



Universidad de Concepción

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

Tesis presentada a la Facultad de Ingeniería de la Universidad de
Concepción para optar al grado de Magíster en Ciencias de la
Computación

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA Y COMBINATORIAL DE ESPACIOS ROBINSON

Autor: Francisco Arrepol Pérez

Supervisores:

Christopher Thraves Caro

Mauricio Soto Gomez

Índice

Índice	1
1. Introducción	1
2. Definiciones	2
3. Marco Teórico	5
3.1. Dibujos válidos	5
3.2. Espacios Robinson	7
3.3. Nuestros resultados	8
4. Representación de espacios Robinson	10
4.1. Encontrar dibujos válidos	10
4.2. Espacios Robinson estrictos	12
4.3. Propiedades de la matriz de centro	29
4.4. Representación matricial	37
5. Conclusiones y trabajo futuro	48
Bibliografía	49

1. Introducción

En la actualidad, la generación masiva de datos ha convertido su análisis, visualización y representación en aspectos fundamentales de múltiples áreas del conocimiento. Más allá de almacenar información, el desafío central consiste en dotarla de una estructura que permita comprender sus relaciones internas, identificar patrones y facilitar la toma de decisiones. En este contexto, la representación geométrica de los datos surge como una herramienta poderosa, ya que traduce información abstracta en configuraciones espaciales que pueden analizarse tanto desde un punto de vista visual como algorítmico, lo que permite detectar agrupamientos, jerarquías, y relaciones estructurales entre los datos.

Uno de los principales desafíos es representar datos de alta dimensionalidad de manera comprensible, preservando al máximo su estructura relacional. Técnicas clásicas como el *análisis de componentes principales (PCA)* buscan reducir la dimensionalidad conservando la mayor cantidad posible de variabilidad. Sin embargo, existen enfoques alternativos que no se centran en las coordenadas de los datos, sino de las relaciones entre ellos, particularmente las relaciones conocidas como *medidas de disimilitud*. En estos casos, la información no se describe mediante vectores en un espacio euclidiano, sino a través de diferencias entre pares de elementos.

Las disimilitudes cuantifican el grado de diferencia entre pares de elementos y constituyen una herramienta fundamental en numerosas disciplinas. En biología, por ejemplo, se emplean en *filogenética* para modelar relaciones evolutivas entre especies [7]. A partir de estas medidas, es posible construir representaciones geométricas que reflejan la estructura implícita del conjunto de datos, permitiendo visualizar patrones y detectar regularidades.

En esta tesis se estudian las representaciones geométricas de espacios de disimilitud conocidos como *espacios Robinson*. Estos espacios admiten un orden lineal de sus elementos compatible con sus disimilitudes, lo que posibilita su representación geométrica en estructuras lineales. El objetivo principal de esta tesis es analizar y desarrollar representaciones geométricas para espacios Robinson en estructuras

arbóreas.

2. Definiciones

Denotaremos por S a un conjunto finito de elementos. Una *disimilitud* ρ sobre S es una función $\rho : S \times S \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $\rho(x, y) = \rho(y, x) \geq 0$ para todo $x, y \in S$, y $\rho(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$. Al par (S, ρ) se le denomina *espacio de disimilitud*.

Definición 2.1 (Espacio Robinson). *Un espacio de disimilitud (S, ρ) es Robinson si existe un orden total $<$ en S tal que, para todo trío $x < y < z$ en S , se cumple que*

$$\rho(x, z) \geq \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\}.$$

A dicho orden se le llama orden compatible. Diremos además que un espacio Robinson es estricto si $\rho(x, y) \neq \rho(w, z)$ para dos pares distintos cualquiera $\{x, y\} \neq \{w, z\}$, con $x \neq y$ y $w \neq z$.

A partir de los valores de disimilitud de un espacio Robinson, nosotros planteamos el concepto de *centros izquierdos y derechos*, buscando representar la estructura que siguen los valores de las disimilitudes, expresadas en base a las relaciones de orden entre ellas.

Sea (S, ρ) un espacio de disimilitud Robinson de n elementos, digamos $S = [1, n]$, con un orden compatible $<$. Para cada par de elementos $i, j \in [1, n]$ con $i < j$, definimos su *centro izquierdo*, denotado por $ci(i, j)$, como el mayor elemento k entre i y j que sea más similar a i que a j , es decir,

$$ci(i, j) = \max\{k \in [i, j] : \rho(i, k) < \rho(k, j)\}.$$

De manera análoga, con $i < j$, definimos el *centro derecho* $cd(i, j)$ como el mínimo elemento entre i y j que es más similar a j que a i .

$$cd(i, j) = \min\{k \in [i, j] : \rho(i, k) > \rho(k, j)\}.$$

Extendemos la definición para el caso $i = j$, donde $ci(i, i) = cd(i, i) = i$.

Estas definiciones nos permiten caracterizar los espacios Robinson a partir de las relaciones entre sus disimilitudes. Eso se puede representar en lo que denotaremos por *matriz de centros izquierdos y derechos*, o, de manera más sencilla, por *matriz de centros*.

Dado un espacio de disimilitud Robinson (S, ρ) de n elementos, definimos su matriz de centros como la matriz cuadrada de tamaño $n \times n$ que contiene los centros izquierdos sobre la diagonal, y los centros derechos bajo la diagonal. Esto es,

$$C(S)_{i,j} = \begin{cases} ci(i, j) & \text{si } i < j \\ i & \text{if } i = j \\ cd(i, j) & \text{si } i > j. \end{cases}$$

Para representar geoméricamente los espacios de disimilitud, utilizaremos el concepto de *dibujo válido*, que busca llevar los espacios de disimilitud hacia espacios métricos, de manera que cada elemento esté a menor distancia de aquellos con los que es más similar, que de aquellos con los que es menos similar.

Definición 2.2 (Dibujo válido). *Sea (T, Δ) un espacio métrico y (S, ρ) un espacio de disimilitud. Una inyección $I : S \rightarrow T$ es un dibujo válido si para todo $x, y, z \in S$ que cumplen $\rho(x, y) < \rho(x, z)$, entonces $\Delta(I(x), I(y)) < \Delta(I(x), I(z))$.*

Los dibujos válidos para espacios de disimilitud han sido estudiados previamente sobre espacios métricos tales como la recta, la circunferencia, y el plano. Un estudio hecho por Aracena y Thraves en [1] prueba que no todo espacio Robinson admite un dibujo válido en la recta, por lo cual buscamos un espacio métrico que dé más libertad para representar los espacios Robinson, pero sin ser demasiado complejo. Así, elegimos trabajar con *árboles reales* (*real trees*), los cuales son espacios métricos que generalizan la estructura lineal presente en la recta real.

Definición 2.3 (Real tree). *Un espacio métrico (T, Δ) es un real tree si es conexo por caminos¹ y para todo tríó $x, y, z \in T$, existe un punto $c \in T$ (llamado centro) tal*

¹Un espacio métrico se dice conexo por caminos si, para todo par de puntos, existe una curva continua (o camino) completamente contenida en el espacio, que une a ambos puntos

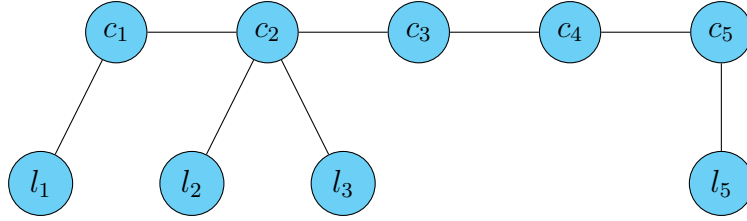


Figura 1: Ejemplo de un caterpillar de 9 vértices, cuya columna está compuesta por los vértices c_i , y sus patas son las aristas que unen a los c_i con los l_i .

que los caminos geodésicos entre los pares (x, y) , (y, z) y (z, x) se intersectan en c .

En particular, como los espacios Robinson cuentan con un orden entre sus elementos, nos centraremos en real trees que nos permitan mantener esta noción de orden, conocidos como *caterpillars*.

Definimos un caterpillar como un espacio métrico a partir de un intervalo real $S = [0, L]$ llamado *columna*, con $L > 0$. Para un conjunto finito o numerable de puntos $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq S$, asociamos a cada x_i un segmento $B_i = [0, \ell_i]$, con $\ell_i > 0$, llamado *pata*, e identificamos el punto $0 \in B_i$ con $x_i \in S$. El espacio métrico T obtenido al unir S y todas las ramas B_i , con una distancia de camino, es un caterpillar.

Además, para los caterpillars se puede considerar una versión discreta, representada como grafos árbol. En su versión discreta, un caterpillar es un tipo de árbol en el cual todos sus vértices están en un camino principal, o son vecinos de un vértice en ese camino principal, como se observa en la Figura 1. A las aristas del caterpillar discreto se les pueden asignar pesos, o distancias, que representan las longitudes entre sus nodos en la versión continua. Llamaremos por *caterpillar con pesos* a un caterpillar discreto cuyas aristas tienen pesos asociados. Al camino principal sobre el cual se construye el caterpillar lo denominamos *columna*, y a las aristas agregadas a los vértices de la columna las denominamos *patas*, de manera análoga al caso continuo.

Tal como se puede apreciar en la Figura 1, a los vértices de la columna los denotamos por c_i , siguiendo el orden dado por la columna. Las patas unen vértices en la columna principal con hojas del caterpillar.

Con estas definiciones, planteamos la hipótesis central de esta tesis.

Todo espacio Robinson admite un dibujo válido en real tree.

Para estudiar esta hipótesis, nos apoyaremos en una herramienta conocida como un *programa lineal*.

Un *programa lineal* es un problema de optimización cuya forma general es

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & c^\top x \\ \text{sujeto a} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de variables, $c \in \mathbb{R}^n$ es el vector de coeficientes de la función, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es la matriz de restricciones y $b \in \mathbb{R}^m$ es el vector de términos constantes.

3. Marco Teórico

El estudio de representaciones geométricas de datos ha evolucionado con el desarrollo de técnicas que permiten capturar las relaciones entre elementos de un conjunto, en especial mediante disimilitudes. En este contexto, surge el interés por representar tales disimilitudes respetando su estructura interna, lo cual ha sido abordado mediante la noción de *dibujos válidos* y su relación con estructuras métricas específicas.

3.1. Dibujos válidos

Para comprender los comienzos de los dibujos válidos, primero definiremos a los grafos con signos. Estos son grafos simples no dirigidos, cuyas aristas tienen etiquetas positivas (+) o negativas (-). En base a estos grafos, se introdujo el concepto de dibujo válido por Kermarrec y Thraves [11] como una forma de representar a estos grafos en espacios métricos Euclidianos. En este enfoque, los vértices del grafo son ubicados en un espacio de dimensión baja, como la recta real o el plano, de modo que las relaciones de cercanía entre amigos (aristas positivas) y lejanía entre enemigos (aristas negativas) se preserven. Además, dan una caracterización para aquellos

grafos con signos que sí admiten un dibujo válido en la recta real, y mencionan un algoritmo polinomial para decidir si un grafo completo admite un dibujo válido en la recta o no.

Después, Cygan et al., en [6], vincularon los grafos completos y con signos que admiten dibujos válidos en la recta real con grafos de intervalo, probando que un grafo completo con signos admite un dibujo válido en la recta si y solo si su grafo de aristas positivas es un grafo de intervalo propio. También prueban que el problema de decidir si un grafo con signos tiene un dibujo válido en la recta es un problema NP-Completo, y que el problema de determinar la menor dimensión l para que un grafo con signos sea representado en \mathbb{R}^l es un problema NP-hard.

Trabajos posteriores han buscado profundizar los conceptos de dibujo válido y sus aplicaciones. Pardo et al. en [15] estudian el problema de minimizar la cantidad de errores producidos al asignar un dibujo válido en la recta a un grafo, problema que llaman *minSA*, y lo relacionan con el problema de *quadratic assignment*, probando que en el caso de grafos con signos completos ambos problemas comparten mínimos locales, y proponen dos heurísticas para aproximar soluciones al problema, una basada en métodos *greedy* y la otra basada en la metodología *GRASP*.

Otra área de estudio fue visitada por Spaen et al. en [18], buscando acotar la dimensión en la que todo grafo con signos de n vértices admite un dibujo válido, llegando a la cota de $\lfloor \log_5(n-3) \rfloor \leq L(n) \leq n-2$, siendo $L(n)$ la menor dimensión en la que admite un dibujo válido cualquier grafo con signos con n elementos. También se ha estudiado el problema para otro tipo de espacios, con Benitez et. al., en [3], donde se explora el problema usando como espacio métrico a la circunferencia en lugar de la recta. Aquí, los autores utilizan la noción de *Circular-Arc Graphs* para caracterizar los grafos con signos que admiten un dibujo en la circunferencia, mostrando que un grafo con signos completo admite un dibujo en la circunferencia si y solo si su subgrafo de aristas positivas es un grafo arco-circular propio.

Otro estudio del problema en distintos espacios métricos fue realizado por Becerra y Thraves el año 2019, en [2]. En este trabajo, ellos estudian el problema de encontrar un dibujo válido para grafos con signos en un real tree. Los autores trabajan con

grafos *Neighborhood Subtree Intersection*, o grafos *NSI*, probando que un grafo con signos completo tiene un dibujo válido en un real tree si y solo si su subgrafo que contiene sólo las aristas positivas es un grafo *NSI*.

Aracena y Thraves en [1] proponen una versión más compleja del problema visto en [11]. En lugar de considerar solo grafos con signos, ellos buscan encontrar un dibujo válido en la recta para un grafo con pesos, planteando este nuevo problema como un problema de optimización, determinando un poliedro convexo a partir de un sistema de desigualdades, y mostrando la equivalencia entre la existencia de un dibujo y que el poliedro sea no vacío. Además, muestran que si (S, ρ) tiene un dibujo válido para un orden compatible, entonces lo tiene para todos sus órdenes compatibles. También, los autores demuestran que existe relación con el problema de Seriación ([17]), pero que los problemas son diferentes. En particular, ellos prueban que la seriación, o propiedad Robinsoniana de un espacio, es una condición necesaria para resolver el problema, pero no suficiente.

3.2. Espacios Robinson

Como se mencionó anteriormente, el problema de encontrar un dibujo válido está relacionado con el problema de seriación, formulado inicialmente para ordenar muestras arqueológicas en sentido cronológico. Robinson define este problema en [17] e introduce el concepto de espacio Robinson. Este tipo de espacios ha sido ampliamente estudiado, ya que permite trabajar con conjuntos de objetos con los que se cuenta con información respecto a la similitud entre pares de objetos, teniendo aplicaciones en arqueología [10] y bioinformática [19], entre otros.

Algunos avances con respecto a este tipo de espacios se relacionan con el reconocimiento de espacios Robinson. Fortin y Préa, en [16] dan un algoritmo polinomial óptimo para reconocer espacios Robinson usando árboles de clique y propiedades de grafos de intervalos, aplicándolos a *PQ-Trees*, árboles que representan las distintas permutaciones sobre un conjunto. El algoritmo que proporcionan tiene complejidad temporal $\mathcal{O}(n^2)$, siendo n la cantidad de elementos en el espacio. Luego, en el año 2017, otro método para reconocer espacios Robinson es presentado por Laurent y Se-

minaroti en [12], utilizando un algoritmo basado en Lex-BFS para encontrar órdenes compatibles. Posteriormente, en [13], los mismos autores proponen una generalización de este algoritmo, que llaman *Similarity First Search*, o SFS, para explorar el grafo con pesos asociado al espacio de disimilitud. Este algoritmo explora el grafo moviéndose por vértices que sean más similares a los ya visitados, con una complejidad temporal de $\mathcal{O}(n^2 + nm \log n)$, siendo m la cantidad de aristas en el grafo, y n la cantidad de vértices. En [14], Laurent et al. dan una caracterización de los espacios Robinson mediante el uso de *tripletas asteroidales con pesos*, esto es, tripletas de elementos en el espacio de disimilitud tales que, al considerar un orden entre sus elementos, para cualquier par dentro de la tripleta existe una secuencia de elementos distintos que une al par, pero que al agregar el elemento restante de la tripleta entre dos elementos consecutivos dentro de la secuencia, estos tres elementos no cumplen con la propiedad de Robinson. Ellos demuestran que un espacio es Robinson si no tiene tripletas asteroidales. Los autores también proponen un algoritmo que permite reconocer la existencia de tripletas asteroidales en tiempo $\mathcal{O}(n^3)$. Después, en el año 2024, Carmona et al. en [5] muestran otro método para reconocer espacios Robinson, introduciendo el concepto de *mmódulos*, que son subconjuntos M de elementos tales que, para cualquier elemento fuera de M , la distancia a todos los elementos de M es la misma, utilizando este concepto para encontrar un algoritmo *divide-and-conquer*, que también tiene complejidad temporal $\mathcal{O}(n^2)$.

3.3. Nuestros resultados

En esta tesis estudiamos la representación de espacios Robinson en *real trees*. Para ello, en la Sección 4 presentamos los resultados desarrollados en el transcurso de esta investigación.

En la Subsección 4.1, presentamos la condición de los cuatro puntos, la cual permite caracterizar métricas de árbol, y la utilizamos para formular un programa lineal $(LP1)(S)$ que permite decidir si un espacio Robinson admite un dibujo válido en un *real tree*, con una cantidad de restricciones de orden $\mathcal{O}(n^4)$.

Luego, en la Subsección 4.2, nos enfocamos en los espacios Robinson estrictos. Uti-

lizando la Construcción 4.2, obtuvimos, a partir de espacios Robinson generales, espacios estrictos que cumplen que todo dibujo válido para el espacio Robinson estricto también lo es para el espacio original, como demostramos en el Teorema 4.4. Aprovechando esta estructura, introdujimos una nueva condición sobre las métricas de un dibujo válido para los espacios estrictos, que llamamos la condición de los cuatro puntos fuerte. Esta condición caracteriza las métricas de los *caterpillars*, como demostramos en el Lema 4.5, y nos permitió enunciar el Corolario 4.6, el cual establece que si un espacio Robinson admite un dibujo válido en un *real tree*, entonces dicho árbol debe ser un *caterpillar*. A continuación, formulamos el programa lineal $(LP2)(S)$, que permite decidir si un espacio Robinson estricto admite un dibujo válido en un *caterpillar*, con una cantidad de restricciones de orden $\mathcal{O}(n^2)$, lo cual nos permite decidir la existencia de un dibujo válido en un *caterpillar* en tiempo polinomial.

En la Subsección 4.3, estudiamos propiedades estructurales de las matrices de centro y obtuvimos una cota para su cantidad en función de n , lo cual demostramos en el Lema 4.11. Esto nos permitió realizar un análisis experimental exhaustivo sobre espacios Robinson con menos de 9 elementos, cuyos resultados se presentan en el Cuadro 1.

Luego, en la Subsección 4.4, utilizamos la representación matricial del sistema $(LP2)(S)$ para aplicar herramientas clásicas de optimización. En particular, empleamos un teorema de alternativas para estudiar la existencia de dibujos válidos, como mostramos en el Teorema 4.13. A partir de este resultado, refinamos el programa lineal identificando restricciones redundantes que pueden eliminarse sin cambiar la factibilidad del sistema. En el Teorema 4.14, utilizamos las restricciones no redundantes para encontrar una condición suficiente para que un espacio de Robinson estricto tenga un dibujo válido en un *caterpillar*. Además, en el Teorema 4.15, probamos que todo espacio Robinson que cumple $ci(i, j) < (i + j)/2 \leq cd(i, j)$, para todo par i, j , o bien, $ci(i, j) \leq (i + j)/2 < cd(i, j)$, para todo par i, j , admite un dibujo válido en un *caterpillar*.

Finalmente, en el Teorema 4.16, mostramos mediante un contraejemplo que no todo

espacio Robinson admite un dibujo válido en un *real tree*. En la Sección 5, comentamos posibles líneas de investigación futura.

4. Representación de espacios Robinson

En esta sección presentaremos todos los resultados obtenidos en esta investigación para la representación de espacios Robinson en los real trees, utilizando como principal herramienta los programas lineales. Comenzaremos planteando un programa lineal que nos permite encontrar un dibujo válido para un espacio Robinson, y luego utilizaremos las propiedades estructurales de los espacios Robinson estrictos para presentar una formulación alternativa y con una menor cantidad de restricciones.

4.1. Encontrar dibujos válidos

Comenzaremos presentando un programa lineal que, dado un espacio Robinson, nos permita decidir si tiene o no un dibujo válido en un real tree. Para ello, utilizaremos una caracterización de los real trees a partir de métricas, que presentamos a continuación.

Definición 4.1 (Condición de los cuatro puntos). *Sea Δ una métrica sobre un conjunto T . Diremos que Δ satisface la condición de los cuatro puntos si, para toda tupla de cuatro puntos $\{w, x, y, z\} \in T$, se cumple que:*

$$\Delta(w, x) + \Delta(y, z) \leq \max\{\Delta(w, y) + \Delta(x, z), \Delta(w, z) + \Delta(x, y)\}$$

Esta condición caracteriza los espacios métricos que pueden ser representados en un real tree, lo cual fue mostrado por Bunneman en [4] mediante el siguiente teorema.

Teorema 4.1. *Sea D una matriz de distancias. Existe un real tree cuya métrica de caminos es compatible con D si y solo si la métrica D cumple con la condición de los cuatro puntos.*

Además, en [9] se demostró que el real tree que satisface esta condición es único para cada matriz de distancias.

Para encontrar un dibujo válido para un espacio Robinson, utilizaremos un programa lineal. Para ello, dado un espacio Robinson (S, ρ) , definiremos las variables d_{ij} como las distancias entre las imágenes de dos elementos $i, j \in S$ en un real tree T , con $d_{ii} = 0$ para todo $i \in S$. Para que estas variables permitan encontrar un dibujo válido, deben satisfacer tres tipos de restricciones.

El primer tipo corresponde a las restricciones que debe satisfacer una métrica, esto es, las variables deben ser simétricas, no negativas, y cumplir con la desigualdad triangular.

El segundo tipo de restricciones está dado por la definición de un dibujo válido, y agregaremos una constante virtual pequeña $\varepsilon > 0$ para pasar de desigualdades estrictas a desigualdades no estrictas.

El tercer tipo de restricciones viene dado por la condición de los cuatro puntos, lo que nos permite asegurar que el espacio métrico resultante sea un real tree. Como estas restricciones son no convexas, utilizaremos el método de *big-M* junto a variables indicadoras binarias para agregar estas restricciones al programa lineal. Para ello, contaremos con variables binarias x_{ijkl}^1, x_{ijkl}^2 y x_{ijkl}^3 para cada $\{i, j, k, l\} \in \mathcal{Q}$, donde \mathcal{Q} denota el conjunto de tuplas no ordenadas de elementos distintos. Así, con estas variables indicadoras, podemos identificar cuál de las tres posibles sumas de pares de distancias dadas por la condición de los cuatro puntos alcanza el valor mínimo, forzando simultáneamente que las otras dos sumas, necesariamente mayores, coincidan entre sí.

Con estos tres tipos de restricciones, formulamos el programa lineal (*LP1*) para decidir si un espacio Robinson admite un dibujo válido en un real tree.

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar} && f(S, \rho) && (LP1) \\
& \text{Sujeto a} && d_{ij} \leq d_{ik} + \varepsilon && \forall i, j, k \in S, \rho(i, j) < \rho(i, k) \\
& && d_{ik} \leq d_{ij} + \varepsilon && \forall i, j, k \in S, \rho(i, j) > \rho(i, k) \\
& && d_{ik} \leq d_{ij} + d_{jk} && \forall i, j, k \in S \\
& && d_{ij} = d_{ji}, d_{ij} \geq 0 && \forall \{i, j\} \in S \\
& && |(d_{ik} + d_{jl}) - (d_{il} + d_{jk})| \leq M(1 - x_{ijkl}^1) && \forall \{i, j, k, l\} \in \mathcal{Q} \\
& && (d_{ij} + d_{kl}) - (d_{ik} + d_{jl}) \leq M(1 - x_{ijkl}^1) && \forall \{i, j, k, l\} \in \mathcal{Q} \\
& && (d_{ij} + d_{kl}) - (d_{il} + d_{jk}) \leq M(1 - x_{ijkl}^1) && \forall \{i, j, k, l\} \in \mathcal{Q} \\
& && |(d_{ij} + d_{kl}) - (d_{il} + d_{jk})| \leq M(1 - x_{ijkl}^2) && \forall \{i, j, k, l\} \in \mathcal{Q} \\
& && (d_{ik} + d_{jl}) - (d_{ij} + d_{kl}) \leq M(1 - x_{ijkl}^2) && \forall \{i, j, k, l\} \in \mathcal{Q} \\
& && (d_{ik} + d_{jl}) - (d_{il} + d_{jk}) \leq M(1 - x_{ijkl}^2) && \forall \{i, j, k, l\} \in \mathcal{Q} \\
& && |(d_{ij} + d_{kl}) - (d_{ik} + d_{jl})| \leq M(1 - x_{ijkl}^3) && \forall \{i, j, k, l\} \in \mathcal{Q} \\
& && (d_{il} + d_{jk}) - (d_{ij} + d_{kl}) \leq M(1 - x_{ijkl}^3) && \forall \{i, j, k, l\} \in \mathcal{Q} \\
& && (d_{il} + d_{jk}) - (d_{ik} + d_{jl}) \leq M(1 - x_{ijkl}^3) && \forall \{i, j, k, l\} \in \mathcal{Q} \\
& && \sum_{s \in \{1, 2, 3\}} x_{ijkl}^s = 1 && \forall \{i, j, k, l\} \in \mathcal{Q} \\
& && x_{ijkl}^s \in \{0, 1\} && \forall s \in \{1, 2, 3\}, \forall \{i, j, k, l\} \in \mathcal{Q}
\end{aligned}$$

Para encontrar un dibujo válido, nos interesa que $(LP1)(S)$ admita solución, no necesariamente que sea óptima. Por tanto, la función objetivo del programa lineal puede elegirse de manera arbitraria. Sin embargo, también se puede observar que esta formulación requiere una cantidad de restricciones y variables de orden $\mathcal{O}(n^4)$, de donde puede ser muy costosa computacionalmente.

4.2. Espacios Robinson estrictos

En esta subsección nos centraremos en los espacios Robinson estrictos. Recordamos que un espacio Robinson se dice estricto si todos sus valores de disimilitud son

distintos. Esta característica nos permite reformular el programa lineal necesario para encontrar un dibujo válido, reduciendo la cantidad de restricciones necesarias.

Para comenzar, definiremos una *matriz de disimilitud* M asociada a un espacio de disimilitud Robinson (S, ρ) con un orden compatible $<$. En la matriz M , las filas y columnas corresponden a elementos de S , ordenados según el orden $<$, y la entrada $M(i, j)$ de la matriz adopta el valor de la disimilitud $\rho(i, j)$. Utilizando esta representación de un espacio de disimilitud, ahora presentaremos una construcción de espacios de disimilitud a partir de espacios Robinson, que nos devuelve un espacio Robinson estricto. Esto nos permite extender los resultados obtenidos para los espacios Robinson estrictos al caso general.

Construcción 4.2. *Sea (S, ρ) un espacio Robinson con un orden compatible de sus elementos $<$, con una matriz de disimilitud asociada M . A partir de M construiremos una nueva matriz de disimilitud N , de la siguiente manera.*

1. *Iniciamos todas las entradas de la matriz N como 0, iniciamos un contador p en 1, y consideramos todas las entradas de la matriz M que estén sobre la diagonal como no marcadas.*
2. *Buscamos el menor valor entre las entradas no marcadas en M . Si hay más de una entrada con el valor mínimo, tomamos aquella cuya fila tenga mayor índice. Si sigue habiendo más de una entrada con el mismo valor en esa fila, tomamos aquella cuya columna tenga menor índice.*
3. *En N , rellenamos la entrada correspondiente a la buscada en el paso anterior con el valor actual del contador p .*
4. *Marcamos la entrada encontrada en M , y aumentamos el contador p en 1.*
5. *Repetimos los pasos 2-4 hasta que todas las entradas por sobre la diagonal en M hayan sido marcadas.*
6. *Rellenamos las entradas en N que están bajo la diagonal mediante simetría.*

Cabe recalcar que esta construcción no sólo da un espacio de disimilitud estricto,

sino que, además, estos valores pertenecen al conjunto $\{1, \dots, \frac{n(n-1)}{2}\}$.

En la Figura 2, presentamos un ejemplo de una matriz de 5×5 , las tres primeras iteraciones del algoritmo, y la matriz resultante luego de aplicar el proceso.

Una propiedad importante que tienen estos nuevos espacios es que también corresponden a espacios de disimilitud Robinson. Esto lo presentaremos en el siguiente lema.

Lema 4.3. *Sea (S, ρ) un espacio Robinson con orden compatible $<$, y $(S, \hat{\rho})$ el espacio obtenido a partir de (S, ρ) según la Construcción 4.2. Entonces, $(S, \hat{\rho})$ es también un espacio Robinson, con el mismo orden compatible $<$ que (S, ρ) .*

Demostración. En efecto, sea, (S, ρ) un espacio Robinson, $<$ un orden compatible entre los elementos de S , y $(S, \hat{\rho})$ el espacio obtenido por la Construcción 4.2. Consideremos un trío $x < y < z$ en S . Como (S, ρ) es un espacio Robinson, sabemos que

$$\rho(x, z) \geq \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\}.$$

Esto es,

$$\rho(x, z) \geq \rho(x, y) \quad \text{y} \quad \rho(x, z) \geq \rho(y, z).$$

Si $\rho(x, y) < \rho(x, z)$, por construcción de N sabemos que la entrada correspondiente a la disimilitud $x - y$ se rellenaría antes que la entrada para $x - z$. Por tanto, $\hat{\rho}(x, y)$ tendría un valor menor a $\hat{\rho}(x, z)$. Por otro lado, si $\rho(x, y) = \rho(x, z)$, entonces, como $y < z$, la entrada para $x - y$ también se rellenaría antes que la entrada para $x - z$ (segunda condición del paso 2), quedando así con un valor menor. Así, en ambos casos, $\hat{\rho}(x, y) \leq \hat{\rho}(x, z)$.

Ahora, si $\rho(y, z) < \rho(x, z)$, por construcción de N sabemos que la entrada correspondiente a la disimilitud $y - z$ se rellenaría antes que la entrada para $x - z$, de donde adoptaría un valor menor. Por otro lado, si $\rho(y, z) = \rho(x, z)$, entonces, como

Figura 2: Evolución de la construcción paso a paso.

$$\begin{bmatrix} 0 & 8 & 10 & 10 & 20 \\ 8 & 0 & 9 & 10 & 19 \\ 10 & 9 & 0 & 9 & 14 \\ 10 & 10 & 9 & 0 & 6 \\ 20 & 19 & 14 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Matriz de ejemplo original.

$$\begin{bmatrix} 0 & 8 & 10 & 10 & 20 \\ 8 & 0 & 9 & 10 & 19 \\ 10 & 9 & 0 & 9 & 14 \\ 10 & 10 & 9 & 0 & \mathbf{1} \\ 20 & 19 & 14 & \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Primera iteración. El valor mínimo (6) se reemplaza por 1, marcado en rojo.

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{2} & 10 & 10 & 20 \\ \mathbf{2} & 0 & 9 & 10 & 19 \\ 10 & 9 & 0 & 9 & 14 \\ 10 & 10 & 9 & 0 & \mathbf{1} \\ 20 & 19 & 14 & \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Segunda iteración. El nuevo valor mínimo (8) es reemplazado por 2.

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{2} & 10 & 10 & 20 \\ \mathbf{2} & 0 & \mathbf{4} & 10 & 19 \\ 10 & \mathbf{4} & 0 & \mathbf{3} & 14 \\ 10 & 10 & \mathbf{3} & 0 & \mathbf{1} \\ 20 & 19 & 14 & \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix}$$

(d) Tercera iteración. El nuevo valor mínimo (9) aparece dos veces y se reemplaza por 3 y 4.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 7 & 10 \\ 2 & 0 & 4 & 5 & 9 \\ 6 & 4 & 0 & 3 & 8 \\ 7 & 5 & 3 & 0 & 1 \\ 10 & 9 & 8 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(e) Matriz final obtenida al concluir la construcción.

$x < y$, la entrada para $y - z$ se rellenaría antes que la entrada para $x - z$ (primera

condición del paso 2), quedando así con un valor menor. Así, $\hat{\rho}(y, z) \leq \hat{\rho}(x, z)$.

Combinando ambos resultados, obtenemos que

$$\hat{\rho}(x, z) \geq \max \{ \hat{\rho}(x, y), \hat{\rho}(y, z) \}$$

De donde $(S, \hat{\rho})$ es un espacio Robinson, con el mismo orden compatible que (S, ρ) . □

Ahora, probaremos otra propiedad importante de los espacios obtenidos mediante la Construcción 4.2. Esto es, que cualquier dibujo válido del nuevo espacio de disimilitud, también es un dibujo válido para el espacio de disimilitud original.

Teorema 4.4. *Sea (S, ρ) un espacio Robinson, y sea $(S, \hat{\rho})$ el espacio estricto obtenido a partir de (S, ρ) mediante la construcción 4.2. Sea (\mathcal{T}, Δ) un espacio métrico cualquiera. Si $(S, \hat{\rho})$ tiene un dibujo válido en (\mathcal{T}, Δ) , entonces (S, ρ) también tiene un dibujo válido en (\mathcal{T}, Δ) .*

Demostración. Sea (\mathcal{T}, Δ) un espacio métrico, y $I : S \rightarrow \mathcal{T}$ un dibujo válido de $(S, \hat{\rho})$. Esto es, para cualquier trío $x, y, z \in S$ que cumple con $\hat{\rho}(x, y) < \hat{\rho}(x, z)$, entonces se cumple que $\Delta(I(x), I(y)) < \Delta(I(x), I(z))$.

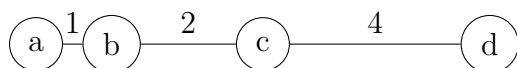
Ahora, consideremos un trío $p, q, r \in S$ tales que $\rho(p, q) < \rho(p, r)$. Por construcción de la disimilitud $\hat{\rho}$, sabemos que $\hat{\rho}(p, q) < \hat{\rho}(p, r)$. Así, usando la propiedad de dibujo válido para $(S, \hat{\rho})$ se tiene que, si $\rho(p, q) < \rho(p, r)$, entonces por propiedad de la Construcción 4.2, se tiene que $\hat{\rho}(p, q) < \hat{\rho}(p, r)$, y al ser I un dibujo válido para $(S, \hat{\rho})$, también se cumple que $\Delta(I(p), I(q)) < \Delta(I(p), I(r))$. De donde concluimos que I también es un dibujo válido para (S, ρ) en (\mathcal{T}, Δ) . □

El teorema anterior nos permite transformar un espacio Robinson cualquiera a un espacio Robinson estricto, donde un dibujo válido para este nuevo espacio también es un dibujo válido para el espacio original. Cabe recalcar que el conjunto de dibujos válidos para el espacio obtenido por la construcción puede contener menos elementos

que el conjunto de dibujos del espacio original. Un ejemplo de ello es tomar el espacio Robinson con las siguientes disimilitudes.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dentro de este espacio, todos los elementos tienen un mismo valor de disimilitud para todos los demás elementos, por lo que cualquier inyección a un espacio métrico de los elementos daría como resultado un dibujo válido. Un ejemplo de dibujo es el siguiente.



Sin embargo, si aplicamos la Construcción 4.2, obtenemos la siguiente matriz.

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos ver que el ejemplo de dibujo válido para el espacio original no es un dibujo válido para el espacio obtenido por la Construcción 4.2, para lo cual basta fijarse en el primer elemento, que debería estar más lejos del segundo que el segundo del cuarto elemento. Pero en el dibujo, el primer y segundo elemento son aquellos más cercanos.

Ahora mostraremos una propiedad de los dibujos válidos de los espacios Robinson estrictos. Para ello, consideremos un espacio Robinson estricto (S, ρ) con $n \geq 4$ elementos, y sean $w < x < y < z \in S$ cuatro elementos distintos. Como (S, ρ) es un espacio Robinson estricto, se cumple que $\rho(w, x) < \rho(w, y)$, y $\rho(y, z) < \rho(x, z)$.

Por tanto, en un dibujo válido, se debe cumplir que $\Delta(w, x) < \Delta(w, y)$, y $\Delta(y, z) < \Delta(x, z)$, de donde, se cumple también que

$$\Delta(w, x) + \Delta(y, z) < \Delta(w, y) + \Delta(x, z).$$

Si combinamos esto con la condición de los cuatro puntos, que nos dice que los dos pares de sumas de distancias más grandes son iguales, podemos ver que un dibujo válido para un espacio Robinson estricto satisface que

$$\Delta(w, x) + \Delta(y, z) < \Delta(w, y) + \Delta(x, z) = \Delta(w, z) + \Delta(x, y).$$

En base a esto, planteamos la siguiente condición sobre espacios métricos.

Definición 4.2 (Condición de los 4 puntos fuerte). *Sea (T, Δ) un espacio métrico finito con un orden total $<$ en sus elementos. Se dice que (T, Δ) cumple con la condición de los 4 puntos fuerte si, además de cumplir la condición de los cuatro puntos, se satisface que para todo $i < j < k < m$ en T ,*

$$\Delta(i, j) + \Delta(k, m) \leq \Delta(i, k) + \Delta(j, m) = \Delta(j, k) + \Delta(i, m).$$

Esta nueva condición refleja la propiedad sobre las métricas que cumplen los dibujos válidos de los espacios Robinson estrictos. Además, nos permite caracterizar un subconjunto de los real trees, conocidos como los *caterpillars con pesos*. Los caterpillars con pesos son un tipo de real tree, obtenidos a partir de un caterpillar y asignando pesos, o distancias, a las aristas que unen los vértices. Esto nos lleva al siguiente resultado.

Lema 4.5. *Sea (T, Δ) un espacio métrico discreto. Existe un caterpillar con pesos \mathcal{T} al cual se le pueden inyectar los elementos de (T, Δ) de manera que las distancias en \mathcal{T} sean iguales a las distancias en (T, Δ) , si y solo si (T, Δ) , con un orden $<$, cumple con la condición de los cuatro puntos fuerte.*

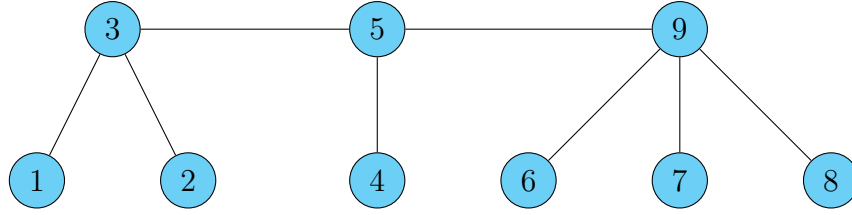


Figura 3: Ejemplo de un caterpillar de 9 vértices, cuyos nodos han sido etiquetados según el orden $<$ definido en la demostración del Lema 4.5.

Demostración. Comenzaremos probando que si existe un caterpillar con pesos al cual se le pueden inyectar los elementos de (T, Δ) , respetando las distancias en (T, Δ) , entonces (T, Δ) cumple la condición de los cuatro puntos fuerte.

En efecto, sea \mathcal{T} tal caterpillar, y sea I la inyección de los elementos de T a \mathcal{T} . Consideremos la representación en el plano de \mathcal{T} , donde las hojas se encuentran por debajo de la columna principal, y daremos el siguiente orden $<$ entre los elementos de T . Los vértices correspondientes a la columna principal en \mathcal{T} se ordenan de izquierda a derecha según el recorrido de la columna. Para cada vértice de la columna principal, sus hojas van antes que él en el orden, ordenadas según su aparición de izquierda a derecha. Un ejemplo de este orden se ve en la Figura 3.

Como los caterpillars son un tipo de árbol, se sabe que cumplen con la condición de los cuatro puntos. Ahora, sean $i < j < k < m$ cuatro puntos en (T, Δ) . Definiremos las distancias $l(x)$ como la distancia entre $I(x)$ y su vértice correspondiente en el camino principal, con $l(x) = 0$ si $I(x)$ pertenece al camino principal. También definiremos por $d(x, y)$ a la distancia entre los vértices asociados a $I(x)$ y a $I(y)$ en el camino principal. Como las distancias $d(x, y)$ están definidas sobre el camino principal, y considerando el orden $<$, entonces se tiene que, para cualquier z en el camino principal tal que $x < z < y$, entonces $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$. Así, se tiene que

$$\begin{aligned}
\Delta(i, k) + \Delta(j, m) &= (l(i) + d(i, k) + l(k) + l(j) + d(j, m) + l(m)) \\
&= l(i) + d(i, j) + d(j, k) + l(k) + l(j) + d(j, k) + d(k, m) + l(m) \\
&= (l(i) + d(i, j) + d(j, k) + d(k, m) + l(m)) + (l(j) + d(j, k) + l(k)) \\
&= \Delta(i, m) + \Delta(j, k).
\end{aligned}$$

Así, (T, Δ) cumple con la condición de los cuatro puntos fuerte.

Ahora probaremos que si (T, Δ) cumple con la condición de los cuatro puntos fuerte, entonces existe un caterpillar \mathcal{T} al cual se pueden inyectar los elementos de T tal que se respeten las distancias de T . Para ello razonaremos por contradicción.

Como (T, Δ) cumple con la condición de los cuatro puntos, entonces admite una representación en un árbol \mathcal{T} . Supongamos que \mathcal{T} no es un caterpillar. Esto es, si eliminamos todas las hojas, el grafo resultante \mathcal{T}' no es un camino. Por tanto, existe un vértice v en \mathcal{T}' de grado mayor o igual a 3. Si eliminamos v de \mathcal{T} , esto nos deja con al menos tres componentes conexas distintas A, B y C de \mathcal{T} , con al menos dos vértices en cada una. Esto se debe a que, en \mathcal{T}' , v tiene grado al menos tres, de donde existen esas tres componentes conexas en \mathcal{T}' , y al volver a \mathcal{T} , estas componentes incluyen además las hojas correspondientes en el árbol.

Ahora, elegimos los vértices $w, x \in A$, $y \in B$, y $z \in C$, con $w \neq x$, y de tal manera que w, x y v pertenezcan a un mismo camino. Definimos las siguientes distancias

- $p = \Delta(w, v)$.
- $q = \Delta(x, v)$.
- $r = \Delta(y, v)$.
- $s = \Delta(z, v)$.

Observamos que la distancia entre dos vértices en componentes conexas distintas es igual a sumar las distancias de cada uno de esos vértices a v . Además, vemos que $\Delta(w, x) = |p - q|$, pues pertenecen a un camino en común con v . Ahora, si

examinamos las tres sumas de la condición de los cuatro puntos original aplicadas a w, x, y, z , tenemos que

- $S_1 = \Delta(w, x) + \Delta(y, z) = |p - q| + r + s.$
- $S_2 = \Delta(w, y) + \Delta(x, z) = p + q + r + s.$
- $S_3 = \Delta(w, z) + \Delta(x, y) = p + q + r + s.$

Como w y x son distintos a v , esto indica que $p, q > 0$, y por tanto, $|p - q| < p + q$. Así,

$$S_1 < S_2 = S_3.$$

Esto nos permite observar que la suma donde uno de los pares corresponde a los dos vértices de una misma componente conexa es menor a las otras dos. Repitiendo el proceso, tomando dos vértices en B , uno en A , y uno en C , o tomando dos vértices en C , y uno en A y en B , llegamos a la misma conclusión. Ahora veremos que ocurre al incluir el orden $<$ entre los elementos. Por la condición de los cuatro puntos fuerte, para cuatro elementos $i < j < k < m$, se debe cumplir la igualdad específica

$$\Delta(i, k) + \Delta(j, m) = \Delta(j, k) + \Delta(i, m).$$

En base al orden $<$, enumeramos los vértices de A por $a_1 < a_2 < \dots$, lo mismo para los vértices de B , $b_1 < b_2 < \dots$, y C , $c_1 < c_2 < \dots$. En base a esto, presentamos los siguientes casos.

- Existen dos vértices en A , a_i y a_j , tales que $a_i < b_h < a_j < c_k$, o bien, $a_i < c_k < a_j < b_h$, para algún b_h en B , y c_k en C . Si esto ocurre, la condición de los cuatro puntos fuerte nos dice que

$$\Delta(a_i, a_j) + \Delta(b_h, c_k) = \Delta(b_h, a_j) + \Delta(a_i, c_k),$$

o bien,

$$\Delta(a_i, a_j) + \Delta(c_k, b_h) = \Delta(c_k, a_j) + \Delta(a_i, b_h).$$

En ambos casos, una de las sumas involucradas contiene la distancia entre un par de vértices en un mismo camino pertenecientes a una misma componente conexa. Por tanto, por lo visto anteriormente, ambas sumas no pueden ser iguales, llevando a una contradicción, pues (T, Δ) cumple con la condición de los cuatro puntos fuerte. Para los casos donde $b_h < a_i < c_k < a_j$, $c_k < a_i < b_h < a_j$, $b_h < a_i < a_j < c_k$, y $c_k < a_i < a_j < b_h$, las sumas involucradas en la condición son las mismas ya presentadas, por lo que también llevan a contradicción.

- De lo anterior, podemos ver que quedan los siguientes casos: Cuando $a_i < a_j < b_h < c_k$, $b_h < c_k < a_i < a_j$, $a_i < a_j < c_k < b_h$, o bien, $c_k < b_h < a_i < a_j$ para cualquier b_h y c_k . Supongamos ahora que existen b_f, b_g tales que estén en un mismo camino con v , y exista c_m con $b_f < c_m < b_g$. Así, tenemos los casos $a_i < b_f < c_m < b_g$, y $b_f < c_m < b_g < a_i$. En este caso, la condición de los cuatro puntos fuerte nos dice que

$$\Delta(a_i, c_m) + \Delta(b_f, b_g) = \Delta(b_f, c_m) + \Delta(a_i, b_g),$$

o bien,

$$\Delta(b_f, b_g) + \Delta(c_m, a_i) = \Delta(b_f, a_i) + \Delta(c_m, b_g).$$

Y, como hay una suma que involucra un par correspondiente a una misma componente conexa, esa suma debe ser menor a la otra, llevando a una contradicción con la condición de los cuatro puntos fuerte. Por tanto, no puede haber un c_m como se indicó. Analizar los casos $a_i < b_f < b_g < c_m$ y $c_m < b_f < b_g < a_i$ nos lleva a las mismas condiciones, llevando también a una contradicción.

- Ahora, los casos que quedan son: Cuando $b_f < b_g < c_m < a_i$, o bien, $a_i < c_m < b_f < b_g$, para cualquier c_m en C . Así, tomando c_t y c_u en C tal que

compartan un mismo camino con v , tenemos que, o bien $a_i < c_t < c_u < b_f$, o bien, $b_f < c_t < c_u < a_i$. En este caso, la condición de los cuatro puntos fuerte nos dice que

$$\Delta(a_i, c_u) + \Delta(c_t, b_f) = \Delta(c_t, c_u) + \Delta(a_i, b_f),$$

o bien,

$$\Delta(b_f, c_u) + \Delta(c_t, a_i) = \Delta(b_f, a_i) + \Delta(c_t, c_u).$$

Vemos que, en ambos casos, una de las sumas incluye al par (c_t, c_u) , por lo que esa suma debe ser menor que la otra, llevando así a una contradicción.

Así, en todos los casos, llegamos a que (T, Δ) no cumple la condición de los cuatro puntos fuerte, lo cual es una contradicción. Por tanto, existe un caterpillar \mathcal{T} al cual se pueden inyectar los elementos de (T, Δ) de manera que las distancias en \mathcal{T} respeten las distancias en (T, Δ) .

□

Como vimos al presentar la condición de los cuatro puntos fuerte, cualquier dibujo válido de un espacio Robinson estricto en un árbol T cumple con la condición de los cuatro puntos fuerte, y por tanto, por el Lema 4.5, T debe ser un caterpillar. Esto lo enunciaremos en el siguiente corolario.

Corolario 4.6. *Si un espacio Robinson estricto (S, ρ) tiene un dibujo válido en un árbol T , entonces T es un caterpillar.*

Ahora recordaremos la definición de centros izquierdos y derechos, esto es, para cualquier par $i < j \in S$, el centro izquierdo del par (i, j) es el mayor elemento más similar a i que a j , y el centro derecho es el menor elemento más similar a j que a i . Con estas definiciones, más la condición de los cuatro puntos fuerte, podemos definir las condiciones necesarias y suficientes para el dibujo válido I de un

espacio Robinson estricto (S, ρ) en un espacio métrico (\mathcal{T}, Δ) utilizando sus centros izquierdos y derechos. Esto es, para todo $i, j \in S$ se cumpla que

$$\Delta(I(ci(i, j)), I(j)) \geq \Delta(I(i), I(ci(i, j))) + \varepsilon, \text{ y}$$

$$\Delta(I(cd(i, j)), I(i)) \geq \Delta(I(j), I(cd(i, j))) + \varepsilon,$$

para algún $\varepsilon > 0$.

Utilizando estas condiciones, nosotros plantearemos un programa lineal que nos permita encontrar un dibujo válido de espacios Robinson en caterpillars. Para una formulación posible del problema de programación lineal, y utilizando la notación dada para los vértices en el caterpillar, definimos las siguientes variables.

- \mathcal{D}_i : Es la distancia en el caterpillar entre c_1 y c_i . Consideramos que $\mathcal{D}_1 = 0$.
- \mathcal{L}_i : Es la distancia en el caterpillar entre c_i y $I_{S,T}(i)$.

Con estas variables, las condiciones necesarias y suficientes previamente descritas, y considerando $\varepsilon = 1$, el problema de encontrar un dibujo válido en el caterpillar se puede formular de la siguiente manera.

$$\text{minimizar: } \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_i \quad (\text{LP2(S)})$$

$$\text{Sujeto a: } \mathcal{D}_i + \mathcal{D}_j - 2\mathcal{D}_{ci(i,j)} - \mathcal{L}_i + \mathcal{L}_j \geq 1, \quad i < j,$$

$$-\mathcal{D}_j - \mathcal{D}_i + 2\mathcal{D}_{cd(i,j)} + \mathcal{L}_i - \mathcal{L}_j \geq 1, \quad i < j,$$

$$\mathcal{D}_i, \mathcal{L}_i \geq 0.$$

A partir del cual obtenemos el siguiente resultado.

Lema 4.7. *Sea (S, ρ) un espacio de disimilitud Robinson estricto de n elementos, (T, Δ) un caterpillar con pesos, $I : S \rightarrow T$ una inyección, y sea $v_{I,T} = (\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_n, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_n)$ un vector en \mathbb{R}^{2n} . El vector $v_{I,T}$ es solución de $(\text{LP2})(S)$ si y solo si I es un dibujo válido.*

Demostración. Comenzaremos probando que si I es un dibujo válido, entonces $v_{I,T}$ es solución de (LP2).

En efecto, sea (S, ρ) un espacio Robinson estricto, y sea (T, Δ) un caterpillar. Como I es un dibujo válido, tenemos que, para cualquier trío de puntos $i, j, k \in S$, con $\rho(k, i) < \rho(k, j)$, entonces $\Delta(I(k), I(i)) < \Delta(I(k), I(j))$. Ahora, consideremos el par $i, j \in S$, con $i < j$. Si $ci(i, j) \neq i$, entonces tenemos que $\Delta(I(ci(i, j)), I(i)) < \Delta(I(ci(i, j)), I(j))$, por definición de centro izquierdo y porque I es un dibujo válido. Si reescribimos esta desigualdad en términos de las variables del programa lineal, tenemos que

$$\mathcal{D}_{ci(i,j)} + \mathcal{L}_{ci(i,j)} - \mathcal{D}_i + \mathcal{L}_i < \mathcal{D}_j + \mathcal{L}_j - \mathcal{D}_{ci(i,j)} + \mathcal{L}_{ci(i,j)}.$$

Y si agregamos $\varepsilon > 0$ a la desigualdad, nos queda

$$\mathcal{D}_j + \mathcal{D}_i - 2\mathcal{D}_{ci(i,j)} + \mathcal{L}_j - \mathcal{L}_i \geq \varepsilon.$$

Ahora, si $ci(i, j) = i$, como (S, ρ) es un espacio Robinson estricto, tenemos que

$$\mathcal{D}_i + \mathcal{L}_i - \mathcal{D}_1 + \mathcal{L}_1 < \mathcal{D}_j + \mathcal{L}_j - \mathcal{D}_1 + \mathcal{L}_1.$$

O bien, si reducimos los términos semejantes, nos queda

$$\mathcal{D}_i + \mathcal{L}_i < \mathcal{D}_j + \mathcal{L}_j.$$

Y si agregamos $\varepsilon > 0$, además de sumar y restar \mathcal{D}_i , la desigualdad resultante es

$$\mathcal{D}_j + \mathcal{D}_i - 2\mathcal{D}_i + \mathcal{L}_j - \mathcal{L}_i \geq \varepsilon.$$

Y, recordando que $ci(i, j) = i$, podemos ver que se cumple la restricción asociada a los centros izquierdos en (LP2)(S). Ahora, si consideramos el centro derecho del par

(i, j) , con $cd(i, j) \neq j$, tenemos que $\Delta(I(cd(i, j)), I(j)) < \Delta(I(cd(i, j)), I(i))$ por la definición de centro derecho y del hecho que I es un dibujo válido. Por tanto, si lo expresamos en términos de las variables del programa lineal, nos queda

$$\mathcal{D}_j + \mathcal{L}_j - \mathcal{D}_{cd(i,j)} + \mathcal{L}_{cd(i,j)} < \mathcal{D}_{cd(i,j)} + \mathcal{L}_{cd(i,j)} - \mathcal{D}_i + \mathcal{L}_i.$$

Agregando $\varepsilon > 0$ y simplificando términos, la expresión anterior es equivalente a

$$-\mathcal{D}_j - \mathcal{D}_i + 2\mathcal{D}_{cd(i,j)} - \mathcal{L}_j + \mathcal{L}_i \geq \varepsilon.$$

Por otro lado, si $cd(i, j) = j$, utilizando nuevamente que (S, ρ) es un espacio Robinson estricto, tenemos que

$$\mathcal{D}_n + \mathcal{L}_n - \mathcal{D}_j + \mathcal{L}_j < \mathcal{D}_n + \mathcal{L}_n - \mathcal{D}_i + \mathcal{L}_i.$$

O, si eliminamos los términos semejantes,

$$-\mathcal{D}_j + \mathcal{L}_j < -\mathcal{D}_i + \mathcal{L}_i.$$

Agregando $\varepsilon > 0$, y sumando y restando \mathcal{D}_j , nos queda

$$-\mathcal{D}_i - \mathcal{D}_j + 2\mathcal{D}_j - \mathcal{L}_j + \mathcal{L}_i \geq \varepsilon.$$

Recordando que $cd(i, j) = j$, podemos ver que se cumplen las restricciones asociadas al centro derecho de $(LP2)(S)$.

Además, utilizando el hecho de que si todas las distancias de un dibujo válido se amplifican por un mismo factor, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\varepsilon = 1$, de donde, el vector de distancias definido a partir de I en T es solución de $(LP2)(S)$.

Por otro lado, supongamos que $v_{I,T}$ es solución de $(LP2)(S)$. Probaremos que I es un dibujo válido en el caterpillar (T, Δ) .

Si consideramos el par $(i, i + 1)$, la restricción de centro izquierdo asociada a este par nos indica que

$$\mathcal{D}_{i+1} + \mathcal{L}_{i+1} - 2\mathcal{D}_{ci(i,i+1)} + \mathcal{D}_i - \mathcal{L}_i \geq 1.$$

Usando que $ci(i, i + 1) = i$, la restricción se traduce en

$$\mathcal{D}_{i+1} + \mathcal{L}_{i+1} - \mathcal{D}_i - \mathcal{L}_i \geq 1.$$

Lo que nos indica que

$$\mathcal{D}_{i+1} + \mathcal{L}_{i+1} > \mathcal{D}_i + \mathcal{L}_i.$$

Y por tanto, se cumple lo siguiente

$$\mathcal{D}_1 + \mathcal{L}_1 < \mathcal{D}_2 + \mathcal{L}_2 < \dots \mathcal{D}_i + \mathcal{L}_i < \mathcal{D}_{i+1} + \mathcal{L}_i < \dots \mathcal{D}_n + \mathcal{L}_n.$$

Ahora, si consideramos la restricción de centro derecho para el par $(i, i + 1)$, tenemos

$$-\mathcal{D}_{i+1} - \mathcal{D}_i + 2\mathcal{D}_{cd(i,i+1)} + \mathcal{L}_i - \mathcal{L}_{i+1} \geq 1.$$

Considerando que $cd(i, i + 1) = i + 1$, esta restricción nos dice que

$$\mathcal{D}_{i+1} - \mathcal{L}_{i+1} > \mathcal{D}_i - \mathcal{L}_i.$$

Esto es, se cumple que

$$\mathcal{D}_1 - \mathcal{L}_1 < \mathcal{D}_2 - \mathcal{L}_2 < \dots \mathcal{D}_i - \mathcal{L}_i < \mathcal{D}_{i+1} - \mathcal{L}_i < \dots \mathcal{D}_n - \mathcal{L}_n.$$

Ahora, consideremos un trío $x, y, z \in S$ tales que $\rho(x, y) < \rho(x, z)$. Observamos que, como (S, ρ) es un espacio de Robinson estricto, no puede darse que $x < z < y$ o $y < z < x$. Si $x < y < z$, entonces se tiene que

$$\mathcal{D}_y + \mathcal{L}_y - \mathcal{D}_x + \mathcal{L}_x < \mathcal{D}_z + \mathcal{L}_z - \mathcal{D}_x + \mathcal{L}_x.$$

Aplicando la definición de distancias en el caterpillar, esta desigualdad es equivalente a

$$\Delta(x, y) < \Delta(x, z).$$

Mediante un razonamiento análogo, si $z < y < x$, se cumple que

$$\mathcal{D}_x + \mathcal{L}_x - \mathcal{D}_y + \mathcal{L}_y < \mathcal{D}_x + \mathcal{L}_x - \mathcal{D}_z + \mathcal{L}_z.$$

Usando la definición de distancia, esto es,

$$\Delta(x, y) < \Delta(x, z).$$

Ahora, supongamos que $y < x < z$. En este caso, por la definición de centro izquierdo, se tiene que $x \leq ci(y, z)$, por tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_x + \mathcal{L}_x - \mathcal{D}_y + \mathcal{L}_y &\leq \mathcal{D}_{ci(y,z)} + \mathcal{L}_{ci(y,z)} - \mathcal{D}_y + \mathcal{L}_y \\ &< \mathcal{D}_z + \mathcal{L}_z - \mathcal{D}_{ci(y,z)} + \mathcal{L}_{ci(i,z)} \\ &\leq \mathcal{D}_z + \mathcal{L}_z - \mathcal{D}_x + \mathcal{L}_x. \end{aligned}$$

Por tanto, al aplicar la definición de distancia, nos queda $\Delta(x, y) < \Delta(x, z)$. Por otro lado, si $z < x < y$, por definición de centro derecho se cumple que $cd(y, z) \leq x$. Así, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_y + \mathcal{L}_y - \mathcal{D}_x + \mathcal{L}_x &\leq \mathcal{D}_y + \mathcal{L}_y - \mathcal{D}_{cd(y,z)} + \mathcal{L}_{cd(y,z)} \\
&< \mathcal{D}_{cd(y,z)} + \mathcal{L}_{cd(y,z)} - \mathcal{D}_z + \mathcal{L}_z \\
&\leq \mathcal{D}_x + \mathcal{L}_x - \mathcal{D}_z + \mathcal{L}_z.
\end{aligned}$$

Y, usando la definición de distancia, nos queda $\Delta(x, y) < \Delta(x, z)$.

Así, en cualquier caso, si $\rho(x, y) < \rho(x, z)$, entonces $\Delta(x, y) < \Delta(x, z)$, por lo que I es un dibujo válido de (S, ρ) en (T, Δ) .

Por lo tanto, I es un dibujo válido de (S, ρ) en (T, Δ) si y solo si el vector $v_{I,T}$ es solución de $(LP2)(S)$. \square

Podemos observar que $(LP2)(S)$ considera una cantidad de restricciones cuadrática, presentando así una mejora en comparación a $(LP1)(S)$.

4.3. Propiedades de la matriz de centro

Ahora presentaremos algunas propiedades de las matrices de centro, y veremos como pueden utilizarse para refinar aún más el programa lineal, además de usarlas junto a herramientas clásicas de optimización para analizar el problema.

Comenzaremos presentando la siguiente propiedad que nos indica como se relacionan valores correspondientes a entradas consecutivas dentro de filas de una matriz de centro .

Lema 4.8. *Sea $C(S)$ la matriz de centros de un espacio Robinson (S, ρ) . Para toda fila $i \in \{1, \dots, n\}$, los valores no disminuyen al aumentar el índice de la columna. En otras palabras, para todo i , si consideramos $j < k$, se tiene que*

$$C(S)_{i,j} \leq C(S)_{i,k}.$$

Demostración. Primero, supondremos que $j < i < k$. Esto quiere decir que $C(S)_{i,j}$ corresponde a un centro derecho, mientras que $C(S)_{i,k}$ corresponde a un centro

izquierdo. Por definición de centros derechos e izquierdos, vemos que

$$ci(i, j) \leq i \leq cd(i, k),$$

de donde, $C(S)_{i,j} \leq C(S)_{i,k}$.

Ahora veremos qué ocurre si $i < j < k$. En este caso, consideremos los centros izquierdos entre i y j , e i y k , $ci(i, j)$ y $ci(i, k)$. Recordando las definiciones de centros izquierdos, $ci(i, j)$ es el máximo elemento entre i y j más cercano a i que a j . Por otro lado, $ci(i, k)$ es el máximo elemento entre i y k más cercano a i que a k . Además, por propiedad de Robinson, como $i < j < k$, entonces $\rho(i, j) \leq \rho(i, k)$.

Razonando por contradicción, supondremos que $ci(i, j) > ci(i, k)$. Esto es, tenemos el siguiente orden entre los elementos: $i \leq ci(i, k) < ci(i, j) < j < k$. Por propiedad de los espacios Robinson, esto quiere decir que $\rho(i, ci(i, j)) \geq \rho(i, ci(i, k))$. Si nos fijamos en $ci(i, k)$, sabemos que debe ser el máximo elemento entre i y k tal que $\rho(i, ci(i, k)) < \rho(ci(i, k), k)$. Sin embargo, ya sabemos que $\rho(i, ci(i, j)) \geq \rho(i, ci(i, k))$. Además, por propiedad de los espacios Robinson, como $ci(i, k) < ci(i, j) < k$, entonces $\rho(k, ci(i, j)) \leq \rho(k, ci(i, k))$. Por tanto, $ci(i, j)$ cumple con

- $ci(i, j) \in [i, k]$.
- $ci(i, j) > ci(i, k)$.
- $\rho(ci(i, j), k) \leq \rho(ci(i, k), k) < \rho(ci(i, k), i) \leq \rho(ci(i, j), i)$.

Por tanto, $ci(i, j)$ cumple la definición de centro izquierdo para el par (i, k) , de donde $ci(i, j) = ci(i, k)$, lo cual nos lleva a una contradicción, pues partimos suponiendo que $ci(i, j) > ci(i, k)$. Así, no es posible que $ci(i, j) > ci(i, k)$, de donde, $ci(i, j) \leq ci(i, k)$, y por tanto, $C(S)_{i,j} \leq C(S)_{i,k}$.

Finalmente, veremos que ocurre si $j < k < i$. En este caso, debemos considerar los centros derechos, $cd(i, j)$ y $cd(i, k)$. Por propiedad de los espacios Robinson, sabemos que $\rho(i, k) \leq \rho(i, j)$.

Razonando por contradicción, supondremos que $cd(i, j) > cd(i, k)$. Esto es, te-

nemos el siguiente orden entre los elementos: $i \geq cd(i, j) > cd(i, k) > k > j$. Por propiedad de los espacios Robinson, esto quiere decir que $\rho(i, cd(i, j)) \leq \rho(i, cd(i, k))$. Si nos fijamos en $cd(i, j)$, sabemos que debe ser el mínimo elemento entre i y j tal que $\rho(i, cd(i, j)) > \rho(cd(i, j), j)$. Sin embargo, ya sabemos que $\rho(i, cd(i, j)) \leq \rho(i, cd(i, k))$. Además, por propiedad de los espacios Robinson, como $j < cd(i, k) < cd(i, j)$, entonces $\rho(j, cd(i, k)) \leq \rho(j, cd(i, j))$. Por tanto, $cd(i, k)$ cumple con

- $cd(i, k) \in [j, i]$.
- $cd(i, k) < cd(i, j)$.
- $\rho(cd(i, k), j) \leq \rho(cd(i, j), j) < \rho(cd(i, j), i) < \rho(cd(i, k), i)$.

Así, $cd(i, k)$ cumple con las condiciones para ser el centro derecho entre i y j , por tanto $cd(i, j) = cd(i, k)$, lo cual nos lleva a una contradicción. Así, no es posible que $cd(i, k) < cd(i, j)$, y por tanto, $C(S)_{i,j} \leq C(S)_{i,k}$.

De esta manera se prueba que, dado $i \in \{1, \dots, n\}$, y $1 \leq j < k \leq n$, entonces $C(S)_{i,j} \leq C(S)_{i,k}$.

□

Además, contamos con una propiedad similar que nos permite relacionar los valores dentro de las columnas de una matriz de centro.

Lema 4.9. *Sea $C(S)$ la matriz de centros de un espacio Robinson (S, ρ) . Para toda columna $i \in \{1, \dots, n\}$, los valores en esa columna no disminuyen al aumentar el índice de la fila. En otras palabras, para todo i , si consideramos $j < k$, se tiene que*

$$C(S)_{j,i} \leq C(S)_{k,i}.$$

Demostración. Primero, supondremos que $j < i < k$. Esto quiere decir que $C(S)_{j,i}$ corresponde a un centro izquierdo, mientras que $C(S)_{k,i}$ corresponde a un centro derecho. Por definición de centros derechos e izquierdos, vemos que

$$ci(j, i) \leq i \leq cd(i, k),$$

de donde, $C(S)_{j,i} \leq C(S)_{k,i}$. Ahora veremos qué ocurre si $i < j < k$. En este caso, consideremos los centros derechos entre i y j , e i y k , que son $cd(i, i)$ y $cd(i, k)$ respectivamente. Recordando las definiciones de centros derechos, $cd(i, j)$ es el mínimo elemento entre i y j más cercano a j que a i . Por otro lado, $cd(i, k)$ es el mínimo elemento entre i y k más cercano a k que a i . Además, por propiedad de Robinson, como $i < j < k$, entonces $\rho(i, j) \leq \rho(i, k)$.

Razonando por contradicción, supondremos que $cd(i, j) > cd(i, k)$. Esto es, tenemos el siguiente orden entre los elementos: $i < cd(i, k) < cd(i, j) \leq j < k$. Por propiedad de los espacios Robinson, esto quiere decir que $\rho(j, cd(i, k)) \leq \rho(k, cd(i, k))$. y, de la definición de centro derecho, tenemos que $\rho(i, cd(i, k)) > \rho(k, cd(i, k))$. Por tanto, $cd(i, k)$ cumple con

- $cd(i, k) \in [i, j]$.
- $cd(i, k) < cd(i, j)$.
- $\rho(cd(i, k), j) \leq \rho(cd(i, k), k) < \rho(cd(i, k), i)$.

Por tanto, $cd(i, k)$ cumple la definición de centro derecho para el par (i, j) , de donde $cd(i, j) = cd(i, k)$, lo cual nos lleva a una contradicción, pues partimos suponiendo que $cd(i, j) > cd(i, k)$. Así, no es posible que $cd(i, j) > cd(i, k)$, de donde, $cd(i, j) \leq cd(i, k)$, y por tanto, $C(S)_{j,i} \leq C(S)_{k,i}$.

Finalmente, veremos que ocurre si $j < k < i$. En este caso, debemos considerar los centros izquierdos, $ci(i, j)$ y $ci(i, k)$. Por propiedad de los espacios Robinson, sabemos que $\rho(i, k) \leq \rho(i, j)$.

Razonando por contradicción, supondremos que $ci(i, j) > ci(i, k)$. Esto es, tenemos el siguiente orden entre los elementos: $j < k \leq ci(i, k) < ci(i, j) < i$. Por propiedad de los espacios Robinson, como $j < k \leq ci(i, j)$, esto quiere decir que $\rho(k, ci(i, j)) \leq \rho(j, cd(i, j))$. Además, por definición de centro izquierdo, tenemos que $\rho(j, ci(i, j)) < \rho(i, ci(i, j))$. Por tanto, $ci(i, j)$ cumple con

- $ci(i, j) \in [k, i]$.
- $ci(i, k) < ci(i, j)$.
- $\rho(ci(i, j), k) \leq \rho(ci(i, j), j) < \rho(ci(i, j), i)$.

Así, $ci(i, j)$ cumple con las condiciones para ser el centro izquierdo entre i y k , por tanto $ci(i, k) = ci(i, j)$, lo cual nos lleva a una contradicción. Así, no es posible que $ci(i, k) < ci(i, j)$, y por tanto, $C(S)_{j,i} \leq C(S)_{k,i}$.

De esta manera se prueba que, dado $i \in \{1, \dots, n\}$, y $1 \leq j < k \leq n$, entonces $C(S)_{j,i} \leq C(S)_{k,i}$.

□

Con ambos lemas, se tiene que, para un par de índices i, j de una matriz de centros $C(S)$, se cumpla que

$$C(S)_{i-1,j} \leq C(S)_{i,j} \leq C(S)_{i,j+1}.$$

Adicionalmente, en el caso de los espacios Robinson estrictos contamos con una propiedad adicional que nos permite relacionar los centros izquierdos con los derechos.

Lema 4.10. *Sea (S, ρ) un espacio de disimilitud Robinson estricto. Entonces se cumple que, para cualquier par i, j , con $i < j$, $ci(i, j) = cd(i, j) - 1$.*

Demostración. Esta demostración se sigue de las definiciones de centros izquierdos y derechos. Sea (S, d) un espacio Robinson estricto, y sea i, j un par de elementos en (S, d) . Sea k el centro derecho de i, j . Por definición de centro derecho, sabemos que es el mínimo elemento entre i y j más similar a j que a i . Por tanto, $k - 1$ no puede ser más similar a j que a i , o k no sería centro derecho. Así, $k - 1$ es más similar a i que a j , o bien, $k - 1$ tiene la misma disimilitud con i que con j . Pero, por hipótesis, todos los valores de disimilitud son distintos, por tanto, $k - 1$ no puede tener la misma disimilitud con i que con j , de donde debe ser más similar a i que

a j . Así, $k - 1$ es el elemento de mayor índice entre i y j tal que es más similar a i que a j , de donde es el centro izquierdo.

De esta manera, si (S, ρ) es un espacio Robinson estricto, entonces se cumple que $c(i, j) = cd(i, j) - 1$, para cualquier par de elementos i, j en S . \square

Este lema nos permite definir la matriz de centros de un espacio Robinson estricto utilizando sólo las entradas que se encuentran sobre la diagonal. Es más, este resultado junto a los Lemas 4.8 y 4.9, nos permite decir cuantas matrices de centros de espacios Robinson estrictos posibles existen para una cantidad de elementos n . Esto puede hacerse viendo las entradas por sobre la diagonal como un triángulo, como se muestra a continuación.

$$\begin{array}{cccccc}
 C(S)_{1,2} & C(S)_{1,3} & MC(S)_{1,4} & \dots & C(S)_{1,n-1} & C(S)_{1,n} \\
 & C(S)_{2,3} & C(S)_{2,4} & \dots & C(S)_{2,n-1} & C(S)_{2,n} \\
 & & C(S)_{3,4} & \dots & C(S)_{3,n-1} & C(S)_{3,n} \\
 & & & \ddots & & \vdots \\
 & & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & & C(S)_{n-1,n}
 \end{array}$$

Ahora renombraremos las entradas de la matriz, mediante $C(S)_{i,j} = x_{n-j+i}$. Esto es, $C(S)_{1,n} = x_{1,1}$, $C(S)_{1,n-1} = x_{2,1}$, $C(S)_{2,n} = x_{2,2}$, y así para el resto de entradas. Con esto, el triángulo resultante sería el siguiente.

$$\begin{array}{cccccc}
 x_{n-1,1} & x_{n-2,1} & x_{n-3,1} & \dots & x_{2,1} & x_{1,1} \\
 & x_{n-1,2} & x_{n-2,2} & \dots & x_{3,2} & x_{2,2} \\
 & & x_{n-1,3} & \dots & x_{3,4} & x_{3,3} \\
 & & & \ddots & & \vdots \\
 & & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & & x_{n-1,n-1}
 \end{array} ,$$

cuya base son las entradas $x_{n-1,i}$, con $1 \leq i \leq n - 1$. Así, podemos expresar las

propiedades dadas por los Lemas 4.8 y 4.9 en términos de los $x_{i,j}$, obteniendo lo siguiente

$$x_{i+1,j} \leq x_{i,j} \leq x_{i+1,j+1}.$$

Un triángulo con esta propiedad se conoce como un *patrón Gelfand–Tsetlin triangular*. Además, podemos observar que $x_{n-1,r} = M(r, n - (r + 1) + r)$, o bien, $x_{n-1,r} = M(r, r + 1)$, los cuales corresponden a los centros izquierdos de los pares $(r, r + 1)$. Esto es $x_{n-1,r} = r$. Por tanto, los patrones formados tienen como base los valores $1, 2, \dots, n - 1$. Como muestra Zeilberger en [20], la cantidad de patrones Gelfand–Tsetlin triangulares con esta base es de $2^{(n-1)(n-2)/2}$, de donde, la cantidad de matrices de n elementos que cumplen con esta estructura es de $2^{(n-1)(n-2)/2}$. Sin embargo, no todas las matrices que cuentan con esta estructura corresponden a matrices de centro. Un ejemplo es la siguiente matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Podemos observar que esta matriz cumple con las propiedades vistas en los Lemas 4.8, 4.9 y 4.10. Sin embargo, no hay un espacio Robinson de 6 elementos, con todos sus valores de disimilitud distintos, que tenga esta matriz como matriz de centros. Esto se debe a que, si observamos el centro derecho entre 2 y 6, este corresponde al elemento 4, de donde $\rho(4, 6) < \rho(2, 4)$. A su vez, el centro derecho entre 1 y 4 es 2, por lo que $\rho(2, 4) < \rho(1, 2)$. Por propiedad de Robinson, y considerando que todos los valores de disimilitud son distintos, podemos afirmar que $\rho(1, 2) < \rho(1, 3)$. Además, podemos ver que el centro izquierdo entre 1 y 5 es 3, de donde $\rho(1, 3) < \rho(3, 5)$. Ahora, tomando el centro izquierdo entre 3 y 6, que es 5, tenemos

que $\rho(3, 5) < \rho(5, 6)$. Nuevamente, por propiedad de Robinson, y considerando que todos los valores de la matriz de disimilitud son distintos, podemos afirmar que $\rho(5, 6) < \rho(4, 6)$. Así, hemos formado la siguiente secuencia de desigualdades,

$$\rho(4, 6) < \rho(2, 4) < \rho(1, 2) < \rho(1, 3) < \rho(3, 5) < \rho(5, 6) < \rho(4, 6).$$

De esta manera, podemos observar que la matriz presentada no corresponde a una matriz de centros de un espacio Robinson cuyos valores de disimilitud sean distintos, pues no es posible satisfacer estas desigualdades a la vez. Así, no toda matriz con esta estructura corresponde a un espacio Robinson estricto. Esto, junto al resultado demostrado por Zeilberger, nos permite plantear el siguiente resultado.

Lema 4.11. *Sea $n \in \mathbb{N}$. La cantidad de matrices de centros distintas correspondientes a espacios de disimilitud Robinson estrictos de n elementos es a lo más $2^{(n-1)(n-2)/2}$.*

Con este lema, es posible realizar un análisis experimental exhaustivo sobre matrices formadas a partir de los patrones de Gelfand-Tsetlin triangulares, y reconociendo cuales corresponden a un espacio Robinson estricto, para luego aplicar (LP2) y determinar si tienen o no un dibujo válido en un caterpillar. A continuación, presentamos una tabla resumen con los resultados de análisis exhaustivos sobre las matrices de centro para espacios Robinson estrictos de 5 a 8 elementos, examinando cuantos programas lineales tienen solución al buscar un dibujo válido en el caterpillar, y comparando con la cantidad de programas que tienen solución al buscar un dibujo en el camino ². Los códigos utilizados para los experimentos pueden encontrarse en el siguiente enlace: <https://github.com/Kurufo/tesis>.

Como se puede observar en el Cuadro 1, la cantidad de matrices de centro que admiten un dibujo válido en el caterpillar es superior a la cantidad de matrices que admiten un dibujo válido para el camino. Pero, a medida que se aumenta la cantidad de elementos en los espacios métricos, la cantidad de matrices que admiten un dibujo

²Estos experimentos fueron realizados en el servidor Chome provisto por el departamento de Informática y Ciencias de la Computación de la Facultad de Ingeniería.

Cantidad de elementos	Cantidad de matrices por Lema 4.11	Total de matrices de centro	% de espacios con dibujo en un caterpillar	% de espacios con dibujo en el camino
5	64	64	100	90.62
6	1024	1020	98.23	67.06
7	32768	32256	91.29	37.14
8	2097152	2018032	76.19	14.39

Cuadro 1: Tabla resumen de análisis sobre matrices de centro para espacios Robinson con valores de disimilitud distintos. En la primera columna se muestra la cantidad de elementos de los espacios de disimilitud. En la segunda columna, se muestra la cota superior para las matrices de centro dada por el Lema 4.11, correspondiente a $2^{(n-1)(n-2)/2}$. En la tercera columna se muestra la cantidad de matrices de centro que corresponden a espacios Robinson para cada cantidad de elementos, determinadas mediante un programa lineal. En la cuarta y quinta columnas mostramos el porcentaje de las matrices de centro para las cuales se encontró un dibujo válido en un caterpillar y en la recta, respectivamente, utilizando el programa lineal $(LP2)(S)$ para encontrar los dibujos.

válido, sea en un caterpillar o en el camino, se reduce.

4.4. Representación matricial

Como las restricciones definidas para $(LP2)(S)$ son lineales, es posible describir el conjunto de restricciones de manera matricial, de la forma $\mathbf{A}_S \mathbf{x} > 0$ para alguna matriz $\mathbf{A}_S \in \mathbb{R}^{n(n-1) \times (2n)}$. Además, como la imagen del primer elemento siempre pertenece al camino principal del caterpillar (agregar una pata para el primer elemento sería equivalente a alargar el camino principal), tenemos que $\mathcal{D}_1 = 0$, y $\mathcal{L}_1 = 0$, por lo que podemos considerar $\mathbf{A}_S \in \mathbb{R}^{n(n-1) \times (2n)}$. Las columnas de \mathbf{A}_S tienen como índices a las variables \mathcal{D}_i y a las variables \mathcal{L}_i , con $i \in \{2, \dots, n\}$, mientras que las filas corresponden a las restricciones del programa lineal, y las indexaremos por los pares ordenados $(i, j) \in [n]^2$, con $i \neq j$.

Si vemos las restricciones de $(LP2)(S)$, podemos observar que, para cualquier par (i, j) , las únicas variables que tienen un coeficiente distinto a cero son aquellas asociadas a i, j , y a su centro izquierdo o derecho.

Esta formulación matricial nos permite encontrar una caracterización alternativa de los espacios Robinson estrictos que tienen un dibujo válido en un caterpillar. Para ello, utilizaremos un teorema de alternativas planteado por Gordan.

Teorema 4.12 (Alternativa de Gordan [8]). *Sea A una matriz de tamaño $m \times n$. Exactamente una de las siguientes proposiciones es cierta. Existe $x \in \mathbb{R}^n$ que satisface $Ax > 0$, o bien, existe $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, distinto al nulo, que satisface $A^\top \mathbf{y} = 0, \mathbf{y} \geq 0$.*

En nuestro caso, gracias a la representación matricial de las restricciones de $(LP2)(S)$, este teorema puede replantearse de la siguiente manera.

Sea (S, ρ) un espacio Robinson estricto. Exactamente una de las siguientes proposiciones es cierta. Existe un caterpillar para el cual (S, ρ) admite un dibujo válido, o bien, existe un vector $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n(n-1)}$ distinto del nulo tal que $\mathbf{A}_S^\top \mathbf{y} = 0$.

Esto es, un espacio Robinson estricto (S, ρ) tiene un dibujo válido en un caterpillar si y solo si el kernel de \mathbf{A}_S^\top contiene un vector no nulo.

Ahora, consideremos una partición de las filas de \mathbf{A}_S de tal manera que se formen dos matrices, \mathbf{B}_S y \mathbf{N}_S , donde \mathbf{B}_S viene dada por las filas correspondientes a pares de índices consecutivos $\{12, \dots, (n-1)n, 21, \dots, n(n-1)\}$, y \mathbf{N}_S contiene las restricciones restantes. Además, para pares consecutivos, tenemos que $ci(i, i+1) = i$ y $cd(i+1, i) = i+1$. De esta manera, la matriz \mathbf{B}_S tiene la siguiente forma.

$$\mathbf{B}_S = \begin{matrix} & & \mathcal{D}_2 \cdots \cdots \mathcal{D}_n & \mathcal{L}_2 \cdots \cdots \mathcal{L}_n \\ \begin{matrix} 12 \\ \vdots \\ (n-2)n \\ 21 \\ \vdots \\ n(n-2) \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline T_{n-1} & T_{n-1} \\ \hline T_{n-1} & -T_{n-1} \end{array} \right), \end{matrix}$$

donde

$$T_{n-1} = \begin{matrix} & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ \cdot & \cdot & & \\ -1 & & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & -1 & 1 \end{array} \right). \end{matrix}$$

Se puede ver que esta matriz tiene rango completo, y por lo tanto, es invertible. Es más, se puede ver que

$$(\mathbf{B}_S^\top)^{-1} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c} T_{n-1}^{-\top} & T_{n-1}^{-\top} \\ \hline T_{n-1}^{-\top} & -T_{n-1}^{-\top} \end{array} \right), \quad \text{con } T_{n-1}^{-\top} = \begin{matrix} & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & & & 1 \end{array} \right). \end{matrix}$$

Esto también nos dice que \mathbf{B}_S viene determinada principalmente por la cantidad de elementos en S , sin importar las relaciones existentes entre dichos elementos.

Ahora, consideremos un vector $\mathbf{y} \in \ker(\mathbf{A}_S^\top)$, y lo particionaremos como $\mathbf{y}^\top = (\mathbf{y}_B^\top \mid \mathbf{y}_N^\top)$, siguiendo la misma separación de \mathbf{A}_S en \mathbf{B}_S y \mathbf{N}_S . Con esto, la

ecuación $\mathbf{A}_S^\top \mathbf{y} = 0$ puede reescribirse como

$$\mathbf{B}_S^\top \mathbf{y}_B + \mathbf{N}_S^\top \mathbf{y}_N = 0.$$

Y si definimos $\mathbf{Y}_S := -(\mathbf{B}_S^\top)^{-1} \mathbf{N}_S^\top$, la ecuación anterior se convierte en

$$\mathbf{y}_B = \mathbf{Y}_S \mathbf{y}_N,$$

de donde, cualquier vector en $\ker(\mathbf{A}_S^\top)$ está determinado por sus componentes en \mathbf{y}_N . Esto puede resumirse en el siguiente lema.

Lema 4.13. *Un espacio Robinson estricto (S, ρ) con n elementos admite un dibujo válido en un caterpillar si y solo si el siguiente sistema no admite solución:*

$$\mathbf{y}_N \in \mathbb{R}^{(n-1)(n-2)}: \quad \mathbf{Y}_S \mathbf{y}_N \geq 0, \quad \mathbf{y}_N \geq 0, \quad \mathbf{y}_N \neq 0 \quad (\text{LP-S})$$

Podemos ver que el Lema 4.13 nos da una expresión equivalente al conjunto de restricciones de $(LP2)(S)$.

A continuación, utilizaremos esta representación matricial para encontrar restricciones redundantes, esto es, restricciones que pueden eliminarse de (LP-S) sin que cambie su factibilidad. Para ello, recordaremos que el vector \mathbf{y}_N está indexado por las restricciones de la matriz \mathbf{A}_S asociadas a los pares (i, j) tales que $|i - j| > 1$. Además, para cualquier par $1 \leq i < j \leq n$, la columna correspondiente en \mathbf{Y}_S depende del tipo de restricción que define el par (i, j) . En la Figura 4 mostramos los cuatro tipos posibles de columnas.

Diremos que una columna correspondiente a un par (i, j) , $(\mathbf{Y}_S)_{ij}$ es redundante si imponer la condición de $\mathbf{y}_{N_{ij}} = 0$ no afecta la factibilidad del sistema (LP-S). Visto de otra forma, la columna $(\mathbf{Y}_S)_{ij}$ es redundante si, cada vez que exista una solución al sistema (LP-S), entonces también existe una solución $\tilde{\mathbf{y}}_N$, con $\tilde{\mathbf{y}}_{N_{ij}} = 0$.

Un primer tipo de columna redundante corresponde a las restricciones para las cuales el centro izquierdo o derecho del par coincide con uno de los índices del par, como se puede ver en la Figura 4(a) y 4(b). Sea $(\mathbf{Y}_S)_{ij}$ una columna de este tipo, y supongamos que el vector \mathbf{y}_N es solución del sistema (LP-S).

Podemos observar que la columna $(\mathbf{Y}_S)_{ij}$ sólo contiene entradas no positivas. Por tanto, $(\mathbf{y}_N)_{ij}$ no puede ser la única componente de \mathbf{y}_N distinta de cero, o tendríamos que

$$\mathbf{Y}_S \mathbf{y}_N = (\mathbf{Y}_S)_{ij} (\mathbf{y}_N)_{ij} < 0,$$

lo que contradice la condición $\mathbf{Y}_S \mathbf{y}_N \geq 0$, junto a $\mathbf{y}_N \neq 0$.

Así, si fijamos $(\mathbf{y}_N)_{ij} = 0$, obtenemos un vector $\mathbf{y}'_N \geq 0$ que sigue siendo no nulo, y satisface

$$\mathbf{Y}_S \mathbf{y}'_N = \mathbf{Y}_S \mathbf{y}_N - (\mathbf{y}_N)_{ij} (\mathbf{Y}_S)_{ij} \geq \mathbf{Y}_S \mathbf{y}_N \geq 0.$$

De donde, $(\mathbf{Y}_S)_{ij}$ es una columna redundante.

El segundo tipo de columna redundante corresponde a las restricciones asociadas a pares (i, j) , con $i < j$, para los cuales existe otro par (i', j') , con $i' < j'$, tal que

$$ci(i, j) = ci(i', j'), \quad i' \leq i, \quad j' \leq j$$

Aquí, la columna $(\mathbf{Y}_S)_{ij}$ está dominada componente a componente por la columna $(\mathbf{Y}_S)_{i'j'}$. Esto es,

$$(\mathbf{Y}_S)_{ij} \leq (\mathbf{Y}_S)_{i'j'}.$$

Sea \mathbf{y}_N una solución de (LP-S). Definimos un nuevo vector \mathbf{y}'_N al fijar

$$(\mathbf{y}'_N)_{ij} = 0, \quad (\mathbf{y}'_N)_{i'j'} = (\mathbf{y}_N)_{ij} + (\mathbf{y}_N)_{i'j'},$$

y dejando las demás componentes sin modificar. Podemos ver que $\mathbf{y}'_N \geq 0$, y $\mathbf{y}'_N \neq 0$. Además,

$$\mathbf{Y}_S \mathbf{y}'_N = \mathbf{Y}_S \mathbf{y}_N + ((\mathbf{Y}_S)_{i'j'} - (\mathbf{Y}_S)_{ij})(\mathbf{y}_N)_{ij} \geq \mathbf{Y}_S \mathbf{y}_N \geq 0,$$

lo que se cumple porque la columna $(\mathbf{Y}_S)_{i'j'}$ domina componente a componente a la columna $(\mathbf{Y}_S)_{ij}$, por tanto, $(\mathbf{Y}_S)_{i'j'} - (\mathbf{Y}_S)_{ij}$ es no negativo. Así, fijar $(\mathbf{y}_N)_{ij} = 0$ no afecta la factibilidad del sistema, de donde, la columna $(\mathbf{Y}_S)_{ij}$ es redundante.

Un argumento análogo nos muestra que una columna $(\mathbf{Y}_S)_{ji}$, con $i < j$, es redundante si existe otro par (j', i') tal que

$$cd(j, i) = cd(j', i'), \quad i' \geq i, \quad j' \geq j$$

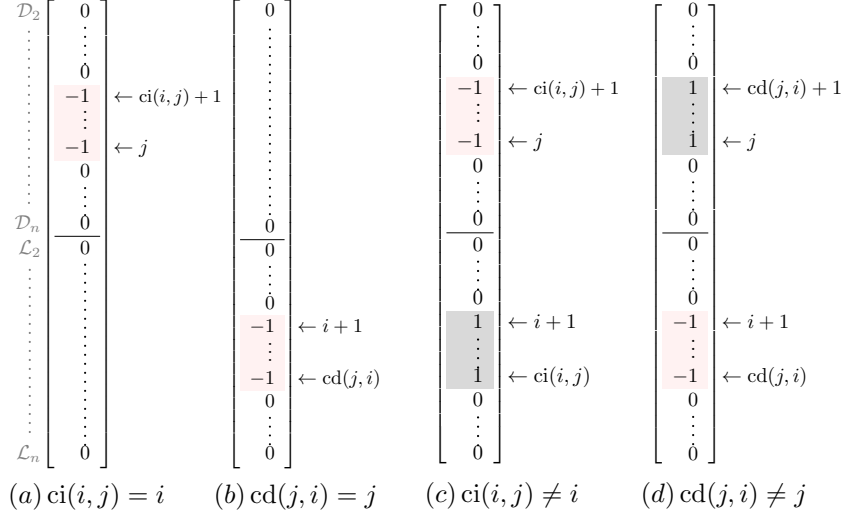


Figura 4: Tipos de posibles estructuras presentes en \mathbf{Y}_S .

En este caso, la columna $(\mathbf{Y}_S)_{ji}$ está dominada componente a componente por la columna $(\mathbf{Y}_S)_{j'i'}$, lo que nos permite seguir un desarrollo similar al anterior.

Al eliminar estas columnas redundantes, reducimos de manera significativa la cantidad de restricciones en el programa lineal. Para evaluar esta mejora, realizamos un análisis experimental sobre matrices Robinson generadas de manera aleatoria, y comparando la cantidad de restricciones en el programa lineal antes y después de eliminar las restricciones redundantes. Estas mediciones se realizaron para espacios Robinson de 100 elementos, aumentando la cantidad de elementos de 100 en 100 hasta llegar a 700. Para cada uno de estos tamaños, generamos 100 espacios Robinson de manera aleatoria, calculando la cantidad de restricciones para cada uno de estos espacios. Los resultados se presentan en la Tabla 2.

Como se puede observar, eliminar las columnas redundantes nos permite eliminar alrededor de un 80 % de las restricciones del sistema, sin importar el tamaño. Además, la desviación estándar nos indica que esta reducción es consistente en la práctica.

A continuación, usaremos la caracterización del kernel dada en el Lema 4.13 para identificar estructuras simples que nos permiten asegurar la existencia de un dibujo válido en un caterpillar. En particular, si la matriz \mathbf{Y}_S tiene pocas columnas no

Cantidad de elementos	Restricciones sin eliminar redundancias	Promedio restricciones eliminando redundancias	Desviación estándar de restricciones al eliminar redundancias	Porcentaje restricciones de $(LP2)(S)$ eliminadas
100	9900	2164.27	8.96 %	78.14 %
200	39800	8301.66	7.25 %	79.14 %
300	89700	18572.37	5.43 %	79.30 %
400	159600	32696.56	4.67 %	79.51 %
500	249500	50963.63	4.46 %	79.57 %
600	359400	72597.54	3.52 %	79.8 %
700	489300	99952.41	3.78 %	79.57 %

Cuadro 2: Tabla resumen de la comparación en cantidad de restricciones del sistema antes y después de eliminar las columnas redundantes. En la primera columna se muestra la cantidad de elementos de los espacios Robinson considerados. En la segunda columna se muestra la cantidad de restricciones del sistema sin eliminar las columnas redundantes, que corresponde a $n(n - 1)$ restricciones. En la tercera y cuarta columnas mostramos el promedio y la desviación estándar, respectivamente, de la cantidad de restricciones obtenidas al eliminar las columnas redundantes. La quinta columna muestra, en porcentaje respecto del número total de restricciones previas a eliminar las columnas redundantes, la cantidad promedio de restricciones redundantes eliminadas.

redundantes, el problema de factibilidad (LP-S) se vuelve demasiado restringido, y por tanto, no puede admitir ninguna solución no negativa y no nula. Esto nos indica que el espacio original admite un dibujo válido. Esto lo vemos reflejado en el siguiente teorema.

Teorema 4.14. *Sea (S, ρ) un espacio Robinson estricto. Si la matriz \mathbf{Y}_S tiene menos de dos columnas no redundantes de la forma $(\mathbf{Y}_S)_{ij}$, con $i < j$, o de la forma $(\mathbf{Y}_S)_{ji}$, con $i < j$, entonces (S, ρ) admite un dibujo válido en un caterpillar.*

Demostración. Primero observamos que, para cualquier solución de (LP-S), existe una solución para la cual $\mathbf{Y}_S \mathbf{y}_N$ puede ser escrita como una combinación lineal de sus columnas no redundantes:

$$\mathbf{Y}_S \mathbf{y}_N = \sum_{\substack{i < j-1 \\ (i,j) \text{ no redundantes}}} (\mathbf{Y}_S)_{ij} (\mathbf{y}_N)_{ij} + \sum_{\substack{i < j-1 \\ (j,i) \text{ no redundantes}}} (\mathbf{Y}_S)_{ji} (\mathbf{y}_N)_{ji}.$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que \mathbf{Y}_S tiene menos de dos columnas no redundantes de tipo $(\mathbf{Y}_S)_{ij}$ con $i < j - 1$. Así, distinguimos dos casos.

Si no existe una columna de este tipo, entonces todas las columnas no redundantes son del tipo $(\mathbf{Y}_S)_{ji}$ con $i < j$. En cada una de estas columnas, las filas asociadas con las variables \mathcal{L}_k , para $k \in \{2, \dots, n\}$, contienen sólo entradas no positivas, y al menos una de ellas es igual a -1 , como se puede ver en la Figura 4(d). Por tanto, para cualquier $\mathbf{y}_N \geq 0$, con $\mathbf{y}_N \neq 0$, el vector $\mathbf{Y}_S \mathbf{y}_N$ contiene al menos una entrada negativa.

Por otro lado, supongamos que existe una única columna de este tipo $(\mathbf{Y}_S)_{\bar{i}\bar{j}}$, asociada a un par (\bar{i}, \bar{j}) , con $\bar{i} < \bar{j}$. Supongamos que existe un vector $\mathbf{y}_N \geq \mathbf{0}$, con $\mathbf{y}_N \neq \mathbf{0}$, tal que $\mathbf{Y}_S \mathbf{y}_N \geq 0$. Ahora, si tomamos un par cualquiera (i, j) , con $i < j$, tal que $\mathbf{y}_{N,j,i} > 0$, entonces debe cumplirse que $i \geq \bar{i}$, y $cd(i, j) \leq ci(\bar{i}, \bar{j})$.

En efecto, sea (i, j) , con $i < j$, un par tal que $\mathbf{y}_{N,j,i} > 0$. Recordaremos que las columnas no redundantes de tipo $\mathbf{Y}_{S_{i,j}}$, con $i < j$, tienen valor 1 para las entradas \mathcal{L}_k , con $k \in \{i + 1, \dots, ci(i, j)\}$, mientras que las entradas de tipo $\mathbf{Y}_{S_{j,i}}$, con $i < j$, tienen valor -1 para las entradas \mathcal{L}_k , con $k \in \{i + 1, \dots, cd(i, j)\}$. Así, si $i < \bar{i}$, o $cd(i, j) > ci(\bar{i}, \bar{j})$, entonces existe una fila \mathcal{L}_r tal que $(\mathbf{Y}_S)_{\mathcal{L}_r,ji} = -1$ y $(\mathbf{Y}_S)_{\mathcal{L}_r,\bar{i}\bar{j}} = 0$. Esto nos indica que $(\mathbf{Y}_S \mathbf{y}_N)_{\mathcal{L}_r} < 0$, lo cual contradice que $\mathbf{Y}_S \mathbf{y}_N \geq 0$. Así, debe cumplirse que, para cualquier par (i, j) , con $i < j$, tal que $\mathbf{y}_{N,j,i} > 0$, entonces $i \geq \bar{i}$, y $cd(i, j) \leq ci(\bar{i}, \bar{j})$.

Además, debemos tener que $j < \bar{j}$. Si se tuviera que $\bar{j} \leq j$, entonces, por las propiedades estructurales de las matrices de centro, tenemos que $ci(\bar{i}, \bar{j}) \leq ci(i, j)$, pues $\bar{i} \leq i$ y $\bar{j} \leq j$. A su vez, esto también nos dice que $cd(\bar{i}, \bar{j}) \leq cd(i, j)$, por el mismo

motivo. Sin embargo, ya probamos que $cd(i, j) \leq ci(\bar{i}, \bar{j})$, y además contamos con $ci(i, j) < cd(i, j)$. Juntando estas desigualdades, tenemos que

$$ci(\bar{i}, \bar{j}) \leq ci(i, j) < cd(i, j) \leq ci(\bar{i}, \bar{j}),$$

lo cual nos lleva a una contradicción. Así, se debe cumplir que $j < \bar{j}$.

Sin embargo, recordemos que las columnas no redundantes de tipo $\mathbf{Y}_{\mathbf{S}_{i,j}}$, con $i < j$, tienen valor -1 para las entradas \mathcal{D}_k , con $k \in \{ci(i, j) + 1, \dots, j\}$, mientras que las entradas de tipo $\mathbf{Y}_{\mathbf{S}_{j,i}}$, con $i < j$, tienen valor 1 para las entradas \mathcal{D}_k , con $k \in \{cd(i, j) + 1, \dots, j\}$. Por tanto, si consideramos la fila $\mathcal{D}_{\bar{j}}$, tenemos que $(\mathbf{Y}_{\mathbf{S}})_{\mathcal{D}_{\bar{j}}, \bar{i}\bar{j}} = -1$, y $(\mathbf{Y}_{\mathbf{S}})_{\mathcal{D}_{\bar{j}}, ji} = 0$, de donde

$$(\mathbf{Y}_{\mathbf{S}} \mathbf{y}_{\mathbf{N}})_{\mathcal{D}_{\bar{j}}} = (\mathbf{Y}_{\mathbf{S}})_{\mathcal{D}_{\bar{j}}, \bar{i}\bar{j}} (\mathbf{y}_{\mathbf{N}})_{\bar{i}\bar{j}} + \sum_{i < j} (\mathbf{Y}_{\mathbf{S}})_{\mathcal{D}_{\bar{j}}, ji} (\mathbf{y}_{\mathbf{N}})_{ji} = -(\mathbf{y}_{\mathbf{N}})_{\bar{i}\bar{j}} < 0.$$

Así, $\mathbf{Y}_{\mathbf{S}} \mathbf{y}_{\mathbf{N}}$ contiene una entrada negativa.

Por lo tanto, en ambos casos, donde no hay columnas de este tipo, o existe una sola, no existe un vector $\mathbf{y}_{\mathbf{N}} \geq 0$ tal que $\mathbf{Y}_{\mathbf{S}} \mathbf{y}_{\mathbf{N}} \geq 0$. Y por el Lema 4.13, se tiene que (S, ρ) admite un dibujo válido en un caterpillar. \square

Ahora, utilizaremos este teorema, junto al Lema 4.13, para mostrar el siguiente resultado, que nos permite asegurar la existencia de dibujos válidos dependiendo de la relación entre los puntos medios de los pares i, j y sus centros izquierdos y derechos.

Teorema 4.15. *Sea (S, ρ) un espacio Robinson estricto. Si se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

- *Para todo par i, j , $ci(i, j) < \frac{i+j}{2} \leq cd(i, j)$, o bien,*
- *para todo par i, j , $ci(i, j) \leq \frac{i+j}{2} < cd(i, j)$,*

entonces (S, ρ) tiene un dibujo válido en un caterpillar.

Demostración. Sea (S, ρ) un espacio Robinson estricto. Para todo par $i < j$ denotaremos su punto medio $m_{ij} = (i + j)/2$. Sea además $\mathbf{y}_N \in \mathbb{R}^{(n-1)(n-2)}$, con $\mathbf{y}_N \geq 0$, y consideremos \mathbf{Y}_S obtenido a partir de la formulación matricial de $(LP2)(S)$. Razonando por contradicción, supondremos que (S, ρ) no tiene un dibujo válido en un caterpillar.

Ahora, consideremos un par $i < j - 1$. Si sumamos todas las filas de la columna $(\mathbf{Y}_S)_{ij}$ que corresponden a una restricción de centro izquierdo, tenemos

$$\mathbf{S}_{ij} = -(j - ci(i, j)) + (ci(i, j) - i) = 2(ci(i, j) - m_{ij}).$$

Si sumamos todas las filas $(\mathbf{Y}_S)_{ji}$ correspondiente a una restricción de centro derecho, tenemos

$$\mathbf{S}_{ji} = (j - cd(j, i)) - (cd(j, i) - i) = 2(m_{ij} - cd(j, i)).$$

Por tanto, la suma de todas las entradas de $\mathbf{Y}_S \mathbf{y}_N$ es

$$\sum_{i < j-1} (\mathbf{S}_{ij} \mathbf{y}_{Nij} + \mathbf{S}_{ji} \mathbf{y}_{Nji}) = 2 \sum_{i < j-1} ((ci(j, i) - m_{ij}) \mathbf{y}_{Nij} + (m_{ij} - cd(j, i)) \mathbf{y}_{Nji}) \quad (1)$$

Supongamos ahora que, para todo par i, j , se cumple que $ci(i, j) < \frac{i+j}{2} \leq cd(i, j)$. Esto nos dice que $ci(i, j) - m_{ij} < 0$, y $m_{ij} - cd(j, i) \leq 0$. Como supusimos que este espacio no admite un dibujo válido, la suma de las entradas de $\mathbf{Y}_S \mathbf{y}_N$ debe ser no negativa. Para que esto se cumpla, los valores \mathbf{y}_{Nij} que acompañan a $ci(i, j) - m_{ij}$ deben ser cero, o el resultado sería negativo, indicando la existencia de entradas negativas en $\mathbf{Y}_S \mathbf{y}_N$. Sin embargo, esto indica que todas las restricciones de tipo $(\mathbf{Y}_S)_{ij}$, con $i < j$, son redundantes. Así, es posible aplicar el Teorema 4.14, lo que nos indica que este espacio admite un dibujo válido, llevando a una contradicción.

Por otro lado, si para todo par i, j , se cumple que $ci(i, j) \leq \frac{i+j}{2} < cd(i, j)$, esto nos dice que $ci(i, j) - m_{ij} \leq 0$, y $m_{ij} - cd(j, i) < 0$. Nuevamente, como suponemos que este espacio no admite un dibujo válido, la suma de las entradas de $\mathbf{Y}_S \mathbf{y}_N$ debe ser no negativa, de donde, los valores \mathbf{y}_{Nji} que acompañan a $m_{ij} - cd(j, i)$ deben ser cero. Sin embargo, esto nos dice que las restricciones de tipo $(\mathbf{Y}_S)_{ji}$, con $i < j$, son redundantes. Así, es posible aplicar el Teorema 4.14, lo que nos indica que este espacio admite un dibujo válido, llevando a una contradicción.

En ambos casos, tenemos que no es posible que (S, ρ) no admita un dibujo válido en un caterpillar. Por tanto, si (S, ρ) cumple que, para todo par i, j , $ci(i, j) < \frac{i+j}{2} \leq cd(i, j)$, o bien, para todo par i, j , $ci(i, j) \leq \frac{i+j}{2} < cd(i, j)$, entonces (S, ρ) admite un dibujo válido. \square

Por otro lado, si revisitamos el análisis experimental exhaustivo realizado para $(LP2)(S)$, con la formulación provista en el Lema 4.13, podemos analizar los espacios Robinson estrictos para los cuales el programa lineal no encontró una solución. Esto nos lleva al siguiente resultado.

Teorema 4.16. *Existe un espacio Robinson que no admite un dibujo válido en ningún árbol.*

Demostración. Para este resultado, utilizaremos el espacio Robinson con la siguiente matriz de disimilitud.

$$\begin{bmatrix} 0 & 9 & 10 & 11 & 13 & 15 \\ 9 & 0 & 5 & 7 & 8 & 14 \\ 10 & 5 & 0 & 2 & 4 & 12 \\ 11 & 7 & 2 & 0 & 3 & 6 \\ 13 & 8 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 15 & 14 & 12 & 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz cuenta con la siguiente matriz de centros.

$$C(S) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Aquí, marcamos en rojo las entradas correspondientes a restricciones no redundantes.

Por tanto, nos basta con considerar sólo las columnas de $\mathbf{Y}_{\mathbf{S}}$ que estén asociadas a estas columnas no redundantes. Si denotamos por $\mathbf{Y}'_{\mathbf{S}}$ a la matriz obtenida luego de eliminar las columnas redundantes, nos queda

$$\mathbf{Y}'_{\mathbf{S}} = \begin{array}{c} \mathcal{D}_2 \\ \mathcal{D}_3 \\ \mathcal{D}_4 \\ \mathcal{D}_5 \\ \mathcal{D}_6 \\ \mathcal{L}_2 \\ \mathcal{L}_3 \\ \mathcal{L}_4 \\ \mathcal{L}_5 \\ \mathcal{L}_6 \end{array} \begin{array}{c} y_{16} \quad y_{35} \quad y_{51} \quad y_{52} \quad y_{62} \quad y_{64} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Ahora, consideremos el vector

$$\mathbf{y}'_{\mathbf{N}} = (1, 1, 1, 0, 1, 0)^{\top}.$$

Si desarrollamos la expresión $\mathbf{Y}'_{\mathbf{S}}\mathbf{y}'_{\mathbf{N}}$, obtenemos que

$$\mathbf{Y}'_{\mathbf{S}}\mathbf{y}'_{\mathbf{N}} = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^{\top},$$

el cual es un vector no nulo y no negativo. Así, el sistema (LP-S) admite una solución, y por el Lema 4.13, este espacio Robinson estricto no tiene un dibujo válido en un caterpillar. Es más, por el Corolario 4.6, no admite un dibujo válido en ningún árbol. \square

5. Conclusiones y trabajo futuro

En esta tesis mostramos que no todo espacio Robinson admite un dibujo válido en un real tree. Para ello, nos apoyamos de un programa lineal que, dado un espacio Robinson, nos permite encontrar un dibujo válido en un real tree, si existe. Esta

formulación fue luego mejorada al utilizar las nociones de matrices de centros izquierdos y derechos, que buscan capturar la estructura subyacente a los espacios Robinson, permitiendo analizar de manera más eficaz la información dada por ellos. Además, utilizando herramientas clásicas de optimización, pudimos abordar el problema de encontrar dibujos válidos como un problema de factibilidad, permitiendo descubrir estructuras en los espacios Robinson para los cuales se puede asegurar la existencia de un dibujo válido en un real tree, y también mostrar un contraejemplo que demuestra que no todo espacio Robinson admite un dibujo válido en un real tree.

A partir de los resultados encontrados en esta tesis, se han abierto más preguntas dentro de esta área. Ya que los real trees no permiten captar completamente las relaciones existentes entre elementos de un espacio Robinson, ¿en qué espacios admiten un dibujo válido? ¿Existe algún k tal que todo espacio Robinson admita un dibujo válido en \mathbb{R}^k ?

Bibliografía

- [1] Julio Aracena and Christopher Thraves Caro. The weighted sitting closer to friends than enemies problem in the line. *Journal of Combinatorial Optimization*, 45(1):9, 2023.
- [2] Rosa Becerra and Christopher Thraves Caro. On the sitting closer to friends than enemies problem in trees and an intersection model for strongly chordal graphs. *arXiv preprint arXiv:1911.11494*, 2019.
- [3] Felipe Benítez, Julio Aracena, and Christopher Thraves Caro. The sitting closer to friends than enemies problem in the circumference. *arXiv preprint arXiv:1811.02699*, 2018.
- [4] Peter Buneman. A note on the metric properties of trees. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 17(1):48–50, 1974.
- [5] Mikhael Carmona, Victor Chepoi, Guylain Naves, and Pascal Pr ea. Modules

- in Robinson spaces. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 38(1):190–224, 2024.
- [6] Marek Cygan, Marcin Pilipczuk, Michał Pilipczuk, and Jakub Onufry Woitaszczyk. Sitting closer to friends than enemies, revisited. In *Mathematical Foundations of Computer Science 2012: 37th International Symposium, MFCS 2012, Bratislava, Slovakia, August 27-31, 2012. Proceedings 37*, pages 296–307. Springer, 2012.
- [7] Stefan Forcey, Gabriela Hamerlinck, Logan Keefe, and William Sands. The minimum evolution problem in phylogenetics: Polytopes, linear programming, and interpretation. In *Algebraic and combinatorial computational biology*, pages 319–349. Elsevier, 2019.
- [8] Paul Gordan. Ueber die auflösung linearer gleichungen mit reellen coefficienten. *Mathematische Annalen*, 6(1):23–28, 1873.
- [9] Michael Hendy. The path sets of weighted partially labelled trees. *Australasian Journal of Combinatorics*, 5:277–284, 1992.
- [10] David G. Kendall. Abundance matrices and seriation in archaeology. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 17(2):104–112, 1971.
- [11] Anne-Marie Kermarrec and Christopher Thraves. Can everybody sit closer to their friends than their enemies? In Filip Murlak and Piotr Sankowski, editors, *Mathematical Foundations of Computer Science 2011*, pages 388–399, Berlin, Heidelberg, 2011. Springer Berlin Heidelberg.
- [12] Monique Laurent and Matteo Seminaroti. A Lex-BFS-based recognition algorithm for Robinsonian matrices. *Discrete Applied Mathematics*, 222:151–165, 2017.
- [13] Monique Laurent and Matteo Seminaroti. Similarity-first search: a new algorithm with application to Robinsonian matrix recognition. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 31(3):1765–1800, 2017.

- [14] Monique Laurent, Matteo Seminaroti, and Shin ichi Tanigawa. A structural characterization for certifying Robinsonian matrices. *arXiv preprint arXiv:1701.00806*, 2017.
- [15] Eduardo G. Pardo, Mauricio Soto, and Christopher Thraves. Embedding signed graphs in the line. *Journal of Combinatorial Optimization*, 29:1–21, 02 2013.
- [16] Pascal Pr ea and Dominique Fortin. An optimal algorithm to recognize Robinsonian dissimilarities. *Journal of Classification*, 31(3):351–385, 2014.
- [17] William Robinson. A method for chronologically ordering archaeological deposits. *American antiquity*, 16(4):293–301, 1951.
- [18] Quico Spaen, Christopher Thraves Caro, and Mark Velednitsky. The dimension of valid distance drawings of signed graphs. *Discrete & Computational Geometry*, 63(1):158–168, 2020.
- [19] Yin-Jing Tien, Yun-Shien Lee, Han-Ming Wu, and Chun-Houh Chen. Methods for simultaneously identifying coherent local clusters with smooth global patterns in gene expression profiles. *BMC bioinformatics*, 9:1–16, 2008.
- [20] Doron Zeilberger. Dave Robbins’ art of guessing. *Advances in Applied Mathematics*, 34(4):939–954, 2005.