (\dot{m}_{pq} - \dot{m}_{qp}) \quad (18)$$

donde $\mathbf{v}_q$ es la velocidad de la fase q y $\dot{m}_{pq}$ representa la transferencia de masa desde la p -ésima hacia la q -ésima fase o viceversa. La conservación del momentum queda definida como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_q \rho_q \mathbf{v}_q) + \nabla \cdot (\alpha_q \rho_q \mathbf{v}_q \mathbf{v}_q) = & -\alpha_q \nabla p + \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}_q + \alpha_q \rho_q \mathbf{g} \\ & + \sum_{p=1}^n (\mathbf{R}_{pq} + \dot{m}_{pq} \mathbf{v}_{pq} - \dot{m}_{qp} \mathbf{v}_{qp}) \end{aligned} \quad (19)$$

donde $\bar{\bar{\tau}}_q$ es el tensor esfuerzo-deformación de la q -ésima fase y se define según:

$$\bar{\bar{\tau}}_q = \alpha_q \mu_q (\nabla \mathbf{v}_q + \nabla \mathbf{v}_q^T) + \alpha_q \left(\lambda_q - \frac{2}{3} \mu_q \right) \nabla \cdot \mathbf{v}_q \bar{\bar{I}} \quad (20)$$

v_{pq} es la velocidad de interfase, la cual se define en función de; si $\dot{m}_{pq} > 0$ (la masa de la fase p es transferida a la fase q) entonces $v_{pq} = v_q$, si $\dot{m}_{pq} \leq 0$ entonces $v_{pq} = v_p$. Lo mismo aplica para la velocidad v_{qp} .

La Ecuación 19 debe cerrarse con la expresión apropiada de la fuerza de interfase R_{pq} , la cual depende de factores como fricción, presión, cohesión, entre otras. Esta se define como:

$$\sum_{p=1}^n \mathbf{R}_{pq} = \sum_{p=1}^n K_{pq}(\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_q) \quad (21)$$

donde K_{pq} es el coeficiente de intercambio de momentum en la interfase .

2.5.3 Coeficientes de intercambio de interfase

Dada la existencia de diferentes fases, se requiere definir un coeficiente para la interacción fluido-fluido (líquido-gas) y fluido-sólido (líquido y fase granular)

2.5.3.1 Coeficiente de intercambio fluido-fluido

Para este tipo de interacción se define la fase secundaria como gotas o burbujas. Se define en forma general el coeficiente de intercambio como:

$$K_{pq} = \frac{\rho_p f}{6\tau_p} d_p A_i \quad (22)$$

donde A_i es el área de interfase, d_p el diámetro de gota o burbuja, f la función de arrastre a definir y τ_p el "tiempo de relajación particulado", que se define como:

$$\tau_p = \frac{\rho_p d_p^2}{18\mu_q} \quad (23)$$

El modelo de Morsi y Alexander es el mas completo disponible en ANSYS Fluent ajustando la función en un amplio rango de números de Reynolds. Se define la fuerza de arrastre según la expresión:

$$f = \frac{C_D Re}{24} \quad (24)$$

donde el coeficiente de arrastre se define según:

$$C_D = a_1 + \frac{a_2}{Re} + \frac{a_3}{Re^2} \quad (25)$$

Los valores de a_1 , a_2 y a_3 se definen según el número de Reynolds asociado. Para mayor detalle revisar Morsi y Alexander [37]

2.5.3.2 Coeficiente de intercambio fluido-sólido

En este caso se define el coeficiente de intercambio fluido-sólido como:

$$K_{sl} = \frac{\alpha_s \rho_s f}{\tau_s} \quad (26)$$

donde τ_s se define como la Ecuación 23, sin embargo, en este caso d_p es el diámetro de las partículas sólida. El modelo de arrastre Gidaspow [38] define el coeficiente según los siguientes parámetros:

Si $\alpha_l > 0.8$ toma la forma:

$$K_{sl} = \frac{3}{4} C_D \frac{\alpha_s \alpha_l \rho_l |\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_l|}{d_s} \alpha_l^{-2.65} \quad (27)$$

donde:

$$C_D = \frac{24}{\alpha_l Re_s} (1 + 0.15(\alpha_l Re_s)^{0.687}) \quad (28)$$

Cuando $\alpha_l \leq 0.8$:

$$K_{sl} = 150 \frac{\alpha_s (1 - \alpha_l) \mu_l}{\alpha_l d_s^2} + 1.75 \frac{\rho_l \alpha_s |\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_l|}{d_s} \quad (29)$$

2.5.3.3 Presión de sólido

Para flujos granulares en régimen compresible, donde la fracción volumétrica de sólidos es inferior al valor máximo permitido (0.63 para partículas monodispersas), una presión de sólidos es calculada independientemente y utilizada por el término gradiente de presión ∇p_s en la ecuación de momentum de la fase granular. Debido a que se utiliza una distribución de velocidad Maxwell para las partículas, se introduce una temperatura granular en el modelo y aparece en la expresión de presión de sólidos y viscosidad. La presión se define como:

$$p_s = \alpha_s \rho_s \Theta_s + 2\rho_s (1 + e_{ss}) \alpha_s^2 g_{0,ss} \Theta_s \quad (30)$$

donde e_{ss} es el coeficiente de restitución para la colisión de partículas, $g_{0,ss}$ la función de distribución radial y Θ_s la temperatura granular.

2.5.3.4 Función de distribución radial

La función de distribución radial es un factor de corrección que modifica la probabilidad de colisión entre las partículas cuando la fase granular se torna densa. Para la presencia de solo una fase granular ANSYS Fluent la define según:

$$g_0 = \left(1 - \left(\frac{\alpha_s}{\alpha_{s,max}} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^{-1} \quad (31)$$

2.5.3.5 Esfuerzos de corte sólidos

El tensor de esfuerzos del sólido contiene una viscosidad de corte (*shear*) y aparente (*bulk*) que surgen por efecto de del intercambio de momentum debido a la traslación y colisión. Una componente de fricción de la viscosidad puede incluirse para tomar en cuenta la transición visco-plástica que ocurre cuando las partículas de sólidos alcanzan la máxima fracción volumétrica permitida. De esta forma la viscosidad de corte sólida queda de la siguiente forma:

$$\mu_s = \mu_{s,col} + \mu_{s,skin} + \mu_{s,fr} \quad (32)$$

donde la componente de colisión corresponde a:

$$\mu_{s,col} = \frac{4}{5} \alpha_s \rho_s d_s g_{0,ss} (1 + e_{ss}) \left(\frac{\Theta_s}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \alpha_s \quad (33)$$

la viscosidad cinética:

$$\mu_{s,skin} = \frac{10 \rho_s d_s \sqrt{\Theta_s \pi}}{96 \alpha_s (1 + e_{ss}) g_{0,ss}} \left(1 + \frac{4}{5} g_{0,ss} \alpha_s (1 + e_{ss}) \right)^2 \alpha_s \quad (34)$$

la viscosidad aparente (*bulk*):

$$\lambda_s = \frac{3}{4} \alpha_s^2 \rho_s d_s g_{0,ss} (1 + e_{ss}) \left(\frac{\Theta_s}{\pi} \right)^{1/2} \quad (35)$$

la viscosidad de fricción:

$$\mu_{s,fr} = \frac{p_s \sin \phi}{2 \sqrt{I_{2D}}} \quad (36)$$

donde p_s es la presión de sólidos, ϕ en ángulo de fricción interna e I_{2D} la segunda invariante del tensor de esfuerzo deviatorico.

2.5.3.6 Temperatura granular

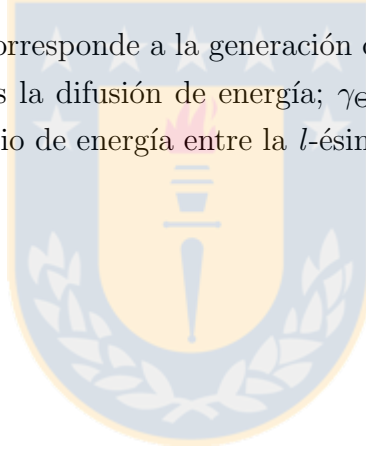
La temperatura granular para una s -ésima fase sólida es proporcional a la energía cinética de las partículas en movimiento aleatorio. Formalmente la expresión que la representa corresponde a:

$$\Theta_s = \frac{1}{3} u_{s,i} u_{s,i} \quad (37)$$

donde $u_{s,i}$ representa la i -ésima componente de la velocidad fluctuante del sólido en el sistema coordenado Cartesiano. La ecuación de transporte que se deriva de la teoría cinética toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho_s \alpha_s \Theta_s) + \nabla \cdot (\rho_s \alpha_s \mathbf{v}_s \Theta_s) \right) = & (-p_s \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\tau}}_s) : \nabla \mathbf{v}_s \\ & + \nabla \cdot (k_{\Theta_s} \nabla \Theta_s) - \gamma_{\Theta_s} + \phi_{ls} \end{aligned} \quad (38)$$

donde $(-p_s \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\tau}}_s) : \nabla \mathbf{v}_s$ corresponde a la generación de energía por parte del tensor esfuerzo sólido; $k_{\Theta_s} \nabla \Theta_s$ es la difusión de energía; γ_{Θ_s} la disipación de energía por colisión; y ϕ_{ls} el intercambio de energía entre la l -ésima fase fluida y la s -ésima fase sólida.



3 Modelo computacional

En el presente capítulo se presentan los detalles geométricos, de modelación, configuración en ANSYS Fluent 14.5 y los casos considerados para el desarrollo de las simulaciones realizadas.

3.1 Modelo geométrico

El modelo geométrico utilizado corresponde a un hidrociclón de laboratorio con un diámetro de 75 mm ensayado en 1988 por Hsieh [39]. Las dimensiones características del equipo se encuentran detalladas en la Tabla 1, en la Figura 3 se muestra la geometría (izquierda) y las dimensiones características (derecha). Para un análisis cercano a lo real se ha extendido la longitud del *vortex finder* en una tubería curva y se ha añadido un dominio cilíndrico contiguo al ápice, que emule una descarga a la atmósfera. De este modo se busca que las condiciones de borde simulen un comportamiento realista del equipo, de acuerdo a la revisión bibliográfica no se ha encontrado este tipo de mejoras adicionales al cuerpo principal del hidrociclón. Además la descarga a la atmósfera permite visualizar el tipo de descarga del hidrociclón para los diferentes regímenes a estudiar. En la Figura 4 se muestra la grilla computacional del dominio 3D considerado.

Tabla 1. Características geométricas del hidrociclón. Fuente: elaboración propia.

Elemento	Índice	Longitud
Diámetro de la sección cilíndrica	D_c	75 mm
Diámetro de <i>vortex finder</i>	d_v	25 mm
Diámetro del ápice	d_s	12.5 mm
Longitud sección cilíndrica	d_{cy}	75 mm
Longitud sección cónica	l_{co}	186 mm
Longitud ápice	l_s	25 mm
Longitud arista alimentación	a_s	22 mm

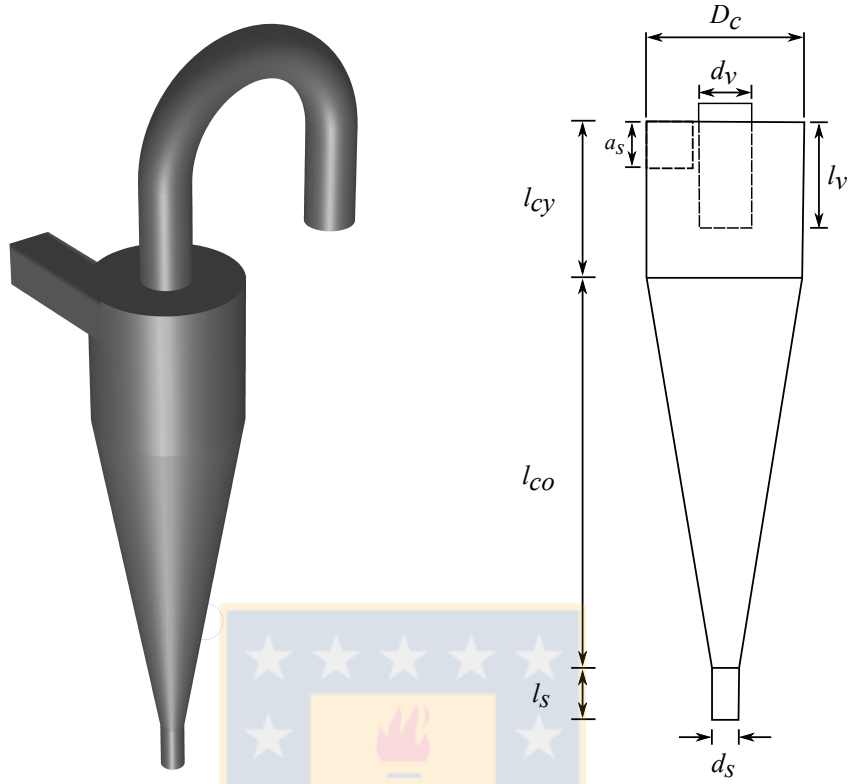


Figura 3. Geometría del hidrociclón de laboratorio. Fuente: elaboración propia.

3.2 Grilla computacional

El dominio computacional consiste en una grilla no estructurada dividida en aproximadamente 180000 celdas hexaédricas. La cantidad de celdas ha sido seleccionada y analizada en base a la información registrada en la literatura y la capacidad de cálculo computacional disponible [40, 41]. En los volúmenes de caras circulares la distribución de los elementos se realiza con una grilla de tipo *O-grid*, como se muestra en la Figura 5. Para obtener resultados con mayor precisión la grilla es mas fina en el ápice y posterior descarga al volumen que conforma la atmósfera, así como también en la zona cercana a las paredes para cumplir con los requerimientos de la función de pared estándar.

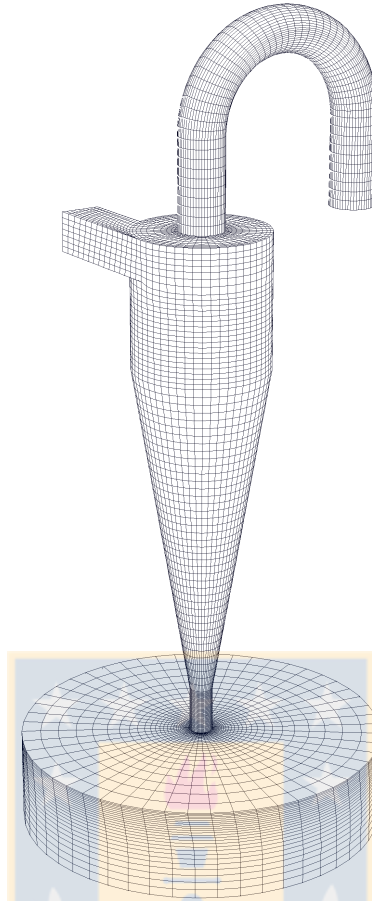


Figura 4. Mallado del volumen de control. Fuente: elaboración propia.

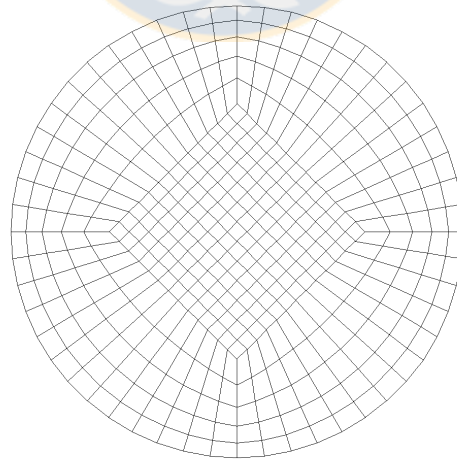


Figura 5. Discretización *O-grid*. Fuente: elaboración propia.

3.3 Condiciones de borde

Las condiciones de borde consideradas para el desarrollo de la simulación se detallan a continuación.

Se utiliza *velocity inlet* en la cara transversal de la tubería de alimentación, con las velocidades a detallar por cada caso (siguiente capítulo) y las caras lateral y superior del cilindro que conforma el volumen de atmósfera, en estas zonas en particular se considera una velocidad de 0 m/s.

Pressure outlet a presión atmosférica en la descarga del sobreflujo y pared inferior del volumen de atmósfera. En estas zonas (totalidad del área), además se considera un *backflow* de la fase gaseosa (aire) con fracción volumétrica 1, de modo de generar las condiciones de formación del núcleo de aire cuando las condiciones lo permitan. Todas las paredes del hidrociclón se consideran con condición *wall* y no deslizamiento. En todas se utiliza función de pared estándar con un y^+ que varía entre 30 y 300 de acuerdo a las restricciones propias del modelo.

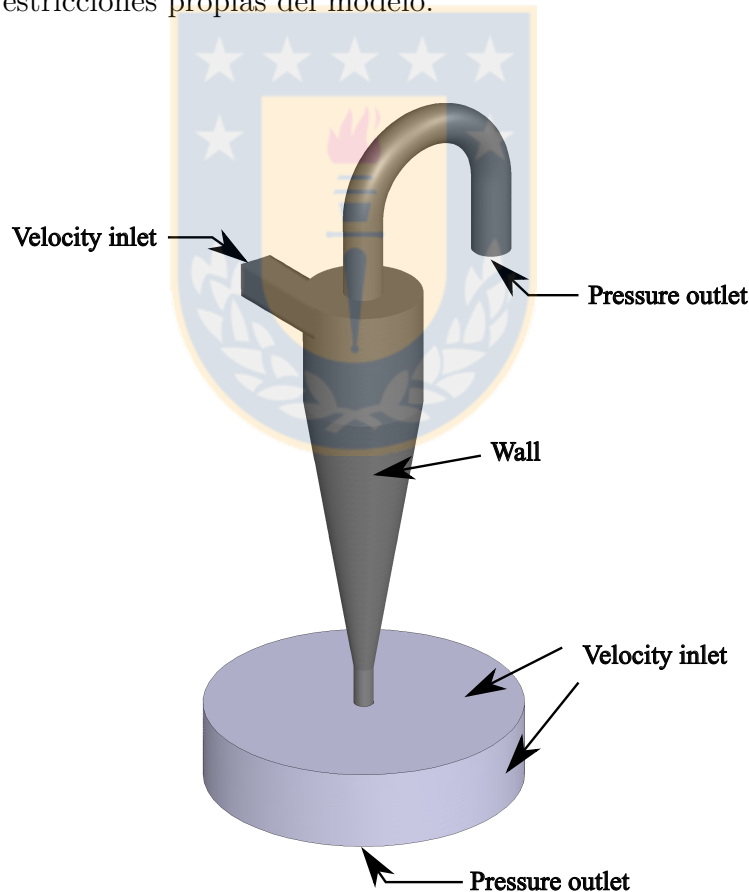


Figura 6. Condiciones de borde. Fuente: elaboración propia.

3.4 Configuración de ANSYS Fluent 14.5

Se presentan a continuación algunos de los parámetros que requiere ANSYS Fluent para la configuración del modelo. Las condiciones de solución se presentan en la Tabla 2, es necesario recalcar que tanto el momentum como la fracción volúmetrica requieren de esquemas de solución superiores a primer orden, de esta forma se logra la definición correcta de la interfase aire-agua.

Tabla 2. Condiciones de solución. Fuente: elaboración propia.

Pressure velocity coupling	
Scheme	Phase Coupled SIMPLE
Spatial discretization	
Gradient	Least Squares Cell Based
Momentum	Second Order Upwind
Volume fraction	Modified HRIC
Turbulent kinetic energy	Second Order Upwind
Turbulent dissipation energy	Second Order Upwind
Reynolds Stresses	Second Order Upwind

Los factores de relajación seleccionados se detallan a continuación en la Tabla 3.

Tabla 3. Factores de relajación. Fuente: elaboración propia

Presión	0.3
Densidad	1.0
Fuerzas de cuerpo	1.0
Momentum	0.3
Fracción volúmetrica	0.3
Temperatura granular	0.3
Energía cinética turbulenta	0.3
Tasa de disipación turbulenta	0.3
Viscosidad turbulenta	0.3
Esfuerzos de Reynolds	0.3

Finalmente, para modelar la fase granular se selecciona, en base a las recomendaciones de ANSYS Fluent, la siguientes características descritas en la Tabla 4.

Tabla 4. Descripción de la fase granular. Fuente: elaboración propia.

Modelo de temperatura granular	<i>Phase property</i>
Diámetro	20, 34 y 70 μm
Viscosidad granular	Gidaspow
Viscosidad aparente granular (<i>bulk</i>)	Lun et al.
Viscosidad friccional	Schaeffer
Presión friccional	Based-ktgf
Módulo friccional	Derived
Límite de empaquetamiento por fricción	0.61
Temperatura granular	Algebraica
Presión de sólido	Lun et al.
Distribución radial	Lun et al.
Módulo de elasticidad	Derivado
Límite de empaquetamiento	0.63

3.5 Casos de estudio

Se debe tener en consideración que la operación y posterior comportamiento de un hidrociclón responde a los siguientes 4 parámetros en el flujo de alimentación: concentración de sólidos, distribución de tamaño de partícula, rango de tamaños presentes y velocidad/presión. Para el presente estudio se ha considerado una concentración de sólidos de un 26% en volumen (un valor similar al que se encuentra presente en relaves de la industria minera) para partículas monodispersas de un determinado tamaño, por tanto, la velocidad de alimentación varía de acuerdo a los 3 casos de estudio propuestos, los cuales se detallan en la Tabla 5.

Tabla 5. Datos de casos considerados. Fuente: elaboración propia.

Caso	Tamaño de partícula (μm)	Velocidad de alimentación (m/s)	Presión asociada (psi)
I	20	2.3	8.6
		4.6	33.2
		6.9	70.5
II	34	2.3	7.4
		4.6	25.8
		6.9	58.8
III	70	2.3	4.8
		3.45	8.6
		4.6	14

4 Resultados y discusión

En el presente capítulo se analizan y discuten los resultados obtenidos de la investigación realizada. Inicia con la validación de los datos en función de datos experimentales obtenidos de la literatura, luego continúa con un análisis de los resultados referentes al tipo y características de la descarga a través del bajo flujo, posteriormente se analizan las velocidades de la mezcla agua-sólido al interior del hidrociclón, luego se analizan las características del núcleo de aire y finalmente se observan las características de las fluctuaciones de presión en la pared y su relación con el tipo de descarga.

4.1 Validación

El modelo ha sido validado en base a las mediciones realizadas por Hsieh en un hidrociclón de laboratorio de 75 mm de diámetro [39]. En el experimento se realizan mediciones de velocidad axial y tangencial en 3 zonas, a una distancia de 60, 120 y 170 mm de la superficie superior del hidrociclón, ver Figura 7. Adicionalmente se han utilizado datos de la distribución de agua y partículas de la Serie VI experimental realizadas en el mismo equipo [42]. La validación del modelo incluye la fase gaseosa (aire), líquida (agua) y sólida (partículas). En cuanto a esta última, solo se considera un tamaño de partícula de $17 \mu\text{m}$, el cual corresponde al tamaño medio (d_{50}) de la distribución utilizada experimentalmente. Los resultados de los perfiles de velocidad se muestran en la Figura 8, se observa ajuste correcto de los datos en relación a las mediciones de velocidad axial, para el caso de las velocidades tangenciales existe un correcto ajuste desde las paredes hacia el centro del equipo, sin embargo en la zona cercana a la interfaz aire-agua el modelo subestima los valores de velocidad registrados. La Tabla 6 muestra la distribución de fases, los resultados en general se encuentran cercanos al 10% de error, para el caso de la

distribución de agua se genera una diferencia del 61%. Si bien se desconoce la causa particular de esta diferencia, resultados previos realizados en la memoria de título [43] con modelos de menor complejidad generan errores de similar magnitud.

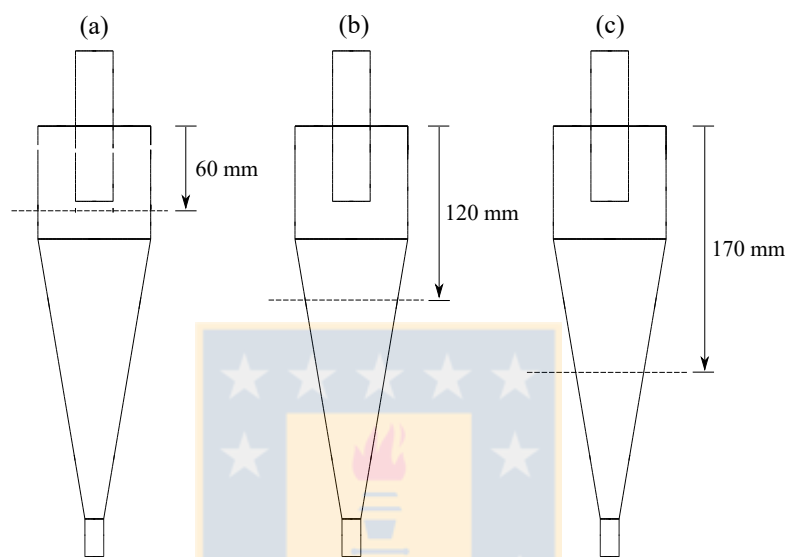


Figura 7. Posiciones de referencia. Fuente: elaboración propia.

Tabla 6. Resultados experimentales y del modelo implementado. Fuente elaboración propia.

	Alimentación (kg/s)		Sobreflujo (kg/s)		Bajoflujo (kg/s)	
	Sólidos	Agua	Sólidos	Agua	Sólidos	Agua
Experimental	0.137	1.171	0.076	1.120	0.060	0.050
Simulación	0.122	1.067	0.069	1.040	0.058	0.02
Error	10.8%	8.9%	9.6%	7.1%	4.4%	61%

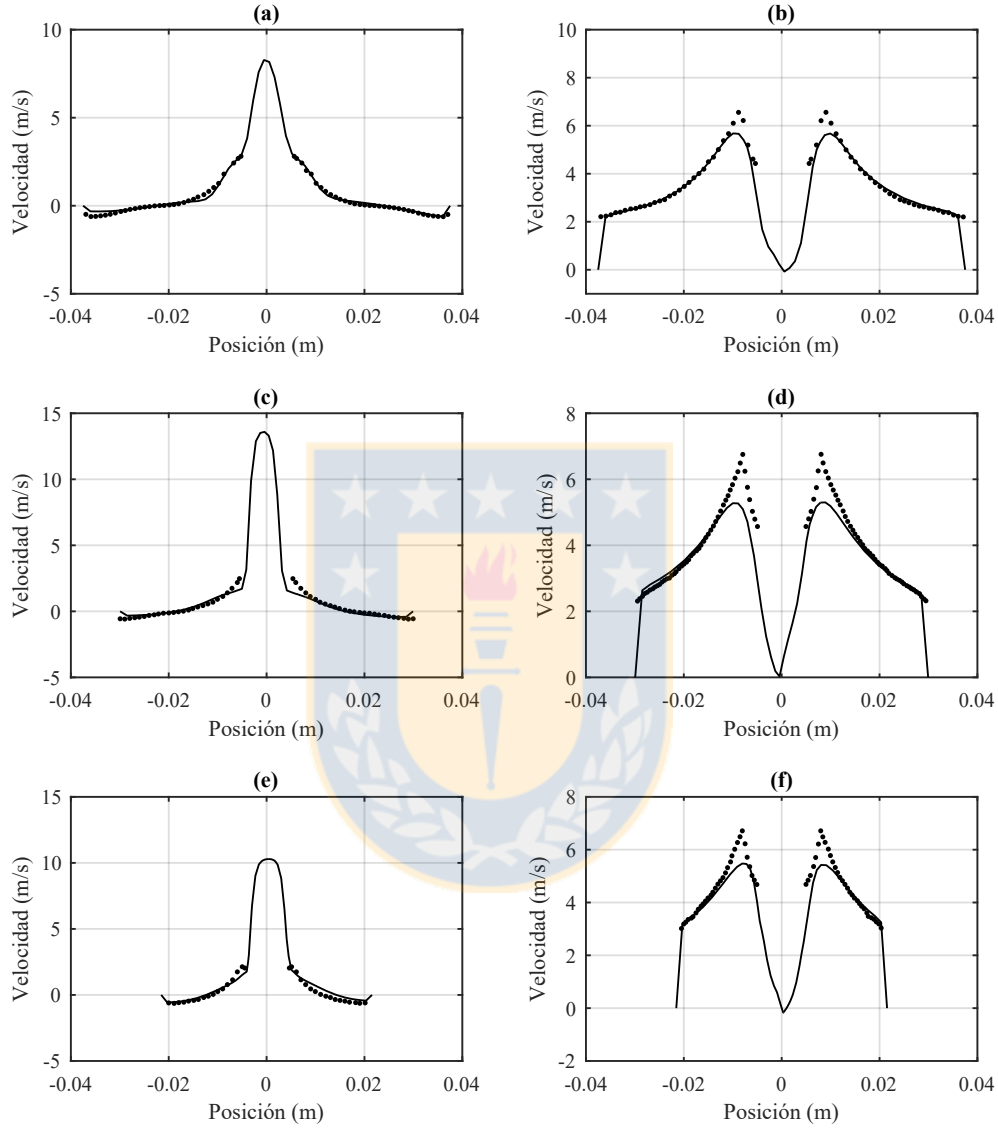


Figura 8. Velocidad axial a (a) 60 mm (c) 120 mm y (e) 170 mm de la superficie superior; velocidad tangencial a (b) 60 mm (d) 120 mm y (f) 170 mm de la superficie superior. (●) medición experimental y (—) datos simulación. Fuente: elaboración propia.

4.2 Descarga

La forma o tipo de la descarga en el bajoflujo (*underflow*) es un parámetro visual que permite tener una idea global de la operación del hidrociclón. Como se ha mencionado en el capítulo 1, 3 son los tipos de descarga que se pueden apreciar: *spray*, *semi-rope* y *rope*.

En las Figuras 9, 10 y 11 se muestran los contornos de fracción volumétrica de sólidos y en ángulo de descarga para los casos I, II y III respectivamente. Los resultados muestran que para el caso I, un aumento en la presión de alimentación desde 8.6 a 70.5 psi genera un descenso del ángulo de descarga desde 30° a 21°, en todos los casos se observa una descarga de tipo *spray*. En el caso II se observa que el aumento de presión desde 7.4 a 58.8 psi genera ángulos de descarga desde 23° a 9°, se observa en particular que el tipo de descarga inicia en forma de *spray*, sin embargo, al aumentar la presión la descarga tiende hacia una de tipo *semi-rope* en donde se aprecia una extrangulación del núcleo de aire en la zona cercana al ápice. Finalmente para el caso III un incremento en la presión de 4.8 hasta 14.0 psi, genera un ángulo de descarga inicial de 7° hasta 0°, para este caso se observa una descarga que inicia con *semi-rope* y un leve incremento en la presión induce a una descarga de tipo *rope*. Otro aspecto relevante que se muestra en los contornos, es la relación entre el tipo de descarga (y ángulo asociado) y las zonas donde se concentran mayormente las partículas. Para el caso I se puede observar que inicialmente las partículas se concentran en la zona del ápice principalmente, sin embargo, un aumento en la presión posiciona las partículas en un área levemente superior y en las paredes de la zona cónica. En el caso II se observa un patrón similar al caso I, con la particularidad de que las partículas se concentran en un área de mayor tamaño. Los resultados muestran que para el caso III la concentración de partículas inicia abarcando desde la mitad de la zona cónica hacia el ápice, el aumento en la presión de alimentación provoca que los sólidos tiendan a distribuirse prácticamente en toda la zona cónica suprimiendo el núcleo de aire.

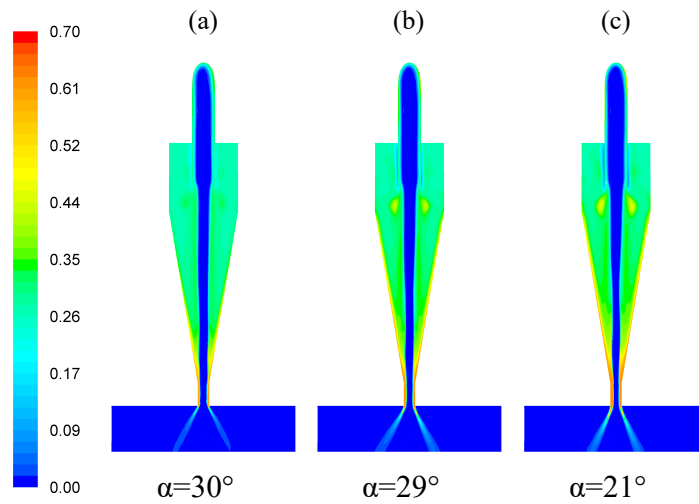


Figura 9. Contorno de fracción volumétrica y ángulo de descarga para el Caso I, velocidad de entrada a (a) 8.6 psi (b) 33.2 psi y (c) 70.5 psi. Fuente: elaboración propia.

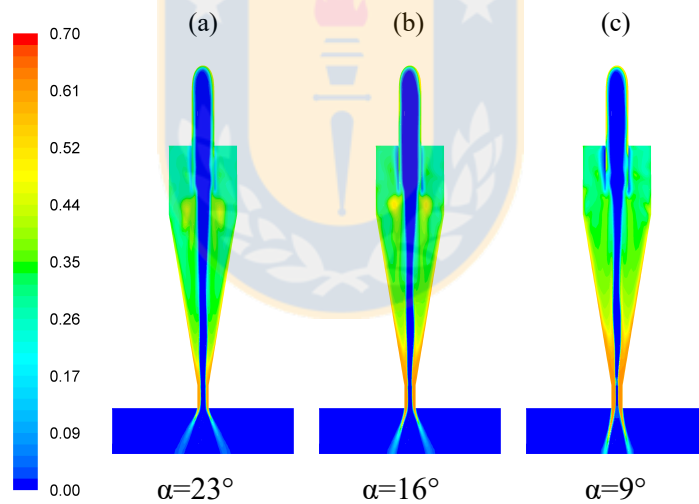


Figura 10. Contorno de fracción volumétrica y ángulo de descarga para el Caso II, presión de entrada a (a) 7.4 psi (b) 25.8 psi y (c) 58.8 psi. Fuente: elaboración propia.

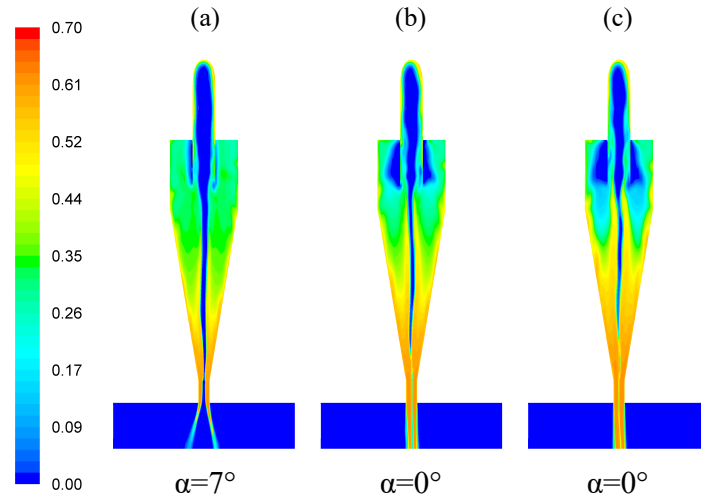


Figura 11. Contorno de fracción volumétrica y ángulo de descarga para el Caso III, presión de entrada a (a) 4.8 psi (b) 8.6 psi y (c) 14.0 psi. Fuente: elaboración propia.

Complementando las figuras anteriores, se muestra en la Figura 12 las curvas de presión versus ángulo de descarga. Se observa que la pendiente negativa es suave para un tamaño de partícula inferior (caso I) y que conforme aumenta el tamaño de partícula (casos II y III) la pendiente incrementa notablemente. Se observa que el caso III es claramente representativo del *roping*, en donde los datos muestran un decaimiento de ángulo con un leve aumento de la presión. Finalmente se puede concluir que el tipo de descarga es sensible en mayor medida al tamaño de partícula que a la presión de alimentación.

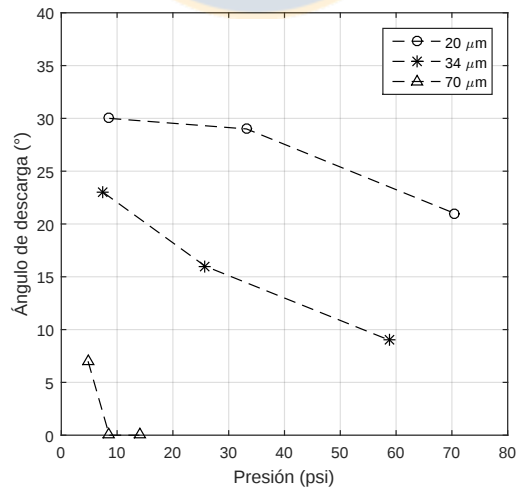


Figura 12. Presión de alimentación vs ángulo de descarga. Fuente: elaboración propia

La Tabla 7 presenta los datos referentes a la distribución de las partículas a través del sobreflujo y bajoflujo. Se observa que el porcentaje de sólidos a través del sobreflujo decae a medida que la presión aumenta, salvo para el caso III en donde se genera un incremento en los datos. Se observa el mismo patrón en cuanto a la fracción volumétrica debido a la relación directa de estos parámetros. Como es de esperarse, el flujo másico de partículas a través del sobreflujo incrementa junto con la presión de alimentación, debido a una mayor cantidad de sólidos en la mezcla. En el caso del bajoflujo se observa que el porcentaje de sólidos incrementa levemente conforme aumenta la presión de alimentación, al igual que la fracción volumétrica. Finalmente el flujo de sólidos incrementa con el aumento de presión (al igual que en el sobreflujo), si bien el flujo aquí es notablemente inferior al flujo en el sobreflujo, la concentración de sólidos en la mezcla es notablemente mayor.

La fracción volumétrica de partículas a través del sobreflujo y bajoflujo se muestra en la Figura 13 y 14 respectivamente. Se puede notar que la concentración de sólidos a través del bajoflujo no tiene relación directa con el *roping*, si bien existe un incremento de las partículas, éste es muy bajo como para determinar el tipo de descarga.

Tabla 7. Datos de sólidos en sobreflujo y bajoflujo. Fuente: elaboración propia

Caso	Presión alimentación (psi)	Sobreflujo			Bajoflujo		
		Porcentaje de sólidos (%)	Fracción volumétrica (-)	Flujo de sólidos (kg/s)	Porcentaje de sólidos (%)	Fracción volumétrica (-)	Flujo de sólidos (kg/s)
I	8.6	46.9	0.242	0.72	79.8	0.594	0.05
	33.2	43.4	0.221	1.20	80.1	0.599	0.34
	70.5	42.1	0.212	1.68	80.8	0.608	0.62
II	7.5	42.9	0.217	0.58	79.7	0.591	0.18
	25.8	40.7	0.202	1.05	80.6	0.606	0.49
	58.8	39.0	0.191	1.45	81.1	0.613	0.85
III	4.8	38.2	0.186	0.46	79.6	0.592	0.31
	8.6	38.0	0.185	0.69	80.0	0.596	0.46
	14	38.8	0.190	0.95	80.3	0.601	0.59

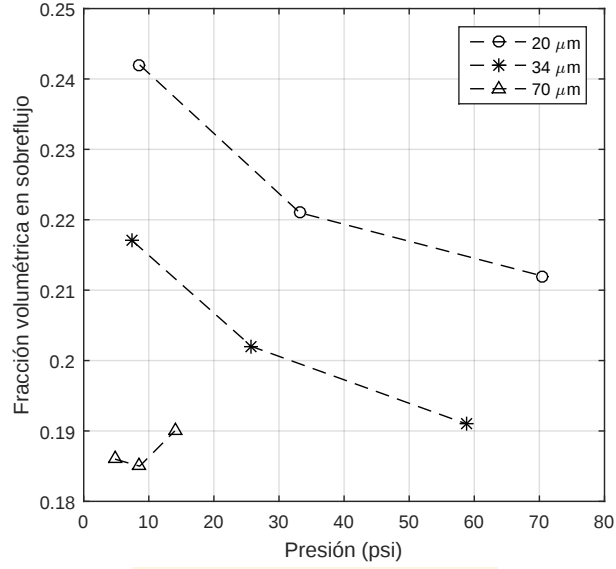


Figura 13. Presión de alimentación vs fracción volumétrica en sobreflujo. Fuente: elaboración propia.

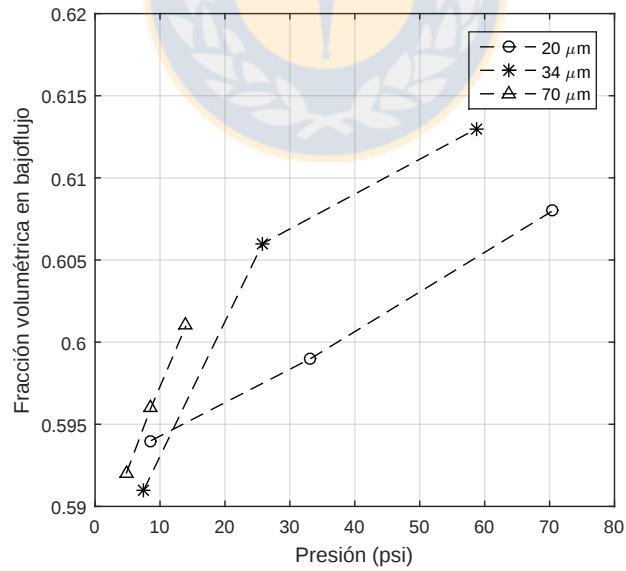


Figura 14. Presión de alimentación vs fracción volumétrica en bajoflujo. Fuente: elaboración propia.

La Figura 15 muestra el gráfico de selectividad, la cual se define como la fracción de partículas de determinado tamaño en la alimentación que atraviesa el bajo flujo. Dada la particularidad de las simulaciones que han sido modeladas con solo un tamaño de partícula se presenta la selectividad en función de la presión de alimentación. Para los casos I y II se observa un incremento de la fracción de partículas que escapan a través del bajo flujo conforme aumenta la presión en el flujo de alimentación. Sin embargo en el caso III se genera un leve incremento de esta, desde los 4.8 a 8.6 psi, luego disminuye a los 14 psi debido al incremento de la fracción volumétrica de sólidos a través del sobreflujo, efecto visible en la Figura 13.

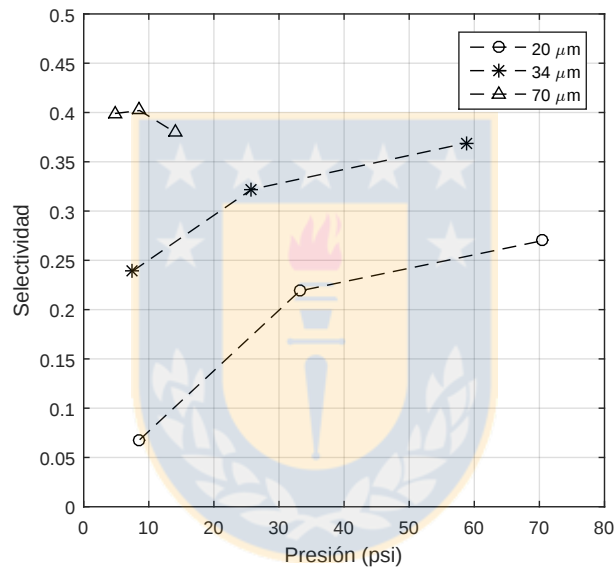


Figura 15. Selectividad vs presión. Fuente: elaboración propia.

4.3 Análisis de velocidad axial y tangencial

Se realizó un análisis de las velocidades al interior del hidrociclón tomando como base las 3 posiciones detalladas previamente en la sección 4.1. Las Figuras 16, 17 y 18 muestran los resultados de la velocidad axial (columna izquierda) y tangencial (columna derecha) para los casos I, II y III respectivamente. En la Figura 16 se presentan los datos de las velocidades para el caso I, se puede notar que para una velocidad de alimentación de 2.3 y 4.6 m/s se desarrollan las velocidades axiales máximas al interior del núcleo de aire, sin embargo la fracción volumétrica de la mezcla líquido-sólido es muy baja en esta zona, las velocidades oscilan de entre 1 a 7 m/s alrededor del núcleo de aire en las 3 posiciones indicadas. Se aprecia que las velocidades son mayores a 60 mm de la superficie, luego estas descienden conforme se acerca al ápice. Otro aspecto importante a destacar, es el incremento de la velocidad en dirección al ápice en la zona cercana a las paredes (valores negativos) conforme se aumenta la velocidad de alimentación. Si bien, su magnitud no es notoria en los 60 y 120 mm, si lo es en torno a los 170 mm de la superficie superior. Para las velocidades tangenciales se presenta un patrón de comportamiento de la velocidad que solo varía en magnitud al incrementar la velocidad de alimentación, en donde el perfil muestra un incremento desde las paredes hacia el núcleo de aire para luego descender a velocidad de 0 m/s (no existe rotación en el eje central). Se observa que se desarrolla la máxima velocidad en las cercanías del núcleo de aire. En el caso II, Figura 17, tanto en la velocidad axial como tangencial, no se aprecian cambios significativos al generar un incremento desde 2.3 a 4.6 m/s la velocidad de alimentación. En general, el perfil de velocidades axial y tangencial presentan el mismo patrón que el caso I, donde las velocidades axiales alcanzan el máximo en torno al núcleo de aire. Las velocidades desarrolladas son inferiores al caso I, a excepción de la velocidad axial a 170 mm desde la superficie superior. Esta última presenta mayores magnitudes de velocidad tanto en dirección al bajoflujo como alrededor del núcleo, con valores que oscilan entre -3.5 y 5 m/s respectivamente, en contraste con el rango de -2 a 3.5 m/s para el caso I. Finalmente los resultados para el caso III, en la Figura 18, presentan los datos representativos en cuanto a la condición de *roping*. Las velocidades axiales desarrollan la máxima velocidad en el centro del hidrociclón, sin embargo ya no existe un núcleo gaseoso presente y las condiciones hidrodinámicas al interior del equipo no generan los patrones vistos en los casos anteriores. La velocidad de alimentación no genera cambios significativos en las velocidades internas, la velocidad axial oscila en torno a los 0 m/s salvo en el centro del hidrociclón. Caso similar ocurre con las

velocidades tangenciales, cuya magnitud tiende a ser constante entre las paredes y el eje central y magnitudes notablemente inferiores a los casos I y II.

En conclusión, un incremento de la velocidad de alimentación tiene un impacto directo en las velocidades al interior del hidrociclón. El caso I presenta mayores diferencias de velocidad conforme el flujo de alimentación aumenta, siendo esta diferencia inferior para los casos II y III, de lo cual se desprende que un mayor tamaño de partícula limita en mayor medida las variaciones de velocidad y comportamiento interno de la mezcla. De acuerdo a lo expuesto, el *roping* está asociado a una disminución en las velocidades axiales y tangenciales en comparación a una descarga en *spray*, esta diferencia de comportamiento se evidencia de forma clara en las velocidades desarrolladas a 170 mm de la superficie, es decir, conforme el flujo se acerca al bajo flujo.

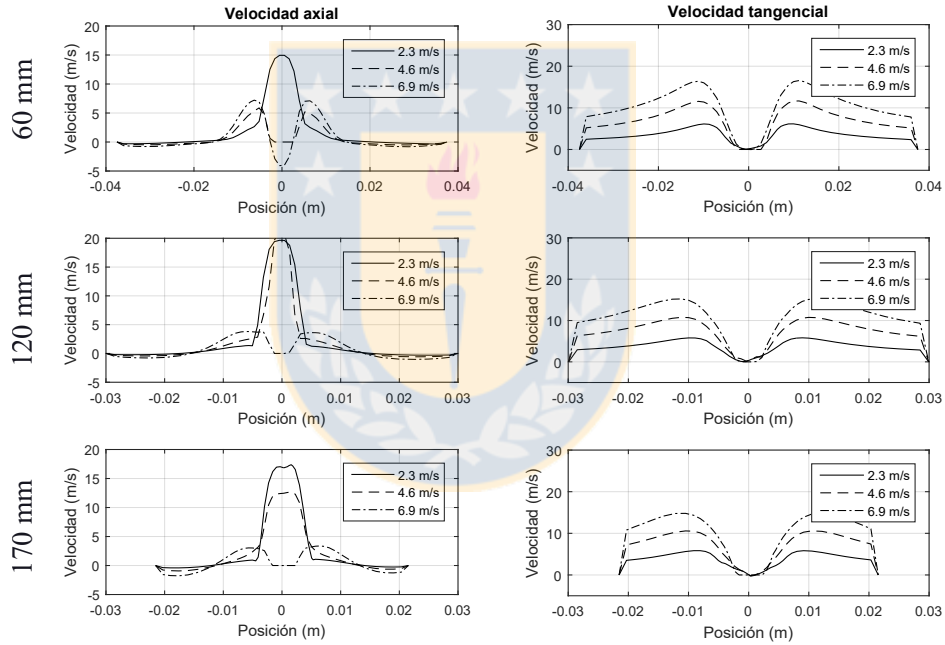


Figura 16. Velocidad axial (izquierda) y tangencial (derecha); Caso I. Fuente: elaboración propia.

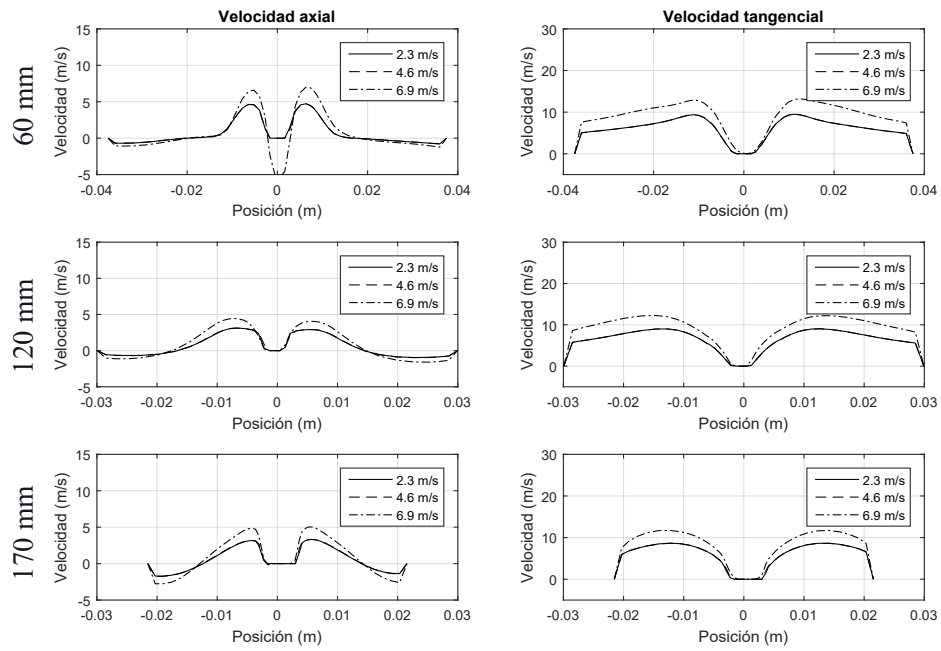


Figura 17. Velocidad axial (izquierda) y tangencial (derecha); Caso II. Fuente: elaboración propia.

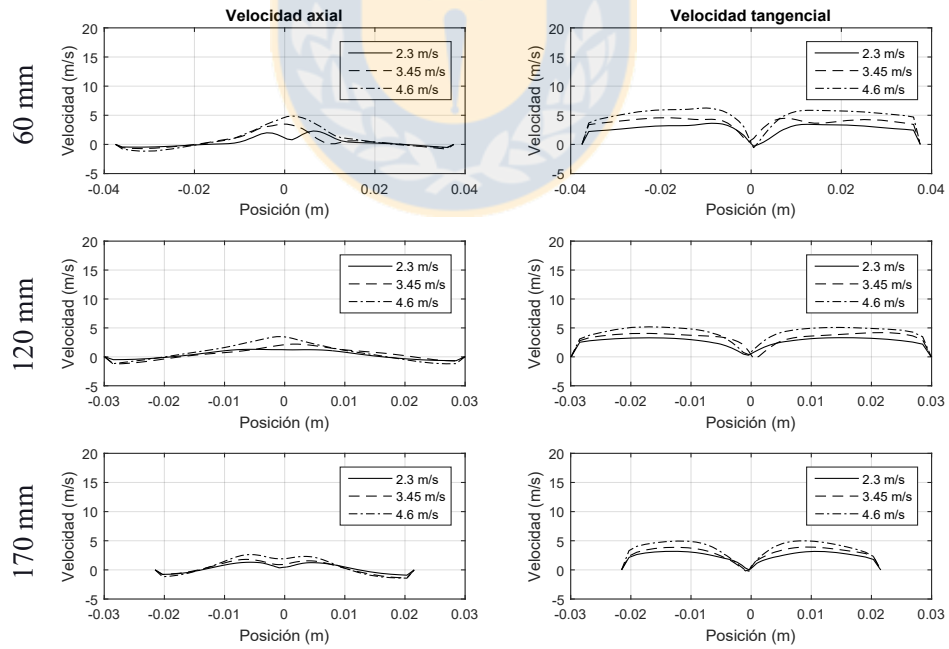


Figura 18. Velocidad axial (izquierda) y tangencial (derecha); Caso III. Fuente: elaboración propia.

4.4 Núcleo de aire

La existencia del núcleo de aire al interior del hidrociclón es un parámetro fundamental en el proceso de clasificación, el cual está directamente ligado al tipo de descarga con que opera el hidrociclón. La Figura 19 muestra el diámetro promedio en la zona cónica del equipo en función de la presión de alimentación, los resultados indican que un incremento en la presión de alimentación genera una disminución en el diámetro del núcleo de aire en cualquiera de los casos estudiados. Para el caso I se presenta una disminución desde 8 a 5 mm aproximadamente, para el caso II se observa una disminución desde 6 a 4.7 mm y para el caso III el núcleo inicial es de 1.2 mm aproximadamente y luego colapsa con un leve incremento en la presión. Se observa la relación directa que existe entre el diámetro de núcleo de aire con el ángulo de descarga presentado previamente en la Figura 12, combinando estos dos gráficos se presenta en la Figura 20 el ángulo de descarga versus el diámetro del núcleo de aire, de esta forma se observa la relación directa entre estos parámetros.

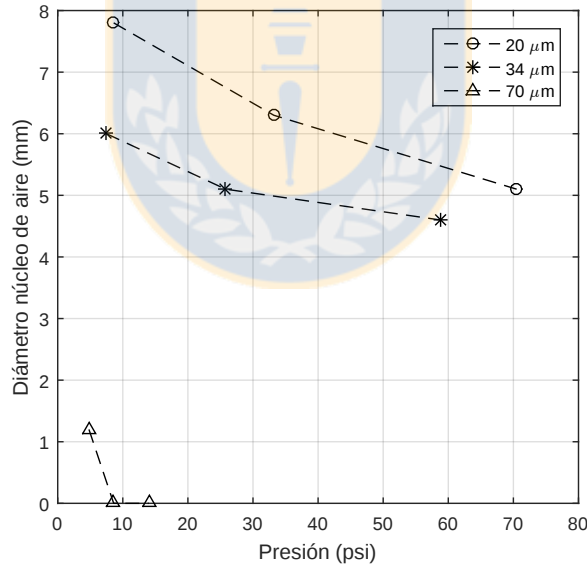


Figura 19. Presión de alimentación vs diámetro del núcleo de aire. Fuente: elaboración propia.

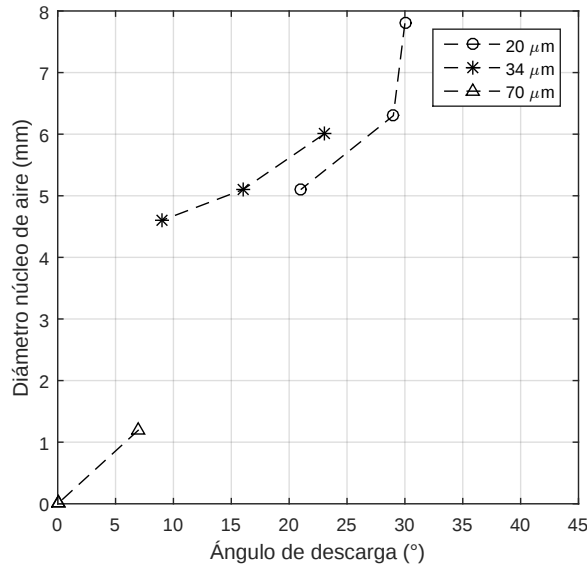


Figura 20. Ángulo de descarga vs diámetro del núcleo de aire. Fuente: elaboración propia.

4.5 Fluctuaciones de presión en pared

De acuerdo a los resultados obtenidos es posible observar patrones en cada zona donde se ha registrado la presión asociados al tipo de descarga del hidrociclón. Las siguientes figuras presentan los datos obtenidos de las fluctuaciones de presión en las zonas cilíndrica, cónica y ápice.

Las Figuras 21, 22 y 23 muestran las fluctuaciones de presión en las paredes del hidrociclón para una velocidad de alimentación de 2.3, 4.6 y 6.9 m/s respectivamente para el caso de estudio con 20 μm. Las Figuras 24, 25 y 26 muestran las formas de onda y espectros para el caso II a 2.3, 4.6 y 6.9 m/s respectivamente. Las Figuras 27, 28 y 29 muestran las formas de onda y espectros para el caso III a 2.3, 3.45 y 4.6 m/s respectivamente.

Se observa que al aumentar la velocidad/presión de alimentación, las fluctuaciones de presión aumentan en magnitud (tal como se esperaría) en todo el cuerpo del hidrociclón. Sin embargo al analizar el espectro se observa que al aumentar la velocidad de alimentación de 2.3 a 4.6 m/s para el caso I, la amplitud entre 0 y 100 Hz se ve incrementada, pero al aumentar de 4.6 a 6.9 m/s se produce una decaída de estos valores y una zona cercana a los 200 Hz se ve potenciada. Caso similar se puede concluir del caso II, sin embargo a 6.9 m/s no se observa un incremento en la amplitud a una frecuencia mayor. Para los casos I y II se puede

concluir que al doblar la velocidad de alimentación, se generan altas amplitudes a bajas frecuencias, sin embargo al triplicarla, se produce un fenómeno en el cual las amplitudes a bajas frecuencias disminuyen drásticamente. Para el caso III se tiene un comportamiento diferente, si bien inicialmente el espectro muestra altas amplitudes a bajas frecuencias, un incremento en la velocidad tiende a aumentar las amplitudes en todo el rango de frecuencias, como se puede observar en las Figuras 27, 28 y 29, a mayor velocidad mayor es el ruido que presentan los espectros. En este sentido existe una relación entre el comportamiento y descarga del hidrociclón, el caso I presenta una descarga de tipo *spray*, el caso II muestra una transición desde *spray* a *semi-roping* y finalmente el caso III muestra la transición desde *semi-roping* hasta *roping*. Por lo tanto la condición de *roping* se asocia a altas fluctuaciones en el flujo generando mayor cantidad de ruido en el espectro. Si bien las mediciones realizadas en las simulaciones consideran la presión en un punto no se puede hablar de vibraciones en el cuerpo del hidrociclón propiamente tal, debido al efecto de los soportes que sostienen al equipo. De esta manera se requiere un análisis en mayor profundidad para relacionar directamente las presiones registradas con las vibraciones del hidrociclón. Aún así se espera que una operación en *roping* derive en altas vibraciones del equipo.

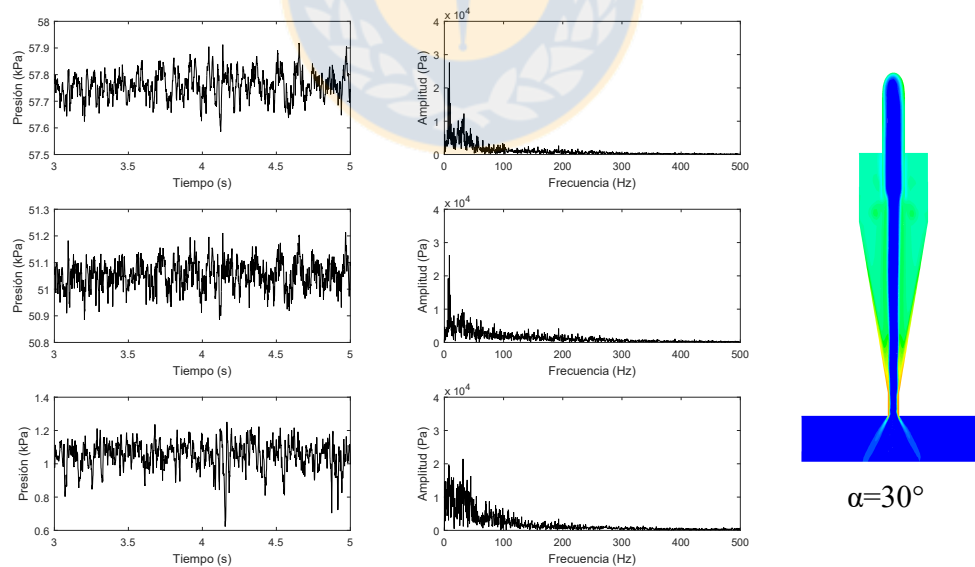


Figura 21. Forma de onda (izquierda) y espectro (derecha); caso I a 2.3 m/s. Fuente: elaboración propia.

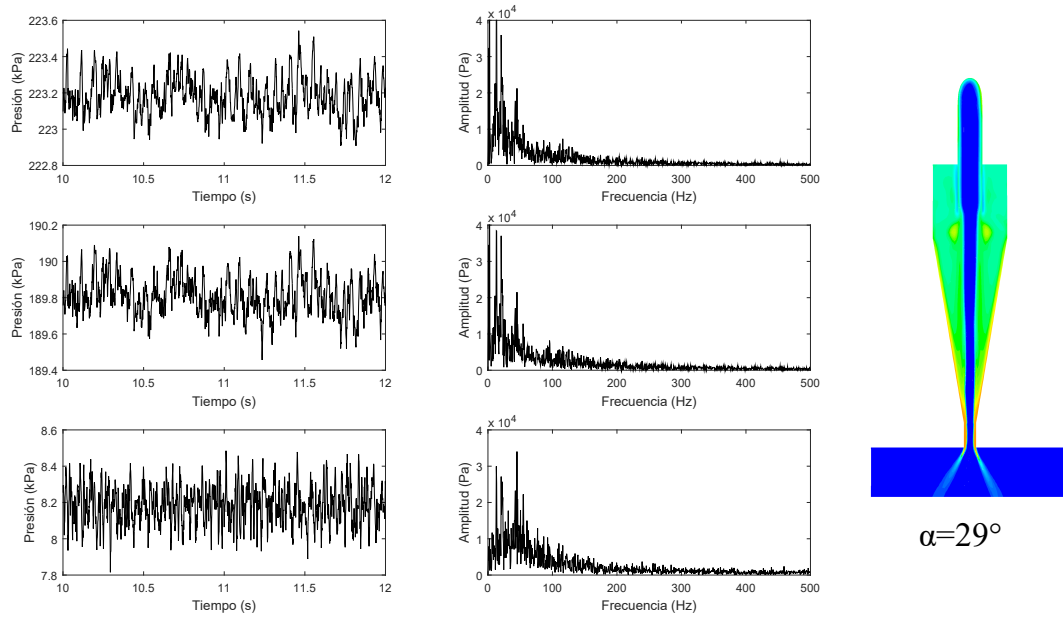


Figura 22. Forma de onda (izquierda) y espectro (derecha); caso I a 4.6 m/s. Fuente: elaboración propia.

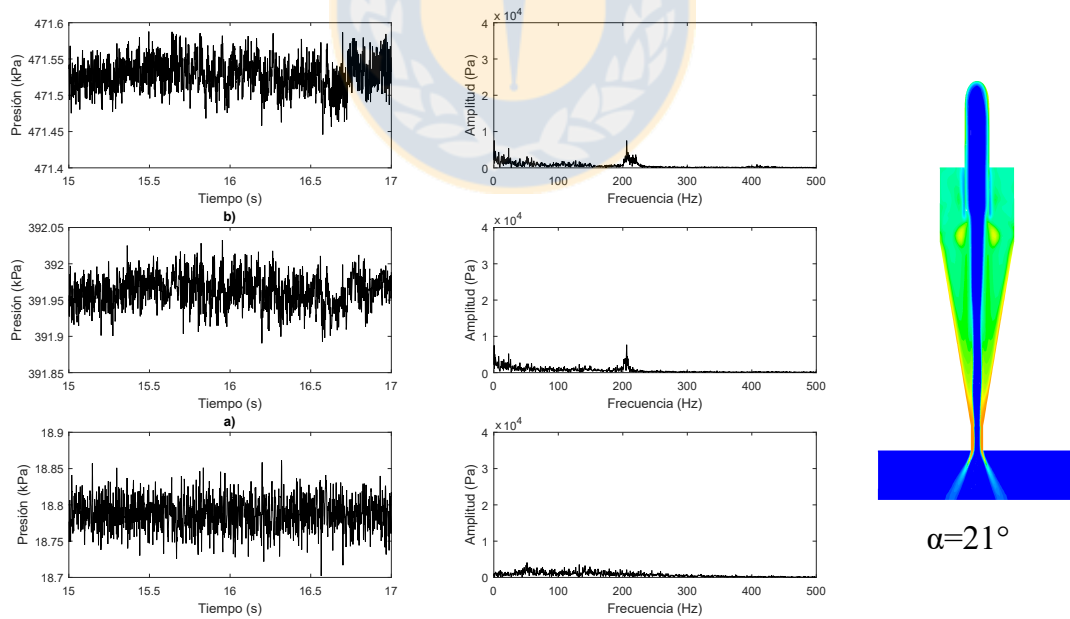


Figura 23. Forma de onda (izquierda) y espectro (derecha); caso I a 6.9 m/s. Fuente: elaboración propia.

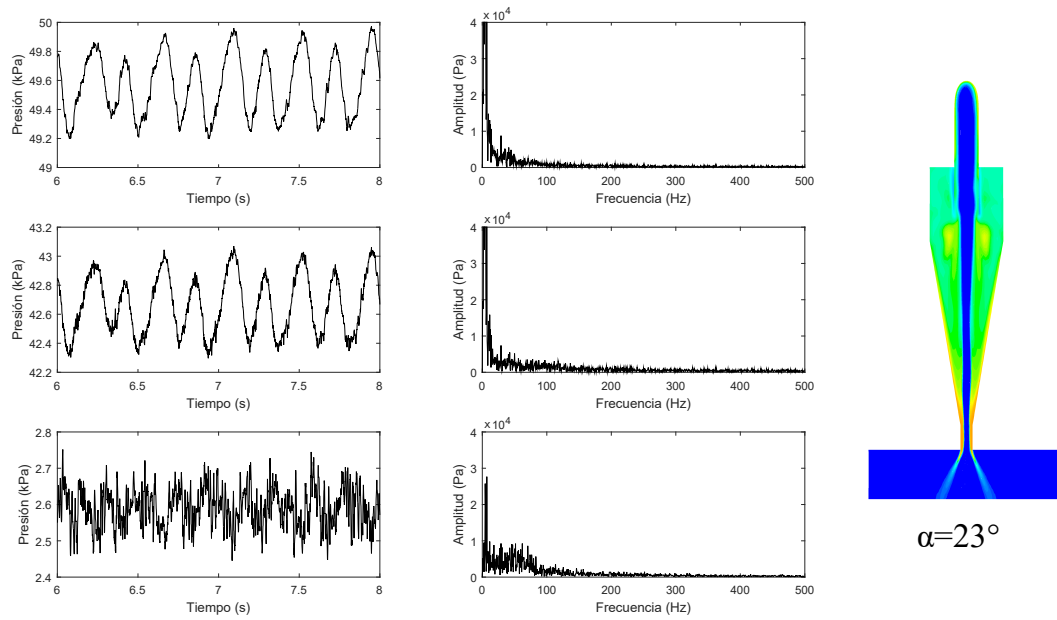


Figura 24. Forma de onda (izquierda) y espectro (derecha); caso II a 2.3 m/s. Fuente: elaboración propia.

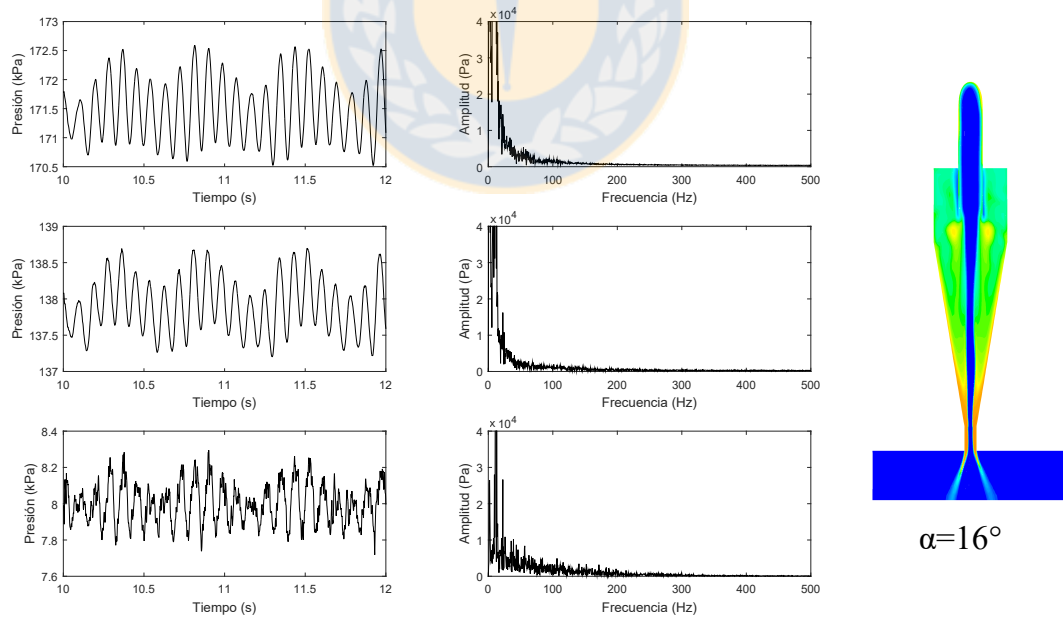


Figura 25. Forma de onda (izquierda) y espectro (derecha); caso II a 4.6 m/s. Fuente: elaboración propia.

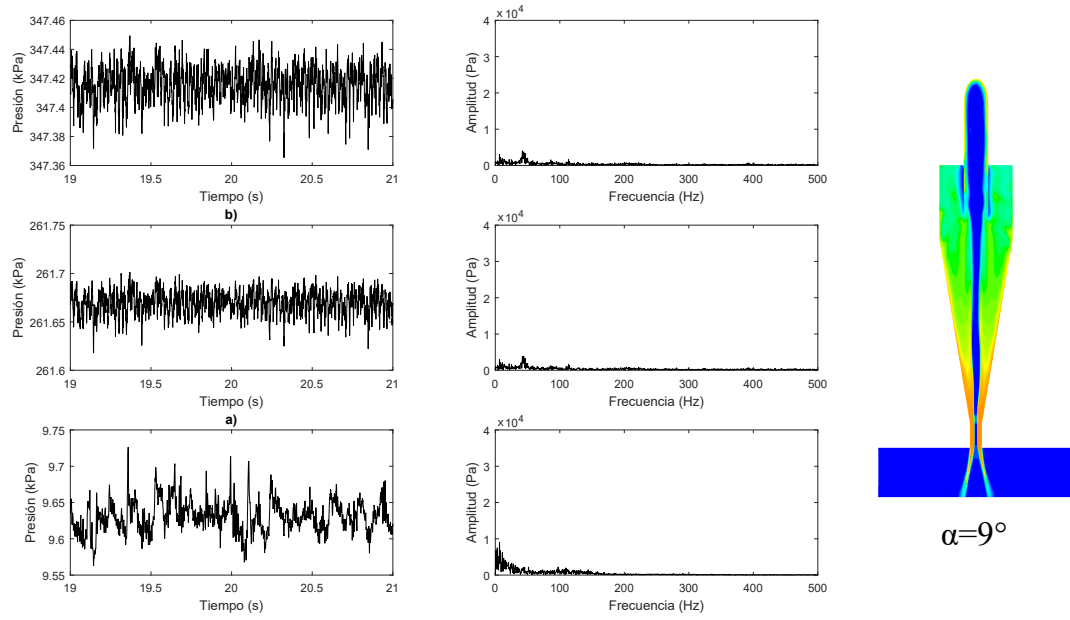


Figura 26. Forma de onda (izquierda) y espectro (derecha); caso II a 6.9 m/s. Fuente: elaboración propia.

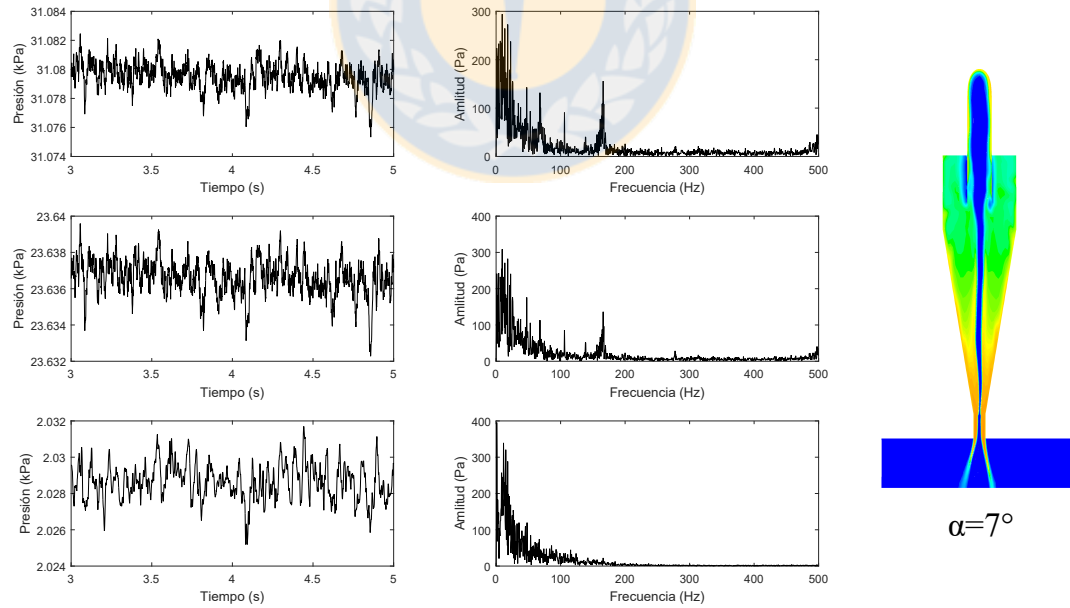


Figura 27. Forma de onda (izquierda) y espectro (derecha); caso III a 2.3 m/s. Fuente: elaboración propia.

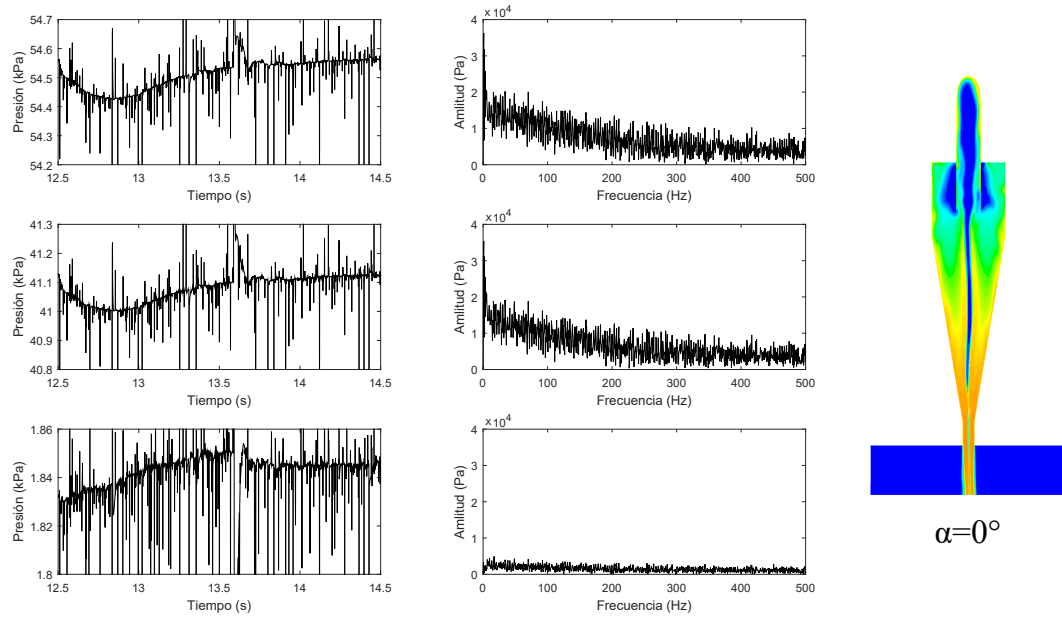


Figura 28. Forma de onda (izquierda) y espectro (derecha); caso III a 3.45 m/s.
Fuente: elaboración propia.

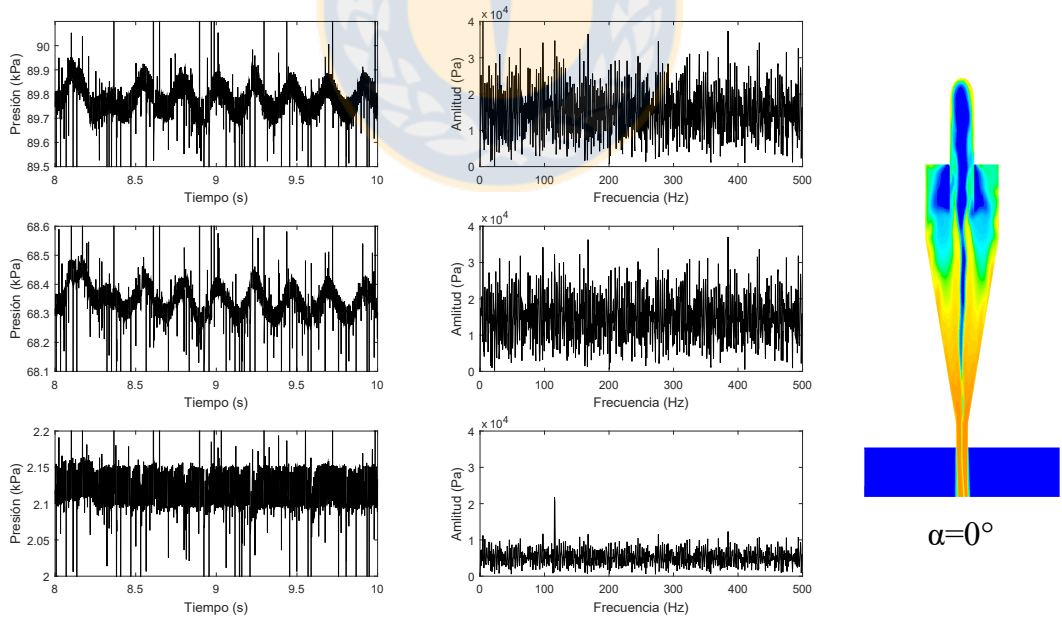


Figura 29. Forma de onda (izquierda) y espectro (derecha); caso III a 4.3 m/s.
Fuente: elaboración propia.

5 Conclusiones y trabajo futuro

5.1 Conclusiones

- Se realizó un estudio numérico mediante Dinámica de Fluidos Computacional del comportamiento interno y descarga de un hidrociclón de laboratorio operando bajo 3 tamaños diferentes de partículas (17, 34 y $70\mu\text{m}$) y 3 velocidades/presiones de alimentación. Se implementó en el código comercial ANSYS Fluent 14 el modelo de turbulencia *Reynolds Stress Model* en conjunto con un modelo multifase Euleriano granular para la descripción de la turbulencia y la fase sólida dispersa respectivamente. El modelo geométrico y la discretización es validado y permiten buenas aproximaciones del comportamiento hidrodinámico al interior del hidrociclón.
- El modelo implementado fue validado en base a mediciones de velocidad registradas en un hidrociclón de laboratorio disponible en la literatura científica. Los resultados de la simulación muestran buenas aproximaciones a la información disponible.
- Un incremento en la velocidad/presión de alimentación genera un incremento en la concentración de sólidos en el bajoflujo, teniendo un mayor impacto este incremento, en el caso de partículas de mayor tamaño. La concentración de sólidos en el bajoflujo no presenta una relación con el tipo de descarga del hidrociclón.
- Tanto el núcleo de aire como la forma y ángulo de descarga presentan una relación directa. Para cualquier tamaño de partícula, el incremento de la velocidad de alimentación implica una reducción del diámetro del núcleo de aire como del ángulo de descarga, teniendo una mayor influencia en los tamaño

de partícula mayores. Por tanto el tipo de descarga se asocia a *spray* con la existencia del núcleo de aire y un mayor ángulo de descarga, mientras que el *roping* implica la supresión del núcleo y por ende una descarga recta.

- El registro de la presión en la pared del hidrociclón permite un acercamiento a lo que pudiese tener relación con las vibraciones en el cuerpo del equipo, en donde la descarga en forma de *spray* genera altas amplitudes a bajas frecuencias mientras que en el caso del *roping* se presenta ruido a lo largo de todo el espectro.

5.2 Trabajo futuro

Los trabajos futuros a desarrollar se deben enfocar en los siguientes aspectos:

- Implementar el modelo con una mayor cantidad de fases sólidas granulares y una distribución de tamaño conocida, que permita analizar el hidrociclón en condiciones reales de operación. Incorporar un estudio de la curva de clasificación del equipo en función de la condición de operación y tipo de descarga.
- Analizar las fluctuaciones de presión desde el punto de vista del cuerpo del hidrociclón. Es decir, extender el análisis realizado a un estudio mas profundo que incluya las fuerzas generadas en el cuerpo del hidrociclón y las vibraciones que estas generen.

Referencias

- [1] L. Svarovsky and M.T. Thew. *Hydrocyclones Analysis and Applications*, volume 53. 2013.
- [2] E.D. Gálvez, R. Cruz, P.A. Robles, and L.A. Cisternas. Optimization of dewatering systems for mineral processing. *Minerals Engineering*, 63(2014):110–117, 2014.
- [3] L.R. Plitt, B.C. Flintoff, and T.J. Stuffco. Roping in hydrocyclones. In *Proc. 3rd Int. Conf. Hydrocyclones, Oxford, BHRA, (ed P. Wood) Elsevier*, pages 21–34, 1987.
- [4] K.T. Hsieh and R.K. Rajamani. Mathematical model of the hydrocyclone based on physics of fluid flow. *AIChE Journal*, 37(5):735–746, 1991.
- [5] S.R. Knowles, D.R. Woods, and I.A. Feuerstein. The velocity distribution within a hydrocyclone operating without an air core. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 51(3):263–271, 1973.
- [6] R.K. Dubey, E. Climent, C. Banerjee, and A.K. Majumder. Performance monitoring of a hydrocyclone based on underflow discharge angle. *International Journal of Mineral Processing*, 154:41–52, 2016.
- [7] J.A. Gutierrez, T. Dyakowski, M.S. Beck, and R.A. Williams. Using electrical impedance tomography for controlling hydrocyclone underflow discharge. *Powder Technology*, 108(2-3):180–184, 2000.
- [8] L.R. Plitt and D.A. Booth. Response surface characterization of hydrocyclones. *Proc. 2nd int. Fachtagung FIA, Freiberg, Paper SK2*, pages 203–10, 1989.

- [9] F. Concha, A. Barrientos, J. Montero, and R. Sampaio. Air core and roping in hydrocyclones. *International Journal of Mineral Processing*, 44-45:743–749, 1996.
- [10] Th. Neesse, W. Dallmann, and D. Espig. Practical and theoretical aspects of dense-flow classification. *Aufbereitungstechnik*, 27(1):6–14, 1986.
- [11] Th. Neesse, H. Schubert, and K. Graichen. Practical and theoretical aspects of dense-flow classification. *Aufbereitungstechnik*, 32(9):459–472, 1991.
- [12] H. Schubert and Th. Neesse. The role of turbulence in wet classification. In *Proceedings 10th Intern. Mineral Processing Congress, London*, pages 213–239, 1973.
- [13] H. Schubert and Th. Neesse. A hydrocyclone separation model in consideration of the turbulent multi-phase flow. In *Proceedings International Conference on Hydrocyclones, BHRA, Fluid Engineering*, pages 23–36, 1980.
- [14] K. Schweitzer. Hydrozyklon mit selbst regelnder unterlaufdüse. *Pat. DE-GM*, 7201703, 1972.
- [15] R.A. Williams, S.J. Peng, D. Brown, N. Parkinson, and Pl. Jannes. On-line measurement of hydrocyclone performance using acoustic emission. *Hydrocyclones*, 96:241–252, 1996.
- [16] M.O. Bustamante. *Effect of the hydrocyclone geometry on normal operation condition*. PhD thesis, M. Sc. Thesis, University of Concepción, 1991,(in Spanish), 1991.
- [17] K. Heiskanen. Experimental hydrocyclone roping models. *Chemical engineering journal*, 80(1-3):289–293, 2000.
- [18] A.F. Nowakowski, J.C. Cullivan, R.A. Williams, and T. Dyakowski. Application of CFD to modelling of the flow in hydrocyclones. Is this a realizable option or still a research challenge? *Minerals Engineering*, 17(5):661–669, 2004.
- [19] M. Narasimha, M. Brennan, and P.N. Holtham. Large eddy simulation of hydrocyclone-prediction of air-core diameter and shape. *International Journal of Mineral Processing*, 80(1):1–14, 2006.

- [20] J.C. Cullivan, R.A. Williams, T. Dyakowski, and C.R. Cross. New understanding of a hydrocyclone flow field and separation mechanism from computational fluid dynamics. *Minerals Engineering*, 17(5):651–660, 2004.
- [21] T.J. Olson and R. Van Ommen. Optimizing hydrocyclone design using advanced CFD model. *Minerals Engineering*, 17(5):713–720, 2004.
- [22] J.A. Delgadillo and R.K. Rajamani. Exploration of hydrocyclone designs using computational fluid dynamics. *International Journal of Mineral Processing*, 84(1-4):252–261, 2007.
- [23] D. Cokljat, M. Slack, S. Vasquez, A. Bakker, and G. Montante. Reynolds-Stress Model for Eulerian multiphase. *Progress in Computational Fluid Dynamics*, 6(1-3):168–178, 2006.
- [24] M. Narasimha, R. Sripriya, and P.K. Banerjee. CFD modelling of hydrocyclone-prediction of cut size. *International Journal of Mineral Processing*, 75(1-2):53–68, 2005.
- [25] K.W. Chu, B. Wang, A.B. Yu, and A. Vince. Computational study of the multiphase flow in a dense medium cyclone: Effect of particle density. *Chemical Engineering Science*, 73:123–139, 2012.
- [26] B. Wang, K.W. Chu, A.B. Yu, A. Vince, G.D. Barnett, and P.J. Barnett. Computational study of the multiphase flow and performance of dense medium cyclones: Effect of body dimensions. *Minerals Engineering*, 24(1):19–34, 2011.
- [27] J. A. Delgadillo and Raj K. Rajamani. A comparative study of three turbulence-closure models for the hydrocyclone problem. *International Journal of Mineral Processing*, 77(4):217–230, 2005.
- [28] M. Narasimha, M.S. Brennan, P.N. Holtham, and T.J. Napier-Munn. A comprehensive CFD model of dense medium cyclone performance. *Minerals Engineering*, 20(4):414–426, 2007.
- [29] B. Wang, D.L. Xu, K.W. Chu, and A.B. Yu. Numerical study of gas–solid flow in a cyclone separator. *Applied Mathematical Modelling*, 30(11):1326–1342, 2006.
- [30] B. Wang, K.W. Chu, and A.B. Yu. Numerical Study of Particle - Fluid Flow in a Hydrocyclone. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 46:4695–4705, 2007.

- [31] S.B. Kuang, K.W. Chu, A.B. Yu, and A. Vince. Numerical study of liquid-gas-solid flow in classifying hydrocyclones: Effect of feed solids concentration. *Minerals Engineering*, 31:17–31, 2012.
- [32] S. Kuang, Z. Qi, A.B. Yu, A. Vince, G.D. Barnett, and P.J. Barnett. CFD modeling and analysis of the multiphase flow and performance of dense medium cyclones. *Minerals Engineering*, 62:43–54, 2014.
- [33] M. Narasimha, M.S. Brennan, and P.N. Holtham. CFD modeling of hydrocyclones: Prediction of particle size segregation. *Minerals Engineering*, 39:173–183, 2012.
- [34] S. Huang. Numerical simulation of oil-water hydrocyclone using reynolds-stress model for eulerian multiphase flows. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 83(5):829–834, 2005.
- [35] A. Davailles, E. Climent, F. Bourgeois, and A.K. Majumder. Analysis of swirling flow in hydrocyclones operating under dense regime. *Minerals Engineering*, 31:32–41, 2012.
- [36] M. Ghodrat, S.B. Kuang, A.B. Yu, A. Vince, G.D. Barnett, and P.J. Barnett. Computational study of the multiphase flow and performance of hydrocyclones : Effects of cyclone size and spigot diameter. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 52:16019–16031, 2013.
- [37] S.A. Morsi and A.J. Alexander. An investigation of particle trajectories in two-phase flow systems. *Journal of Fluid Mechanics*, 55(02):193–208, 1972.
- [38] D. Gidaspow, R. Bezburuah, and J. Ding. Hydrodynamics of circulating fluidized beds: kinetic theory approach. Technical report, Illinois Inst. of Tech., Chicago, IL (United States). Dept. of Chemical Engineering, 1991.
- [39] K. T. Hsieh. Phenomenological model of the hydrocyclone, 1988.
- [40] K.U. Bhaskar, Y.R. Murthy, M.R. Raju, S. Tiwari, J. K. Srivastava, and N. Ramakrishnan. CFD simulation and experimental validation studies on hydrocyclone. *Minerals Engineering*, 20(1):60–71, 2007.
- [41] M.S. Brennan. CFD Simulations of Hydrocyclones with an Air Core: Comparison Between Large Eddy Simulations and a Second Moment Closure. *Chemical Engineering Research and Design*, 84(6):495–505, 2006.

- [42] T.C. Monredon, K.T. Hsieh, and R.K. Rajamani. Fluid flow model of the hydrocyclone: an investigation of device dimensions. *International Journal of Mineral Processing*, 35(1-2):65–83, 1992.
- [43] D. Pérez V. Simulación numérica de un hidrociclón empleando un modelo CFD-DPM. Memoria de título para optar al título de Ingeniero Civil Mecánico, Departamento Ingeniería Mecánica, Universidad de Concepción, 2016.

