



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
DIRECCIÓN DE POSTGRADO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE DOCTORADO EN CIENCIAS FÍSICAS

GRAVEDAD NEWTONIANA EN TEORÍAS DE GAUGE EXTENDIDAS

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
para optar al grado de Doctor en Ciencias Físicas.

GUSTAVO IGNACIO RUBIO GONZÁLEZ
Septiembre - 2019
Concepción – Chile

Profesor Guía: Dr. Patricio Gerardo Salgado Arias.



Ninguna parte de esta tesis puede reproducirse o transmitirse bajo ninguna forma o por ningún medio o procedimiento, sin permiso por escrito del autor.



Dedicado a mi familia.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero agradecer a mi familia que siempre ha estado a mi lado apoyándome en cada momento y en gran parte debo a ellos la persona que hoy en día soy. Quiero también agradecer a mi pareja Merybeth Inostroza y a su familia por el apoyo que me han brindado mientras realizaba esta tesis.

Agradecer a mis compañeros y amigos de la universidad de Concepción, con los cuales pude compartir durante mis años de estudio muchas alegres experiencias tanto dentro como fuera de lo académico, en especial a Alexander Smith, Alexandra Suárez, Ariana Muñoz, Cristófer Jiménez, Fabián Orellana, Fabrizio Bugini, Ignacio Ormazábal, Nicolás González, Paola Yáñez, Robinson Gómez y Sebastián Salgado.

Además deseo agradecer y destacar el trabajo como director de tesis del profesor Patricio Salgado que siempre ha sido un gran apoyo, guía y referente en mi modesto recorrido como investigador. Por otro lado enfatizar la gran persona que es, razón por la cual lo considero un amigo, siempre dispuesto a brindar un buen consejo y disponer de una infinita paciencia para con sus estudiantes.

Deseo destacar la excelente labor de los profesores que durante mis estudios tuve el agrado de conocer, en particular, a los profesores Claudio Faúndez, Fernando Izaurieta, Hernán Astudillo, Igor Kondrashuk, Joaquín Díaz de Valdés, José Aguirre, Juan Crisóstomo, Julio Oliva, Mauricio Cataldo, Myrna Sandoval, Paulraj Manidurai, Renato Saavedra, Ricardo Caroca y Samuel Lepe.

Mencionar también la labor del profesor Jaime Araneda como Director del Programa de Doctorado en Ciencias Físicas, quien siempre se muestra dispuesto a ayudar y apoyar a los estudiantes a pesar de su cargada agenda. Agradezco al profesor Luis Roa, Director del Departamento de Física, por su buena voluntad para resolver los problemas que como estudiantes se nos presentan. Agradecer a las secretarías del Departamento de Física por las innumerables veces que me han ayudado en los asuntos burocráticos que se me han presentado.

Agradezco la amabilidad con la que me trataron los profesores Bianca Cerchiai, Laura Andrianopoli, Mario Trigiane y Riccardo D'Auria durante mi estadía en el Politecnico di Torino.

Finalmente, mi dedicación exclusiva al Programa de Doctorado de la Universidad de Concepción ha sido gracias a la Beca de Doctorado Nacional de la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica CONYCYT-PCHA, Folio 21140971, periodo 2014-2018.

TABLA DE CONTENIDOS

AGRADECIMIENTOS	I
RESUMEN	IV
ABSTRACT	V
1. Introducción	1
2. Preliminares	3
2.1. Teoría de Gauge para la Gravedad	3
2.2. Gravedad en dimensiones mayores	4
2.3. Teorías Chern–Simons	6
2.3.1. Teorema de Chern–Weil	7
2.4. Álgebra diferencial libre	10
2.5. Formalismo de Dáuria–Fre	11
2.6. Formas Pontryagin–Chern y Chern–Simons–Antoniadis–Savvidy	13
2.7. S-expansión	15
2.7.1. Reducción	17
2.7.2. Resonancias	17
2.7.3. Tensores invariantes	18
2.8. Cosmología Einstein–Chern–Simons	18
2.9. Límite no relativista de la acción Einstein–Chern–Simons	20
2.10. Cosmología Newtoniana en 5 dimensiones	27
2.10.1. La ecuación del fluido	28
2.10.2. La ecuación de la aceleración	29
3. Álgebras no relativistas	30
3.1. Álgebras de Galileo generalizadas	31
4. Álgebras ultrarelativistas	34
4.1. Álgebras de Carroll generalizadas	34
5. Gravedad Chern–Simons no relativista	37
5.1. Acción Newton–Chern–Simons	37
5.2. Tensores invariantes de la acción Newton–Chern–Simons	41
5.3. Cálculo Lagrangeano Chern–Simons	44
5.3.1. Cálculo de $Q^{(5)}(A_1, A_0)$	45
5.3.2. Cálculo de $Q^{(5)}(A_2, A_1)$	45

5.4. Ecuaciones de movimiento	49
6. Cosmología Newton–Chern–Simons	53
6.1. Modelando Flúidos	53
6.2. Soluciones cosmológicas	57
6.3. Termodinámica	59
7. Acción Chern–Simons–Antoniadis–Savvidy no relativista	60
7.1. Álgebra de Galileo tipo $I \mathcal{GB}_4$	60
7.2. Acción (ChSAS) para el álgebra $\mathcal{GB}_4$	62
7.2.1. Ecuaciones de movimiento:	70
7.3. Álgebras de Galileo tipo $II \mathcal{GL}_4$	75
7.4. Acción (ChSAS) para el álgebra $\mathcal{GL}_4$	77
7.4.1. Ecuaciones de movimiento:	86
8. Teoría Mond desde gravedad (ChSAS)	90
8.1. Caso para el álgebra de Galileo tipo $I \mathcal{GB}_4$	91
8.2. Caso para el álgebra de Galileo tipo $II \mathcal{GL}_4$	92
9. Conclusiones	94
A. Cálculo duales de Hodge para la acción (CS)	95
B. Curvatura álgebra $\mathcal{GB}_4$	97
C. Curvatura álgebra $\mathcal{GL}_4$	99
D. Cálculo duales de Hogde para la acción (ChSAS)	101
Bibliografía	104



RESUMEN

En esta tesis se estudia una teoría de gravedad no relativista en cinco dimensiones, la denominada gravedad Newton–Chern–Simons, donde el sector de materia es un fluido perfecto. Además, una generalización del teorema de Chern–Weil nos permite mostrar que las acciones extendidas para gravedad Chern–Simons en $d = 4$ invariantes bajo algunos específicos grupos no relativistas nos conducen a ecuaciones de Poisson modificadas. Algunos interesantes resultados relacionados con estos tópicos son

- Las ecuaciones de campo obtenidas para la gravedad Newton–Chern–Simons en 5 dimensiones, muestran que su cosmología corresponde a una especie de análogo de la versión proyectable de la teoría de Hořava–Lifshitz en $(3 + 1)$ -dimensiones.
- Las soluciones y los límites asintóticos de las ecuaciones de movimiento son encontradas. En particular, se muestra que no hay solución de De Sitter, aunque este comportamiento se produce en un futuro lejano. Además una solución fantasma con una singularidad futura que recuerda a una singularidad futura de *Little Big Rip* es obtenida.
- En el contexto de las denominadas teorías de gauge de alto orden las acciones Chern–Simons extendidas, en algunos casos particulares, nos vinculan con el enfoque de la dinámica Newtoniana modificada (MOND) para gravedad.
- Las modificaciones a las ecuaciones de Poisson podrían entenderse como consecuencia de los efectos de la materia oscura. Este resultado podría llevarnos a pensar que la materia oscura puede interpretarse como un límite no relativista de la energía oscura.

ABSTRACT

In this thesis is studied a five-dimensional non-relativistic gravity theory the so called Newton–Chern–Simons gravity, where the matter sector is a perfect fluid. Moreover, a generalization of the Chern–Weil theorem allows us to show that extended Chern–Simons actions for gravity in $d = 4$ invariant under some specific non-relativistic groups lead to modified Poisson equations. Some interesting results related with these topics are

- The field equations for a five dimensional Newton–Chern–Simons gravity shown that its cosmology correspond a sort of analogue of the projectable version of the Hořava–Lifshitz theory in $(3 + 1)$ -dimensions.
- Solutions and the asymptotic limits of the movement equations are found. In particular, is showed that there is not De Sitter solution, although this behavior occurs in the distant future. Additionally a phantom solution with a future singularity reminiscent of a Little Big Rip future singularity is obtained.
- In the context of the so called high order gauge theories the extended Chern–Simons actions, in some particular cases, give us a link with the modified Newtonian dynamics (MOND) approach to gravity.
- The modifications to Poisson equations could be understood as a consequence of the effects of dark matter. This result could leads us to think that dark matter can be interpreted as a non-relativistic limit of dark energy.

Capítulo 1

Introducción

Recientemente el avance en el estudio de teorías de campos no relativista ha tomado interés en el contexto de la geometría de Newton–Cartan. Como es sabido las teorías de campos relativistas invariantes bajo el álgebra de Poincaré, se definen en el espacio-tiempo de Minkowski. Este *background* plano se puede convertir en una geometría curvada mediante el acoplamiento de una métrica a la teoría. Es posible comprender la geometría del límite de bajas energías del principio de equivalencia de Einstein sustituyendo el álgebra de Poincaré, por el álgebra de Galileo, o más bien su extensión central, la llamada álgebra de Bargmann, con el fin de dar cuenta de la masa. Una forma elegante de describir las geometrías no-relativistas covariantemente es a través del gaugeo de las álgebras de simetría no relativistas.

Así como la relatividad general puede ser vista como un gaugeo del álgebra de Poincaré, donde el *vielbein* y la conexión de espín se identifican como campos de gauge asociados a las traslaciones y rotaciones de Lorentz respectivamente, sin embargo, la conexión de espín no es un campo de gauge independiente, sino que depende del *vielbein*, donde esta dependencia se expresa a través de la denominada restricción de torsión. En la geometría de Newton–Cartan una estrategia similar se emplea en ausencia de torsión, para obtener el gaugeo del álgebra de Bargmann, es decir, incluyendo una extensión central al álgebra de Galileo. La inclusión de la carga central es crucial, ya que permite introducir los análogos no relativistas de la restricción de torsión que determinan como las conexiones de espín asociadas a las rotaciones espaciales y *boost* galileanos dependen de los otros campos de gauge. El gaugeo del álgebra Bargmann produce entonces una descripción libre de torsión en la geometría de Newton–Cartan en términos de *vielbein* y un campo de de carga central, que es equivalente a la formulación original de Cartan. Resumiendo, se puede decir que el espacio tiempo de Newton–Cartan son para las teorías de campo no relativistas lo que las geometrías de Riemann son para las teorías de campo relativistas.

Por otro lado el estudio de la gravedad como una teoría de gauge, donde el espacio tiempo es considerado como un objeto que posee dinámica la cual es gobernada por las ecuaciones de campo de Einstein, ha sido estudiada usando lagrangeanos escritos como formas Chern–Simons en dimensiones impares. Es posible obtener las versiones no relativistas de estas teorías dentro del marco de la gravedad de Newton–Cartan “gaugeando” las álgebras de Galileo generalizadas $\mathcal{GB}_n$ y $\mathcal{GL}_n$, encontradas a partir del álgebra de Newton–Hooke mediante el mecanismo de S-expansión, obteniendo generalizaciones de la teoría de Newton.

La presente tesis esta organizada de la siguiente manera, en el segundo capítulo se hace una revisión preliminar de conceptos necesarios para comprender el enfoque de la investigación propuesta, comenzando con el problema de la gravedad como una teoría de gauge, el cual se ha intentado resolver con la adición de dimensiones extras a las cuatros percibidas por nuestros sentidos, las tres espaciales mas la coordenada temporal. Dentro de este contexto son estudiadas teorías Chern–Simons invariantes bajo las álgebras de Poincaré generalizadas, como un buen candidato en dimensiones impares para describir la gravedad, considerando que el espacio tiempo es un ente con dinámica y hace contacto con relatividad general en un determinado límite de las constantes de acoplamiento. Además es introducido el concepto de álgebra diferencial libre lo que implica extender el principio de gauge incluyendo campos tensoriales de alto orden, lo cual nos permite encontrar acciones en dimensiones pares (en particular 4 dimensiones) análogas a teorías Chern–Simons en dimensiones impares. En el capítulo tres y cuatro se muestra la obtención de las denominadas álgebras de Galileo generalizadas y las álgebras de Carroll generalizadas respectivamente, conjeturando una posible dualidad entre estas álgebras. En el capítulo cinco será mostrado que el límite no relativista de la acción Einstein–Chern–Simons hace contacto con la ecuación de Poisson, generalizando la ley de Newton, esta acción en el límite de bajas velocidades fue denominada acción Newton–Chern–Simons, la cual es invariante bajo las álgebras de Galileo generalizadas. En el sexto capítulo son estudiadas soluciones cosmológicas para las ecuaciones de movimiento de la acción Newton–Chern–Simons al considerar un fluido perfecto, una breve revisión termodinámica también es realizada. En el capítulo siete es empleada una extensión del principio de gauge al incluir campos de gauge tensoriales, para encontrar acciones invariantes bajo álgebras de Galileo generalizadas, en este contexto son utilizadas formas invariantes cerradas similares a las formas de Pontryaguin–Chern en teorías de campos de gauge no abelianas y en particular existe un invariante de gauge independiente de la métrica en $(2n+3)$ dimensiones, lo cual nos permite construir acciones en 4 dimensiones para el caso $n=1$, denominadas acciones Chern–Simons–Antoniadis–Savvidy. En el capítulo ocho se busca conectar los resultados del capítulo anterior con la dinámica de Newton modificada (MOND), con el objetivo de interpretar la materia oscura como un límite no relativista de la energía oscura. Finalmente son expuestas las conclusiones y resultados del trabajo realizado en esta tesis.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Teoría de Gauge para la Gravedad

Uno de los grandes desafíos que enfrenta la física teórica en los días de hoy, está relacionado con la búsqueda de una teoría para la gravedad que sea compatible con la formulación del resto de las fuerzas que describen la naturaleza. La interacción electromagnética junto a las fuerzas nucleares fuerte y débil han sido descritas exitosamente por teorías de campos de Yang–Mills en el modelo estándar de la materia, por esta razón los esfuerzos por describir la gravedad como una teoría de gauge, donde el *background* es considerado como un objeto que posee dinámica.

En el formalismo de Cartan la acción de Einstein–Hilbert (EH) puede escribirse en la forma

$$S = \int \epsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d,$$

donde R^{ab} es la 2-forma curvatura de Lorentz y e^a corresponde a la 1-forma vielbein.

Dado que en este formalismo la acción es un escalar de Lorentz escrito en términos de formas diferenciales, tenemos que la acción es:

- Invariante bajo rotaciones locales de Lorentz.
- Invariante bajo transformaciones generales de coordenadas.

En principio, una teoría de gauge para la gravedad debería ser construida utilizando el grupo de isometrías del espacio de Minkowski, cuyos generadores satisfacen el álgebra

$$\begin{aligned} [J_{ab}, J_{cd}] &= \eta_{bc} J_{ad} + \eta_{ad} J_{bc} - \eta_{bd} J_{ac} - \eta_{ac} J_{bd}, \\ [J_{ab}, P_c] &= \eta_{bc} P_a - \eta_{ac} P_b, \\ [P_a, P_b] &= 0. \end{aligned}$$

Dado que $\{e^a, \omega^{ab}\}$ es un multiplete en la representación adjunta de grupo de Poincaré, podemos escribir

$$A_\mu = \frac{1}{2} \omega_\mu^{ab} J_{ab} + e_\mu^a P_a,$$

donde A_μ es el correspondiente campo de gauge.

Sin embargo, a diferencia de las teorías de Yang–Mills, ahora la acción no es invariante bajo el grupo de Poincaré.

Recordemos que bajo transformaciones de gauge

$$\begin{aligned}\delta A &= -d\Lambda - [A, \Lambda], \\ \Lambda &= \frac{1}{2}\kappa^{ab}J_{ab} + \rho^a P_a,\end{aligned}$$

- En el caso de rotaciones locales de Lorentz

$$\delta e^a = \kappa_b^a e^b, \quad \delta \omega^{ab} = D\kappa^{ab} \quad \longrightarrow \quad \delta S = 0$$

- En el caso de traslaciones locales de Poincaré

$$\delta e^a = D\rho^a, \quad \delta \omega^{ab} = 0$$

$$\delta S = 2 \int \epsilon_{abcd} R^{ab} T^c \rho^d$$

- La acción es invariante solo si imponemos la condición libre de torsión.

$$T^a = 0.$$

2.2. Gravedad en dimensiones mayores

Desde que apareció la Teoría Especial de la Relatividad, la física se enfrentó directamente con las dimensiones del espacio tiempo, nos movemos en un mundo de cuatro dimensiones, a saber, las tres dimensiones espaciales x, y, z (ancho, largo y alto) y el tiempo considerado como una cuarta dimensión. En la mecánica clásica pueden separarse estas entidades claramente, para un tiempo t fijo, la posición está totalmente determinada para cualquier suceso o acontecimiento del mundo físico. De igual forma, en una localización del espacio, un suceso o acontecimiento se produce en el instante t de forma totalmente determinista. Esto ocurre para cualquier observador, sea cual sea su estado de movimiento.

Con la aparición de las transformaciones de Lorentz, se consigue dar explicación a la paradoja que surge de la experiencia de Michelson–Morley. Estas transformaciones se deducen a partir de dos principios de la relatividad especial:

- La luz se propaga con una velocidad límite c para todos los sistemas de referencia.
- Los sistemas de referencia son equivalentes, en el sentido de que existe una perfecta reciprocidad entre sus observaciones físicas.

Donde la línea de mundo o intervalo espacio temporal $s = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$ es un invariante. La idea de este tratamiento llevó a Kaluza en 1919 y posteriormente a Klein en 1926, a generalizar la teoría de la Relatividad, construida sobre las cuatro dimensiones anteriormente mencionadas, usando un modelo geométrico en un espacio-tiempo de cinco dimensiones, es decir, introduciendo una dimensión extra, lo que les permitió unificar gravitación y campo electromagnético. Sin embargo, esta generalización presenta varias dificultades fundamentales.

Con estas cinco dimensiones Kaluza demostró que el campo gravitatorio de este universo pentadimensional se comporta exactamente como la gravedad conocida más el campo electromagnético de Maxwell, si es contemplado desde la perspectiva de las cuatro dimensiones. En los trabajos de Kaluza–Klein se considera a la quinta coordenada compacta, es decir, que está enrollada en un círculo muy pequeño con un radio del

tamaño de la escala de Planck 10^{-33} cm . La mínima distancia presumible del universo. Esta dimensión extra sería tan pequeña que no podría verse, o detectarse de forma sencilla, pero a priori sus efectos sí podrían ser cuantificados.

En la actualidad, la posibilidad de que el espacio-tiempo posea más de cuatro dimensiones es una suposición aceptada en física de altas energías. En efecto, las actuales teorías de unificación contemplan un espacio-tiempo de dimensión mucho más alta para describir las cuatros interacciones en una única teoría [?].

Al estudiar la generalización de Relatividad General a dimensiones más altas. Una de las vías posibles fue propuesta a través de la acción de Lanczos-Lovelock la cual describe la dinámica de la gravitación en términos de los mismos grados de libertad que la teoría de Einstein [5, 6, 7].

- Esta acción es formulada para teorías de gravedad en dimensiones mayores que 4, como un funcional de 1-formas e^a , ω^{ab} y sus derivadas exteriores.
- Lovelock postula que la generalización para la acción de Einstein Hilbert en $D \neq 4$ debe contener a lo más segundas derivadas de la métrica y que no incluya la torsión

$$I_D = k \int_M \sum_{p=0}^D \alpha_p L^{(p)}$$

$$L^{(p)} = \epsilon_{a_1 a_2 \dots a_D} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_D}$$

Debido a que la acción esta escrita en formas diferenciales podemos asegurar que el lagrangeano será invariante bajo transformaciones generales de coordenadas y es un invariante de Lorentz.

Así para contraer los índices de nuestro lagrangeano debemos usar los invariantes del grupo Lorentz η_{ab} y $\epsilon_{a_1 a_2 \dots a_D}$. Al extremar la acción de Lovelock con respecto a e^a y ω^{ab} módulo términos de borde.

$$\delta I_D = \int [\delta e^a \xi_a + \delta \omega^{ab} \xi_{ab}] = 0$$

Donde se tiene que

$$\xi_a = \sum_{p=0}^{\left[\frac{D-1}{2}\right]} \alpha_p (D-2p) \xi_a^{(p)} = 0$$

$$\xi_{ab} = \sum_{p=1}^{\left[\frac{D-1}{2}\right]} \alpha_p p (D-2p) \xi_{ab}^{(p)} = 0$$

y las cantidades $\xi_a^{(p)}$ y $\xi_{ab}^{(p)}$ son dadas por

$$\xi_a^{(p)} = \epsilon_{a_1 b_2 \dots b_D} R^{b_2 b_3} \dots R^{b_{2p} b_{2p+1}} e^{a_{2p+2}} \dots e^{a_D}$$

$$\xi_{ab}^{(p)} = \epsilon_{a b b_3 \dots b_D} R^{b_3 b_4} \dots R^{b_{2p-1} b_{2p}} e^{a_{2p+1}} e^{a_{2p+2}} \dots e^{a_D}$$

Notemos que diferentes elecciones de los α_p corresponden a teorías con diferente número de grados de libertad físicos.

Es posible demostrar usando la identidad de Bianchi que las ecuaciones del movimiento son compatibles con las siguientes ecuaciones de consistencia

$$\sum_{p=1}^{\left[\frac{D+1}{2}\right]} \alpha_{p-1} (D-2p+2) (D-2p+1) e^b \xi_{ab}^{(p)} = 0,$$

$$\sum_{p=1}^{\left[\frac{D-1}{2}\right]} \alpha_p p (D-2p) e^b \xi_{ba}^{(p)} = 0.$$

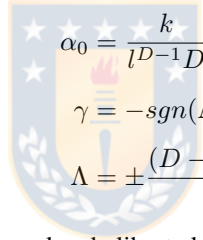
- En dimensiones impares es posible notar que ambas series tienen el mismo número de coeficientes por lo cual deben anularse uno a uno.

$$\alpha_p p (D-2p) = \gamma \alpha_{p-1} (D-2p+2) (D-2p+1).$$

- Podemos encontrar una relación de recurrencia de la forma

$$\alpha_p = \alpha_0 (2\gamma)^p \frac{(2n-1)}{(2n-2p-1)} \binom{n-1}{p}.$$

- Donde las constantes



$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{k}{l^{D-1} D} \\ \gamma &= -\text{sgn}(\Lambda) \frac{l^2}{2} \\ \Lambda &= \pm \frac{(D-1)(D-2)}{2l^2} \end{aligned}$$

- Al exigir el máximo número de grados de libertad en dimensiones impares, la acción toma la forma de la acción de Chern–Simons.
- Esta acción es cuasi invariante AdS.
- Únicamente es posible reobtener la relatividad general en el formalismo de Cartán en $D = 3$.

2.3. Teorías Chern–Simons

La Relatividad General no es una teoría de gauge debido a que el campo fundamental no es una conexión, sino un tensor métrico. Aunque en Relatividad General existe una conexión, esta no es el campo fundamental ya que, dada una métrica, la conexión de LeviCivita queda completamente determinada. El formalismo de Palatini es un intento por evitar este problema, sin embargo, no logra resolverlo. Un tipo de acción donde el campo fundamental es una conexión y no considera un *background* fijo son las teorías Chern–Simons, que bajo ciertos límites en las constantes de acoplamiento de la teoría nos conduce a la acción de Einstein–Hilbert [23, 24].

Una forma Chern–Simons es una forma diferencial que puede ser obtenida a partir del invariante topológico de Chern–Pontrjaguin. Sea $P(F)$ un polinomio invariante definido como la suma

$$P(F) = \sum_{n=0}^N \alpha_n \text{tr}(F^{n+1})$$

donde $\text{tr}(T^{I_1} \dots T^{I_{n+1}}) = g^{I_1 \dots I_{n+1}}$ corresponde a una traza simétrica invariante en el álgebra $\mathfrak{g}$.

Los polinomios invariantes son cerrados

$$dP(F) = 0$$

y por lo tanto localmente exactos

$$P(F) = d\mathcal{Q}_{2n+1}(A, F)$$

donde $\mathcal{Q}_{2n+1}(A, F)$ es la forma Chern-Simons

$$\mathcal{Q}_{2n+1}(A, F) = (n+1) \int_0^1 \text{tr}(AF_t^n) ds$$

con $A_t = tA$ y $F_t = dA_t + A_t^2$, una relación similar pero que vale globalmente es la fórmula de trasgresión que involucra dos potenciales de gauge A_0 y A_1 en la misma fibra, con curvaturas F_0 y F_1 respectivamente.

$$\text{tr}(F_1^{n+1}) - \text{tr}(F_0^{n+1}) = d\mathcal{T}_{2n+1}(A_1, A_0)$$

con la forma de trasgresión definida como

$$\mathcal{T}_{2n+1}(A_1, A_0) = (n+1) \int_0^1 dt \text{tr}((A_1 - A_0)F_t^n)$$

con $A_t = tA_1 + (1-t)A_0$ y $F_t = dA_t + A_t^2$.

En [39, 40] A. H. Chamseddine construyó acciones topológicas para gravedad en todas las dimensiones. Además fue encontrado que en dimensiones impares es posible construir acciones Chern–Simons cuasi invariantes, en donde todos los campos dinámicos son componentes de una 1-forma conexión de gauge evaluada en un álgebra de Lie, de modo que bajo una transformación de gauge off-shell gauge, el lagrangeano Chern–Simons cambia solo por una forma cerrada. En dimensiones pares fue mostrado que la gravedad topológica invariante bajo el grupo de Poincaré corresponde a un término de Wess–Zumino–Witten gaugeado, salvo una constante multiplicativa [30].

2.3.1. Teorema de Chern–Weil

Sea $P(\mathcal{G}, \mathcal{M})$ un fibrado principal dotado de una 1-forma conexión A de curvatura $F = dA + A^2$ y sea además P un polinomio $\mathcal{G}$ –invariante de grado r . Se satisface que

$$\langle F^r \rangle = P(F, \dots, F) \text{ es una forma cerrada, es decir, } d\langle F^r \rangle = 0.$$

Si F y F' son 2-formas curvaturas correspondientes a las conexiones A y A' definidas sobre $P(\mathcal{G}, \mathcal{M})$, entonces, $\langle F^r \rangle - \langle F'^r \rangle$ es una forma exacta, es decir, $\langle F^r \rangle - \langle F'^r \rangle = d\mathfrak{T}(A', A)$ es llamada forma trasgresión del polinomio $\langle F^r \rangle$ y es dada por,

$$\mathfrak{T}(A', A) = r \int_0^1 \langle (A' - A)F_t^{r-1} \rangle dt$$

donde $F_t = dA_t + A_t^2$ es la intensidad de campo interpolante correspondiente a la conexión interpolante A_t definida como $A_t = A + t(A' - A)$, con $0 \leq t \leq 1$.

Para demostrar el teorema se considera $F = A_i, \forall i$ se tiene que $p_i = 2$.

$$\begin{aligned} d\langle F^r \rangle &= \sum_{i=1}^r (-1)^{2+\dots+2} \langle F \dots F dF F \dots F \rangle \\ &= \sum_{i=1}^r \langle F \dots F dF F \dots F \rangle \end{aligned}$$

y la segunda parte del teorema, para $\psi = A$ se tiene $p = 1$, luego

$$\sum_{i=1}^r \langle F \dots F [A, F] F \dots F \rangle = 0$$

al sumar esta ecuación con la de la primera parte

$$d\langle F^r \rangle = \sum_{i=1}^r \langle F \dots F (dF + [A, F]) F \dots F \rangle = 0$$

por la identidad de Bianchi $DF = 0$.

Denotando $\theta = A' - A$ se tiene que $A_0 = A$ y $A_1 = A' = A + \theta$. La intensidad de campo correspondiente a A_t es dada por $F_t = dA_t + A_t^2$ de manera que $F_0 = F$ y $F_1 = F'$

$$\begin{aligned} \langle F^r \rangle - \langle F'^r \rangle &= \langle F_0^r \rangle - \langle F_1^r \rangle \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \langle F_t^r \rangle dt \\ &= \int_0^1 \left\langle \frac{d}{dt} F_t^r \right\rangle dt \\ &= r \int_0^1 \left\langle F_t^{r-1} \frac{dF_t}{dt} \right\rangle dt \end{aligned}$$

ya que θ es una 1-forma, se tiene $[A, \theta] = A\theta - (-1)^{1 \cdot 1} \theta A = A\theta + \theta A$,

$$\begin{aligned} F_t &= dA_t + A_t^2 \\ &= dA + t d\theta + (A + t\theta)(A + t\theta) \\ &= dA + t d\theta + A^2 + tA\theta + t\theta A + t^2 \theta^2 \\ &= F + tD\theta + t^2 \theta^2 \end{aligned}$$

por lo que $\frac{dF_t}{dt} = D\theta + 2t\theta^2$

$$\langle F^r \rangle - \langle F'^r \rangle = r \int_0^1 \langle F_t^{r-1} (D\theta + 2t\theta^2) \rangle dt$$

por otro lado de la primera parte del teorema de Chern–Weyl, para $A_1 = \theta$ y $A_i = F_t$, con $i = 2, \dots, r$, se tiene $p_1 = 1$ y $p_i = 2$.

$$\begin{aligned} d\langle \theta F_t^{r-1} \rangle &= d\langle \theta F_t \cdots F_t \rangle + \sum_{i=1}^r (-1)^{1(1+2+\cdots+2)} \langle \theta F_t \cdots F_t dF_t F_t \cdots F_t \rangle \\ &= \langle d\theta F_t^{r-1} \rangle - (r-1) \langle \theta dF_t F_t^{r-2} \rangle \end{aligned}$$

y de la segunda parte para $\psi = A$, $A_1 = \theta$ y $A_i = F_t$, con $i = 2, \dots, r$, se tiene $p = 1$, $p_1 = 1$ y $p_i = 2$.

$$\begin{aligned} \langle [A, \theta] F_t^{r-1} \rangle + \sum_{i=1}^r (-1)^{1(1+2+\cdots+2)} \langle \theta F_t \cdots F_t [A, F_t] F_t \cdots F_t \rangle &= 0 \\ \langle [A, \theta] F_t^{r-1} \rangle - \sum_{i=1}^r \langle \theta F_t \cdots F_t [A, F_t] F_t \cdots F_t \rangle &= 0 \\ \langle [A, \theta] F_t^{r-1} \rangle - (r-1) \langle \theta [A, F_t] F_t^{r-2} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

sumando luego las ecuaciones antes encontradas

$$d\langle \theta F_t^{r-1} \rangle = \langle D\theta F_t^{r-1} \rangle - (r-1) \langle \theta dF_t F_t^{r-2} \rangle$$

y dado que la diferencia entre 2 conexiones es un tensor. Además, una conexión mas un tensor define una nueva conexión, por lo que A_t determina una nueva conexión para el fibrado y le corresponde una derivada covariante $D_t F_t = 0$, por la identidad de Bianchi. Así se tiene que

$$d\langle \theta F_t^{r-1} \rangle = \langle D\theta F_t^{r-1} \rangle - t(r-1) \langle \theta [\theta, F_t] F_t^{r-2} \rangle.$$

Por último, nuevamente de la segunda parte del teorema de Chern–Weyl, para $\psi = \theta$, $A_1 = \theta$ y $A_i = F_t$, con $i = 2, \dots, r$, se tiene $p = 1$, $p_1 = 1$ y $p_i = 2$. Como θ es 1-forma $[\theta, \theta] = 2\theta^2$, luego,

$$\begin{aligned} 2\langle \theta^2 F_t^{r-1} \rangle + \sum_{i=1}^r (-1)^{1(1+2+\cdots+2)} \langle \theta F_t \cdots F_t [\theta, F_t] F_t \cdots F_t \rangle &= 0 \\ 2\langle \theta^2 F_t^{r-1} \rangle - (r-1) \langle \theta [\theta, F_t] F_t^{r-2} \rangle &= 0 \\ 2t\langle \theta^2 F_t^{r-1} \rangle - t(r-1) \langle \theta [\theta, F_t] F_t^{r-2} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

así sumando nuevamente las ecuaciones obtenemos que

$$d\langle \theta F_t^{r-1} \rangle = \langle (D\theta + 2t\theta^2) F_t^{r-1} \rangle.$$

Para finalmente reemplazar este resultado en $\langle F^r \rangle - \langle F'^r \rangle$

$$\begin{aligned} \langle F^r \rangle - \langle F'^r \rangle &= r \int_0^1 d\langle \theta F_t^{r-1} \rangle dt \\ &= d \left(r \int_0^1 \langle \theta F_t^{r-1} \rangle dt \right). \end{aligned}$$

2.4. Álgebra diferencial libre

Como punto de partida para introducir el concepto de álgebra diferencial libre, se analizarán las ecuaciones de Maurer–Cartan. Estas ecuaciones corresponden a la formulación dual de un álgebra de Lie. Dado un grupo de Lie $\mathcal{G}$, su correspondiente álgebra de Lie está definida en el espacio tangente a la identidad de la variedad del grupo. Si $\{T_a\}_{a=1}^{\dim \mathcal{G}}$ es base del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, entonces los generadores T_a satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$[T_a, T_b] = C_{ab}^c T_c, \quad (2.1)$$

donde los coeficientes C_{ab}^c corresponden a las constante de estructura del álgebra y deben satisfacer la identidad de Jacobi, es decir,

$$[T_a, [T_b, T_c]] + [T_c, [T_a, T_b]] + [T_b, [T_c, T_a]] = 0, \quad (2.2)$$

Sea $g(x) = \exp(x^a T_a) \in \mathcal{G}$ un elemento del grupo, por lo que la 1-forma invariante izquierda vendrá dada por

$$\omega(x) = g^{-1} dg(x), \quad (2.3)$$

y pertenece al álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, por lo que puede ser escrita en la base

$$\omega(x) = \omega^a T_a, \quad (2.4)$$

el conjunto de 1-formas $\omega(x)$ genera una base cotangente sobre $\mathfrak{g}$. Así podemos usar esta base de 1-formas $\{\omega^a\}_{a=1}^{\dim \mathcal{G}}$ en vez del espacio tangente, que satisfacen la siguiente propiedad, $\omega^a T_a = \delta_b^a$, por lo que los elementos de la base dual satisfacen las ecuaciones de Maurer–Cartan

$$d\omega^a + \frac{1}{2} C_{bc}^a \omega^b \omega^c = 0, \quad (2.5)$$

la identidad de Jacobi puede ser obtenida desde $d^2 = 0$ y la ecuación de Maurer–Cartan. Al tomar la derivada exterior de (2.5)

$$d^2 \omega^a = -\frac{1}{2} C_{bc}^a C_{ef}^b \omega^e \omega^f \omega^c = 0. \quad (2.6)$$

Aunque ambas descripciones de un álgebra de Lie son equivalentes, las álgebras duales tienen la ventaja que poder ser extendidas para el caso de p -formas, con $p > 1$. A partir de esta generalización es posible introducir el concepto de álgebra diferencial libre. Es importante poner énfasis en el hecho de que la 2-forma curvatura al ser escrita en términos de los campos de gauge A^a asociados a los generadores del álgebra de Lie T_a ,

$$F = dA + \frac{1}{2} [A, A], \quad (2.7)$$

$$F^a = dA^a + \frac{1}{2} C_{bc}^a [A^b, A^c], \quad (2.8)$$

se observa que cuando la 2-forma curvatura es nula la ecuación (2.8) corresponde a la ecuación de Maurer–Cartan escrita en términos de los campos de gauge.

Las álgebras diferenciales libres generalizan el concepto de álgebra de Lie, donde las ecuaciones de Maurer–Cartan se satisfacen para p -formas, [50, 51].

Sea $\mathcal{M}$ una variedad arbitraria y $\{\Theta^{A_1(p_1)}, \Theta^{A_1(p_1)}, \dots, \Theta^{A_n(p_n)}\}$ un conjunto base de formas exteriores definidas sobre $\mathcal{M}$, rotuladas por un índice A y el grado p de las formas, el cual puede variar para diferentes valores de A . Así cada índice puede tomar valores $p_i = 0, 1, \dots, N$ con $i = 0, 1, \dots, n$.

La derivada exterior de $d\Theta^{A(p)}$ puede ser expresada como una combinación lineal de los elementos de la base, por lo que la ecuación de Maurer–Cartan es generalizada en la forma

$$d\Theta^{A(p)} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} C_{B_1(p_1)\dots B_n(p_n)}^{A(p)} \Theta^{B_1(p_1)} \wedge \dots \wedge \Theta^{B_n(p_n)} = 0 \quad (2.9)$$

con $C_{B_1(p_1)\dots B_n(p_n)}$ las constantes de estructura generalizadas. El valor de $N = p_{max} + 1$, siendo p_{max} es el grado máximo en el conjunto $\{\Theta^{A(p)}\}$. La simetría de las constantes de estructura $C_{B_1(p_1)\dots B_n(p_n)}$ es dada por la regla de permutación de las formas $\{\Theta^{A(p)}\}$ en el producto cuña y son distintas de cero si se satisface

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = p + 1.$$

Las condiciones de integrabilidad son obtenidas de $d^2\Theta^{A(p)} = 0$ y la ecuación de Maurer–Cartan (2.9)

$$d^2\Theta^{A(p)} + d\left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} C_{B_1(p_1)\dots B_n(p_n)}^{A(p)} \Theta^{B_1(p_1)} \wedge \dots \wedge \Theta^{B_n(p_n)}\right) = 0, \quad (2.10)$$

por lo que

$$\left(\sum_{n=1}^N C_{B_1(p_1)\dots B_n(p_n)}^{A(p)} d\Theta^{B_1(p_1)} \wedge \dots \wedge \Theta^{B_n(p_n)}\right) = 0, \quad (2.11)$$

pero de (2.9) podemos escribir

$$d\Theta^{B_1(p_1)} = - \sum_{m=1}^N \frac{1}{m} C_{D_1(p_1)\dots D_m(p_m)}^{B_1(p_1)} \Theta^{D_1(p_1)} \wedge \dots \wedge \Theta^{D_m(p_m)}, \quad (2.12)$$

si usamos (2.11) y (2.12)

$$\sum_{n,m=1}^N \frac{1}{m} C_{B_1(p_1)\dots B_n(p_n)}^{A(p)} C_{B_1(p_1)\dots B_n(p_n)}^{A(p)} \Theta^{D_1(p_1)} \wedge \dots \wedge \Theta^{D_m(p_m)} \wedge \Theta^{B_2(p_2)} \wedge \dots \wedge \Theta^{B_n(p_n)} = 0. \quad (2.13)$$

Así la ecuación de Jacobi generalizada es dada por (2.13). Si un conjunto de formas exteriores $\{\Theta^{A(p)}\}$ sobre $\mathcal{M}$, donde $\{\Theta^{A(p)}\}$ satisface la ecuación de Maurer–Cartan y las constantes de estructura cumplen la ecuación de Jacobi generalizada, entonces, las ecuaciones (2.9) y (2.13) definen un álgebra diferencial libre.

Un álgebra de Lie ordinaria puede ser obtenida desde una álgebra diferencial libre para el caso donde todas las formas $\{\Theta^{A(p)}\}$ tienen el grado $p = 1$.

$$d\Theta^{A(1)} + \frac{1}{2} C_{B_1(1)B_2(1)}^{A(1)} \Theta^{B_1(1)} \Theta^{B_2(1)} = 0. \quad (2.14)$$

La identidad de Jacobi generalizada toma la forma usual para un álgebra de Lie

$$\frac{1}{2} C_{B_1(1)B_2(1)}^{A(1)} C_{D_1(1)D_2(1)}^{B_1(1)} \Theta^{D_1(1)} \Theta^{D_2(1)} \Theta^{B_2(1)} = 0. \quad (2.15)$$

2.5. Formalismo de Dáuria–Fre

Al gaugear las álgebras diferenciales libres podemos considerar las curvaturas F^a y $F^{A(p+1)}$ como el lado izquierdo de las ecuaciones (2.5) y (2.14) respectivamente, por lo que las p -formas tendrían curvatura nula. En el caso de un álgebra de Lie usual podríamos pensar que esto corresponde a una variedad “rígida” del grupo $\mathcal{G} = \exp \mathfrak{g}$. Una teoría dinámica de las p -formas de un álgebra diferencial libre puede ser

construida relajando las condiciones $F^a = 0$, $F^{A(p+1)} = 0$, es decir, considerando que los potenciales A^a , $A^{A(p)}$ tienen curvatura no nula. En ese caso, los potenciales A^a forman una base cotangente en una variedad “blanda” que puede ser interpretada como una deformación de la variedad original.

Como vimos en (2.8) es conveniente utilizar las ecuaciones de Maurer–Cartan para describir un álgebra, ya que solo debemos reemplazar las formas ω^a por un campo potencial de gauge A^a para tener la ecuación de la curvatura, la identidad de Bianchi será dada en este formalismo por

$$DF^a = dF^a + \frac{1}{2}C_{bc}^a A^b F^c = 0. \quad (2.16)$$

Al extender estos conceptos al caso de las álgebras diferenciales libres, se tiene

$$F^{A(p+1)} = dA^{A(p)} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} C_{B_1(p_1)\dots B_n(p_n)}^{A(p)} A^{B_1(p_1)} \wedge \dots \wedge A^{B_n(p_n)} = 0. \quad (2.17)$$

Donde el conjunto de potenciales $\{A^{B_1(p_1)}, \dots, A^{B_n(p_n)}\}$ es rotulado por el índice B_i con $i = 0, \dots, n$ y el grado $p = 1, \dots, n$ de la forma.

La respectiva identidad Bianchi generalizada para estos potenciales es dada por

$$\begin{aligned} DF^{A(p+1)} &= dF^{A(p+1)} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} C_{B_1(p_1+1)\dots B_n(p_n)}^{A(p)} F^{B_1(p_1)} \wedge A^{B_2(p_2)} \wedge \dots \wedge A^{B_n(p_n)} + \dots \\ &+ (-1)^{p_1+\dots+p_{n-1}} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} C_{B_1(p_1)\dots B_n(p_n)}^{A(p)} A^{B_1(p_1)} \wedge \dots \wedge A^{B_{n-1}(p_{n-1})} F^{B_n(p_n)} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ahora, si $H^{A(p+1)}$ es un conjunto de $(p+1)$ -formas, entonces la combinación

$$\begin{aligned} \nabla H^{A(p+1)} &= H^{A(p+1)} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} C_{B_1(p_1)\dots B_n(p_n)}^{A(p)} H^{B_1(p_1+1)} \wedge A^{B_2(p_2)} \wedge \dots \wedge A^{B_n(p_n)} + \dots \\ &+ (-1)^{p_1+\dots+p_{n-1}} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} C_{B_1(p_1)\dots B_n(p_n)}^{A(p)} A^{B_1(p_1)} \wedge \dots \wedge A^{B_{n-1}(p_{n-1})} H^{B_n(p_n)}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

es llamada derivada covariante adjunta de $H^{A(p+1)}$. Con la definición anterior la identidad de Bianchi establece que la derivada covariante adjunta de la curvatura es nula de la misma manera que sucede con los grupos ordinarios.

Para que la variedad $\mathcal{M}$ sea la un grupo de Lie usual, las ecuaciones de Maurer–Cartan generalizadas deben poder escribirse como las de un álgebra de Lie ordinaria. Esto quiere decir que la variedad $\mathcal{M}$ debe tener una dimensión mínima $d = \dim\{\mathcal{M}\}$ y debe admitir las formas potenciales $A^{(p)}$ y que además una base $T(\mathcal{M})$ de vectores tangentes invariantes izquierdos de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, que verifiquen las relaciones de conmutación

$$[T_a, T_b] = C_{ab}^c T_c, \quad (2.20)$$

también es necesario que $\Theta^{A(p)}$ al actuar sobre una combinación de p vectores tangentes T_a , resulte en una constante $K_{a_1, \dots, a_p}^{A(p)}$

$$\Theta^{A(p)}(T_{a_1}, \dots, T_{a_p}) = \frac{1}{p} K_{a_1, \dots, a_p}^{A(p)}, \quad (2.21)$$

al considerar la representación dual se tiene

$$\Theta^{A(p)} = \frac{1}{p} K_{a_1, \dots, a_p}^{A(p)} \omega^{a_1} \wedge \dots \wedge \omega^{a_p}, \quad (2.22)$$

ahora diferenciando esta ecuación

$$d\Theta^{A(p)} = K_{a_1, \dots, a_p}^{A(p)} d\omega^{a_1} \wedge \dots \wedge \omega^{a_p}, \quad (2.23)$$

podemos utilizar la ecuación de Maurer–Cartan (2.5)

$$d\Theta^{A(p)} = K_{a_1, \dots, a_p}^{A(p)} C_{bc}^{a_1} \omega^b \wedge \omega^c \wedge \omega^{a_2} \wedge \dots \wedge \omega^{a_p}, \quad (2.24)$$

comparando con (2.5) al escribir en términos de la base $\{\Theta^{A(p)}\}$, es posible identificar los potenciales del álgebra diferencial libre en términos de los potenciales del álgebra de Lie [38],

$$\Theta^{B_1(p_1)} = \frac{1}{p_1} K_{b_1^1, \dots, b_{p_1}^1}^{B_1(p_1)} \omega^{b_1^1} \wedge \dots \wedge \omega^{b_{p_1}^1}, \quad (2.25)$$

$$\Theta^{B_n(p_n)} = \frac{1}{p_n} K_{b_1^n, \dots, b_{p_n}^n}^{B_n(p_n)} \omega^{b_1^n} \wedge \dots \wedge \omega^{b_{p_n}^n} \quad (2.26)$$

2.6. Formas Pontryagin–Chern y Chern–Simons–Antoniadis–Savvidy

En Refs. [31, 32, 33, 34] es propuesta una extensión del principio de gauge, la cual incluye campos de gauge tensoriales. En esta extensión de la teoría de de Yang Mills, el vector de gauge bosónico es reemplazado por una familia de campos de gauge de alto orden. Para formular esta construcción, se debe primero considerar una 1-forma conexión de gauge evaluada en el álgebra de Lie.

$$A_1 = A = A_\mu dx^\mu = A_\mu^a T_a dx^\mu,$$

y una 2-forma potencial de gauge

$$A_2 = B = \frac{1}{2} B_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = B_{\mu\nu}^a T_a dx^\mu dx^\nu,$$

con sus correspondientes 2-forma y 3-forma curvaturas de gauge.

$$\begin{aligned} F_1 &= F = F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = DA = dA + A^2, \\ F_2 &= H = H_{\mu\nu\lambda} dx^\mu dx^\nu dx^\lambda = DB = dB + [A, B], \end{aligned}$$

las cuales deben satisfacer las identidades de Bianchi

$$\begin{aligned} DF &= 0, \\ DH + [B, F] &= 0. \end{aligned}$$

La correspondientes transformaciones infinitesimales de los campos son definidas como

$$\begin{aligned}\delta A &= D\xi_0, \\ \delta B &= D\xi_1 + [B, \xi_0]\end{aligned}$$

donde $\xi_0 = \xi^a T_a$ y $\xi_1 = \xi_\mu^a T_a dx^\mu$ son una 0-forma y una 1-forma parámetros de gauge respectivamente. Bajo estas transformaciones de gauge, las curvaturas cambian como

$$\begin{aligned}\delta F &= D(\delta A), \\ \delta H &= D(\delta B) + [\delta A, B].\end{aligned}$$

Además en Refs. [31, 32, 33, 34] fueron encontradas algunas formas invariantes cerradas, similares a las formas de Pontryaguin–Chern en teorías de gauge no abelianas. En particular, fue encontrado que existe un invariante de gauge independiente de la métrica en $2n + 3$ dimensiones

$$\Gamma_{2n+3} = \langle F^n H \rangle.$$

Aquí, Γ_{2n+3} es una forma cerrada

$$d\Gamma_{2n+3} = d\langle F^n H \rangle = 0.$$

Entonces, por significado de el lema de Poincaré, Γ_{2n+3} puede ser escrita localmente como una derivada exterior de una $2n + 2$ forma

$$\Gamma_{2n+3} = d\sigma_{2n+2},$$

donde σ_{2n+2} es identificado como una forma Chern–Simons (CS) la cual es llamada forma Chern–Simons–Antoniadis–Savvidy (ChSAS). La variación de Γ_{2n+3} es dada por

$$\delta\Gamma_{2n+3} = d\langle \delta A F^{n-1} H + \dots + F^{n-1} \delta A H + F^n \delta B \rangle. \quad (2.27)$$

Si nosotros introducimos una familia de parámetros homotópicos t , $0 \leq t \leq 1$, la parametrización de los campos de gauge extendidos y sus curvaturas, son dadas por la siguientes expresiones

$$\begin{aligned}A_t &= tA, & F_t &= t dA + t^2 A^2, \\ B_t &= tB, & H_t &= t dB + t^2 [A, B],\end{aligned}$$

la variación (2.27) con respecto a los parámetros homotópicos es dada por

$$\delta \langle F_t^n H_t \rangle = d\langle \delta A_t F_t^{n-1} H_t + \dots + F_t^{n-1} \delta A_t H + F_t^n \delta B_t \rangle.$$

Aquí, $\delta = (\partial/\partial t)\delta t$, so

$$\delta A_t = A\delta, \quad \delta B_t = B\delta t.$$

Entonces, la $2n + 2$ forma (ChSAS) llega a

$$\sigma_{2n+2}(A, B) = \int_0^1 dt \langle \delta A_t F_t^{n-1} H_t + \dots + F_t^{n-1} \delta A_t H + F_t^n \delta B_t \rangle. \quad (2.28)$$

Desde (2.28) nosotros podemos ver que para $n = 1$

$$\sigma_4 = \int_0^1 dt \langle A H_t + F_t B \rangle = \langle F B \rangle. \quad (2.29)$$

Esta acción 4-dimensional es análoga a la acción (CS) 3-dimensional Ref. [35].

La idea de extender los campos de Yang–Mills a tensores de gauge de alto orden fue usada para construir invariantes de gauge y formas independientes de la métrica en altas dimensiones. Estas formas son análogas a las formas Pontryagin–Chern en la teoría de Yang–Mills y son dadas por,

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{2n+3} &= \langle F^n, F_3 \rangle = d\mathfrak{C}_{\text{ChSAS}}^{(2n+2)}, \\
 \Gamma_{2n+4} &= \langle F^n, F_4 \rangle = d\mathfrak{C}_{\text{ChSAS}}^{(2n+3)}, \\
 \Xi_{2n+6} &= \langle F^n, F_6 \rangle + n\langle F^{n-1}, F_4^2 \rangle = d\mathfrak{C}_{\text{ChSAS}}^{(2n+5)}, \\
 \Upsilon_{2n+8} &= \langle F^n, F_8 \rangle + 3n\langle F^{n-1}, F_4, F_6 \rangle + n(n-1)\langle F^{n-2}, F_4^3 \rangle = d\mathfrak{C}_{\text{ChSAS}}^{(2n+7)},
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

donde F_3, F_4, F_6, F_8 son los tensores de fuerza de campo, para los potenciales de gauge A_2, A_3, A_5 , y A_7 respectivamente, y donde $\mathfrak{C}_{\text{ChSAS}}^{(2n+2)}, \mathfrak{C}_{\text{ChSAS}}^{(2n+3)}, \mathfrak{C}_{\text{ChSAS}}^{(2n+5)}, \mathfrak{C}_{\text{ChSAS}}^{(2n+7)}$ son las correspondientes formas Chern–Simons–Antoniads Savvidy (ChSAS), las cuales son dadas por,

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{C}_{\text{ChSAS}}^{(2n+2)} &= \langle F^n, A_2 \rangle + d\varphi_{2n+1}, \\
 \mathfrak{C}_{\text{ChSAS}}^{(2n+3)} &= \langle F^n, A_3 \rangle + d\varphi_{2n+2}, \\
 \mathfrak{C}_{\text{ChSAS}}^{(2n+5)} &= \langle F^n, A_5 \rangle + n\langle F^{n-1}, F_4, A_3 \rangle, \\
 \mathfrak{C}_{\text{ChSAS}}^{(2n+7)} &= \langle F^n, A_7 \rangle + n(n-1)\langle F_4, F_4, A_3, F^{n-2} \rangle + n\langle F_6, A_3, F^{n-1} \rangle + 2n\langle F_4, A_5, F^{n-1} \rangle
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

En Ref. [42] fue mostrado que los invariantes (ChSAS) encontrados en Refs. [32, 33, 34] pueden ser contruidos desde una estructura algebraica conocida como álgebra diferencial libre ó (FDA) por sus siglas en inglés. Además fue estudiada la relación que existe entre la gravedad topológica en dimensiones pares de Chamseddine [39] y un caso particular de teorías (ChSAS).

2.7. S-expansión

Es posible obtener nuevas álgebras a partir de un álgebra conocida, a través de métodos de contracción, deformación y extensión de álgebras. El ejemplo mas conocido de contracción corresponde al de tomar el límite no relativista de un álgebra, haciendo tender la velocidad de la luz al infinito, como es el caso del álgebra de Poincaré, que luego de reescalar algunos de sus generadores se obtiene el álgebra de Galileo. En el caso del las deformaciones tenemos el camino inverso, como ejemplo, a partir del álgebra de Galileo es posible obtener el álgebra de Poincaré. Finalmente las extensiones consisten en agregar a un álgebra $\mathfrak{g}$ otra álgebra $\mathfrak{e}$, donde el álgebra obtenida $\tilde{\mathfrak{g}}$ contiene a $\mathfrak{e}$ como un ideal, $\tilde{\mathfrak{g}}/\mathfrak{e} = \mathfrak{g}$, por lo que la dimensión de la nueva álgebra corresponde a la suma de los generadores de ambas álgebras, $\dim \tilde{\mathfrak{g}} = \dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{e}$. Podemos observar que los tres métodos antes mencionado, nos entregan nuevas álgebras, pero estas conservan la dimensión de las álgebras de la cuales provienen.

Hatsuda y Sakaguchi crearon un mecanismo para obtener nuevas álgebras de dimensión mayor a partir de un álgebra $\mathfrak{g}$, el cual consiste en considerar el álgebra $\mathfrak{g}$ descrita por las formas de Maurer–Cartan (MC) sobre la variedad de su grupo asociado G , para luego reescalar algunos parámetros del grupo por un factor λ , y así expandir las formas de (MC) como series de potencia sobre el parámetro λ . Este procedimiento es conocido como el método de expansión en serie de potencias [9].

En el método de S-expansión de álgebras está basado en operar directamente sobre los generadores del álgebra, a través del producto directo de una representación de un semigrupo dado y los generadores del álgebra de Lie. El álgebra obtenida es conocida como álgebra S-expandida y en general posee una dimensión mayor que la del álgebra original. Además existe además una formulación dual del método de S-expansión [11] el cual permite estudiar el procedimiento de la S-expansión en el contexto de la variedad del grupo.

Una breve descripción del método será presentada a continuación.

- Se considera un semigrupo finito abeliano $S = \{\lambda_\alpha\}$
- Se considera un álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \{T_A\}$, con $A, B, \dots = 1, \dots, N$ y con relaciones de conmutación $[T_A, T_B] = C_{AB}^C T_C$
- Se toma el producto directo $S \times \{T_A\} = \{\lambda_\alpha \times T_A\} = \{T_{(A,\alpha)}\}$
- Se define la operación binaria (conmutador de Lie) $[T_{(A,\alpha)}, T_{(B,\beta)}] \equiv \lambda_\alpha \lambda_\beta \times [T_A, T_B]$

Se considera un semigrupo finito $S = \{\lambda_\alpha\}$, con $\alpha = 0, \dots, n-1$:

- Clausura: $\lambda_\alpha \lambda_\beta = \lambda_{\rho(\alpha,\beta)}$
- Asociatividad: $(\lambda_\alpha \lambda_\beta) \lambda_\gamma = \lambda_\alpha (\lambda_\beta \lambda_\gamma) = \lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda_\gamma$

En alguna representación: $\lambda_\alpha \lambda_\beta = K_{\alpha\beta}^\gamma \lambda_\gamma$, donde

$$K_{\alpha\beta}^\gamma = \begin{cases} 1, & \text{si } \gamma = \rho(\alpha, \beta) \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

Observaciones para el caso general:

- $\lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda_\gamma = K_{\alpha\beta\gamma}^\delta \lambda_\delta$
- $K_{\alpha\beta\gamma}^\delta = K_{\alpha\beta}^\epsilon K_{\epsilon\gamma}^\delta$, abeliano $\rightarrow$ totalmente simétrico
- $\lambda_{\alpha_1} \cdots \lambda_{\alpha_r} = K_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^\beta \lambda_\beta$
- $K_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^\beta = K_{\alpha_1 \dots \alpha_{r-1}}^\gamma K_{\gamma \alpha_r}^\beta = K_{\alpha_1 \gamma}^\beta K_{\alpha_2 \dots \alpha_r}^\gamma$

Entonces, $\{T_{(A,\alpha)}\}$ junto con la operación binaria es un álgebra de Lie con relaciones de conmutación

$$[T_{(A,\alpha)}, T_{(B,\beta)}] = C_{(A,\alpha)(B,\beta)}^{(C,\gamma)} T_{(C,\gamma)},$$

donde $C_{(A,\alpha)(B,\beta)}^{(C,\gamma)} \equiv K_{\alpha\beta}^\gamma C_{AB}^C$, i.e.:

- Antisimetría: $C_{((A,\alpha)(B,\beta))}^{(C,\gamma)} = 0$
- Identidad de Jacobi: $C_{((A,\alpha)(B,\beta))}^{(C,\gamma)} C_{((C,\gamma)(D,\delta))}^{(E,\epsilon)} = 0$

El álgebra de Lie obtenida es denotada por $S \times \mathfrak{g}$ y es denominada como álgebra S-expandida.

- $\dim S \times \mathfrak{g} = nN$

2.7.1. Reducción

Se considera un semigrupo de la forma

$$S = \{\lambda_0, \dots, \lambda_{n-2}, 0_S\},$$

donde 0_S satisface la propiedad $\lambda_\alpha 0_S = 0_S \lambda_\alpha = 0_S$.

Las constantes de estructura

$$C_{(A,i)(B,j)}^{(C,k)} \equiv K_{ij}^k C_{AB}^C, \quad i, j, \dots = 0, \dots, n-2,$$

forman por ellas mismas un álgebra de Lie.

Se denota esta álgebra de Lie por $(S \times \mathfrak{g})_{0_S}$ y es denominada como álgebra S -expandida 0_S -reducida.

- $\dim (S \times \mathfrak{g})_{0_S} = (n-1)N$

2.7.2. Resonancias

Un álgebra $\mathfrak{g} = V_0 \oplus V_1$ puede tener una particular estructura de subespacios, por ejemplo:

$$[V_0, V_0] \subset V_0, \quad [V_0, V_1] \subset V_1, \quad [V_1, V_1] \subset 0.$$

En general, para $\mathfrak{g} = \bigoplus_{p \in I} V_p$ se tiene

$$[V_p, V_q] \subset \bigoplus_{r \in i_{(p,q)}} V_r$$

donde

$$I = \{0, 1, 2, \dots\}, \quad i_{(p,q)} \subset I.$$

Se considera una partición del semigrupo como $S = \bigcup_{p \in I} S_p$, tal que

$$S_p \times S_q \subset \bigcap_{r \in i_{(p,q)}} S_r.$$

Si existe esta partición se dice que el semigrupo y el álgebra se encuentran en resonancia. Por lo que ahora la resonancia $\bigoplus_{p \in I} S_p \times V_p$ es también un álgebra de Lie. Nosotros denotamos esta nueva álgebra como $(S \times \mathfrak{g})_{\mathcal{R}}$ y es llamada álgebra resonante S -expandida.

- $(S \times \mathfrak{g})_{\mathcal{R}}$ es una subálgebra de $S \times \mathfrak{g}$.
- La resonancia depende del semigrupo usado en la S -expansión.
- $\dim (S \times \mathfrak{g})_{\mathcal{R}}$ depende de la resonancia.
- $(S \times \mathfrak{g})_{\mathcal{R}, 0_S}$ es también un álgebra de Lie.

2.7.3. Tensores invariantes

Sea $\langle T_{A_1} \cdots T_{A_r} \rangle$ un tensor invariante para $\mathfrak{g}$. De manera que el tensor invariante para un álgebra S -expandida vendrá dado en función del k -selector, es decir,

$$\langle T_{(A_1, \alpha_1)} \cdots T_{(A_r, \alpha_r)} \rangle = a_\alpha K_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^\alpha \langle T_{A_1} \cdots T_{A_r} \rangle$$

es el tensor invariante para $S \times \mathfrak{g}$, donde a_α son constantes arbitrarias.

Para $(S \times \mathfrak{g})_{0_S}$ se tiene que

$$\langle T_{(A_1, i_1)} \cdots T_{(A_r, i_r)} \rangle = a_\alpha K_{i_1 \dots i_r}^\alpha \langle T_{A_1} \cdots T_{A_r} \rangle$$

Para $(S \times \mathfrak{g})_{\mathcal{R}}$ se tiene que

$$\langle T_{(a_{p_1}, \alpha_{p_1})} \cdots T_{(a_{p_r}, \alpha_{p_r})} \rangle = a_\alpha K_{\alpha_{p_1} \dots \alpha_{p_r}}^\alpha \langle T_{a_{p_1}} \cdots T_{a_{p_r}} \rangle,$$

con $\{T_{(a_p, \alpha_p)}\} = S_p \times V_p$.

Para $(S \times \mathfrak{g})_{\mathcal{R}, 0_S}$ se tiene que

$$\langle T_{(a_{p_1}, i_{p_1})} \cdots T_{(a_{p_r}, i_{p_r})} \rangle = a_\alpha K_{i_{p_1} \dots i_{p_r}}^\alpha \langle T_{a_{p_1}} \cdots T_{a_{p_r}} \rangle$$

con $\{T_{(a_p, i_p)}\} = S_p/0_S \times V_p$.

2.8. Cosmología Einstein–Chern–Simons

En [1, 2] fue estudiada una gravedad en cinco dimensiones cuya acción esta compuesta por un sector gravitacional y un sector de materia, el sector de materia corresponde a una particular acción Chern–Simons [23] que bajo ciertos límites desemboca en el término de Einstein–Hilbert. El sector de materia es descrito por un fluido perfecto.

El mencionado lagrangeano Chern–Simons es invariante bajo la denominada álgebra $\mathfrak{B}_5$ cuyos generadores $\{J_{ab}, P_a, Z_{ab}, Z_a\}$ satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [J_{ab}, J_{cd}] &= \eta_{bc} J_{ad} + \eta_{ad} J_{bc} - \eta_{ac} J_{bd} - \eta_{bd} J_{ac} \\ [J_{ab}, P_c] &= \eta_{bc} P_a - \eta_{ac} P_b \\ [P_a, P_b] &= Z_{ab} \\ [J_{ab}, Z_{cd}] &= \eta_{bc} Z_{ad} + \eta_{ad} Z_{bc} - \eta_{ac} Z_{bd} - \eta_{bd} Z_{ac} \\ [J_{ab}, Z_c] &= \eta_{bc} Z_a - \eta_{ac} Z_b \\ [Z_{ab}, P_c] &= \eta_{bc} Z_a - \eta_{ac} Z_b \end{aligned} \tag{2.32}$$

El lagrangeano es construido desde la 1-forma conexión de gauge

$$A = \frac{1}{2} \omega^{ab} J_{ab} + \frac{1}{l} e^a P_a + \frac{1}{2} k^{ab} Z_{ab} + \frac{1}{l} h^a Z_a, \tag{2.33}$$

y la 2-forma curvatura

$$F = \frac{1}{2} R^{ab} J_{ab} + \frac{1}{l} T^a P_a + \frac{1}{2} K^{ab} Z_{ab} + \frac{1}{l} H^a Z_a, \tag{2.34}$$

donde $T^a = D_\omega e^a$, $R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega_c^a \omega^{cb}$, $H^a = D_\omega h^a + k_b^a e^b$, $K^{ab} = D_\omega k^{ab} + \frac{1}{l^2} e^a e^b$, son las correspondientes curvaturas. En efecto, usando la fórmula de homotopía extendida de Cartan [8] y al integrar por partes, se encuentra que el lagrangeano Chern–Simons para el álgebra $\mathfrak{B}_5$ es dada por [2]

$$\begin{aligned} L_{\text{CS}}^{(5)} &= \alpha_1 l^2 \epsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} e^e + \alpha_3 \epsilon_{abcde} \left(\frac{2}{3} R^{ab} e^c e^d e^e + 2l^2 k^{ab} R^{cd} T^e + l^2 R^{ab} R^{cd} h^e \right) \\ &\quad + dB_{\text{EChS}}^{(4)}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

donde el término de superficie $B_{\text{EChS}}^{(4)}$, corresponde a

$$\begin{aligned} B_{\text{EChS}}^{(4)} &= \alpha_1 l^2 \epsilon_{abcde} e^a \omega^{bc} \left(\frac{2}{3} d\omega^{de} + \frac{1}{2} \omega_f^d \omega^{fe} \right) \\ &\quad + \alpha_3 \epsilon_{abcde} \left[l^2 (h^a \omega^{bc} + k^{ab} e^c) \left(\frac{2}{3} d\omega^{de} + \frac{1}{2} \omega_f^d \omega^{fe} \right) \right. \\ &\quad \left. + l^2 k^{ab} \omega^{cd} \left(\frac{2}{3} de^e + \frac{1}{2} \omega_f^d \omega^{fe} \right) + \frac{1}{6} e^a e^b e^c \omega^{de} \right], \end{aligned} \quad (2.36)$$

contiene los términos cinéticos de los campos de gauge (h^a, k^{ab}) , que no aparecen en las correspondientes ecuaciones de movimiento. En referencias [1, 2] fueron mostrados los siguientes resultados.

- Las ecuaciones de movimiento pueden ser obtenidas desde el lagrangeano $L = L_{\text{ChS}}^{(5)} + \kappa L_M$, donde $L_M = L_M(e^a, h^a, \omega^{ab})$ es el lagrangeano de materia y κ es una constante de acoplamiento relacionada con la constante de gravitación universal efectiva de Newton. En efecto, la variación de (2.35) con respecto al campo vielbein e^a , la conexión de espín ω^{ab} , y los campos h^a, k^{ab} , nos entrega las siguientes ecuaciones de movimiento.

$$\epsilon_{abcde} R^{ab} e^c e^d = -4\kappa_5 \left(\frac{\delta L_M}{\delta e^e} - \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \frac{\delta L_M}{\delta h^e} \right), \quad (2.37)$$

$$\frac{\delta L_M}{\delta h^e} = -\frac{l^2}{8\kappa_5} \epsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd}, \quad (2.38)$$

$$\epsilon_{abcde} R^{cd} D_\omega h^e = 0. \quad (2.39)$$

donde se han impuesto las siguientes condiciones $T^a = 0$, $k^{ab} = 0$ y $\delta L_M / \delta \omega^{ab} = 0$ y con $\kappa_5 = \kappa / 8\alpha_3$. Es posible notar que la ecuación (2.37) es análoga a la ecuación de Einstein, donde $\delta L_M / \delta h^a$ corresponde al tensor energía momentum para el campo h^a .

En el caso donde las ecuaciones (2.37-2.39) satisfacen el principio cosmológico y la materia ordinaria es despreciable comparada con la energía oscura, se encuentra que las correspondientes ecuaciones de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) toman la forma

$$6 \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) = \kappa_5 \left(\rho + \alpha \rho^{(h)} \right), \quad (2.40)$$

$$3 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) \right] = -\kappa_5 \left(p + \alpha p^{(h)} \right), \quad (2.41)$$

$$\frac{3l^2}{\kappa_5} \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right)^2 = \rho^{(h)}, \quad (2.42)$$

$$\frac{3l^2}{\kappa_5} \frac{\ddot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) = -p^{(h)}, \quad (2.43)$$

$$\left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) \left[(h - h(0)) \frac{\dot{a}}{a} + \dot{h} \right] = 0. \quad (2.44)$$

Estas ecuaciones de campo fueron completamente resueltas en referencia [2] para la era de energía oscura, donde fue encontrado que el campo h^a se comporta de forma similar a una constante cosmológica.

- Las ecuaciones (2.40-2.44) tienen soluciones que describen una expansión acelerada del universo para tres posibles modelos cosmológicos donde la curvatura k toma distintos valores. Se tiene una expansión esférica ($k = 1$), una expansión plana ($k = 0$) y una expansión hiperbólica ($k = -1$) cuando la constante α es mayor que cero. Esto significa que las ecuaciones de movimiento para la acción FRW–Einstein–Chern–Simons tienen como una de sus soluciones un universo en expansión acelerada. Este resultado permite conjeturar que estas soluciones son compatibles con la era de energía oscura y que el tensor energía momentum para el campo h^a corresponde a una forma de constante cosmológica positiva.
- Por otro lado en Ref. [25] fue encontrado que el límite no relativista de la acción para gravedad Einstein–Chern–Simons es dado por la llamada acción para gravedad Newton–Chern–Simons. Esta acción es invariante bajo el álgebra no relativista $\mathcal{G}\mathfrak{B}_5$, la cual puede ser obtenida mediante una particular contracción de İnönü–Wigner del álgebra de Poincaré generalizada $\mathfrak{B}_5$. Una de las propuestas de esta tesis es encontrar un límite no relativista estos resultados encontrados en referencias [1, 2], es decir, encontrar soluciones cosmológicas para las ecuaciones de campo obtenidas desde la acción Newton–Chern–Simons estudiada en Ref. [25].

2.9. Límite no relativista de la acción Einstein–Chern–Simons

Si se tiene que el campo gravitacional es débil, entonces el espacio puede ser considerado ligeramente curvado, por lo cual podemos considerar que la métrica puede escribirse en la forma,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| < 1, \quad \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1) \quad (2.45)$$

de manera que

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{ab} e^a e^b \\ &= -(1 - h_{00}) dt^2 + (1 + h_{11})(dx^1)^2 + (1 + h_{11})(dx^2)^2 + (1 + h_{11})(dx^3)^2 + (1 + h_{11})(dx^4)^2 \end{aligned} \quad (2.46)$$

mo

de donde podemos ver que

$$e^0 = \sqrt{1 - h_{00}} \approx 1 - \frac{h_{00}}{2}$$

$$e^1 = \sqrt{1 + h_{11}} \approx 1 + \frac{h_{11}}{2}$$

$$e^2 = \sqrt{1 + h_{22}} \approx 1 + \frac{h_{22}}{2}$$

$$e^3 = \sqrt{1 + h_{33}} \approx 1 + \frac{h_{33}}{2}$$

$$e^4 = \sqrt{1 + h_{44}} \approx 1 + \frac{h_{44}}{2}$$

En el límite no relativista el campo gravitatorio es considerado débil y estacionario (o estático). Puesto que en este caso $\partial_0 h_{\mu\nu} = 0$, tenemos que las derivadas exteriores de los vielbein vienen dadas por:

$$de^0 = \frac{\partial_1 h_{00} e^0 e^1}{2(1 + \frac{h_{11}}{2})(1 - \frac{h_{00}}{2})} + \frac{\partial_2 h_{00} e^0 e^2}{2(1 + \frac{h_{22}}{2})(1 - \frac{h_{00}}{2})} + \frac{\partial_3 h_{00} e^0 e^3}{2(1 + \frac{h_{33}}{2})(1 - \frac{h_{00}}{2})} + \frac{\partial_4 h_{00} e^0 e^4}{2(1 + \frac{h_{44}}{2})(1 - \frac{h_{00}}{2})}$$

$$\approx \frac{\partial_1 h_{00} e^0 e^1}{2} + \frac{\partial_2 h_{00} e^0 e^2}{2} + \frac{\partial_3 h_{00} e^0 e^3}{2} + \frac{\partial_4 h_{00} e^0 e^4}{2}$$

$$de^1 = -\frac{\partial_2 h_{11} e^1 e^2}{2(1 + \frac{h_{22}}{2})(1 + \frac{h_{11}}{2})} - \frac{\partial_3 h_{11} e^1 e^3}{2(1 + \frac{h_{33}}{2})(1 + \frac{h_{11}}{2})} - \frac{\partial_4 h_{11} e^1 e^4}{2(1 + \frac{h_{44}}{2})(1 + \frac{h_{11}}{2})}$$

$$\approx -\frac{\partial_2 h_{11} e^1 e^2}{2} - \frac{\partial_3 h_{11} e^1 e^3}{2} - \frac{\partial_4 h_{11} e^1 e^4}{2}$$

$$de^2 = -\frac{\partial_1 h_{22} e^2 e^1}{2(1 + \frac{h_{11}}{2})(1 + \frac{h_{22}}{2})} - \frac{\partial_3 h_{22} e^2 e^3}{2(1 + \frac{h_{33}}{2})(1 + \frac{h_{22}}{2})} - \frac{\partial_4 h_{22} e^2 e^4}{2(1 + \frac{h_{44}}{2})(1 + \frac{h_{22}}{2})}$$

$$\approx -\frac{\partial_1 h_{22} e^2 e^1}{2} - \frac{\partial_3 h_{22} e^2 e^3}{2} - \frac{\partial_4 h_{22} e^2 e^4}{2}$$

$$de^3 = -\frac{\partial_1 h_{33} e^3 e^1}{2(1 + \frac{h_{33}}{2})(1 + \frac{h_{33}}{2})} - \frac{\partial_2 h_{33} e^3 e^2}{2(1 + \frac{h_{22}}{2})(1 + \frac{h_{33}}{2})} - \frac{\partial_4 h_{33} e^3 e^4}{2(1 + \frac{h_{44}}{2})(1 + \frac{h_{33}}{2})}$$

$$\approx -\frac{\partial_1 h_{33} e^3 e^1}{2} - \frac{\partial_2 h_{33} e^3 e^2}{2} - \frac{\partial_4 h_{33} e^3 e^4}{2}$$

$$\begin{aligned}
de^4 &= -\frac{\partial_1 h_{44} e^4 e^1}{2(1 + \frac{h_{44}}{2})(1 + \frac{h_{11}}{2})} - \frac{\partial_2 h_{44} e^4 e^2}{2(1 + \frac{h_{44}}{2})(1 + \frac{h_{22}}{2})} - \frac{\partial_3 h_{44} e^4 e^3}{2(1 + \frac{h_{33}}{2})(1 + \frac{h_{44}}{2})} \\
&\approx -\frac{\partial_1 h_{44} e^4 e^1}{2} - \frac{\partial_2 h_{44} e^4 e^2}{2} - \frac{\partial_3 h_{44} e^4 e^3}{2}
\end{aligned}$$

Puesto que $T^a = 0$ tenemos que $de^a = -w^a_b e^b$ por lo que:

$$\begin{aligned}
\omega^0_i &= \frac{\partial_i h^0_0 e^0}{2} = \omega^i_0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \\
\omega^1_2 &= \frac{\partial_2 h^1_1 e^1}{2} = -\omega^2_1, \quad \omega^1_3 = \frac{\partial_3 h^1_1 e^1}{2} = -\omega^3_1, \quad \omega^1_4 = \frac{\partial_4 h^1_1 e^1}{2} = -\omega^4_1 \\
\omega^2_3 &= \frac{\partial_3 h^2_2 e^2}{2} = -\omega^2_1, \quad \omega^2_4 = \frac{\partial_4 h^2_2 e^2}{2} = -\omega^3_1, \quad \omega^3_4 = \frac{\partial_4 h^3_3 e^3}{2} = -\omega^4_3
\end{aligned}$$

La correspondiente 2-forma curvatura es entonces dada por, $R^a_b = dw^a_b + w^a_c w^c_b$

$$R^0_i = dw^0_i + w^0_c w^c_i = -\frac{\partial_i^2 h_{00} e^i e^0}{2} = R^i_0 \quad (2.47)$$

Debido a que consideramos que las derivadas $\partial_i \partial_j h_{\mu\nu} \approx 0$ con $i \neq j$, solo sobreviven las segundas derivadas en la misma dirección. Por otro lado todos los términos $w^a_c w^c_b \approx 0$, debido a que son términos de segundo orden en $h_{\mu\nu}$. (Notar que i, j son etiquetas por lo que en esta oportunidad no representan suma sobre las derivadas)

$$R^i_j = dw^i_j + w^i_c w^c_j = -\frac{\partial_j^2 h_{ii} e^i e^j}{2} = -R^j_i \quad (2.48)$$

El término R^a_b es dado por $R^a_b = \frac{1}{2} R^a_{b\mu\nu} e^\mu e^\nu$, de manera que $R^i_0 = \frac{1}{2} (R^i_{0i0} e^i e^0 + R^i_{00i} e^0 e^i) = R^i_{0i0} e^i e^0$, donde en el cálculo se han usado las simetrías del tensor de Riemann. Así se tiene que el tensor de Ricci para las componentes temporales que vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
R^i_{0i0} &= -\frac{\partial_i^2 h_{00}}{2} \\
R_{00} &= \sum_{i=0}^4 R^i_{0i0} = R^1_{010} + R^2_{020} + R^3_{030} + R^4_{040} = -\frac{\nabla^2 h_{00}}{2} \quad (2.49)
\end{aligned}$$

El resto de los términos no nulos del tensor de Ricci son dados por:

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \sum_{i=0}^4 R^i_{1i1} = R^0_{101} + R^1_{121} + R^2_{131} + R^3_{141} = \frac{\partial_1^2 h_{00}}{2} + \frac{\partial_2^2 h_{11}}{2} + \frac{\partial_3^2 h_{11}}{2} + \frac{\partial_4^2 h_{11}}{2} \\
R_{22} &= \sum_{i=0}^4 R^i_{2i2} = R^0_{202} + R^1_{212} + R^2_{232} + R^3_{242} = \frac{\partial_2^2 h_{00}}{2} + \frac{\partial_1^2 h_{22}}{2} + \frac{\partial_3^2 h_{22}}{2} + \frac{\partial_4^2 h_{22}}{2} \\
R_{33} &= \sum_{i=0}^4 R^i_{3i3} = R^0_{303} + R^1_{313} + R^2_{323} + R^3_{343} = \frac{\partial_3^2 h_{00}}{2} + \frac{\partial_1^2 h_{33}}{2} + \frac{\partial_2^2 h_{33}}{2} + \frac{\partial_4^2 h_{33}}{2} \\
R_{44} &= \sum_{i=0}^4 R^i_{4i4} = R^0_{404} + R^1_{414} + R^2_{424} + R^3_{434} = \frac{\partial_4^2 h_{00}}{2} + \frac{\partial_1^2 h_{44}}{2} + \frac{\partial_2^2 h_{44}}{2} + \frac{\partial_3^2 h_{44}}{2}
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Por otro lado si se considera que el tensor energía momentum $T_{\mu\nu}$ y el tensor energía momentum $T_{\mu\nu}^{(h)}$ asociado al campo h^a , describen un fluido perfecto, se tiene que:

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho^{(e)} + \frac{p^{(e)}}{c^2} \right) u_\mu u_\nu + p^{(e)} g_{\mu\nu} \tag{2.51}$$

$$T_{\mu\nu}^{(h)} = \left(\rho^{(h)} + \frac{p^{(h)}}{c^2} \right) u_\mu u_\nu + p^{(h)} g_{\mu\nu} \tag{2.52}$$

donde u_μ corresponde a la velocidad y es un vector tipo tiempo. Ahora calcularemos el dual de Hodge para la cantidad $Q_a = Q_{\mu\nu} e_a^\mu dx^\nu$, donde

$$Q_{\mu\nu} = \beta_1 T_{\mu\nu} - \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \beta_2 T_{\mu\nu}^{(h)}$$

Ya que de la primera ecuación de movimiento (2.37) de la acción Einstein–Chern–Simons, si $\kappa = \beta_1 = \beta_2$ se tiene que

$$\varepsilon_{abcde} R^{ab} e^c e^d = -4\kappa_5 \left(\frac{\delta L_M}{\delta e^e} - \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \frac{\delta L_M}{\delta h^e} \right) \tag{2.53}$$

$$= -\frac{\kappa}{2\alpha_3} * \left(T_e - \frac{\alpha_1}{\alpha_3} T_e^{(h)} \right) \tag{2.54}$$

$$\begin{aligned}
* \left(\beta_1 T_e - \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \beta_2 T_e^{(h)} \right) &= *Q_e \\
&= \frac{1}{4!} Q^\lambda_{e} \varepsilon_{fmnp} e^f_{\lambda} e^m e^n e^p e^r \\
&= \frac{1}{24} Q^\lambda_{e} \varepsilon_{fmnp} e^f_{\lambda} e^m_{\mu} e^n_{\nu} e^p_{\sigma} e^r_{\rho} dx^\mu dx^\nu dx^\sigma dx^\rho \\
&= \frac{\det(g)}{24} Q^\lambda_{e} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\sigma\rho} dx^\mu dx^\nu dx^\sigma dx^\rho
\end{aligned} \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \left(2\alpha_3 \varepsilon_{abcde} R^{ab} e^c e^d + \varepsilon_{\lambda\mu\nu\sigma\rho} \frac{\det(g)}{24} Q^\lambda_e \right) dx^\mu dx^\nu dx^\sigma dx^\rho \delta e^e \\
&= \left(\alpha_3 \varepsilon_{abcde} R^{ab}_{\mu\nu} e^c_\sigma e^d_\rho + \varepsilon_{\lambda\mu\nu\sigma\rho} \frac{\det(g)}{24} Q^\lambda_e \right) dx^\mu dx^\nu dx^\sigma dx^\rho \delta e^e \\
&= \left(\alpha_3 \varepsilon_{abcde} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} e^a_\alpha e^b_\beta e^c_\sigma e^d_\rho + \varepsilon_{\lambda\mu\nu\sigma\rho} \frac{\det(g)}{24} Q^\lambda_e \right) \delta e^e_\delta dx^\mu dx^\nu dx^\sigma dx^\rho dx^\delta \\
&= \left(\alpha_3 \det(g) \varepsilon_{\alpha\beta\sigma\rho e} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} + \varepsilon_{\lambda\mu\nu\sigma\rho} \frac{\det(g)}{24} Q^\lambda_e \right) e^e_\gamma \delta e^\gamma_\delta dx^\mu dx^\nu dx^\sigma dx^\rho dx^\delta \\
&= \det(g) \left(\alpha_3 \varepsilon_{\alpha\beta\sigma\rho\gamma} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} + \varepsilon_{\lambda\mu\nu\sigma\rho} \frac{Q^\lambda_\gamma}{24} \right) \delta e^\gamma_\delta dx^\mu dx^\nu dx^\sigma dx^\rho dx^\delta \\
&= \det(g) \left(\alpha_3 \delta^{\mu\nu\sigma\rho\delta}_{\alpha\beta\sigma\rho\gamma} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} + \delta^{\mu\nu\sigma\rho\delta}_{\mu\nu\sigma\rho\lambda} \frac{Q^\lambda_\gamma}{24} \right) d^5x \\
&= \det(g) \left(2! \alpha_3 \delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} \delta^\delta_\gamma R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} - 2! \alpha_3 \delta^{\mu\nu}_{\gamma\beta} \delta^\delta_\alpha R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} + 2! \alpha_3 \delta^{\mu\nu}_{\gamma\alpha} \delta^\delta_\beta R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} + 4! \delta^\delta_\lambda \frac{Q^\lambda_\gamma}{24} \right) d^5x \\
&= \det(g) \left(4\alpha_3 \delta^\delta_\gamma R - 4\alpha_3 \delta^\delta_\alpha R^{\alpha\beta}_{\gamma\beta} + 4\alpha_3 \delta^\delta_\beta R^{\alpha\beta}_{\gamma\alpha} + Q^\delta_\gamma \right) d^5x \\
&= \det(g) \left(4\alpha_3 \delta^\delta_\gamma R - 8\alpha_3 R^\delta_\gamma + Q^\delta_\gamma \right) d^5x \\
&= 8 \det(g) \left(\frac{\alpha_3}{2} \delta^\delta_\gamma R - \alpha_3 R^\delta_\gamma + \frac{1}{8} Q^\delta_\gamma \right) d^5x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R &= \frac{1}{8\alpha_3} Q_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{8\alpha_3} \left(\beta_1 T_{\mu\nu} - \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \beta_2 T^{(h)}_{\mu\nu} \right) / g^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R - \frac{5}{2} R &= \frac{1}{8\alpha_3} \left(\beta_1 T - \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \beta_2 T^{(h)} \right) \\
-\frac{3}{2} R &= \frac{1}{8\alpha_3} \left(\beta_1 T - \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \beta_2 T^{(h)} \right)
\end{aligned}$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{8\alpha_3} \left(\beta_1 T_{\mu\nu} - \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \beta_2 T^{(h)}_{\mu\nu} \right) - \frac{g_{\mu\nu}}{24\alpha_3} \left(\beta_1 T - \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \beta_2 T^{(h)} \right)$$

La ecuación de movimiento (2.37) toma la siguiente forma luego de introducir los tensores energía momentum y considerar la presión nula.

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{1}{8\alpha_3} \left(\beta_1 T_{00} - \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \beta_2 T^{(h)}_{00} \right) - \frac{g_{00}}{24\alpha_3} \left(\beta_1 \rho^{(e)} u^\lambda u_\lambda - \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \beta_2 \rho^{(h)} u^\lambda u_\lambda \right) \\
&= \frac{1}{8\alpha_3} \left(\beta_1 \rho^{(e)} - \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \beta_2 \rho^{(h)} \right) - \frac{1}{24\alpha_3} \left(\beta_1 \rho^{(e)} - \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \beta_2 \rho^{(h)} \right)
\end{aligned} \tag{2.56}$$

$$R_{00} = \frac{1}{12\alpha_3} \left(\beta_1 \rho^{(e)} - \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \beta_2 \rho^{(h)} \right) \tag{2.57}$$

Ahora se consideran las ecuaciones clásicas del movimiento de una partícula libre como:

$$\ddot{x}^i(t) + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^i} = 0 \quad (2.58)$$

donde $x^i(t)$ ($i=1,2,3,4$) son las coordenadas espaciales, t es el tiempo absoluto.

La ecuación anterior describe una trayectoria en un espacio de 4 dimensiones plano. Ahora si queremos describir esta situación en un espacio tiempo 5 dimensional curvado, debemos enunciar la ecuación para la geodésica.

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\rho}{dt} = 0 \quad (2.59)$$

con $x^\mu = \{x^0, x^i\} = (t, x^i)$, de (2.59) es posible apreciar que la única componente no nula de la conexión es Γ_{00}^i y comparando con (2.58) se obtiene:

$$\Gamma_{00}^i = \delta^{ij} \partial_j \phi \quad (2.60)$$

donde δ^{ij} es la métrica euclídeana en 4 dimensiones. En este punto la conexión $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ es independiente de la métrica. Así la única componente no nula del tensor de Riemann correspondiente a la conexión (2.60) tendrá la forma:

$$R_{0j0}^i = \delta^{ik} \partial_k \partial_j \phi \quad (2.61)$$

De (2.57) se tiene que:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{1}{12\alpha_3} (\beta_1 \rho^{(e)} - \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \beta_2 \rho^{(h)}) \\ &= \frac{2}{3} (k_1 \rho - \alpha k_2 \rho^{(h)}) \end{aligned} \quad (2.62)$$

Con las constantes $k_1 = \frac{\beta_1}{8\alpha_3}$ que corresponde a la constante gravitacional positiva, $k_2 = \frac{\beta_2}{24\alpha_3}$ y $\alpha = \frac{3\alpha_1}{\alpha_3}$, estas últimas 2 constantes deben ser determinadas¹.

Es necesario señalar que la conexión (2.60) no puede ser obtenida desde una métrica no degenerada en 5 dimensiones, ya que si el tensor de Riemann proviene de esta conexión debe cumplir con ciertas propiedades de simetría que (2.61) no satisface. Otra forma de visualizar que una métrica no degenerada no es adecuada, es tomar la métrica de Minkowski y su inversa tomando el límite $c \rightarrow \infty$.

$$\frac{\eta_{\mu\nu}}{c^2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c^2} \end{pmatrix} \quad \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{c^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

Donde se manifiesta una métrica temporal covariante degenerada con 4 eigenvalores nulos y una métrica espacial contravariante con 1 eigenvalor igual a cero.²

¹ ver [?] para mas detalles

² ver [?], condiciones que satisfacen (5.9)

Es necesario relacionar el gauge con la conexión Γ para lo cual usaremos el lema de Weyl, por lo que el postulado para el espacial y temporal vielbein vienen dados por:

$$\partial_\mu e_\nu^i + \omega_\mu^{ij} e_{\nu j} - \omega_\mu^i \tau_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho e_\rho^i = 0 \quad (2.64)$$

$$\partial_\mu \tau_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \tau_\rho = 0 \quad (2.65)$$

Usando (2.64) y (2.65) podemos encontrar la conexión asociada a nuestro gauge que tiene la forma:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \tau^\rho \partial_{(\mu} \tau_{\nu)} + e_i^\rho [\partial_{(\mu} e_{\nu)}^i + \omega_{(\mu}^{ij} e_{\nu)j} - \omega_{(\mu}^i \tau_{\nu)}] \quad (2.66)$$

El tensor de Riemann correspondiente a la conexión (2.66) en términos de las curvaturas del gauge es:

$$\begin{aligned} R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}(\Gamma) &= \partial_\rho \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} + \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} \Gamma^\mu{}_{\lambda\rho} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho} \Gamma^\mu{}_{\lambda\sigma} \\ &= -e^\mu{}_i [R_{\rho\sigma}{}^i(K_i) \tau_\nu + R_{\rho\sigma}{}^{ij}(J_{ij}) e^\nu{}_j] \end{aligned} \quad (2.67)$$

La condición de Trautman es satisfecha por (2.67) usando la relación (5.45). La condición de Ehlers es equivalente al constraint $R^{ij}(J_{ij}) = 0$, haciendo contacto con la formulación de Newton–Cartan. Si usamos este constraint sobre (5.45) se obtiene que:

$$R_{[\lambda\mu}{}^i(K_i) \tau_{\nu]} = 0 \quad e_{[\lambda i} R_{\mu\nu]}{}^i(K_i) = 0 \quad (2.68)$$

Y al contraer (2.68) con $e^\mu{}_i$ y τ^μ , se tiene:

$$e^\mu{}_i e^\nu{}_j R_{\mu\nu}{}^k(K_i) = 0 \quad \tau^\mu e^{\nu[i} R_{\mu\nu}{}^{j]}(K_i) = 0 \quad (2.69)$$

Obteniendo finalmente que la única componente distinta de cero de $R_{\mu\nu}{}^k(K_i)$ es:

$$\begin{aligned} \tau^\mu e^{\nu(i} R_{\mu\nu}{}^{j)}(K_i) &= \delta^{k(j} R^{i)}{}_{0k0}(\Gamma) \\ \tau^\mu e^{\nu(i} D_\mu \omega_\nu{}^{j)} &= \delta^{ki} \partial_j \partial_k \phi \end{aligned} \quad (2.70)$$

Donde de (2.62) se tiene que:

$$\nabla^2 \phi = \frac{2}{3} (k_1 \rho^{(e)} - \alpha k_2 \rho^{(h)}). \quad (2.71)$$

Se observa que para los valores de las constantes $k_1 = 8\pi G$ y cuando $\alpha = 0$ recuperamos la conocida ecuación de Poisson en cinco dimensiones.

2.10. Cosmología Newtoniana en 5 dimensiones

Para comenzar debemos considerar la generalización de la teoría de Newton en 5 dimensiones, para esto las expresiones usadas corresponden a las de [13]³. El formalismo utilizado en esta sección esta basado en [15].

$$\nabla^2 \phi = \frac{16\pi G}{3} \rho. \quad (2.72)$$

Por lo que la fuerza gravitacional es descrita por la expresión

$$\vec{F} = \frac{8GMm}{3\pi r^3} \hat{r},$$

donde G es la constante de gravitación universal, M es la masa que del cuerpo que genera el campo gravitacional, m es la masa del cuerpo que experimenta la la fuerza $\vec{F}$ y r es la distancia que separa ambos cuerpos. Por otro lado la acción de esta fuerza produce que m experimente una aceleración por lo que se tiene que

$$\vec{F} = m\vec{g},$$

el campo gravitacional $\vec{g}$ puede ser encontrado en función de un potencial ϕ , como $\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi$ con

$$\phi = -\frac{4GM}{3\pi r^2}.$$

Consideremos ahora que la masa M contenida en la región tiene forma esférica, por lo que podemos describirla como

$$M = \frac{2\pi^2 r^4}{4} \rho,$$

vemos entonces que la expresión para la fuerza tomará la forma

$$\vec{F} = \frac{8GMm}{3\pi r^3} = \frac{4\pi G \rho r m}{3} \hat{r},$$

además la energía potencial que experimenta la masa m estará dada por

$$\phi = -\frac{4GM}{3\pi r^2} = -\frac{2\pi G \rho r^2 m}{3},$$

y la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2,$$

así se tiene que la conservación de la energía

$$\begin{aligned} E &= T + \phi \\ &= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{2\pi G \rho r^2 m}{3}. \end{aligned}$$

Una consideración importante será que el universo es homogéneo por lo que usaremos un sistema coordinado comóvil, que describirá una expansión uniforme de nuestro universo

$$r(t) = a(t)x,$$

³Donde la definición de entropía coincide con la versión en 4 dimensiones, además en [14] las ecuaciones empleadas están tabuladas en el apéndice B, alternativa 2, de la tabla B_1 , esto se debe a que nuestra ecuación de Poisson de [3] coincide con esta descripción para $\nu = \frac{3}{2}$.

luego la expresión para la energía en función del factor de escala $a(t)$ vendrá dada

$$E = \frac{1}{2}m\dot{a}^2x^2 - \frac{2\pi G\rho a^2x^2m}{3},$$

ya que $\dot{x} = 0$, ahora si multiplicamos la ecuación anterior por $\frac{2}{ma^2x^2}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{4\pi G\rho}{3} + \frac{2E}{ma^2x^2} \\ &= \frac{4\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2}, \end{aligned} \quad (2.73)$$

donde $k = \frac{-2E}{mx^2c^2}$ es llamada la curvatura y describe la geometría del espacio tiempo. Esta cantidad es una constante y no depende de x ya que la energía $E \propto x^2$.

2.10.1. La ecuación del fluido

Podemos derivar la ecuación que describe al fluido a partir de la primera Ley de la Termodinámica

$$dE + pdV = TdS,$$

donde E es la energía, p la presión, V el volumen, T la temperatura y S la entropía.

De la relación de energía en reposo $E = mc^2$, y escribiendo la masa en función de la densidad ρ y el volumen V con respecto al sistema comóvil, se tiene que la energía para la masa de una esfera de radio a

$$E = \frac{2\pi^2a^4\rho c^2}{4},$$

por lo que el cambio de energía para un pequeño tiempo dt

$$\frac{dE}{dt} = 2\pi^2a^3\rho c^2 \frac{da}{dt} + \frac{2\pi^2a^4c^2}{4} \frac{d\rho}{dt},$$

y la variación del volumen

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi^2a^3 \frac{da}{dt},$$

si asumimos en la primera Ley de la Termodinámica que la expansión es reversible, es decir, $dS = 0$

$$\begin{aligned} \rho \frac{da}{dt} + \frac{a}{4} \frac{d\rho}{dt} + \frac{p}{c^2} \frac{da}{dt} &= 0 \\ \rho \dot{a} + \frac{a}{4} \dot{\rho} + \frac{p}{c^2} \dot{a} &= 0 \\ \rho \frac{4\dot{a}}{a} + \dot{\rho} + \frac{p}{c^2} \frac{4\dot{a}}{a} &= 0, \\ \dot{\rho} + 4 \frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.74)$$

2.10.2. La ecuación de la aceleración

Podemos obtener la ecuación de aceleración diferenciando (2.73)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{4\pi G \rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2} \right) \\ 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{a\ddot{a} - \dot{a}^2}{a^2} &= \frac{4\pi G}{3} \dot{\rho} + \frac{2kc^2 \dot{a}}{a^3},\end{aligned}\tag{2.75}$$

y de la ecuación (2.74) podemos reemplazar $\dot{\rho}$ en esta ecuación

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -\frac{8\pi G}{3} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) + \frac{kc^2}{a^2},$$

para finalmente reemplazar (2.73) obteniendo

$$\begin{aligned}\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{4\pi G \rho}{3} + \frac{kc^2}{a^2} &= -\frac{8\pi G}{3} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) + \frac{kc^2}{a^2} \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{2p}{c^2} \right).\end{aligned}\tag{2.76}$$



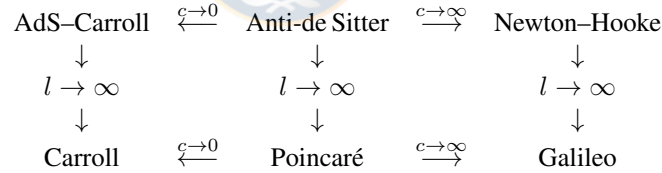
Capítulo 3

Álgebras no relativistas

Los denominados grupos relativistas corresponden a los grupos de invariancia de una teoría física que incluyen a los generadores de la relatividad especial, es decir, describen las simetrías de traslaciones temporales, traslaciones espaciales, *boost* y rotaciones espaciales. Una investigación de estas posibles cinemáticas fue iniciada por Bacry y Lévy–Leblond [56], donde fue mostrado que todos estos grupos pueden ser obtenidos a partir de los grupos Anti-de Sitter (AdS) y de Sitter (dS), a través de contracciones de Inönü–Wigner, que envuelven tres distintos límites sobre las simetrías.

En primer lugar el límite no relativista, al hacer tender la velocidad de la luz a infinito $c \rightarrow \infty$, además se tiene el límite plano si la constante cosmológica se anula o equivalentemente el radio cósmico tiende a infinito $l \rightarrow \infty$ y finalmente el límite ultra relativista que consiste en tomar la velocidad de la luz $c \rightarrow 0$.

En el siguiente esquema es mostrada la relación entre los grupos obtenidos al aplicar estos límites sobre el grupo AdS.



Se comienza analizando el límite no relativista del álgebra AdS que esta asociada al grupo especial ortogonal $SO(d, 2)$ cuyos generadores $\{J_{ab}, P_a\}$ satisfacen las siguientes relaciones de conmutación.

$$\begin{aligned}
 [J_{ab}, J_{cd}] &= \delta_{cb}J_{ad} + \delta_{db}J_{ca} + \delta_{ca}J_{db} + \delta_{da}J_{bc}, \\
 [J_{ab}, \tilde{P}_c] &= \delta_{bc}\tilde{P}_a - \delta_{ac}\tilde{P}_b, \\
 [\tilde{P}_a, \tilde{P}_b] &= \frac{1}{\tilde{l}^2}J_{ab}.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Donde $a, b, c, d = 0, \dots, d$ y $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, \dots, +)$, con el número de signos $+$ equivalente a d .

Si ahora se reescalan los generadores del álgebra (3.1) junto al radio AdS $\tilde{l}$, en función de la velocidad de luz tendiendo a infinito $c \rightarrow \infty$ como se muestra a continuación,

$$\begin{aligned}
 \tilde{J}_{i0} &= cK_i, \\
 \tilde{P}_0 &= \frac{1}{c}H + cM, \\
 \tilde{l} &= cl.
 \end{aligned}$$

Es obtenida el álgebra de Newton–Hooke con extensión central $\mathcal{NH}_{d+1}(M)$, cuyas relaciones de conmutación son dadas por las siguientes expresiones.

$$\begin{aligned}
 [J_{ij}, J_{kl}] &= \delta_{kj} J_{il} + \delta_{lj} J_{ki} + \delta_{ki} J_{lj} + \delta_{li} J_{jk}, \\
 [J_{ij}, P_k] &= \delta_{jk} P_i - \delta_{ik} P_j, \\
 [J_{ij}, K_k] &= \delta_{jk} K_i - \delta_{ik} K_j, \\
 [P_i, K_j] &= \delta_{ij} M, \\
 [K_i, H] &= -P_i, \\
 [P_i, H] &= \frac{1}{l^2} K_i.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde $i, j, k, l = 1, \dots, d$. Además se observa que al tomar el límite plano $l \rightarrow \infty$ es obtenida el álgebra de Galileo con extensión central o bien la denominada álgebra de Bargmann [29]. La extensión central M es agregada para establecer representaciones masivas del álgebra de Galileo.

3.1. Álgebras de Galileo generalizadas

En [3] fueron encontradas las versiones no relativistas de las álgebras de Poincaré generalizadas $\mathfrak{B}_n$ [23, 26] y las álgebras AdS–Lorentz generalizadas $\mathfrak{L}_n$ [25, 45], al aplicar una particular contracción de Inönü–Wigner. Las álgebras no relativistas obtenidas fueron denominadas como álgebras de Galileo generalizadas tipo I y tipo II , siendo denotadas por $\mathcal{G}\mathfrak{B}_n$ y $\mathcal{G}\mathfrak{L}_n$ respectivamente.

En el caso del álgebra de Maxwell $\mathfrak{B}_4$ las relaciones de conmutación son dadas por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
 [\tilde{J}_{ab}, \tilde{J}_{cd}] &= \delta_{cb} \tilde{J}_{ad} + \delta_{db} \tilde{J}_{ca} + \delta_{ca} \tilde{J}_{db} + \delta_{da} \tilde{J}_{bc}, \\
 [\tilde{J}_{ab}, \tilde{P}_c] &= \delta_{bc} \tilde{P}_a - \delta_{ac} \tilde{P}_b, \\
 [\tilde{J}_{ab}, \tilde{Z}_{cd}] &= \delta_{cb} \tilde{Z}_{ad} + \delta_{db} \tilde{Z}_{ca} + \delta_{ca} \tilde{Z}_{db} + \delta_{da} \tilde{Z}_{bc}, \\
 [\tilde{P}_a, \tilde{P}_b] &= \frac{1}{\tilde{l}^2} \tilde{Z}_{ab}.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

al separar las componentes espaciales y temporales de los generadores $\{P_a, J_{ab}, Z_{ab}\}$, y llevando a cabo el siguiente reescalamiento, para luego tomar el límite no relativista $c \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 \tilde{J}_{i0} &= cK_i, \\
 \tilde{P}_0 &= \frac{1}{c}H + cM, \\
 \tilde{Z}_{i0} &= cZ_{i0} \\
 \tilde{l} &= cl,
 \end{aligned}$$

se obtiene el álgebra de Galileo tipo I $\mathcal{G}\mathfrak{B}_4$.

De manera análoga para el álgebra AdS–Lorentz que es denotada por $\text{AdS}\mathfrak{L}_4$ y cuyas relaciones de conmu-

tación son dadas por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
[\tilde{J}_{ab}, \tilde{J}_{cd}] &= \delta_{cb}\tilde{J}_{ad} + \delta_{db}\tilde{J}_{ca} + \delta_{ca}\tilde{J}_{db} + \delta_{da}\tilde{J}_{bc}, \\
[\tilde{J}_{ab}, \tilde{P}_c] &= \delta_{bc}\tilde{P}_a - \delta_{ac}\tilde{P}_b, \\
[\tilde{J}_{ab}, \tilde{Z}_{cd}] &= \delta_{cb}\tilde{Z}_{ad} + \delta_{db}\tilde{Z}_{ca} + \delta_{ca}\tilde{Z}_{db} + \delta_{da}\tilde{Z}_{bc}, \\
[\tilde{Z}_{ab}, \tilde{Z}_{cd}] &= \delta_{cb}\tilde{Z}_{ad} + \delta_{db}\tilde{Z}_{ca} + \delta_{ca}\tilde{Z}_{db} + \delta_{da}\tilde{Z}_{bc}, \\
[\tilde{P}_a, \tilde{P}_b] &= \frac{1}{\tilde{l}^2}\tilde{Z}_{ab}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

obteniendo el álgebra de Galileo tipo $II \mathcal{GL}_4$.

Por otro lado las álgebras de Galileo generalizadas corresponden a la S-expansión del álgebra de Newton–Hooke, donde si al utilizar el método de S-expansión de álgebras se considera la siguiente estructura de subespacios sobre (3.2).

$$\begin{aligned}
V_0 &= \{J_{ij}, K_i\}, \quad V_1 = \{P_i, M, H\} \\
[V_0, V_0] &\subset V_0, \quad [V_0, V_1] \subset V_1, \quad [V_1, V_1] \subset V_0.
\end{aligned}$$

- En general las álgebras de Galileo generalizadas tipo I son definidas mediante la siguiente S-expansión

$$(S_E^N \times \mathcal{NH}_{d+1}(M))_{R, 0_S} = \mathcal{GB}_{N+2}.$$

Si $N = 2$ y $d = 3$, de Cayley para el semigrupo S_E^3 es dada por

S_E^3	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3
λ_0	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3
λ_1	λ_1	λ_2	λ_3	λ_3
λ_2	λ_2	λ_3	λ_3	λ_3
λ_3	λ_3	λ_3	λ_3	λ_3

 $\lambda_3 = 0_S$

Luego considerando la siguiente partición

$$S_0 = \{\lambda_0, \lambda_2, 0_S\}, \quad S_1 = \{\lambda_1, 0_S\}$$

la cual esta en resonancia con $\mathcal{NH}_{3+1}(M) = V_0 \oplus V_1$.

Por lo que las relaciones de conmutación para $\mathcal{GB}_4$ son dadas por

$$\begin{aligned}
[J_{ij}, J_{kl}] &= \delta_{kj}J_{il} + \delta_{lj}J_{ki} - \delta_{ki}J_{jl} - \delta_{ki}J_{kj}, \\
[J_{ij}, K_k] &= \delta_{kj}K_i - \delta_{ki}K_j, \\
[K_i, P_j] &= -\delta_{ij}M, \\
[J_{ij}, P_k] &= \delta_{kj}P_i - \delta_{ki}P_j, \\
[K_i, H] &= -P_i, \\
[J_{ij}, Z_{kl}] &= \delta_{kj}Z_{il} + \delta_{lj}Z_{ki} - \delta_{ki}Z_{jl} - \delta_{ki}Z_{kj}, \\
[J_{ij}, Z_k] &= \delta_{kj}Z_{i0} - \delta_{ki}Z_{j0}, \\
[P_i, H] &= \frac{1}{\tilde{l}^2}Z_{i0}, \\
[Z_{ij}, K_k] &= \delta_{kj}Z_i - \delta_{ki}Z_{j0},
\end{aligned} \tag{3.5}$$

donde $i, j, k, l = 1, 2, 3$.

- En general las álgebras de Galileo generalizadas tipo II son definidas mediante la siguiente S-expansión

$$(S_M^N \times \mathcal{NH}_{d+1}(M))_R = \mathcal{GL}_{N+2}.$$

Si $N = 2$ y $d = 3$, la tabla de Cayley para el semigrupo S_M^2 es dada por

S_M^2	λ_0	λ_1	λ_2
λ_0	λ_0	λ_1	λ_2
λ_1	λ_1	λ_2	λ_2
λ_2	λ_2	λ_2	λ_2

Se establece la siguiente partición

$$S_0 = \{\lambda_0, \lambda_2\}, \quad S_1 = \{\lambda_1\}$$

la cual se encuentra en resonancia con $\mathcal{NH}_{3+1}(M) = V_0 \oplus V_1$.

Así las relaciones de conmutación para $\mathcal{GL}_4$ son dadas por

$$\begin{aligned}
[J_{ij}, J_{kl}] &= \delta_{kj}J_{il} + \delta_{lj}J_{ki} - \delta_{ki}J_{jl} - \delta_{ki}J_{kj}, \\
[J_{ij}, K_k] &= \delta_{kj}K_i - \delta_{ki}K_j, \\
[K_i, P_j] &= -\delta_{ij}M, \\
[J_{ij}, P_k] &= \delta_{kj}P_i - \delta_{ki}P_j, \\
[K_i, H] &= -P_i, \\
[J_{ij}, Z_{kl}] &= \delta_{kj}Z_{il} + \delta_{lj}Z_{ki} - \delta_{ki}Z_{jl} - \delta_{ki}Z_{kj}, \\
[J_{ij}, Z_k] &= \delta_{kj}Z_{i0} - \delta_{ki}Z_{j0}, \\
[P_i, H] &= \frac{1}{l^2}Z_{i0}, \\
[Z_{ij}, K_k] &= \delta_{kj}Z_{i0} - \delta_{ki}Z_{j0}, \\
[Z_{ij}, Z_{kl}] &= \delta_{kj}Z_{il} + \delta_{lj}Z_{ki} - \delta_{ki}Z_{jl} - \delta_{ki}Z_{kj}, \\
[Z_{ij}, Z_{k0}] &= \delta_{kj}Z_{i0} - \delta_{ki}Z_{j0}, \\
[Z_{ij}, P_k] &= \delta_{kj}P_i - \delta_{ki}P_j, \\
[Z_{i0}, P_j] &= -\delta_{ij}M, \\
[Z_{i0}, H] &= -P_i.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Capítulo 4

Álgebras ultrarelativistas

En el capítulo anterior se analizó el límite no relativista de las álgebras de Poincaré y el álgebra AdS, que corresponde al álgebra de Galileo (o el álgebra de Bargmann si damos cuenta de la masa) y el álgebra de Newton–Hooke respectivamente. Para ello fue tomado el límite $c \rightarrow \infty$ en la velocidad de la luz, mediante contracciones de Inönü–Wigner. En el presente capítulo, será calculado el límite $c \rightarrow 0$ sobre la velocidad de la luz, al hacer tender a cero el parámetro usado en la contracción, para obtener la versión ultra relativista del álgebra de Poincaré correspondiente al álgebra de Carroll y en el caso del álgebra AdS es obtenida el álgebra AdS–Carroll $\mathcal{AC}_{d+1}$ (también denominada como el álgebra de para-Poincaré por Bacry and Lévy-Leblond [56]).

El álgebra AdS–Carroll se obtiene a partir del siguiente reescalamiento sobre los generadores de AdS y tomando el límite ultrarelativista $c \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\tilde{J}_{i0} &= \frac{1}{c} K_i, \\ \tilde{P}_0 &= \frac{1}{c} H.\end{aligned}$$

Por lo que $\mathcal{AC}_{d+1}$ presenta las siguientes relaciones de conmutación.

$$\begin{aligned}[J_{ij}, J_{kl}] &= \delta_{kj} J_{il} + \delta_{lj} J_{ki} + \delta_{ki} J_{lj} + \delta_{li} J_{jk}, \\ [J_{ij}, P_k] &= \delta_{jk} P_i - \delta_{ik} P_j, \\ [J_{ij}, K_k] &= \delta_{jk} K_i - \delta_{ik} K_j, \\ [P_i, K_j] &= \delta_{ij} H, \\ [P_i, H] &= \frac{1}{l^2} K_i, \\ [P_i, P_j] &= \frac{1}{l^2} J_{ij},\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde $i, j, k, l = 1, \dots, d$ y l es el radio AdS y en el caso de que su valor tienda a infinito $l \rightarrow \infty$ es obtenida el álgebra de Carroll, lo que corresponde al denominado límite plano.

4.1. Álgebras de Carroll generalizadas

De manera análoga a como se encontraron las álgebras de Galileo generalizadas, ahora se mostrará un mecanismo para la obtención de las álgebras de Carroll generalizadas, que corresponden a la S-expansión

del álgebra AdS–Carroll, donde si al utilizar el método de S-expansión de álgebras es considerada la siguiente estructura de subespacios sobre (4.1).

$$V_0 = \{J_{ij}, K_i\}, \quad V_1 = \{P_i, H\}$$

$$[V_0, V_0] \subset V_0, \quad [V_0, V_1] \subset V_1, \quad [V_1, V_1] \subset V_0.$$

- En general las álgebras de Carroll generalizadas tipo *I* son definidas mediante la siguiente S-expansión

$$(S_E^N \times \mathcal{AC}_{d+1})_{R, 0_S} = \mathcal{CB}_{N+2}.$$

Si $N = 2$ y $d = 3$, de Cayley para el semigrupo S_E^3 es dada por

S_E^3	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3
λ_0	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3
λ_1	λ_1	λ_2	λ_3	λ_3
λ_2	λ_2	λ_3	λ_3	λ_3
λ_3	λ_3	λ_3	λ_3	λ_3

$\lambda_3 = 0_S$

Luego considerando la siguiente partición

$$S_0 = \{\lambda_0, \lambda_2, 0_S\}, \quad S_1 = \{\lambda_1, 0_S\}$$

la cual esta en resonancia con $\mathcal{AC}_{3+1} = V_0 \oplus V_1$.

Por lo que las relaciones de conmutación para $\mathcal{CB}_4$ son dadas por

$$\begin{aligned}
[J_{ij}, J_{kl}] &= \delta_{kj}J_{il} + \delta_{lj}J_{ki} - \delta_{ki}J_{jl} - \delta_{ki}J_{kj} \\
[J_{ij}, K_k] &= \delta_{kj}K_i - \delta_{ki}K_j \\
[K_i, P_j] &= -\delta_{ij}H \\
[J_{ij}, P_k] &= \delta_{kj}P_i - \delta_{ki}P_j \\
[J_{ij}, Z_{kl}] &= \delta_{kj}Z_{il} + \delta_{lj}Z_{ki} - \delta_{ki}Z_{jl} - \delta_{ki}Z_{kj} \\
[J_{ij}, Z_k] &= \delta_{kj}Z_i - \delta_{ki}Z_j \\
[P_i, H] &= \frac{1}{l^2}Z_i \\
[P_i, P_j] &= \frac{1}{l^2}Z_{ij} \\
[Z_{ij}, K_k] &= \delta_{kj}Z_i - \delta_{ki}Z_j
\end{aligned} \tag{4.2}$$

donde $i, j, k, l = 1, 2, 3$.

- En general las álgebras de Carroll generalizadas tipo *II* son definidas mediante la siguiente S-expansión

$$(S_M^N \times \mathcal{AC}_{d+1})_R = \mathcal{CL}_{N+2}.$$

Si $N = 2$ y $d = 3$, la tabla de Cayley para el semigrupo S_M^2 es dada por

S_M^2	λ_0	λ_1	λ_2
λ_0	λ_0	λ_1	λ_2
λ_1	λ_1	λ_2	λ_2
λ_2	λ_2	λ_2	λ_2

Se establece la siguiente partición

$$S_0 = \{\lambda_0, \lambda_2\}, \quad S_1 = \{\lambda_1\}$$

la cual se encuentra en resonancia con $\mathcal{AC}_{3+1} = V_0 \oplus V_1$.

Encontrando que las relaciones de conmutación para $\mathcal{CL}_4$ son dadas por

$$\begin{aligned}
 [J_{ij}, J_{kl}] &= \delta_{kj} J_{il} + \delta_{lj} J_{ki} - \delta_{ki} J_{jl} - \delta_{li} J_{kj} \\
 [J_{ij}, K_k] &= \delta_{kj} K_i - \delta_{ki} K_j \\
 [K_i, P_j] &= -\delta_{ij} H \\
 [J_{ij}, P_k] &= \delta_{kj} P_i - \delta_{ki} P_j \\
 [J_{ij}, Z_{kl}] &= \delta_{kj} Z_{il} + \delta_{lj} Z_{ki} - \delta_{ki} Z_{jl} - \delta_{li} Z_{kj} \\
 [J_{ij}, Z_k] &= \delta_{kj} Z_i - \delta_{ki} Z_j \\
 [P_i, H] &= \frac{1}{l^2} Z_i \\
 [P_i, P_j] &= \frac{1}{l^2} Z_{ij} \\
 [Z_{ij}, K_k] &= \delta_{kj} Z_i - \delta_{ki} Z_j \\
 [Z_{ij}, Z_{kl}] &= \delta_{kj} Z_{il} + \delta_{lj} Z_{ki} - \delta_{ki} Z_{jl} - \delta_{li} Z_{kj} \\
 [Z_{ij}, P_k] &= \delta_{kj} P_i - \delta_{ki} P_j \\
 [Z_{ij}, Z_k] &= \delta_{kj} Z_i - \delta_{ki} Z_j \\
 [Z_i, P_j] &= -\delta_{ij} H
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde $i, j, k, l = 1, 2, 3$.

Recientemente ha sido mostrado que existe una dualidad entre el álgebra de Carroll y el álgebra de Bargmann, al intercambiar el generador de traslaciones H por la carga central M [57]. Pero esta dualidad no puede ser aplicada al álgebra de Newton–Hooke y el álgebra AdS–Carroll, debido al conmutador $[P_i, P_j] \propto J_{ij}$ en las relaciones de conmutación del álgebra AdS–Carroll (4.1).

Es posible observar a priori, que para el caso de las álgebras de Carroll generalizadas (4.2) y (4.3), este problema no es heredado ya que $[P_i, P_j] \propto Z_{ij}$. Por lo que se conjetura una dualidad entre las álgebras de Galileo generalizadas y las álgebras de Carroll generalizadas dentro del marco de sus correspondientes acciones Chern–Simons [58].

Capítulo 5

Gravedad Chern–Simons no relativista

Como fue mostrado anteriormente el límite no relativista de la acción Einstein–Chern–Simons desemboca en ecuaciones de movimiento que describen una ecuación de Poisson modificada (2.72), en este capítulo será mostrado que mediante el gaugeo de álgebra $\mathcal{GB}_5$, es posible obtener una acción Chern–Simons denominada acción Newton–Chern–Simons, cuyas ecuaciones de movimiento concuerdan con los resultados obtenidos para la generalización a la teoría de Newton (5.53). Además serán estudiadas soluciones cosmológicas para esta ecuación de Poisson modificada al considerar una métrica de Friedman–Lemaître–Robertson–Walker.

También se demostrará que la cosmología Newton–Chern–Simons es una especie de análogo de la versión proyectable de la teoría de Hořava–Lifshitz en $(3 + 1)$ dimensiones.

5.1. Acción Newton–Chern–Simons

En referencia [23] fue encontrado que el álgebra $\mathfrak{B}_5$ puede ser obtenida a partir del álgebra AdS haciendo uso del procedimiento de S -expansión. En esta sección será mostrado que la versión no relativista del álgebra $\mathfrak{B}_5$, a saber el álgebra $\mathcal{GB}_5$, puede ser obtenida de manera análoga a partir del álgebra de Newton–Hooke usando el mecanismo de S -expansión.

Como anteriormente vimos los generadores del álgebra de Newton–Hooke con extensión central $\mathcal{NH}_{d+1}(M)$, satisfacen las siguientes relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} [\tilde{J}_{ij}, \tilde{J}_{kl}] &= \delta_{kj} \tilde{J}_{il} + \delta_{lj} \tilde{J}_{ki} - \delta_{ki} \tilde{J}_{jl} - \delta_{li} \tilde{J}_{kj} \\ [\tilde{J}_{ij}, \tilde{P}_k] &= \delta_{jk} \tilde{P}_i - \delta_{ik} \tilde{P}_j \\ [\tilde{J}_{ij}, \tilde{K}_k] &= \delta_{jk} \tilde{K}_i - \delta_{ik} \tilde{K}_j \\ [\tilde{K}_i, \tilde{P}_j] &= -\delta_{ij} \tilde{M} \\ [\tilde{K}_i, \tilde{H}] &= -\tilde{P}_i \\ [P_i, H] &= \nu^2 K_i \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde $i = 1, \dots, d$. Esta álgebra posee una extensión central $\tilde{M}$, que esta relacionada con la masa de una partícula libre y también una especie de constante cosmológica ν a nivel no relativista.

En [49] fue mostrado que para que el álgebra de Newton–Hooke preserve la simetría de los *boost*, se debe considerar el denominado límite de Newton–Hooke que consiste en tomar los límites $c, l \rightarrow \infty$ pero manteniendo la cantidad $\nu^2 = \Lambda c^2$ finita.

Ahora siguiendo las definiciones de [46], consideramos la S-expansión del álgebra de Newton–Hooke con extensión central $\mathcal{NH}_{d+1}(M)$, usando como semigrupo a $S_E^{(3)} = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$, donde la ley de multiplicación del semigrupo viene dada por $\lambda_\alpha \lambda_\beta = \lambda_{\alpha+\beta}$ si $\alpha + \beta < 4$ y $\alpha + \beta = \lambda_4$ si $\alpha + \beta \geq 4$. Después de obtener la correspondiente sub-álgebra resonante y 0_s reducida se encuentra una nueva álgebra que llamaremos $\mathcal{GB}_5$ cuyos generadores $\{J_{ij}, K_i, P_i, H, M, Z_{ij}, Z_{i0}, Z_i, Z_0, N\}$ son definidos como:

$$\begin{aligned} J_{ij} &= \lambda_0 \otimes \tilde{J}_{ij} & K_i &= \lambda_0 \otimes \tilde{K}_i & H &= \lambda_1 \otimes \tilde{H} \\ P_i &= \lambda_1 \otimes \tilde{P}_i & M &= \lambda_1 \otimes \tilde{M} & Z_{i0} &= \lambda_2 \otimes \tilde{K}_i \\ Z_{ij} &= \lambda_2 \otimes \tilde{J}_{ij} & Z_0 &= \lambda_3 \otimes \tilde{H} & Z_i &= \lambda_3 \otimes \tilde{P}_i \\ N &= \lambda_3 \otimes \tilde{M} \end{aligned}$$

Recientemente fue encontrado en [3], que en el contexto de la gravedad de Newton–Cartan, el límite no relativista de una acción Chern–Simons invariante bajo el álgebra de Poincaré Generalizada $\mathfrak{B}_5$ es descrito por el gaugeo del álgebra $\mathcal{GB}_5$ que posee las siguientes relaciones de conmutación.

$$\begin{aligned} [J_{ij}, J_{kl}] &= \eta_{kj} J_{il} + \eta_{lj} J_{ki} - \eta_{ki} J_{jl} - \eta_{li} J_{kj}, \\ [J_{ij}, K_k] &= \eta_{jk} K_i - \eta_{ik} K_j, \quad [K_i, P_j] = -\delta_{ij} M, \\ [J_{ij}, P_k] &= \eta_{jk} P_i - \eta_{ik} P_j, \quad [K_i, H] = -P_i, \\ [J_{ij}, Z_{kl}] &= \eta_{kj} Z_{il} + \eta_{lj} Z_{ki} - \eta_{ki} Z_{jl} - \eta_{li} Z_{kj}, \\ [J_{ij}, Z_{k0}] &= \eta_{jk} Z_{i0} - \eta_{ik} Z_{j0}, \quad [K_i, Z_j] = -\delta_{ij} N, \\ [Z_{ij}, K_k] &= \eta_{jk} Z_{i0} - \eta_{ik} Z_{j0}, \quad [K_i, Z_0] = -Z_i, \\ [J_{ij}, Z_k] &= \eta_{jk} Z_i - \eta_{ik} Z_j, \quad [Z_{i0}, P_j] = -\delta_{ij} N, \\ [Z_{ij}, P_k] &= \eta_{jk} Z_i - \eta_{ik} Z_j, \quad [Z_{i0}, H] = -Z_i, \\ [P_i, H] &= Z_{i0}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Se considera una 1-forma conexión y se observa que la constante ν no aparece en el álgebra ya que ha sido absorbida en la definición de los generadores.

$$\begin{aligned} A &= \frac{c}{l} \tau H + \frac{1}{l} e^i P_i + \frac{c}{l} \hat{\tau} Z_0 + \frac{1}{l} h^i Z_i + \frac{1}{cl} m M + \frac{1}{cl} n N \\ &\quad + \frac{1}{c} \omega^i K_i + \frac{1}{c} k^i Z_{i0} + \frac{1}{2} \omega^{ij} J_{ij} + \frac{1}{2} k^{ij} Z_{ij} \end{aligned} \tag{5.3}$$

la correspondiente 2-forma curvatura asociada a A es dada por

$$\begin{aligned} F &= \frac{c}{l} R(H) H + \frac{1}{l} R^i(P_i) P_i + \frac{c}{l} R(Z_0) Z_0 + \frac{1}{l} R^i(Z_i) Z_i + \frac{1}{cl} R(M) M \\ &\quad + \frac{1}{cl} R(N) N + \frac{1}{c} R^i(K_i) K_i + \frac{1}{c} R^i(Z_{i0}) Z_{i0} + \frac{1}{2} R^{ij}(J_{ij}) J_{ij} + \frac{1}{2} R^{ij}(Z_{ij}) Z_{ij} \end{aligned} \tag{5.4}$$

donde l y c son parámetros con dimensiones de distancia y velocidad respectivamente, las curvaturas aso-

ciadas a cada generador son

$$\begin{aligned}
 R(H) &= d\tau, \quad R(P_i) = T^i - \omega^i \tau, \\
 R(Z_0) &= d\hat{\tau}, \quad R(M) = dm - \omega^i e_i, \\
 R(Z_i) &= Dh^i - \omega^i \hat{\tau} - k^i \tau + k^i_j e^j, \\
 R(N) &= dn - \omega^i h_i - k^i e_i, \\
 R^i(Z_{i0}) &= Dk^i + \nu^2 e^i \tau + k^i_j \omega^j, \quad R^i(K_i) = D\omega^i, \\
 R^{ij}(J_{ij}) &= R^{ij}, \quad R^{ij}(Z_{ij}) = Dk^{ij},
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

con $\nu = \frac{c}{l}$, $T^i = de^i + \omega^{ij} e_j$, $R^{ij} = d\omega^{ij} + \omega^i_k \omega^{kj}$.

Si Λ denota los parámetros del grupo podemos escribir

$$\Lambda = \frac{v}{l} \zeta^0 H + \frac{1}{l} \zeta^i P_i + \frac{v}{l} \rho^0 Z_0 + \frac{1}{l} \rho^i Z_i + \frac{1}{vl} \sigma M + \frac{1}{vl} \gamma N + \frac{1}{v} \lambda^i K_i + \frac{1}{v} \chi^i Z_{i0} + \frac{1}{2} \lambda^{ij} J_{ij} + \frac{1}{2} \chi^{ij} Z_{ij} \tag{5.6}$$

entonces los campos transforman bajo una transformación de gauge en la forma:

$$\begin{aligned}
 \delta A &= D\Lambda = d\Lambda + [A, \Lambda] \\
 &= \frac{v}{l} d\zeta^0 H + \frac{1}{l} (D\zeta^i - \omega^i \zeta^0 - \lambda^{ij} e_j + \tau \lambda^i) P_i + \frac{v}{l} d\rho^0 Z_0 + \frac{1}{l} (D\rho^i - \omega^i \rho^0 - \lambda^{ij} h_j + h^0 \lambda^i + k^{ij} \zeta_j \\
 &\quad - k^i \zeta^0 - \chi^{ij} e_j + \tau \chi^i) Z_i + \frac{1}{vl} (d\sigma - \omega^i \zeta_i + e^i \lambda_i) M + \frac{1}{vl} (d\gamma - k^i \zeta_i + h^i \lambda_i - \omega^i \rho_i + e^i \chi_i) N \\
 &\quad + \frac{1}{v} (D\lambda^i - \lambda^{ij} \omega_j) K_i + \frac{1}{v} (D\chi^i - \lambda^{ij} k_j - \chi^{ij} \omega_j + k^{ij} \lambda_j + e^i \zeta^0 - \zeta^i \tau) Z_{i0} + \frac{1}{2} D\lambda^{ij} J_{ij} \\
 &\quad + \frac{1}{2} (D\chi^{ij} + k^i_k \lambda^{kj} + k^j_k \lambda^{ik}) Z_{ij}
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

de donde vemos que

$$\begin{aligned}
 \delta \tau &= d\zeta^0 \\
 \delta e^i &= D\zeta^i - \omega^i \zeta^0 - \lambda^{ij} e_j + \tau \lambda^i \\
 \delta h^0 &= d\rho^0 \\
 \delta h^i &= D\rho^i - \omega^i \rho^0 - \lambda^{ij} h_j + h^0 \lambda^i + k^{ij} \zeta_j - k^i \zeta^0 - \chi^{ij} e_j + \tau \chi^i \\
 \delta m &= d\sigma - \omega^i \zeta_i + e^i \lambda_i \\
 \delta n &= d\gamma - k^i \zeta_i + h^i \lambda_i - \omega^i \rho_i + e^i \chi_i \\
 \delta \omega^i &= D\lambda^i - \lambda^{ij} \omega_j \\
 \delta k^i &= D\chi^i - \lambda^{ij} k_j - \chi^{ij} \omega_j + k^{ij} \lambda_j + e^i \zeta^0 - \zeta^i \tau \\
 \delta \omega^{ij} &= D\lambda^{ij} \\
 \delta k^{ij} &= D\chi^{ij} + k^i_k \lambda^{kj} + k^j_k \lambda^{ik}
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

donde D es la derivada covariante con respecto a la conexión ω^{ij} .

Siguiendo a referencia [29] impondremos ahora algunos constraints sobre las curvaturas con el objetivo de convertir las transformaciones P y H en transformaciones generales de coordenadas en el espacio y el tiempo. Para esto escribimos el parámetro de una transformación general de coordenadas ξ^λ en la forma:

$$\xi^\lambda = e_i^\lambda \zeta^i + \tau^\lambda \zeta^0$$

donde e_i^λ es la inversa del vielbein espacial y τ^λ es la inversa de el vielbein temporal, los cuales son definidos como

$$\begin{aligned} e_\mu^i e_j^\mu &= \delta_j^i & \tau^\mu \tau_\mu &= 1 \\ \tau^\mu e_\mu^i &= 0 & \tau_\mu e_i^\mu &= 0 \\ e_\mu^i e_i^\nu &= \delta_\mu^\nu - \tau_\mu \tau^\nu \end{aligned} \quad (5.9)$$

Observamos de 5.8 que solo los campos de gauge e_μ^i , τ_μ , m_μ , h_μ^i y n_μ transforman bajo las transformaciones P y H . Estos campos serán considerados como independientes mientras que los campos restantes serán dependientes de los anteriormente mencionados. Para lograr esto impondremos los siguientes constraints:

$$\begin{aligned} R(H) &= d\tau = 0 \\ R^i(P_i) &= T^i - \omega^i \tau = 0 \\ R(M) &= dm - \omega^i e_i = 0 \\ R(Z_0) &= dh^0 = 0 \\ R^i(Z_i) &= Dh^i - \omega^i h^0 - k^i \tau + k_j^i e^j = 0 \\ R(N) &= dn - \omega^i h_i - k^i e_i = 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Las identidades de Bianchi nos entregarán las relaciones entre las curvaturas que permiten relacionar los campos dependientes con los independientes.

De $R^i(P_i) = 0$ vemos que tomando la derivada covariante de esta ecuación se tiene:

$$DT^i = D\omega^i \tau \rightarrow R^{ij} e_j = D\omega^i \tau \rightarrow R_{[\lambda\mu}{}^{ij} e_{\nu]j} = (D_{[\lambda} \omega_{\mu]}^i \tau_{\nu]) \quad (5.11)$$

donde $[\]$ significa antisimetría en los índices λ y ν . Análogamente de $R(M) = 0$ se tiene:

$$e_{[\lambda i} (D_\mu \omega_{\nu]}^i) = 0$$

El constraint $R(H) = 0$ nos entrega la condición $d\tau = 0$, es decir, $\partial_{[\mu} \tau_{\nu]} = 0$. Ahora podemos encontrar una expresión para ω^{ij} en función de los campos independientes e_μ^i , τ_μ y m_μ . Para esto usaremos el siguiente resultado

$$R_{\mu\nu}{}^i(P) e_{\rho i} + R_{\rho\mu}{}^i(P) e_{\nu i} - R_{\nu\rho}{}^i(P) e_{\mu i} = 0$$

Contrayendo con respecto a $e^{\nu j}$ se obtiene que:

$$\omega_\mu{}^{ij} = (\partial_{[\mu} e_{\nu]}^i) e^{\nu j} - (\partial_{[\mu} e_{\nu]}^j) e^{\nu i} + e_{\mu k} (\partial_{[\nu} e_{\rho]}^k) e^{\nu i} e^{\rho j} - \tau_\mu e^{\nu [i} \omega_{\nu}{}^{j]} \quad (5.12)$$

Luego podemos usar 5.12 dentro del constraint $R^i(P) = 0$ y contraer con $e^{\mu j}$ y τ^ν .

$$e^{\mu(i}\omega_{\mu}{}^{j)} = 2e^{\mu(i}\partial_{[\mu}e_{\nu]}{}^{j)}\tau^{\nu} \quad (5.13)$$

Donde () significa simetría en los índices i y j . Además del constraint $R(M) = 0$ se puede verificar contrayendo con respecto a $e^{\mu i}$ y τ^{μ} que:

$$e^{\mu[i}\omega_{\mu}{}^{j]} = e^{\mu i}e^{\nu j}\partial_{[\mu}m_{\nu]} \quad \tau^{\mu}\omega_{\mu}{}^i = 2\tau^{\mu}e^{\nu i}\partial_{[\mu}m_{\nu]} \quad (5.14)$$

Así de 5.13 y 5.14 se encuentra una expresión para ω^i de la forma:

$$\omega_{\mu}{}^i = e^{\nu i}\partial_{[\mu}m_{\nu]} + e^{\nu i}\tau^{\rho}e_{\mu j}\partial_{[\nu}e_{\rho]}{}^j + \tau_{\mu}\tau^{\nu}e^{\rho i}\partial_{[\nu}m_{\rho]} + \tau^{\nu}\partial_{[\mu}e_{\nu]}{}^i \quad (5.15)$$

Para obtener los campos $k_{\mu}{}^{ij}$ y $k_{\mu}{}^i$ seguimos un procedimiento análogo, utilizando los constraints $R^i(Z_i) = 0$ y $R^i(N) = 0$ obteniendo las siguientes expresiones:

$$k_{\mu}{}^{ij} = (D_{[\mu}h_{\nu]})^i e^{\nu j} - (D_{[\mu}h_{\nu]})^j e^{\nu i} + e_{\mu k}(D_{[\nu}h_{\rho]})^k e^{\nu i}e^{\rho j} - \omega_{[\mu}^i h_{\nu]}^0 e^{\nu j} + \omega_{[\mu}^j h_{\nu]}^0 e^{\nu i} - e_{\mu k}\omega_{[\nu}^k h_{\rho]}^0 e^{\nu i}e^{\rho j} - \tau_{\mu}e^{\nu[i}k_{\nu]}{}^{j]} \quad (5.16)$$

$$k_{\mu}{}^i = e^{\nu i}\partial_{[\mu}n_{\nu]} - e^{\nu i}\omega_{[\mu}^k h_{\nu]}^k + e^{\nu i}\tau^{\rho}e_{\mu j}D_{[\nu}h_{\rho]}{}^j - e^{\nu i}\tau^{\rho}e_{\mu j}\omega_{[\nu}^j h_{\rho]}^0 + \tau_{\mu}\tau^{\nu}e^{\rho i}\partial_{[\nu}n_{\rho]} - \tau_{\mu}\tau^{\nu}e^{\rho i}\omega_{[\nu}^k h_{\rho]}^k + \tau^{\nu}D_{[\mu}h_{\nu]}{}^i - \tau^{\nu}\omega_{[\mu}^i h_{\nu]}^0 \quad (5.17)$$

5.2. Tensores invariantes de la acción Newton–Chern–Simons

Es bien sabido que los tensores invariantes para el álgebra AdS $SO(4, 2)$, son dados por:

$$\langle J_{ab}J_{cd}P_e \rangle \propto \epsilon_{abcde} \quad (5.18)$$

Si realizamos una contracción sobre los generadores del álgebra AdS de manera que, $K_i \rightarrow c^{-1}J_{i0}$; $P_i \rightarrow l^{-1}P_i$; $H \rightarrow cl^{-1}P_0 - c^2M$, con $i = 1, 2, 3, 4$ se obtiene el álgebra de Newton–Hooke con extension central al tomar el límite $c, l \rightarrow \infty$ y mantener ν finito [48].

Por otro lado, usando el álgebra de Clifford, $\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} + \gamma_{\nu}\gamma_{\mu} = 2g_{\mu\nu}$, donde $\mu = 0, 1, 2, \dots, 5$ para encontrar una representación irreducible del álgebra de Newton–Hooke con extension central, se tiene que los generadores del álgebra son:

$$M_{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}] \quad (5.19)$$

Que satisfacen las siguientes relaciones de conmutación:

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\rho\mu} - \eta_{\mu\sigma}M_{\rho\nu} \quad (5.20)$$

$$[M_{\mu\nu}, \gamma_{\sigma}] = \eta_{\nu\sigma}\gamma_{\mu} - \eta_{\mu\sigma}\gamma_{\nu} \quad (5.21)$$

Donde $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-c^2, 1, 1, 1, 1, -l^2)$, además se define $\Gamma_* = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5$ que es la forma volumen y conmuta con los generadores $M_{\mu\nu}$ con $(\Gamma_*)^2 = \det(g_{\mu\nu}) = (lc)^2$ un múltiplo de la identidad, una identificación análoga se ha realizado para 5 dimensiones).

Al identificar $J_{ij} = M_{ij}$, $M_{i0} = cK_i$, $M_{i5} = lP_i$, $M_{05} = lP_0 = lc^{-1}(H + c^2M)$ y $\Gamma_* = 2M \propto lc$, se obtienen mediante (5.20) las relaciones de conmutación del álgebra de Newton–Hooke con extensión central.

Una representación para las matrices γ_μ viene dada por:

$$\gamma_0 = c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_4 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = il \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_* = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 = ilc \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideremos la siguiente identidad:

$$tr(\Gamma_* \Gamma_*) = -8(lc)^2$$

$$\Gamma_* = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \implies \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\delta \gamma_\tau = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma\delta\tau} \Gamma_*$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\delta \gamma_\tau \Gamma_*) &= \text{tr}(\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma\delta\tau} \Gamma_* \Gamma_*) \\ &= -8(lc)^2 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma\delta\tau} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Ahora podemos construir los tensores invariantes en función de las matrices γ_μ

$$\langle \dots \rangle = \langle \Gamma_* \{ M_{\mu\nu} M_{\rho\sigma} M_{\delta\tau} \} \rangle = \gamma \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma\delta\tau} \quad (5.23)$$

donde γ es un factor numérico y $\{ \dots \}$ denota el producto de matrices simetrizado, por lo que comparando (5.22) con (5.23) se observa:

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_* \{ M_{\mu\nu} M_{\rho\sigma} M_{\delta\tau} \} \rangle &= -8(lc)^2 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma\delta\tau} \\ \langle \Gamma_* \{ M_{\mu\nu} M_{\rho\sigma} M_{\tau 5} \} \rangle &= -8(lc)^2 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma\tau 5} \end{aligned}$$

Fijamos el valor de uno de los índices por lo que a partir de ahora se usarán etiquetas $a, b, c, d, e = 0, 1, \dots, 4$, dado que en este caso podemos trabajar con la traza normal que denotaremos por $\langle \dots \rangle_T$ en vez de la traza simetrizada, debido a la ciclicidad de esta traza (además que la traza es proporcional a ϵ_{abcde5} , es decir, $a \neq b \neq c \neq d \neq e$), se tiene:

$$\begin{aligned} \langle \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 M_{ab} M_{cd} M_{e5} \rangle_T &= -8(lc)^2 \epsilon_{abcde5} \\ \langle \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d \gamma_e \gamma_5 \rangle_T &= 64(lc)^2 \epsilon_{abcde5} \\ \langle \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 (\gamma_5 \gamma_5) \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d \gamma_e \rangle_T &= 64(lc)^2 \epsilon_{abcde5} \\ \langle \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d \gamma_e \rangle_T &= -64c^2 \epsilon_{abcde5} \end{aligned}$$

Definiendo una especie de nuevo Γ_* en una dimensión menos que denotaremos por $\hat{\Gamma}_* = \hat{\gamma}_0 \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3 \hat{\gamma}_4$, con $\hat{\Gamma}_* = -cI_{(4)}$ donde estas matrices $\hat{\gamma}$ corresponden a uno de los bloques de las matrices γ , es decir:

$$\gamma_a = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\gamma}_a \\ -\hat{\gamma}_a & 0 \end{pmatrix}$$

Es posible verificar:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\Gamma}_* \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d \gamma_e \rangle_T &= -64c^2 \epsilon_{abcde5} \\ \langle \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d \gamma_e \rangle_T &= -64c \epsilon_{abcde5} \\ \langle M_{ab} M_{cd} \gamma_e \rangle_T &= -16c \epsilon_{abcde5} \end{aligned}$$

Si ahora identificamos $\gamma_e = P_e$, con $P_0 = c^{-1}(H + c^2 M)$, $J_{ij} = M_{ij}$, $M_{i0} = cK_i$ y $\hat{\Gamma}_* = 2M$, se obtienen mediante (5.20) y (5.21) las relaciones de conmutación del álgebra de Bargmann [29].

Debido a la expresión (5.18), los únicos tensores invariantes no nulos del álgebra de Newton–Hooke con extensión central tienen la forma:

$$\langle J_{ij} J_{kl} P_0 \rangle_T = -16c \epsilon_{ijkl05}$$

$$\langle J_{ij} J_{kl} P_0 \rangle_T = \frac{1}{c} \langle J_{ij} J_{kl} (H + Mc^2) \rangle_T \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{c} \langle J_{ij} J_{kl} (H + Mc^2) \rangle_T \\ &= \frac{1}{c} \langle J_{ij} J_{kl} H \rangle_T + c \langle J_{ij} J_{kl} M \rangle_T \end{aligned} \quad (5.25)$$

Donde tomando el límite $c \rightarrow \infty$, nos queda que $\langle J_{ij} J_{kl} M \rangle_T = -16\epsilon_{ijkl05}$, el otro tensor invariante no nulo para el álgebra de Newton–Hooke es:

$$\langle M_{ij} M_{k0} \gamma_l \rangle_T = -16c\epsilon_{ijk0l5}$$

$$\langle J_{ij} J_{k0} \gamma_l \rangle_T = c \langle J_{ij} K_k P_l \rangle_T \quad (5.26)$$

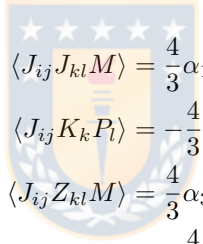
$$= c \langle J_{ij} K_k P_l \rangle_T \quad (5.27)$$

Así

$$\begin{aligned} \langle M_{ij} M_{k0} \gamma_l \rangle_T &= -16\epsilon_{ijk0l5} \\ &= 16\epsilon_{ijk0l5} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Finalmente los 2 tensores invariantes del álgebra de Newton–Hooke son: $\langle J_{ij} J_{kl} M \rangle = -16\epsilon_{ijkl0}$ y $\langle J_{ij} K_k P_l \rangle = 16\epsilon_{ijkl0}$, donde $\langle \dots \rangle_T = \langle \dots \rangle$.

Los tensores invariantes son encontrados usando el teorema VII.2 de [53] sobre los tensores invariantes del álgebra de Newton–Hooke.



$$\begin{aligned} \langle J_{ij} J_{kl} M \rangle &= \frac{4}{3} \alpha_1 l c \epsilon_{ijkl0} \\ \langle J_{ij} K_k P_l \rangle &= -\frac{4}{3} \alpha_1 l c \epsilon_{ijkl0} \\ \langle J_{ij} Z_{kl} M \rangle &= \frac{4}{3} \alpha_3 l c \epsilon_{ijkl0} \\ \langle Z_{ij} K_k P_l \rangle &= -\frac{4}{3} \alpha_3 l c \epsilon_{ijkl0} \\ \langle J_{ij} Z_{k0} P_l \rangle &= -\frac{4}{3} \alpha_3 l c \epsilon_{ijkl0} \\ \langle J_{ij} J_{kl} N \rangle &= \frac{4}{3} \alpha_3 l c \epsilon_{ijkl0} \\ \langle J_{ij} K_k Z_l \rangle &= -\frac{4}{3} \alpha_3 l c \epsilon_{ijkl0} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Donde las constantes α_1 y α_3 son adimensionales ¹.

5.3. Cálculo Lagrangeano Chern–Simons

El lagrangeano Chern–Simons se calculará usando el método de subespacios [47]. Se expresa el álgebra de gauge como suma directa de sus subespacios vectoriales:

$$G_{B_5} = \langle \{J_{ij}\} \rangle \dot{+} \langle \{P_i\} \rangle \dot{+} \langle \{K_i\} \rangle \dot{+} \langle \{H\} \rangle \dot{+} \langle \{M\} \rangle \dot{+} \langle \{N\} \rangle \dot{+} \langle \{Z_{ij}\} \rangle \dot{+} \langle \{Z_{i0}\} \rangle \dot{+} \langle \{Z_i\} \rangle \dot{+} \langle \{Z_0\} \rangle$$

¹ Se han introducido los factores l, c con el fin de absorber la dimensión de $\langle \dots \rangle$ y se ha reescalado el valor de los tensores invariantes por un factor $\frac{1}{12}$

El lagrangeano de transgresión $L_{T, G_{B_5}} = kQ^{(5)}(A_2, A_0)$ donde:

$$\begin{aligned} A_0 &= 0 \\ A_1 &= \omega \\ A_2 &= \omega + q + e + h + \tau + h_0 + m_0 + n_0 + \omega_0 + q_0 \end{aligned}$$

pero $A_0 = 0$ por lo que el mencionado lagrangeano de transgresión es una forma de Chern–Simons con:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2}\omega^{ij}J_{ij}, & \omega_0 &= \frac{1}{c}\omega^iK_i, & e &= \frac{1}{l}e^iP_i, & e_0 &= \frac{c}{l}\tau H, & m_0 &= \frac{1}{cl}mM, \\ k_0 &= \frac{1}{c}k^iZ_{i0}, & k &= \frac{1}{2}k^{ij}Z_{ij}, & h_0 &= \frac{1}{c}\hat{\tau}Z_0, & h &= \frac{1}{l}h^iZ_i, & n_0 &= \frac{1}{cl}nN \end{aligned} \quad (5.30)$$

Por otro lado

$$Q^{(2d+1)}(A, \bar{A}) = (d+1) \int_0^1 dt \langle (A - \bar{A}) F_t^d \rangle \quad (5.31)$$

con

$$F_t(A, \bar{A}) = dA_t(A, \bar{A}) + \frac{1}{2}[A_t(A, \bar{A}), A_t(A, \bar{A})]; \quad A_t(A, \bar{A}) = \bar{A} + t(A - \bar{A})$$

El segundo término de la curvatura se puede escribir como el conmutador en vez de la conexión al cuadrado, ya que se observa que para una p -forma α y una k -forma β se tiene:

$$\begin{aligned} [\alpha, \beta] &= \alpha\beta - (-1)^{pk}\beta\alpha \\ &= (-1)^{pk}((-1)^{pk}\alpha\beta - \beta\alpha) \\ &= -(-1)^{pk}(\beta\alpha - (-1)^{pk}\alpha\beta) \\ &= -(-1)^{pk}[\beta, \alpha] \end{aligned} \quad (5.32)$$

Como la conexión es una 1-forma la relación $[A, A] = 2A^2$. El lagrangeano puede ser calculado usando la fórmula triangular [?] de donde se tiene que:

$$Q^{(5)}(A_2, A_0) = Q^{(5)}(A_2, A_1) + Q^{(5)}(A_1, A_0) + dB^{(4)}(A_2, A_1, A_0)$$

5.3.1. Cálculo de $Q^{(5)}(A_1, A_0)$

Se tiene que el valor de $A_t(A_1, A_0) = A_0 + t(A_1 - A_0) = t\omega$ por lo que la correspondiente curvatura es:

$$F_t(A_1, A_0) = t d\omega + \frac{t^2}{2}[\omega, \omega]$$

con $d\omega = \frac{1}{2}d\omega^{ij}J_{ij} \propto J_{ij}$ y $[\omega, \omega] = \frac{1}{4}\omega^{ij}\omega^{kl}[J_{ij}, J_{kl}] \propto J_{ij}$. Pero como no hay tensores invariantes de la forma $\langle J \cdots J \rangle$ se tiene que:

$$Q^{(5)}(A_1, A_0) = 0$$

5.3.2. Cálculo de $Q^{(5)}(A_2, A_1)$

Para esta conexión se tiene que:

$$A_t(A_2, A_1) = A_1 + t(A_2 - A_1) = \omega + t(k + e + h + e_0 + h_0 + m_0 + n_0 + \omega_0 + k_0)$$

Así la curvatura vendrá dada por:

$$\begin{aligned}
F_t(A_2, A_1) &= d(\omega + tk + te + th + te_0 + th_0 + tm_0 + tn_0 + t\omega_0 + tk_0) + \frac{1}{2}[\omega, \omega] + t[\omega, k] \\
&\quad + t[\omega, e] + t[\omega, h] + t[\omega, \omega_0] + t[\omega, k_0] + t^2[k, e] + t^2[k, \omega_0] + t^2[e, \omega_0] \\
&\quad + t^2[e, k_0] + t^2[e, e_0] + t^2[h, \omega_0] + t^2[h_0, \omega_0] + t^2[\omega_0, e_0] + t^2[k_0, e_0] \\
&= d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] + t(dk + [\omega, k]) + t(d\omega_0 + [\omega, \omega_0]) + t(dk_0 + [\omega, k_0]) + t^2[e, h] \\
&\quad + t^2[k, \omega_0] + t(de + [\omega, e]) + t^2[e_0, \omega_0] + t(dh + [\omega, h]) + t^2[k, e] + t^2[h_0, \omega_0] \\
&\quad + t^2[e_0, k_0] + tde_0 + tdh_0 + tdm_0 + t^2[e, \omega_0] + tdn_0 + t^2[h, \omega_0] + t^2[e, k_0] \\
&= R + tDk + tD\omega_0 + tDk_0 + t^2[e, e_0] + t^2[k, \omega_0] + tT + t^2[e_0, \omega_0] + tDh + t^2[k, e] \\
&\quad + t^2[h_0, \omega_0] + t^2[e_0, k_0] + tde_0 + tdh_0 + tdm_0 + t^2[e, \omega_0] + tdn_0 + t^2[h, \omega_0] + t^2[e, k_0]
\end{aligned}$$

Donde se usó la relación (5.32) y las relaciones de conmutación (5.2) para descartar los términos nulos. Además se tiene que:

$Dk = dk + [\omega, k] \propto Z_{ij}$	$D\omega_0 = d\omega_0 + [\omega, \omega_0] \propto K_i$
$Dk_0 = dk_0 + [\omega, k_0] \propto Z_{i0}$	$[e, e_0] = \frac{1}{c}e^i\tau[P_i, H] \propto Z_{i0}$
$[k, \omega_0] = \frac{1}{2c}k^{ij}\omega^k[Z_{ij}, K_k] \propto Z_{i0}$	$T = de + [\omega, e] \propto P_i$
$[e_0, \omega_0] = \frac{1}{l}\tau\omega^i[H, K_i] \propto P_i$	$Dh = dh + [\omega, h] \propto Z_i$
$[k, e] = \frac{1}{2l}k^{ij}e^k[Z_{ij}, P_k] \propto Z_i$	$[h_0, \omega_0] = \frac{1}{l}\hat{\tau}\omega^i[Z_0, K_i] \propto Z_i$
$[e_0, k_0] = \frac{1}{l}\tau k^i[H, Z_{i0}] \propto Z_i$	$de_0 = \frac{c}{l}d\tau H \propto H$
$dh_0 = \frac{c}{l}\hat{\tau}Z_0 \propto Z_0$	$dm_0 = \frac{1}{cl}dmM \propto M$
$[e, \omega_0] = \frac{1}{cl}e^i\omega^j[P_i, K_j] \propto M$	$dn_0 = \frac{1}{cl}dnN \propto N$
$[h, \omega_0] = \frac{1}{cl}h^i\omega^j[Z_i, K_j] \propto N$	$[e, k_0] = \frac{1}{2l}e^ik^j[P_i, Z_{j0}] \propto N$
$R = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \propto J_{ij}$	

Así analizando los tensores invariantes (5.29) la contribución al lagrangeano toma la forma:

$$\begin{aligned}
Q^{(5)}(A_2, A_1) &= 3 \int_0^1 dt \langle (\omega_0 + k + k_0 + e + h + m_0 + n_0) (R + tDk + tD\omega_0 + tDk_0 \\
&\quad + t^2[e, e_0] + t^2[k, \omega_0] + tT + t^2[e_0, \omega_0] + tDh + t^2[k, e] + t^2[h_0, \omega_0] \\
&\quad + t^2[e_0, k_0] + tde_0 + tdh_0 + tdm_0 + t^2[e, \omega_0] + tdn_0 + t^2[h, \omega_0] + t^2[e, k_0])^2 \rangle \\
&= 3 \int_0^1 dt \langle \omega_0 (2tRT + 2t^2R[e_0, \omega_0] + 2tRDh + 2t^2R[h_0, \omega_0] + 2t^2R[e_0, k_0] \\
&\quad + 2t^2DkT + 2t^3Dk[e_0, \omega_0]) + k(2tRdm_0 + 2t^2R[e, \omega_0] + 2t^2TD\omega_0 + 2t^3D\omega_0[e_0, \omega_0]) \\
&\quad + k_0(2tRT + 2t^2R[e_0, \omega_0]) + e(2tRD\omega_0 + 2t^2R[e, e_0] + 2t^2R[k, \omega_0] \\
&\quad + 2tR[\omega, k_0] + 2t^2[\omega, k]D\omega_0) + 2thRD\omega_0 + m_0(R^2 + 2tR[\omega, k]) + n_0R^2 \rangle \\
&= 3 \left\langle RT\omega_0 + \frac{2}{3}R[e_0, \omega_0]\omega_0 + RDh\omega_0 + \frac{2}{3}R[h_0, \omega_0]\omega_0 + \frac{2}{3}R[e_0, k_0]\omega_0 \right. \\
&\quad + \frac{2}{3}DkT\omega_0 + \frac{1}{2}Dk[e_0, \omega_0]\omega_0 + Rdm_0k + \frac{2}{3}R[e, \omega_0]k + \frac{2}{3}TD\omega_0k + \frac{1}{2}D\omega_0[e_0, \omega_0]k \\
&\quad + RTk_0 + \frac{2}{3}R[e_0, \omega_0]k_0 + RD\omega_0e + \frac{2}{3}R[e, e_0]e + \frac{2}{3}R[k, \omega_0]e + R[\omega, k_0]e \\
&\quad \left. + \frac{2}{3}[\omega, k]D\omega_0e + RD\omega_0h + R^2m_0 + R[\omega, k]m_0 + R^2n_0 \right\rangle \tag{5.33}
\end{aligned}$$

Se ha usado el hecho de que R, T, Dh, Dk, dm_0 y $D\omega_0$ son 2-formas, ya que si α y β son formas pares se cumple que:

$$(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta) \wedge (\alpha + \beta) = \alpha^2 + \alpha \wedge \beta + \beta \wedge \alpha + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha \wedge \beta + \beta^2$$

Ahora usando las relaciones de (5.30) y reemplazando (5.29) en (5.33) se obtiene que:

$$\begin{aligned}
Q^{(5)}(A_2, A_1) = & 3 \left(\frac{R^{ij} T^k \omega^l}{2lc} \langle J_{ij} P_k K_l \rangle + \frac{R^{ij} \tau \omega^k \omega^l}{3lc} \langle J_{ij} P_k K_l \rangle + \frac{R^{ij} D h^k \omega^l}{2lc} \langle J_{ij} Z_k K_l \rangle \right. \\
& + \frac{R^{ij} \hat{\tau} \omega^k \omega^l}{3lc} \langle J_{ij} Z_k K_l \rangle + \frac{R^{ij} \tau k^k \omega^l}{3lc} \langle J_{ij} Z_k K_l \rangle + \frac{D k^{ij} T^k \omega^l}{3lc} \langle Z_{ij} P_k K_l \rangle \\
& + \frac{D k^{ij} \tau \omega^k \omega^l}{4lc} \langle Z_{ij} P_k K_l \rangle + \frac{R^{ij} k^{kl} dm}{4lc} \langle J_{ij} Z_{kj} M \rangle + \frac{R^{ij} k^{kl} e^m \omega_m}{6lc} \langle J_{ij} Z_{kj} M \rangle \\
& + \frac{T^i D \omega^j k^{kl}}{3lc} \langle Z_{ij} P_k K_l \rangle + \frac{D \omega^i \tau \omega^j k^{kl}}{4lc} \langle Z_{ij} P_k K_l \rangle + \frac{R^{ij} T^k k^l}{2lc} \langle J_{ij} P_k Z_{l0} \rangle \\
& + \frac{R^{ij} \tau \omega^k k^l}{3lc} \langle J_{ij} P_k Z_{l0} \rangle + \frac{R^{ij} D \omega^k e^l}{2lc} \langle J_{ij} P_k K_l \rangle + \frac{\nu^2 R^{ij} e^k \tau e^l}{3lc} \langle J_{ij} P_k Z_l \rangle \\
& + \frac{R^{ij} k^{km} \omega_m e^l}{6lc} \langle J_{ij} P_k Z_{l0} \rangle + \frac{R^{ij} \omega^{km} k_m e^l}{2lc} \langle J_{ij} P_k Z_{l0} \rangle + \frac{\omega_m^i k^{jm} D \omega^k e^l}{6lc} \langle Z_{ij} P_k K_l \rangle \\
& + \frac{R^{ij} D \omega^k h^l}{2lc} \langle J_{ij} Z_k K_l \rangle + \frac{R^{ij} R^{kl} m}{4lc} \langle J_{ij} J_{kl} M \rangle + \frac{R^{ij} \omega_m^k k^{ml} m}{4lc} \langle J_{ij} Z_{kl} M \rangle + \frac{R^{ij} R^{kl} n}{4lc} \langle J_{ij} J_{kl} N \rangle \Big) \\
= & \epsilon_{ijkl} \left(2\alpha_1 R^{ij} T^k \omega^l + \frac{4}{3} \alpha_1 R^{ij} \tau \omega^k \omega^l + 2\alpha_3 R^{ij} D h^k \omega^l + \frac{4}{3} \alpha_3 R^{ij} \hat{\tau} \omega^k \omega^l \right. \\
& + \frac{4}{3} \alpha_3 R^{ij} \tau k^k \omega^l + \frac{4}{3} \alpha_3 D k^{ij} T^k \omega^l + \alpha_3 D k^{ij} \tau \omega^k \omega^l - \alpha_3 R^{ij} k^{kl} dm - \frac{2}{3} \alpha_3 R^{ij} k^{kl} e^m \omega_m \\
& + \frac{4}{3} \alpha_3 T^i D \omega^j k^{kl} + \alpha_3 D \omega^i \tau \omega^j k^{kl} + 2\alpha_3 R^{ij} T^k k^l + \frac{4}{3} \alpha_3 R^{ij} \tau \omega^k k^l + 2\alpha_1 R^{ij} D \omega^k e^l \\
& + \frac{4}{3} \nu^2 \alpha_3 R^{ij} e^k \tau e^l + \frac{2}{3} \alpha_3 R^{ij} k^{km} \omega_m e^l + 2\alpha_3 R^{ij} \omega^{km} k_m e^l + \frac{2}{3} \alpha_3 \omega_m^i k^{jm} D \omega^k e^l \\
& \left. + 2\alpha_3 R^{ij} D \omega^k h^l - \alpha_1 R^{ij} R^{kl} m - \alpha_3 R^{ij} \omega_m^k k^{ml} m - \alpha_3 R^{ij} R^{kl} n \right)
\end{aligned}$$

El lagrangeano Chern–Simons invariante bajo el álgebra $\mathcal{GB}_5$ es dado por

$$\begin{aligned}
L_{\text{ChS}, G_{B_5}} = & \alpha_1 \epsilon_{ijkl} \left(-2R^{ij} T^k \omega^l - \frac{4}{3} R^{ij} \omega^k \omega^l \tau + 2R^{ij} D \omega^k e^l - R^{ij} R^{kl} m \right) \\
& + \alpha_3 \epsilon_{ijkl} \left(\frac{4}{3} \nu^2 R^{ij} e^k e^l \tau - 2R^{ij} D h^k \omega^l - \frac{4}{3} R^{ij} k^k \omega^l \tau - \frac{4}{3} R^{ij} \omega^k \omega^l \hat{\tau} \right. \\
& + 2R^{ij} D \omega^k h^l - \frac{4}{3} D k^{ij} T^k \omega^l - D k^{ij} \omega^k \omega^l \tau - R^{ij} k^{kl} dm - \frac{2}{3} R^{ij} k^{kl} e^m \omega_m \\
& - \frac{2}{3} R^{ij} \omega_m^k k^{ml} m - \frac{4}{3} k^{ij} T^k D \omega^l - k^{ij} D \omega^k \omega^l \tau - 2R^{ij} T^k k^l - \frac{4}{3} R^{ij} \omega^k k^l \tau \\
& \left. + \frac{2}{3} R^{ij} k^{km} \omega_m e^l + \frac{2}{3} \omega_m^i k^{jm} D \omega^k e^l - R^{ij} R^{kl} n - 2R^{ij} \omega^{km} k_m e^l \right). \quad (5.34)
\end{aligned}$$

De imponer $k^{ij} = k^i = 0$ el lagrangeano (5.34) es reducido a la expresión

$$\begin{aligned}
L_{\text{ChS}, G_{B_5}} = & \alpha_1 \epsilon_{ijkl} \left(-2R^{ij} T^k \omega^l - \frac{4}{3} R^{ij} \omega^k \omega^l \tau + 2R^{ij} D \omega^k e^l - R^{ij} R^{kl} m \right) \\
& + \alpha_3 \epsilon_{ijkl} \left(\frac{4}{3} \nu^2 R^{ij} e^k e^l \tau - 2R^{ij} D h^k \omega^l - \frac{4}{3} R^{ij} \omega^k \omega^l \hat{\tau} + 2R^{ij} D \omega^k h^l - R^{ij} R^{kl} n \right). \quad (5.35)
\end{aligned}$$

5.4. Ecuaciones de movimiento

Ahora si consideramos que $L = L_{ChS}^{(5)} + \kappa L_M$, donde postulamos la una forma energía momentum.

$$\begin{aligned} T_i &= * \left(\frac{\delta L_M}{\delta e^i} \right) \\ T_0 &= * \left(\frac{\delta L_M}{\delta \tau} \right). \end{aligned}$$

además el tensor energía momentum será modelado como un fluido perfecto con presión, cuyas componentes son

$$\begin{aligned} T_{00} &= -\rho^{(e)} \\ T_{ii} &= \frac{4p^{(e)}}{c^2}. \end{aligned}$$

Y un tensor energía momentum asociado al campo h^a que también será modelado como un fluido perfecto con presión

$$\begin{aligned} T_{00}^{(h)} &= -\rho^{(h)} \\ T_{ii}^{(h)} &= \frac{4p^{(h)}}{c^2}. \end{aligned}$$

Las ecuaciones de movimiento que nos entrega esta acción son dadas por

$$\varepsilon_{ijkl} \left(-\frac{4}{3} \alpha_1 R^{ij} \omega^k \omega^l + \frac{4}{3} \alpha_3 \nu^2 R^{ij} e^k e^l \right) = -\kappa \frac{\delta L_M}{\delta \tau} \quad (5.36)$$

$$\frac{4}{3} \alpha_3 \varepsilon_{ijkl} R^{ij} \omega^k \omega^l = \kappa \frac{\delta L_M}{\delta \hat{\tau}} \quad (5.37)$$

$$2\varepsilon_{ijkl} \left(\alpha_1 R^{ij} D\omega^k - \frac{4}{3} \alpha_3 \nu^2 R^{ij} e^k \tau \right) = -\kappa \frac{\delta L_M}{\delta e^l} \quad (5.38)$$

$$2\alpha_3 \varepsilon_{ijkl} R^{ij} D\omega^k = -\kappa \frac{\delta L_M}{\delta h^l} \quad (5.39)$$

$$a_1 \varepsilon_{ijkl} R^{ij} R^{kl} = \kappa \frac{\delta L_M}{\delta m} \quad (5.40)$$

$$a_3 \varepsilon_{ijkl} R^{ij} R^{kl} = \kappa \frac{\delta L_M}{\delta n} \quad (5.41)$$

$$4\varepsilon_{ijkl} \left(\frac{2}{3} \alpha_1 R^{ij} \omega^k \tau - \alpha_1 R^{ij} T^k + \frac{2}{3} \alpha_3 R^{ij} \omega^k \hat{\tau} - \alpha_3 R^{ij} D h^k \right) = -\kappa \frac{\delta L_M}{\delta \omega^l} \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijkl} \left(-2\alpha_1 R^{km} e_m \omega^l - 4\alpha_1 T^k D\omega^l - \frac{4}{3} \alpha_1 \omega^k \omega^l d\tau - \frac{8}{3} \alpha_1 D\omega^k \omega^l \tau + 2\alpha_1 R^{km} \omega_m e^l \right. \\ \left. - 2\alpha_1 R^{kl} dm + \frac{8}{3} \nu^2 \alpha_3 T^k e^l \tau + \frac{4}{3} \alpha_3 e^k e^l d\tau - 2\alpha_3 R^{km} h_m \omega^l - 4\alpha_3 D h^k D\omega^l \right. \\ \left. - \frac{4}{3} \alpha_3 \omega^k \omega^l d\hat{\tau} - \frac{8}{3} \alpha_3 D\omega^k \omega^l \hat{\tau} + 2\alpha_3 R^{km} \omega_m h^l - \alpha_3 R^{kl} dn \right) = -\kappa \frac{\delta L_M}{\delta \omega^{ij}}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Para tener una gravedad de Newton–Cartan en donde solo e^i , h^i , m y n son campos independientes es necesario imponer los siguientes *constraints*, de manera análoga a como en relatividad general la conexión de espín depende del vielbein.

$$\begin{aligned} R(H) &= d\tau = 0; \quad R^i(P_i) = T^i - \omega^i \tau = 0 \\ R(M) &= dm - \omega^i e_i = 0; \quad R(Z_0) = d\hat{\tau} = 0 \\ R^i(Z_i) &= Dh^i - \omega^i \hat{\tau} - k^i \tau + k_j^i e^j = 0 \\ R(N) &= dn - \omega^i h_i - k^i e_i = 0 \end{aligned} \quad (5.44)$$

Esto nos entrega las siguientes ecuaciones de Bianchi

$$DT^i = D\omega^i \tau \rightarrow R^{ij} e_j = D\omega^i \tau \rightarrow R_{[\lambda\mu}{}^{ij} e_{\nu]j} = (D_{[\lambda} \omega_{\mu]})^i \tau_{\nu}, \quad (5.45)$$

$$e_{[\lambda i} (D_{\mu} \omega_{\nu]})^i = 0 \quad (5.46)$$

Al ser la torsión nula la variación del lagrangeano de materia con respecto a la conexión de espín también lo será y además usando los *constraints* de (5.44), entonces, la ecuación (5.42) se reduce a lo siguiente

$$4\varepsilon_{ijkl} \left(\frac{\alpha_1}{3} R^{ij} \omega^k \tau + \frac{\alpha_3}{3} R^{ij} \omega^k \hat{\tau} \right) = 0 \quad \hat{\tau} = -\frac{\alpha}{3} \tau. \quad (5.47)$$

Usando las ecuaciones de Bianchi (5.45), (5.46) en la ecuación (5.43)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijkl} \left(-\frac{10\alpha_1}{3} D\omega^k \omega^l \tau + 2\alpha_1 R^{km} \omega_m e^l - \frac{8}{3} \nu^2 \alpha_3 \omega^k \tau e^l - \alpha_1 R^{kl} dm \right. \\ \left. + 2\alpha_3 R^{km} \omega_m h^l - \frac{10}{3} \alpha_3 D\omega^k \omega^l \hat{\tau} - \alpha_3 R^{kl} dn \right) = 0, \end{aligned}$$

y como $\tau^2 = 0$ se tiene

$$\varepsilon_{ijkl} \left(-\frac{13\alpha_1}{3} D\omega^k \omega^l \tau - \frac{13}{3} \alpha_3 D\omega^k \omega^l \hat{\tau} \right) = 0,$$

luego por (5.47) la ecuación anterior se satisface idénticamente. Las ecuaciones (5.40), (5.41) implican que el espacio es una variedad plana.

Ahora de reemplazar la ecuación de movimiento (5.37) en (5.36) y (5.39) en (5.38)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijkl} R^{ij} e^k e^l &= -\frac{6}{\nu^2} \left(k_1 \frac{\delta L_M}{\delta \tau} - \alpha k_2 \frac{\delta L_M}{\delta \hat{\tau}} \right), \\ \varepsilon_{ijkl} R^{ij} e^k \tau &= \frac{3}{\nu^2} \left(k_1 \frac{\delta L_M}{\delta e^l} - \alpha k_2 \frac{\delta L_M}{\delta h^l} \right). \end{aligned}$$

Y calculando los siguientes duales y escribiendo en lenguaje coordenado ²

$$*(T_0) \delta \tau = \det(g) \delta_\delta^\sigma T_0^\sigma \delta \tau_\sigma^\delta dx^5. \quad (5.48)$$

$$\varepsilon_{ijkl} R^{ij} e^k e^l \delta \tau = 2 \det(g) (\delta_\delta^\sigma R - 2R_\delta^\sigma) \delta \tau_\sigma^\delta dx^5. \quad (5.49)$$

$$\varepsilon_{ijkl} R^{ij} e^k \tau \delta e^l = -2 \det(g) (\delta_\delta^\sigma R - 2R_\delta^\sigma) \delta e_\sigma^\delta dx^5. \quad (5.50)$$

²Para detalles del cálculo ver apéndice A.

Se han tomado las siguientes consideraciones, $\tau_\mu = \partial_\mu f(x^\nu) = \delta_\mu^0$, $\tau^\mu = (1, \tau^i)$ con $f(x^\nu) = t$, siendo t el tiempo absoluto. Además $\tau^\mu \tau_\mu = 1$ y donde $R = 0$.

Luego al usar (5.48), (5.49) y (5.50) sobre estas ecuaciones y considerando que la componente no nula del tensor de Ricci es $R_{00} = \nabla^2 \phi$, se tiene que lo siguiente

$$R_{00} = \frac{3}{2\nu^2} \left(k_1 \rho^{(e)} - \alpha k_2 \rho^{(h)} \right), \quad (5.51)$$

$$R_{00} = \frac{3}{c^2 \nu^2} \left(k_1 p^{(e)} - \alpha k_2 p^{(h)} \right). \quad (5.52)$$

La ecuación (5.51) es el resultado que fue encontrado en [3]

$$\nabla^2 \phi = \frac{3}{2\nu^2} (k_1 \rho^{(e)} - \alpha k_2 \rho^{(h)}), \quad (5.53)$$

donde las constantes fueron definidas como

$$\nu = \frac{c}{l},$$

con c la velocidad de la luz y l el radio cósmico, además las constantes $\beta_1 = \beta_2 = \kappa$, así estas definiciones son análogas a las usadas en [2]

$$k_1 = \frac{\kappa}{8\alpha_3} = 8\pi G,$$

con G la constante de gravitación universal en 5 dimensiones,

$$k_2 = \frac{\kappa}{24\alpha_3},$$

$$\alpha = \frac{3\alpha_1}{\alpha_3}.$$

De comparar estas dos ecuaciones (5.51), (5.52) podemos encontrar ecuaciones de estado, y usando que $k_1 = 3k_2$

$$\begin{aligned} 2k_1 p^{(e)} - 2\alpha k_2 p^{(h)} &= \left(k_1 \rho^{(e)} - \alpha k_2 \rho^{(h)} \right) c^2 \\ 2k_1 p^{(e)} - \frac{2\alpha k_1}{3} p^{(h)} &= \left(k_1 \rho^{(e)} - \frac{\alpha k_1}{3} \rho^{(h)} \right) c^2 \\ 2p^{(e)} - \frac{2\alpha}{3} p^{(h)} &= \left(\rho^{(e)} - \frac{\alpha}{3} \rho^{(h)} \right) c^2. \end{aligned}$$

Definiendo una densidad efectiva y una presión efectiva como

$$\begin{aligned} p &= \frac{p^{(e)}}{2} - \frac{\alpha}{6} p^{(h)}, \\ \rho &= \frac{\rho^{(e)}}{2} - \frac{\alpha}{6} \rho^{(h)}, \\ p &= \frac{\rho c^2}{2}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Además por (5.47)

$$\rho^{(h)} = -\frac{3}{\alpha} \rho^{(e)},$$

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{\rho^{(e)} + \rho^{(e)}}{2} \\ &= \rho^{(e)},\end{aligned}\tag{5.55}$$

$$p = \frac{\rho^{(e)}}{2} c^2.\tag{5.56}$$

Por lo que la ecuación de Poisson puede ser escrita de sumar (5.51), (5.52) como

$$\begin{aligned}R_{00} &= \frac{3}{4\nu^2} \left(k_1 \rho^{(e)} - \alpha k_2 \rho^{(h)} + 2k_1 \frac{p^{(e)}}{c^2} - 2\alpha k_2 \frac{p^{(h)}}{c^2} \right) \\ \nabla^2 \phi &= \frac{3k_1}{2\nu^2} \left(\rho + \frac{2p}{c^2} \right).\end{aligned}\tag{5.57}$$

Podemos encontrar usando (5.55), (5.56) y (5.54) que

$$\nabla^2 \phi = \frac{3k_1}{\nu^2} \rho^{(e)} = \frac{24\pi G}{\nu^2} \rho^{(e)}.\tag{5.58}$$

Por otro lado la interacción entre los fluidos es descrita por las ecuaciones de estado

$$\begin{aligned}p^{(e)} &= \omega^{(e)} \rho^{(e)} c^2, \\ p^{(h)} &= \omega^{(h)} \rho^{(h)} c^2 = -\frac{3}{\alpha} \omega^{(h)} \rho^{(e)} c^2, \\ 2k_1 \omega^{(e)} \rho^{(e)} - 2\alpha k_2 \omega^{(h)} \rho^{(h)} &= k_1 \rho^{(e)} - \alpha k_2 \rho^{(h)} \\ 2 \left(k_1 \omega^{(e)} + 3k_2 \omega^{(h)} \right) \rho^{(e)} &= (k_1 + 3k_2) \rho^{(e)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega^{(h)} &= \frac{(k_1 + 3k_2)}{6k_2} - \frac{k_1}{3k_2} \omega^{(e)} \\ &= \frac{k_1}{3k_2} \left(\frac{1}{2} - \omega^{(e)} \right) + \frac{1}{2} \\ &= 1 - \omega^{(e)}.\end{aligned}\tag{5.59}$$

Capítulo 6

Cosmología Newton–Chern–Simons

En el presente capítulo se ha considerado una acción en 5 dimensiones $S = S_g + S_M$ que esta compuesta por un sector gravitatorio y un sector de materia, donde el sector gravitacional, es dado por la gravedad de Newton–Chern–Simons, en lugar de la acción de Einstein–Hilbert. Donde el sector de materia es descrito por un fluido perfecto. Se estudian las implicaciones en la evolución cosmológica, al reemplazar la acción de Einstein–Hilbert por la acción Newton–Chern–Simons para una métrica de Friedman–Lemaître–Robertson–Walker.

También se demuestra que la cosmología Newton–Chern–Simons es una especie de análogo de la versión proyectable de la teoría de Hořava–Lifshitz en $(3 + 1)$ dimensiones, aunque el término que contiene Q , no está presente.

En particular, se demuestra que no hay solución de De Sitter, aunque el comportamiento se produce en un futuro lejano. Además, una solución fantasma con una singularidad futura, que recuerda a un pequeño *Big Rip* es encontrada. Finalmente, una breve revisión de la adiabaticidad en la evolución cósmica es realizada.

6.1. Modelando Fluidos

Siguiendo el formalismo usado en [9]. Al introducir coordenadas locales (t, x^i) en 4 dimensiones espaciales se tiene que $\tau = dx^0$, $h = \delta^{ij} \partial_i \otimes \partial_j$, corresponden a la métrica temporal y espacial respectivamente. El modelo de materia es asumido para ser un fluido de ideal con velocidad u , el cual es un vector tipo tiempo. La vorticidad y la tensión relativas a un vector tiempo V , donde $\tau(V) = 1$, $\tau_a = g_{\alpha\beta} V^\beta$ son dadas por

$$\begin{aligned}\Omega^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(u_{;\lambda}^\alpha h^{\lambda\beta} - u_{;\lambda}^\beta h^{\lambda\alpha}), \\ \Theta^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(u_{;\lambda}^\alpha h^{\lambda\beta} + u_{;\lambda}^\beta h^{\lambda\alpha}).\end{aligned}$$

La velocidad de expansión es $\theta = h^{\alpha\beta} \Theta_{\alpha\beta}$ y la velocidad de corte es la parte libre de traza de la tensión, $\sigma = \Theta - \frac{1}{4}\theta h$.

Es posible mostrar que $\theta = u_{;\sigma}^\sigma$ y que la derivada covariante de la velocidad puede ser descompuesta como se muestra a continuación

$$h_{\alpha\lambda} u_{;\beta}^\lambda = \Theta_{\alpha\beta} + \Omega_{\alpha\beta} + h_{\alpha\rho} V^\lambda u_{;\lambda}^\rho g_{\beta\sigma} V^\sigma.$$

Desde esta ecuación podemos derivar la ecuación de Raychaudhuri, para ello consideremos

$$\begin{aligned} u^\alpha_{;\beta;\gamma} - u^\alpha_{;\gamma;\beta} &= R^\alpha_{\sigma\gamma\beta} u^\sigma, \\ u^\beta u^\alpha_{;\alpha;\beta} &= (u^\beta u^\alpha_{;\beta})_{;\alpha} - u^\beta_{;\alpha} u^\alpha_{;\beta} - R_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta. \end{aligned}$$

Podemos escribir los términos del lado derecho de la ecuación anterior como

$$\begin{aligned} (u^\beta u^\alpha_{;\beta})_{;\alpha} &= \operatorname{div}(\nabla_u u), \\ u^\beta_{;\alpha} u^\alpha_{;\beta} &= h^{\rho\alpha} h^{\sigma\beta} (\Theta_{\rho\beta} \Theta_{\sigma\alpha} + \Omega_{\rho\beta} \Omega_{\sigma\alpha}), \\ R_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta &= \frac{3k_1}{2\nu^2} \left(\rho + \frac{2p}{c^2} \right), \end{aligned}$$

donde hemos usado (5.57) junto a las ecuaciones

$$R_{\alpha\beta} = \frac{3k_1}{2\nu^2} \left(\rho + \frac{2p}{c^2} \right) \tau_\alpha \tau_\beta, \quad (6.1)$$

$$\tau_\alpha \tau_\beta = g_{\alpha\sigma} g_{\beta\rho} u^\sigma u^\rho. \quad (6.2)$$

Por lo que la ecuación de Raychaudhuri es dada por

$$\operatorname{div}(\nabla_u u) = \nabla_u \theta + \frac{1}{4} \theta^2 + \sigma^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} - \Omega^{\alpha\beta} \Omega_{\alpha\beta} + \frac{3k_1}{2\nu^2} \left(\rho + \frac{2p}{c^2} \right), \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{1}{2} (h^{ij} \dot{h}_{ij})_{,0} - \frac{1}{4} h^{ij} \dot{h}_{jk} h^{kl} \dot{h}_{li} + 2h^{ij} \kappa_{0j,i} + \kappa^{ij} \kappa_{ij} \\ &= \frac{3k_1}{2\nu^2} \left(\rho + \frac{2p}{c^2} \right). \end{aligned} \quad (6.4)$$

La ecuación (6.4) es equivalente a la ecuación (6.3)

$$R_{ij} = 0,$$

$$\begin{aligned} R_{0i} &= h^{jk} \kappa_{ik,j} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esta última ecuación es equivalente $\Omega^{ij}_{,j} = 0$ debido a que para algún $u = V$

$$\Omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (h_{ac} u^c_{,b} - h_{bc} u^c_{,a} - 2\kappa_{ab}).$$

El resto de cantidades son dadas por

$$\Theta_{ab} = \frac{1}{2} (h_{ac} u^c_{,b} - h_{bc} u^c_{,a} + \dot{h}_{ab}), \quad (6.5)$$

$$\theta = u^a_{,a} + \frac{1}{2} h^{ab} \dot{h}_{ab}, \quad (6.6)$$

$$\operatorname{div}(\nabla_u u) = \dot{u}^a_{,a} + 2h^{ab} \kappa_{0a,b} + 2h^{bc} \kappa_{ac} u^a_{,b} + h^{bc} u^a_{,b} \dot{h}_{ac} + u^a u^b_{,ab} + u^a_{,b} u^b_{,a}. \quad (6.7)$$

Para un fluido ideal con presión la ecuación de continuidad es dada por [16]

$$\dot{\rho} + \left[\left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^i \right]_{,i} + \frac{1}{2} h^{ij} \dot{h}_{ij} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0. \quad (6.8)$$

Mientras que la ecuación de Euler

$$\dot{u}^i + u^j u_{,j}^i + 2h^{ij}\kappa_{0j} + 2u^j \left(\frac{1}{2}h^{ik}\dot{h}_{kj} + h^{ik}\kappa_{jk} \right) + \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right)^{-1} h^{ij}p_{,j} = 0. \quad (6.9)$$

Si consideramos que $\kappa_{ij} = 0$, entonces (6.8), (6.9) y (6.4) se reducen a

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + \left[\left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^i \right]_{,i} &= 0, \\ \dot{u}^i + u^j u_{,j}^i &= - \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right)^{-1} p_{,i} + g^i, \\ -g^i_{,i} &= \frac{3k_1}{2\nu^2} \left(\rho + \frac{2p}{c^2} \right), \end{aligned}$$

donde $g^i = -2\kappa_{0i}$. Si asumimos que ρ y p en coordenadas adaptadas son solo funciones del tiempo y además de usar la ecuación de Euler, esto implica que

$$\begin{aligned} \nabla_u u &= - \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right)^{-1} \text{div}(ph) \\ &= 0, \end{aligned}$$

por otro lado la ecuación de continuidad (6.8) muestra que $u^i_{,i}$ solo depende del tiempo. Por lo que (6.3) toma la forma

$$\dot{\theta} + \frac{1}{4}\theta^2 + \sigma^{ab}\sigma_{ab} - \Omega^{ab}\Omega_{ab} + \frac{3k_1}{2\nu^2} \left(\rho + \frac{2p}{c^2} \right) = 0. \quad (6.10)$$

Pero usando que θ es una función únicamente dependiente del tiempo, así (6.8) y (6.6) implican que

$$\dot{\rho} + \theta \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0, \quad (6.11)$$

ecuación que coincide con (2.74). Finalmente si consideramos un modelo homogéneo e isotrópico Friedmann Lemaitre en la teoría de Newton-Cartan, se tiene

$$\begin{aligned} V &= u, \\ h_{ij} &= a^2(t)\delta_{ij}, \\ \Omega &= 0. \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \theta &= 4\frac{\dot{a}}{a}, \\ \sigma_{ab} &= 0, \\ \dot{\theta} &= 4\frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2}. \end{aligned}$$

Así las ecuaciones (6.10), (6.11) son dadas por

$$\begin{aligned} \dot{\theta} + \frac{1}{4}\theta^2 &= -\frac{3k_1}{2\nu^2} \left(\rho + \frac{2p}{c^2} \right) \\ 4\frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} + \frac{4\dot{a}^2}{a^2} &= -\frac{3k_1}{2\nu^2} \left(\rho + \frac{2p}{c^2} \right) \\ \frac{4\ddot{a}a}{a^2} &= -\frac{3k_1}{2\nu^2} \left(\rho + \frac{2p}{c^2} \right) \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{3k_1}{8\nu^2} \left(\rho + \frac{2p}{c^2} \right). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Y al reemplazar $\nu = \frac{3}{2}$ en (6.12)

$$\begin{aligned}\frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{k_1}{6} \left(\rho + \frac{2p}{c^2} \right) \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{2p}{c^2} \right).\end{aligned}\tag{6.13}$$

Que coincide con (2.76) para nuestra densidad y presión efectiva.



6.2. Soluciones cosmológicas

En esta sección, desde ahora usaremos las unidades por simplicidad como $k_1 = 8\pi G_5 = 1 = c$ y $\nu = 1/l$. Las ecuaciones (6.10) y (6.11) la ecuación de conservación y la ecuación para la aceleración, respectivamente, donde p es la presión, ρ es la densidad de energía, $\theta = 4H$, con $H = \dot{a}/a$ como el parámetro de Hubble y a es el factor de escala cósmico.

Se visualiza inmediatamente la ausencia del *constraint* de Friedmann. Está situación es análoga a la que sucede en la versión proyectable de la teoría de Hořava–Lifshitz en (3+1) dimensiones [3]. Desde las ecuaciones (6.10) y (6.11) es posible obtener la primera integral

$$\frac{8}{3}\nu^2 H^2 = \rho + \frac{C_0}{a^2}, \quad (6.14)$$

donde C_0 es una constante de integración. El término C_0/a^2 no es materia oscura en el sentido usual, pero gravitacionalmente se comporta como un fluido cuya presión es $p = -(1/2)\rho$ lo cual, como veremos corresponde a un esquema de evolución con aceleración nula, que es un universo de Milne.

En relatividad general en (3+1) dimensiones, la materia oscura corresponde a $\rho(a) = \rho(a_0)(a_0/a)^3$. Un término de este aspecto esta presenta en la teoría de Hořava–Lifshitz en (3+1) dimensiones a través de $C(t)/a^3$, una realización de la gravedad en Hořava–Lifshitz, como una geometría dinámica en el formalismo de Newton–Cartan es discutida.

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + 3H(\rho + p) &= -Q, \\ 3\eta(2\dot{H} + 3H^2) &= p. \end{aligned}$$

donde η es un parámetro constante adimensional asociado a la invariancia bajo difeomorfismos y Q representa la cantidad de energía no conservada [10]. No existe *constraint* de Friedmann en esta teoría. Desde estas ecuaciones, es sencillo encontrar la primera integral

$$3\eta H^2 = \rho + \frac{C(t)}{a^3} \quad \text{y} \quad C(t) = C_0 + \int_{t_0}^t dt a^3 Q,$$

y $C(t)/a^3$ no es materia oscura real, pero gravitacionalmente actúa como un fluido sin presión. Ahora se retornará a (6.10) y (6.11), escribiéndolas en la siguiente forma

$$\dot{\rho} + 4H(\rho + p) = 0, \quad (6.15)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = -\frac{3}{8\nu^2}(\rho + 2p). \quad (6.16)$$

Consideremos la relación barotrópica $p = \omega\rho$, donde podemos escribir (6.15) y (6.16) en la forma

$$\dot{\rho} + 4H(1 + \omega)\rho = 0, \quad (6.17)$$

desde la cual es directo obtener

$$\rho(a) = \rho(a_0) \left(\frac{a_0}{a}\right)^{4(1+\omega)}, \quad (6.18)$$

y

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{3}{4\nu^2} \left(\omega + \frac{1}{2}\right) \rho \implies \ddot{a} \gtrless 0 \iff \omega \lesseqgtr -1/2. \quad (6.19)$$

De acuerdo a (6.14) y (6.17), con $1 + z = a_0/a$ donde z es el parámetro de redshift, por lo que el parámetro de Hubble es dado por

$$H(z) = \sqrt{\frac{3\rho(0)}{8\nu^2} (1+z)^{4(1+\omega)} + \left(H^2(0) - \frac{3\rho(0)}{8\nu^2}\right) (1+z)^2}, \quad (6.20)$$

y ahora consideraremos algunos casos particulares:

(b1) $\omega = 0$. En este caso $\rho(z) = \rho(0)(1+z)^4$ y

$$H(z) = \sqrt{\frac{3\rho(0)}{8\nu^2} (1+z)^2 + \left(H^2(0) - \frac{3\rho(0)}{8\nu^2}\right) (1+z)}, \quad (6.21)$$

donde podemos ver que

$$H(z \rightarrow \infty) \rightarrow \infty \quad y \quad H(z \rightarrow -1) \rightarrow 0. \quad (6.22)$$

(b2) $\omega = -1/2$. En este caso $\rho(z) = \rho(0)(1+z)^2$ y

$$H(z) = H(0)(1+z) \implies \ddot{a} = 0, \quad (6.23)$$

lo cual corresponde a un universo de Milne.

(b3) $\omega = -1$. En este caso $\rho(z) = \rho(0)$, con $\rho(0)$ constante, pero de acuerdo a (6.20)

$$H(z) = \sqrt{\frac{3\rho(0)}{8\nu^2} + \left(H^2(0) - \frac{3\rho(0)}{8\nu^2}\right) (1+z)^2}, \quad (6.24)$$

y desde aquí

$$H(z \rightarrow \infty) \rightarrow \infty \quad y \quad H(z \rightarrow -1) \rightarrow \sqrt{\frac{3\rho(0)}{8\nu^2}}, \quad (6.25)$$

a diferencia que en relatividad general en (3+1) dimensiones, se tiene que $H(z) \neq \text{const.}$ para $\rho(z) = \text{const.}$ Entonces, no hay una evolución de Sitter en la cosmología Newton-Chern-Simons, aunque este tipo de evolución se alcanza en un futuro lejano ($z \rightarrow -1$).

(b4) $\omega < -1$. En este caso $\rho(z) = \rho(0)(1+z)^{-4(|\omega|-1)}$ y

$$H(z \rightarrow \infty) \rightarrow \sqrt{H^2(0) - \frac{3\rho(0)}{8\nu^2}} \quad (1+z) \rightarrow \infty, \quad (6.26)$$

y

$$H(z \rightarrow -1) \rightarrow \sqrt{\frac{3\rho(0)}{8\nu^2}} (1+z)^{-2(|\omega|-1)} \rightarrow \infty. \quad (6.27)$$

Es posible notar que $H(z \rightarrow -1)$ diverge, al igual que $\rho(z \rightarrow -1)$, pero no en un tiempo infinito como sucede en relatividad general en (3+1) dimensiones, cuando pensamos, por ejemplo, en una singularidad futura como un pequeño *Big Rip* [21].

6.3. Termodinámica

La primera y segunda ley de la termodinámica, nos dicen respectivamente que,

$$T dS = d(\rho V) + p dV = (\rho + p) dV + V d\rho, \quad (6.28)$$

$$T \frac{dS}{dt} = V [\dot{\rho} + 4H(\rho + p)]. \quad (6.29)$$

Dado que, según (6.15),

$$\dot{\rho} + 4H(\rho + p) = 0$$

tenemos una evolución adiabática.

En la cosmología Newton–Chern–Simons no hay *constraint* de Friedmann y tenemos una evolución adiabática. En la teoría de Hořava–Lifshitz en $(3 + 1)$ dimensiones no hay *constraint* de Friedmann, pero a diferencia de la cosmología de Newton–Chern–Simons, la evolución no es adiabática desde

$$\dot{\rho} + 4H(\rho + p) = -Q \neq 0$$

y por lo tanto $dS/dt \neq 0$.



Capítulo 7

Acción

Chern–Simons–Antoniadis–Savvidy no relativista

En este capítulo es utilizado una extensión del principio de gauge, donde se incluyen campos de gauge tensoriales, para encontrar acciones en cuatro dimensiones invariantes bajo álgebras de Galileo generalizadas, en este contexto son utilizadas formas invariantes cerradas similares a las formas de Pontryagin–Chern en teorías de campos de gauge no abelianas, en particular existe un invariante de gauge independiente de la métrica en $(2n+3)$ dimensiones, lo que permite construir acciones en 4 dimensiones para el caso $n = 1$, denominadas acciones Cher–Simon–Antoniadis–Savvidy. Se busca conectar los resultados con la dinámica de Newton modificada (MOND) con el objetivo de interpretar la materia oscura como un límite no relativista de la energía oscura.

7.1. Álgebra de Galileo tipo $I \mathcal{GB}_4$

El límite no relativista del álgebra de Maxwell corresponde a una S-expansión del álgebra de Newton–Hooke con extensión central [48], como fue mostrado anteriormente (3.5).

$$\begin{aligned} [J_{ij}, J_{kl}] &= \delta_{kj} J_{il} + \delta_{lj} J_{ki} - \delta_{ki} J_{jl} - \delta_{li} J_{kj} \\ [J_{ij}, K_k] &= \delta_{kj} K_i - \delta_{ki} K_j \\ [K_i, P_j] &= -\delta_{ij} M \\ [J_{ij}, P_k] &= \delta_{kj} P_i - \delta_{ki} P_j \\ [K_i, H] &= -P_i \\ [J_{ij}, Z_{kl}] &= \delta_{kj} Z_{il} + \delta_{lj} Z_{ki} - \delta_{ki} Z_{jl} - \delta_{li} Z_{kj} \\ [J_{ij}, Z_k] &= \delta_{kj} Z_i - \delta_{ki} Z_j \\ [P_i, H] &= Z_i \\ [Z_{ij}, K_k] &= \delta_{kj} Z_i - \delta_{ki} Z_j \end{aligned}$$

donde $i, j, k, l = 1, 2, 3$. Estas ecuaciones corresponde al denominado límite eléctrico encontrado por Le Bellac y Levy–Leblond [59].

La representación de esta álgebra puede ser obtenida desde el álgebra $SO(3, 2)$ algebra usando las matrices Γ

$$\Gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu],$$

donde γ_μ satisface las relaciones de conmutación del álgebra de Clifford

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu},$$

con $\mu, \nu = 0, 1, \dots, 4$ y se ha considerado la siguiente signatura para la métrica de Minkowski

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-c^2, 1, 1, 1, -l^2).$$

La identificación $J_{ij} = \Gamma_{ij}$, $\Gamma_{i0} = cK_i$, $\Gamma_{i4} = lP_i$, $\Gamma_{04} = lP_0 = lc^{-1}(H + c^2M)$ y $\Gamma_* = 2M$ con $\Gamma_* = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$, entrega las relaciones de conmutación para el álgebra de Newton–Hooke con extensión central (3.2), lo que nos permite obtener los tensores invariantes de las álgebras de Galileo generalizadas mediante el método de S-expansión [46, 47], como fue mostrado en (5.29).



7.2. Acción (ChSAS) para el álgebra $\mathcal{GB}_4$

La 1-forma conexión evaluada en el álgebra $\mathcal{GB}_4$ es dada por

$$A = \frac{c}{l}\tau H + \frac{1}{l}e^i P_i + \frac{1}{cl}mM + \frac{1}{c}\omega^i K_i + \frac{1}{2}\omega^{ij} J_{ij} + \frac{1}{2}k^{ij} Z_{ij} + \frac{1}{c}k^i Z_i$$

donde ν, l tienen dimensiones de velocidad y distancia respectivamente. La correspondiente 2-forma curvatura ¹

$$\begin{aligned} F &= dA + \frac{1}{2}[A, A] \\ &= \frac{c}{l}d\tau H + \frac{1}{l}(T^i - \omega^i \tau)P_i + \frac{1}{cl}(dm - \omega^i e_i)M + \frac{1}{c}D\omega^i K_i + \frac{1}{2}R^{ij}J_{ij} \\ &\quad + \frac{1}{c}(Dk^i + \frac{c^2}{l^2}e^i \tau + k^i_j \omega^j)Z_i + \frac{1}{2}Dk^{ij}Z_{ij}. \end{aligned}$$

Donde $T^i = De^i$ y $R^{ij} = d\omega^{ij} + \omega^{ik}\omega_k^j$, y la derivada D es covariante con respecto al grupo de rotaciones $SO(3)$. Por otro lado la 2-forma potencial de gauge viene dada por

$$B = B^i P_i + B^0 H + B^{(m)} M + \frac{1}{2}B^{ij} J_{ij} + G^i K_i + \frac{1}{2}\beta^{ij} Z_{ij} + \beta^i Z_i$$

y su correspondiente 3-forma curvatura

$$\begin{aligned} H &= DB = dB + [A, B] \\ &= dB + \left[\frac{c}{l}\tau H + \frac{1}{l}e^i P_i + \frac{1}{cl}mM + \frac{1}{c}\omega^i K_i + \frac{1}{2}\omega^{ij} J_{ij} + \frac{1}{2}k^{ij} Z_{ij} + \frac{1}{c}k^i Z_i, \right. \\ &\quad \left. B^k P_k + B^0 H + B^{(m)} M + \frac{1}{2}B^{kl} J_{kl} + G^k K_k + \frac{1}{2}\beta^{kl} Z_{kl} + \beta^k Z_k \right] \\ &= dB + \frac{c}{l}\tau B^k [H, P_k] + \frac{c}{l}\tau G^k [H, K_k] + \frac{1}{l}e^i B^0 [P_i, H] + \frac{1}{2l}e^i B^{kl} [P_i, J_{kl}] + \frac{1}{l}e^i G^k [P_i, K_k] \\ &\quad + \frac{1}{c}\omega^i B^k [K_i, P_k] + \frac{1}{c}\omega^i B^0 [K_i, H] + \frac{1}{2c}\omega^i B^{kl} [K_i, J_{kl}] + \frac{1}{2c}\omega^i \beta^{kl} [K_i, Z_{kl}] \\ &\quad + \frac{1}{2}\omega^{ij} B^k [J_{ij}, P_k] + \frac{1}{4}\omega^{ij} B^{kl} [J_{ij}, J_{kl}] + \frac{1}{2}\omega^{ij} G^k [J_{ij}, K_k] + \frac{1}{4}\omega^{ij} \beta^{kl} [J_{ij}, Z_{kl}] \\ &\quad + \frac{1}{2}\omega^{ij} \beta^k [J_{ij}, Z_k] + \frac{1}{4}k^{ij} B^{kl} [Z_{ij}, J_{kl}] + \frac{1}{2}k^{ij} G^k [Z_{ij}, K_k] + \frac{1}{2c}k^i B^{kl} [Z_i, J_{kl}] \\ &= dB^0 H + \left(DB^i + \frac{c}{l}\tau G^i - \frac{1}{l}B^{ij} e_j - \frac{1}{c}\omega^i B^0 \right) P_i + \left(dB^{(m)} + \frac{1}{l}e^i G_i - \frac{1}{c}\omega^i B_i \right) M \\ &\quad + \frac{1}{2}DB^{ij} J_{ij} + \left(DG^i - \frac{1}{c}B^{ij} \omega_j \right) K_i + \frac{1}{2} \left(D\beta^{ij} - k^i_k B^{kj} + k^j_k B^{ki} \right) Z_{ij} + \left(D\beta^i - \frac{c}{l}\tau B^i \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{l}e^i B^0 - \frac{1}{c}B^{ij} k_j + k^{ij} G_j - \frac{1}{c}\beta^{ij} \omega_j \right) Z_i \\ &= H^0 H + H^i P_i + H^{(m)} M + \frac{1}{2}H^{ij} J_{ij} + L^i K_i + \frac{1}{2}\Theta^{ij} Z_{ij} + \Theta^i Z_i \end{aligned}$$

¹Para detalles del cálculo ver apéndice B.

$$\begin{aligned}
H^0 &= dB^0 \\
H^i &= DB^i + \frac{c}{l}\tau G^i - \frac{1}{l}B^{ij}e_j - \frac{1}{c}\omega^i B^0 \\
H^{(m)} &= dB^{(m)} + \frac{1}{l}e^i G_i - \frac{1}{c}\omega_i B^i \\
H^{ij} &= DB^{ij} \\
L^i &= DG^i - \frac{1}{c}B^{ij}\omega_j \\
\Theta^{ij} &= D\beta^{ij} - k^i_k B^{kj} + k^j_k B^{ki} \\
\Theta^i &= D\beta^i - \frac{c}{l}\tau B^i + \frac{1}{l}e^i B^0 - \frac{1}{c}B^{ij}k_j + k^{ij}G_j - \frac{1}{c}\beta^{ij}\omega_j.
\end{aligned}$$

Postulamos un ansatz para expresar las 2-formas $\{B^i, B^0, B^{(m)}, B^{ij}, G^i, \beta^{ij}, \beta^i\}$ como producto cuña de las 1-formas $\{\tau, e^i, m, \omega^{ij}, \omega^i, k^{ij}, k^i\}$.

$$\begin{aligned}
B^i &= \frac{a_1}{2l}\omega^{ij}e_j + \frac{a_2}{2l}\omega^i\tau + \frac{a_3}{2l}k^{ij}e_j + \frac{a_4}{2l}k^i\tau + \frac{a_5}{2c^2l}\omega^i m + \frac{a_6}{2c^2l}k^i m \\
B^0 &= \frac{b_1}{2cl}\omega^i e_i + \frac{b_2}{2cl}k^i e_i \\
B^{(m)} &= \frac{c_1}{2cl}\omega^i e_i + \frac{c_2}{2cl}k^i e_i \\
B^{ij} &= \frac{d_1}{2l^2}e^i e^j + \frac{d_2}{2}\omega^i_k \omega^{kj} + \frac{d_3}{2c^2}\omega^i \omega^j + \frac{d_4}{2}k^i_k k^{kj} + \frac{d_5}{2c^2}k^i k^j \\
&\quad + \frac{d_6}{2}\omega^i_k k^{kj} + \frac{d_7}{2}k^i_k \omega^{kj} + \frac{d_8}{2c^2}\omega^i k^j + \frac{d_9}{2c^2}k^i \omega^j \\
G^i &= \frac{f_1 c}{2l^2}e^i \tau + \frac{f_2}{2cl^2}e^i m + \frac{f_3}{2c}\omega^i_j \omega^j + \frac{f_4}{2c}k^i_j \omega^j + \frac{f_5}{2c}\omega^i_j k^j + \frac{f_6}{2c}k^i_j k^j \\
\beta^{ij} &= \frac{g_1}{2l^2}e^i e^j + \frac{g_2}{2}\omega^i_k \omega^{kj} + \frac{g_3}{2c^2}\omega^i \omega^j + \frac{g_4}{2}k^i_k k^{kj} + \frac{g_5}{2c^2}k^i k^j \\
&\quad + \frac{g_6}{2}\omega^i_k k^{kj} + \frac{g_7}{2}k^i_k \omega^{kj} + \frac{g_8}{2c^2}\omega^i k^j + \frac{g_9}{2c^2}k^i \omega^j \\
\beta^i &= \frac{h_1 c}{2l^2}e^i \tau + \frac{h_2}{cl^2}e^i m + \frac{h_3}{2c}\omega^i_j \omega^j + \frac{h_4}{2c}k^i_j \omega^j + \frac{h_5}{2c}\omega^i_j k^j + \frac{h_6}{2c}k^i_j k^j.
\end{aligned}$$

Introduciendo el ansatz en las ecuaciones para la 3-forma H .

$$\begin{aligned}
H^0 &= DB^0 \\
&= \frac{b_1}{2cl}(D\omega^i e_i - \omega^i T_i) + \frac{b_2}{2cl}(Dk^i e_i - k^i T_i) \\
H^i &= DB^i + \frac{c}{l}\tau G^i - \frac{1}{l}B^{ij}e_j - \frac{1}{c}\omega^i B^0 \\
&= \frac{a_1}{2l}(R^{ij}e_j - \omega^{ij}T_j) + \frac{a_1 + d_2}{2l}\omega^i{}_k \omega^{kj}e_j + \frac{a_2}{2l}(D\omega^i \tau - \omega^i d\tau) + \frac{a_3}{2l}(Dk^{ij}e_j - k^{ij}T_j) \\
&\quad + \frac{a_4}{2l}(Dk^i \tau - k^i d\tau) + \frac{a_5}{2c^2 l}(D\omega^i m - \omega^i dm) + \frac{a_6}{2c^2 l}(Dk^i m - k^i dm) - \frac{d_3 + b_1}{2c^2 l}\omega^i \omega^j e_j \\
&\quad - \frac{d_8 + b_2}{2c^2 l}\omega^i k^j e_j - \frac{d_4}{2l}k^i{}_k k^{kj}e_j - \frac{d_5}{2c^2 l}k^i k^j e_j - \frac{d_6}{2l}\omega^i{}_k k^{kj}e_j - \frac{d_7}{2l}k^i{}_k \omega^{kj}e_j \\
&\quad - \frac{d_9}{2c^2 l}k^i \omega^j e_j + \frac{c}{l}\tau \left(\frac{f_2}{cl^2}e^i m + \frac{f_3}{2c}\omega^i{}_j \omega^j + \frac{f_4}{2c}k^i{}_j \omega^j + \frac{f_5}{2c}\omega^i{}_j k^j + \frac{f_6}{2c}k^i{}_j k^j \right) \\
H^{(m)} &= DB^{(m)} + \frac{1}{l}e^i G_i - \frac{1}{c}\omega^i B_i \\
&= \frac{c_1}{2cl}(D\omega^i e_i - \omega^i T_i) + \frac{c_2}{2cl}(Dk^i e_i - k^i T_i) \\
&\quad + \frac{1}{l} \left(\frac{f_3}{2c}\omega^i{}_j \omega^j e_i + \frac{f_4}{2c}k^i{}_j \omega^j e_i + \frac{f_5}{2c}\omega^i{}_j k^j e_i + \frac{f_6}{2c}k^i{}_j k^j e_i \right) \\
&\quad - \frac{1}{c}\omega_i \left(\frac{a_1}{2l}\omega^{ij}e_j + \frac{a_3}{2l}k^{ij}e_j + \frac{a_4}{2l}k^i \tau + \frac{a_6}{2c^2 l}k^i m \right) \\
H^{ij} &= DB^{ij} \\
&= \frac{d_1}{2l^2}(T^i e^j - e^i T^j) + \frac{d_2}{2}(R^i{}_k \omega^{kj} - \omega^i{}_k R^{kj}) + \frac{d_3}{2c^2}(D\omega^i \omega^j - \omega^i D\omega^j) \\
&\quad + \frac{d_4}{2}(Dk^i{}_k k^{kj} - k^i{}_k Dk^{kj}) + \frac{d_5}{2c^2}(Dk^i k^j - k^i Dk^j) \\
&\quad + \frac{d_6}{2}(R^i{}_k k^{kj} + \omega^i{}_k \omega^{kl} k^{lj} - \omega^i{}_k Dk^{kj}) + \frac{d_7}{2}(Dk^i{}_k \omega^{kj} - k^i{}_k R^{kj} - k^i{}_k \omega^k{}_l \omega^{lj}) \\
&\quad + \frac{d_8}{2c^2}(D\omega^i k^j - \omega^i Dk^j) + \frac{d_9}{2c^2}(Dk^i \omega^j - k^i D\omega^j) \\
L^i &= DG^i - \frac{1}{c}B^{ij}\omega_j \\
&= \frac{f_1 c}{2l^2}(T^i \tau - e^i d\tau) + \frac{f_2}{2cl^2}(T^i m - e^i dm) + \frac{f_3}{2c}(R^i{}_j \omega^j + \omega^i{}_k \omega^k{}_j \omega^j - \omega^i{}_j D\omega^j) \\
&\quad + \frac{f_4}{2c}(Dk^i{}_j \omega^j - k^i{}_j D\omega^j) + \frac{f_5}{2c}(R^i{}_j k^j + \omega^i{}_k \omega^k{}_j k^j - \omega^i{}_j Dk^j) + \frac{f_6}{2c}(Dk^i{}_j k^j - k^i{}_j Dk^j) \\
&\quad - \frac{d_1}{2cl^2}e^i e^j \omega_j - \frac{d_2}{2c}\omega^i{}_k \omega^{kj} \omega_j - \frac{d_4}{2c}k^i{}_k k^{kj} \omega_j - \frac{d_5}{2c^3}k^i k^j \omega_j - \frac{d_6}{2c}\omega^i{}_k k^{kj} \omega_j - \frac{d_7}{2c}k^i{}_k \omega^{kj} \omega_j \\
&\quad - \frac{d_8}{2c^3}\omega^i k^j \omega_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta^{ij} &= D\beta^{ij} - k^i_k B^{kj} + k^j_k B^{ki} \\
&= \frac{g_1}{2l^2}(T^i e^j - e^i T^j) + \frac{g_2}{2}(R^i_k \omega^{kj} - \omega^i_k R^{kj}) + \frac{g_3}{2c^2}(D\omega^i \omega^j - \omega^i D\omega^j) \\
&\quad + \frac{g_4}{2}(Dk^i_k k^{kj} - k^i_k Dk^{kj}) + \frac{g_5}{2c^2}(Dk^i k^j - k^i Dk^j) + \frac{g_6}{2}(R^i_k k^{kj} - \omega^i_k Dk^{kj}) \\
&\quad + \frac{g_6}{2}\omega^i_k \omega^k_l k^{lj} + \frac{g_7}{2}(Dk^i_k \omega^{kj} - k^i_k R^{kj}) - \frac{g_7}{2}k^i_k \omega^k_l \omega^{lj} \\
&\quad + \frac{g_8}{2c^2}(D\omega^i k^j - \omega^i Dk^j) + \frac{g_9}{2c^2}(Dk^i \omega^j - k^i D\omega^j) - k^i_k B^{kj} + k^j_k B^{ki}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta^i &= D\beta^i - \frac{c}{l}\tau B^i + \frac{1}{l}e^i B^0 - \frac{1}{c}B^{ij}k_j + k^{ij}G_j - \frac{1}{c}\beta^{ij}\omega_j \\
&= \frac{h_1 c}{2l^2}(T^i \tau - e^i d\tau) + \frac{h_2}{cl^2}(T^i m - e^i dm) + \frac{h_3}{2c}(R^i_j \omega^j - \omega^i_j D\omega^j) \\
&\quad + \frac{h_4}{2c}(Dk^i_j \omega^j - k^i_j D\omega^j) + \frac{h_5}{2c}(R^i_j k^j - \omega^i_j Dk^j) + \frac{h_6}{2c}(Dk^i_j k^j - k^i_j Dk^j) \\
&\quad - \frac{c}{l}\tau \left(\frac{a_1}{2l}\omega^{ij}e_j + \frac{a_3}{2l}k^{ij}e_j + \frac{a_5}{2c^2l}\omega^i m + \frac{a_6}{2c^2l}k^i m \right) + \frac{1}{l}e^i \left(\frac{b_1}{2cl}\omega^j e_j + \frac{b_2}{2cl}k^j e_j \right) \\
&\quad - \frac{1}{c} \left(\frac{d_1}{2l^2}e^i e^j + \frac{d_4}{2}k^i_k k^{kj} + \frac{d_6}{2}\omega^i_k k^{kj} + \frac{d_7}{2}k^i_k \omega^{kj} \right) k_j \\
&\quad + k^{ij} \left(\frac{f_1 c}{2l^2}e_j \tau + \frac{f_2}{cl^2}e_j m + \frac{f_3}{2c}\omega_{jk}\omega^k + \frac{f_4}{2c}k_{jk}\omega^k + \frac{f_5}{2c}\omega_{jk}k^k + \frac{f_6}{2c}k_{jk}k^k \right) \\
&\quad - \frac{1}{c} \left(\frac{g_1}{2l^2}e^i e^j + \frac{g_4}{2}k^i_k k^{kj} + \frac{g_6}{2}\omega^i_k k^{kj} + \frac{g_7}{2}k^i_k \omega^{kj} \right) \omega_j \\
&\quad + \frac{h_5 - d_2}{2c}\omega^i_k \omega^k_j k^j + \frac{h_3 - g_2}{2c}\omega^i_k \omega^k_j \omega^j + \frac{g_8 - d_3}{2c^3}\omega^i \omega^j k_j + \frac{g_5 - d_9}{2c^3}k^i \omega^j k_j.
\end{aligned}$$

Donde las constantes son arbitrarias. Con el objeto de fijar estas constantes debemos exigir que los campos deben satisfacer las (FDA), es decir, si $F = 0$, entonces, $H = 0$. La condición $F = 0$ nos deja las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
d\tau &= 0 \\
T^i &= \omega^i \tau \\
dm &= \omega^i e_i \\
D\omega^i &= 0 \\
R^{ij} &= 0 \\
Dk^i &= -\frac{c^2}{l^2}e^i \tau - k^i_j \omega^j \\
Dk^{ij} &= 0.
\end{aligned}$$

Al reemplazar esto en H

$$\begin{aligned}
H^0 &= -\frac{b_2}{2cl} (k^i_j \omega^j e_i + k^i \omega_i \tau) \\
H^i &= \frac{f_3 - a_1}{2l} \omega^i_j \omega^j \tau + \frac{a_1 + d_2}{2l} \omega^i_k \omega^{kj} e_j + \frac{f_4 - a_3 - a_4}{2l} k^{ij} \omega_j \tau + \frac{f_2 - a_6}{2l^3} e^i \tau m \\
&\quad + \frac{d_9 - a_6}{2c^2 l} k^i \omega^j e_j - \frac{d_3 + b_1 + a_5}{2c^2 l} \omega^i \omega^j e_j - \frac{d_8 + b_2}{2c^2 l} \omega^i k^j e_j - \frac{d_4}{2l} k^i_k k^{kj} e_j - \frac{d_5}{2c^2 l} k^i k^j e_j \\
&\quad - \frac{d_6}{2l} \omega^i_k k^{kj} e_j - \frac{d_7}{2l} k^i_k \omega^{kj} e_j + \frac{c}{l} \tau \left(\frac{f_5}{2c} \omega^i_j k^j + \frac{f_6}{2c} k^i_j k^j \right) \\
H^{(m)} &= \frac{a_4 - c_2}{2cl} k^i \omega_i \tau + \frac{f_3 - a_1}{2cl} \omega^i_j \omega^j e_i + \frac{f_4 - c_2 - a_3}{2cl} k^i_j \omega^j e_i + \frac{1}{l} \left(\frac{f_5}{2c} \omega^i_j k^j e_i + \frac{f_6}{2c} k^i_j k^j e_i \right) \\
&\quad + \frac{a_6}{2c^3 l} k^i \omega_i m \\
H^{ij} &= \frac{d_1 + d_8}{2l^2} \omega^i \tau e^j - \frac{d_1 + d_9}{2l^2} e^i \omega^j \tau + \frac{d_5}{2c^2} \left(\frac{c^2}{l^2} e^i \tau + k^i_k \omega^k \right) k^j - \frac{d_5}{2c^2} k^i \left(\frac{c^2}{l^2} e^j \tau + k^j_k \omega^k \right) \\
&\quad + \frac{d_6}{2} \omega^i_k \omega^{kl} k^{lj} - \frac{d_7}{2} k^i_k \omega^k_l \omega^{lj} - \frac{d_8}{2c^2} \omega^i k^j_k \omega^k + \frac{d_9}{2c^2} k^i_k \omega^k \omega^j \\
L^i &= \frac{f_2}{2cl^2} \omega^i \tau m + \frac{f_3}{2c} \omega^i_k \omega^k_j \omega^j + \frac{f_5}{2c} \left(\omega^i_k \omega^k_j k^j + \frac{c^2}{l^2} \omega^i_j e^j \tau \right) + \frac{f_6 c}{2l^2} k^i_j e^j \tau \\
&\quad + \frac{f_2 - d_1}{2cl^2} e^i e^j \omega_j + \frac{f_6 - d_4}{2c} k^i_k k^{kj} \omega_j - \frac{d_5}{2c^3} k^i k^j \omega_j + \frac{f_5 - d_6}{2c} \omega^i_k k^{kj} \omega_j \\
&\quad - \frac{d_7}{2c} k^i_k \omega^{kj} \omega_j - \frac{d_8}{2c^3} \omega^i k^j \omega_j \\
\Theta^{ij} &= \frac{g_1 - g_8}{2l^2} \omega^i \tau e^j - \frac{g_1 - g_9}{2l^2} e^i \omega^j \tau - \frac{g_5}{2c^2} \left(\frac{c^2}{l^2} e^i \tau + k^i_k \omega^k \right) k^j + \frac{g_5}{2c^2} k^i \left(\frac{c^2}{l^2} e^j \tau + k^j_k \omega^k \right) \\
&\quad + \left(\frac{g_6}{2} + \frac{d_2}{2} \right) \omega^i_k \omega^k_l k^{lj} - \left(\frac{g_7}{2} + \frac{d_2}{2} \right) k^i_k \omega^k_l \omega^{lj} + \frac{g_8 - d_3}{2c^2} \omega^i k^j_k \omega^k \\
&\quad + \frac{g_9 - d_3}{2c^2} k^i_k \omega^k \omega^j - k^i_k \left(\frac{d_1}{2l^2} e^k e^j + \frac{d_4}{2} k^k_l k^{lj} + \frac{d_5}{2c^2} k^k k^j + \frac{d_6}{2} \omega^k_l k^{lj} \right. \\
&\quad \left. + \frac{d_7}{2} k^k_l \omega^{lj} + \frac{d_8}{2c^2} \omega^k k^j + \frac{d_9}{2c^2} k^k \omega^j \right) + k^j_k \left(\frac{d_1}{2l^2} e^k e^i + \frac{d_4}{2} k^k_l k^{li} + \frac{d_5}{2c^2} k^k k^i \right. \\
&\quad \left. + \frac{d_6}{2} \omega^k_l k^{li} + \frac{d_7}{2} k^k_l \omega^{li} + \frac{d_8}{2c^2} \omega^k k^i + \frac{d_9}{2c^2} k^k \omega^i \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta^i = & \frac{h_2 + a_5}{2cl^2} \omega^i \tau m + \frac{b_1 + g_1 - h_2}{2cl^2} e^i \omega^j e_j + \frac{h_5 - a_1}{2l^2} c \omega^i_j e^j \tau + \frac{h_5 - g_6}{2c} \omega^i_j k^j_k \omega^k \\
& - \frac{c}{l} \frac{a_6}{2c^2 l} k^i m \tau + \frac{b_2 + d_1}{2cl^2} e^i k^j e_j + \frac{c(h_6 + f_1 - a_3)}{2l^2} k^i_j e^j \tau \\
& - \frac{1}{c} \left(\frac{d_4 - f_6}{2} k^i_k k^{kj} + \frac{d_6}{2} \omega^i_k k^{kj} + \frac{d_7 - f_5}{2} k^i_k \omega^{kj} \right) k_j \\
& + k^{ij} \left(\frac{f_2}{cl^2} e_j m + \frac{f_4 + h_6 - g_4}{2c} k_j k \omega^k \right) + \left(\frac{h_5}{2c} - \frac{d_2}{2c} \right) \omega^i_k \omega^k_j k^j \\
& - \frac{g_7 - f_3}{2c} k^i_k \omega^{kj} \omega_j + \left(\frac{h_3}{2c} - \frac{g_2}{2c} \right) \omega^i_k \omega^k_j \omega^j \\
& + \left(\frac{g_8}{2c^3} - \frac{d_3}{2c^3} \right) \omega^i \omega^j k_j + \left(\frac{g_5}{2c^3} - \frac{d_9}{2c^3} \right) k^i \omega^j k_j.
\end{aligned}$$

Ahora de $H = 0$ es posible obtener que el sistema de ecuaciones para las constantes es dado por

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_6 = 0 \\
a_4 &= c_2 \\
b_1 &= -(a_5 + d_3) \\
b_2 &= 0 \\
d_1 &= d_2 = d_4 = d_5 = d_6 = d_7 = d_8 = d_9 = 0 \\
d_3 &= g_1 = g_8 = g_9 \\
f_2 &= f_3 = f_5 = f_6 = 0 \\
f_1 &= a_3 - h_6 \\
f_4 &= a_4 + a_3 \\
g_5 &= g_6 = g_7 = 0 \\
h_2 &= -a_5 \\
h_3 &= g_2 \\
h_5 &= 0
\end{aligned}$$

y nuestro ansatz se reduce a

$$\begin{aligned}
B^i &= \frac{a_2}{2l} \omega^i \tau + \frac{a_3}{2l} k^{ij} e_j + \frac{a_4}{2l} k^i \tau + \frac{a_5}{2c^2 l} \omega^i m \\
B^0 &= -\frac{a_5 + d_3}{2cl} \omega^i e_i \\
B^{(m)} &= \frac{c_1}{2cl} \omega^i e_i + \frac{a_4}{2cl} k^i e_i \\
B^{ij} &= \frac{d_3}{2c^2} \omega^i \omega^j \\
G^i &= \frac{a_3 - h_6}{2l^2} c e^i \tau + \frac{a_3 + a_4}{2c} k^i_j \omega^j \\
\beta^{ij} &= \frac{d_3}{2l^2} e^i e^j + \frac{g_2}{2} \omega^i_k \omega^{kj} + \frac{g_3}{2c^2} \omega^i \omega^j + \frac{g_4}{2} k^i_k k^{kj} + \frac{d_3}{2c^2} \omega^i k^j + \frac{d_3}{2c^2} k^i \omega^j \\
\beta^i &= \frac{h_1 c}{2l^2} e^i \tau - \frac{a_5}{cl^2} e^i m + \frac{g_2}{2c} \omega^i_j \omega^j + \frac{h_4}{2c} k^i_j \omega^j + \frac{h_6}{2c} k^i_j k^j.
\end{aligned}$$

La acción Chern–Simons–Antoniadis–Savvidy viene dada

$$L_{ChSAS}^{(4)} = \langle FB \rangle.$$

Donde usando el teorema VII.2 de [46] (ver sección 2.3) es posible mostrar que los únicos tensores invariantes para $\mathcal{GB}_4$ son

$$\begin{aligned}\langle J_{ij} K_k \rangle &= \alpha_0 c \varepsilon_{ijk} \\ \langle J_{ij} Z_k \rangle &= \alpha_2 c \varepsilon_{ijk} \\ \langle K_i Z_{kl} \rangle &= \alpha_2 c \varepsilon_{ikl}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle FB \rangle &= \left\langle \left(\frac{c}{l} d\tau H + \frac{1}{l} (T^i - \omega^i \tau) P_i + \frac{1}{cl} (dm - \omega^i e_i) M + \frac{1}{c} D\omega^i K_i + \frac{1}{2} R^{ij} J_{ij} + \frac{1}{2} Dk^{ij} Z_{ij} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{c} (Dk^i + \frac{c^2}{l^2} e^i \tau + k^i_j \omega^j) Z_i \right) \left(B^k P_k + B^0 H + B^{(m)} M + \frac{1}{2} B^{kl} J_{kl} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + G^k K_k + \frac{1}{2} \beta^{kl} Z_{kl} + \beta^k Z_k \right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2c} D\omega^i B^{kl} \langle K_i J_{kl} \rangle + \frac{1}{2c} D\omega^i \beta^{kl} \langle K_i Z_{kl} \rangle + \frac{1}{2} R^{ij} G^k \langle J_{ij} K_k \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} R^{ij} \beta^k \langle J_{ij} Z_k \rangle + \frac{1}{4} Dk^{ij} B^{kl} \langle Z_{ij} J_{kl} \rangle + \frac{1}{2} Dk^{ij} G^k \langle Z_{ij} K_k \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2c} (Dk^i + \frac{c^2}{l^2} e^i \tau + k^i_j \omega^j) B^{kl} \langle Z_i J_{kl} \rangle \\ &= \frac{\alpha_0}{2} \varepsilon_{ikl} D\omega^i B^{kl} + \frac{\alpha_2}{2} \varepsilon_{ikl} D\omega^i \beta^{kl} + \frac{\alpha_0}{2} c \varepsilon_{ijk} R^{ij} G^k + \frac{\alpha_2}{2} c \varepsilon_{ijk} R^{ij} \beta^k \\ &\quad + \frac{\alpha_2}{2} c \varepsilon_{ijk} Dk^{ij} G^k + \frac{\alpha_2}{2} \varepsilon_{ikl} Dk^i B^{kl} + \frac{\alpha_2}{2} \frac{c^2}{l^2} \varepsilon_{ikl} e^i \tau B^{kl} + \frac{\alpha_2}{2} \varepsilon_{ikl} k^i_j \omega^j B^{kl}.\end{aligned}$$

Introduciendo nuestro ansatz

$$\begin{aligned}\langle FB \rangle &= \frac{\alpha_2}{2} \varepsilon_{ikl} D\omega^i \left(\frac{d_3}{2l^2} e^k e^l + \frac{g_2}{2} \omega^k_m \omega^{ml} + \frac{g_3}{2c^2} \omega^k \omega^l + \frac{g_4}{2} k^k_m k^{ml} + \frac{d_3}{2c^2} \omega^k k^l + \frac{d_3}{2c^2} k^k \omega^l \right) \\ &\quad + \frac{\alpha_0}{2} c \varepsilon_{ijk} R^{ij} \left(\frac{a_3 - h_6}{2l^2} c e^k \tau + \frac{a_3 + a_4}{2c} k^k_l \omega^l \right) + \frac{\alpha_0}{2} \frac{d_3}{2c^2} \varepsilon_{ikl} D\omega^i \omega^k \omega^l \\ &\quad + \frac{\alpha_2}{2} c \varepsilon_{ijk} R^{ij} \left(\frac{h_1 c}{2l^2} e^k \tau - \frac{a_5}{cl^2} e^k m + \frac{g_2}{2c} \omega^k_l \omega^l + \frac{h_4}{2c} k^k_l \omega^l + \frac{h_6}{2c} k^k_l k^l \right) \\ &\quad + \frac{\alpha_2}{2} c \varepsilon_{ijk} Dk^{ij} \left(\frac{a_3 - h_6}{2l^2} c e^k \tau + \frac{a_3 + a_4}{2c} k^k_l \omega^l \right) + \frac{\alpha_2}{2} \frac{d_3}{2c^2} \varepsilon_{ikl} Dk^i \omega^k \omega^l \\ &\quad + \frac{\alpha_2}{2} \frac{d_3}{2l^2} \varepsilon_{ikl} e^i \tau \omega^k \omega^l + \frac{\alpha_2}{2} \frac{d_3}{2c^2} \varepsilon_{ikl} k^i_j \omega^j \omega^k \omega^l.\end{aligned}$$

De donde observamos que cuando $c, l \rightarrow \infty$ la acción se reduce

$$\begin{aligned}
 \langle FB \rangle = & \frac{\alpha_2}{2} \varepsilon_{ijk} R^{ij} \left(\frac{h_1}{2} \frac{c^2}{l^2} e^k \tau + \frac{g_2}{2} \omega_l^k \omega^l + \frac{h_4}{2} k_l^k \omega^l + \frac{h_6}{2} k_l^k k^l \right) \\
 & + \frac{\alpha_2}{2} \frac{g_2}{2} \varepsilon_{ijk} D \omega^i \omega_m^j \omega^{mk} + \frac{\alpha_2}{2} \frac{g_4}{2} \varepsilon_{ijk} D \omega^i k_m^j k^{mk} \\
 & + \frac{\alpha_0}{2} \varepsilon_{ijk} R^{ij} \left(\frac{a_3 - h_6}{2} \frac{c^2}{l^2} e^k \tau + \frac{a_3 + a_4}{2} k_l^k \omega^l \right) \\
 & + \frac{\alpha_2}{2} \varepsilon_{ijk} D k^{ij} \left(\frac{a_3 - h_6}{2} \frac{c^2}{l^2} e^k \tau + \frac{a_3 + a_4}{2} k_l^k \omega^l \right).
 \end{aligned}$$



7.2.1. Ecuaciones de movimiento:

$$\delta_e \langle FB \rangle = \frac{\alpha_2 h_1 + \alpha_0(a_3 - h_6)}{4} \frac{v^2}{l^2} \varepsilon_{ijk} R^{ij} \delta e^k \tau + \frac{\alpha_2(a_3 - h_6)}{4} \frac{v^2}{l^2} \varepsilon_{ijk} Dk^{ij} \delta e^k \tau.$$

$$\begin{aligned} \delta_{\omega^i} \langle FB \rangle &= \frac{\alpha_2 g_2}{4} \varepsilon_{ijk} R^{ij} \omega^k_l \delta \omega^l + \frac{\alpha_2 h_4 + \alpha_0(a_3 + a_4)}{4} \varepsilon_{ijk} R^{ij} k^k_l \delta \omega^l + \frac{\alpha_2 g_2}{4} \varepsilon_{ijk} \delta(D\omega^i) \omega^j_m \omega^{mk} \\ &\quad + \frac{\alpha_2 g_4}{4} \varepsilon_{ijk} \delta(D\omega^i) k^j_m k^{mk} + \frac{\alpha_2(a_3 + a_4)}{4} \varepsilon_{ijk} Dk^{ij} k^k_m \delta \omega^m \\ &= \frac{\alpha_2 g_2}{4} \varepsilon_{ijk} R^{ij} \omega^k_l \delta \omega^l + \frac{\alpha_2 h_4 + \alpha_0(a_3 + a_4)}{4} \varepsilon_{ijk} R^{ij} k^k_l \delta \omega^l + \frac{\alpha_2 g_2}{2} \varepsilon_{ijk} \delta \omega^i D\omega^j_m \omega^{mk} \\ &\quad + \frac{\alpha_2 g_4}{2} \varepsilon_{ijk} \delta \omega^i Dk^j_m k^{mk} + \frac{\alpha_2(a_3 + a_4)}{2} \varepsilon_{ijk} Dk^{ij} k^k_m \delta \omega^m \end{aligned}$$

$$D_k \epsilon_{ijk} = 0,$$

$$k_i^f \epsilon_{fjk} + k_j^f \epsilon_{ikf} + k_k^f \epsilon_{ijf} = 0,$$

$$k_i^f Dk^{ij} \delta \omega^k \epsilon_{fjk} + k_j^f Dk^{ij} \delta \omega^k \epsilon_{ikf} + k_k^f Dk^{ij} \delta \omega^k \epsilon_{ijf} = 0,$$

$$\delta \omega^i Dk^{jm} k_m^k \epsilon_{ijk} - \delta \omega^i Dk^{jm} k_m^k \epsilon_{ijk} - Dk^{ij} k_m^k \delta \omega^m \epsilon_{ijk} = 0,$$

$$\epsilon_{ijk} [2\delta \omega^i Dk^{jm} k_m^k + Dk^{ij} k_m^k \delta \omega^m \epsilon] = 0,$$

$$2\epsilon_{ijk} \delta \omega^i Dk^{jm} k_m^k = -\epsilon_{ijk} Dk^{ij} k_m^k \delta \omega^m$$

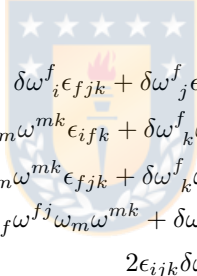
$$\begin{aligned} \delta_{\omega^i} \langle FB \rangle &= \frac{\alpha_2 g_2}{4} \varepsilon_{ijk} R^{ij} \omega^k_l \delta \omega^l + \frac{\alpha_2 h_4 + \alpha_0(a_3 + a_4)}{4} \varepsilon_{ijk} R^{ij} k^k_l \delta \omega^l - \frac{\alpha_2 g_2}{4} \varepsilon_{ijk} D\omega^{ij} \omega^k_m \delta \omega^m \\ &\quad - \frac{\alpha_2 g_4}{4} \varepsilon_{ijk} Dk^{ij} k^k_m \delta \omega^m + \frac{\alpha_2(a_3 + a_4)}{2} \varepsilon_{ijk} Dk^{ij} k^k_m \delta \omega^m \\ &= \frac{\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \varepsilon_{ijk} R^{ij} k^k_m \delta \omega^m + \frac{\alpha_2(a_4 - a_2)}{4} \varepsilon_{ijk} Dk^{ij} k^k_m \delta \omega^m \\ &\quad + \frac{\alpha_2(a_4 - a_2 + 2a_3)}{4} \varepsilon_{ijk} k^{im} k_m^j k^k_m \delta \omega^m \end{aligned}$$

$$\delta_{k^i} \langle FB \rangle = \frac{\alpha_2 h_6}{4} \varepsilon_{ijk} R^{ij} k^k_l \delta k^l$$

$$\begin{aligned} \delta_{\omega^{ij}} \langle FB \rangle &= \frac{\alpha_2}{4} \varepsilon_{ijk} \delta \omega^{ij} \left(\frac{h_1 v^2}{l^2} T^k \tau + g_2 D\omega^k_l \omega^l - g_2 \omega^k_l D\omega^l + h_4 Dk^k_l \omega^l - h_4 k^k_l D\omega^l \right) \\ &\quad + \frac{\alpha_2}{4} \varepsilon_{ijk} \delta \omega^{ij} (h_6 Dk^k_l k^l - h_6 k^k_l Dk^l) + \frac{\alpha_2 g_2}{4} \varepsilon_{ijk} \delta \omega^i \omega^l \omega^j_m \omega^{mk} \\ &\quad + \frac{\alpha_2 g_2}{2} \varepsilon_{ijk} D\omega^i \omega^j_m \delta \omega^{mk} + \frac{\alpha_2 g_4}{4} \varepsilon_{ijk} \delta \omega^i \omega^l k^j_m k^{mk} \\ &\quad + \frac{\alpha_0}{4} \varepsilon_{ijk} \delta \omega^{ij} \left((a_3 - h_6) \frac{v^2}{l^2} T^k \tau + (a_3 + a_4) Dk^k_l \omega^l - (a_3 + a_4) k^k_l D\omega^l \right) \\ &\quad + \frac{\alpha_2}{2} \varepsilon_{ijk} \delta \omega^i k^l j \left((a_3 - h_6) \frac{v^2}{l^2} e^k \tau + (a_3 + a_4) k^k_l \omega^l \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{\delta\omega}\epsilon_{ijk} &= 0, \\
\delta\omega_i^f\epsilon_{fjk} + \delta\omega_j^f\epsilon_{ifk} + \delta\omega_k^f\epsilon_{ijf} &= 0, \\
\delta\omega_i^f\omega^i\omega^j\omega^m\omega^{mk}\epsilon_{fjk} + \delta\omega_j^f\omega^i\omega^j\omega^m\omega^{mk}\epsilon_{ifk} + \delta\omega_k^f\omega^i\omega^j\omega^m\omega^{mk}\epsilon_{ijf} &= 0, \\
\delta\omega_i^f\omega^i\omega^j\omega^m\omega^{mk}\epsilon_{fjk} + 2\delta\omega_j^f\omega^i\omega^j\omega^m\omega^{mk}\epsilon_{ifk} &= 0, \\
\epsilon_{ijk} \left[\delta\omega_i^f\omega^f\omega^j\omega^m\omega^{mk} + 2\delta\omega_j^f\omega^i\omega^f\omega^m\omega^{mk} \right] &= 0, \\
2\epsilon_{ijk}\delta\omega_j^f\omega^i\omega^f\omega^m\omega^{mk} &= -\epsilon_{ijk}\delta\omega_i^f\omega^f\omega^j\omega^m\omega^{mk}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{\delta\omega}\epsilon_{ijk} &= 0, \\
\delta\omega_i^f\epsilon_{fjk} + \delta\omega_j^f\epsilon_{ifk} + \delta\omega_k^f\epsilon_{ijf} &= 0, \\
\delta\omega_i^f\omega^m\omega^i\omega^j\omega^k\epsilon_{fjk} + \delta\omega_j^f\omega^m\omega^i\omega^j\omega^k\epsilon_{ifk} + \delta\omega_k^f\omega^m\omega^i\omega^j\omega^k\epsilon_{ijf} &= 0, \\
\delta\omega_i^f\omega^m\omega^i\omega^j\omega^k\epsilon_{fjk} + 2\delta\omega_j^f\omega^m\omega^i\omega^j\omega^k\epsilon_{ifk} &= 0, \\
\epsilon_{ijk} \left[\delta\omega_i^f\omega^m\omega^f\omega^j\omega^k + 2\delta\omega_j^f\omega^m\omega^i\omega^f\omega^k \right] &= 0, \\
2\epsilon_{ijk}\delta\omega_j^f\omega^m\omega^i\omega^f\omega^k &= -\epsilon_{ijk}\delta\omega_i^f\omega^m\omega^f\omega^j\omega^k
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
D_{\delta\omega}\epsilon_{ijk} &= 0, \\
\delta\omega_i^f\epsilon_{fjk} + \delta\omega_j^f\epsilon_{ifk} + \delta\omega_k^f\epsilon_{ijf} &= 0, \\
\delta\omega_i^f\omega^{ij}\omega^m\omega^{mk}\epsilon_{fjk} + \delta\omega_j^f\omega^{ij}\omega^m\omega^{mk}\epsilon_{ifk} + \delta\omega_k^f\omega^{ij}\omega^m\omega^{mk}\epsilon_{ijf} &= 0, \\
2\delta\omega_i^f\omega^{ij}\omega^m\omega^{mk}\epsilon_{fjk} + \delta\omega_k^f\omega^{ij}\omega^m\omega^{mk}\epsilon_{ifk} &= 0, \\
\epsilon_{ijk} \left[2\delta\omega_i^f\omega^{ij}\omega^m\omega^{mk} + \delta\omega_k^f\omega^{ij}\omega^m\omega^{mk} \right] &= 0, \\
2\epsilon_{ijk}\delta\omega_i^f\omega^{ij}\omega^m\omega^{mk} &= -\epsilon_{ijk}\delta\omega_k^f\omega^{ij}\omega^m\omega^{mk}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{\delta\omega}\epsilon_{ijk} &= 0, \\
\omega_i^f\epsilon_{fjk} + \omega_j^f\epsilon_{ifk} + \omega_k^f\epsilon_{ijf} &= 0, \\
\omega_i^f\delta\omega^{ij}\omega^m\omega^{mk}\epsilon_{fjk} + \omega_j^f\delta\omega^{ij}\omega^m\omega^{mk}\epsilon_{ifk} + \omega_k^f\delta\omega^{ij}\omega^m\omega^{mk}\epsilon_{ijf} &= 0, \\
2\omega_i^f\delta\omega^{ij}\omega^m\omega^{mk}\epsilon_{fjk} + \omega_k^f\delta\omega^{ij}\omega^m\omega^{mk}\epsilon_{ijf} &= 0, \\
\epsilon_{ijk} \left[2\omega_i^f\delta\omega^{ij}\omega^m\omega^{mk}\epsilon_{fjk} + \omega_k^f\delta\omega^{ij}\omega^m\omega^{mk}\epsilon_{ijf} \right] &= 0, \\
2\epsilon_{ijk}\delta\omega_i^f\omega^{ij}\omega^m\omega^{mk} &= -\epsilon_{ijk}\delta\omega_k^f\omega^{ij}\omega^m\omega^{mk}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{\delta\omega}\epsilon_{ijk} &= 0, \\
\omega_i^f\epsilon_{fjk} + \omega_j^f\epsilon_{ifk} + \omega_k^f\epsilon_{ijf} &= 0, \\
\omega_i^f\delta\omega^{ij}\omega^k\epsilon_{fjk} + \omega_j^f\delta\omega^{ij}\omega^k\epsilon_{ifk} + \omega_k^f\delta\omega^{ij}\omega^k\epsilon_{ijf} &= 0, \\
2\omega_i^f\delta\omega^{ij}\omega^k\epsilon_{fjk} + \omega_k^f\delta\omega^{ij}\omega^k\epsilon_{ijf} &= 0, \\
\epsilon_{ijk} \left[2\omega_i^f\delta\omega^{ij}\omega^k\epsilon_{fjk} + \omega_k^f\delta\omega^{ij}\omega^k\epsilon_{ijf} \right] &= 0, \\
2\epsilon_{ijk}\delta\omega_i^f\omega^{ij}\omega^k &= -\epsilon_{ijk}\delta\omega_k^f\omega^{ij}\omega^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijk}\delta\omega^i{}_f\omega^f{}_m\omega^{mk} &= -2\epsilon_{ijk}\delta\omega^j{}_f\omega^i{}_m\omega^{mk} \\
&= -2\epsilon_{kji}\delta\omega^j{}_f\omega^k{}_m\omega^{mi} \\
&= -2\epsilon_{ijk}\delta\omega^{fj}\omega^k{}_m\omega^{mi} \\
&= -2\epsilon_{mjk}\delta\omega^{fj}\omega^k{}_m\omega^i{}_f\omega^{mi} \\
&= \epsilon_{mjk}\delta\omega^{ij}\omega^f{}_m\omega^k{}_f\omega^{mi} \\
&= \epsilon_{ijk}\delta\omega^{mj}\omega^f{}_m\omega^k{}_f\omega^i{}_m \\
&= -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\delta\omega^{ij}\omega_m\omega^k{}_f\omega^{mf} \\
2\epsilon_{ijk}\delta\omega^j{}_f\omega^m{}_m\omega^i{}_m\omega^{fk} &= -\epsilon_{ijk}\delta\omega^i{}_f\omega^m{}_m\omega^f{}_m\omega^{jk} \\
2\epsilon_{ijk}\delta\omega^i{}_f\omega_m\omega^{fj}\omega^{mk} &= -\epsilon_{ijk}\delta\omega^k{}_f\omega_m\omega^{ij}\omega^{mf} \\
*2\epsilon_{ijk}\delta\omega^{fj}\omega_m\omega^i{}_f\omega^{mk} &= -\epsilon_{ijk}\delta\omega^{ij}\omega_m\omega^k{}_f\omega^{mf} \\
2\epsilon_{ijk}\delta\omega^{mj}\omega_f\omega^i{}_m\omega^{fk} &= -\epsilon_{ijk}\delta\omega^{ij}\omega_m\omega^k{}_f\omega^{mf} \\
2\epsilon_{ijk}\delta\omega^{fj}\omega^k{}_m\omega^i{}_f &= -\epsilon_{ijk}\delta\omega^{ij}\omega^f{}_m\omega^k{}_f \\
\epsilon_{ijk}\delta\omega^i{}_f\omega^f{}_m\omega^j{}_m\omega^{mk} &= -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\delta\omega^{ij}\omega_m\omega^k{}_f\omega^{mf}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{\omega^{ij}} \langle FB \rangle &= \frac{\alpha_2}{4} \epsilon_{ijk} \delta\omega^{ij} \left(\frac{h_1 v^2}{l^2} T^k \tau + g_2 D\omega^k{}_l \omega^l - g_2 \omega^k{}_l D\omega^l + h_4 Dk^k{}_l \omega^l - h_4 k^k{}_l D\omega^l \right) \\
&+ \frac{\alpha_2}{4} \epsilon_{ijk} \delta\omega^{ij} \left(h_6 Dk^k{}_l k^l - h_6 k^k{}_l Dk^l \right) - \frac{\alpha_2 g_2}{8} \epsilon_{ijk} \delta\omega^{ij} \omega_m \omega^k{}_f \omega^{mf} \\
&+ \frac{\alpha_2 g_2}{2} \epsilon_{ijk} D\omega^i{}_m \omega^j{}_m \delta\omega^{mk} - \frac{\alpha_2 g_4}{8} \epsilon_{ijk} \delta\omega^{ij} \omega_m k^k{}_f k^{mf} \\
&+ \frac{\alpha_0}{4} \epsilon_{ijk} \delta\omega^{ij} \left((a_3 - h_6) \frac{v^2}{l^2} T^k \tau + (a_3 + a_4) Dk^k{}_l \omega^l - (a_3 + a_4) k^k{}_l D\omega^l \right) \\
&+ \frac{\alpha_2}{4} \epsilon_{ijk} \delta\omega^{ij} k^k{}_m \left((a_3 - h_6) \frac{v^2}{l^2} e^m \tau + (a_3 + a_4) k^m{}_l \omega^l \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{k^{ij}} \langle FB \rangle &= \frac{\alpha_2}{4} \epsilon_{ijk} R^{ij} \left(h_4 \delta k^k{}_l \omega^l + h_6 \delta k^k{}_l k^l \right) + \frac{\alpha_2 g_4}{2} \epsilon_{ijk} D\omega^i \delta k^j{}_m k^{mk} \\
&+ \frac{\alpha_0 (a_3 + a_4)}{4} \epsilon_{ijk} R^{ij} \delta k^k{}_l \omega^l + \frac{\alpha_2 (a_3 + a_4)}{4} \epsilon_{ijk} Dk^{ij} \delta k^k{}_l \omega^l \\
&+ \frac{\alpha_2}{4} \epsilon_{ijk} \delta k^{ij} \left((a_3 - h_6) \frac{v^2}{l^2} T^k \tau + (a_3 + a_4) Dk^k{}_l \omega^l - (a_3 + a_4) k^k{}_l D\omega^l \right).
\end{aligned}$$

La variación con respecto a $\delta\tau$ es dada por

$$\delta_\tau \langle FB \rangle = \left[\frac{c^2}{l^2} \left(\frac{\alpha_2 h_1}{4} + \alpha_0 \frac{a_3 - h_6}{4} \right) \epsilon_{ijk} R^{ij} e^k + \alpha_2 \frac{c^2}{l^2} \frac{a_3 - h_6}{4} \epsilon_{ijk} Dk^{ij} e^k \right] \delta\tau$$

Por lo que si consideramos que $L = L_M + L_{ChSAS}^{(4)}$, donde postulamos la uno forma energía momentum.

$$\begin{aligned}
T_a &= * \left(\frac{\delta L_M}{\delta e^a} \right) \\
T_0 &= * \left(\frac{\delta L_M}{\delta \tau} \right).
\end{aligned}$$

La ecuación de movimiento es dada por

$$\delta_\tau L = \left[\frac{c^2}{l^2} \left(\frac{\alpha_2 h_1}{4} + \alpha_0 \frac{a_3 - h_6}{4} \right) \varepsilon_{ijk} R^{ij} e^k + \alpha_2 \frac{c^2}{l^2} \frac{a_3 - h_6}{4} \varepsilon_{ijk} Dk^{ij} e^k - \kappa * T_0 \right] \delta\tau = 0$$

Luego de calcular los siguientes duales², tenemos que,

$$\begin{aligned} *(T_0)\delta\tau &= -\det(g)\delta_\delta^\sigma T_0^\sigma \delta\tau_\sigma dx^4 \\ \varepsilon_{ijk} Dk^{ij} e^k \delta\tau &= 2\det(g) \left(\delta_\delta^\sigma D_\alpha k^{\alpha\beta}_\beta - D_\delta k^{\sigma\beta}_\beta + D_\beta k^{\sigma\beta}_\delta \right) \delta\tau_\sigma dx^4 \\ \varepsilon_{ijk} R^{ij} e^k \delta\tau &= \det(g) (\delta_\delta^\sigma R - 2R^\sigma_\delta) \delta\tau_\sigma dx^4. \end{aligned}$$

Así nuestra ecuación de movimiento es

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{\alpha_2 h_1}{4} + \alpha_0 \frac{a_3 - h_6}{4} \right) (\delta_\delta^\sigma R - 2R^\sigma_\delta) + \alpha_2 \frac{a_3 - h_6}{2} \left(\delta_\delta^\sigma D_\alpha k^{\alpha\beta}_\beta - D_\delta k^{\sigma\beta}_\beta + D_\beta k^{\sigma\beta}_\delta \right) \right. \\ \left. + \frac{l^2}{c^2} \kappa \delta_\delta^\sigma T_0^\sigma \det(g) \right] \delta\tau_\sigma dx^4 = 0 \end{aligned} \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{\alpha_2 h_1}{4} + \alpha_0 \frac{a_3 - h_6}{4} \right) (\delta_{\sigma\delta} R - 2R_{\sigma\delta}) + \alpha_2 \frac{a_3 - h_6}{2} \left(\delta_{\sigma\delta} D_\alpha k^{\alpha\beta}_\beta - D_\delta k^{\sigma\beta}_\beta + D_\beta k^{\sigma\beta}_\delta \right) \right. \\ \left. + \frac{l^2}{c^2} \kappa \delta_{\sigma\delta} T_0^\sigma \right] \det(g) \delta\tau^{\delta\sigma} dx^4 = 0. \end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación anterior por $g^{\sigma\delta}$

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{\alpha_2 h_1}{4} + \alpha_0 \frac{a_3 - h_6}{4} \right) (4R - 2R) + \alpha_2 \frac{a_3 - h_6}{2} \left(4D_\alpha k^{\alpha\beta}_\beta - D_\delta k^{\delta\beta}_\beta + D_\beta k^{\delta\beta}_\delta \right) \right. \\ \left. + \frac{4l^2}{c^2} \kappa T_0^0 \right] \det(g) \delta\tau^{\delta\sigma} dx^4 = 0. \end{aligned}$$

Podemos despejar R

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha_2 h_1}{4} + \alpha_0 \frac{a_3 - h_6}{4} \right) R &= \alpha_2 \frac{a_3 - h_6}{4} \left(4D_\alpha k^{\alpha\beta}_\beta - 2D_\delta k^{\delta\beta}_\beta \right) + \frac{2l^2}{c^2} \kappa T_0^0 \\ &= \alpha_2 \frac{a_3 - h_6}{2} D_\alpha k^{\alpha\beta}_\beta + \frac{2l^2}{c^2} \kappa T_{00} \end{aligned}$$

Tomando las las componentes 00 de (7.1)

$$\left(\frac{\alpha_2 h_1}{4} + \alpha_0 \frac{a_3 - h_6}{4} \right) (R - 2R_{00}) + \alpha_2 \frac{a_3 - h_6}{2} \left(D_\alpha k^{\alpha\beta}_\beta - D_0 k_0^\beta_\beta + D_\beta k_0^\beta_0 \right) + \frac{l^2}{c^2} \kappa T_{00} = 0$$

ahora reemplazando R en esta ecuación se tiene

$$-\left(\frac{\alpha_2 h_1}{2} + \alpha_0 \frac{a_3 - h_6}{2} \right) R_{00} + \alpha_2 \frac{a_3 - h_6}{2} \left(2D_\alpha k^{\alpha\beta}_\beta - D_0 k_0^\beta_\beta + D_\beta k_0^\beta_0 \right) + \frac{3l^2}{c^2} \kappa T_{00} = 0$$

²Para detalles del cálculo ver apéndice D.

Teniendo en cuenta que debemos hacer las consideraciones de la gravedad de Newton–Cartan [29], es decir, $R_{00} = \nabla^2 \phi$ y la métrica se descompone en una parte temporal y otra espacial, $g_{00} = \tau_0 \tau_0 = 1$. Por otro lado $T_{00} = \rho$

$$\nabla^2 \phi = \frac{6}{\alpha_2 h_1 + \alpha_0 (a_3 - h_6)} \frac{l^2}{c^2} \kappa \rho - \frac{2\alpha_2 (a_3 - h_6)}{\alpha_2 h_1 + \alpha_0 (a_3 - h_6)} \left(2D_\alpha k^{\alpha\beta}_{\beta} - D_0 k^{\beta}_{\beta} + D_\beta k^{\beta}_{00} \right). \quad (7.2)$$



7.3. Álgebras de Galileo tipo $II \mathcal{GL}_4$

El límite no relativista del álgebra AdS–Lorentz corresponde a una S-expansión del álgebra de Newton–Hooke con extensión central [48], como fue mostrado anteriormente (3.6).

$$\begin{aligned}
[J_{ij}, J_{kl}] &= \delta_{kj} J_{il} + \delta_{lj} J_{ki} - \delta_{ki} J_{jl} - \delta_{li} J_{kj} \\
[J_{ij}, K_k] &= \delta_{kj} K_i - \delta_{ki} K_j \\
[K_i, P_j] &= -\delta_{ij} M \\
[J_{ij}, P_k] &= \delta_{kj} P_i - \delta_{ki} P_j \\
[K_i, H] &= -P_i \\
[J_{ij}, Z_{kl}] &= \delta_{kj} Z_{il} + \delta_{lj} Z_{ki} - \delta_{ki} Z_{jl} - \delta_{li} Z_{kj} \\
[J_{ij}, Z_k] &= \delta_{kj} Z_i - \delta_{ki} Z_j \\
[P_i, H] &= Z_i \\
[Z_{ij}, K_k] &= \delta_{kj} Z_i - \delta_{ki} Z_j \\
[Z_{ij}, Z_{kl}] &= \delta_{kj} Z_{il} + \delta_{lj} Z_{ki} - \delta_{ki} Z_{jl} - \delta_{li} Z_{kj} \\
[Z_{ij}, Z_k] &= \delta_{kj} Z_i - \delta_{ki} Z_j \\
[Z_{ij}, P_k] &= \delta_{kj} P_i - \delta_{ki} P_j \\
[Z_i, P_j] &= -\delta_{ij} M \\
[Z_i, H] &= -P_i.
\end{aligned}$$

Podemos demostrar que el álgebra $\mathcal{GL}_4$ puede ser escrita como una suma directa del álgebra de Newton–Hooke con extensión central y el álgebra Euclidiana en 3 dimensiones $E(3)$. El álgebra $\mathcal{GL}_4$ corresponde al límite no relativista del álgebra $\mathcal{L}_4 \equiv SO(D-1, 1) \oplus SO(D-1, 2)$, ver Ref. [3]. Esto significa que el álgebra $\text{AdS}\mathcal{L}_4$ puede ser escrita como suma directa del álgebra de Lorentz y el álgebra Anti De Sitter, los generadores de la llamada álgebra AdS Lorentz satisfacen las siguientes relaciones de conmutación.

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \eta_{bc} J_{ad} + \eta_{ad} J_{bc} - \eta_{ac} J_{bd} - \eta_{bd} J_{ac}, \quad (7.3)$$

$$[J_{ab}, Z_{cd}] = \eta_{bc} Z_{ad} + \eta_{ad} Z_{bc} - \eta_{ac} Z_{bd} - \eta_{bd} Z_{ac}, \quad (7.4)$$

$$[J_{ab}, P_c] = \eta_{bc} P_a - \eta_{ac} P_b, \quad (7.5)$$

$$[Z_{ab}, Z_{cd}] = \eta_{bc} Z_{ad} + \eta_{ad} Z_{bc} - \eta_{ac} Z_{bd} - \eta_{bd} Z_{ac}, \quad (7.6)$$

$$[Z_{ab}, P_c] = \eta_{bc} P_a - \eta_{ac} P_b; \quad [P_a, P_b] = Z_{ab}. \quad (7.7)$$

Esta álgebra fue introducida en Refs. [27, 28]. También fue obtenida desde el álgebra de Maxwell en Ref. [55] usando un método conocido como deformación de álgebras de Lie y luego desde el álgebra AdS en Ref. [25] usando el método de S-expansión.

La correspondiente álgebra no relativista el álgebra $\mathcal{GL}_4$, entonces es la suma directa $\mathcal{GL}_4 = \mathcal{NH}_{3+1}(M) \oplus E(3)$, donde $\mathcal{NH}_{3+1}(M)$ es el álgebra de Newton–Hooke con extensión central y $E(3)$ es el álgebra Euclidiana en 3 dimensiones. Podemos obtener los siguientes sectores del álgebra al realizar el siguiente cambio de base

$$\tilde{K}_i = K_i - Z_i, \quad \tilde{Z}_{ij} = J_{ij} - Z_{ij}$$

(a) El álgebra de Newton–Hooke con extensión central

$$\begin{aligned}
 [J_{ij}, J_{kl}] &= \delta_{jk} J_{il} + \delta_{il} J_{jk} - \delta_{jl} J_{ik} - \delta_{ik} J_{jl} \\
 [J_{ij}, P_k] &= \delta_{kj} P_i - \delta_{ki} P_j \\
 [J_{ij}, Z_k] &= \delta_{kj} Z_i - \delta_{ki} Z_j \\
 [Z_i, P_j] &= -\delta_{ij} M \\
 [Z_i, H] &= -P_i \\
 [P_i, H] &= Z_i
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

(b) El álgebra Euclidiana en 3 dimensiones $E(3)$

$$\begin{aligned}
 [\tilde{Z}_{ij}, \tilde{Z}_{kl}] &= \delta_{jk} \tilde{Z}_{il} + \delta_{il} \tilde{Z}_{jk} - \delta_{jl} \tilde{Z}_{ik} - \delta_{ik} \tilde{Z}_{jl} \\
 [\tilde{Z}_{ij}, \tilde{K}_k] &= \delta_{kj} \tilde{K}_i - \delta_{ki} \tilde{K}_j \\
 [\tilde{K}_i, \tilde{K}_j] &= 0
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

(c) Y las respectivas relaciones de conmutación entre el resto de generadores con J_{ij} , ya que deben transformar como vectores

$$\begin{aligned}
 [J_{ij}, P_k] &= \delta_{kj} P_i - \delta_{ki} P_j \\
 [J_{ij}, Z_k] &= \delta_{kj} Z_i - \delta_{ki} Z_j \\
 [J_{ij}, \tilde{Z}_{kl}] &= \delta_{jk} \tilde{Z}_{il} + \delta_{il} \tilde{Z}_{jk} - \delta_{jl} \tilde{Z}_{ik} - \delta_{ik} \tilde{Z}_{jl} \\
 [J_{ij}, \tilde{K}_k] &= \delta_{kj} \tilde{K}_i - \delta_{ki} \tilde{K}_j
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

7.4. Acción (ChSAS) para el álgebra $\mathcal{GL}_4$

La 1-forma conexión evaluada en esta álgebra es dada por

$$A = \frac{c}{l}\tau H + \frac{1}{l}e^i P_i + \frac{1}{cl}mM + \frac{1}{c}\omega^i K_i + \frac{1}{2}\omega^{ij} J_{ij} + \frac{1}{2}k^{ij} Z_{ij} + \frac{1}{c}k^i Z_i$$

y su correspondiente 2-forma curvatura ³

$$\begin{aligned} F &= dA + \frac{1}{2}[A, A] \\ &= \frac{c}{l}d\tau H + \frac{1}{l}(T^i - \omega^i \tau + k^i_j e^j - k^i \tau)P_i + \frac{1}{cl}(dm - \omega^i e_i - k^i e_i)M + \frac{1}{c}D\omega^i K_i + \frac{1}{2}R^{ij} J_{ij} \\ &\quad + \frac{1}{c}(Dk^i + \frac{c^2}{l^2}e^i \tau + k^i_j \omega^j + k^i_j k^j)Z_i + \frac{1}{2}(Dk^{ij} + k^{ik} k_k^j)Z_{ij}. \end{aligned}$$

La 2-forma potencial de gauge

$$B = B^i P_i + B^0 H + B^{(m)} M + \frac{1}{2}B^{ij} J_{ij} + G^i K_i + \frac{1}{2}\beta^{ij} Z_{ij} + \beta^i Z_i$$

y su correspondiente 3-forma curvatura

$$\begin{aligned} H &= DB = dB + [A, B] \\ &= dB + \left[\frac{c}{l}\tau H + \frac{1}{l}e^i P_i + \frac{1}{cl}mM + \frac{1}{c}\omega^i K_i + \frac{1}{2}\omega^{ij} J_{ij} + \frac{1}{2}k^{ij} Z_{ij} + \frac{1}{c}k^i Z_i, \right. \\ &\quad \left. B^k P_k + B^0 H + B^{(m)} M + \frac{1}{2}B^{kl} J_{kl} + G^k K_k + \frac{1}{2}\beta^{kl} Z_{kl} + \beta^k Z_k \right] \\ &= dB + \frac{c}{l}\tau B^k [H, P_k] + \frac{c}{l}\tau G^k [H, K_k] + \frac{c}{l}\tau \beta^k [H, Z_k] + \frac{1}{l}e^i B^0 [P_i, H] + \frac{1}{2l}e^i B^{kl} [P_i, J_{kl}] \\ &\quad + \frac{1}{l}e^i G^k [P_i, K_k] + \frac{1}{2l}e^i \beta^{kl} [P_i, Z_{kl}] + \frac{1}{l}e^i \beta^k [P_i, Z_k] + \frac{1}{c}\omega^i B^k [K_i, P_k] + \frac{1}{c}\omega^i B^0 [K_i, H] \\ &\quad + \frac{1}{2c}\omega^i B^{kl} [K_i, J_{kl}] + \frac{1}{2c}\omega^i \beta^{kl} [K_i, Z_{kl}] + \frac{1}{2}\omega^{ij} B^k [J_{ij}, P_k] + \frac{1}{4}\omega^{ij} B^{kl} [J_{ij}, J_{kl}] \\ &\quad + \frac{1}{2}\omega^{ij} G^k [J_{ij}, K_k] + \frac{1}{4}\omega^{ij} \beta^{kl} [J_{ij}, Z_{kl}] + \frac{1}{2}\omega^{ij} \beta^k [J_{ij}, Z_k] + \frac{1}{4}k^{ij} B^{kl} [Z_{ij}, J_{kl}] \\ &\quad + \frac{1}{4}k^{ij} \beta^{kl} [Z_{ij}, Z_{kl}] + \frac{1}{2}k^{ij} \beta^k [Z_{ij}, Z_k] + \frac{1}{2}k^{ij} B^k [Z_{ij}, P_k] + \frac{1}{2}k^{ij} G^k [Z_{ij}, K_k] \\ &\quad + \frac{1}{2c}k^i B^k [Z_i, P_k] + \frac{1}{c}k^k B^0 [Z_k, H] + \frac{1}{2c}k^i B^{kl} [Z_i, J_{kl}] + \frac{1}{2}k^i \beta^{kl} [Z_i, Z_{kl}] \\ &= dB^0 H + \left(DB^i + \frac{c}{l}\tau G^i + \frac{c}{l}\tau \beta^i - \frac{1}{l}B^{ij} e_j - \frac{1}{2}\beta^{ij} e_j - \frac{1}{c}\omega^i B^0 - \frac{1}{c}k^i B^0 + k^{ij} B_j \right) P_i \\ &\quad + \left(dB^{(m)} + \frac{1}{l}e^i G_i + \frac{1}{l}e^i \beta_i - \frac{1}{c}\omega^i B_i - \frac{1}{c}k^i B_i \right) M + \frac{1}{2}DB^{ij} J_{ij} + \left(DG^i - \frac{1}{c}B^{ij} \omega_j \right) K_i \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(D\beta^{ij} - k^i_k B^{kj} + k^j_k B^{ki} + k^i_k \beta^{kj} - k^j_k \beta^{ki} \right) Z_{ij} + \left(D\beta^i - \frac{c}{l}\tau B^i + \frac{1}{l}e^i B^0 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{c}B^{ij} k_j + k^{ij} G_j - \frac{1}{c}\beta^{ij} \omega_j + k^{ij} \beta_j - \frac{1}{c}\beta^{ij} k_j \right) Z_i \end{aligned}$$

³Para detalles del cálculo ver apéndice C.

$$\begin{aligned}
H &= H^0 H + H^i P_i + H^{(m)} M + \frac{1}{2} H^{ij} J_{ij} + L^i K_i + \frac{1}{2} \Theta^{ij} Z_{ij} + \Theta^i Z_i \\
H^0 &= dB^0 \\
H^i &= DB^i + \frac{c}{l} \tau G^i + \frac{c}{l} \tau \beta^i - \frac{1}{l} B^{ij} e_j - \frac{1}{2} \beta^{ij} e_j - \frac{1}{c} \omega^i B^0 - \frac{1}{c} k^i B^0 + k^{ij} B_j \\
H^{(m)} &= dB^{(m)} + \frac{1}{l} e^i G_i + \frac{1}{l} e^i \beta_i - \frac{1}{c} \omega^i B_i - \frac{1}{c} k^i B_i \\
H^{ij} &= DB^{ij} \\
L^i &= DG^i - \frac{1}{c} B^{ij} \omega_j \\
\Theta^{ij} &= D\beta^{ij} - k^i_k B^{kj} + k^j_k B^{ki} + k^i_k \beta^{kj} - k^j_k \beta^{ki} \\
\Theta^i &= D\beta^i - \frac{c}{l} \tau B^i + \frac{1}{l} e^i B^0 - \frac{1}{c} B^{ij} k_j + k^{ij} G_j - \frac{1}{c} \beta^{ij} \omega_j + k^{ij} \beta_j - \frac{1}{c} \beta^{ij} k_j.
\end{aligned}$$

Postulamos un ansatz para expresar las 2-formas $\{B^i, B^0, B^{(m)}, B^{ij}, G^i, \beta^{ij}, \beta^i\}$ como producto cuña de las 1-formas $\{\tau, e^i, m, \omega^{ij}, \omega^i, k^{ij}, k^i\}$.

$$\begin{aligned}
B^i &= \frac{a_1}{2l} \omega^{ij} e_j + \frac{a_2}{2l} \omega^i \tau + \frac{a_3}{2l} k^{ij} e_j + \frac{a_4}{2l} k^i \tau + \frac{a_5}{2c^2 l} \omega^i m + \frac{a_6}{2c^2 l} k^i m \\
B^0 &= \frac{b_1}{2cl} \omega^i e_i + \frac{b_2}{2cl} k^i e_i \\
B^{(m)} &= \frac{c_1}{2cl} \omega^i e_i + \frac{c_2}{2cl} k^i e_i \\
B^{ij} &= \frac{d_1}{2l^2} e^i e^j + \frac{d_2}{2} \omega^i_k \omega^{kj} + \frac{d_3}{2c^2} \omega^i \omega^j + \frac{d_4}{2} k^i_k k^{kj} + \frac{d_5}{2c^2} k^i k^j \\
&\quad + \frac{d_6}{2} \omega^i_k k^{kj} + \frac{d_7}{2} k^i_k \omega^{kj} + \frac{d_8}{2c^2} \omega^i k^j + \frac{d_9}{2c^2} k^i \omega^j \\
G^i &= \frac{f_1 c}{2l^2} e^i \tau + \frac{f_2}{2cl^2} e^i m + \frac{f_3}{2c} \omega^i_j \omega^j + \frac{f_4}{2c} k^i_j \omega^j + \frac{f_5}{2c} \omega^i_j k^j + \frac{f_6}{2c} k^i_j k^j \\
\beta^{ij} &= \frac{g_1}{2l^2} e^i e^j + \frac{g_2}{2} \omega^i_k \omega^{kj} + \frac{g_3}{2c^2} \omega^i \omega^j + \frac{g_4}{2} k^i_k k^{kj} + \frac{g_5}{2c^2} k^i k^j \\
&\quad + \frac{g_6}{2} \omega^i_k k^{kj} + \frac{g_7}{2} k^i_k \omega^{kj} + \frac{g_8}{2c^2} \omega^i k^j + \frac{g_9}{2c^2} k^i \omega^j \\
\beta^i &= \frac{h_1 c}{2l^2} e^i \tau + \frac{h_2}{cl^2} e^i m + \frac{h_3}{2c} \omega^i_j \omega^j + \frac{h_4}{2c} k^i_j \omega^j + \frac{h_5}{2c} \omega^i_j k^j + \frac{h_6}{2c} k^i_j k^j.
\end{aligned}$$

Introduciendo el ansatz en las ecuaciones para la 3-forma H .

$$\begin{aligned}
H^0 &= DB^0 \\
&= \frac{b_1}{2cl}(D\omega^i e_i - \omega^i T_i) + \frac{b_2}{2cl}(Dk^i e_i - k^i T_i) \\
H^i &= DB^i + \frac{c}{l}\tau G^i + \frac{c}{l}\tau\beta^i - \frac{1}{l}B^{ij}e_j - \frac{1}{l}\beta^{ij}e_j - \frac{1}{c}\omega^i B^0 - \frac{1}{c}k^i B^0 + k^{ij}B_j \\
&= \frac{a_1}{2l}(R^{ij}e_j - \omega^{ij}T_j) + \frac{a_1 + d_2}{2l}\omega^i{}_k\omega^{kj}e_j + \frac{a_2}{2l}(D\omega^i\tau - \omega^i d\tau) + \frac{a_3}{2l}(Dk^{ij}e_j - k^{ij}T_j) \\
&\quad + \frac{a_4}{2l}(Dk^i\tau - k^i d\tau) + \frac{a_5}{2c^2l}(D\omega^i m - \omega^i dm) + \frac{a_6}{2c^2l}(Dk^i m - k^i dm) - \frac{d_3 + b_1}{2c^2l}\omega^i\omega^j e_j \\
&\quad - \frac{d_8 + b_2}{2c^2l}\omega^i k^j e_j - \frac{d_4}{2l}k^i{}_k k^{kj}e_j - \frac{d_5}{2c^2l}k^i k^j e_j - \frac{d_6}{2l}\omega^i{}_k k^{kj}e_j - \frac{d_7}{2l}k^i{}_k \omega^{kj}e_j \\
&\quad - \frac{d_9}{2c^2l}k^i\omega^j e_j + \frac{c}{l}\tau\left(\frac{f_2}{cl^2}e^i m + \frac{f_3}{2c}\omega^i{}_j\omega^j + \frac{f_4}{2c}k^i{}_j\omega^j + \frac{f_5}{2c}\omega^i{}_j k^j + \frac{f_6}{2c}k^i{}_j k^j\right) \\
&\quad - \frac{1}{l}\left(\frac{g_2}{2}\omega^i{}_k\omega^{kj} + \frac{g_3}{2c^2}\omega^i\omega^j + \frac{g_4}{2}k^i{}_k k^{kj} + \frac{g_5}{2c^2}k^i k^j + \frac{g_6}{2}\omega^i{}_k k^{kj} + \frac{g_7}{2}k^i{}_k \omega^{kj}\right. \\
&\quad \left.+ \frac{g_8}{2c^2}\omega^i k^j + \frac{g_9}{2c^2}k^i\omega^j\right)e_j + \frac{c}{l}\tau\left(\frac{h_2}{cl^2}e^i m + \frac{h_3}{2c}\omega^i{}_j\omega^j + \frac{h_4}{2c}k^i{}_j\omega^j + \frac{h_5}{2c}\omega^i{}_j k^j + \frac{h_6}{2c}k^i{}_j k^j\right) \\
&\quad - \frac{1}{c}\omega^i\left(\frac{b_1}{2cl}\omega^k e_k + \frac{b_2}{2cl}k^k e_k\right) - \frac{1}{c}k^i\left(\frac{b_1}{2cl}\omega^k e_k + \frac{b_2}{2cl}k^k e_k\right) \\
&\quad + k^i{}_k\left(\frac{a_1}{2l}\omega^{kj}e_j + \frac{a_2}{2l}\omega^k\tau + \frac{a_3}{2l}k^{kj}e_j + \frac{a_4}{2l}k^k\tau + \frac{a_5}{2c^2l}\omega^k m + \frac{a_6}{2c^2l}k^k m\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^{(m)} &= DB^{(m)} + \frac{1}{l}e^i G_i - \frac{1}{c}\omega^i B_i + \frac{1}{l}e^i\beta_i - \frac{1}{c}k^i B_i \\
&= \frac{c_1}{2cl}(D\omega^i e_i - \omega^i T_i) + \frac{c_2}{2cl}(Dk^i e_i - k^i T_i) \\
&\quad + \frac{1}{l}\left(\frac{f_3}{2c}\omega^i{}_j\omega^j e_i + \frac{f_4}{2c}k^i{}_j\omega^j e_i + \frac{f_5}{2c}\omega^i{}_j k^j e_i + \frac{f_6}{2c}k^i{}_j k^j e_i\right) \\
&\quad - \frac{1}{c}\omega_i\left(\frac{a_1}{2l}\omega^{ij}e_j + \frac{a_3}{2l}k^{ij}e_j + \frac{a_4}{2l}k^i\tau + \frac{a_6}{2c^2l}k^i m\right) \\
&\quad + \frac{1}{l}e_i\left(\frac{h_3}{2c}\omega^i{}_j\omega^j + \frac{h_4}{2c}k^i{}_j\omega^j + \frac{h_5}{2c}\omega^i{}_j k^j + \frac{h_6}{2c}k^i{}_j k^j\right) \\
&\quad - \frac{1}{c}k_i\left(\frac{a_1}{2l}\omega^{ij}e_j + \frac{a_2}{2l}\omega^i\tau + \frac{a_3}{2l}k^{ij}e_j + \frac{a_5}{2c^2l}\omega^i m\right) \\
H^{ij} &= DB^{ij} \\
&= \frac{d_1}{2l^2}(T^i e^j - e^i T^j) + \frac{d_2}{2}(R^i{}_k\omega^{kj} - \omega^i{}_k R^{kj}) + \frac{d_3}{2c^2}(D\omega^i\omega^j - \omega^i D\omega^j) \\
&\quad + \frac{d_4}{2}(Dk^i{}_k k^{kj} - k^i{}_k Dk^{kj}) + \frac{d_5}{2c^2}(Dk^i k^j - k^i Dk^j) \\
&\quad + \frac{d_6}{2}(R^i{}_k k^{kj} + \omega^i{}_k \omega^{kl} k^{lj} - \omega^i{}_k Dk^{kj}) + \frac{d_7}{2}(Dk^i{}_k \omega^{kj} - k^i{}_k R^{kj} - k^i{}_k \omega^k{}_l \omega^{lj}) \\
&\quad + \frac{d_8}{2c^2}(D\omega^i k^j - \omega^i Dk^j) + \frac{d_9}{2c^2}(Dk^i \omega^j - k^i D\omega^j)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L^i &= DG^i - \frac{1}{c} B^{ij} \omega_j \\
&= \frac{f_1 c}{2l^2} (T^i \tau - e^i d\tau) + \frac{f_2}{2cl^2} (T^i m - e^i dm) + \frac{f_3}{2c} (R^i_j \omega^j + \omega^i_k \omega^k_j \omega^j - \omega^i_j D\omega^j) \\
&\quad + \frac{f_4}{2c} (Dk^i_j \omega^j - k^i_j D\omega^j) + \frac{f_5}{2c} (R^i_j k^j + \omega^i_k \omega^k_j k^j - \omega^i_j Dk^j) + \frac{f_6}{2c} (Dk^i_j k^j - k^i_j Dk^j) \\
&\quad - \frac{d_1}{2cl^2} e^i e^j \omega_j - \frac{d_2}{2c} \omega^i_k \omega^k_j \omega_j - \frac{d_4}{2c} k^i_k k^k_j \omega_j - \frac{d_5}{2c^3} k^i k^j \omega_j - \frac{d_6}{2c} \omega^i_k k^k_j \omega_j - \frac{d_7}{2c} k^i_k \omega^k_j \omega_j \\
&\quad - \frac{d_8}{2c^3} \omega^i k^j \omega_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta^{ij} &= D\beta^{ij} - k^i_k B^{kj} + k^j_k B^{ki} + k^i_k \beta^{kj} - k^j_k \beta^{ki} \\
&= \frac{g_1}{2l^2} (T^i e^j - e^i T^j) + \frac{g_2}{2} (R^i_k \omega^{kj} - \omega^i_k R^{kj}) + \frac{g_3}{2c^2} (D\omega^i \omega^j - \omega^i D\omega^j) \\
&\quad + \frac{g_4}{2} (Dk^i_k k^{kj} - k^i_k Dk^{kj}) + \frac{g_5}{2c^2} (Dk^i k^j - k^i Dk^j) + \frac{g_6}{2} (R^i_k k^{kj} - \omega^i_k Dk^{kj}) \\
&\quad + \frac{g_6}{2} \omega^i_k \omega^k_l k^{lj} + \frac{g_7}{2} (Dk^i_k \omega^{kj} - k^i_k R^{kj}) - \frac{g_7}{2} k^i_k \omega^k_l \omega^{lj} \\
&\quad + \frac{g_8}{2c^2} (D\omega^i k^j - \omega^i Dk^j) + \frac{g_9}{2c^2} (Dk^i \omega^j - k^i D\omega^j) - k^i_k B^{kj} + k^j_k B^{ki} \\
&\quad + k^i_k \beta^{kj} - k^j_k \beta^{ki}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta^i &= D\beta^i - \frac{c}{l} \tau B^i + \frac{1}{l} e^i B^0 - \frac{1}{c} B^{ij} k_j + k^{ij} G_j - \frac{1}{c} \beta^{ij} \omega_j + k^{ij} \beta_j - \frac{1}{c} \beta^{ij} k_j \\
&= \frac{h_1 c}{2l^2} (T^i \tau - e^i d\tau) + \frac{h_2}{cl^2} (T^i m - e^i dm) + \frac{h_3}{2c} (R^i_j \omega^j - \omega^i_j D\omega^j) \\
&\quad + \frac{h_4}{2c} (Dk^i_j \omega^j - k^i_j D\omega^j) + \frac{h_5}{2c} (R^i_j k^j - \omega^i_j Dk^j) + \frac{h_6}{2c} (Dk^i_j k^j - k^i_j Dk^j) \\
&\quad - \frac{c}{l} \tau \left(\frac{a_1}{2l} \omega^{ij} e_j + \frac{a_3}{2l} k^{ij} e_j + \frac{a_5}{2c^2 l} \omega^i m + \frac{a_6}{2c^2 l} k^i m \right) + \frac{1}{l} e^i \left(\frac{b_1}{2cl} \omega^j e_j + \frac{b_2}{2cl} k^j e_j \right) \\
&\quad - \frac{1}{c} \left(\frac{d_1}{2l^2} e^i e^j + \frac{d_4}{2} k^i_k k^{kj} + \frac{d_6}{2} \omega^i_k k^{kj} + \frac{d_7}{2} k^i_k \omega^{kj} \right) k_j \\
&\quad + k^{ij} \left(\frac{f_1 c}{2l^2} e_j \tau + \frac{f_2}{cl^2} e_j m + \frac{f_3}{2c} \omega_{jk} \omega^k + \frac{f_4}{2c} k_{jk} \omega^k + \frac{f_5}{2c} \omega_{jk} k^k + \frac{f_6}{2c} k_{jk} k^k \right) \\
&\quad - \frac{1}{c} \left(\frac{g_1}{2l^2} e^i e^j + \frac{g_4}{2} k^i_k k^{kj} + \frac{g_6}{2} \omega^i_k k^{kj} + \frac{g_7}{2} k^i_k \omega^{kj} \right) \omega_j \\
&\quad + \frac{h_5 - d_2}{2c} \omega^i_k \omega^k_j k^j + \frac{h_3 - g_2}{2c} \omega^i_k \omega^k_j \omega^j + \frac{g_8 - d_3}{2c^3} \omega^i \omega^j k_j + \frac{g_5 - d_9}{2c^3} k^i \omega^j k_j \\
&\quad + k^{ij} \left(\frac{h_1 c}{2l^2} e_j \tau + \frac{h_2}{cl^2} e_j m + \frac{h_3}{2c} \omega_{ik} \omega^k + \frac{h_4}{2c} k_{ik} \omega^k + \frac{h_5}{2c} \omega_{ik} k^k + \frac{h_6}{2c} k_{ik} k^k \right) \\
&\quad - \frac{1}{c} \left(\frac{g_1}{2l^2} e^i e^j + \frac{g_2}{2} \omega^i_k \omega^{kj} + \frac{g_3}{2c^2} \omega^i \omega^j + \frac{g_4}{2} k^i_k k^{kj} \right) k_j.
\end{aligned}$$

Donde las constantes son arbitrarias. Con el objeto de fijar estas constantes debemos exigir que los campos deben satisfacer las FDA, es decir, si $F = 0$, entonces, $H = 0$. La condición $F = 0$ nos deja las siguientes

ecuaciones

$$\begin{aligned}
 d\tau &= 0 \\
 T^i &= \omega^i \tau - k^i_j e^j + k^i \tau \\
 dm &= \omega^i e_i + k^i e_i \\
 D\omega^i &= 0 \\
 R^{ij} &= 0 \\
 Dk^i &= -\frac{c^2}{l^2} e^i \tau - k^i_j \omega^j - k^i_j k^j \\
 Dk^{ij} &= -k^{ik} k_k^j.
 \end{aligned}$$

Al reemplazar esto en H

$$\begin{aligned}
 H^0 &= -\frac{b_2}{2cl} (k^i_j \omega^j e_i + k^i \omega_i \tau) \\
 H^i &= \frac{f_3 + h_3 - a_1}{2l} \omega^{ij} \omega_j \tau + \frac{a_1 + d_2 - g_2}{2l} \omega^i_k \omega^{kj} e_j + \frac{f_4 + h_4 - a_3 - a_4 + a_2}{2l} k^{ij} \omega_j \tau \\
 &\quad + \frac{f_2 - a_6 - h_2}{2l^3} e^i \tau m + \frac{d_9 - a_6 - b_1 - g_9}{2c^2 l} k^i \omega^j e_j - \frac{d_3 + b_1 + a_5 + g_3}{2c^2 l} \omega^i \omega^j e_j \\
 &\quad - \frac{d_8 + b_2 + g_8 + a_5}{2c^2 l} \omega^i k^j e_j - \frac{d_4 + g_4 - a_3}{2l} k^i_k k^{kj} e_j - \frac{d_5 + g_5 + a_6}{2c^2 l} k^i k^j e_j \\
 &\quad - \frac{d_6 + g_6 - a_1}{2l} \omega^i_k k^{kj} e_j - \frac{d_7 + g_7 - a_1}{2l} k^i_k \omega^{kj} e_j + \frac{f_5 + h_5 - a_1}{2l} \omega^i_j k^j \tau \\
 &\quad + \frac{f_6 + h_6 - a_3}{2l} k^i_j k^j \tau + \frac{a_5}{2c^2 l} k^i_k \omega^k m \\
 H^{(m)} &= \frac{a_4 + c_1 - c_2 - a_2}{2cl} k^i \omega_i \tau + \frac{f_3 + h_3 - a_1}{2cl} \omega^i_j \omega^j e_i + \frac{f_4 + h_4 - c_2 - a_3 + c_1}{2cl} k^i_j \omega^j e_i \\
 &\quad + \frac{f_5 + h_5 - a_1}{2cl} \omega^i_j k^j e_i + \frac{f_6 + h_6 - a_3}{2cl} k^i_j k^j e_i + \frac{a_6 - a_5}{2c^3 l} k^i \omega_i m \\
 H^{ij} &= \frac{d_1}{2l^2} (-k^{ik} e_k e^j + e^i k^{jk} e_k) + \frac{d_4}{2} (-k^i_l k^l_k k^{kj} + k^i_k k^k_l k^{lj}) \\
 &\quad + \frac{d_5 + d_1}{2l^2} e^i \tau k^j - \frac{d_5 + d_1}{2l^2} k^i e^j \tau + \frac{d_5}{2c^2} (k^i_k \omega^k + k^i_k k^k) k^j - \frac{d_5}{2c^2} k^i (k^j_k \omega^k + k^j_k k^k) \\
 &\quad + \frac{d_6}{2} \omega^i_k \omega^k_l k^{lj} + \frac{d_6}{2} \omega^i_k k^k_l k^{lj} - \frac{d_7}{2} k^i_k \omega^k_l \omega^{lj} - \frac{d_7}{2} k^i_l k^l_k \omega^{kj} - \frac{d_8 + d_1}{2l^2} \omega^i e^j \tau \\
 &\quad - \frac{d_8}{2c^2} \omega^i (k^j_k \omega^k + k^j_k k^k) + \frac{d_9 + d_1}{2l^2} e^i \tau \omega^j + \frac{d_9}{2c^2} (k^i_k \omega^k + k^i_k k^k) \omega^j \\
 L^i &= \frac{f_6 + f_5 - f_1}{2l^2} c k^{ij} e_j \tau + \frac{f_2}{2cl^2} (\omega^i \tau m - k^{ij} e_j m + k^i \tau m - e^i k^j e_j) + \frac{f_3}{2c} \omega^i_k \omega^k_j \omega^j \\
 &\quad + \frac{f_5}{2c} (\omega^i_k \omega^k_j k^j + \omega^i_j k^j_k k^k) + \frac{f_2 - d_1}{2cl^2} e^i e^j \omega_j + \frac{f_6 - d_4 - f_4}{2c} k^i_k k^{kj} \omega_j \\
 &\quad - \frac{d_5}{2c^3} k^i k^j \omega_j + \frac{f_5 - d_6}{2c} \omega^i_k k^{kj} \omega_j - \frac{d_7}{2c} k^i_k \omega^k_j \omega^j - \frac{d_8}{2c^3} \omega^i k^j \omega_j
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta^{ij} = & \frac{g_1 - g_8}{2l^2} \omega^i \tau e^j - \frac{g_1 - g_9}{2l^2} e^i \omega^j \tau - \frac{g_5 - g_1}{2l^2} e^i \tau k^j - \frac{g_5}{2c^2} k^i_k \omega^k k^j + \frac{g_5 - g_1}{2l^2} k^i e^j \tau \\
& + \frac{g_5}{2c^2} k^i k^j_k \omega^k + \left(\frac{g_6}{2} + \frac{d_2}{2} - \frac{g_2}{2} \right) \omega^i_k \omega^k_l k^{lj} - \left(\frac{g_7}{2} + \frac{d_2}{2} - \frac{g_2}{2} \right) k^i_k \omega^k_l \omega^{lj} \\
& + \frac{g_8 - d_3 - g_3}{2c^2} \omega^i k^j_k \omega^k + \frac{g_9 + g_3 - d_3}{2c^2} k^i_k \omega^k \omega^j - k^i_k \left(\frac{d_1}{2l^2} e^k e^j + \frac{d_5}{2c^2} k^k k^j \right. \\
& + \frac{d_6 - g_6}{2} \omega^k_l k^{lj} + \frac{d_7}{2} k^k_l \omega^{lj} + \frac{d_8 - g_8}{2c^2} \omega^k k^j + \frac{d_9}{2c^2} k^k \omega^j \left. \right) + k^j_k \left(\frac{d_1}{2l^2} e^k e^i + \frac{d_5}{2c^2} k^k k^i \right. \\
& + \frac{d_6 - g_6}{2} \omega^k_l k^{li} + \frac{d_7 + g_6 - g_7}{2} k^k_l \omega^{li} + \frac{d_8 - g_8}{2c^2} \omega^k k^i + \frac{d_9 + g_8 - g_9}{2c^2} k^k \omega^i \left. \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta^i = & \frac{h_2 + a_5}{2cl^2} \omega^i \tau m + \frac{b_1 + g_1 - h_2}{2cl^2} e^i \omega^j e_j + \frac{h_5 - a_1}{2l^2} c \omega^i_j e^j \tau + \frac{h_5 - g_6}{2c} \omega^i_j k^j_k \omega^k \\
& - \frac{c}{l} \frac{a_6}{2c^2 l} k^i m \tau + \frac{b_2 + d_1 + g_1 - h_2}{2cl^2} e^i k^j e_j + \frac{c(h_6 + h_1 + f_1 - a_3)}{2l^2} k^i_j e^j \tau \\
& - \frac{1}{c} \left(\frac{d_4 + g_4 - f_6 - h_6}{2} k^i_k k^{kj} + \frac{d_6 + g_6}{2} \omega^i_k k^{kj} + \frac{d_7 + g_7 - f_5 - h_5}{2} k^i_k \omega^{kj} \right) k_j \\
& + k^{ij} \left(\frac{f_2 + h_2}{cl^2} e_j m + \frac{f_4 + h_6 + h_4 - g_4}{2c} k_{jk} \omega^k \right) \\
& - \frac{1}{c} \left(\frac{g_7 - f_3 - h_3}{2} k^i_k \omega^{kj} \right) \omega_j + \frac{h_5 - d_2 - g_2}{2c} \omega^i_k \omega^k_j k^j \\
& + \left(\frac{h_3}{2c} - \frac{g_2}{2c} \right) \omega^i_k \omega^k_j \omega^j + \frac{g_8 - d_3 - g_3}{2c^3} \omega^i \omega^j k_j + \frac{g_5 - d_9 - g_9}{2c^3} k^i \omega^j k_j.
\end{aligned}$$

Ahora de $H = 0$ se obtiene que el sistema de ecuaciones para las constantes es dado por

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_5 = a_6 = 0 \\
b_1 &= b_2 = 0 \\
c_2 &= a_4 - a_2 + c_1 \\
d_1 &= d_2 = d_4 = d_5 = d_6 = d_7 = d_8 = d_9 = 0 \\
d_3 &= g_1 = g_8 = g_9 \\
f_2 &= f_3 = f_5 = 0 \\
f_1 &= f_4 = f_6 = a_4 - a_2 + a_3 \\
g_1 &= g_2 = g_5 = g_6 = g_7 = g_8 = g_9 = 0 \\
g_3 &= -d_3 \\
g_4 &= a_3 \\
h_1 &= h_2 = h_3 = h_4 = h_5 = 0 \\
h_6 &= a_2 - a_4
\end{aligned}$$

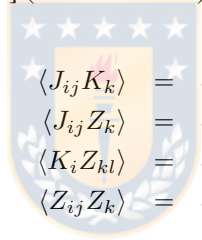
Así nuestro ansatz se reduce a

$$\begin{aligned}
B^i &= \frac{a_2}{2l} \omega^i \tau + \frac{a_3}{2l} k^{ij} e_j + \frac{a_4}{2l} k^i \tau \\
B^0 &= 0 \\
B^{(m)} &= \frac{c_1}{2cl} \omega^i e_i + \frac{a_4 - a_2 + c_1}{2cl} k^i e_i \\
B^{ij} &= \frac{d_3}{2c^2} \omega^i \omega^j \\
G^i &= (a_4 - a_2 + a_3) \left(\frac{c}{2l^2} e^i \tau + \frac{1}{2c} k^i_j \omega^j + \frac{1}{2c} k^i_j k^j \right) \\
\beta^{ij} &= -\frac{d_3}{2c^2} \omega^i \omega^j + \frac{a_3}{2} k^i_k k^{kj} \\
\beta^i &= \frac{a_2 - a_4}{2c} k^i_j k^j.
\end{aligned}$$

La acción Chern–Simons–Antoniadis–Savvidy viene dada

$$L_{ChSAS}^{(4)} = \langle FB \rangle.$$

Donde usando el teorema VII.2 de [46] (ver sección 2.3) es posible mostrar que los únicos tensores invariantes para $\mathcal{GL}_4$ son



$$\begin{aligned}
\langle J_{ij} K_k \rangle &= \alpha_0 c \varepsilon_{ijk} \\
\langle J_{ij} Z_k \rangle &= \alpha_2 c \varepsilon_{ijk} \\
\langle K_i Z_{kl} \rangle &= \alpha_2 c \varepsilon_{ikl} \\
\langle Z_{ij} Z_k \rangle &= \alpha_2 c \varepsilon_{ijk}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle FB \rangle &= \left\langle \left(\frac{c}{l} d\tau H + \frac{1}{l} (T^i - \omega^i \tau + k^i_j e^j - k^i \tau) P_i + \frac{1}{cl} (dm - \omega^i e_i - k^i e_i) M + \frac{1}{c} D\omega^i K_i \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} R^{ij} J_{ij} + \frac{1}{c} (Dk^i + \frac{c^2}{l^2} e^i \tau + k^i_j \omega^j + k^i_j k^j) Z_i + \frac{1}{2} (Dk^{ij} + k^{im} k_m^j) Z_{ij} \right) \right. \\
&\quad \left. \left(B^k P_k + B^0 H + B^{(m)} M + \frac{1}{2} B^{kl} J_{kl} + G^k K_k + \frac{1}{2} \beta^{kl} Z_{kl} + \beta^k Z_k \right) \right\rangle \\
&= \frac{1}{2c} D\omega^i B^{kl} \langle K_i J_{kl} \rangle + \frac{1}{2c} D\omega^i \beta^{kl} \langle K_i Z_{kl} \rangle + \frac{1}{2} R^{ij} G^k \langle J_{ij} K_k \rangle + \frac{1}{2} R^{ij} \beta^k \langle J_{ij} Z_k \rangle \\
&\quad + \frac{1}{2c} (Dk^i + \frac{c^2}{l^2} e^i \tau + k^i_j \omega^j + k^i_j k^j) B^{kl} \langle Z_i J_{kl} \rangle \\
&\quad + \frac{1}{2c} (Dk^i + \frac{c^2}{l^2} e^i \tau + k^i_j \omega^j + k^i_j k^j) \beta^{kl} \langle Z_i Z_{kl} \rangle \\
&\quad + \frac{1}{2} Dk^{ij} G^k \langle Z_{ij} K_k \rangle + \frac{1}{2} k^{im} k_m^j G^k \langle Z_{ij} K_k \rangle \\
&\quad + \frac{1}{2} Dk^{ij} \beta^k \langle Z_{ij} Z_k \rangle + \frac{1}{2} k^{im} k_m^j \beta^k \langle Z_{ij} Z_k \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle FB \rangle = & \frac{\alpha_0 d_3}{4c^2} \varepsilon_{ikl} D\omega^i \omega^k \omega^l + \frac{\alpha_2}{4} \varepsilon_{ikl} D\omega^i \left(-\frac{d_3}{c^2} \omega^k \omega^l + a_3 k_m^k k^{ml} \right) \\
& + \frac{\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \varepsilon_{ijk} R^{ij} \left(\frac{c^2}{l^2} e^i \tau + k_j^i \omega^j + k_j^i k^j \right) \\
& + \alpha_2 \frac{a_2 - a_4}{4} \varepsilon_{ijk} R^{ij} k_m^k k^m + \frac{\alpha_2 d_3}{4c^2} \varepsilon_{ikl} Dk^i \omega^k \omega^l + \frac{\alpha_2 d_3}{4l^2} \varepsilon_{ikl} e^i \tau \omega^k \omega^l \\
& + \frac{\alpha_2 d_3}{4c^2} \varepsilon_{ikl} k_j^i \omega^j \omega^k \omega^l + \frac{\alpha_2 d_3}{4c^2} \varepsilon_{ikl} k_j^i k^j \omega^k \omega^l + \frac{\alpha_2}{4} \varepsilon_{ikl} Dk^i \left(-\frac{d_3}{c^2} \omega^k \omega^l + a_3 k_m^k k^{ml} \right) \\
& + \frac{\alpha_2}{4} \frac{c^2}{l^2} \varepsilon_{ikl} e^i \tau \left(-\frac{d_3}{c^2} \omega^k \omega^l + a_3 k_m^k k^{ml} \right) + \frac{\alpha_2}{4} \varepsilon_{ikl} k_j^i \omega^j \left(-\frac{d_3}{c^2} \omega^k \omega^l + a_3 k_m^k k^{ml} \right) \\
& + \frac{\alpha_2}{4} \varepsilon_{ikl} k_j^i k^j \left(-\frac{d_3}{c^2} \omega^k \omega^l + a_3 k_m^k k^{ml} \right) + \alpha_2 \frac{a_2 - a_4}{4} \varepsilon_{ijk} Dk^{ij} k_m^k k^m \\
& + \frac{\alpha_2(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \varepsilon_{ijk} Dk^{ij} \left(\frac{c^2}{l^2} e^i \tau + k_j^i \omega^j + k_j^i k^j \right) \\
& + \frac{\alpha_2(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \varepsilon_{ijk} k^{im} k_m^j \left(\frac{c^2}{l^2} e^i \tau + k_j^i \omega^j + k_j^i k^j \right) \\
& + \alpha_2 \frac{a_2 - a_4}{4} \varepsilon_{ijk} k^{im} k_m^j k_m^k k^m.
\end{aligned}$$

Introduciendo nuestro ansatz

$$\begin{aligned}
\langle FB \rangle = & \frac{\alpha_0 d_3}{4c^2} \varepsilon_{ikl} D\omega^i \omega^k \omega^l + \frac{\alpha_2}{4} \varepsilon_{ikl} D\omega^i \left(-\frac{d_3}{c^2} \omega^k \omega^l + a_3 k_m^k k^{ml} \right) \\
& + \frac{\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \varepsilon_{ijk} R^{ij} \left(\frac{c^2}{l^2} e^k \tau + k_m^k \omega^m + k_m^k k^m \right) \\
& + \alpha_2 \frac{a_2 - a_4}{4} \varepsilon_{ijk} R^{ij} k_m^k k^m + \frac{\alpha_2 d_3}{4c^2} \varepsilon_{ikl} Dk^i \omega^k \omega^l + \frac{\alpha_2 d_3}{4l^2} \varepsilon_{ikl} e^i \tau \omega^k \omega^l \\
& + \frac{\alpha_2 d_3}{4c^2} \varepsilon_{ikl} k_j^i \omega^j \omega^k \omega^l + \frac{\alpha_2 d_3}{4c^2} \varepsilon_{ikl} k_j^i k^j \omega^k \omega^l \\
& + \frac{\alpha_2}{4} \varepsilon_{ikl} Dk^i \left(-\frac{d_3}{c^2} \omega^k \omega^l + a_3 k_m^k k^{ml} \right) + \frac{\alpha_2}{4} \frac{c^2}{l^2} \varepsilon_{ikl} e^i \tau \left(-\frac{d_3}{c^2} \omega^k \omega^l + a_3 k_m^k k^{ml} \right) \\
& + \frac{\alpha_2}{4} \varepsilon_{ikl} k_j^i \omega^j \left(-\frac{d_3}{c^2} \omega^k \omega^l + a_3 k_m^k k^{ml} \right) + \frac{\alpha_2}{4} \varepsilon_{ikl} k_j^i k^j \left(-\frac{d_3}{c^2} \omega^k \omega^l + a_3 k_m^k k^{ml} \right) \\
& + \frac{\alpha_2(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \varepsilon_{ijk} Dk^{ij} \left(\frac{c^2}{l^2} e^k \tau + k_m^k \omega^m + k_m^k k^m \right) \\
& + \frac{\alpha_2(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \varepsilon_{ijk} k^{im} k_m^j \left(\frac{c^2}{l^2} e^k \tau + k_m^k \omega^m + k_m^k k^m \right) \\
& + \alpha_2 \frac{a_2 - a_4}{4} \varepsilon_{ijk} Dk^{ij} k_m^k k^m + \alpha_2 \frac{a_2 - a_4}{4} \varepsilon_{ijk} k^{im} k_m^j k_m^k k^m.
\end{aligned}$$

De donde observamos que cuando $c, l \rightarrow \infty$ la acción se reduce

$$\begin{aligned}
\langle FB \rangle &= \frac{\alpha_2 a_3}{4} \varepsilon_{ikl} D\omega^i k_m^k k^{ml} + \frac{\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \varepsilon_{ijk} R^{ij} \left(\frac{c^2}{l^2} e^k \tau + k_m^k \omega^m + k_m^k k^m \right) \\
&\quad + \alpha_2 \frac{a_2 - a_4}{4} \varepsilon_{ijk} R^{ij} k_m^k k^m + \frac{\alpha_2 a_3}{4} \varepsilon_{ikl} Dk^i k_m^k k^{ml} \\
&\quad + \frac{\alpha_2 a_3}{4} \frac{c^2}{l^2} \varepsilon_{ikl} e^i \tau k_m^k k^{ml} + \frac{\alpha_2 a_3}{4} \varepsilon_{ikl} k_j^i \omega^j k_m^k k^{ml} + \frac{\alpha_2 a_3}{4} \varepsilon_{ikl} k_j^i k^j k_m^k k^{ml} \\
&\quad + \frac{\alpha_2(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \varepsilon_{ijk} Dk^{ij} \left(\frac{c^2}{l^2} e^k \tau + k_m^k \omega^m + k_m^k k^m \right) \\
&\quad + \frac{\alpha_2(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \varepsilon_{ijk} k^{im} k_m^j \left(\frac{c^2}{l^2} e^k \tau + k_m^k \omega^m + k_m^k k^m \right) \\
&\quad + \alpha_2 \frac{a_2 - a_4}{4} \varepsilon_{ijk} Dk^{ij} k_m^k k^m + \alpha_2 \frac{a_2 - a_4}{4} \varepsilon_{ijk} k^{im} k_m^j k_m^k k^m \\
\\
\langle FB \rangle &= \frac{\alpha_2 a_3}{4} \varepsilon_{ijk} D\omega^i k_m^j k^{mk} + \frac{\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \frac{c^2}{l^2} \varepsilon_{ijk} R^{ij} e^k \tau \\
&\quad + \frac{\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \varepsilon_{ijk} R^{ij} k_m^k \omega^m + \left(\frac{\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3)}{4} + \alpha_2 \frac{a_2 - a_4}{4} \right) \varepsilon_{ijk} R^{ij} k_m^k k^m \\
&\quad + \frac{\alpha_2 a_3}{4} \varepsilon_{ijk} Dk^i k_m^j k^{mk} + \frac{\alpha_2 a_3}{4} \frac{c^2}{l^2} \varepsilon_{ijk} e^i \tau k_m^j k^{mk} + \frac{\alpha_2 a_3}{4} \varepsilon_{ijk} k_l^i \omega^l k_m^j k^{mk} \\
&\quad + \frac{\alpha_2 a_3}{2} \varepsilon_{ijk} k^{il} k_l^j k_m^k k^m + \frac{\alpha_2(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \varepsilon_{ijk} Dk^{ij} \left(\frac{c^2}{l^2} e^k \tau + k_m^k \omega^m \right) \\
&\quad + \frac{\alpha_2(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \varepsilon_{ijk} k^{im} k_m^j \left(\frac{c^2}{l^2} e^k \tau + k_m^k \omega^m \right) + \frac{\alpha_2 a_3}{4} \varepsilon_{ijk} Dk^{ij} k_m^k k^m.
\end{aligned}$$

7.4.1. Ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned}\delta_e \langle FB \rangle &= \frac{\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \frac{v^2}{l^2} \varepsilon_{ijk} R^{ij} \delta e^k \tau + \frac{\alpha_2(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \frac{v^2}{l^2} \varepsilon_{ijk} Dk^{ij} \delta e^k \tau \\ &\quad + \frac{\alpha_2(a_4 - a_2 + 2a_3)}{4} \frac{v^2}{l^2} \varepsilon_{ijk} k^{im} k_m^j \delta e^k \tau.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{\omega^i} \langle FB \rangle &= \frac{\alpha_2 a_3}{4} \varepsilon_{ijk} \delta(D\omega^i) k_m^j k^{mk} + \frac{\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \varepsilon_{ijk} R^{ij} k_m^k \delta \omega^m \\ &\quad + \frac{\alpha_2(a_4 - a_2 + 2a_3)}{4} \varepsilon_{ijk} k^{im} k_m^j k_m^k \delta \omega^m + \frac{\alpha_2(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \varepsilon_{ijk} Dk^{ij} k_m^k \delta \omega^m \\ &= \frac{\alpha_2 a_3}{2} \varepsilon_{ijk} \delta \omega^i Dk_m^j k^{mk} + \frac{\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \varepsilon_{ijk} R^{ij} k_m^k \delta \omega^m \\ &\quad + \frac{\alpha_2(a_4 - a_2 + 2a_3)}{4} \varepsilon_{ijk} k^{im} k_m^j k_m^k \delta \omega^m + \frac{\alpha_2(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \varepsilon_{ijk} Dk^{ij} k_m^k \delta \omega^m\end{aligned}$$

$$D_k \epsilon_{ijk} = 0,$$

$$k_i^f \epsilon_{fjk} + k_j^f \epsilon_{ikf} + k_k^f \epsilon_{ijf} = 0,$$

$$k_i^f Dk^{ij} \delta \omega^k \epsilon_{fjk} + k_j^f Dk^{ij} \delta \omega^k \epsilon_{ikf} + k_k^f Dk^{ij} \delta \omega^k \epsilon_{ijf} = 0,$$

$$\delta \omega^i Dk^{jm} k_m^k \epsilon_{ijk} - \delta \omega^i Dk^{jm} k_m^k \epsilon_{ijk} - Dk^{ij} k_m^k \delta \omega^m \epsilon_{ijk} = 0,$$

$$\epsilon_{ijk} [2\delta \omega^i Dk^{jm} k_m^k + Dk^{ij} k_m^k \delta \omega^m \epsilon] = 0,$$

$$2\epsilon_{ijk} \delta \omega^i Dk^{jm} k_m^k = -\epsilon_{ijk} Dk^{ij} k_m^k \delta \omega^m$$

$$\begin{aligned}\delta_{\omega^i} \langle FB \rangle &= -\frac{\alpha_2 a_3}{4} \varepsilon_{ijk} Dk^{ij} k_m^k \delta \omega^m + \frac{\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \varepsilon_{ijk} R^{ij} k_m^k \delta \omega^m \\ &\quad + \frac{\alpha_2(a_4 - a_2 + 2a_3)}{4} \varepsilon_{ijk} k^{im} k_m^j k_m^k \delta \omega^m + \frac{\alpha_2(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \varepsilon_{ijk} Dk^{ij} k_m^k \delta \omega^m \\ &= \frac{\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \varepsilon_{ijk} R^{ij} k_m^k \delta \omega^m + \frac{\alpha_2(a_4 - a_2)}{4} \varepsilon_{ijk} Dk^{ij} k_m^k \delta \omega^m \\ &\quad + \frac{\alpha_2(a_4 - a_2 + 2a_3)}{4} \varepsilon_{ijk} k^{im} k_m^j k_m^k \delta \omega^m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{k^i} \langle FB \rangle &= \left(\frac{\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3)}{4} + \alpha_2 \frac{a_2 - a_4}{4} \right) \varepsilon_{ijk} R^{ij} k_m^k \delta k^m + \frac{\alpha_2 a_3}{4} \varepsilon_{ijk} \delta(Dk^i) k_m^j k^{mk} \\ &\quad + \frac{\alpha_2 a_3}{4} \varepsilon_{ijk} Dk^{ij} k_m^k \delta k^m + \frac{\alpha_2 a_3}{2} \varepsilon_{ijk} k^{im} k_m^j k_m^k \delta k^m \\ &= \left(\frac{\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3)}{4} + \alpha_2 \frac{a_2 - a_4}{4} \right) \varepsilon_{ijk} R^{ij} k_m^k \delta k^m + \frac{\alpha_2 a_3}{2} \varepsilon_{ijk} \delta k^i Dk^j k_m^k \\ &\quad + \frac{\alpha_2 a_3}{4} \varepsilon_{ijk} Dk^{ij} k_m^k \delta k^m + \frac{\alpha_2 a_3}{2} \varepsilon_{ijk} k^{im} k_m^j k_m^k \delta k^m \\ &= \left(\frac{\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3)}{4} + \alpha_2 \frac{a_2 - a_4}{4} \right) \varepsilon_{ijk} R^{ij} k_m^k \delta k^m - \frac{\alpha_2 a_3}{4} \varepsilon_{ijk} Dk^{ij} k_m^k \delta k^m \\ &\quad + \frac{\alpha_2 a_3}{4} \varepsilon_{ijk} Dk^{ij} k_m^k \delta k^m + \frac{\alpha_2 a_3}{2} \varepsilon_{ijk} k^{im} k_m^j k_m^k \delta k^m \\ &= \left(\frac{\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3)}{4} + \alpha_2 \frac{a_2 - a_4}{4} \right) \varepsilon_{ijk} R^{ij} k_m^k \delta k^m + \frac{\alpha_2 a_3}{2} \varepsilon_{ijk} k^{im} k_m^j k_m^k \delta k^m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{\omega^{ij}} \langle FB \rangle &= \frac{\alpha_2 a_3}{4} \varepsilon_{ijk} \delta(D\omega^i) k_m^j k^{mk} + \frac{\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \frac{v^2}{l^2} \varepsilon_{ijk} \delta R^{ij} e^k \tau \\
&\quad + \frac{\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \varepsilon_{ijk} \delta R^{ij} k_m^k \omega^m + \frac{\alpha_2 a_3}{4} \varepsilon_{ijk} \delta(Dk^{ij}) k_m^k k^m \\
&\quad + \frac{\alpha_2 a_3}{4} \varepsilon_{ijk} \delta(Dk^i) k_m^j k^{mk} + \frac{\alpha_2(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \varepsilon_{ijk} \delta(Dk^{ij}) \left(\frac{v^2}{l^2} e^k \tau + k_m^k \omega^m \right) \\
&\quad + \left(\frac{\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3)}{4} + \alpha_2 \frac{a_2 - a_4}{4} \right) \varepsilon_{ijk} \delta R^{ij} k_m^k k^m \\
&= \frac{\alpha_2 a_3}{4} \varepsilon_{ijk} \delta \omega^{il} \omega_l^j k_m^k k^{mk} + \frac{\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \frac{v^2}{l^2} \varepsilon_{ijk} \delta \omega^{ij} T^k \tau \\
&\quad + \frac{\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \varepsilon_{ijk} \delta \omega^{ij} Dk_m^k \omega^m + \frac{\alpha_2 a_3}{2} \varepsilon_{ijk} \delta \omega^{im} k_m^j k^k k^m \\
&\quad - \frac{\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \varepsilon_{ijk} \delta \omega^{ij} k_m^k D\omega^m + \frac{\alpha_2 a_3}{4} \varepsilon_{ijk} \delta \omega^{il} k_l^j k_m^k k^{mk} \\
&\quad + \left(\frac{\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3)}{4} + \alpha_2 \frac{a_2 - a_4}{4} \right) \varepsilon_{ijk} \delta \omega^{ij} Dk_m^k k^m \\
&\quad - \left(\frac{\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3)}{4} + \alpha_2 \frac{a_2 - a_4}{4} \right) \varepsilon_{ijk} \delta \omega^{ij} k_m^k Dk^m \\
&\quad + \frac{\alpha_2(a_4 - a_2 + a_3)}{2} \varepsilon_{ijk} \delta \omega^{im} k_m^j \left(\frac{v^2}{l^2} e^k \tau + k_m^k \omega^m \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_k \epsilon_{ijk} &= 0, \\
k_i^f \epsilon_{fjk} + k_j^f \epsilon_{ifk} + k_k^f \epsilon_{ijf} &= 0, \\
k_i^f \delta \omega^{ij} \omega_m k^{mk} \epsilon_{fjk} + k_j^f \delta \omega^{ij} \omega_m k^{mk} \epsilon_{ifk} + k_k^f \delta \omega^{ij} \omega_m k^{mk} \epsilon_{ijf} &= 0, \\
\delta \omega^i Dk^{jm} k_m^k \epsilon_{ijk} - \delta \omega^i Dk^{jm} k_m^k \epsilon_{ijk} - Dk^{ij} k_m^k \delta \omega^m \epsilon_{ijk} &= 0, \\
\epsilon_{ijk} [2\delta \omega^i Dk^{jm} k_m^k + Dk^{ij} k_m^k \delta \omega^m \epsilon] &= 0, \\
2\epsilon_{ijk} \delta \omega^i Dk^{jm} k_m^k &= -\epsilon_{ijk} Dk^{ij} k_m^k \delta \omega^m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{k^{ij}} \langle FB \rangle &= \frac{\alpha_2 a_3}{2} \varepsilon_{ijk} D\omega^i k_m^j \delta k^{mk} + \frac{\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \frac{v^2}{l^2} \varepsilon_{ijk} R^{ij} e^k \tau \\
&\quad + \left(\frac{\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3)}{4} + \alpha_2 \frac{a_2 - a_4}{4} \right) \varepsilon_{ijk} R^{ij} \delta k_m^k k^m \\
&\quad + \frac{\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \varepsilon_{ijk} R^{ij} \delta k_m^k \omega^m + \frac{\alpha_2 a_3}{2} \varepsilon_{ijk} Dk^i k_m^j \delta k^{mk} \\
&\quad + \frac{\alpha_2 a_3}{2} \frac{v^2}{l^2} \varepsilon_{ijk} e^i \tau k_m^j \delta k^{mk} + \frac{3}{2} \alpha_2 a_3 \varepsilon_{ijk} k^{im} k_m^j \delta k_m^k k^m \\
&\quad + \frac{\alpha_2(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \varepsilon_{ijk} \delta(Dk^{ij}) \left(\frac{v^2}{l^2} e^k \tau + k_m^k \omega^m \right) \\
&\quad + \frac{\alpha_2(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \varepsilon_{ijk} Dk^{ij} \delta k_m^k \omega^m + \frac{\alpha_2(a_4 - a_2 + a_3)}{2} \frac{v^2}{l^2} \varepsilon_{ijk} \delta k^{im} k_m^j e^k \tau \\
&\quad + \frac{3}{4} \alpha_2(a_4 - a_2 + 2a_3) \varepsilon_{ijk} k^{im} k_m^j \delta k_m^k \omega^m + \frac{\alpha_2 a_3}{4} \varepsilon_{ijk} \delta(Dk^{ij}) k_m^k k^m \\
&\quad + \frac{\alpha_2 a_3}{4} \varepsilon_{ijk} Dk^{ij} \delta k_m^k k^m.
\end{aligned}$$

La variación con respecto a $\delta\tau$ escrito en lenguaje coordenado es dada por

$$\delta_\tau \langle FB \rangle = \left[\frac{(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \frac{c^2}{l^2} \varepsilon_{ijk} (\alpha_0 R^{ij} e^k + \alpha_2 Dk^{ij} e^k) + \alpha_2 \frac{c^2}{l^2} \left(\frac{a_4 - a_2}{4} + \frac{a_3}{2} \right) \varepsilon_{ijk} k^{im} k_m^j e^k \right] \delta\tau.$$

Por lo que si consideramos que $L = L_M + L_{ChSAS}^{(4)}$, donde postulamos la uno forma energía momentum.

$$\begin{aligned} T_a &= * \left(\frac{\delta L_M}{\delta e^a} \right) \\ T_0 &= * \left(\frac{\delta L_M}{\delta \tau} \right). \end{aligned}$$

La ecuación de movimiento es dada por

$$\begin{aligned} \delta_\tau L &= \left[\frac{(a_4 - a_2 + a_3)}{4} \frac{c^2}{l^2} \varepsilon_{ijk} (\alpha_0 R^{ij} e^k + \alpha_2 Dk^{ij} e^k) \right. \\ &\quad \left. + \alpha_2 \frac{c^2}{l^2} \left(\frac{a_4 - a_2}{4} + \frac{a_3}{2} \right) \varepsilon_{ijk} k^{im} k_m^j e^k - \kappa * T_0 \right] \delta\tau \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego de calcular los siguientes duales⁴, tenemos que,

$$\begin{aligned} *(T_0)\delta\tau &= -\det(g)\delta_\sigma^\sigma T_0^\sigma \delta\tau_\sigma dx^4 \\ \varepsilon_{ijk} Dk^{ij} e^k \delta\tau &= 2\det(g) \left(\delta_\sigma^\sigma D_\alpha k^{\alpha\beta}_\beta - D_\delta k^{\sigma\beta}_\beta + D_\beta k^{\sigma\beta}_\delta \right) \delta\tau_\sigma dx^4 \\ \varepsilon_{ijk} R^{ij} e^k \delta\tau &= \det(g) (\delta_\sigma^\sigma R - 2R^\sigma_\sigma) \delta\tau_\sigma dx^4 \\ \varepsilon_{ijk} k^{im} k_m^j e^k \delta\tau &= \det(g) \left[\delta_\sigma^\sigma \left(k^{\alpha\gamma}_\alpha k_\gamma^\beta_\beta - k^{\alpha\gamma}_\beta k_\gamma^\beta_\alpha \right) - \left(k^{\sigma\gamma}_\delta k_\gamma^\beta_\beta - k^{\sigma\gamma}_\beta k_\gamma^\beta_\delta \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(k^{\alpha\beta}_\delta k_\beta^\sigma_\alpha - k^{\alpha\beta}_\alpha k_\beta^\sigma_\delta \right) \right] \delta\tau_\sigma dx^4. \end{aligned}$$

Así nuestra ecuación de movimiento es

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3)}{2} (\delta_\sigma^\sigma R - 2R^\sigma_\sigma) + \alpha_2(a_4 - a_2 + a_3) \left(\delta_\sigma^\sigma D_\alpha k^{\alpha\beta}_\beta - D_\delta k^{\sigma\beta}_\beta + D_\beta k^{\sigma\beta}_\delta \right) \right. \\ &\quad \left. + \alpha_2(a_4 - a_2 + 2a_3) \left(\delta_\sigma^\sigma \left(k^{\alpha\gamma}_\alpha k_\gamma^\beta_\beta - k^{\alpha\gamma}_\beta k_\gamma^\beta_\alpha \right) - \left(k^{\sigma\gamma}_\delta k_\gamma^\beta_\beta - k^{\sigma\gamma}_\beta k_\gamma^\beta_\delta \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(k^{\alpha\beta}_\delta k_\beta^\sigma_\alpha - k^{\alpha\beta}_\alpha k_\beta^\sigma_\delta \right) \right] + \frac{2l^2}{c^2} \kappa \delta_\sigma^\sigma T_0^\sigma \det(g) \delta\tau_\sigma dx^4 = 0. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Multiplicando la ecuación anterior por $g^{\sigma\delta}$

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3)}{4} (4R - 2R) + \frac{\alpha_2(a_4 - a_2 + a_3)}{2} \left(4D_\alpha k^{\alpha\beta}_\beta - D_\delta k^{\delta\beta}_\beta + D_\beta k^{\delta\beta}_\delta \right) \right. \\ &\quad \left. + 2\alpha_2(a_4 - a_2 + 2a_3) \left(\left(k^{\alpha\gamma}_\alpha k_\gamma^\beta_\beta - k^{\alpha\gamma}_\beta k_\gamma^\beta_\alpha \right) - \left(k^{\sigma\gamma}_\delta k_\gamma^\beta_\beta - k^{\sigma\gamma}_\beta k_\gamma^\beta_\delta \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(k^{\alpha\beta}_\delta k_\beta^\sigma_\alpha - k^{\alpha\beta}_\alpha k_\beta^\sigma_\delta \right) \right] + \frac{4l^2}{c^2} \kappa T_0^\sigma \det(g) \delta\tau_\sigma dx^4 = 0. \end{aligned}$$

⁴Para detalles del cálculo ver apéndice D.

Podemos despejar R

$$\begin{aligned}
 \frac{\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3)}{2} R &= \frac{\alpha_2(a_4 - a_2 + a_3)}{2} \left(4D_\alpha k^{\alpha\beta}_\beta - 2D_\delta k^{\delta\beta}_\beta \right) \\
 &+ \alpha_2(a_4 - a_2 + a_3) \left(\left(k^{\alpha\gamma}_\alpha k^{\beta}_\gamma - k^{\alpha\gamma}_\beta k^{\beta}_\gamma \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(k^{\sigma\gamma}_\delta k^{\beta}_\gamma - k^{\sigma\gamma}_\beta k^{\beta}_\gamma \right) + \left(k^{\alpha\gamma}_\delta k^{\sigma}_\alpha - k^{\alpha\gamma}_\alpha k^{\sigma}_\delta \right) + \frac{4l^2}{c^2} \kappa T^0_0 \right) \\
 &= \alpha_2(a_4 - a_2 + a_3) D_\alpha k^{\alpha\beta}_\beta + \alpha_2(a_4 - a_2 + 2a_3) \left(\left(k^{\alpha\gamma}_\alpha k^{\beta}_\gamma - k^{\alpha\gamma}_\beta k^{\beta}_\gamma \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(k^{\sigma\gamma}_\delta k^{\beta}_\gamma - k^{\sigma\gamma}_\beta k^{\beta}_\gamma \right) + \left(k^{\alpha\beta}_\delta k^{\sigma}_\alpha - k^{\alpha\beta}_\alpha k^{\sigma}_\delta \right) \right) + \frac{4l^2}{c^2} \kappa T^0_0
 \end{aligned}$$

Si tomamos las componentes 00 de la ecuación (7.11)

$$\begin{aligned}
 &\left[\frac{\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3)}{2} (R - 2R_{00}) + \alpha_2(a_4 - a_2 + a_3) \left(D_\alpha k^{\alpha\beta}_\beta - D_0 k^{\beta}_0 + D_\beta k^{\beta}_0 \right) \right. \\
 &\quad + \alpha_2(a_4 - a_2 + 2a_3) \left(\left(k^{\alpha\gamma}_\alpha k^{\beta}_\gamma - k^{\alpha\gamma}_\beta k^{\beta}_\gamma \right) - \left(k^{0\gamma}_0 k^{\beta}_\gamma - k^{0\gamma}_\beta k^{\beta}_0 \right) \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(k^{\alpha\beta}_0 k^{\sigma}_\alpha - k^{\alpha\beta}_\alpha k^{\sigma}_0 \right) \right) + \frac{2l^2}{c^2} \kappa T^0_0 \right] = 0
 \end{aligned}$$

ahora reemplazando R en esta ecuación se tiene

$$\begin{aligned}
 &\left[-\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3) R_{00} + \alpha_2(a_4 - a_2 + a_3) \left(2D_\alpha k^{\alpha\beta}_\beta - D_0 k^{\beta}_0 + D_\beta k^{\beta}_0 \right) \right. \\
 &\quad + 2\alpha_2(a_4 - a_2 + 2a_3) \left(\left(k^{\alpha\gamma}_\alpha k^{\beta}_\gamma - k^{\alpha\gamma}_\beta k^{\beta}_\gamma \right) - \left(k^{0\gamma}_0 k^{\beta}_\gamma - k^{0\gamma}_\beta k^{\beta}_0 \right) \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(k^{\alpha\beta}_0 k^{\sigma}_\alpha - k^{\alpha\beta}_\alpha k^{\sigma}_0 \right) \right) + \frac{6l^2}{c^2} \kappa T_{00} \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que debemos hacer las consideraciones de la gravedad de Newton–Cartan [29], es decir, $R_{00} = \nabla^2 \phi$ y la métrica se descompone en una parte temporal y otra espacial, $g_{00} = \tau_0 \tau_0 = 1$. Por otro lado $T_{00} = \rho$

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \phi &= \frac{6}{\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3)} \frac{l^2}{c^2} \kappa \rho + \frac{\alpha_2}{\alpha_0} \left(2D_\alpha k^{\alpha\beta}_\beta - D_0 k^{\beta}_0 + D_\beta k^{\beta}_0 \right) \\
 &+ \frac{2\alpha_2}{\alpha_0} \left(1 + \frac{a_3}{(a_4 - a_2 + a_3)} \right) \left(\left(k^{\alpha\gamma}_\alpha k^{\beta}_\gamma - k^{\alpha\gamma}_\beta k^{\beta}_\gamma \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(k^{0\gamma}_0 k^{\beta}_\gamma - k^{0\gamma}_\beta k^{\beta}_0 \right) + \left(k^{\alpha\beta}_0 k^{\sigma}_\alpha - k^{\alpha\beta}_\alpha k^{\sigma}_0 \right) \right). \tag{7.12}
 \end{aligned}$$

Capítulo 8

Teoría Mond desde gravedad (ChSAS)

Las ecuaciones de Poisson modificadas (7.2) y (7.12) sugieren una posible conexión con la llamada teoría de Newton modificada o (Mond) por sus siglas en inglés. Esta teoría fue formulada por primera vez por Milgrom y Bekenstein en Ref. [54] y consiste en una modificación en la ecuación de Poisson y puede ser derivada desde el siguiente lagrangeano

$$L_{Mond} = - \int d^3r \left\{ \rho\varphi + \frac{a_0^2}{8\pi G} \mathfrak{F} \left[\frac{(\vec{\nabla}\varphi)^2}{a_0^2} \right] \right\}$$

donde $\mathfrak{F}(x^2)$ es una función arbitraria. La variación de L_{Mond} con respecto a φ nos entrega la ecuación de movimiento

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\mu \left(\frac{|\vec{\nabla}\varphi|}{a_0} \right) \vec{\nabla}\varphi \right] = 4\pi G\rho$$

con $\mu(x) = \mathfrak{F}'(x^2)$. La expresión anterior puede ser escrita como

$$\mu(x)\nabla^2\varphi(x) = 4\pi G\rho - \vec{\nabla}\mu(x) \cdot \vec{\nabla}\varphi(x). \quad (8.1)$$

Si se define un ansatz para el campo $k^{\mu\nu}_\rho$, donde las componentes no nulas son dadas por

$$k^{i0}_0 = -k^{0i}_0 = \sigma(x)\delta^{ij}\partial_j\phi(x).$$

Notemos que $k^{\mu\nu}_\rho$ no depende del tiempo.

8.1. Caso para el álgebra de Galileo tipo $I \mathcal{GB}_4$

Introduciendo este ansatz en (7.2) nosotros tenemos

$$\begin{aligned}
 2D_\mu k^{\mu\nu}_\nu - D_0 k_0^\beta_\beta - D_\mu k^\mu_{00} &= 2D_0 k^{0\nu}_\nu + 2D_i k^{i\nu}_\nu - D_0 k_0^0_0 - D_0 k_0^k_k + D_0 k^0_{00} - D_i k^i_{00} \\
 &= 2D_0 k^{00}_0 + 2D_0 k^{0k}_k + 2D_i k^{i0}_0 + 2D_i k^{ik}_k - D_i k^i_{00} \\
 &= 2D_i k^{i0}_0 - D_i k^i_{00} \\
 &= D_i k^{i0}_0.
 \end{aligned}$$

La derivada covariante es $D = \partial + \Gamma$, donde Γ es el símbolo de Christoffel. Pero siguiendo a [29] y usando la siguiente expresión para la componente no nula de la conexión de espín

$$\Gamma^i_{00} = \delta^{ij} \partial_j \phi(x).$$

Podemos encontrar que

$$\begin{aligned}
 D_i k^{i0}_0 &= \partial_i k^{i0}_0 + \Gamma^i_{i\rho} k^{\rho 0}_0 + \Gamma^0_{i\rho} k^{i\rho}_0 \\
 &= \partial_i k^{i0}_0 \\
 &= \partial_i [\sigma(x) \delta^{ij} \partial_j \phi(x)] \\
 &= \partial_i \sigma(x) \delta^{ij} \partial_j \phi(x) + \sigma(x) \delta^{ij} \partial_i \partial_j \phi(x) \\
 &= \vec{\nabla} \sigma(x) \cdot \vec{\nabla} \phi(x) + \sigma(x) \nabla^2 \phi(x).
 \end{aligned} \tag{8.2}$$

Además, si definimos por simplicidad las constantes en la ecuación (7.2) como

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{1}{a_2 h_1 + a_0 (a_3 - h_6)} \\
 \beta &= 2a_2 (a_3 - h_6)
 \end{aligned}$$

e introduciendo (8.2) en la ecuación de Poisson modificada, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \phi(x) &= 6\alpha \frac{l^2}{c^2} \kappa \rho - \alpha \beta \left[\vec{\nabla} \sigma(x) \cdot \vec{\nabla} \phi(x) + \sigma(x) \nabla^2 \phi(x) \right] \\
 [1 + \alpha \beta \sigma(x)] \nabla^2 \phi(x) &= 6\alpha \frac{l^2}{c^2} \kappa \rho - \alpha \beta \vec{\nabla} \sigma(x) \cdot \vec{\nabla} \phi(x).
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

Si ahora se compara (8.1) con (8.3), podemos ver que $\phi(x) = \varphi(x)$ y la función $\sigma(x)$ depende de $\mu(x)$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \mu(x) &= 1 + \alpha \beta \sigma(x) \\
 \sigma(x) &= \frac{\mu(x) - 1}{\alpha \beta}.
 \end{aligned}$$

Entonces, la ecuación (8.3) corresponde a la ecuación de la teoría (Mond) (8.1) si realizamos la siguiente identificación de las constantes

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{4\pi G c^2}{6l^2 \kappa} = \frac{c^2}{12l^2} \\
 \beta &= 1
 \end{aligned}$$

con $\kappa = 8\pi G$, c la velocidad de la luz y l es el radio cósmico.

$$\mu(x) \nabla^2 \varphi(x) = 4\pi G \rho - \vec{\nabla} \mu(x) \cdot \vec{\nabla} \varphi(x)$$

8.2. Caso para el álgebra de Galileo tipo $II \mathcal{GL}_4$

Introduciendo este ansatz en (7.12), se puede ver que esta ecuación es reducida a la misma expresión de (7.2) excepto por el último término. Si se calcula el último término de (7.12) se tiene que

$$\begin{aligned}
 k^{\alpha\gamma}_{\alpha} k^{\beta}_{\gamma\beta} - k^{\alpha\gamma}_{\beta} k^{\beta}_{\gamma\alpha} &= k^{0\gamma}_0 k^{\beta}_{\gamma\beta} + k^{i\gamma}_i k^{\beta}_{\gamma\beta} - k^{0\gamma}_{\beta} k^{\beta}_{\gamma 0} - k^{i\gamma}_{\beta} k^{\beta}_{\gamma i} \\
 &= k^{0\gamma}_0 k^{\beta}_{\gamma\beta} - k^{0\gamma}_{\beta} k^{\beta}_{\gamma 0} \\
 &= k^{00}_0 k^{\beta}_{0\beta} + k^{0i}_0 k^{\beta}_{i\beta} - k^{00}_{\beta} k^{\beta}_{0 0} - k^{0i}_{\beta} k^{\beta}_{i 0} \\
 &= k^{0i}_0 k^{\beta}_{i\beta} - k^{0i}_{\beta} k^{\beta}_{i 0} \\
 &= k^{0i}_0 k^0_{i 0} + k^{0i}_0 k^j_{i j} - k^{0i}_0 k^0_{i 0} - k^{0i}_j k^j_{i 0} \\
 &= k^{0i}_0 k^0_{i 0} - k^{0i}_0 k^0_{i 0} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k^{0\gamma}_0 k^{\beta}_{\gamma\beta} - k^{0\gamma}_{\beta} k^{\beta}_{\gamma 0} &= k^{00}_0 k^{\beta}_{0\beta} + k^{0i}_0 k^{\beta}_{i\beta} - k^{00}_{\beta} k^{\beta}_{0 0} - k^{0i}_{\beta} k^{\beta}_{i 0} \\
 &= k^{0i}_0 k^{\beta}_{i\beta} - k^{0i}_{\beta} k^{\beta}_{i 0} \\
 &= k^{0i}_0 k^0_{i 0} + k^{0i}_0 k^j_{i j} - k^{0i}_0 k^0_{i 0} - k^{0i}_j k^j_{i 0} \\
 &= k^{0i}_0 k^0_{i 0} - k^{0i}_0 k^0_{i 0} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k^{\alpha\gamma}_0 k^0_{\gamma\alpha} - k^{\alpha\gamma}_{\alpha} k^0_{\gamma 0} &= k^{0\gamma}_0 k^0_{\gamma 0} + k^{i\gamma}_i k^0_{\gamma i} - k^{0\gamma}_0 k^0_{\gamma 0} - k^{i\gamma}_i k^0_{\gamma i} \\
 &= k^{0\gamma}_0 k^0_{\gamma 0} - k^{0\gamma}_0 k^0_{\gamma 0} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Ahora si definimos por simplicidad las constantes en la ecuación (7.12) como

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{1}{\alpha_0(a_4 - a_2 + a_3)} \\
 \beta &= \frac{\alpha_2}{\alpha_0}
 \end{aligned}$$

podemos encontrar que

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \phi(x) &= 6\alpha \frac{l^2}{c^2} \kappa \rho + \beta \left[\vec{\nabla} \sigma(x) \cdot \vec{\nabla} \phi(x) + \sigma(x) \nabla^2 \phi(x) \right] \\
 [1 - \beta \sigma(x)] \nabla^2 \phi(x) &= 6\alpha \frac{l^2}{c^2} \kappa \rho + \beta \vec{\nabla} \sigma(x) \cdot \vec{\nabla} \phi(x)
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

Al comparar (8.1) con (8.4), se observa que $\phi(x) = \varphi(x)$ y la función $\sigma(x)$ dependen de $\mu(x)$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \mu(x) &= 1 - \beta \sigma(x) \\
 \sigma(x) &= \frac{1 - \mu(x)}{\beta}.
 \end{aligned}$$

Entonces, la ecuación (8.3) corresponde a la ecuación de la teoría (Mond) (8.1) si realizamos la siguiente identificación de las constantes

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{4\pi G c^2}{6l^2 \kappa} = \frac{c^2}{12l^2} \\ \beta &= -1\end{aligned}$$

con $\kappa = 8\pi G$, c la velocidad de la luz y l es el radio cósmico.

$$\mu(x) \nabla^2 \varphi(x) = 4\pi G \rho - \vec{\nabla} \mu(x) \cdot \vec{\nabla} \varphi(x).$$



Capítulo 9

Conclusiones

En esta tesis fue analizada una acción en 5 dimensiones $S = S_g + S_M$ que esta compuesta por un sector gravitatorio y un sector de materia, donde el sector gravitacional, es dado por la gravedad de Newton–Chern–Simons, en lugar de la acción de Einstein–Hilbert. El sector de materia es descrito por un fluido perfecto. Fueron estudiadas las implicaciones en la evolución cosmológica, al reemplazar la acción de Einstein–Hilbert por la acción Newton–Chern–Simons para una métrica de Friedman–Lemaître–Robertson–Walker. También se demuestra que la cosmología Newton–Chern–Simons es una especie de análogo de la versión proyectable de la teoría de Hořava–Lifshitz en $(3 + 1)$ dimensiones, aunque el término que contiene Q , no está presente.

En particular, fue demostrado que no hay solución de De Sitter, aunque el comportamiento se produce en un futuro lejano. Además, se encuentra una solución fantasma con una singularidad futura, que recuerda a un pequeño *Big Rip*. Finalmente, una breve revisión de la adiabaticidad en la evolución cósmica fue realizada.

Por otro lado fueron calculadas acciones Chern–Simons–Antoniadis–Savvidy no relativistas en 4 dimensiones para teorías de gauge de alto orden, en el contexto de la formulación de Newton–Cartan, mediante el gaugeo de las álgebras de Galileo generalizadas $\mathcal{GB}_4$ y $\mathcal{GL}_4$, lo cual conduce a ecuaciones de Poisson modificadas que en algunos casos particulares, nos vinculan con el enfoque de la gravedad MOND. Estas modificaciones a las ecuaciones de Poisson podrían entenderse como consecuencia de los efectos de la materia oscura. Este resultado podría llevarnos a pensar que la materia oscura puede interpretarse como un límite no relativista de la energía oscura.

Apéndice A

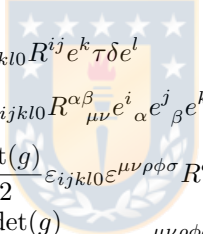
Cáculo duales de Hodge para la acción (CS)

$$\begin{aligned}
 *(T_0)\delta\tau &= \frac{1}{4!}\varepsilon_{0ijkl}T_0^0e^ie^je^ke^l\delta\tau \\
 &= \frac{1}{4!}\varepsilon_{0ijkl}T_0^0e^i{}_\mu e^j{}_\nu e^k{}_\rho e^l{}_\phi\delta\tau_\sigma dx^\mu dx^\nu dx^\rho dx^\phi dx^\sigma \\
 &= \frac{1}{4!}\varepsilon_{ijkl0}T_0^0e^i{}_\mu e^j{}_\nu e^k{}_\rho e^l{}_\phi\tau_\delta\delta\tau^\delta{}_\sigma dx^\mu dx^\nu dx^\rho dx^\phi dx^\sigma \\
 &= \frac{\det(g)}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\phi\delta}\varepsilon^{\mu\nu\rho\phi\sigma}T_0^0\delta\tau^\delta{}_\sigma dx^5 \\
 &= \frac{\det(g)}{4!}\delta^{\mu\nu\rho\phi\sigma}_{\mu\nu\rho\phi\delta}T_0^0\delta\tau^\delta{}_\sigma dx^5 \\
 &= \frac{\det(g)}{4!}4!\delta^\sigma_\delta T_0^0\delta\tau^\delta{}_\sigma dx^5 \\
 &= \det(g)\delta^\sigma_\delta T_0^0\delta\tau^\delta{}_\sigma dx^5.
 \end{aligned}$$

y al escribir en lenguaje coordenado y tomando las siguientes consideraciones, $\tau_\mu = \partial_\mu f(x^\nu) = \delta^0_\mu$, $\tau^\mu = (1, \tau^i)$ con $f(x^\nu) = t$, siendo t el tiempo absoluto. Además $\tau^\mu\tau_\mu = 1$.

$$\begin{aligned}
 *(T_i)\delta e^i &= \frac{1}{4!}\varepsilon_{ijkl0}T_i^ie^je^ke^l\tau\delta e^i \\
 &= \frac{1}{4!}\varepsilon_{ijkl0}T_i^ie^j{}_\mu e^k{}_\nu e^l{}_\rho\tau_\phi\delta e^i{}_\sigma dx^\mu dx^\nu dx^\rho dx^\phi dx^\sigma \\
 &= \frac{1}{4!}\varepsilon_{ijkl0}T_i^ie^j{}_\mu e^k{}_\nu e^l{}_\rho\tau_\phi e^i{}_\delta\delta e^\delta{}_\sigma dx^\mu dx^\nu dx^\rho dx^\phi dx^\sigma \\
 &= \frac{\det(g)}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\phi\delta}\varepsilon^{\mu\nu\rho\phi\sigma}T_i^i\delta e^\delta{}_\sigma dx^5 \\
 &= \frac{\det(g)}{4!}\delta^{\mu\nu\rho\phi\sigma}_{\mu\nu\rho\phi\delta}T_i^i\delta e^\delta{}_\sigma dx^5 \\
 &= \frac{\det(g)}{4!}4!\delta^\sigma_\delta T_i^i\delta e^\delta{}_\sigma dx^5 \\
 &= \det(g)\delta^\sigma_\delta T_i^i\delta e^\delta{}_\sigma dx^5.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijkl0} R^{ij} e^k e^l \delta \tau &= \varepsilon_{ijkl0} R^{ij} e^k e^l \delta \tau \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijkl0} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} e^i_{\alpha} e^j_{\beta} e^k_{\rho} e^l_{\phi} \tau_{\delta} \delta \tau^{\delta}_{\sigma} dx^u dx^{\nu} dx^{\rho} dx^{\phi} dx^{\sigma} \\
&= \frac{\det(g)}{2} \varepsilon_{ijkl0} \varepsilon^{\mu\nu\rho\phi\sigma} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} e^i_{\alpha} e^j_{\beta} e^k_{\rho} e^l_{\phi} \tau_{\delta} \delta \tau^{\delta}_{\sigma} dx^5 \\
&= \frac{\det(g)}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\rho\phi\delta} \varepsilon^{\mu\nu\rho\phi\sigma} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \delta \tau^{\delta}_{\sigma} dx^5 \\
&= \frac{\det(g)}{2} \delta^{\mu\nu\rho\phi\sigma}_{\alpha\beta\rho\phi\delta} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \delta \tau^{\delta}_{\sigma} dx^5 \\
&= \frac{\det(g)}{2} 2! \delta^{\sigma\mu\nu}_{\delta\alpha\beta} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \delta \tau^{\delta}_{\sigma} dx^5 \\
&= \det(g) \left(\delta^{\sigma}_{\delta} \delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} - \delta^{\sigma}_{\alpha} \delta^{\mu\nu}_{\delta\beta} + \delta^{\sigma}_{\beta} \delta^{\mu\nu}_{\delta\alpha} \right) R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \delta \tau^{\delta}_{\sigma} dx^5 \\
&= \det(g) \left(\delta^{\sigma}_{\delta} 2! R^{\alpha\beta}_{\alpha\beta} - \delta^{\sigma}_{\alpha} 2! R^{\alpha\beta}_{\delta\beta} + \delta^{\sigma}_{\beta} 2! R^{\alpha\beta}_{\delta\alpha} \right) \delta \tau^{\delta}_{\sigma} dx^5 \\
&= 2 \det(g) \left(\delta^{\sigma}_{\delta} R^{\alpha\beta}_{\alpha\beta} - R^{\sigma\beta}_{\delta\beta} + R^{\alpha\sigma}_{\delta\alpha} \right) \delta \tau^{\delta}_{\sigma} dx^5 \\
&= 2 \det(g) (\delta^{\sigma}_{\delta} R - 2 R^{\sigma}_{\delta}) \delta \tau^{\delta}_{\sigma} dx^5 \\
&= 2 \det(g) (\delta^{\sigma}_{\delta} R - 2 R^{\sigma}_{\delta}) \delta \tau^{\delta}_{\sigma} dx^5.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijkl0} R^{ij} e^k \tau \delta e^l &= \varepsilon_{ijkl0} R^{ij} e^k \tau \delta e^l \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijkl0} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} e^i_{\alpha} e^j_{\beta} e^k_{\rho} \tau_{\phi} e^l_{\delta} \delta e^{\delta}_{\sigma} dx^u dx^{\nu} dx^{\rho} dx^{\phi} dx^{\sigma} \\
&= \frac{\det(g)}{2} \varepsilon_{ijkl0} \varepsilon^{\mu\nu\rho\phi\sigma} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} e^i_{\alpha} e^j_{\beta} e^k_{\rho} \tau_{\phi} e^l_{\delta} \delta e^{\delta}_{\sigma} dx^5 \\
&= -\frac{\det(g)}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\rho\phi\delta} \varepsilon^{\mu\nu\rho\phi\sigma} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \delta e^{\delta}_{\sigma} dx^5 \\
&= -\frac{\det(g)}{2} \delta^{\mu\nu\rho\phi\sigma}_{\alpha\beta\rho\phi\delta} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \delta e^{\delta}_{\sigma} dx^5 \\
&= -\frac{\det(g)}{2} 2! \delta^{\sigma\mu\nu}_{\delta\alpha\beta} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \delta e^{\delta}_{\sigma} dx^5 \\
&= -\det(g) \left(\delta^{\sigma}_{\delta} \delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} - \delta^{\sigma}_{\alpha} \delta^{\mu\nu}_{\delta\beta} + \delta^{\sigma}_{\beta} \delta^{\mu\nu}_{\delta\alpha} \right) R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \delta e^{\delta}_{\sigma} dx^5 \\
&= -\det(g) \left(\delta^{\sigma}_{\delta} 2! R^{\alpha\beta}_{\alpha\beta} - \delta^{\sigma}_{\alpha} 2! R^{\alpha\beta}_{\delta\beta} + \delta^{\sigma}_{\beta} 2! R^{\alpha\beta}_{\delta\alpha} \right) \delta e^{\delta}_{\sigma} dx^5 \\
&= -2 \det(g) \left(\delta^{\sigma}_{\delta} R^{\alpha\beta}_{\alpha\beta} - R^{\sigma\beta}_{\delta\beta} + R^{\alpha\sigma}_{\delta\alpha} \right) \delta e^{\delta}_{\sigma} dx^5 \\
&= -2 \det(g) (\delta^{\sigma}_{\delta} R - 2 R^{\sigma}_{\delta}) \delta e^{\delta}_{\sigma} dx^5 \\
&= -2 \det(g) (\delta^{\sigma}_{\delta} R - 2 R^{\sigma}_{\delta}) \delta e^{\delta}_{\sigma} dx^5.
\end{aligned}$$

Apéndice B

Curvatura álgebra $\mathcal{GB}_4$

$$\begin{aligned}
F &= dA + \frac{1}{2}[A, A] \\
&= d \left(\frac{c}{l} \tau H + \frac{1}{l} e^i P_i + \frac{1}{cl} m M + \frac{1}{c} \omega^i K_i + \frac{1}{2} \omega^{ij} J_{ij} + \frac{1}{2} k^{ij} Z_{ij} + \frac{1}{c} k^i Z_i \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{c}{l} \tau H + \frac{1}{l} e^i P_i + \frac{1}{cl} m M + \frac{1}{c} \omega^i K_i + \frac{1}{2} \omega^{ij} J_{ij} + \frac{1}{2} k^{ij} Z_{ij} + \frac{1}{c} k^i Z_i \right), \left(\frac{c}{l} \tau H + \frac{1}{l} e^k P_k \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{cl} m M + \frac{1}{c} \omega^k K_k + \frac{1}{2} \omega^{kl} J_{kl} + \frac{1}{2} k^{kl} Z_{kl} + \frac{1}{c} k^k Z_k \right) \right] \\
&= \frac{c}{l} d\tau H + \frac{1}{l} de^i P_i + \frac{1}{cl} dm M + \frac{1}{c} d\omega^i K_i + \frac{1}{2} d\omega^{ij} J_{ij} + \frac{1}{2} dk^{ij} Z_{ij} + \frac{1}{c} dk^i Z_i + \frac{c^2}{2l^2} \tau^2 [H, H] \\
&\quad + \frac{c}{2l^2} \tau e^k [H, P_k] + \frac{1}{2l^2} \tau m [H, M] + \frac{1}{2l} \tau \omega^k [H, K_k] + \frac{c}{4l} \tau \omega^{kl} [H, J_{kl}] + \frac{c}{4l} \tau k^{kl} [H, Z_{kl}] \\
&\quad + \frac{1}{2l} \tau k^k [H, Z_k] + \frac{c}{2l^2} e^i \tau [P_i, H] + \frac{1}{2cl} e^i e^k [P_i, P_k] + \frac{1}{2cl^2} e^i m [P_i, M] + \frac{1}{2cl} e^i \omega^k [P_i, K_k] \\
&\quad + \frac{1}{4l} e^i \omega^{kl} [P_i, J_{kl}] + \frac{1}{4l} e^i k^{kl} [P_i, Z_{kl}] + \frac{1}{2cl} e^i k^k [P_i, Z_k] + \frac{1}{2cl} m [M, A] + \frac{1}{2l} \omega^i \tau [K_i, H] \\
&\quad + \frac{1}{2cl} \omega^i e^k [K_i, P_k] + \frac{1}{2c^2 l} \omega^i m [K_i, M] + \frac{1}{2c^2} \omega^i \omega^k [K_i, K_k] + \frac{1}{4c} \omega^i \omega^{kl} [K_i, J_{kl}] \\
&\quad + \frac{1}{4c} \omega^i k^{kl} [K_i, Z_{kl}] + \frac{1}{2c^2} \omega^i k^k [K_i, Z_k] + \frac{c}{4l} \omega^{ij} \tau [J_{ij}, H] + \frac{1}{4l} \omega^{ij} e^k [J_{ij}, P_k] \\
&\quad + \frac{1}{4cl} \omega^{ij} m [J_{ij}, M] + \frac{1}{4c} \omega^{ij} \omega^k [J_{ij}, K_k] + \frac{1}{8} \omega^{ij} \omega^{kl} [J_{ij}, J_{kl}] + \frac{1}{8} \omega^{ij} k^{kl} [J_{ij}, Z_{kl}] \\
&\quad + \frac{1}{4c} \omega^{ij} k^k [J_{ij}, Z_k] + \frac{c}{4l} k^{ij} \tau [Z_{ij}, H] + \frac{1}{4l} k^{ij} e^k [Z_{ij}, P_k] + \frac{1}{4cl} k^{ij} m [Z_{ij}, M] \\
&\quad + \frac{1}{4c} k^{ij} \omega^k [Z_{ij}, K_k] + \frac{1}{8} k^{ij} \omega^{kl} [Z_{ij}, J_{kl}] + \frac{1}{8} k^{ij} k^{kl} [Z_{ij}, Z_{kl}] + \frac{1}{4c} k^{ij} k^k [Z_{ij}, Z_k] \\
&\quad + \frac{1}{2l} k^i \tau [Z_i, H] + \frac{1}{2cl} k^i e^k [Z_i, P_k] + \frac{1}{2c^2 l} k^i m [Z_i, M] + \frac{1}{2c^2} k^i \omega^k [Z_i, K_k] + \frac{1}{4c} k^i \omega^{kl} [Z_i, J_{kl}] \\
&\quad + \frac{1}{4c} k^i k^{kl} [Z_i, Z_{kl}] + \frac{1}{2c^2} k^i k^k [Z_i, Z_k]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F = & \frac{c}{l}d\tau H + \frac{1}{l}de^i P_i + \frac{1}{cl}dmM + \frac{1}{c}d\omega^i K_i + \frac{1}{2}d\omega^{ij} J_{ij} + \frac{1}{2}dk^{ij} Z_{ij} + \frac{1}{c}dk^i Z_i + \frac{c}{2l^2}\tau e^k [H, P_k] \\
& + \frac{1}{2l}\tau\omega^k [H, K_k] + \frac{c}{2l^2}e^i\tau [P_i, H] + \frac{1}{2cl}e^i\omega^k [P_i, K_k] + \frac{1}{4l}e^i\omega^{kl} [P_i, J_{kl}] + \frac{1}{2l}\omega^i\tau [K_i, H] \\
& + \frac{1}{2cl}\omega^i e^k [K_i, P_k] + \frac{1}{4c}\omega^i\omega^{kl} [K_i, J_{kl}] + \frac{1}{4c}\omega^i k^{kl} [K_i, Z_{kl}] + \frac{1}{4l}\omega^{ij} e^k [J_{ij}, P_k] \\
& + \frac{1}{4c}\omega^{ij}\omega^k [J_{ij}, K_k] + \frac{1}{8}\omega^{ij}\omega^{kl} [J_{ij}, J_{kl}] + \frac{1}{8}\omega^{ij}k^{kl} [J_{ij}, Z_{kl}] + \frac{1}{4c}\omega^{ij}k^k [J_{ij}, Z_k] \\
& + \frac{1}{4c}k^{ij}\omega^k [Z_{ij}, K_k] + \frac{1}{8}k^{ij}\omega^{kl} [Z_{ij}, J_{kl}] + \frac{1}{4c}k^i\omega^{kl} [Z_i, J_{kl}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F = & \frac{c}{l}d\tau H + \frac{1}{l}de^i P_i + \frac{1}{cl}dmM + \frac{1}{c}d\omega^i K_i + \frac{1}{2}d\omega^{ij} J_{ij} + \frac{1}{2}dk^{ij} Z_{ij} + \frac{1}{c}dk^i Z_i + \frac{c}{l^2}e^i\tau [P_i, H] \\
& + \frac{1}{cl}e^i\omega^k [P_i, K_k] + \frac{1}{l}\omega^i\tau [K_i, H] + \frac{1}{2l}\omega^{ij}e^k [J_{ij}, P_k] + \frac{1}{2c}\omega^{ij}\omega^k [J_{ij}, K_k] + \frac{1}{8}\omega^{ij}\omega^{kl} [J_{ij}, J_{kl}] \\
& + \frac{1}{4}\omega^{ij}k^{kl} [J_{ij}, Z_{kl}] + \frac{1}{2c}\omega^{ij}k^k [J_{ij}, Z_k] + \frac{1}{2c}k^{ij}\omega^k [Z_{ij}, K_k] \\
= & \frac{c}{l}d\tau H + \frac{1}{l}\left(de^i P_i + \frac{1}{2}\omega^{ij}e^k [J_{ij}, P_k] + \omega^i\tau [K_i, H]\right) + \frac{1}{cl}(dmM + e^i\omega^k [P_i, K_k]) + \frac{1}{c}(d\omega^i K_i \\
& + \frac{1}{2}\omega^{ij}\omega^k [J_{ij}, K_k]) + \frac{1}{2}\left(d\omega^{ij} J_{ij} + \frac{1}{4}\omega^{ij}\omega^{kl} [J_{ij}, J_{kl}]\right) + \frac{1}{c}\left(dk^i Z_i + \frac{1}{2}\omega^{ij}k^k [J_{ij}, Z_k] \right. \\
& \left. + \frac{c^2}{l^2}e^i\tau [P_i, H] + \frac{1}{2}k^{ij}\omega^k [Z_{ij}, K_k]\right) + \frac{1}{2}\left(dk^{ij} Z_{ij} + \frac{1}{2}\omega^{ij}k^{kl} [J_{ij}, Z_{kl}]\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F = & \frac{c}{l}d\tau H + \frac{1}{l}(T^i - \omega^i\tau)P_i + \frac{1}{cl}(dm - \omega^i e_i)M + \frac{1}{c}D\omega^i K_i + \frac{1}{2}R^{ij} J_{ij} \\
& + \frac{1}{c}(Dk^i + \frac{c^2}{l^2}e^i\tau + k^i{}_j\omega^j)Z_i + \frac{1}{2}Dk^{ij} Z_{ij}.
\end{aligned}$$

Apéndice C

Curvatura álgebra $\mathcal{GL}_4$

$$\begin{aligned}
F &= dA + \frac{1}{2}[A, A] \\
&= d \left(\frac{c}{l} \tau H + \frac{1}{l} e^i P_i + \frac{1}{cl} m M + \frac{1}{c} \omega^i K_i + \frac{1}{2} \omega^{ij} J_{ij} + \frac{1}{2} k^{ij} Z_{ij} + \frac{1}{c} k^i Z_i \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{c}{l} \tau H + \frac{1}{l} e^i P_i + \frac{1}{cl} m M + \frac{1}{c} \omega^i K_i + \frac{1}{2} \omega^{ij} J_{ij} + \frac{1}{2} k^{ij} Z_{ij} + \frac{1}{c} k^i Z_i \right), \left(\frac{c}{l} \tau H + \frac{1}{l} e^k P_k \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{cl} m M + \frac{1}{c} \omega^k K_k + \frac{1}{2} \omega^{kl} J_{kl} + \frac{1}{2} k^{kl} Z_{kl} + \frac{1}{c} k^k Z_k \right) \right] \\
&= \frac{c}{l} d\tau H + \frac{1}{l} de^i P_i + \frac{1}{cl} dm M + \frac{1}{c} d\omega^i K_i + \frac{1}{2} d\omega^{ij} J_{ij} + \frac{1}{2} dk^{ij} Z_{ij} + \frac{1}{c} dk^i Z_i + \frac{c^2}{2l^2} \tau^2 [H, H] \\
&\quad + \frac{c}{2l^2} \tau e^k [H, P_k] + \frac{1}{2l^2} \tau m [H, M] + \frac{1}{2l} \tau \omega^k [H, K_k] + \frac{c}{4l} \tau \omega^{kl} [H, J_{kl}] + \frac{c}{4l} \tau k^{kl} [H, Z_{kl}] \\
&\quad + \frac{1}{2l} \tau k^k [H, Z_k] + \frac{c}{2l^2} e^i \tau [P_i, H] + \frac{1}{2cl} e^i e^k [P_i, P_k] + \frac{1}{2cl^2} e^i m [P_i, M] + \frac{1}{2cl} e^i \omega^k [P_i, K_k] \\
&\quad + \frac{1}{4l} e^i \omega^{kl} [P_i, J_{kl}] + \frac{1}{4l} e^i k^{kl} [P_i, Z_{kl}] + \frac{1}{2cl} e^i k^k [P_i, Z_k] + \frac{1}{2cl} m [M, A] + \frac{1}{2l} \omega^i \tau [K_i, H] \\
&\quad + \frac{1}{2cl} \omega^i e^k [K_i, P_k] + \frac{1}{2c^2 l} \omega^i m [K_i, M] + \frac{1}{2c^2} \omega^i \omega^k [K_i, K_k] + \frac{1}{4c} \omega^i \omega^{kl} [K_i, J_{kl}] \\
&\quad + \frac{1}{4c} \omega^i k^{kl} [K_i, Z_{kl}] + \frac{1}{2c^2} \omega^i k^k [K_i, Z_k] + \frac{c}{4l} \omega^{ij} \tau [J_{ij}, H] + \frac{1}{4l} \omega^{ij} e^k [J_{ij}, P_k] \\
&\quad + \frac{1}{4cl} \omega^{ij} m [J_{ij}, M] + \frac{1}{4c} \omega^{ij} \omega^k [J_{ij}, K_k] + \frac{1}{8} \omega^{ij} \omega^{kl} [J_{ij}, J_{kl}] \\
&\quad + \frac{1}{8} \omega^{ij} k^{kl} [J_{ij}, Z_{kl}] + \frac{1}{4c} \omega^{ij} k^k [J_{ij}, Z_k] + \frac{c}{4l} k^{ij} \tau [Z_{ij}, H] + \frac{1}{4l} k^{ij} e^k [Z_{ij}, P_k] \\
&\quad + \frac{1}{4cl} k^{ij} m [Z_{ij}, M] + \frac{1}{4c} k^{ij} \omega^k [Z_{ij}, K_k] + \frac{1}{8} k^{ij} \omega^{kl} [Z_{ij}, J_{kl}] + \frac{1}{8} k^{ij} k^{kl} [Z_{ij}, Z_{kl}] \\
&\quad + \frac{1}{4c} k^{ij} k^k [Z_{ij}, Z_k] + \frac{1}{2l} k^i \tau [Z_i, H] + \frac{1}{2cl} k^i e^k [Z_i, P_k] + \frac{1}{2c^2 l} k^i m [Z_i, M] + \frac{1}{2c^2} k^i \omega^k [Z_i, K_k] \\
&\quad + \frac{1}{4c} k^i \omega^{kl} [Z_i, J_{kl}] + \frac{1}{4c} k^i k^{kl} [Z_i, Z_{kl}] + \frac{1}{2c^2} k^i k^k [Z_i, Z_k]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F = & \frac{c}{l}d\tau H + \frac{1}{l}de^i P_i + \frac{1}{cl}dmM + \frac{1}{c}d\omega^i K_i + \frac{1}{2}d\omega^{ij} J_{ij} + \frac{1}{2}dk^{ij} Z_{ij} + \frac{1}{c}dk^i Z_i + \frac{c}{2l^2}\tau e^k [H, P_k] \\
& + \frac{1}{2l}\tau\omega^k [H, K_k] + \frac{1}{2l}\tau k^k [H, Z_k] + \frac{c}{2l^2}e^i \tau [P_i, H] + \frac{1}{2cl}e^i \omega^k [P_i, K_k] + \frac{1}{4l}e^i \omega^{kl} [P_i, J_{kl}] \\
& + \frac{1}{4l}e^i k^{kl} [P_i, Z_{kl}] + \frac{1}{2cl}e^i k^k [P_i, Z_k] + \frac{1}{2l}\omega^i \tau [K_i, H] + \frac{1}{2cl}\omega^i e^k [K_i, P_k] + \frac{1}{4c}\omega^i \omega^{kl} [K_i, J_{kl}] \\
& + \frac{1}{4c}\omega^i k^{kl} [K_i, Z_{kl}] + \frac{1}{4l}\omega^{ij} e^k [J_{ij}, P_k] + \frac{1}{4c}\omega^{ij} \omega^k [J_{ij}, K_k] + \frac{1}{8}\omega^{ij} \omega^{kl} [J_{ij}, J_{kl}] \\
& + \frac{1}{8}\omega^{ij} k^{kl} [J_{ij}, Z_{kl}] + \frac{1}{4c}\omega^{ij} k^k [J_{ij}, Z_k] + \frac{1}{4l}k^{ij} e^k [Z_{ij}, P_k] + \frac{1}{4c}k^{ij} \omega^k [Z_{ij}, K_k] \\
& + \frac{1}{8}k^{ij} \omega^{kl} [Z_{ij}, J_{kl}] + \frac{1}{8}k^{ij} k^{kl} [Z_{ij}, Z_{kl}] + \frac{1}{4c}k^{ij} k^k [Z_{ij}, Z_k] + \frac{1}{2l}k^i \tau [Z_i, H] \\
& + \frac{1}{2cl}k^i e^k [Z_i, P_k] + \frac{1}{4c}k^i \omega^{kl} [Z_i, J_{kl}] + \frac{1}{4c}k^i k^{kl} [Z_i, Z_{kl}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F = & \frac{c}{l}d\tau H + \frac{1}{l}de^i P_i + \frac{1}{cl}dmM + \frac{1}{c}d\omega^i K_i + \frac{1}{2}d\omega^{ij} J_{ij} + \frac{1}{2}dk^{ij} Z_{ij} + \frac{1}{c}dk^i Z_i + \frac{c}{l^2}e^i \tau [P_i, H] \\
& + \frac{1}{l}\omega^i \tau [K_i, H] + \frac{1}{cl}\omega^i e^k [K_i, P_k] + \frac{1}{2l}\omega^{ij} e^k [J_{ij}, P_k] + \frac{1}{2c}\omega^{ij} \omega^k [J_{ij}, K_k] + \frac{1}{8}\omega^{ij} \omega^{kl} [J_{ij}, J_{kl}] \\
& + \frac{1}{4}\omega^{ij} k^{kl} [J_{ij}, Z_{kl}] + \frac{1}{2c}\omega^{ij} k^k [J_{ij}, Z_k] + \frac{1}{2l}k^{ij} e^k [Z_{ij}, P_k] + \frac{1}{2c}k^{ij} \omega^k [Z_{ij}, K_k] \\
& + \frac{1}{8}k^{ij} k^{kl} [Z_{ij}, Z_{kl}] + \frac{1}{2c}k^{ij} k^k [Z_{ij}, Z_k] + \frac{1}{l}k^i \tau [Z_i, H] + \frac{1}{cl}k^i e^k [Z_i, P_k] \\
= & \frac{c}{l}d\tau H + \frac{1}{l} \left(de^i P_i + \frac{1}{2}\omega^{ij} e^k [J_{ij}, P_k] + \omega^i \tau [K_i, H] + \frac{1}{2}k^{ij} e^k [Z_{ij}, P_k] + k^i \tau [Z_i, H] \right) \\
& + \frac{1}{cl} \left(dmM + \omega^i e^k [K_i, P_k] + k^i e^k [Z_i, P_k] \right) + \frac{1}{c} \left(d\omega^i K_i + \frac{1}{2}\omega^{ij} \omega^k [J_{ij}, K_k] \right) + \frac{1}{2} \left(d\omega^{ij} J_{ij} \right. \\
& + \frac{1}{4}\omega^{ij} \omega^{kl} [J_{ij}, J_{kl}] \left. \right) + \frac{1}{c} \left(dk^i Z_i + \frac{1}{2}\omega^{ij} k^k [J_{ij}, Z_k] + \frac{c^2}{l^2}e^i \tau [P_i, H] + \frac{1}{2}k^{ij} \omega^k [Z_{ij}, K_k] \right. \\
& + \frac{1}{2}k^{ij} k^k [Z_{ij}, Z_k] \left. \right) + \frac{1}{2} \left(dk^{ij} Z_{ij} + \frac{1}{2}\omega^{ij} k^{kl} [J_{ij}, Z_{kl}] + \frac{1}{4}k^{ij} k^{kl} [Z_{ij}, Z_{kl}] \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F = & \frac{c}{l}d\tau H + \frac{1}{l}(T^i - \omega^i \tau + k^i_j e^j - k^i \tau)P_i + \frac{1}{cl}(dm - \omega^i e_i - k^i e_i)M + \frac{1}{c}D\omega^i K_i + \frac{1}{2}R^{ij} J_{ij} \\
& + \frac{1}{c}(Dk^i + \frac{c^2}{l^2}e^i \tau + k^i_j \omega^j + k^i_j k^j)Z_i + \frac{1}{2}(Dk^{ij} + k^{ik} k_k^j)Z_{ij}.
\end{aligned}$$

Apéndice D

Cálculo duales de Hogde para la acción (ChSAS)

$$\begin{aligned}
 *(T_0)\delta\tau &= \frac{1}{3!}\varepsilon_{0ijk}T_0^0e^ie^je^k\delta\tau \\
 &= \frac{1}{3!}\varepsilon_{0ijk}T_0^0e^i{}_\mu e^j{}_\nu e^k{}_\rho\delta\tau_\sigma dx^\mu dx^\nu dx^\rho dx^\sigma \\
 &= -\frac{1}{3!}\varepsilon_{ijk0}T_0^0e^i{}_\mu e^j{}_\nu e^k{}_\rho\tau_\delta\delta\tau^\delta{}_\sigma dx^\mu dx^\nu dx^\rho dx^\sigma \\
 &= -\frac{\det(g)}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\delta}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}T_0^0\delta\tau^\delta{}_\sigma dx^4 \\
 &= -\frac{\det(g)}{3!}\delta_{\mu\nu\rho\delta}^{\mu\nu\rho\sigma}T_0^0\delta\tau^\delta{}_\sigma dx^4 \\
 &= -\frac{\det(g)}{3!}3!\delta_\delta^\sigma T_0^0\delta\tau^\delta{}_\sigma dx^4 \\
 &= -\det(g)\delta_\delta^\sigma T_0^0\delta\tau^\delta{}_\sigma dx^4
 \end{aligned}$$

y al escribir en lenguaje coordenado y tomando las siguientes consideraciones, $\tau_\mu = \partial_\mu f(x^\nu) = \delta_\mu^0$,

$\tau^\mu = (1, \tau^i)$ con $f(x^\nu) = t$, siendo t el tiempo absoluto. Además $\tau^\mu \tau_\mu = 1$.

$$\begin{aligned}
& \varepsilon_{ijk} Dk^{ij} e^k \delta\tau \\
&= \varepsilon_{ijk0} Dk^{ij} e^k \delta\tau \\
&= \varepsilon_{ijk0} D_\mu k^{\alpha\beta}_\nu e^i_\alpha e^j_\beta e^k_\rho \tau_\delta \delta\tau^\delta_\sigma dx^u dx^\nu dx^\rho dx^\sigma \\
&= \det(g) \varepsilon_{\alpha\beta\rho\delta} D_\mu k^{\alpha\beta}_\nu \delta\tau^\delta_\sigma dx^u dx^\nu dx^\rho dx^\sigma \\
&= \det(g) \varepsilon_{\alpha\beta\rho\delta} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} D_\mu k^{\alpha\beta}_\nu \delta\tau^\delta_\sigma dx^4 \\
&= \det(g) \delta^{\mu\nu\rho\sigma}_{\alpha\beta\rho\delta} D_\mu k^{\alpha\beta}_\nu \delta\tau^\delta_\sigma dx^4 \\
&= \det(g) 1! \delta^{\sigma\mu\nu}_{\delta\alpha\beta} D_\mu k^{\alpha\beta}_\nu \delta\tau^\delta_\sigma dx^4 \\
&= \det(g) \left(\delta^\sigma_\delta \delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} - \delta^\sigma_\alpha \delta^{\mu\nu}_{\delta\beta} + \delta^\sigma_\beta \delta^{\mu\nu}_{\delta\alpha} \right) D_\mu k^{\alpha\beta}_\nu \delta\tau^\delta_\sigma dx^4 \\
&= \det(g) \left[\delta^\sigma_\delta 2! D_\alpha k^{\alpha\beta}_\beta - \delta^\sigma_\alpha \left(D_\delta k^{\alpha\beta}_\beta - D_\beta k^{\alpha\beta}_\delta \right) + \delta^\sigma_\beta \left(D_\delta k^{\alpha\beta}_\alpha - D_\alpha k^{\alpha\beta}_\delta \right) \right] \delta\tau^\delta_\sigma dx^4 \\
&= \det(g) \left[\delta^\sigma_\delta 2! D_\alpha k^{\alpha\beta}_\beta - \left(D_\delta k^{\sigma\beta}_\beta - D_\beta k^{\sigma\beta}_\delta \right) + \left(D_\delta k^{\alpha\sigma}_\alpha - D_\alpha k^{\alpha\sigma}_\delta \right) \right] \delta\tau^\delta_\sigma dx^4 \\
&= \det(g) \left[\delta^\sigma_\delta 2! D_\alpha k^{\alpha\beta}_\beta - \left(D_\delta k^{\sigma\beta}_\beta - D_\beta k^{\sigma\beta}_\delta \right) - \left(D_\delta k^{\sigma\alpha}_\alpha - D_\alpha k^{\sigma\alpha}_\delta \right) \right] \delta\tau^\delta_\sigma dx^4 \\
&= 2 \det(g) \left(\delta^\sigma_\delta D_\alpha k^{\alpha\beta}_\beta - D_\delta k^{\sigma\beta}_\beta + D_\beta k^{\sigma\beta}_\delta \right) \delta\tau^\delta_\sigma dx^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk} R^{ij} e^k \delta\tau &= \varepsilon_{ijk0} R^{ij} e^k \delta\tau \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk0} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} e^i_\alpha e^j_\beta e^k_\rho \tau_\delta \delta\tau^\delta_\sigma dx^u dx^\nu dx^\rho dx^\sigma \\
&= \frac{\det(g)}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\rho\delta} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} e^k_\rho \tau_\delta \delta\tau^\delta_\sigma dx^4 \\
&= \frac{\det(g)}{2} \delta^{\mu\nu\rho\sigma}_{\alpha\beta\rho\delta} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \delta\tau^\delta_\sigma dx^4 \\
&= \frac{\det(g)}{2} 1! \delta^{\sigma\mu\nu}_{\delta\alpha\beta} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \delta\tau^\delta_\sigma dx^4 \\
&= \frac{\det(g)}{2} \left(\delta^\sigma_\delta \delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} - \delta^\sigma_\alpha \delta^{\mu\nu}_{\delta\beta} + \delta^\sigma_\beta \delta^{\mu\nu}_{\delta\alpha} \right) R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \delta\tau^\delta_\sigma dx^4 \\
&= \frac{\det(g)}{2} \left(\delta^\sigma_\delta 2! R^{\alpha\beta}_{\alpha\beta} - \delta^\sigma_\alpha 2! R^{\alpha\beta}_{\delta\beta} + \delta^\sigma_\beta 2! R^{\alpha\beta}_{\delta\alpha} \right) \delta\tau^\delta_\sigma dx^4 \\
&= \det(g) \left(\delta^\sigma_\delta R^{\alpha\beta}_{\alpha\beta} - R^{\sigma\beta}_{\delta\beta} + R^{\alpha\sigma}_{\delta\alpha} \right) \delta\tau^\delta_\sigma dx^4 \\
&= \det(g) \left(\delta^\sigma_\delta R - 2R^\sigma_\delta \right) \delta\tau^\delta_\sigma dx^4 \\
&= \det(g) \left(\delta^\sigma_\delta R - 2R^\sigma_\delta \right) \delta\tau^\delta_\sigma dx^4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon_{ijk} k^{im} k_m^j e^k \delta \tau \\
 = & \varepsilon_{ijk0} k^{im} k_m^j e^k \delta \tau \\
 = & \varepsilon_{ijk0} k^{im} k_m^j e^k e^{\rho} \tau_{\delta} \delta \tau_{\sigma}^{\delta} dx^{\mu} dx^{\nu} dx^{\rho} dx^{\sigma} \\
 = & \varepsilon_{ijk0} k^{\alpha\gamma}_{\mu} k^{\beta}_{\gamma} e^i_{\alpha} e^j_{\beta} e^k e^{\rho} \tau_{\delta} \delta \tau_{\sigma}^{\delta} dx^{\mu} dx^{\nu} dx^{\rho} dx^{\sigma} \\
 = & \det(g) \varepsilon_{\alpha\beta\rho\delta} k^{\alpha\gamma}_{\mu} k^{\beta}_{\gamma} e^i_{\alpha} e^j_{\beta} e^k e^{\rho} \tau_{\delta} \delta \tau_{\sigma}^{\delta} dx^{\mu} dx^{\nu} dx^{\rho} dx^{\sigma} \\
 = & \det(g) \varepsilon_{\alpha\beta\rho\delta} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k^{\alpha\gamma}_{\mu} k^{\beta}_{\gamma} e^i_{\alpha} e^j_{\beta} e^k e^{\rho} \tau_{\delta} \delta \tau_{\sigma}^{\delta} dx^4 \\
 = & \det(g) \delta^{\mu\nu\rho\sigma}_{\alpha\beta\rho\delta} k^{\alpha\gamma}_{\mu} k^{\beta}_{\gamma} e^i_{\alpha} e^j_{\beta} e^k e^{\rho} \tau_{\delta} \delta \tau_{\sigma}^{\delta} dx^4 \\
 = & \det(g) 1! \delta^{\sigma\mu\nu}_{\delta\alpha\beta} k^{\alpha\gamma}_{\mu} k^{\beta}_{\gamma} e^i_{\alpha} e^j_{\beta} e^k e^{\rho} \tau_{\delta} \delta \tau_{\sigma}^{\delta} dx^4 \\
 = & \det(g) \left(\delta^{\sigma}_{\delta} \delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} - \delta^{\sigma}_{\alpha} \delta^{\mu\nu}_{\delta\beta} + \delta^{\sigma}_{\beta} \delta^{\mu\nu}_{\delta\alpha} \right) k^{\alpha\gamma}_{\mu} k^{\beta}_{\gamma} e^i_{\alpha} e^j_{\beta} e^k e^{\rho} \tau_{\delta} \delta \tau_{\sigma}^{\delta} dx^4 \\
 = & \det(g) \left[\delta^{\sigma}_{\delta} \left(k^{\alpha\gamma}_{\alpha} k^{\beta}_{\gamma} - k^{\alpha\gamma}_{\beta} k^{\beta}_{\gamma} \right) - \delta^{\sigma}_{\alpha} \left(k^{\alpha\gamma}_{\delta} k^{\beta}_{\gamma} - k^{\alpha\gamma}_{\beta} k^{\beta}_{\gamma} \right) \right. \\
 & \left. + \delta^{\sigma}_{\beta} \left(k^{\alpha\gamma}_{\delta} k^{\beta}_{\gamma} - k^{\alpha\gamma}_{\alpha} k^{\beta}_{\gamma} \right) \right] \delta \tau_{\sigma}^{\delta} dx^4 \\
 = & \det(g) \left[\delta^{\sigma}_{\delta} \left(k^{\alpha\gamma}_{\alpha} k^{\beta}_{\gamma} - k^{\alpha\gamma}_{\beta} k^{\beta}_{\gamma} \right) - \left(k^{\sigma\gamma}_{\delta} k^{\beta}_{\gamma} - k^{\sigma\gamma}_{\beta} k^{\beta}_{\gamma} \right) \right. \\
 & \left. + \left(k^{\alpha\beta}_{\delta} k^{\sigma}_{\alpha} - k^{\alpha\beta}_{\alpha} k^{\sigma}_{\beta} \right) \right] \delta \tau_{\sigma}^{\delta} dx^4
 \end{aligned}$$



Bibliografía

- [1] F. Gómez, P. Minning and P. Salgado, “Standard cosmology in Chern–Simons gravity”, *Phys. Rev.* **D84** (2011) 063506
- [2] M. Cataldo, J. Crisóstomo, S. del Campo, F. Gómez, C. Quinzacara, P. Salgado, “Accelerated FRW solutions in Chern–Simons gravity”, *Eur. Phys. J.* **C74** (2014) 3087
- [3] N. L. González Albornoz, G. Rubio, P. Salgado, and S. Salgado, “Generalized Galilean algebras and Newtonian gravity,” *Phys. Lett.* **B755** (2016) 433–438.
- [4] G. Rubio and P. Salgado, “Modified Newtonian dynamics and non-relativistic ChSAS gravity,” *Phys. Lett.* **B787** (2018) 30 - 25.
- [5] C. Lanczos, *Ann. Math.* 39 (1938) 842.
- [6] D. Lovelock, *J. Math Phys.* 12 (1971) 498.
- [7] C. Teitelboim, J. Zanelli, *Class. and Quantum Grav.* 4 (1987) L125.
- [8] F. Izaurieta, E. Rodríguez, P. Salgado, “The Extended Cartan homotopy formula and a subspace separation method for Chern–Simons supergravity”, *Lett. Math. Phys.* **80** (2007) 127-138.
- [9] C. Rüede and N. Straumann, “On Newton–Cartan cosmology”, *Helv. Phys. Acta* **70** (1997), 318-335.
- [10] N. Dadhich, “Derivation of the Raychaudhuri Equation”, (2005) arXiv:gr-qc/0511123.
- [11] Tamath Rainsford, Newtonian and post-Newtonian cosmology (2000), Tesis Ph. D.
- [12] S. Weinberg, *Cosmology* (Oxford University Press, 2008).
- [13] D. M. Eardley and S. B. Giddings, “Classical Black Hole Production in High-Energy Collisions”, *Phys. Rev.* **D66**:044011, 2002, gr-qc/0201034.
- [14] Olav Aursj , “Microscopic Black Holes and Extra Dimensions”, Thesis submitted for the degree of Candidatus Scientiarum.
- [15] Andre Liddle, “An introduction to Modern Cosmology, second edition”.
- [16] J. A. S. Lima, V. Zanchin and R. Brandenberger , “On the Newtonian cosmology equations with pressure”, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **291**, L1-U (1997).
- [17] R. Parthasarathy, “Five dimensional Gravity and Big Bang Singularity”, (2015) arXiv:1507.01689.
- [18] S. Mukohyama, *Class. Quant. Grav.* **27** (2010) 223101.

- [19] D. O. Devecioğlu, N. Özdemir, M. Ozkan and U. Zorba, *Class. Quant. Grav.* **35** (2018) no.11, 115016.
- [20] M. Cruz, S. Lepe and F. Peña, *Phys. Rev. D* **92** (2015) 123511.
- [21] I. Brevik, E. Elizalde, S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D* **84** (2011) 103508.
- [22] S. Lepe, G. Rubio and P. Salgado, “Cosmology from Newton? Chern–Simons gravity”, submitted to *Nuclear Physics B*.
- [23] F. Izaurieta, P. Minning, E. Rodríguez, A. Pérez and P. Salgado, “Standard General Relativity from Chern–Simons Gravity”, *Phys. Lett. B* **678** (2009) 213.
- [24] N. González, G. Rubio, P. Salgado and S. Salgado, “Einstein–Hilbert action with cosmological term from Chern–Simons gravity”, *Jour. Geom. Phys.* **86** (2014) 339.
- [25] P. Salgado and S. Salgado, “ $so(D-1,1) \oplus so(D-1,2)$ algebras and gravity”, *Phys. Lett. B* **728**, (2014) 5.
- [26] P. K. Concha, D. M. Peñafiel, E. K. Rodríguez and P. Salgado, “Even-dimensional General Relativity from Born–Infeld gravity”, *Phys. Lett. B* **725** (2013) 419.
- [27] D. V. Soroka and V. A. Soroka, “Tensor extension of the Poincaré algebra”, *Phys. Lett. B* **607** (2005) 302.
- [28] D. V. Soroka and V. A. Soroka, “Semi-simple extension of the (super) Poincaré algebra”, *Adv. High Energy Phys.* **2009** (2009) 234147.
- [29] R. Andringa, E. Bergshoeff, S. Panda and M. de Roo, “Newtonian Gravity and the Bargmann Algebra”, *Class. & Quant. Grav.* **28** (2011) 105011.
- [30] N. González, F. Izaurieta, G. Rubio and S. Salgado, “Gauged Wess–Zumino–Witten actions for generalized Poincaré algebras”, *Phys. Lett. B* **732** (2014) 255.
- [31] G. Savvidy, “Topological mass generation in four-dimensional gauge theory”, *Phys. Lett. B* **694** (2010) 65.
- [32] S. Konitopoulos and G. Savvidy, “Extension of Chern–Simons forms and new gauge anomalies”, *J. Math. Phys.* **55** (2014) 06234.
- [33] I. Antoniadis and G. Savvidy, “New gauge anomalies and topological invariants in various dimensions”, *Eur. Phys. J. C* **72** (2012) 2140.
- [34] I. Antoniadis and G. Savvidy, “Extension of Chern–Simons forms and new gauge anomalies”, *Int. J. Mod. Phys. A* **29** (2014) 1450027.
- [35] F. Izaurieta, I. Muñoz, P. Salgado, “A Chern–Simons gravity action in $d=4$ ”, *Phys. Lett. B* **750** (2015) 39.
- [36] P. Catalán, F. Izaurieta, P. Salgado and S. Salgado, “Topological gravity and Chern–Simons forms in $d=4$ ”, *Phys. Lett. B* **751** (2015) 205.
- [37] F. Izaurieta, P. Salgado, S. Salgado, “Chern–Simons–Antoniadis–Savvidy forms and standard supergravity”, *Phys. Lett. B* **767** (2017) 360.
- [38] S. Salgado (2016). “Teorías de Gauge Extendidas y Supergravedad”(Tesis doctoral). Universidad de Concepción, Chile.

- [39] A. H. Chamseddine, “Topological gravity and supergravity in various dimensions”, Nucl. Phys. B **346** (1990) 213.
- [40] A. H. Chamseddine, “Topological Gauge Theory of Gravity in Five-dimensions and All Odd Dimensions”, Phys. Lett. B **233** (1989) 291.
- [41] A. H. Chamseddine, Nucl. Phys. B **340** (1990) 595.
- [42] P. Salgado and S. Salgado, “Extended gauge theory and gauged free differential algebras”, Nucl. Phys. B **926** (2018) 179.
- [43] H. Bacry, P. Combe, J.L. Richard, “Group-theoretical analysis of elementary particles in an external electromagnetic field. 1. the relativistic particle in a constant and uniform field”, Nuovo Cimento. A **67** (1970) 267.
- [44] R. Schröder, “The Maxwell Group and the Quantum Theory of Particles in Classical Homogeneous Electromagnetic Fields”, Fortschr. Phys. **20** (1972) 701.
- [45] J. Díaz, O. Fierro, F. Izaurieta, N. Merino, E. Rodríguez, P. Salgado and O. Valdivia, “A generalized action for (2+1)-dimensional Chern–Simons gravity”, J. Phys. A: Math. Theor. **45**, (2012) 255207.
- [46] F. Izaurieta, E. Rodríguez and P. Salgado, “Expanding Lie (super) algebras through abelian semi-groups”, J. Math. Phys. **47** (2006) 123512.
- [47] F. Izaurieta, E. Rodríguez and P. Salgado, “The Extended Cartan Homotopy Formula and a Subspace Separation Method for Chern–Simons Theory”, Lett. Math. Phys. **80** (2007) 127.
- [48] Y. Tian, H. Y. Guo, C. G. Huang, Z. Xu and B. Zhou, “Mechanics and Newton–Cartan like gravity on the Newton–Hooke space-time”, Phys. Rev. D **71** (2005) 044030.
- [49] G. W. Gibbons, C. E. Patricot, “Newton–Hooke spacetimes, Hpp-waves and the cosmological constant”, Class.Quant.Grav. **20** (2003) 5225.
- [50] R. D’Áuria and P. Fré, “Geometric Supergravity in $d = 11$ and Its Hidden Supergroup”, Nucl. Phys. B **201** (1982) 101.
- [51] L. Castellani, R. D’Áuria and P. Fré, “Supergravity and Superstring. A Geometric Perspective”, World Scientific 1991.
- [52] I. Bando, J.A. de Azcárraga, M. Picón and O. Varela, “On the formulation of $D = 11$ supergravity and the composite nature of its three-form gauge field”, Ann. Phys. **317** (2005) 238.
- [53] A. Pérez, P. Minning and P. Salgado, “Eleven-dimensional CJS supergravity and the D’Áuria-Fré group”, Phys. Lett. B **660** (2008) 407.
- [54] J. D. Bekenstein and M. Milgrom, “Does the missing mass problem signal the breakdown of Newtonian gravity?”, Astrophys. J. **286** (1984) 7.
- [55] J. Gomis, K. Kamimura, J. Lukierski, “Deformations of Maxwell algebra and their dynamical realizations”, J. High Energy Phys. **08** (2009) 039, arXiv:0906.4464[hep-th].
- [56] H. Bacry and J. Levy–Leblond, “Possible kinematics”, J. Math. Phys. **9** (1968) 1605-1614.
- [57] C. Duval, G. Gibbons, P. Horvathy, and P. Zhang, “Carroll versus Newton and Galilei: two dual non-Einsteinian concepts of time”, Class.Quant.Grav. **31** (2014) 085016, arXiv:1402.0657 [gr-qc].

- [58] G. Rubio, P. Salgado and P. Yañez, work in progress.
- [59] M. Le Bellac and J. M. Levy–Leblond, “Galilean Electromagnetism”, *Il Nuovo Cimento* 14B (1973) 217.

