



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

DENSIDAD DE TURÁN POR COGRADO PARA CICLOS AJUSTADOS EN HIPERGRAFOS

Por

Gabriel Ignacio Lee Mora Huenteo

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la
Universidad de Concepción para optar al título profesional de
Ingeniero Civil Matemático

Marzo 2026

Concepción, Chile

Profesor Guía

Dr. Nicolás Sanhueza Matamala

© 2026, Gabriel Ignacio Lee Mora Huenteo

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento

Cuando solté lo mío, empezó lo de Dios.

Agradecimientos

Quisiera comenzar agradeciendo a mi mamá por su apoyo incondicional, por haberme educado con tanto esfuerzo y dedicación. Por el cariño que siempre me ha dado y estar presente en cada etapa de mi vida.

Agradezco a mi querida Danae por su paciencia, compañía y comprensión, pero sobre todo por hacerme sentir amado. Por todas las horas de estudio que compartimos y por todas las bonitas experiencias que pasamos. Sin duda, has sido una parte importante de vida.

Agradezco a mi tía Margarita y a mis primas Carla y Natalia, a quienes he considerado mi segunda madre y mis hermanas.

Agradezco y de paso mando un gran abrazo a mi abuelo José en cielo, por cuidarme y compartir sus historias de Huachipato conmigo.

Igualmente agradezco a toda mi familia, quienes han sido una fuente de alegría y buenos momentos. Por siempre apoyarme y porque la familia es la familia.

Quiero dedicar unas pequeñas palabras a Sebastián, Agustina y Trinidad, porque en su inocente juventud me han hecho reír y me han regalado momentos alegres.

También agradezco a mis amigos que he hecho en la universidad. En las discusiones de variados temas con Bastián y Daniel, a Bruno por la camaradería en tantos ramos, a Daniela e Isidora quienes de cierta forma me he hecho más cercano y quienes me han acercado un poco más a Dios. Gracias a todos aquellos que sin pedirlo me han ayudado.

Deseo agradecer de manera especial a mi profesor guía, Nicolás Sanhueza-Matamala, por aceptarme como su alumno tesista. Aprecio su ayuda, tiempo y dedicación, así como su capacidad de mostrarme los problemas de una manera sencilla. Valoro su calidad humana y su amable manera de enseñar.

Finalmente quisiera expresar mi mas profundo agradecimiento a Dios por su amor, por el don de la vida y por todas las oportunidades que me ha entregado en mi vida.

Resumen

En esta tesis se estudia la densidad de Turán por cogrado de un hipergrafo F , denotada por $\gamma(F)$. Este es un parámetro que mide la mayor fracción asintótica de aristas que puede asegurarse como cogrado mínimo en un k -grafo que no contiene una subestructura prohibida F . El trabajo se centra en hipergrafos k -uniformes con $k \geq 4$ y en la familia de ciclos ajustados $C_s^{(k)}$, explorando cómo la relación aritmética entre k y s determinan la existencia de ciclos considerando condiciones de alto cogrado mínimo.

El método principal explota la construcción $H_{n,p}^{(k)}$ de Han, Lo y Sanhueza-Matamala para obtener cotas inferiores para $\gamma(C_s^{(k)})$. Nuestro aporte central refina estas cotas mediante la Identidad de Bézout y un argumento de periodicidad, estableciendo que si p es el menor primo que divide a $k/\text{mcd}(k, s)$, entonces la mejor cota inferior que se obtiene es $1/p$. Adicionalmente, se presenta la construcción y los resultados de Ma y Rong, para la cual la construcción anterior resulta ser un caso particular.

Índice general

AGRADECIMIENTOS	I
Resumen	II
1. Introducción	1
2. Conceptos preliminares y organización	4
2.1. Definiciones y notaciones	4
2.1.1. Teoría extremal y densidades de Turán	6
2.2. Organización de la tesis	7
3. Estado del arte	9
4. Densidad de Turán por cogrado de ciclos ajustados	12
4.1. Preliminares : Blow-up y supersaturación	12
4.2. La construcción $H_{n,p}^{(k)}$	15
4.2.1. Aplicación de la construcción	17
4.3. Clasificación modular de cotas para $\gamma(C_s^{(k)})$	19
4.3.1. Cotas inferiores por la construcción $H_{n,p}^{(k)}$	19
4.3.2. Mejoramiento de las cotas	20
4.4. Identidad de Bézout, periodicidad y criterio de mejora para $\gamma(C_s^{(k)})$	29
4.4.1. Condición de solución módulo p	32
4.4.2. Ejemplo del teorema	34
5. Más allá de la construcción $H_{n,p}^{(k)}$	35
5.1. Definiciones y notación	35
6. Conclusión	43
6.1. Conclusiones	43
6.2. Trabajo futuro	44
Referencias	45

Índice de cuadros

4.3.1. Cotas inferiores $\gamma(C_s^{(k)})$ por residuo $0 \leq r \leq 9$ y $2 \leq k \leq 10$	20
4.3.2. Cotas inferiores $\gamma(C_s^{(k)})$ mejoradas para $0 \leq r \leq 9$ y $2 \leq k \leq 10$.	29
5.1.1. Cotas inferiores $\gamma(C_s^{(k)})$ mejoradas por la construcción de Ma y Rong	42

Índice de figuras

2.1.1.Comparación entre grafo e hipergrafo	5
2.1.2.Construcción visual de $C_7^{(4)}$	6
4.1.1.Blow-up de grafo completo K_3	13
4.3.1.Aristas en la construcción $H_{n,2}^{(4)}$	21

Capítulo 1

Introducción

En la actualidad, la teoría de hipergrafos ocupa un papel fundamental en la combinatoria moderna. Mientras los grafos clásicos solo permiten modelar relaciones binarias entre vértices, los hipergrafos se presentan como una generalización natural de estos, pues permiten agrupar de manera simultánea tres o más vértices. Esto los convierte en una excelente herramienta para describir estructuras de mayor complejidad. Los hipergrafos no solo son relevantes en el área de la combinatoria discreta, sino que también se aplican en estadística mediante aprendizaje automático para modelar correlaciones de alto orden [21] o también en biología para representar interacciones multigénicas [11].

Dentro de la combinatoria extremal, surgió una pregunta sorprendentemente simple pero de enorme profundidad ¿hasta qué punto es posible densificar un hipergrafo sin que aparezca en él una estructura que se quiere evitar?. Esta pregunta fue abordada por Pál Turán [20] en 1941, quien introdujo el número de Turán $ex(n, F)$, para describir cuántas hiperaristas puede poseer un hipergrafo con n vértices antes que inevitablemente emerja un hipergrafo prohibido F , donde la versión asintótica de este problema conduce a la noción de densidad de Turán. Sin embargo, a pesar de décadas de avances, aún existen casos que, aunque aparentemente simples, siguen sin resolverse. Un ejemplo destacado de esto último es determinar el valor de la densidad de Turán del tetraedro, es decir, del hipergrafo completo 3-uniforme en cuatro vértices.

La dificultad de este tipo de problemas se arraiga en el hecho que la estructura de los hipergrafos puede organizarse de muchas maneras distintas sin contener

la configuración prohibida. Por tanto, determinar cuándo una estructura debe aparecer requiere comprender con precisión cómo interactúan las aristas entre sí y cómo pequeñas interacciones locales pueden influir en el comportamiento del hipergrafo. Por tal motivo, una estrategia que ha cobrado relevancia en los últimos años consiste en estudiar variantes estructurales del problema original. Una de ellas, introducida por Mubayi y Zhao [16], reemplaza la noción clásica de densidad por la del cogrado mínimo, lo que da origen a la llamada densidad de Turán por cogrado. Esta perspectiva ha demostrado ser sorprendentemente fructífera, pues aunque determinar la densidad de Turán del tetraedro continúa siendo un desafío mayor, para su análogo por cogrado el valor ya fue determinado por Falgas-Ravry, Pikhurko, Vaughan y Volec [7].

Intuitivamente, mientras que la densidad clásica controla el número total de hiperaristas presentes en el hipergrafo, el cogrado mínimo exige que cada subconjunto de $k - 1$ vértices esté contenido en un número suficientemente grande de hiperaristas. De este modo, en lugar de imponer una restricción cuantitativa a nivel global, se establece una condición uniforme sobre la interacción local entre los vértices. Así, al cambiar a esta perspectiva, se modifica la naturaleza del problema extremal, porque se desplaza el énfasis desde una condición global hacia un equilibrio estructural más uniforme.

Entre las distintas familias de hipergrafos estudiadas bajo esta variante destacan los ciclos ajustados k -uniformes de longitud s , estructuras de carácter cíclico que vienen a extender la noción clásica de ciclos en grafos clásicos a hipergrafos uniformes, que han mostrado un comportamiento notablemente rico. En el caso particular de $k = 3$, el trabajo de Piga, Sanhueza-Matamala y Schacht [19] introdujo una construcción basada en una partición del conjunto de vértices determinada por propiedades aritméticas, lo que permite evitar la aparición de ciertos ciclos ajustados bajo condiciones específicas entre los parámetros involucrados. Con ello lograron establecer cotas para numerosos valores de la longitud del ciclo ajustado. Posteriormente, Ma [12] continuó en esta línea de investigación, completando varios casos pendientes.

Sin embargo, no es inmediato establecer si dichas condiciones reflejan un fenómeno estructural profundo que esté asociado a la naturaleza cíclica del hipergrafo prohibido o si admiten algún refinamiento adicional a la hora de analizar con mayor detalle las relaciones entre los parámetros k y s . Lo anterior,

motiva el hecho de que los ciclos ajustados no deben limitarse únicamente a verificar cotas existentes, sino también a examinar de manera más exhaustiva los casos que no satisfacen las hipótesis planteadas por Piga, Sanhueza-Matamala y Schacht, identificando patrones aritméticos más finos.

El objetivo de esta tesis es profundizar en el estudio de los ciclos ajustados desde la perspectiva del cogrado, procurando analizar detalladamente las cotas conocidas y las construcciones que las sustentan. Particularmente, se busca afinar el análisis de las cotas conocidas con el propósito de determinar en qué medida pueden optimizarse, especialmente en uniformidades mayores o iguales a 4. Para ello nos centraremos en primera instancia en los primeros casos, es decir, para valores de uniformidades que van desde 4 hasta 9. Para lograrlo, exploraremos construcciones conocidas en la literatura, analizaremos su comportamiento para ciertos valores de los parámetros y estudiaremos posibles generalizaciones para hipergrafos k -uniformes con $k \geq 4$. En esta dirección, resultan relevantes los trabajos recientes de Ma y Rong [13], quienes introducen una familia de hipergrafos más general que engloba la construcción de Han, Lo y Sanhueza-Matamala como un caso particular, obteniendo cotas inferiores más ajustadas para la densidad de Turán por cogrado de los ciclos ajustados. Asimismo, de manera independiente y simultánea, Balogh, Luo y Sankar [1] han obtenido resultados similares mediante un enfoque distinto, basado en coloraciones orientadas de hipergrafos.

Capítulo 2

Conceptos preliminares y organización

En este capítulo, introduciremos la notación esencial que hemos de utilizar en el presente trabajo. Como observaremos en el transcurso de la lectura, habrán secciones en las que será necesario incorporar definiciones específicas bajo ciertos contextos. Posteriormente, daremos a conocer al lector los resultados de las investigaciones de diversos autores, así como las preguntas que permanecen abiertas.

2.1. Definiciones y notaciones

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ con a no nulo. Decimos que a divide a b , y escribimos $a \mid b$, si existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $b = aq$. Decimos que a no divide a b , y escribimos $a \nmid b$, si no existe tal entero q .

Considerando n un número real arbitrario, denotaremos por $\lfloor x \rfloor$ al mayor número entero menor o igual que x . Asimismo, $\lceil x \rceil$ denotará al menor entero menor o igual que x .

Dado un conjunto V , definimos por $V^{(k)}$ a la colección de subconjuntos de V de tamaño k , esto es $V^{(k)} := \{S \subseteq V : |S| = k\}$.

Un *grafo* es un par ordenado $G = (V, E)$, donde V es el conjunto de *vértices* y $E \subseteq V^{(2)}$ es el conjunto de *aristas*. Notemos que una arista $\{x, y\} \in E$, es la representación de la conexión entre los vértices distintos x e y . Un *camino*

en G es sucesión de vértices distintos v_1, \dots, v_m tal que $\{v_i, v_{i+1}\}$ para todo $i \in \{1, \dots, m-1\}$. Diremos que dos vértices $u, v \in V$ están *conectados* si existe un camino que comienza en u y termina en v . Además, una *componente conexa* es un subconjunto maximal de vértices $C \subseteq V$ tal que para cualesquiera dos vértices $u, v \in C$ existe un camino en G desde u a v .

En esta línea, la generalización natural de un grafo es un hipergrafo. Formalmente, un *hipergrafo* $H = (V, E)$ está dado por un conjunto de vértices V y E un conjunto de *hiperaristas*, donde cada hiperarista es un subconjunto no vacío de V . La diferencia entre un grafo y un hipergrafo se puede apreciar en la siguiente figura.

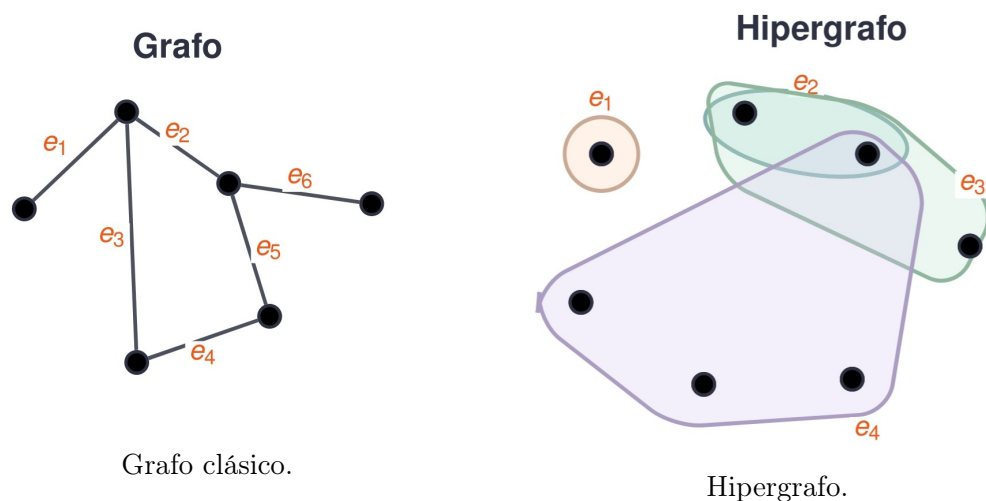


Figura 2.1.1: En el grafo, cada arista une exactamente a dos vértices. Mientras que en un hipergrafo, cada hiperarista puede agrupar varios vértices.

A las hiperaristas que tienen exactamente k vértices, les llamaremos *k-aristas*. Además, diremos que un hipergrafo es *k-uniforme* o simplemente un *k-grafo*, si todas sus hiperaristas tienen exactamente k vértices. Notemos que si $k = 2$, se reduce a un grafo tradicional. Además, $K_n^{(k)}$ denota el *k-grafo* completo en n vértices.

Dado un conjunto V , diremos que una familia finita de subconjuntos no vacíos $\{V_1, \dots, V_r\}$ es una *partición* de V si son mutuamente disjuntos y $V = V_1 \cup \dots \cup V_r$. Además una *parte* es cada uno de los conjuntos V_i para algún $i \in \{1, \dots, r\}$. Diremos que la partición es *lo más equilibrada posible* si $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ para todo $i, j \in \{1, \dots, r\}$. En tanto, un *k-grafo* $H = (V, E)$ se dice *k-partito* si existe una

partición de V en k partes, tal que cada hiperarista $e \in V$ contiene exactamente un vértice de cada parte, es decir, para toda $e \in E$ se tiene $|e \cap V_j| = 1$ para todo $j \in \{1, \dots, k\}$.

Entre las estructuras que se estudian en hipergrafos, los ciclos ajustados ocupan un lugar central. Dados los enteros $3 \leq k < s$, un *ciclo ajustado* (o también llamado *tight cycles*) es un hipergrafo k -uniforme en s vértices, denotado por $C_s^{(k)}$, cuyo conjunto de vértices es $V(C_s^{(k)}) = \{v_0, \dots, v_{s-1}\}$ y su conjunto de hiperaristas es $E(C_s^{(k)}) = \{\{v_i, \dots, v_{i+k-1}\} : i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}\}$, donde $\mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$ denota el conjunto $\{0, \dots, s-1\}$ con aritmética módulo s .

A continuación, presentamos una visualización de esta estructura. La primera imagen muestra el encadenamiento inicial de hiperaristas consecutivas, mientras que la segunda muestra el ciclo ajustado completo. En ambas imágenes se aprecia que cada nueva arista se obtiene mediante el desplazamiento de los vértices, con lo cual se comparten $k-1$ vértices.

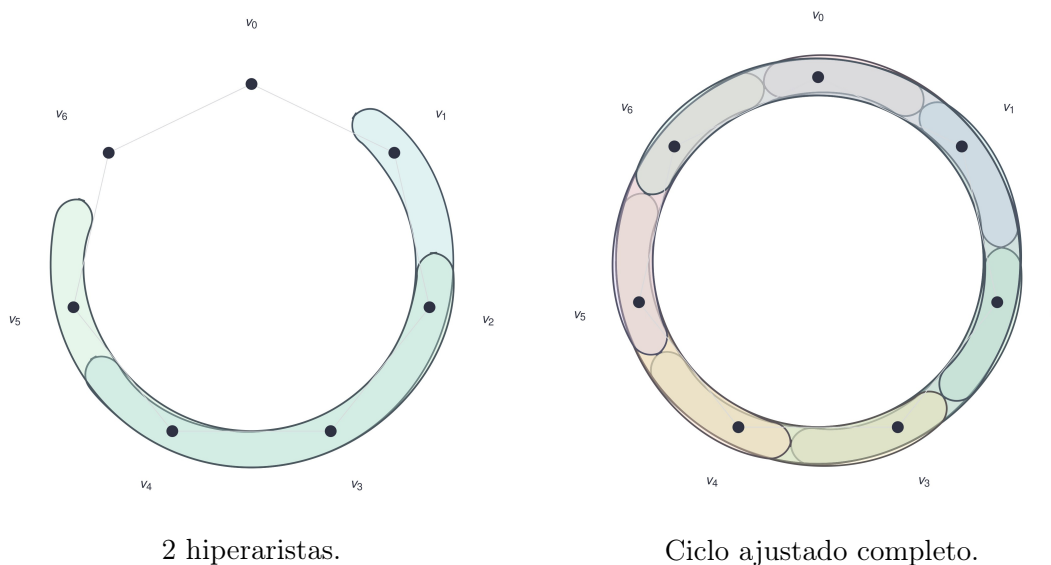


Figura 2.1.2: A la izquierda, dos hiperaristas consecutivas del ciclo ajustado $C_7^{(4)}$, lo que permite visualizar el solapamiento de 3 vértices entre aristas adyacentes. A la derecha, el ciclo ajustado completo, donde cada hiperarista está formada por cuatro vértices consecutivos.

2.1.1. Teoría extremal y densidades de Turán

Pál Turán introdujo el *número de Turán* $ex(n, F)$, que dado un k -grafo F y un número entero n , representa la cantidad máxima de hiperaristas que puede

tener un hipergrafo de n vértices sin contener una copia de F [20]. Cabe notar que el número total de posibles hiperaristas en un k -grafo con n vértices es $\binom{n}{k}$. Lo anterior motiva la definición de la *densidad de Turán* como la versión normalizada del número de Turán, definida por

$$\pi(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{ex}(n, F)}{\binom{n}{k}} \in [0, 1].$$

Sea $H = (V, E)$ un hipergrafo k -uniforme y $S \subseteq V$ un subconjunto de tamaño $k - 1$, se define el *vecindario* $N_H(S) := \{v \in V : S \cup \{v\} \in E\}$ y el *cogrado* como $d_H(S) := |N_H(S)|$. De lo anterior, se define el *cogrado mínimo* denotado por $\delta_{k-1}(H) := \min\{d_H(S) : |S| = k - 1\}$. Sobre esta base, y considerando un hipergrafo F , se introduce el *número de Turán por cogrado* $\text{ex}_{k-1}(n, F)$ como el máximo d tal que existe un hipergrafo H en n vértices sin contener a F con $\delta_{k-1}(H) \geq d$. Lo anterior, es equivalente a escribir

$$\text{ex}_{k-1}(n, F) = \max\{d : \exists F \text{ libre de } H \text{ con } |V(H)| = n, \delta_{k-1}(H) \geq d\}.$$

Por su parte, Mubayi y Zhao definen la *densidad de Turán por cogrado* [17], que en lugar de contar aristas se enfoca en el grado mínimo de los subconjuntos de tamaño $k - 1$ y es definida por

$$\gamma(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{ex}_{k-1}(n, F)}{n} \in [0, 1].$$

Además, Mubayi y Zhao demostraron que este límite siempre existe para todo F . Vale la pena observar la siguiente relación entre π y γ .

Lema 2.1 ([17]). *Sea F un k -grafo, entonces $\gamma(F) \leq \pi(F)$.*

En particular, es inmediato que si la densidad de Turán de F es cero, entonces la densidad por cogrado también lo es. En efecto, si $\pi(F) = 0$ entonces $0 \leq \gamma(F) \leq \pi(F) = 0$, de lo cual se deduce que $\gamma(F) = 0$.

2.2. Organización de la tesis

A continuación exponaremos la organización del presente trabajo. En la sección 3, se explora el conocimiento actual sobre los ciclos ajustados en hipergrafos, así

como los principales resultados existentes en la literatura de los ciclos ajustados. Luego en la sección 4, se introduce una nueva perspectiva aritmética que explota la estructura cíclica de los ciclos ajustados en hipergrafos, definiendo posteriormente un criterio general basado en el máximo común divisor, lo que constituye el aporte central de este capítulo. Para la sección 5, se presenta una familia más general de hipergrafos definida por Ma y Rong, que extiende la construcción $H_{n,p}^{(k)}$ y obtiene mejores cotas inferiores para $\gamma(C_s^k)$. Finalmente, en la sección 6, se presentan las conclusiones además de discutir brevemente posibles líneas de investigación futura.

Capítulo 3

Estado del arte

A lo largo de casi tres siglos, la teoría de grafos y más recientemente la de hipergrafos, ha experimentado un desarrollo profundo impulsado por preguntas que, en apariencia simples, terminan revelando estructuras de notable riqueza. El punto de partida histórico se remonta a 1736, cuando Leonhard Euler resolvió el célebre problema de los puentes de Königsberg, el que consistía en la posibilidad de recorrer la ciudad cruzando cada uno de sus siete puentes exactamente una vez, dando origen a la primera formulación matemática de lo que hoy entendemos como un grafo. Con el tiempo, la combinatoria y la teoría de grafos fueron desarrollándose en estrecha relación, y hacia inicios del siglo XX, distintos autores, entre ellos Paul Erdős, George Szekeres y Frank Ramsey, introdujeron problemas que impulsaron la aparición de la combinatoria extremal.

En 1907, Willem Mantel se planteó determinar el número máximo de aristas que puede tener un grafo clásico con n vértices sin contener triángulos, es decir, sin copias de K_3 . Su resultado, conocido hoy como el *teorema de Mantel* [14], establece que todo grafo sin triángulos en n vértices tiene a lo más $\lfloor n^2/4 \rfloor$ aristas, y que esta cota es alcanzada precisamente por el grafo bipartito completo con partes lo más equilibradas posible. Tomando esta idea y generalizándola, es que varias décadas más tarde Pál Turán [20] se preguntó: dado un entero $t \geq 2$, ¿cuál es el número máximo de aristas que puede tener un grafo simple con n vértices sin contener al grafo completo K_{t+1} como subgrafo?. El resultado que obtuvo se conoce hoy como el *teorema de Turán*, y se considera el trabajo que cimentó las bases de la teoría extremal moderna.

En su trabajo, Turán introdujo el *grafo de Turán* que dado un entero $t \geq 2$, se define como el grafo completo t -partito sobre n vértices, con las partes de tamaño lo más equilibradas posible.

Teorema 3.1 ([20]). *Para $t \geq 2$, el grafo de Turán $T_r(n)$ es el único grafo en n vértices, sin contener a K_{t+1} , que tiene el número máximo posible de aristas.*

La relevancia de este resultado residió en que proporcionó la primera solución exacta a un problema extremal general de exclusión de subgrafos. Pero la historia no termina allí pues años más tarde, en 1946, Paul Erdős y Arthur H. Stone mostraron que el comportamiento asintótico de estos problemas está controlado por el número cromático del subgrafo prohibido [5], donde el número cromático representa el menor número de colores necesarios para colorear los vértices de F sin que dos vértices adyacentes reciban el mismo color. En su artículo, demostraron que si F es un grafo con número cromático $\chi(F) = c \geq 3$, entonces su densidad de Turán viene dada por $\pi(F) = 1 - \frac{1}{c-1}$. Luego en 1966, Miklós Simonovits refinó esta teoría mediante resultados de estabilidad, mostrando que los grafos que casi alcanzan el número máximo de aristas deben parecerse estructuralmente al grafo de Turán adecuado, en el sentido de que basta modificar pocas aristas para obtener una configuración extremal [6]. La formulación conjunta de estos resultados, conocida como el *teorema de Erdős-Stone-Simonovits*, establece que, dado un grafo F y su número cromático $\chi(F) = r$, entonces el número de Turán de F está dado por

$$\text{ex}(n, F) = \left(1 - \frac{1}{r-1} + o(1)\right) \binom{n}{2}$$

donde $o(1)$ denota una cantidad que tiende a 0 cuando n tiende a infinito. El paso de grafos a hipergrafos k -uniformes con $k \geq 3$ hace que la teoría de Turán se vuelva mucho más esquivada, debido a que la estructura de hiperaristas genera nuevas dificultades. Por ejemplo, determinar la densidad de Turán de $K_4^{(3)}$, el tetraedro 3-uniforme, sigue sin resolverse desde su formulación en 1941. En este contexto, existen más valores para la densidad por cogrado $\gamma(F)$ que para la densidad de Turán $\pi(F)$.

En el desarrollo reciente de los problemas de Turán para hipergrafos se encuentran los trabajos de Dhruv Mubayi y Yi Zhao, esto pues introducen formalmente el uso del cogrado mínimo $\delta_{k-1}(H)$ como parámetro extremal y

definen el correspondiente número de Turán por cogrado y su densidad asociada [17]. Para todo hipergrafo F k -uniforme el número de Turán por cogrado se define por $\text{ex}_{k-1}(n, F) = \text{máx}\{d : \exists H \text{ } F\text{-libre}, |V(H)| = n, \delta_{k-1}(H) \geq d\}$. Además, el límite que define la densidad de Turán por cogrado, y que existe para todo F , es

$$\gamma(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{ex}_{k-1}(n, F)}{n}.$$

Como mencionamos antes, en el contexto de hipergrafos se han obtenido más resultados en conocer la densidad de Turán por cogrado que de densidades de Turán. En particular tenemos a Mubayi, quien mostró que para el plano de Fano \mathbb{F} , un 3-grafo de 7 vértices y 7 aristas tales que cada par de vértices comparte exactamente una arista, se tiene $\gamma(\mathbb{F}) = \frac{1}{2}$ [15]. Por su parte, Falgas-Ravry, Pikhurko, Vaughan y Volec demostraron, mediante técnicas asistidas por computador, que $\gamma(K_4^-) = \frac{1}{4}$, donde K_4^- denota el hipergrafo completo 4-uniforme en cuatro vértices menos una arista [7]. Por otro lado, la conjetura de Czygrinow y Nagle afirma que $\gamma(K_4) = \frac{1}{2}$ [2], aunque este valor aún no ha sido probado. Además, la densidad de Turán es calculable para cualquier grafo clásico, pues el teorema de Erdős-Stone-Simonovits lo expresa en función del número cromático. Mientras que para hipergrafos de mayor uniformidad se conocen pocos valores, un valor destacado es el del plano de Fano \mathbb{F} , donde Caen y Füredi demostraron que $\pi(\mathbb{F}) = \frac{3}{4}$ [3]. En tanto, respecto a las conjeturas más conocidas se encuentran $\pi(K_4^{(3)}) = \frac{5}{9}$ y $\pi(K_5^{(3)}) = \frac{3}{4}$, ambas aún abiertas (véase el estudio realizado por Keevash [10]).

Finalmente, un hipergrafo de interés en el presente trabajo son los ciclos ajustados $C_s^{(k)}$. En uniformidad $k = 3$, estos hipergrafos han sido objeto de un estudio intenso tanto desde el punto de vista de la densidad clásica de Turán como de la densidad por cogrado. Piga, Sanhueza y Schacht [19] demostraron que $\gamma(C_s^{(3)}) = \frac{1}{3}$ para $s \in \{10, 13, 16\}$ y para todo $s \geq 19$ no divisible por 3. Posteriormente, Ma [12] determinó el caso $s = 11$. De lo anterior, se deduce que $\gamma(C_s^{(3)}) = \frac{1}{3}$ para todo $s \geq 10$ no divisible por 3. Notemos que cuando s es múltiplo de k , el ciclo $C_s^{(k)}$ es k -partito, de modo que $\gamma(C_s^{(k)}) = \pi(C_s^{(k)}) = 0$. Así solo permanecen abiertos los casos pequeños en que $s \in \{4, 5, 7, 8\}$. En tanto, Piga, Sales y Schülke [18] introdujeron el *ciclo ajustado menos una arista* $C_s^{(k)-}$ y demostraron que su densidad de Turán por cogrado se anula para todo $s \geq 5$, es decir, $\gamma(C_s^{(3)-}) = 0$ para todo $s \geq 5$.

Capítulo 4

Densidad de Turán por cogrado de ciclos ajustados

Para lo que sigue, resulta importante la construcción $H_{n,p}^{(k)}$ definida por Han, Lo y Sanhueza-Matamala [8] la que nos entrega hipergrafos y que bajo ciertas hipótesis de divisibilidad nos entrega cotas inferiores para $\gamma(C_s^{(k)})$. En este capítulo retomaremos este método, pero lo empujaremos un paso más al analizar como la estructura cíclica del propio ciclo ajustado impone patrones periódicos. Esto permite detectar, en ciertos casos, que el ciclo no puede aparecer y por tanto mejorar la cota obtenida hasta entonces. Comenzaremos con el caso en que s es divisible por k , para luego seguir con las mejoras y formular un criterio general basado en la identidad de Bézout y el máximo común divisor.

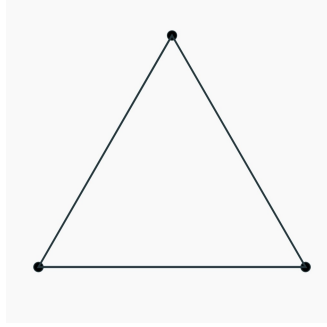
4.1. Preliminares : Blow-up y supersaturación

En lo que sigue, recordamos que denotaremos $\mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$ al conjunto $\{0, \dots, s-1\}$ con aritmética módulo s .

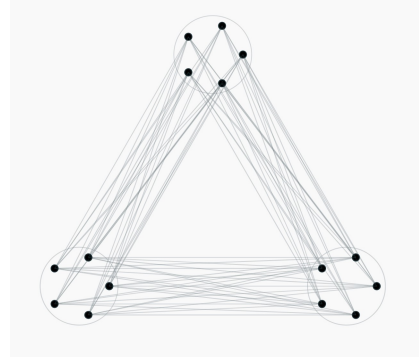
A continuación, veremos el concepto de ℓ -blow-up. De manera intuitiva, el ℓ -blow-up de un k -grafo es una versión ampliada en la que cada vértice se reemplaza por un conjunto de ℓ vértices, mientras que cada hiperarista se expande a todos los k -conjuntos que forman exactamente una copia de cada uno de sus vértices. Siendo más precisos, si consideramos un hipergrafo en n vértices, reemplazamos cada vértice v_i , con $i \in \{1, \dots, n\}$, por un conjunto de ℓ vértices $V_i = \{v_i^1, \dots, v_i^\ell\}$

para cada i . Por su parte, sustituimos cada hiperarista $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$ por todas las posibles combinaciones, obteniendo $\{v_{i_1}^{a_1}, \dots, v_{i_k}^{a_k}\}$ con $a_1, \dots, a_k \in \{1, \dots, \ell\}$.

Para visualizar lo dicho, se presenta un ejemplo sencillo de un 5-blow-up.



(a) Grafo completo K_3 .



(b) 5-Blow-up de K_3 .

Figura 4.1.1: A la izquierda el grafo K_3 . A la derecha, cada vértice se reemplaza por $\ell = 5$ copias y cada arista se expande a todas las posibles combinaciones entre los conjuntos correspondientes, obteniéndose su ℓ -blow-up.

A continuación formalizamos esta construcción mediante la siguiente definición.

Definición 4.1 (Blow-up). Sea F un k -grafo con conjunto de vértices $V(F) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Dado un entero $\ell \geq 1$ definimos el ℓ -blow-up de F , denotado por $F(\ell)$, como el k -grafo con la partición de vértices $V(F(\ell)) = V_1 \cup \dots \cup V_n$, donde $V_i = \{v_i^1, \dots, v_i^\ell\}$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. El conjunto de hiperaristas está dado por $E(F(\ell)) = \{\{v_{i_1}^{a_1}, \dots, v_{i_k}^{a_k}\} : \{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\} \in E(F), \text{ y } 1 \leq a_1, \dots, a_k \leq \ell\}$.

Notemos que los resultados extremales clásicos se limitan a asegurar que por debajo de cierta densidad crítica de conexiones podemos evitar un subhipergrafo F , mientras que por encima de ella F debe aparecer. La supersaturación nos dice que si la densidad de Turán supera el valor extremal por una pequeña cantidad, entonces el hipergrafo no solo contiene a F sino que debe contener un número proporcionalmente grande de copias de F .

Proposición 4.2 (Supersaturación [17]). Sea F un k -grafo en n vértices. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existen constantes $\eta = \eta(\varepsilon, F) > 0$ y $N = N(\varepsilon, F)$ tales que si G es un k -grafo en $m > N$ vértices con $\delta_{k-1}(G) \geq (\gamma(F) + \varepsilon)m$ entonces G contiene al menos $\eta \binom{m}{n}$ copias de F .

Notemos que la constante $\eta = \eta(\varepsilon, F)$ podemos denominarla una *constante*

de supersaturación, que para un margen fijo ε por encima del umbral $\gamma(F)$, nos garantiza que el número de copias de F en G es al menos una fracción η de todos los subconjuntos de vértices de tamaño n .

En lo que sigue, aprovecharemos la supersaturación para asociar F con sus blow-ups, pues como vimos anteriormente por encima del umbral $\gamma(F)$ aparecen muchas copias de F , y dentro de esta abundancia podemos tener una copia de $F(\ell)$. Como consecuencia, $\gamma(F)$ no cambia al pasar a $F(\ell)$.

Como consecuencia de la Proposición (4.2), se tienen los siguientes corolarios

Corolario 4.3 ([17]). *Sea F un k -grafo y ℓ un entero positivo. Entonces $\gamma(F(\ell)) = \gamma(F)$.*

Para la densidad de Turán clásica, también existe una invarianza análoga bajo blow-up.

Corolario 4.4 ([10]). *Sea F un k -grafo y un entero ℓ positivo. Entonces $\pi(F(\ell)) = \pi(F)$.*

Un resultado importante de Erdős [4], nos dice que si un k -grafo F es k -partito entonces su densidad de Turán es cero, es decir, $\pi(F) = 0$. Con lo anterior mencionado, podemos formular un caso base. Este parte del hecho que cuando s es divisible por k , el ciclo ajustado $C_s^{(k)}$ resulta k -partito y por el resultado de Erdős su densidad de Turán es cero.

Proposición 4.5. *Sean k y s enteros positivos tales que $2 \leq k < s$. Si k divide a s entonces $\gamma(C_s^{(k)}) = 0$*

Demostración. Sea $C_s^{(k)}$ un ciclo ajustado, donde sus aristas son el conjunto $E(C_s^{(k)}) = \{\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+k-1}\} \text{ con } i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}\}$. Por su parte, sea la partición $V(C_s^{(k)}) = V_0 \cup \dots \cup V_{k-1}$ dada por $V_j = \{v_i \in V(C_s^{(k)}) : i \equiv j \pmod{k}\}$ para cada $j \in \{0, \dots, k-1\}$. Además como k divide a s , cada parte V_j tiene exactamente s/k vértices.

Consideremos $e_i = \{v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+k-1}\} \in E(C_s^{(k)})$ una arista arbitraria del ciclo ajustado. Notemos que dada la partición, los índices $i, \dots, i+k-1$ recorren todos los residuos módulo k exactamente una vez, por tanto e_i contiene exactamente un vértice en cada V_j . Por lo tanto, $C_s^{(k)}$ es k -partito y por el resultado de Erdős se tiene $\pi(C_s^{(k)}) = 0$. Finalmente, por el Lema 2.1 obtenemos

$\gamma(C_s^{(k)}) \leq \pi(C_s^{(k)}) = 0$, con lo cual concluimos que $\gamma(C_s^{(k)}) = 0$. \square

4.2. La construcción $H_{n,p}^{(k)}$

Para establecer cotas inferiores sobre la densidad de Turán de un hipergrafo, es necesario construir familias de k -grafos que eviten la subestructura prohibida en cuestión y que conserven una cantidad significativa de aristas. Con este objetivo en mente, enunciaremos la construcción algebraica de k -grafos introducida por Han, Lo y Sanhueza-Matamala [8] tal como será empleada en nuestro desarrollo.

Definición 4.6. Dados los enteros $k \geq 2$, $n > 0$ y $p > 1$ divisor de k . Definimos $H_{n,p}^{(k)}$ como el k -grafo en n vértices donde su conjunto de vértices tiene una partición $\{V_1, \dots, V_p\}$ en partes lo más equilibradas posible. Además, para cada $v \in V$ definimos su *etiqueta* $l(v) \in \{1, \dots, p\}$ como $l(v) = i$ si y solo si $v \in V_i$.

Por su parte, el conjunto de aristas está dado por

$$E = \left\{ e \in V^{(k)} : \sum_{v \in e} l(v) \equiv 1 \pmod{p} \right\}.$$

Observemos que una característica útil de la construcción $H_{n,p}^{(k)}$ viene del hecho que, aún imponiendo una restricción modular para definir sus aristas, sigue conteniendo una cantidad considerable de ellas. Además, dado que se tienen n vértices distribuidos equitativamente en p partes y la condición modular en la suma de sus etiquetas, podemos deducir que cuando n es grande aproximadamente una proporción $1/p$ de los subconjuntos de vértices de tamaño k resulta ser arista.

Proposición 4.7. Sean F un k -grafo con $k \geq 2$ y $p > 1$. Si para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $H_{n,p}^{(k)}$ no contiene a F , entonces $\gamma(F) \geq \frac{1}{p}$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo pero arbitrario y consideremos la partición $V(H_{n,p}^{(k)}) = \{V_1, \dots, V_p\}$ lo más equilibrada posible. Como $H_{n,p}^{(k)}$ no contiene a F , entonces por definición del número de Turán por cogrado se obtiene que

$$\text{ex}_{k-1}(n, F) \geq \delta_{k-1}(H_{n,p}^{(k)}). \quad (4.2.1)$$

Consideremos un subconjunto $S \subseteq V(H_{n,p}^{(k)})$ arbitrario de tamaño $k-1$ y

definamos $\sigma(S) := \sum_{v \in S} l(v)$ donde $\sigma(S) \in \mathbb{Z}$, sin embargo dado que la condición de arista es modular nos interesa $\sigma(S)$ módulo p . Además, notemos que un vértice $x \in V(H_{n,p}^{(k)} \setminus S)$ completa a S formando una arista si y solo si $\sigma(S) + l(x) \equiv 1 \pmod{p}$.

Por lo tanto, el valor de $l(x)$ queda determinado de manera única módulo p , es decir, existe un único índice $j \in \{1, \dots, p\}$ tal que $j \equiv 1 - \sigma(S) \pmod{p}$. En consecuencia, todo vértice $x \in V_j \setminus S$ satisface $\sigma(S) + l(x) \equiv 1 \pmod{p}$. Cabe apreciar que si $1 - \sigma(S) \equiv 0 \pmod{p}$ entonces el índice correspondiente es $j = p$. Por lo anterior, obtenemos $d_{H_{n,p}^{(k)}}(S) = |V_j \setminus S|$. Más aún, dado que $|S| = k - 1$, entonces a lo más $k - 1$ vértices de S pueden pertenecer a V_j , con lo cual deducimos que $|V_j \setminus S| \geq |V_j| - (k - 1)$.

Además, dada la partición, tenemos que $|V_j| \geq \lfloor n/p \rfloor$ para todo $j \in \{1, \dots, p\}$. Por ende, $d_{H_{n,p}^{(k)}}(S) \geq \lfloor n/p \rfloor - (k - 1)$.

Luego por la arbitrariedad de S , concluimos que

$$\delta_{k-1}(H_{n,p}^{(k)}) \geq \lfloor n/p \rfloor - (k - 1), \quad (4.2.2)$$

que por (4.2.1) y (4.2.2) se deduce

$$\text{ex}_{k-1}(n, F) \geq \lfloor n/p \rfloor - (k - 1). \quad (4.2.3)$$

Adicionalmente, dividiendo la desigualdad (4.2.3) por n y tomando el límite cuando n tiende a infinito obtenemos

$$\begin{aligned} \gamma(F) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{ex}_{k-1}(n, F)}{n} \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\lfloor n/p \rfloor}{n} - \frac{k-1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Con lo cual demostramos que $\gamma(F) \geq 1/p$. □

4.2.1. Aplicación de la construcción

A continuación utilizaremos la construcción de $H_{n,p}^{(k)}$ para demostrar que, bajo condiciones aritméticas adecuadas sobre p , k y s , el hipergrafo no contiene a $C_s^{(k)}$ como subhipergrafo. La idea es que la estructura de etiquetas módulo p en $H_{n,p}^{(k)}$ impone restricciones de divisibilidad sobre cualquier ciclo contenido en él, precisamente si p divide a k pero no divide a s , estas restricciones resultan ser incompatibles. En consecuencia, obtenemos una cota inferior para la densidad de Turán por cogrado del ciclo.

Proposición 4.8. *Supongamos que p, k, s son enteros tales que $1 < p \leq k < s$ donde $p \mid k$, $k \nmid s$ y $p \nmid s$. Consideremos el k -grafo $H_{n,p}^{(k)}$ y el ciclo ajustado $C_s^{(k)}$. Entonces $C_s^{(k)} \not\subseteq H_{n,p}^{(k)}$.*

Demostración. Supongamos por contradicción que $C_s^{(k)} \subseteq H_{n,p}^{(k)}$. Se define la suma de todas las etiquetas de todas las aristas contenidas en $C_s^{(k)}$ como

$$T := \sum_{e \in E(C_s^{(k)})} \sum_{v \in e} l(v). \quad (4.2.4)$$

Puesto que $C_s^{(k)} \subseteq H_{n,p}^{(k)}$, cada arista $e \in E(C_s^{(k)})$ satisface $\sum_{v \in e} l(v) \equiv 1 \pmod{p}$. Aplicando esta condición a cada una de las s aristas del ciclo, se obtiene

$$T \equiv \underbrace{\sum_{e \in E(C_s^{(k)})} \underbrace{\sum_{v \in e} l(v)}_{\equiv 1 \pmod{p}}}_{\equiv s \pmod{p}} \pmod{p}.$$

De lo anterior se deduce que

$$T \equiv s \pmod{p} \quad (4.2.5)$$

Por otro lado, en el ciclo ajustado cada vértice c_j con $0 \leq j \leq s-1$ pertenece exactamente a k aristas. Retomando la ecuación (4.2.4) y reordenando la suma se

obtiene

$$\begin{aligned} T &= \sum_{j=0}^{s-1} kl(c_j) \\ &= k \sum_{j=0}^{s-1} l(c_j) \end{aligned}$$

de lo cual se deduce que T es múltiplo de k . Definimos el entero $m := \sum_{j=0}^{s-1} l(c_j)$ y reescribimos $T = km$. Ahora, como $p \mid k$ entonces existe un entero t tal que $k = pt$, de donde se obtiene

$$\begin{aligned} T &= m(pt) \\ &= p(mt), \end{aligned}$$

es decir, deducimos que

$$T \equiv 0 \pmod{p}. \quad (4.2.6)$$

En consecuencia, de (4.2.5) y (4.2.6), obtenemos que $s \equiv 0 \pmod{p}$, con lo cual $p \mid s$. Pero esto contradice la hipótesis $p \nmid s$, por lo tanto $H_{n,p}^{(k)}$ no contiene el ciclo ajustado $C_s^{(k)}$. \square

La proposición anterior tiene una consecuencia inmediata sobre la densidad de Turán por cogrado de los ciclos ajustados, la que se obtiene al combinarla con la Proposición 4.7.

Corolario 4.9. *Sean p, k, s son enteros tales que $1 < p \leq k < s$ con $p \mid k$, $k \nmid s$ y $p \nmid s$. Entonces $\gamma(C_s^{(k)}) \geq \frac{1}{p}$*

Demostración. Para todo $n \in \mathbb{N}$, la Proposición 4.8 garantiza que $H_{n,p}^{(k)}$ no contiene al ciclo ajustado $C_s^{(k)}$. De manera que, por la Proposición 4.7, se deduce que $\gamma(C_s^{(k)}) \geq \frac{1}{p}$. \square

4.3. Clasificación modular de cotas para $\gamma(C_s^{(k)})$

En esta sección organizaremos las cotas inferiores para la densidad de Turán por cogrado de ciclos ajustados, obtenidas a partir de la construcción $H_{n,p}^{(k)}$. Las restricciones de divisibilidad para esta construcción exigen que p sea divisor de k pero no de s , condición que podemos reescribir en términos del residuo de s módulo p . Esto nos entregará una base para estudiar que valores de cota son mejorables.

4.3.1. Cotas inferiores por la construcción $H_{n,p}^{(k)}$

En la Proposición 4.8 se requiere que p divida a k y no a s , esta condición se puede reescribir por el residuo de s módulo p . Escribimos $s = km + r$ con $r \in \{0, \dots, k-1\}$ y $m \in \mathbb{N}$. Como p divide a k entonces nos queda $s \equiv r \pmod{p}$. Así, que p no divida a s equivale a que p no divida a r .

Dado que para k es posible que exista más de un divisor $p > 1$, para cada par k y r , definimos p como el menor entero mayor que uno, tal que p divida a k y no a r . Notemos que, si k es primo, su único divisor $p > 1$ es $p = k$.

Por último, es conveniente observar que, por esta vía, las cotas son de la forma $1/p$, las que no exceden a $1/2$. En efecto, por la construcción dada, p es un divisor de k estrictamente mayor que uno, así $p \geq 2$ y por lo tanto $1/p \leq 1/2$. En la siguiente tabla, se presentan los valores para $2 \leq k \leq 10$.

$k \backslash r$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	1/2								
3	0	1/3	1/3							
4	0	1/2	1/4	1/2						
5	0	1/5	1/5	1/5	1/5					
6	0	1/2	1/3	1/2	1/3	1/2				
7	0	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7			
8	0	1/2	1/4	1/2	1/8	1/2	1/4	1/2		
9	0	1/3	1/3	1/9	1/3	1/3	1/9	1/3	1/3	
10	0	1/2	1/5	1/2	1/5	1/2	1/5	1/2	1/5	1/2

Cuadro 4.3.1: Cotas inferiores obtenidas de la construcción $H_{n,p}^{(k)}$ para $2 \leq k \leq 10$, organizadas por el residuo r en $s = km + r$. En cada casilla se muestra la cota $1/p$, donde p es el menor entero $p > 1$ tal que $p \mid k$ y $p \nmid r$. Las casillas destacadas corresponden a valores que son mejorables, en el sentido de aumentar la cota. Estas corresponden a aquellos valores menores a $1/2$ y donde el método no puede tomar como p el menor divisor primo de k . Esto ultimo, será formalizada más adelante mediante el criterio de solvencia módulo p .

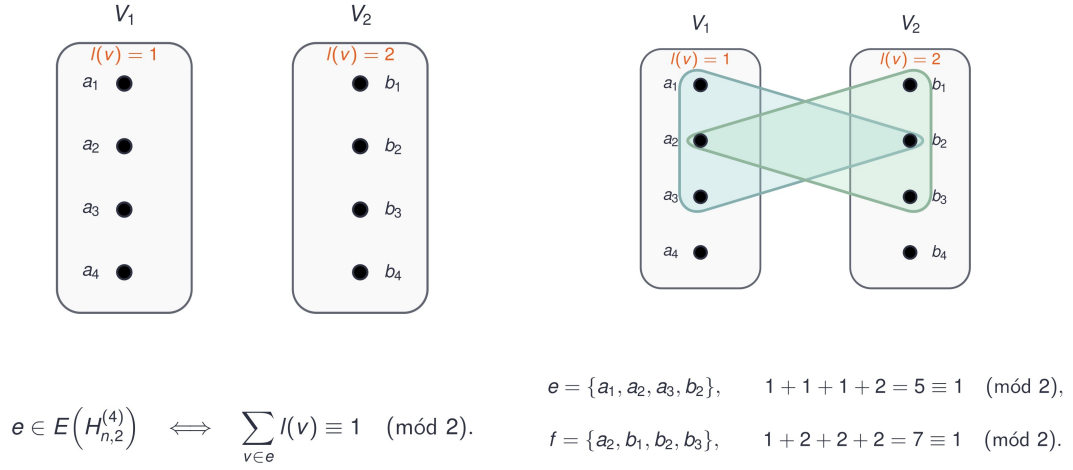
Notemos que para la columna $r = 0$ se obtiene $k \mid s$, por lo que $\gamma(C_s^k) = 0$ por la Proposición 4.5. Para ilustrar el cálculo, consideremos $k = 8$, cuyos divisores $p > 1$ son 2, 4 y 8. Si $r = 1$, tomamos $p = 2$ y como $2 \nmid 1$. Luego el menor divisor válido, es decir, aquel p que también divide a $k = 8$ es $p = 2$, con lo cual $\gamma(C_s^{(8)}) \geq 1/2$. Ahora si $r = 2$, se tiene $2 \mid 2$, por lo que $p = 2$ no es válido. Luego el siguiente divisor es $p = 4$, con $4 \nmid 2$ y obtenemos $\gamma(C_s^{(8)}) \geq 1/4$. Los demás valores de la fila se obtienen tomando siempre el menor divisor $p > 1$ de k que no divida a r .

4.3.2. Mejoramiento de las cotas

La construcción $H_{n,p}^{(k)}$ entrega una cota que depende de elegir el menor p con $p \mid k$ y $p \nmid s$. Sin embargo, esta elección solo utiliza condiciones de divisibilidad y no explota en detalle la estructura cíclica del ciclo ajustado. El objetivo de esta subsección es justamente aprovechar esa estructura. La idea central consiste en suponer una copia del ciclo dentro de $H_{n,p}^{(k)}$ y mostrar que el etiquetado de sus vértices fuerza congruencias que, en algunos casos, determinan patrones periódicos incompatibles con la condición de arista de la Definición 4.6, lo que descarta la presencia del ciclo y eleva la cota. Comenzamos con $k = 4$ en detalle y luego

adaptamos el argumento a los casos en $k = 8$ y $k = 9$. En contraste, mostraremos que para $k = 6$, y análogamente en $k = 10$, aplicar este argumento no conduce a una contradicción, con lo que la cota no aumenta con respecto a la obtenida en el Cuadro 4.3.1.

Antes de comenzar con el primer caso, conviene visualizar la construcción $H_{n,2}^{(4)}$. La siguiente figura muestra la partición del conjunto de vértices en V_1 y V_2 , junto con la condición modular para cuando una 4-tupla es una arista. Además de presentar las 4-tuplas que satisfacen dicha condición.



Partición y condición modular.

Dos aristas validas.

Figura 4.3.1: A la izquierda, se representa el conjunto de vértices particionado en V_1 y V_2 , con las etiquetas $l(v) = 1$ y $l(v) = 2$, respectivamente. Además se explicita la condición de arista dada en la Definición 4.6. A la derecha, se destaca las 4-tuplas $e = \{a_1, a_2, a_3, b_2\}$ y $f = \{a_2, b_1, b_2, b_3\}$ la cual satisface la condición modular. Por lo tanto, ambas son aristas de $H_{n,2}^{(4)}$.

Esta visualización, será la base del argumento desarrollado a continuación.

Proposición 4.10. Sea $n \in \mathbb{N}$ y un entero s tal que $s > 4$ y $s \equiv 2 \pmod{4}$. Consideremos el 4-hipergrafo $H_{n,2}^{(4)}$ y el ciclo ajustado $C_s^{(4)}$. Entonces $C_s^{(4)} \not\subseteq H_{n,2}^{(4)}$.

Demostración. Supongamos por contradicción que $C_s^{(4)} \subseteq H_{n,2}^{(4)}$ y denotemos sus vértices por c_0, \dots, c_{s-1} en orden cíclico, donde los índices los consideramos módulo s . En $H_{n,2}^{(4)}$ el conjunto de vértices se particiona en V_1 y V_2 . Además, notemos que una 4-tupla es arista en $H_{n,2}^{(4)}$ si y solo si contiene un número impar de vértices en V_1 .

Definimos

$$x_i = \begin{cases} 1, & c_i \in V_1, \\ 0, & c_i \in V_2, \end{cases} \quad \text{con } i = 0, \dots, s-1.$$

Cada arista del ciclo es $e_i = \{c_i, c_{i+1}, c_{i+2}, c_{i+3}\}$ con $i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$ y la condición de pertenencia a $H_{n,2}^{(4)}$ se reescribe como

$$x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3} \equiv 1 \pmod{2}, \quad \text{para todo } i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}. \quad (4.3.1)$$

Restando (4.3.1) para los índices i e $i+1$ se obtiene $x_i - x_{i+4} \equiv 0 \pmod{2}$ y como $x_i \in \{0, 1\}$, se deduce que $x_i = x_{i+4}$ para todo $i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$. Observemos que, iterando esta igualdad, se tiene $x_{i+4t} = x_i$ para todo $t \in \mathbb{N}$. Como $s \equiv 2 \pmod{4}$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $s = 4m + 2$. Aplicando la periodicidad con $j = i + 2$ e iterando m veces se obtiene $x_{i+2} = x_{i+2+4m} = x_{i+s}$, que usando la periodicidad $x_{i+s} = x_i$ obtenemos

$$x_{i+2} = x_i, \quad \text{para todo } i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}. \quad (4.3.2)$$

De (4.3.2) se deduce que todos los índices impares comparten el mismo valor y todos los pares comparten otro. Así, existen $a, b \in \{0, 1\}$ tales que

$$x_i = \begin{cases} a, & \text{si } i \text{ es impar,} \\ b, & \text{si } i \text{ es par,} \end{cases} \quad \text{con } i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}.$$

Tomando i impar en (4.3.1), los índices $i, i+1, i+2, i+3$ tiene paridades impar, par, impar y par respectivamente. Por lo tanto

$$\begin{aligned} x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3} &= a + b + a + b \\ &= 2(a + b) \equiv 0 \pmod{2}, \end{aligned}$$

lo que contradice (4.3.1). Por lo tanto $C_s^{(4)} \notin H_{n,2}^{(4)}$. \square

El punto clave de la proposición anterior es que la restricción aritmética $s \equiv 2 \pmod{4}$ implica la ausencia de ciclos ajustados en $H_{n,2}^{(4)}$. Esto en conjunto con la Proposición 4.7 entregan la siguiente cota inferior para $\gamma(C_s^{(4)})$.

Corolario 4.11. *Sea $s > 4$ tal que $s \equiv 2 \pmod{4}$. Entonces $\gamma(C_s^{(4)}) \geq \frac{1}{2}$.*

Demostración. Por la Proposición 4.10, para todo $n \in \mathbb{N}$ el hipergrafo $H_{n,2}^{(4)}$ no contiene a $C_s^{(4)}$. Aplicando la Proposición 4.7 con $p = 2$ se obtiene $\gamma(C_s^{(4)}) \geq \frac{1}{2}$. \square

En lo que sigue, cabe preguntarse si un argumento análogo al presentado permite mejorar la cota para otros valores de k . El siguiente análisis muestra que, en el caso $k = 6$, el intento con $p = 2$ no produce la contradicción y por consiguiente no la mejora. En efecto, al repetir el razonamiento se obtiene nuevamente $x_{i+2} = x_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$, de modo que existen $a, b \in \{0, 1\}$ con $x_i = a$ para i impar y $x_i = b$ para i par. Tomando i impar, la suma sobre una arista contiene 3 índices impares y 3 pares, y por tanto

$$\begin{aligned} x_i + \cdots + x_{i+5} &= 3a + 3b \\ &= 3(a + b) \equiv a + b \pmod{2}. \end{aligned}$$

Luego como $a + b \equiv 1 \pmod{2}$ no genera contradicción, no se deduce una mejora de la cota por esta vía. En cambio al trabajar con $p = 3$ la suma $3(a+b) \equiv 0 \pmod{3}$ si contradice la condición de arista. Esto ultimo se formaliza en la siguiente proposición.

Proposición 4.12. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $s > 6$ un entero tal que $s \equiv 2$ ó $4 \pmod{6}$. Entonces $C_s^{(6)} \not\subseteq H_{n,3}^{(6)}$.*

Demostración. El argumento sigue el mismo esquema que en la Proposición 4.10. Supongamos por contradicción que $C_s^{(6)} \subseteq H_{n,3}^{(6)}$ y denotemos sus vértices por c_0, \dots, c_{s-1} en orden cíclico. Particionamos el conjunto de vértices $V(H_{n,3}^{(6)}) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ y definimos $x_i = j$ si $c_i \in V_j$ para $j \in \{1, 2, 3\}$ y $i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$. Cada arista del ciclo es de la forma $e_i = \{c_i, \dots, c_{i+5}\}$ con $i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$ y mediante la condición de que $e_i \in H_{n,3}^{(6)}$ se obtiene

$$x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3} + x_{i+4} + x_{i+5} \equiv 1 \pmod{3}, \quad \text{para todo } i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}. \quad (4.3.3)$$

Restando (4.3.3) para los índices i e $i+1$ se obtiene $x_{i+6} - x_i \equiv 0 \pmod{3}$. Como los residuos de $\{1, 2, 3\}$ módulo 3 son todos distintos, entonces esta congruencia

implica que $x_{i+6} = x_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$. Ahora, iterando esta igualdad, se obtiene $x_{i+6t} = x_i$ para todo $t \in \mathbb{N}$. Pasamos ahora a ver casos, distinguiendo según s (mód 6).

Para el primer caso vemos cuando $s \equiv 2$ (mód 6), donde existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $s = 6m + 2$. Aplicando la periodicidad con $j = i + 2$ e iterando m veces, y también usando $x_{i+s} = x_i$, se obtiene $x_{i+2} = x_{i+2+6m} = x_{i+s} = x_i$.

Para el segundo caso vemos cuando $s \equiv 4$ (mód 6), donde existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $s = 6m + 4$. Aplicando la periodicidad con $j = i + 4$ e iterando m veces, y también usando $x_{i+s} = x_i$, se obtiene $x_{i+4} = x_{i+4+6m} = x_{i+s} = x_i$. Con ello, aplicamos $x_{j+4} = x_j$ con $j = i + 2$ produciendo $x_{i+2} = x_{i+6} = x_i$.

Como desarrollamos recientemente, en ambos casos se obtiene $x_{i+2} = x_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$. Podemos afirmar entonces que existen $a, b \in \{1, 2, 3\}$ tales que

$$x_i = \begin{cases} a, & \text{si } i \text{ es impar,} \\ b, & \text{si } i \text{ es par,} \end{cases} \quad \text{con } i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}.$$

Luego, tomando i impar sobre el lado izquierdo de (4.3.3) nos queda

$$\begin{aligned} x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3} + x_{i+4} + x_{i+5} &= 3a + 3b \\ &= 3(a + b) \equiv 0 \pmod{3}, \end{aligned}$$

lo que contradice lo anterior dicho en (4.3.3). Por tanto, concluimos que $C_s^{(6)} \not\subseteq H_{n,3}^{(6)}$. \square

De la proposición anterior se deduce de inmediato una cota inferior para $\gamma(C_s^{(6)})$.

Corolario 4.13. *Sea $s > 6$ con $s \equiv 2$ ó 4 (mód 6). Entonces $\gamma(C_s^{(6)}) \geq \frac{1}{3}$.*

Demostración. Por la Proposición 4.12, para todo $n \in \mathbb{N}$ el hipergrafo $H_{n,3}^{(6)}$ no contiene a $C_s^{(6)}$. Luego, aplicando la Proposición 4.7 con $p = 3$ se obtiene $\gamma(C_s^{(6)}) \geq \frac{1}{3}$. \square

El mismo esquema de los casos anteriores se aplica al caso $k = 8$. En el Cuadro 4.3.1 podemos observar que los residuos $r = 2, r = 4$ y $r = 6$, con cotas

$1/4, 1/8, 1/4$ respectivamente, son mejorables por lo que nuevamente deberemos tratar tres subcasos.

Proposición 4.14. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y s un entero tal que $s > 8$ y $s \equiv 2, 4$ ó 6 (mód 8). Entonces $C_s^{(8)} \not\subseteq H_{n,2}^{(8)}$*

Demostración. Supongamos por contradicción que $C_s^{(8)} \subseteq H_{n,2}^{(8)}$ y denotemos sus vértices por c_0, \dots, c_{s-1} en orden cíclico. Particionamos el conjunto de vértices $V(H_{n,2}^{(8)}) = V_1 \cup V_2$ y consideramos que una 8-tupla es arista si y solo si contiene un número impar de vértices en V_1 . Definimos

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{si } c_i \in V_1, \\ 1, & \text{si } c_i \in V_2, \end{cases} \quad \text{con } i = 0, \dots, s-1.$$

Cada arista del ciclo es dada por $e_i = \{c_i, \dots, c_{i+7}\}$ con $i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$ y la condición $e_i \in H_{n,2}^{(8)}$ es equivalente a

$$x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + \dots + x_{i+7} \equiv 1 \pmod{2}, \quad \text{para todo } i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}. \quad (4.3.4)$$

Restando (4.3.4) para i e $i+1$ se obtiene $x_{i+8} - x_i \equiv 0 \pmod{2}$ y como $x_i \in \{0, 1\}$ se deduce

$$x_i = x_{i+8}, \quad \text{para todo } i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}. \quad (4.3.5)$$

Continuamos distinguiendo los casos según s (mód 8).

Comenzamos el primer caso considerando $s \equiv 2$ (mód 8), donde existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $s = 8m + 2$. Aplicando (4.3.5) con $j = i + 2$ e iterando m veces, y también usando $x_{i+s} = x_i$, se obtiene $x_{i+2} = x_{i+2+8m} = x_{i+s} = x_i$.

Se sigue el segundo caso que corresponde a $s \equiv 6$ (mód 8), existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $s = 8m + 6$. Aplicando (4.3.5) con $j = i + 6$ e iterando m veces, se obtiene $x_{i+6} = x_{i+6+8m} = x_{i+s} = x_i$. Reemplazando i por $i + 2$ en la igualdad obtenemos $x_{i+8} = x_{i+2}$ y considerando (4.3.5) se consigue $x_{i+8} = x_i$, de donde $x_{i+2} = x_i$.

En los primeros dos casos, deducimos $x_{i+2} = x_i$ para todo i . Por lo tanto,

existen $a, b \in \{0, 1\}$ tales que

$$x_i = \begin{cases} a, & \text{si } i \text{ es impar,} \\ b, & \text{si } i \text{ es par} \end{cases} \quad \text{con } i = 0, \dots, s-1.$$

Tomando i impar en 4.3.5 obtenemos

$$x_i + \dots + x_{i+7} = 4(a+b) \equiv 0 \pmod{2},$$

lo que contradice (4.3.4).

Por ultimo, para el tercer caso vemos cuando $s \equiv 4 \pmod{8}$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $s = 8m + 4$. Aplicando (4.3.5) con $j = i + 4$ e iterando m veces, se obtiene $x_{i+4} = x_{i+4+8m} = x_{i+s} = x_i$. Por lo tanto existen $a, b, c, d \in \{0, 1\}$ tales que

$$x_i = \begin{cases} a, & \text{si } i \equiv 0 \pmod{4}, \\ b, & \text{si } i \equiv 1 \pmod{4}, \\ c, & \text{si } i \equiv 2 \pmod{4}, \\ d, & \text{si } i \equiv 3 \pmod{4}, \end{cases} \quad \text{con } i = 0, \dots, s-1.$$

Tomando i impar en 4.3.5 se obtiene

$$x_i + \dots + x_{i+7} = 2(a+b+c+d) \equiv 0 \pmod{2},$$

lo que contradice (4.3.4).

Por todo lo dicho anteriormente, en los tres casos se obtiene la contradicción y por ello concluimos que $C_s^{(8)} \not\subseteq H_{n,2}^{(8)}$. \square

Lo anterior implica un resultado directo en la siguiente cota inferior.

Corolario 4.15. *Sea $s > 8$ tal que $s \equiv 2, 4$ ó $6 \pmod{8}$. Entonces $\gamma(C_s^{(8)}) \geq \frac{1}{2}$*

Demostración. Por la Proposición 4.14 para todo $n \in \mathbb{N}$ el hipergrafo $H_{n,2}^{(8)}$ no contiene a $C_s^{(8)}$. Aplicando la Proposición 4.7 con $p = 2$ se obtiene $\gamma(C_s^{(8)}) \geq \frac{1}{2}$. \square

Para $k = 9$, el panorama es análogo pero consideramos $p = 3$. En este caso, los residuos $r = 3$ y $r = 6$ son divisibles por 3, de modo que siguiendo el argumento

planteando se genera la contradicción, lo que elevaría la cota a $1/3$.

Proposición 4.16. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y s un entero tal que $s > 9$ y $s \equiv 3$ ó 6 (mód 9). Entonces $C_s^{(9)} \not\subseteq H_{n,3}^{(9)}$.*

Demostración. Procederemos de manera análoga a la Proposición 4.12, con la partición $V(H_{n,3}^{(9)}) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ y $x_i = j$ si $c_i \in V_j$ para $j \in \{1, 2, 3\}$ y $i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$. La condición de arista se reescribe como

$$x_i + \cdots + x_{i+8} \equiv 1 \pmod{3}, \quad \text{para todo } i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}. \quad (4.3.6)$$

Restamos en (4.3.6) para i e $i + 1$ y se obtiene $x_{i+9} = x_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$. Ahora, distinguimos según el caso de s (mód 9).

Si $s \equiv 3$ (mód 9), entonces existe un $m \in \mathbb{N}$ con $s = 9m + 3$, de donde $x_{i+3} = x_{i+3+9m} = x_{i+s} = x_i$.

Por otro lado, si $s \equiv 6$ (mód 9), entonces existe un $m \in \mathbb{N}$ con $s = 9m + 6$, de donde $x_{i+6} = x_{i+s} = x_i$. Reemplazando i por $i + 3$ obtenemos $x_{i+9} = x_{i+3}$, que considerando $x_{i+9} = x_i$ obtenemos $x_{i+3} = x_i$.

Para ambos casos obtenemos la igualdad $x_{i+3} = x_i$, por tanto existen $a, b, c \in \{1, 2, 3\}$ con $x_i = a, b, c$ si $i \equiv 0, 1, 2$ (mód 3), respectivamente. Luego

$$x_i + \cdots + x_{i+8} = 3(a + b + c) \equiv 0 \pmod{3},$$

contradiendo la congruencia (4.3.6). Así, $C_s^{(9)} \not\subseteq H_{n,3}^{(9)}$. \square

Al considerar la proposición anterior con la Proposición 4.7, se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 4.17. *Sea $s > 9$ tal que $s \equiv 3$ ó 6 (mód 9). Entonces $\gamma(C_s^{(9)}) \geq \frac{1}{3}$.*

Demostración. Por la Proposición 4.16, para todo $n \in \mathbb{N}$ el hipergrafo $H_{n,3}^{(9)}$ no contiene $C_s^{(9)}$. Aplicando la Proposición 4.7 considerando $p = 3$ se obtiene $C_s^{(9)} \geq \frac{1}{3}$. \square

Finalmente, para $k = 10$, la siguiente proposición afirma que todos los valores $1/p$ calculados en el Cuadro 4.3.1 son alcanzables mediante la construcción $H_{n,5}^{(10)}$.

Proposición 4.18. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y s un entero tal que $s > 10$ y $s \equiv 2, 4, 6$ ó 8 (mód 10). Entonces $C_s^{(10)} \not\subseteq H_{n,5}^{(10)}$.*

Demostración. Siguiendo el mismo esquema presentado en las proposiciones anteriores, con la partición $V(H_{n,5}^{(10)}) = V_1 \cup \dots \cup V_5$. La condición de arista se puede cambiar a

$$x_i + \dots + x_{i+9} \equiv 1 \pmod{5}, \quad \text{para todo } i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}. \quad (4.3.7)$$

Restamos la ecuación (4.3.7) para i e $i + 1$ y se obtiene $x_{i+10} = x_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$. Para cada caso se deduce $x_{i+2} = x_i$, en efecto

- I) Si $s \equiv 2$ (mód 10) entonces $x_{i+2} = x_{i+2+10m} = x_{i+s} = x_i$.
- II) Si $s \equiv 4$ (mód 10) entonces $x_{i+4} = x_{i+s} = x_i$. Luego $x_{i+2} = x_{i+6} = x_{i+10} = x_i$.
- III) Si $s \equiv 6$ (mód 10) entonces $x_{i+6} = x_{i+s} = x_i$. Se sigue que $x_{i+4} = x_{i+10} = x_s$ y de ello $x_{i+2} = x_{i+6} = x_i$.
- IV) Si $s \equiv 8$ (mód 10) entonces $x_{i+8} = x_{i+s} = x_i$. Luego, reemplazando i por $i + 2$ obtenemos $x_{i+10} = x_{i+2}$ y que considerando $x_{i+10} = x_i$ concluyendo $x_{i+2} = x_i$.

Para todos los casos obtenemos la igualdad $x_{i+2} = x_i$, por tanto existen $a, b \in \{1, \dots, 5\}$ con $x_i = a$ para i impar y para i par $x_i = b$, con $i = 0, \dots, s - 1$. Luego

$$x_i + \dots + x_{i+9} = 5(a + b) \equiv 0 \pmod{5},$$

contradiendo la congruencia (4.3.7). Así, $C_s^{(10)} \not\subseteq H_{n,5}^{(10)}$. □

De la proposición anterior, se desprende un resultado inmediato para $\gamma(C_s^{(10)})$.

Corolario 4.19. *Sea $s > 10$ tal que $s \equiv 2, 4, 6$ ó 8 (mód 10). Entonces $\gamma(C_s^{(10)}) \geq \frac{1}{5}$.*

Demostración. Por la Proposición 4.18, para todo $n \in \mathbb{N}$ el hipergrafo $H_{n,5}^{(10)}$ no contiene $C_s^{(10)}$. Aplicando la Proposición 4.7 considerando $p = 5$ se obtiene $C_s^{(10)} \geq \frac{1}{5}$. □

Resumiendo lo anterior desarrollado, presentamos la siguiente tabla que toma las cotas inferiores para $\gamma(C_s^{(k)})$ obtenidas. En amarillo, correspondientes a los casos $k = 6$ y $k = 10$, indican que el método planteado no logra elevar la cota anteriormente obtenida en la tabla 4.3.1. En verde, corresponden a los valores que si se elevo la cota.

$k \backslash r$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	1/2								
3	0	1/3	1/3							
4	0	1/2	1/2	1/2						
5	0	1/5	1/5	1/5	1/5					
6	0	1/2	1/3	1/2	1/3	1/2				
7	0	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7			
8	0	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2		
9	0	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	
10	0	1/2	1/5	1/2	1/5	1/2	1/5	1/2	1/5	1/2

Cuadro 4.3.2: Valores de las cotas mejoradas, resaltadas en verde. En amarillo, las cotas que se mantuvieron con respecto al Cuadro 4.3.1.

Naturalmente, esta limitación motiva la búsqueda de algún criterio general que nos indique cuando la cota es mejorable. Esta interrogante se aborda en la siguiente sección.

4.4. Identidad de Bézout, periodicidad y criterio de mejora para $\gamma(C_s^{(k)})$

En las secciones anteriores obtuvimos cotas para la densidad de Turán por cogrado de ciclos ajustados analizando valores de k uno a uno. Ese enfoque, aunque efectivo, deja la sensación de que cada uniformidad exige un argumento independiente. El objetivo ahora es reorganizar esos cálculos desde un punto de vista más general, mediante una condición aritmética simple que explique cuándo los distintos casos de k se comportan igual y cuándo podría esperarse un fenómeno distinto. Para formalizar esta idea recurrimos a la identidad de Bézout, asociada a Étienne Bézout (siglo XVIII). Su contenido es sencillo pero potente, transforma un máximo común divisor en una combinación lineal entera.

La demostración de la identidad, se basan en dos hechos básicos sobre los enteros. El primero es que todo subconjunto no vacío de \mathbb{N} tiene un mínimo.

Lema 4.20 (Principio del buen orden). *Todo subconjunto no vacío de \mathbb{N} posee un elemento mínimo.*

Mientras el segundo refiere a que toda división entera produce un resto estrictamente menor que el divisor.

Lema 4.21 (Algoritmo de la división). *Para todo $a \in \mathbb{Z}$ y $d \in \mathbb{N}$, existen únicos $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que $a = dq + r$, donde $0 \leq r < d$.*

Además, dados los enteros a y b , se define el *máximo común divisor*, denotado por $\text{mcd}(a, b)$, como el único entero positivo d tal que divide a a , divide a b y para todo entero c que divide a a y b se tiene que divide a d .

Teorema 4.22 (Identidad de Bézout [9]). *Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos, entonces existen $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $\text{mcd}(a, b) = ax + by$.*

Demostración. Consideremos el conjunto de combinaciones lineales de a y b , dado por $S = \{as + bt \in \mathbb{N} : s, t \in \mathbb{Z}\}$. Este conjunto es no vacío, pues si tomamos $s = a$ y $t = 0$ obtendremos a^2 el que esta en S , análogamente ocurre si $t = b$ y $a = 0$, obtenemos $b^2 \in S$.

Como $S \subseteq \mathbb{N}$ y no es vacío, por el principio del buen orden existe un elemento mínimo $m = ax + by$, donde x e y son enteros que existen dada la definición de S . Notemos que el $\text{mcd}(a, b)$ divide a a y a b , y por lo tanto divide a cualquier combinación lineal entera entre a y b , por lo que $\text{mcd}(a, b)$ divide a m . Más aún, tenemos que $\text{mcd}(a, b) \leq ax + by$.

Por otro lado, sean $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que $a = mq + r$ con $0 \leq r < m$. De ello se deduce

$$\begin{aligned} r &= a - mq \\ &= a - (ax + by)q, \end{aligned}$$

que reemplazando en la doble desigualdad

$$\begin{aligned} 0 &\leq a - (ax + by)q < ax + by, \\ 0 &\leq a(1 - xq) + b(-yq) < ax + by. \end{aligned}$$

Donde si $r = a(1 - xq) + b(-yq) > 0$ entonces $r \in S$ y como $r < m$, contradice el hecho de que m es el mínimo de S , por lo tanto se deduce que $r = 0$. Por lo tanto, sustituyendo en $a = mq + r$ obtenemos $a = mq$, lo que dice que m divide a a .

De manera análoga, se puede desarrollar el argumento aplicando el algoritmo de la división a b , de lo cual se deduce que $b = m\bar{q}$ con $\bar{q} \in \mathbb{Z}$, por tanto m divide a b . Por lo anterior, se obtiene $\text{mcd}(a, b) \geq ax + by = m$.

Por doble desigualdad, queda demostrado que $\text{mcd}(a, b) = ax + by$. \square

La identidad de Bézout no solo caracteriza al máximo común divisor como combinación lineal, sino que permite expresar un desplazamiento pequeño como combinación entera de desplazamientos dados. En particular, si la sucesión es periódica con valor d_1 y d_2 , entonces debería ser periódica a partir de la combinación de d_1 y d_2 .

Es importante notar que en nuestro caso, el etiquetado usado anteriormente está definido naturalmente en $\mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$. Sin embargo, para utilizar Bézout y expresar combinaciones lineales enteras de desplazamientos, es conveniente trabajar en \mathbb{Z} . En efecto, basta fijar representantes x_1, \dots, x_s y repetirla con periodo s para obtener una sucesión $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Así, los desplazamientos por s y por k quedan definidos como desplazamientos usuales en \mathbb{Z} . El siguiente lema recoge formalmente todo lo mencionado.

Lema 4.23. *Sea $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ una sucesión y sean d_1, d_2 enteros no nulos. Si $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es periódica con periodo d_1 y también es periódica con periodo d_2 , entonces la sucesión también es periódica con periodo $\text{mcd}(d_1, d_2)$.*

Demostración. Sea $g = \text{mcd}(d_1, d_2)$. Por la identidad de Bézout existen $u, v \in \mathbb{Z}$ tales que $g = ud_1 + vd_2$. Observemos que si d es un periodo, entonces $-d$ también lo es. Más aún, si d es un periodo, entonces md es un periodo para todo $m \in \mathbb{Z}$, pues para $m > 0$ basta iterar m veces la igualdad $x_{i+d} = x_i$, y para $m < 0$ se usa el caso $-d$.

Por tanto ud_1 es un periodo, así como también lo es vd_2 , esto es que para todo $i \in \mathbb{Z}$ se cumple $x_{i+ud_1} = x_i$ y $x_{i+vd_2} = x_i$. Luego

$$x_{i+g} = x_{i+ud_1+vd_2} = x_i,$$

donde notamos que desplazar por ud_1 no cambia el valor, y que luego desplazar por vd_2 tampoco lo cambia. Así, $x_{i+g} = x_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, lo cual hace que g sea un periodo. \square

4.4.1. Condición de solución módulo p

Como vimos anteriormente, al considerar una copia c_0, \dots, c_{s-1} de $C_s^{(k)}$ dentro de $H_{n,p}^{(k)}$, definimos un etiquetado x_0, \dots, x_{s-1} asignando a cada vértice c_i un entero $x_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ según la parte de la partición a la que pertenece. Consideramos desde ahora la extensión periódica $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ mencionada anteriormente. Luego, dada la condición de que cada arista $e_i = \{c_i, c_{i+1}, \dots, c_{i+k-1}\}$ pertenezca a $H_{n,p}^{(k)}$ se traduce en la congruencia

$$x_i + x_{i+1} + \dots + x_{i+k-1} \equiv 1 \pmod{p} \quad \text{para todo } i \in \mathbb{Z}. \quad (4.4.1)$$

Al restar la congruencia (4.4.1) para i y para $i+1$, se cancelan los términos intermedios y se obtiene $x_{i+k} \equiv x_i \pmod{p}$, es decir, la sucesión es periódica con periodo k módulo p . Como además es cíclica de largo s , el lema de doble periodicidad (4.23) implica que también es periódica con periodo $\text{mcd}(s, k)$, esto es, $x_{i+\text{mcd}(s,k)} \equiv x_i \pmod{p}$. Notemos que el valor de x_i queda determinado únicamente por el residuo de i módulo $\text{mcd}(s, k)$.

En lo que sigue, por simplicidad denotaremos $g = \text{mcd}(s, k)$. Como $g = \text{mcd}(s, k)$ divide a k , podemos escribir $k = gt$ para algún $t \in \mathbb{N}$. Consideremos los k índices consecutivos $i, i+1, \dots, i+k-1$. Al tomarlos módulo g , cada uno de los residuos $0, 1, \dots, g-1$ aparecen exactamente $t = k/g$ veces, porque en cada bloque de g índices consecutivos aparece cada residuo una vez, y hay exactamente t bloques. Así, si denotamos por a_ρ el valor común de x_j cuando $j \equiv \rho \pmod{g}$, entonces la suma del lado izquierdo de (4.4.1) se reduce a

$$x_i + x_{i+1} + \dots + x_{i+k-1} \equiv \frac{k}{g}(a_0 + a_1 + \dots + a_{g-1}) \pmod{p}.$$

Definiendo $x := a_0 + a_1 + \cdots + a_{g-1}$, entonces de la congruencia (4.4.1) se deduce

$$\frac{kx}{\text{mcd}(s, k)} \equiv 1 \pmod{p}. \quad (4.4.2)$$

Notemos que (4.4.2) tiene solución si y solo si

$$\text{mcd}\left(\frac{k}{\text{mcd}(s, k)}, p\right) = 1.$$

Por el contrario, cuando

$$\text{mcd}\left(\frac{k}{\text{mcd}(s, k)}, p\right) \neq 1$$

se deduce que no hay solución de (4.4.2), por lo tanto aparece contradicción con la existencia de la copia de $C_s^{(k)}$ en $H_{n,p}^{(k)}$ y en consecuencia $C_s^{(k)} \not\subseteq H_{n,p}^{(k)}$.

En vista de lo anterior, estamos en condiciones de formular el siguiente resultado.

Teorema 4.24. *Sean $2 \leq k \leq s$ enteros tales que $k \nmid s$ y sea p el menor primo que divide $k/\text{mcd}(k, s)$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $C_s^{(k)} \not\subseteq H_{n,p}^{(k)}$. Más aún, $\gamma(C_s^{(k)}) \geq \frac{1}{p}$.*

Demostración. Razonando por contradicción, supongamos que $C_s^{(k)} \subseteq H_{n,p}^{(k)}$. Por el desarrollo de esta subsección, la existencia de dicha copia fuerza que la congruencia (4.4.2) tenga solución, y esto ocurre si y solo si

$$\text{mcd}\left(\frac{k}{\text{mcd}(s, k)}, p\right) = 1.$$

Sin embargo, por elección de p como el menor primo divisor de $\frac{k}{\text{mcd}(k, s)}$, se tiene $p \mid \frac{k}{\text{mcd}(k, s)}$, y por tanto

$$\text{mcd}\left(\frac{k}{\text{mcd}(s, k)}, p\right) = p \neq 1,$$

Lo cual genera la contradicción. Luego $C_s^{(k)} \not\subseteq H_{n,p}^{(k)}$.

Finalmente, como $H_{n,p}^{(k)}$ no contiene a $C_s^{(k)}$, por la Proposición 4.7 se concluye

$\gamma(C_s^{(k)}) \geq 1/p$. □

4.4.2. Ejemplo del teorema

El teorema anterior establece un criterio general. Para apreciar su utilidad proponemos los siguientes casos concretos. Comenzando con el caso $k = 6$ y $s \equiv r \pmod{6}$ con $r \in \{2, 4\}$, entonces $\text{mcd}(s, 6) = \text{mcd}(r, 6) = 2$ y tenemos que $k/\text{mcd}(s, k) = 6/2 = 3$. Así la condición (4.4.2) se escribe como $3x \equiv 1 \pmod{p}$.

Considerando $p = 2$ se obtiene $3x \equiv 1 \pmod{2}$, lo cual equivale a $x \equiv 1 \pmod{2}$ y por tanto si tiene solución. En consecuencia, con $p = 2$ este criterio no produce contradicción y no se deduce una cota de la densidad de Turán por cogrado mayor o igual a $1/2$ por este valor. En cambio, para $p = 3$ se obtiene $3x \equiv 1 \pmod{3}$, lo cual es imposible. Más aún,

$$\text{mcd}\left(\frac{6}{2}, 3\right) = \text{mcd}(3, 3) \neq 1,$$

por lo que se deduce que $C_s^{(6)} \not\subseteq H_{n,3}^{(6)}$, obteniéndose $\gamma(C_s^{(6)}) \geq 1/3$.

Por otro lado el caso $k = 10$ y $s \equiv r \pmod{10}$ con $r \in \{2, 4, 6, 8\}$, entonces $\text{mcd}(s, 10) = \text{mcd}(r, 10) = 2$ y $k/\text{mcd}(s, k) = 10/2 = 5$. Luego de la condición (4.4.2) se escribe como $5x \equiv 1 \pmod{p}$.

Para $p = 2$ se obtiene $5x \equiv 1 \pmod{2}$, lo cual equivale a $x \equiv 1 \pmod{2}$ y por tanto si tiene solución. En consecuencia, con $p = 2$ este criterio no produce contradicción y no se deduce una cota del tipo $1/2$ por esta vía. En cambio, para $p = 5$ se obtiene $5x \equiv 1 \pmod{5}$, lo cual no ocurre. En adición, se tiene

$$\text{mcd}\left(\frac{10}{2}, 5\right) = \text{mcd}(5, 5) \neq 1,$$

de lo cual se deduce que $C_s^{(10)} \not\subseteq H_{n,5}^{(10)}$, y por lo tanto $\gamma(C_s^{(10)}) \geq 1/5$.

Capítulo 5

Más allá de la construcción $H_{n,p}^{(k)}$

Como hemos desarrollado hasta este punto, el problema central es estimar el valor de la densidad de Turán por cogrado para un ciclo ajustado $C_s^{(k)}$ dado, lo que es básicamente qué fracción de los vértices puede garantizarse como cogrado mínimo en un k -grafo sin contener al ciclo ajustado $C_s^{(k)}$. En este contexto, Han, Lo y Sanhueza-Matamala [8] desarrollan una construcción importante basada en una partición modular, la que nos entrega cotas inferiores $1/p$ considerando ciertas condiciones aritméticas. Más aún, los autores plantean la pregunta sobre si su construcción es ajustada, es decir, si la cota $1/p$ no puede mejorarse en general.

Motivados por esta construcción, Ma y Rong [13] proponen un marco flexible, considerando familias de k -aristas a partir de una partición del conjunto de vértices. En esta nueva familia de hipergrafos, la construcción $H_{n,p}^{(k)}$ es un caso particular. Es importante señalar que Balogh, Luo y Sankar [1], de manera independiente y simultánea, han obtenido resultados similares mediante un método distinto, basándose en coloraciones orientadas de hipergrafos.

5.1. Definiciones y notación

Ma y Rong comienzan por describir una arista por el número de vértices que toma cada parte de la partición. Con este propósito es que introducen el conjunto de todos los d -vectores de enteros no negativos que suman exactamente k , al cual denominaremos el *conjunto de tipos*.

Definición 5.1. Dados los enteros $d \geq 1$ y $k \geq 0$, se define el *conjunto de tipos*

como

$$\mathcal{T}_d^k = \left\{ (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d : \sum_{i=1}^d x_i = k \right\},$$

donde $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ denota el conjunto de vectores de d componentes enteras no negativas.

Dada una partición del conjunto de vértices en d partes, notamos que una k -arista queda caracterizada por cuántos vértices aporta cada parte. Esto da lugar a la siguiente definición.

Definición 5.2. Sea $V = V_1 \cup \dots \cup V_d$ una partición. Diremos que el *tipo de arista* de un elemento $e \subseteq V^{(k)}$ es el vector $\vec{v} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathcal{T}_d^k$ tal que $x_i = |e \cap V_i|$ para todo $i = 1, \dots, d$.

Además, dados dos tipos \vec{x} e $\vec{y} \in \mathcal{T}_d^k$, se dirán *adyacentes* si $\|\vec{x} - \vec{y}\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 2$.

Ahora bien, observemos que la adyacencia entre dos tipos refleja el intercambio de un vértice entre dos partes distintas, esto pues si \vec{x} e \vec{y} son adyacentes entonces \vec{y} se puede obtener a partir de \vec{x} , al aumentar en uno la coordenada de alguna de las partes V_j y disminuyendo en uno la de alguna parte V_i para $i, j \in \{1, \dots, d\}$ tales que $i \neq j$. Así, el conjunto \mathcal{T} toma la estructura de grafo que se formaliza en la siguiente definición.

Definición 5.3. Sea $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_d^k$ una familia de tipos. Se define el *grafo tipo* $G_{\mathcal{T}}$ como el grafo donde su conjunto de vértices es \mathcal{T} . Las *componentes conexas* de \mathcal{T} son las componentes conexas de $G_{\mathcal{T}}$.

Observemos que el grafo tipo le entrega a \mathcal{T} una noción de cercanía que los tipos por sí solos no poseían. El siguiente ejemplo aclara cómo esta estructura permite detectar relaciones de conectividad que pueden ser no tan evidentes.

Ejemplo 5.4. Consideremos $k = 3$, $d = 3$ y los tipos $\vec{x} = (3, 0, 0)$, $\vec{y} = (1, 1, 1)$ y $\vec{z} = (2, 1, 0)$. Primero notemos que

$$\|\vec{x} - \vec{z}\|_1 = |3 - 2| + |0 - 1| + |0 - 0| = 2,$$

$$\|\vec{z} - \vec{y}\|_1 = |2 - 1| + |1 - 1| + |0 - 1| = 2.$$

Con lo cual \vec{x} es adyacente a \vec{z} , así como \vec{z} lo es con \vec{y} en $G_{\mathcal{T}}$. Por lo tanto, los tres tipos pertenecen a la misma componente conexa, sin embargo dado que

$$\|\vec{x} - \vec{y}\|_1 = |3 - 1| + |0 - 1| + |0 - 1| = 4,$$

obtenemos que \vec{x} no es adyacente a \vec{y} .

En lo que sigue, los autores definen la *familia base* \mathcal{B}_d^k definida por el siguiente conjunto

$$\mathcal{B}_d^k = \left\{ (x_1, \dots, x_d) \in \mathcal{T}_d^k : \sum_{j=1}^d j \cdot x_j \equiv 1 \pmod{d} \right\}. \quad (5.1.1)$$

A continuación, presentamos un ejemplo que ayuda a esclarecer este conjunto.

Ejemplo 5.5. Sean $k = 4$ y $d = 3$. Tenemos que un tipo $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{T}_3^4$ pertenece a \mathcal{B}_3^4 si y solo si

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \equiv 1 \pmod{3},$$

o equivalentemente

$$x_1 + 2x_2 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Notemos que los tipos que cumplen con esta condición son precisamente

$$\mathcal{B}_3^4 = \{(4, 0, 0), (1, 3, 0), (1, 0, 3), (0, 2, 2), (2, 1, 1)\}.$$

Más aún, estos tipos son las aristas de la construcción $H_{n,3}^{(4)}$ de Han, Lo y Sanhueza-Matamala [8]. Donde recordamos que una arista e con x_i vértices en V_i satisface la condición modular

$$\sum_{v \in e} l(v) \equiv 1 \pmod{3} \iff \sum_{i=1}^3 i \cdot x_i \equiv 1 \pmod{3},$$

la que es precisamente la condición (5.1.1) con $d = 3$.

Con esto, podemos deducir que la construcción $H_{n,p}^{(k)}$ resulta ser un caso particular de la familia de hipergrafos que se construye a continuación.

Con lo presentado, es posible definir una clase de familias de tipos que satisfagan dos condiciones. La primera es estructural, garantizando un alto cogrado al considerar que toda $(k - 1)$ -tupla admite una extensión a un tipo de \mathcal{T} . La segunda es aritmética, esto pues dentro de cada componente conexa existe un invariante que todo ciclo ajustado debería violar impidiendo su aparición.

Definición 5.6 (Familia $(k, s; d)$). Sea una familia de tipos $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_d^k$. Diremos que \mathcal{T} es una *familia $(k, s; d)$* si satisface las siguientes condiciones

- I) Para cualquier tipo $\vec{y} = (y_1, \dots, y_d) \in \mathcal{T}_d^{k-1}$, existe otro tipo $\vec{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_d^k$ tal que $\|\vec{x} - \vec{y}\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 1$.
- II) Para cada componente conexa C de $G_{\mathcal{T}}$, existe un conjunto de índices $I_C \subseteq \{1, \dots, d\}$ y un número entero v_C tal que $\frac{k}{\text{mcd}(k, s)} \nmid v_C$ y para todo $\vec{x} = (x_1, \dots, x_d) \in C$ se tiene $\sum_{i \in I_C} x_i = v_C$.

Notemos que para la primera condición, cualquier subconjunto S de tamaño $k - 1$ de vértices con tipo $\vec{y} \in \mathcal{T}_d^{k-1}$, nos asegura que existe un índice j tal que añadir cualquier vértice de $V_j \setminus S$ genera una k -arista cuyo tipo esta en \mathcal{T} . Con ello, el cogrado de S es alto. Por su parte, la segunda condición crea un invariante aritmético local en cada componente conexa. En efecto, dado que las aristas consecutivas de un ciclo ajustado tienen tipos adyacentes en $G_{\mathcal{T}}$, entonces los tipos de todas las aristas del ciclo están en una misma componente C , que mediante la igualdad $\sum_{i \in I_C} x_i = v_C$ y al sumarse sobre las s aristas del ciclo, genera una condición de divisibilidad por $k/\text{mcd}(k, s)$, lo cual contradice $k/\text{mcd}(k, s) \nmid v_C$, así se termina prohibiendo al ciclo $C_s^{(k)}$ en el hipergrafo.

Es importante notar que el invariante se define por componentes conexas puesto que componentes distintas pueden tener invariantes distintos, de esta forma se tiene una mayor flexibilidad en la construcción de familias $(k, s; d)$.

Con las definiciones anteriores ya tenemos el mapa, pues una familia $(k, s; d)$ nos dice qué tipos son admisibles y cómo se comportan cuando intentamos encadenarlos para formar un ciclo. Lo natural a preguntarse es si las familias realmente existen y en caso que así sea, para que valores de d pueden construirse. El siguiente teorema, viene a responder ambas preguntas al considerar condiciones aritméticas adecuadas sobre k y s para construir las familias $(k, s; d)$, para dos elecciones distintas de d , estas son el menor factor primo de $k/\text{mcd}(k, s)$ y el menor impar

no menor que $\text{mcd}(k, s)$.

Teorema 5.7 ([13]). *Sea k y s enteros tales que $3 \leq k < s$ y $k \nmid s$. Sea p el factor primo más pequeño de $\frac{k}{\text{mcd}(k,s)}$ y t el impar más pequeño tal que $t \geq \max(3, \text{mcd}(k, s))$ entonces existe una familia $(k, s; p)$.*

En particular, si $\frac{k}{\text{mcd}(k,s)} \geq 5$ entonces existe una familia $(k, s; t)$

Demostración. Una demostración detallada de este teorema se puede consultar en [13], Sección 3. □

Recalamos que del primer caso del teorema anterior, se recupera la construcción de Han, Lo y Sanhueza-Matamala como un caso particular. En efecto, cuando $\text{mcd}(k, s) = 1$ la familia que existe es \mathcal{B}_p^k y el k -grafo $H_{n,p}^{(k)}$ corresponde al caso $\mathcal{T} = \mathcal{B}_p^k$. Así, tenemos que se generaliza lo desarrollado en el capítulo 4.

Por otro lado, a partir de una familia $(k, s; d)$ podemos construir explícitamente un k -grafo con cogrado mínimo de aproximadamente n/d que impide el ciclo $C_s^{(k)}$, lo que nos entrega la cota inferior de $\gamma(C_s^{(k)}) \geq 1/d$. El siguiente teorema formaliza esta idea.

Teorema 5.8 ([13]). *Si existe una familia (k, s, d) \mathcal{T} , entonces $\gamma(C_s^{(k)}) \geq 1/d$.*

Demostración. Sea n un entero positivo suficientemente grande y sea H el k -grafo en n vértices construido a partir de la familia $(k, s; d)$ \mathcal{T} , tal que particionamos el conjunto de vértices $V(H) = V_1 \cup \dots \cup V_d$ lo más equilibradas posibles. Además, el conjunto de arista son todos los conjuntos de k vértices cuyo tipo pertenece a \mathcal{T} .

Supongamos por contradicción que H contiene una copia del ciclo $C_s^{(k)}$ con vértices (c_0, \dots, c_{s-1}) , de modo que (c_i, \dots, c_{i+k-1}) es una arista en H para todo $i \in \{0, \dots, s-1\}$, con los índices en módulo s . Denotemos por $\vec{x}^{(i)}$ el tipo de la arista $e_i = \{c_i, \dots, c_{i+k-1}\}$.

Notemos que dos aristas consecutivas e_i y e_{i+1} comparten $k-1$ vértices, pues e_{i+1} se obtiene de eliminar c_i y agregar c_{i+k} . Por lo tanto, los tipos $\vec{x}^{(i)}$ y $\vec{x}^{(i+1)}$ se diferencian en a lo más una unidad en cada coordenada, así $\|\vec{x}^{(i)} - \vec{x}^{(i+1)}\|_1 \leq 2$. De lo que deducimos que los tipos son adyacentes o iguales en $G_{\mathcal{T}}$, por lo que todos los tipos $\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(s)}$ pertenecen a una misma componente conexa C del grafo tipo.

Ahora, por la condición *II* de la Definición 5.6 existe un conjunto de índices $I_C \subseteq \{1, \dots, d\}$ y un entero v_C con $k/\text{mcd}(k, s)$, tales que

$$\sum_{m \in I_C} x_m^{(i)} = v_C, \quad \text{para todo } i \in \{0, \dots, s-1\}.$$

Para cada $j \in \{0, \dots, s-1\}$, definimos el

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{si } c_j \in \bigcup_{m \in I_C} V_m, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Así para cualquier $t \in \{0, \dots, s-1\}$, la suma de los y_j sobre los vértices de la arista e_t nos queda

$$\sum_{j=t}^{t+k-1} y_j = v_C,$$

la que sumando para todo $t \in \{0, \dots, s-1\}$ y notando que cada vértice c_j pertenece exactamente a k aristas del ciclo, es decir, y_j contribuye k veces a la suma, se obtiene

$$\begin{aligned} sv_C &= \sum_{t=0}^{s-1} \sum_{j=t}^{t+k-1} y_j \\ &= k \sum_{j=0}^{s-1} y_j. \end{aligned}$$

Denotando $g = \text{mcd}(k, s)$, la igualdad anterior se reescribe como

$$\frac{s}{g} v_C = \frac{k}{g} \sum_{j=0}^{s-1} y_j.$$

Notando que si tenemos $a, b \in \mathbb{Z}$ con $\text{mcd}(a, b) = d$ entonces $\text{mcd}(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$. Lo que aplicado al caso, se obtiene

$$\text{mcd}\left(\frac{k}{g}, \frac{s}{g}\right) = 1.$$

Deduciendo que $\frac{k}{g} \mid v_C$, lo cual contradice la segunda condición mencionada. Por tanto $C_s^{(k)} \not\subseteq H$.

Consideremos $S \subseteq V(H)$ de tamaño $k - 1$ arbitrario, con tipo $\vec{y} \in \mathcal{T}_d^{k-1}$. Por la condición I de la Definición 5.6, existe $\vec{x} \in \mathcal{T}$ con $\|\vec{x} - \vec{y}\|_1 = 1$. Así, para todo vértice $u \in V_j \setminus S$ se forma una arista $S \cup \{u\}$ de tipo $\vec{x} \in \mathcal{T}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} d_H(S) &\geq |V_j| - (k - 1) \\ &\geq n/d - (k - 1). \end{aligned}$$

Así, $\delta_{k-1}(H) \geq n/d - (k - 1)$, que dividiendo por n y tomando el límite se obtiene

$$\begin{aligned} \gamma(C_s^{(k)}) &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{d} - \frac{k - 1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{d}. \end{aligned}$$

□

Basados en los dos teoremas anteriores, se establece la cota inferior para $\gamma(C_s^{(k)})$. En efecto, el Teorema 5.7 garantiza la existencia de las familias $(k, s; p)$ y bajo la condición $k/\text{mcd}(k, s) \geq 5$ la familia $(k, s; t)$. Por su parte, el Teorema 5.8 transforma esa existencia en una cota para $\gamma(C_s^{(k)})$. Lo anterior dicho, se formaliza en el siguiente resultado.

Teorema 5.9. *Sea k y s enteros tales que $3 \leq k < s$ y $k \nmid s$. Sean p el factor primo mas pequeño de $\frac{k}{\text{mcd}(k, s)}$ y t el impar mas pequeño tal que $t \geq \text{máx}(3, \text{mcd}(k, s))$ entonces $\gamma(C_s^{(k)}) \geq \text{máx}(1/p, 1/t)$.*

Demostración. Por el Teorema 5.7, existe una familia $(k, s; p)$ de tal forma que el Teorema 5.9 entrega la cota $\gamma(C_s^{(k)}) \geq 1/p$.

Además, si $k/\text{mcd}(k, s) \geq 5$, el Teorema 5.7 garantiza que existe una familia $(k, s; t)$, que mediante Teorema 5.8 entrega la cota $\gamma(C_s^{(k)}) \geq 1/t$.

En el caso $k/\text{mcd}(k, s) < 5$, como $k/\text{mcd}(k, s)$ es un entero mayor que 1, sus posibles valores son 2, 3 y 4. Así para $k/\text{mcd}(k, s) \in \{2, 4\}$, el menor primo p es 2 y $t \geq 3$ implica $1/t \leq 1/3 < 1/2 = 1/p$. Por lo tanto, el máximo es $1/p$ y obtenemos la cota. Por su parte, si $k/\text{mcd}(k, s) = 3$ entonces el menor primo es

$p = 3$ y $\text{mcd}(k, s) \geq 1$, lo cual implica que $t \geq 3$. Así obtenemos $1/t \leq 1/3 = 1/p$ y deducimos que el máximo es $1/p$.

Finalmente, en cualquier caso se obtiene la cota $\gamma(C_s^{(k)}) \geq \text{máx}(1/p, 1/t)$. \square

La siguiente tabla presenta las cotas inferiores obtenidas por el Teorema 5.9.

$k \backslash r$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	1/2								
3	0	1/3	1/3							
4	0	1/2	1/2	1/2						
5	0	1/3	1/3	1/3	1/3					
6	0	1/2	1/3	1/2	1/3	1/2				
7	0	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3			
8	0	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2		
9	0	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	
10	0	1/2	1/3	1/2	1/3	1/2	1/3	1/2	1/3	1/2

Cuadro 5.1.1: Cotas inferiores $\text{máx}(1/p, 1/t)$ para $0 \leq r \leq 9$ y $2 \leq k \leq 10$, obtenidas a partir de los resultados de Ma y Rong [13]. Las celdas destacadas en verde corresponden a los valores que mejoran las cotas del Cuadro 4.3.2.

Capítulo 6

Conclusión

6.1. Conclusiones

En este trabajo se ha explorado la densidad de Turán en su variante por cogrado para ciclos ajustados $C_s^{(k)}$ de uniformidades $k \geq 4$, esto considerando la familia $H_{n,p}^{(k)}$ definida por Han, Lo y Sanhueza-Matamala, que nos entrega hipergrafos k -uniformes que bajo ciertas condiciones aritméticas no contiene ciclos ajustados de ciertas longitudes. Más aún, nos entrega cotas inferiores para $\gamma(C_s^{(k)})$, las que se han clasificado según el residuo $s \equiv r \pmod{p}$, identificando los casos en que la cota de la construcción era mejorable.

Se demostró que, mediante el etiquetado de vértices, la estructura del ciclo ajustado impone patrones periódicos. Esto, en conjunto a la Identidad de Bézout y un lema de doble periodicidad, estableció una relación directa con el máximo común divisor entre k y s , con lo cual se generó un nuevo criterio para decidir cuando es mejorable la cota.

Además, se ha mostrado que la construcción $H_{n,p}^{(k)}$ resulta ser un caso particular de la nueva construcción formulada por Ma y Rong. Esta nueva familia entrega mejoras en cuanto a las cotas inferiores presentadas anteriormente por Han, Lo y Sanhueza-Matamala, con lo que se responde a la constante pregunta si los valores obtenidos son mejorables o no. Sin embargo, aun hay casos en que esta nueva construcción no alcanza las cotas conjeturadas, por lo que el problema continua abierto y probablemente se necesite de nuevas ideas y familias distintas para concluir esta pregunta.

6.2. Trabajo futuro

Este trabajo aporta un nuevo resultado sobre la cota para la densidad de Turán por cogrado para ciclos ajustados, lo que deja abierto el camino a futuras investigaciones. Una línea de trabajo consiste en obtener cotas superiores más ajustadas para $\gamma(C_s^{(k)})$, ya que los resultados de esta tesis son sobre cotas inferiores. Esta extensión permitiría determinar valores exactos para la densidad de Turán por cogrado para nuevos valores de k y s . Lo que ampliaría los resultados logrados por Han, Lo y Sanhueza.

Además, sería interesante explorar si el rol del máximo común divisor entre k y s como una cantidad aritmética central se mantiene al explorar otras familias de hipergrafos k -uniformes.

Finalmente, dado que Balogh, Luo y Sankar [1], de manera independiente a Ma y Rong [13], han obtenido resultados equivalentes, confirman el interés en estas líneas de investigación.

Bibliografía

- [1] Balogh, J., Luo, H., and Sankar, M. (2026). A jump in the codegree Turán densities of long tight cycles.
- [2] Czygrinow, A. and Nagle, B. (2001). A note on codegree problems for hypergraphs. *Bull. Inst. Combin. Appl.*, 32:63–69.
- [3] De Caen, D. and Füredi, Z. (2000). The maximum size of 3-uniform hypergraphs not containing a Fano plane. *J. Combin. Theory Ser. B*, 78(2):274–276.
- [4] Erdős, P. (1964). On extremal problems of graphs and generalized graphs. *Israel J. Math.*, 2:183–190.
- [5] Erdős, P. and Stone, A. H. (1946). On the structure of linear graphs. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52:1087–1091.
- [6] Erdős, P. and Simonovits, M. (1966). A limit theorem in graph theory. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 1:51–57.
- [7] Glebov, R., Král', D., and Volec, J. (2016). A problem of Erdős and Sós on 3-graphs. *Israel J. Math.*, 211(1):349–366.
- [8] Han, J., Lo, A., and Sanhueza-Matamala, N. (2021). Covering and tiling hypergraphs with tight cycles. *Combin. Probab. Comput.*, 30(2):288–329.
- [9] Jones, G. A. and Jones, J. M. (1998). *Elementary number theory*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag London, Ltd., London.
- [10] Keevash, P. (2011). Hypergraph Turán problems. In *Surveys in combinatorics 2011*, volume 392 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 83–139. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [11] Klamt, S., Haus, U.-U., and Theis, F. (2009). Hypergraphs and cellular networks. *PLOS Computational Biology*, 5(5):1–6.
- [12] Ma, J. (2024). On codegree Turán density of the 3-uniform tight cycle C_{11} .
- [13] Ma, J. and Rong, M. (2025). The codegree Turán density of tight cycles.
- [14] Mantel, W. (1907). Problem 28, *Wiskundige Opgaven* 10, 60–61.

-
- [15] Mubayi, D. (2005). The co-degree density of the fano plane. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 95(2):333–337.
- [16] Mubayi, D. and Zhao, Y. (2007a). Co-degree density of hypergraphs. *J. Combin. Theory Ser. A*, 114(6):1118–1132.
- [17] Mubayi, D. and Zhao, Y. (2007b). Co-degree density of hypergraphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 114(6):1118–1132.
- [18] Piga, S., Sales, M., and Schülke, B. (2023). The codegree Turán density of tight cycles minus one edge. *Combin. Probab. Comput.*, 32(6):881–884.
- [19] Piga, S., Sanhueza-Matamala, N., and Schacht, M. (2026). The codegree Turán density of 3-uniform tight cycles. *J. Combin. Theory Ser. B*, 176:1–6.
- [20] Turán, P. (1941). On an extremal problem in graph theory. *Matematikai és Fizikai Lapok*, 48:436–452. In Hungarian; English summary included.
- [21] Zhou, D., Huang, J., and Schölkopf, B. (2006). Learning with hypergraphs: clustering, classification, and embedding. In *Proceedings of the 20th International Conference on Neural Information Processing Systems, NIPS’06*, page 1601–1608, Cambridge, MA, USA. MIT Press.