



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

ACTIVACIÓN DE METROLOGÍA CUÁNTICA DE ESTADOS EN ESCENARIOS CON RUIDO

Por: Jorge Bermúdez González

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la
Universidad de Concepción para optar al grado académico de Magíster en
Ciencias con Mención en Física

2026

Concepción, Chile

Profesor Guía: Dr. Esteban Sepúlveda Gómez

© 2026, Jorge Enrique Bermúdez González

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento

Comisión Examinadora : Dr. Gustavo Moreira Lima
Dr. Stephen Walborn
Dr. Miguel Ángel Solís

AGRADECIMIENTOS

Con esta tesis de alguna forma terminé un proceso de seis años de universidad. Donde, dos años fueron encerrados en casa por una pandemia, lamentablemente fueron mis primeros dos años de universidad y gracias al apoyo en todo sentido de mi familia no hubiera seguido ni llegado a este punto de mi vida. Siempre estaré agradecido de mis padres, Marcela y Jorge, que me enseñaron sobre la persistencia, dedicación, compromiso y cariño. Además de mi hermano, Sebastian, la otra mitad de mi infancia que aunque no lo crea me ha ayudado a seguir adelante. Le debo y agradezco mucho a él ser como soy hoy día. Y a toda mi familia en Talca que siempre anhelo volver a estar un ratito con ellos.

Pasada la pandemia pude conocer y compartir con mis compañeros. Juan, de quien siempre admiré su obsesión por aprender, motivación, ganas de jugar y disposición. Catalina, Carlos, Diego quienes me ayudaron a interesarme mucho más por la física, mantenerme constante y mucho tiempo de diversión durante los años de pregrado. Además quiero dar una mención especial a Valentina que a pesar de ser de la carrera me ayudó mucho a tener la mente fuera de esto, de ser más consciente de mí mismo y cada vez aceptarme más. Le agradezco permitirme conocerla y el apoyo que me ha dado en este nuevo periodo de postgrado y por todo lo que nos viene por delante, gracias por todo.

Luego fui directo a postgrado, decisión que aún me da vueltas en la cabeza. Pero las personas que conocí en el laboratorio me ha ayudado a sopesar un poco la carga y el estrés del magister. Entre ellos destacar a Javier, que me me ayudó mucho a trabajar en el armado, mediciones y entendimiento del experimento; gracias por tu buena onda y tu buena amistad. Nelson, Carlos, Leticia, Felipe, Santiago gracias por sus enseñanzas y conversaciones para aliviar el tiempo en el laboratorio e intentos de estudio que tal vez nunca duraron tanto pero sirvieron igualmente. También en el desarrollo del Magister pude conocer y ser alumno de profesores con mucho conocimiento en el área de los que han ayudado mucho en mi desarrollo académico.

Más generalmente gracias a todas las personas que aportaron, aunque sea indirectamente hacia mí. Porque de no ser por eso no estaría hoy aquí, aunque me

cueste admitirlo, un poco orgulloso de mi mismo.

Resumen

La metrología cuántica promete superar los límites clásicos de precisión en la estimación de parámetros, sin embargo, la presencia de ruido ambiental suele degradar esta ventaja, forzando al sistema a obedecer el límite clásico estándar. En esta tesis, se aborda el problema de la estimación de parámetros, con el uso del Steering Temporal como recurso metroológico principal, en canales cuánticos afectados por ruido de amortiguamiento de amplitud (Amplitude Damping Channel). Para combatir esta incapacidad de estimación se utilizó operaciones de pre- y post-filtración.

La implementación consiste en un arreglo experimental óptico utilizando una fuente de fotones anunciados (heralded photons) generados por conversión paramétrica descendente espontánea (SPDC), con el objetivo de trabajar en un régimen cuántico de fotones individuales. En el contexto del uso de steering temporal con motivos de metrología el escenario a implementar es uno de preparación y medida, específicamente una única partícula es enviada al laboratorio de Alice para aplicar un set de operaciones incompatibles en un tiempo t_1 . Y así luego implementar una fase θ . Finalmente el estado que recibe Bob en un tiempo t_2 dependerá de lo realizado por Alice y la fase aplicada.

La tarea de Bob es, a través de mediciones incompatibles, saber si el ensamble de estados violan alguna desigualdad de steering, para saber si existe algún tipo de correlación temporal entre las mediciones de preparación y el ensamble de estados. Por el tipo de desigualdad de steering que utilizamos podemos concluir de igual manera si es posible o no realizar la estimación del parámetro θ .

El objetivo planteado fue estudiar esta estimación de parámetro en un escenario realista, ya que las operaciones no son perfectas, agregamos un canal cuántico asociado a un error en la implementación de la operación unitaria. El *amplitude damping channel* representa la pérdida del estado hacia el ambiente. Para combatirlo se implementaron filtros estocásticos locales, parametrizados por el valor f , que nos permiten mitigar el efecto negativo del canal ruidoso asociado a la estimación de parámetro. La mejora se analizó a través de la violación de la desigualdad de steering V en función del nivel de ruido aplicado γ para distintos valores de filtros.

Los resultados demuestran que, sin ningún tipo de filtro ($f = 0$), la violación de la desigualdad de steering desaparece para valores de ruido $\gamma \geq 0,5$, mitigando la ventaja cuántica dada por el steering. Sin embargo, mediante la implementación de filtros estocásticos locales (implementados por Alice y Bob), se logra recuperar la violación de la desigualdad ($V > 0$) en regímenes de alto ruido donde antes era imposible. Específicamente, con un filtro de $f = 0,7$, se evidencia una recuperación significativa de la capacidad de steering, validando que las operaciones estocásticas locales permiten activar la metrología cuántica en escenarios ruidosos a costa de una pérdida probabilística de fotones.

Keywords – Metrología Cuántica, Quantum Steering, Temporal Quantum Steering, Filtros estocásticos, Ruido, Fotónica

Abstract

Quantum metrology promises to surpass classical precision limits in parameter estimation; however, the presence of environmental noise typically degrades this advantage, forcing the system to obey the standard classical limit. In this thesis, we address the problem of parameter estimation using Temporal Steering as the main metrological resource in quantum channels affected by amplitude damping noise (Amplitude Damping Channel). To combat this inability to estimate, pre- and post-filtering operations were used.

The implementation consists of an optical experimental setup using a heralded photon source generated by spontaneous parametric down-conversion (SPDC), aiming to work in a single-photon quantum regime. In the context of using temporal steering for metrological purposes, the scenario to be implemented is a prepare-and-measure setup; specifically, a single particle is sent to Alice's laboratory to apply a set of incompatible operations at a time t_1 . Then, a phase θ is applied. Finally, the state that Bob receives at a time t_2 will depend on the operations performed by Alice and the applied phase.

Bob's task is, through incompatible measurements, to determine if the ensemble of states violates a steering inequality in order to verify if there is any type of temporal correlation between the preparation measurements and the ensemble of states. Due to the type of steering inequality we use, we can similarly conclude whether or not it is possible to perform the estimation of the parameter θ .

The proposed objective was to study this parameter estimation in a realistic scenario. Since operations are not perfect, we added a quantum channel associated with an error in the implementation of the unitary operation. The amplitude damping channel represents the loss of the state to the environment. To combat this, local stochastic filters, parameterized by the value f , were implemented, allowing us to mitigate the negative effect of the noisy channel associated with the parameter estimation. The improvement was analyzed through the violation of the steering inequality V as a function of the applied noise level γ for different filter values.

The results demonstrate that, without any type of filter ($f = 0$), the violation of the steering inequality disappears for noise values $\gamma \geq 0,5$, nullifying the quantum

advantage provided by steering. However, by implementing local stochastic filters (applied by Alice and Bob), it is possible to recover the inequality violation ($V > 0$) in high-noise regimes where it was previously impossible. Specifically, with a filter of $f = 0,7$, a significant recovery of the steering capability is observed, validating that local stochastic operations allow quantum metrology to be activated in noisy scenarios at the cost of probabilistic photon loss.

Keywords – Quantum Metrology, Quantum Steering, Temporal Quantum Steering, Stochastic Filters, Noise, Photonics

Índice general

AGRADECIMIENTOS	I
Resumen	III
Abstract	V
1. Introducción	1
2. Marco Teórico	4
2.1. Postulados de la mecánica cuántica	4
2.1.1. Estados	4
2.1.2. Evolución de un estado cuántico	5
2.1.3. Observables	7
2.1.4. Mediciones	7
2.1.5. Sistemas compuestos	8
2.2. Generalidades	9
2.2.1. Operador densidad	9
2.2.1.1. Operador densidad reducido	11
2.2.2. Operaciones cuánticas	12
2.2.2.1. Representación con operadores de Kraus	13
2.2.3. Canal de amortiguamiento de amplitud (ADC)	14
2.3. <i>Steering</i> Cuántico	15
2.3.1. <i>Steering</i> temporal	17
2.3.2. Desigualdad de <i>steering</i> con fines metrológicos	18
2.4. Transformaciones estocásticas	22
3. Metodología	25
3.1. Propuesta experimental	25
3.2. Fuente de fotones	25
3.3. Preparación de estados	27
3.4. Operación unitaria	28
3.5. Interferómetro Sagnac	29
3.6. Filtros estocásticos	32
4. Resultados	34

4.1. Preparación y medición	34
4.2. Mediciones	35
5. Conclusión	39
Referencias	41
Apéndices	44
A1. Probabilidades y propagación de error	44

Índice de figuras

2.2.1. Modelos de sistemas cuánticos cerrados (izquierda) y abiertos (derecha). Un sistema abierto consiste en dos partes, el sistema principal ρ y un entorno ρ_{env} . Figura adaptada de [1].	12
2.2.2. El efecto del canal <i>amplitude damping</i> sobre la esfera de Bloch, para $p = 0,8$. Notar como la esfera completa se inclina hacia el polo norte, hacia el estado $ H\rangle$. Figura reproducida de [1].	15
2.3.1. Representación de la violación de la desigualdad de <i>steering</i> (a través del parámetro de <i>steering</i> V) versus el parámetro del canal ruidoso (ADC) γ para un valor fijo de $\theta = \pi$. Puede observarse que en este caso, la desigualdad se cumple para $\gamma < 0,5$, mientras que para $\gamma \geq 0,5$ la desigualdad deja de ser violada y el testigo ya no detecta <i>steering</i>	21
2.4.1. Comparativa de las curvas de $f = 0$ (sin filtro) con $f = 0,41$ y $f = 0,7$. Se observa cómo el filtrado estocástico expande la región donde $V > 0$ (restaurando la ventaja metrológica cuántica), superando el umbral de ruido del escenario sin filtrado.	24
3.1.1. Se utiliza una fuente de pares de fotones utilizando el proceso de SPDC para enviar uno al detector D_T y así avisar que existe un único fotón enviado hacia Alice. La implementación de Alice incluye una HWP (θ_a) que se utiliza para preparar cuatro estados codificados en el grado de libertad de polarización: $\rho_{0 0}, \rho_{0 1}, \rho_{1 0}$ y $\rho_{1 1}$. La codificación de la fase unitaria es aplicada a través del LCVR θ ; posteriormente, se aplica el primer set de filtros F_{pre} . Luego, el canal ruidoso ADC es implementado, cuya intensidad se controla mediante el parámetro θ_1 . Posteriormente, el estado se transmite a través del segundo set de filtros. Finalmente, en la zona de Bob, se realizan las mediciones mediante una placa QWP, HWP, un PBS y dos detectores de fotones D_1 y D_2 que realizan las coincidencias con el detector antes mencionado D_T	26

3.4.1. En su fase nemática, las moléculas de cristal líquido tienen una orientación ordenada, la cual, junto con la forma de las moléculas, forma una anisotropía óptica. Cuando un campo eléctrico es aplicado, las moléculas se alinean con el campo y el nivel de birrefringencia es controlado por la inclinación de las moléculas de LC. Figura y texto reproducido de [2].	29
3.6.1. Ilustración de la luz despolarizada que incide en una superficie en el ángulo de Brewster. Figura reproducida de [34].	32
3.6.2. Utilizando un láser de alineación y un medidor de intensidad de luz, se estudia la componente horizontal y vertical del haz que refleja y transmite el paquete de vidrios delgados para así calcular el valor de f del filtro.	33
4.2.1. Comparación de curva teórica con resultados experimentales de cálculo de parámetro de <i>steering</i> (V) para distintos valores de γ sin la implementación de filtros.	37
4.2.2. Demostración experimental de mejora del parámetro de <i>steering</i> en función del ruido γ para distintos valores de los filtros $f = 0,41$ y $f = 0,7$	38

Capítulo 1

Introducción

Muchas cantidades de interés en la física no son directamente accesibles, ya sea por razones de principio o por impedimentos experimentales. Esto ocurre en sistemas cuánticos donde los observables relevantes, como el entrelazamiento o la pureza, son funciones no lineales de la matriz densidad y no admiten, ni siquiera teóricamente, una representación como observables cuánticos propiamente dichos. En estas situaciones, se debe recurrir a mediciones indirectas, deduciendo el valor de la cantidad de interés mediante la inspección de un conjunto de datos procedentes de la medición de uno o varios observables diferentes. Se trata de un problema de estimación de parámetros que puede abordarse adecuadamente en el marco de la teoría de la estimación cuántica (*Quantum Estimation Theory*, QET), que proporciona herramientas analíticas para encontrar la medición óptima según un criterio determinado [3].

La **Metrología Cuántica** utiliza las herramientas de QET para aprovechar al máximo la mecánica cuántica. De manera más general, se ocupa de medidas y discriminaciones que reciben algún tipo de mejora (en precisión, eficiencia o simplicidad de implementación, por ejemplo) mediante el uso de efectos cuánticos [4].

Sin embargo, el estudio de la metrología en escenarios realistas debe considerar el ruido. Este escenario se formaliza como la estimación de parámetros de canales cuánticos, donde un mapa Φ_x describe la codificación de un parámetro desconocido x . Estudios previos han mostrado que la presencia de ruido despolarizante, por pequeño que sea, es suficiente para arruinar la supereficiencia en la estimación de parámetros propia de la mecánica cuántica, obligando al sistema a obedecer el

límite cuántico estándar [5].

En particular, el **Steering Cuántico** permite evidenciar estas mejoras, ya que constituye una clase de correlación cuántica distinta, situada jerárquicamente entre el entrelazamiento y la no-localidad de Bell [6]. Operacionalmente, el *steering* describe la capacidad de una parte, Alice, de influir o dirigir de manera no local el conjunto de estados condicionales de otra parte, Bob, mediante sus mediciones locales. Esta es una característica crucial y útil de muchas aplicaciones en protocolos de información cuántica [7].

En el contexto del *steering*, recientemente se ha demostrado que esta cualidad presenta ventajas en la metrología cuántica a través de relaciones de complementariedad entre observables, siempre que las mediciones implementadas sean incompatibles. Esta ventaja se formaliza mediante la construcción de una desigualdad de *steering*, donde la capacidad de Alice de *dirigir* el estado de Bob conlleva una precisión de estimación (**Información de Fisher**) que supera las cotas de los modelos de estados ocultos locales. Estableciendo el *steering* como un recurso genuino para la estimación mejorada de estimación de parámetros. Este análisis da origen al marco de la metrología cuántica asistida por *steering* [8].

Si bien existen estrategias para mitigar el ruido mediante controles de superposición [9], en este trabajo se analiza una opción diferente, experimentalmente accesible y que requiere menos recursos: el **steering** temporal. A diferencia del escenario anteriormente mencionado, este recurso no necesita entrelazamiento, ya que se basa en las correlaciones temporales de un único sistema. Esto es posible porque la tarea metrológica depende únicamente del conjunto de estados disponibles para Bob, lo cual permite trasladar el marco teórico desde el escenario espacial al temporal sin pérdida de generalidad. Cabe destacar que, aunque en el escenario temporal el *signaling* es posible, el *steering* temporal ha encontrado aplicaciones en la no-Markovianidad y en la distribución de claves cuánticas (QKD) [10].

Los canales ruidosos deterioran la eficiencia y la precisión de la metrología. Históricamente, la idea de recuperar propiedades cuánticas degradadas por el ruido mediante operaciones locales estocásticas, en lugar de corregir directamente el canal, tiene una larga trayectoria en la información cuántica. Los primeros trabajos se enfocaron en la destilación de entrelazamiento: se demostró experimentalmente por Kwiat et al. [11] que estados mixtos con no-localidad 'oculta' podían revelar

una violación de Bell tras la aplicación de filtros locales, un resultado que Masanes et al. [12] generalizaron teóricamente. Más recientemente, en [13] se consideró la posibilidad de reactivar el carácter cuántico del canal de amortiguamiento de amplitud (ADC), a través de una violación de una desigualdad de macrorrealismo. En [14] se reportó un resurgimiento de una violación de un testigo de dimensión usando operaciones estocásticas de pre- y post-selección en presencia de un ADC. Se adopta una filosofía similar, utilizando operaciones de filtrado estocástico para apuntar a la desigualdad de *steering* metrológico en lugar del entrelazamiento o la fidelidad.

Con estas ideas previas, en este trabajo se demuestra que las operaciones estocásticas pueden revelar una capacidad de *steering* metrológico escondida en canales ruidosos codificados en fase, restaurando la utilidad para la metrología cuántica a través de una violación de una desigualdad de *steering* metrológico (MSI). Los resultados establecen que esta capacidad restaurada representa una ventaja metrológica certificada: la capacidad de Alice de preparar remotamente a Bob para una estimación de fase mejorada.

A continuación, se detalla la estructura de la tesis. En el capítulo dos se desarrolla el marco teórico, explicando desde las bases de la mecánica cuántica hasta la metrología y los canales cuánticos. Al final de este capítulo se describe el escenario final y cómo se llevará a cabo desde un punto de vista teórico. En el capítulo tres se presenta la propuesta experimental, detallando cada uno de los componentes del arreglo. El capítulo cuatro detalla el procedimiento experimental y los resultados obtenidos. Finalmente, el capítulo cinco presenta las conclusiones. Además, en el apéndice se explican el cálculo de la desigualdad de *steering* y el cálculo de las barras de error de los gráficos presentados.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Postulados de la mecánica cuántica

*El contenido de los capítulos 2.1.1-2.1.4 se basan parcialmente y han sido adaptados a partir del texto original publicado por los autores M. A. Nielsen y I. L. Chuang titulado *Quantum Computation and Quantum Information* [1]. Además el capítulo 2.1.5 se basa y ha sido adaptado a partir del texto original publicado por el autor A. Peres titulado *Quantum Theory: Concepts and Methods* [15]*

La mecánica cuántica es un marco matemático para el desarrollo de teorías físicas. Esta teoría no prescribe las leyes que rigen los sistemas físicos, pero otorga un marco matemático y conceptual para el desarrollo de tales leyes. Estos postulados otorgan una conexión entre el mundo físico y el formalismo matemático de la mecánica cuántica.

2.1.1. Estados

Asociado a cualquier sistema físico aislado hay un espacio vectorial complejo con producto interno (el espacio de Hilbert) conocido también como el espacio de los estados del sistema. El sistema está completamente descrito por vectores de norma unitaria.

Para describir los estados dentro del espacio de Hilbert ($\mathcal{H}$) se usa la representación de *Bra* y *Ket* introducida por Paul Dirac. Los estados n -dimensionales pueden ser descritos por los *Ket* con una amplitud compleja c_k y elementos de la base del

espacio $|\psi_k\rangle$

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^n c_k |\psi_k\rangle,$$

y su espacio dual se describe mediante los *Bra*

$$\langle\psi| = \sum_{k=1}^n c_k^* \langle\psi_k|.$$

Los estados cuánticos son vectores en $\mathcal{H}$ con norma unitaria, es decir, $\| |\psi\rangle \| = 1$. Esta condición es equivalente a

$$\sum_{k=1}^n |c_k|^2 = 1$$

Estos vectores $\langle\psi_k|$ forman una base igual que los *Ket* y son ortonormales entre sí $\langle\psi_k|\psi_l\rangle = \delta_{k,l}$.

2.1.2. Evolución de un estado cuántico

La evolución de un sistema cuántico *cerrado* está descrita por una operación unitaria U , que relaciona el estado ψ en un tiempo t_1 con el estado ψ' en un tiempo t_2 . Esto es

$$|\psi'\rangle = U |\psi\rangle.$$

Este postulado requiere que el sistema que se busca describir sea cerrado, es decir, sin interacción con otros.

Un tipo en específico de operación unitaria son las rotaciones. Por ejemplo, si se considera un qubit o *quantum* bit, la unidad básica de información cuántica, es decir, la versión cuántica de un bit binario clásico. Un qubit, a diferencia de un bit que admite los estados 0 o 1, tiene la posibilidad de estar en una combinación lineal de estados, llamada superposición

$$|\psi\rangle = \alpha |H\rangle + \beta |V\rangle. \quad (2.1.1)$$

Los valores α y β son números complejos que satisfacen $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Visto de otra forma, el estado de un qubit es un vector en un espacio complejo de dos dimensiones.

Para mantener la normalización que cumplen los coeficientes α y β las operaciones sobre ellas deben ser unitarias, las cuales pueden ser descritas como matrices 2×2 . Unas de las más importantes son las matrices de Pauli

$$X \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad Y \equiv \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \quad Z \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Un operador normal W (es decir, que conmuta con su adjunto) tiene autovalores λ_i y autovectores $|\lambda_i\rangle$, que pueden ser calculados a través de la ecuación característica $\det(W - I\lambda_i) = 0$. De acuerdo al teorema espectral, este tipo de operadores admite la siguiente descomposición espectral:

$$W = \sum_i \lambda_i |\lambda_i\rangle\langle\lambda_i|.$$

Para el caso de los operadores de Pauli se tiene

$$X = |+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|, \quad (2.1.2)$$

$$Y = |R\rangle\langle R| - |L\rangle\langle L|, \quad (2.1.3)$$

$$Z = |H\rangle\langle H| - |V\rangle\langle V|. \quad (2.1.4)$$

Donde $|\pm\rangle = (|H\rangle \pm |V\rangle)/\sqrt{2}$, $|R\rangle = (|H\rangle + i|V\rangle)/\sqrt{2}$ y $|L\rangle = (|H\rangle - i|V\rangle)/\sqrt{2}$.

Otra manera de visualizar un qubit de estado $\alpha|H\rangle + \beta|V\rangle$, considerando $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, es verlo como un punto en una esfera unitaria de coordenadas (θ, φ) , donde $\alpha = \cos(\theta/2)$ y $\beta = e^{i\varphi} \sin(\theta/2)$. Esto se denomina la representación en la esfera de Bloch y el vector $(\cos(\varphi) \sin(\theta), \sin(\varphi) \sin(\theta), \cos(\theta))$ se denomina el vector de Bloch.

Las matrices de Pauli permiten generar otras tres clases de matrices unitarias. Las operaciones de rotación sobre los ejes $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ son definidas por las ecuaciones

$$R_x(\theta) \equiv e^{-i\theta X/2} = \cos \frac{\theta}{2} I - i \sin \frac{\theta}{2} X = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}, \quad (2.1.5)$$

$$R_y(\theta) \equiv e^{-i\theta Y/2} = \cos \frac{\theta}{2} I - i \sin \frac{\theta}{2} Y = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}, \quad (2.1.6)$$

$$R_z(\theta) \equiv e^{-i\theta Z/2} = \cos \frac{\theta}{2} I - i \sin \frac{\theta}{2} Z = \begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix}. \quad (2.1.7)$$

2.1.3. Observables

La obtención de información de un sistema requiere la medición de los valores de las cantidades características de este. Además, un sistema puede ser caracterizado completamente por un conjunto de cantidades físicas medibles.

En mecánica cuántica, los observables se representan a través de operadores hermíticos, es decir, satisfacen la condición

$$O = O^\dagger.$$

Estos *observables* se describen como *operadores* que actúan sobre *funciones de onda* en el espacio de Hilbert. Obtener información de un observable implica resolver una ecuación de autovalores $A|a_k\rangle = a_k|a_k\rangle$ para hallar su espectro y luego calcular las probabilidades de este sobre un estado de interés $|\psi\rangle$.

2.1.4. Mediciones

Se ha establecido que los sistemas cuánticos *cerrados* evolucionan a partir de una evolución unitaria. Sin embargo, el proceso de medición interrumpe esta dinámica unitaria, ya que implica una interacción con un aparato macroscópico; esta interacción provoca que el sistema no esté cerrado y no esté necesariamente sujeto a una evolución unitaria.

Para explicar lo que ocurre, se introduce el *postulado de la medición*. Las mediciones cuánticas están descritas por una colección de $\{M_m\}$ denominados *operadores de medición*. El índice m se refiere al resultado de la medición. Si el estado inmediatamente después de medir es $|\psi\rangle$, la probabilidad de obtener el resultado

m es

$$p(m) = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle ,$$

y el estado del sistema $|\psi'\rangle$ después de medir es

$$|\psi'\rangle = \frac{M_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle}}.$$

Los operadores de medición satisfacen la ecuación de completitud

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I,$$

la cual garantiza la conservación de la probabilidad total e igual a uno,

$$1 = \sum_m p(m) = \sum_m \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle .$$

2.1.5. Sistemas compuestos

La mecánica cuántica, tal como se menciona en [15], describe un sistema compuesto, el cual incluye diversos objetos cuánticos. El objetivo es construir un formalismo donde el estado del sistema compuesto sea expresado en términos de los estados de sus constituyentes.

Por ejemplo, si se consideran dos sistemas (electrón y protón), la situación es analíticamente simple si ambos se encuentran ampliamente separados y fueron preparados en los estados u_m y ν_ν respectivamente (componentes de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, respectivamente). Los vectores u y ν pertenecen a diferentes espacios de Hilbert. El estado de ambas partículas puede ser representado por un producto tensorial de estos dos vectores, escrito como $\mathbf{W} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$, llamado estado separable. Las componentes de $\mathbf{W}$ son $w_{m\nu} = u_m \nu_\nu$.

El producto tensorial puede representar el estado de dos (o más) sistemas que han sido preparados independientemente. Sin embargo, resulta de particular interés el caso de partículas que interactúan. Se asume que los estados compuestos no difieren de los estados de un único sistema, y en particular que obedecen el principio de superposición (2.1.1). Es decir, si $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son posibles estados de las partículas antes descritas, la expresión $\mathbf{W} = \alpha(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_1) + \beta(\mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{v}_2)$ es un

estado realizable del sistema compuesto.

Nótese que este nuevo estado combinado $\mathbf{W}$ ya no es separable de la manera antes descrita. En consecuencia, ninguna de las partículas individuales posee un vector de estado puro independiente por sí sola. Solo el par de partículas en su conjunto tiene un estado puro, en el cual ambas están correlacionadas.

2.2. Generalidades

*El contenido de este capítulo se basa parcialmente y ha sido adaptado a partir del texto original publicado por los autores M. A. Nielsen y I. L. Chuang titulado *Quantum Computation and Quantum Information* [1].*

Hasta este punto, la descripción de los sistemas cuánticos se ha realizado mediante vectores de estado, formalismo suficiente para sistemas aislados cuyo estado es completamente conocido. Sin embargo, en la mayoría de las situaciones físicas un sistema forma parte de un sistema compuesto de mayor tamaño y puede interactuar con otros grados de libertad que no son accesibles experimentalmente. En consecuencia, el interés suele centrarse en describir únicamente una parte del sistema total, mientras que el resto se considera un entorno.

En estas circunstancias, la descripción mediante un único vector de estado deja de ser suficiente. Incluso cuando el sistema compuesto evoluciona de manera unitaria, el estado del subsistema de interés ya no puede caracterizarse, en general, mediante una representación vectorial. Se requiere entonces un formalismo más general que permita describir tanto mezclas estadísticas como subsistemas de sistemas compuestos y, en particular, la dinámica de sistemas cuánticos abiertos. Esta necesidad conduce naturalmente a la introducción del operador densidad.

2.2.1. Operador densidad

El formalismo del operador densidad constituye una generalización de la descripción mediante vectores de estado. Además de representar estados puros, permite describir mezclas estadísticas de estados, caracterizar el estado de subsistemas de sistemas compuestos y formular la evolución de sistemas que interactúan con un entorno. Estas propiedades permiten el estudio de sistemas cuánticos abiertos y de las operaciones cuánticas.

Considerando un sistema cuántico preparado en el estado $|\psi_i\rangle$ con una probabilidad asociada p_i , al conjunto $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ se le denomina *ensamble de estados*. El operador densidad de este sistema se define como

$$\rho \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|.$$

Un sistema cuyo estado se conoce como $|\psi\rangle$ se denomina *estado puro* y su operador densidad es $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Por otro lado, un *estado mixto* se refiere a una mezcla estadística de diferentes estados puros.

Un operador ρ es un operador densidad asociado a un ensamble $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ si y solo si satisface las siguientes condiciones:

- Condición de traza: ρ tiene traza igual a uno
- Condición de positividad: ρ es un operador positivo

Con estas propiedades se define un operador densidad como un operador positivo que tiene traza 1. En términos del operador densidad, los postulados de la mecánica cuántica pueden reformularse de la siguiente manera.

- **Postulado 1:** Asociado a cualquier sistema físico aislado existe un espacio vectorial complejo con producto interno conocido como el espacio de estados del sistema. El operador densidad permite describir completamente el sistema físico. Si un sistema cuántico está en el estado ρ_i con probabilidad p_i , entonces el operador densidad del sistema es $\sum_i p_i \rho_i$
- **Postulado 2:** La evolución de un sistema cuántico *cerrado* es descrito por una *operación unitaria*. Esto implica que un estado ρ en un tiempo t_1 está relacionado con un estado ρ' a un tiempo t_2 a través de un operador U

$$\rho' = U\rho U^\dagger.$$

- **Postulado 3:** Las medidas en mecánica cuántica están descritas por una colección de operadores de medición $\{M_m\}$. Estos operadores actúan en el espacio de estados del sistema que se mide. Si el estado del sistema es ρ justo antes de ser medido entonces la probabilidad de obtener el resultado

m está dado por la siguiente expresión

$$p(m) = \text{Tr}(M_m^\dagger M_m \rho),$$

y el estado luego de ser medido es

$$\frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{Tr}(M_m^\dagger M_m \rho)}.$$

Los operadores de medida satisfacen una ecuación de completitud

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I$$

- **Postulado 4:** El espacio de estados de un sistema físico compuesto es el producto tensorial de los espacios que componen el sistema físico. Por lo tanto, en un conjunto de sistemas enumerados desde 1 hasta n , donde se preparan de forma completamente independiente los estados $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$, entonces el estado conjunto del sistema completo es el estado producto $\rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \dots \otimes \rho_n$

Esta reformulación de los postulados es matemáticamente equivalente a la descripción en términos vectoriales.

2.2.1.1. Operador densidad reducido

Una de las mejores aplicaciones de utilizar el operador densidad es poder describir los subsistemas de un sistema cuántico compuesto. Esta descripción se obtiene mediante el *operador densidad reducido*.

Si se tiene un sistema físico bipartito A y B , descrito por el operador densidad ρ^{AB} , el operador densidad reducido del sistema A se define como

$$\rho^A \equiv \text{tr}_B(\rho^{AB}),$$

donde el mapa tr_B se conoce como la *traza parcial* sobre el sistema B . Esta se define mediante

$$\text{tr}_B(|a_1\rangle \langle a_2| \otimes |b_1\rangle \langle b_2|) \equiv |a_1\rangle \langle a_2| \text{Tr}(|b_1\rangle \langle b_2|),$$

donde $|a_1\rangle$ y $|a_2\rangle$ son dos vectores en el espacio A y $|b_1\rangle$ y $|b_2\rangle$ son dos vectores en el espacio B [1].

2.2.2. Operaciones cuánticas

El formalismo de las operaciones cuánticas es una herramienta que permite describir la evolución de los sistemas cuánticos en una amplia variedad de circunstancias. Una forma de poder describir como se transforman los estados es a través de

$$\rho' = \mathcal{E}(\rho).$$

Este mapa $\mathcal{E}$ corresponde a una *operación cuántica*; las operaciones unitarias $\mathcal{E}(\rho) = U\rho U^\dagger$ y las mediciones $\mathcal{E}_m(\rho) = M_m\rho M_m^\dagger$ forman parte de esta familia. Como puede observarse, las operaciones cuánticas capturan el cambio dinámico de un estado como el resultado de un proceso físico, ρ es el estado inicial, antes del proceso, y $\mathcal{E}(\rho)$ es el estado final después de que el proceso ocurra.

Una forma natural de describir la dinámica de un sistema cuántico *abierto* es considerarlo como una interacción entre un sistema de interés, al cual se denominará *sistema principal* y un *entorno*, los cuales en su conjunto serán un sistema cuántico cerrado. Si se considera un sistema principal y un entorno que inician en un estado producto $\rho \otimes \rho_{env}$, ambos pueden evolucionar en forma conjunta y unitaria. Si posteriormente el sistema principal deja de interactuar con el entorno, la dinámica efectiva del sistema principal se obtiene trazando los grados de libertad del entorno:

$$\mathcal{E}(\rho) = \text{tr}_{env} [U(\rho \otimes \rho_{env})U^\dagger]. \quad (2.2.1)$$

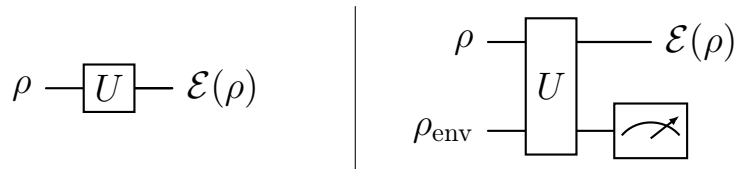


Figura 2.2.1: Modelos de sistemas cuánticos cerrados (izquierda) y abiertos (derecha). Un sistema abierto consiste en dos partes, el sistema principal ρ y un entorno ρ_{env} . Figura adaptada de [1].

Es importante destacar que la suposición de un estado producto inicial no se cumple de manera general; sin embargo, resulta una aproximación estándar.

Estos mapas, aunque sean una generalización de las operaciones que se han visto anteriormente, de igual manera tienen condiciones que deben ser cumplidas. Se ha definido una operación cuántica $\mathcal{E}$ como un mapa, para un conjunto de operadores densidad del espacio de entrada Q_1 hacia un espacio de salida Q_2 y se deben cumplir las siguientes propiedades:

- **P1** Primero, $\text{Tr}[\mathcal{E}(\rho)]$ es la probabilidad de que el proceso representado por $\mathcal{E}$ ocurra, cuando ρ es el estado inicial. Por lo tanto, $0 \leq \text{Tr}[\mathcal{E}(\rho)] \leq 1$ para cualquier estado ρ
- **P2** Segundo, $\mathcal{E}$ es un *mapa convexo-lineal* en el conjunto de matrices densidad, esto es, para unas probabilidades $\{p_i\}$,

$$\mathcal{E}\left(\sum_i p_i \rho_i\right) = \sum_i p_i \mathcal{E}(\rho_i)$$

- **P3** Tercero, $\mathcal{E}$ es un mapa *completamente positivo*. Esto es, si $\mathcal{E}$ mapea operadores densidad desde el sistema Q_1 a operadores densidad del sistema Q_2 , entonces $\mathcal{E}(A)$ debe ser positivo para cualquier operador positivo A . Además, si se introduce un sistema extra R de una dimensión arbitraria debe ser cierto que $(\mathcal{I} \otimes \mathcal{E})(A)$ es positivo para cualquier operador A en el sistema combinado RQ_1 , donde $\mathcal{I}$ es el mapeo identidad en el sistema R .

2.2.2.1. Representación con operadores de Kraus

El mapa $\mathcal{E}$ satisface **P1**, **P2**, **P3** si y solo si

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_i K_i \rho K_i^\dagger,$$

para algún conjunto de operadores $\{K_i\}$ el cual mapea el espacio de Hilbert de entrada hacia el espacio de Hilbert de salida, y $\sum_i K_i^\dagger K_i \leq I$.

Los elementos $\{K_i\}$ son conocidos como operadores de Kraus.

Para derivar esta expresión, se comienza de una base ortonormal $|e_i\rangle$ para el espacio de estados, de dimensión finita, y $\rho_{env} = |e_0\rangle\langle e_0|$ será el estado inicial del entorno.

Utilizando esto la ecuación (2.2.1) puede ser reescrita como

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\rho) &= \sum_i \text{Tr}_E (U (\rho \otimes |e_i\rangle\langle e_i|) U^\dagger) \\ &= \sum_i K_i \rho K_i^\dagger,\end{aligned}$$

donde $K_i \equiv \langle e_i | U | e_0 \rangle$ es un operador de Kraus que actúa en el espacio del sistema principal, y que corresponde a uno de los elementos de la operación cuántica $\mathcal{E}$.

Existen operaciones cuánticas que preservan la traza, las cuales conducen a la *relación de completitud*

$$\begin{aligned}1 &= \text{Tr}(\mathcal{E}(\rho)) \\ &= \text{Tr} \left(\sum_i K_i \rho K_i^\dagger \right) \\ &= \text{Tr} \left(\sum_i K_i^\dagger K_i \rho \right)\end{aligned}$$

Y dado que esto debe cumplirse para todos los operadores ρ , entonces los operadores de Kraus satisfacen

$$\sum_i K_i^\dagger K_i = I.$$

Dado que existen operaciones cuánticas que no preservan la traza, para las cuales esta relación obedece a $\sum_i K_i^\dagger K_i \leq I$.

2.2.3. Canal de amortiguamiento de amplitud (ADC)

Una aplicación importante de las operaciones cuánticas es la descripción de *disipación de energía*, efectos debidos a la pérdida de energía de un sistema cuántico. Por ejemplo para poder entender la dinámica de un átomo que espontáneamente emite un fotón o cuál es el estado de un fotón en un interferómetro cuando está sujeto a *scattering* o atenuación.

Cada uno de estos ejemplos tiene sus propiedades específicas, pero en general el comportamiento está bien caracterizado por una operación cuántica conocida como *amplitude damping*, la cual tiene los siguientes operadores de Kraus

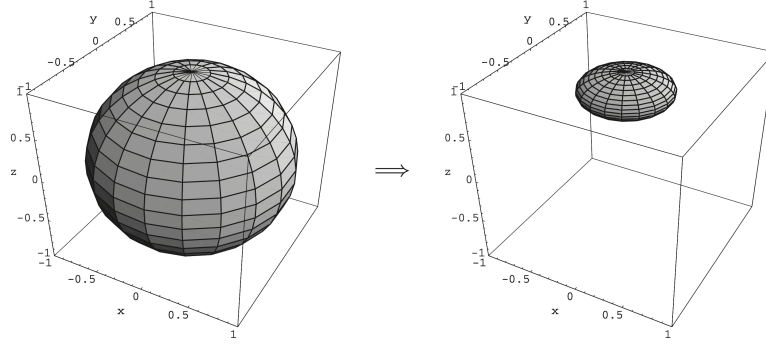


Figura 2.2.2: El efecto del canal *amplitude damping* sobre la esfera de Bloch, para $p = 0,8$. Notar como la esfera completa se inclina hacia el polo norte, hacia el estado $|H\rangle$. Figura reproducida de [1].

$$\begin{aligned} K_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{bmatrix}, \\ K_1 &= \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

El operador K_1 cambia el estado del fotón del estado $|V\rangle$ a $|H\rangle$ con probabilidad γ . Por otro lado, el operador K_0 reduce la amplitud del estado $|V\rangle$ y no altera el del estado $|H\rangle$.

Para visualizar mejor la aplicación de este canal cuántico es posible observar cómo afecta a un estado representado en la esfera de Bloch, a través del vector $\vec{r}$ como

$$(r_x, r_y, r_z) \rightarrow (r_x \sqrt{1-\gamma}, r_y \sqrt{1-\gamma}, \gamma + r_z(1-\gamma)),$$

la figura 2.2.2 permite visualizar el efecto en la esfera de Bloch, donde cada punto sobre la esfera unitaria se mueve hacia el punto fijo en el polo norte, donde el estado $|H\rangle$ está ubicado [1].

2.3. *Steering* Cuántico

El fenómeno de *steering* cuántico ocupa una posición intermedia en la jerarquía de las correlaciones cuánticas, situándose entre el entrelazamiento y la no-localidad de Bell [6]. Introducido originalmente por Schrödinger [16] en el contexto de la

paradoja de Einstein-Podolsky-Rosen [17], el *steering* se formula operacionalmente como una tarea de teoría de la información: una parte no confiable, Alice, posee una fuente que produce pares de partículas, conserva una de ellas y envía la otra a una parte confiable y espacialmente separada, Bob. El protocolo plantea que Alice demuestre a Bob de que comparten un estado entrelazado, mientras que la tarea de Bob consiste en verificar dicha afirmación solicitando a Alice realizar mediciones sobre su subsistema, para luego comprobar si esta puede influir remotamente el ensamble de estados de Bob.

Formalmente, sean los ajustes de medición de Alice denotados por x , con elementos de *positive operator valued measures* (POVMs) $E_{a|x}$ asociados al resultado a ; análogamente, los ajustes de Bob se denotan y , con elementos POVM $E_{b|y}$ y resultados b . Condicionado a que Alice mide x y obtiene el resultado a , Bob obtiene un conjunto de estados cuánticos no normalizados conocido como ensamble, $\left\{ \sigma_{a|x}^B \right\}_{a,x}$, con

$$\sigma_{a|x}^B = \text{Tr}_A \left[(E_{a|x} \otimes \mathbb{1}) \rho_{AB} \right], \quad (2.3.1)$$

donde ρ_{AB} representa el estado conjunto de Alice y Bob. Si el ensamble de Bob admite una descomposición conocida como modelo de estado oculto local (*local hidden state*, LHS),

$$\sigma_{a|x} = \sum_{\lambda} \pi(\lambda) P(a|x, \lambda) \sigma_{\lambda}, \quad (2.3.2)$$

donde λ representa la variable oculta clásica compartida entre Alice y Bob, $\pi(\lambda)$ es la probabilidad con la que la fuente genera o envía la variable oculta específica λ . $P(a|x, \lambda)$ es la probabilidad de que el dispositivo de medición de Alice obtenga como resultado a cuando elija medir x , dado que el dispositivo conoce la información λ . Por último σ_{λ} es el estado cuántico local real preexistente que recibe Bob. Estas cantidades satisfacen $0 \leq \pi(\lambda) \leq 1$, $\sum_{\lambda} \pi(\lambda) = 1$, $0 \leq P(a|x, \lambda) \leq 1$. Entonces Alice y Bob no comparten necesariamente un estado entrelazado: Alice pudo haber extraído un estado al azar de un conjunto predefinido y elegido su resultado en función de su conocimiento de esta variable oculta λ , de modo que el modelo LHS ofrece una descripción enteramente clásica del ensamble [10]. Adicionalmente, dichos ensambles satisfacen la condición de *no-signaling*,

$$\sum_a \sigma_{a|x}^B = \sum_a \sigma_{a|x'}^B = \rho^B, \quad \forall x, x',$$

$$\text{y } \left(\text{Tr} \sum_a \sigma_{a|x}^B \right) = 1 \quad \forall x; \quad \rho^B = \text{Tr}(\rho_{AB}).$$

Cuando el ensamble de Bob no admite una descripción LHS, el *steering* queda certificado. Esta certificación exige, necesariamente, que las mediciones implementadas por Alice sean incompatibles [18, 19]; ningún conjunto de mediciones mutuamente compatibles puede, por sí solo, dar lugar a un ensamble no descriptible mediante el modelo de la ecuación (2.3.2) [6, 18].

2.3.1. *Steering* temporal

Más allá del escenario espacial, el análogo temporal del *steering* [20, 21] se articula mediante un esquema de preparación y medida. Alice mide un ajuste x sobre un estado ρ en un instante t_A , obteniendo el resultado a mediante distintos conjuntos de POVMs incompatibles entre sí, $\{E_{a|x}\}$, de modo que Bob recibe el ensamble post-medición $\left\{ \rho_{a|x}^B \right\}_{a,x}$, cuyos elementos no normalizados están dados por

$$\rho_{a|x} = \sqrt{E_{a|x}} \rho \sqrt{E_{a|x}}.$$

Para verificar que Alice le ha transmitido efectivamente un ensamble *steerable*, Bob realiza la medición asociada a y y obtiene un resultado b en un instante posterior $t_B > t_A$, explorando si las correlaciones temporales entre los ajustes de Alice y su propio ensamble violan alguna desigualdad de tipo *steering*. El *steering* temporal de Alice a Bob se observa si Alice implementa mediciones incompatibles [21] y el ensamble resultante no admite la forma LHS. Cabe destacar que $\rho_{a|x}^B$ desempeña, en este escenario, el mismo rol que $\sigma_{a|x}^B$ en el caso espacial, estando ambos relacionados mediante $\sigma_{a|x}^B = P(a|x) \rho_{a|x}$, donde $P(a|x) = \text{Tr}[\rho_{a|x}]$. Un aspecto crucial de esta equivalencia es que la tarea metrológica que se construye a continuación depende únicamente de la estructura del ensamble disponible en el laboratorio de Bob, y no de si las correlaciones subyacentes son de naturaleza espacial o temporal; esto permite que el formalismo desarrollado se aplique indistintamente a ambos escenarios [8].

Este recurso será utilizado con fines metrológicos. La metrología corresponde al

estudio de las mediciones ultra precisas, utilizando los fenómenos físicos.

2.3.2. Desigualdad de *steering* con fines metrológicos

La conexión entre *steering* y metrología cuántica encuentra su origen en el criterio de Reid, el cual mostró que el *steering* puede evidenciarse a través de la violación de cotas de incertidumbre inferidas [22, 7]. Dado que la precisión en la estimación de parámetros está fundamentalmente limitada por relaciones de incertidumbre y cuantificada mediante la información de Fisher, esta conexión revela un vínculo más profundo: la información cuántica de Fisher optimizada sobre un ensamble de *steering* puede exceder la cota impuesta por cualquier modelo LHS, constituyendo así el *steering* como un recurso genuino para la estimación de parámetros [8]. En este escenario, se considera que, bajo condiciones ideales, Bob aplica una operación unitaria local $U(\theta) = e^{-iH\theta}$ que codifica un parámetro de fase desconocido θ sobre su estado condicional $\rho_{a|x}^B$, dado el resultado a de Alice para el ajuste x , comunicado clásicamente. El estado codificado resultante es

$$\rho_{a|x}(\theta) = U\rho_{a|x}U^\dagger = e^{-iH\theta}\rho_{a|x}e^{iH\theta},$$

donde H es el hamiltoniano generador de la evolución de fase, y el ensamble correspondiente en el laboratorio de Bob queda descrito por $\left\{\sigma_{a|x}^B(\theta) = P(a|x)\rho_{a|x}^B(\theta)\right\}$.

Bob puede entonces realizar una medición $M = \{M_b\}$ para estimar θ . La precisión asociada a esta estimación queda cuantificada por la información cuántica de Fisher (ICF) [23, 24],

$$\mathbb{F}_Q^{opt} := \max_x \sum_a P(a|x) \mathbb{F}_Q(\theta | \rho_{a|x}^B),$$

donde la optimización se realiza sobre el ajuste x elegido por Alice, y la ICF individual está dada por $\mathbb{F}_Q(\theta|\rho_{a|x}) := \text{Tr}(L_\theta^2 \rho_{a|x}(\theta))$, con la derivada logarítmica simétrica L_θ definida implícitamente mediante $\partial_\theta \rho_{a|x} = \frac{1}{2}(L_\theta \rho_{a|x} + \rho_{a|x} L_\theta)$. Para una medición fija $M = \{M_b\}$, las probabilidades de resultado siguen la regla de Born, $p(b|M, \rho_{a|x}^B(\theta)) = \text{Tr}(M_b \rho_{a|x}^B(\theta))$, y la ICF acota superiormente a la información clásica de Fisher ($\mathbb{F}_C$) [25], $\mathbb{F}_Q(\theta | \rho_{a|x}) \geq \mathbb{F}_C(\theta | M, \rho_{a|x})$, donde

$$\mathbb{F}_C^{opt}(\theta | M, \rho_{a|x}) := \max_x \sum_a P(a|x) \sum_b \frac{[\partial_\theta p_\theta(b | M, \rho_{a|x})]^2}{p_\theta(b | M, \rho_{a|x})}. \quad (2.3.3)$$

Mientras que la ICF caracteriza la sensibilidad intrínseca del estado $\rho_{a|x}^B$ frente a la evolución generada por H , la información clásica de Fisher captura dicha sensibilidad únicamente a través del cambio inducido en la distribución de probabilidades asociada a una medición particular.

Por otra parte Bob debe proyectar sobre los autoestados del generador H . Donde, el error en la estimación corresponde a su varianza óptima

$$\Delta H^{opt} := \min_x \sum_a P(a | x) \Delta [\rho_{a|x}^B(\theta), H], \quad (2.3.4)$$

con $\Delta [\rho_{a|x}^B(\theta), H] = \text{Tr}(H^2 \rho_{a|x}^B(\theta)) - \text{Tr}(H \rho_{a|x}^B(\theta))^2$. La condición para que el ensamble de Bob sea *steerable* es, precisamente, que no admita descripción mediante el modelo LHS de la ecuación (2.3.2); esta condición, combinada con las cantidades anteriores, conduce a la desigualdad de *steering* metrológica (MSI, por sus siglas en inglés) [8], expresada mediante el parámetro

$$V = \mathbb{F}_Q^{opt} - 4\Delta H^{opt} \geq 0. \quad (2.3.5)$$

Esta cantidad se considera un testigo de *steering* ya que si $V \leq 0$ (equivalentemente, $\mathbb{F}_Q^{opt} \leq 4\Delta H^{opt}$) no se puede asegurar ni negar que el ensamble presenta algún *steering* oculto. Por el contrario, si $V > 0$, se asegura el ensamble de Bob es *steerable* y se certifica una violación de la desigualdad, cuya magnitud cuantifica el grado de la ventaja metrológica (gracias al límite de Cramér-Rao cuántico) obtenida gracias al *steering*.

Para los efectos de esta investigación, los operadores que implementa Alice fueron $\{\sigma_z, \sigma_x\}$, los cuales producen con igual probabilidad los cuatro autoestados de los operadores, $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ y $\{|D\rangle, |A\rangle\}$, respectivamente. Cada uno de estos estados es entonces rotado con la operación generada por $H = \sigma_z$; luego se aplica el canal ruidoso (ADC) parametrizado con γ ; y por último, la tarea de Bob es medir el operador $M = \sigma_y$ y el operador $H = \sigma_z$.

Es importante destacar que el generador de la fase $H = \sigma_z$ está expresado

en la misma base que define los operadores de Kraus del canal ADC, la base computacional $\{|H\rangle, |V\rangle\}$. Esto implica que el canal ruidoso y la codificación de fase son covariantes, es decir, $\Lambda(U(\theta)\rho U^\dagger(\theta)) = U(\theta)\Lambda(\rho)U^\dagger(\theta)$ para todo θ . Esto es debido a la expresión del canal con una matriz diagonal en la base lógica. Este hecho garantiza que el factor de normalización de los estados filtrados no dependa de θ , y que la forma estándar de la desigualdad de *steering* metrológica, construida a partir del generador H , siga siendo válida bajo la acción del ruido permitiendo aislar limpiamente el efecto de los filtros estocásticos sobre la degradación del *steering*, sin tener que redefinir el criterio para este canal en particular.

Con el fin de realizar un análisis previo a las mediciones, se describe formalmente el canal que une los laboratorios de Alice y Bob, así lo que permite determinar el estado final y comprender el comportamiento del parámetro de *steering* en función del parámetro de ruido γ

1. Estado inicial enviado por Alice

$$\rho^{(1)} = \rho_{a|x}$$

2. Bob implementa la operación unitaria $U = e^{-i\sigma_z\theta}$

$$\rho^{(2)} = e^{-i\sigma_z\theta} \rho^{in} e^{i\sigma_z\theta}$$

3. Finalmente, el estado que debe medir Bob, tras aplicación del canal *Amplitude Damping Channel* (K_0, K_1) , es:

$$\rho^{(3)} = K_0 \rho^{(2)} K_0^\dagger + K_1 \rho^{(2)} K_1^\dagger. \quad (2.3.6)$$

Donde (2.3.6) es el estado no normalizado que debe medir Bob. Dividiendo por $\text{Tr}(\rho^{(3)})$ se obtienen las probabilidades a través de la regla de Born y se estudia cómo son las cantidades (2.3.3) y (2.3.4).

La figura 2.3.1 muestra cómo, a medida que aumenta el valor de ruido, el parámetro de *steering* V disminuye, pasando de valores positivos a negativos. Estos valores negativos no permiten asegurar estados con *steering*, perdiendo la certificación de la ventaja cuántica en la estimación del parámetro θ .

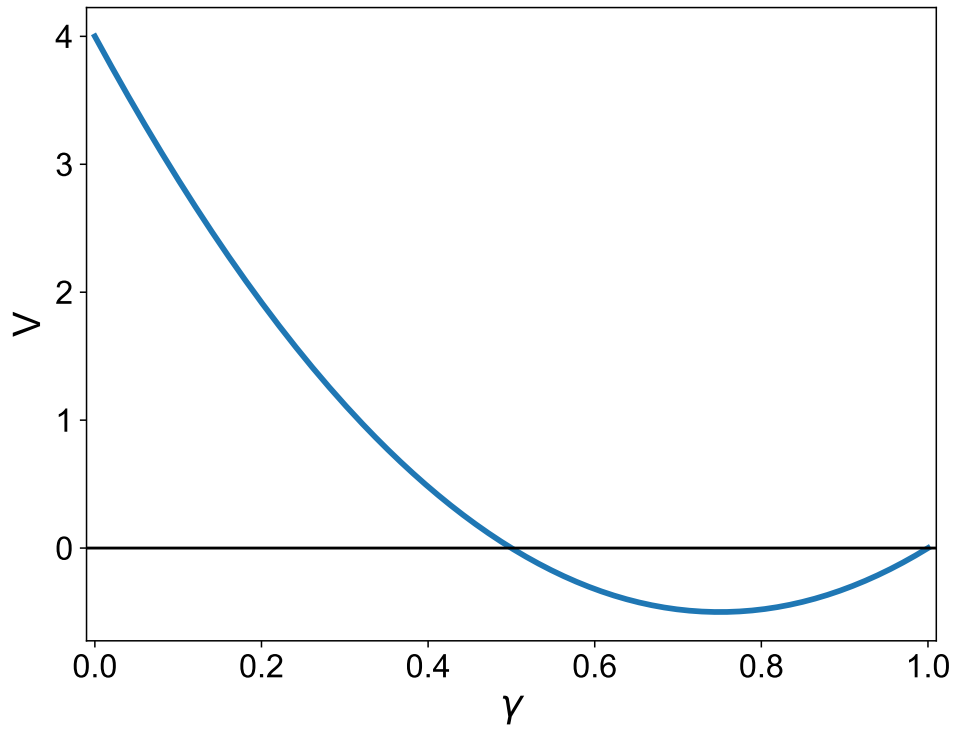


Figura 2.3.1: Representación de la violación de la desigualdad de *steering* (a través del parámetro de *steering* V) versus el parámetro del canal ruidoso (ADC) γ para un valor fijo de $\theta = \pi$. Puede observarse que en este caso, la desigualdad se cumple para $\gamma < 0,5$, mientras que para $\gamma \geq 0,5$ la desigualdad deja de ser violada y el testigo ya no detecta *steering*.

2.4. Transformaciones estocásticas

Para mitigar la pérdida de ventaja metrológica impuesta por el ruido y restaurar la capacidad de estimar el parámetro θ , es necesario implementar estrategias de protección.

La mejora se logra a través de la implementación de operaciones estocásticas locales; estas operaciones consisten en filtros locales dependientes de la polarización que modifican de manera condicional y probabilística a los fotones. En la mecánica cuántica se modelan como operadores que, al actuar sobre un estado, modifican probabilísticamente sus coeficientes.

Se emplean filtros locales de pre- y post-selección, aplicados para mitigar la degradación inducida por el canal. El primer filtro F_{pre} se aplica de manera previa a la exposición del estado al canal ruidoso

$$F_{pre} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-f} \end{pmatrix},$$

el cual afecta a la componente vertical $|V\rangle$ de los qubits que atraviesan el filtro.

Mientras que la segunda operación F_{post} es aplicada posterior al canal ruidoso y antes de las mediciones de Bob

$$F_{post} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-f} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

en este caso este operador afecta la componente horizontal $|H\rangle$ del qubit. Ambos filtros están parametrizados por el mismo valor f que tiene valores $0 \leq f \leq 1$.

Nótese que la aplicación de estos filtros locales introduce una pérdida adicional de fotones, sobre la cual se sigue operando bajo la misma asunción de *fair-sampling* ya mencionada.

Con esta implementación se puede analizar nuevamente el escenario completo y ver cómo se comporta el parámetro de *steering* en función de γ para distintos valores de f .

Analíticamente, la evolución completa del estado considerando los filtros estocás-

ticos se describe a través de la siguiente secuencia

1. Estado inicial enviado por Alice

$$\rho^{(1)} = \rho_{in}$$

2. Se aplica el primer conjunto de filtros F_{pre}

$$\rho^{(2)} = F_{pre} \rho^{(1)} F_{pre}^\dagger$$

3. Se implementa la operación unitaria $U = e^{-i\sigma_z\theta}$

$$\rho^{(3)} = e^{-i\sigma_z\theta} \rho^{(2)} e^{i\sigma_z\theta}$$

4. Finalmente, el estado que debe medir Bob, tras la aplicación del canal *Amplitude Damping Channel* (K_0, K_1) , es:

$$\rho^{(4)} = K_0 \rho^{(3)} K_0^\dagger + K_1 \rho^{(3)} K_1^\dagger.$$

5. Aplicación de segundo conjunto de filtros F_{post}

$$\rho^{(5)} = F_{post} \rho^{(4)} F_{post}^\dagger$$

De manera análoga, el estado no normalizado que recibe Bob tras completar el escenario es:

$$\rho^B = F_{post} \left[\sum_i K_i \{ U (F_{pre} \rho_{in} F_{pre}^\dagger) U^\dagger \} K_i^\dagger \right] F_{post}^\dagger \quad (2.4.1)$$

Aplicando la normalización $\rho_{final} = \frac{\rho^B}{\text{Tr}(\rho^B)}$, se evalúa el comportamiento del parámetro de *steering* frente a la intensidad de ruido γ , como se ilustra en la figura 2.4.1. Puede observarse la mejora de V representada en el desplazamiento de la intersección de la curva con el eje del ruido.

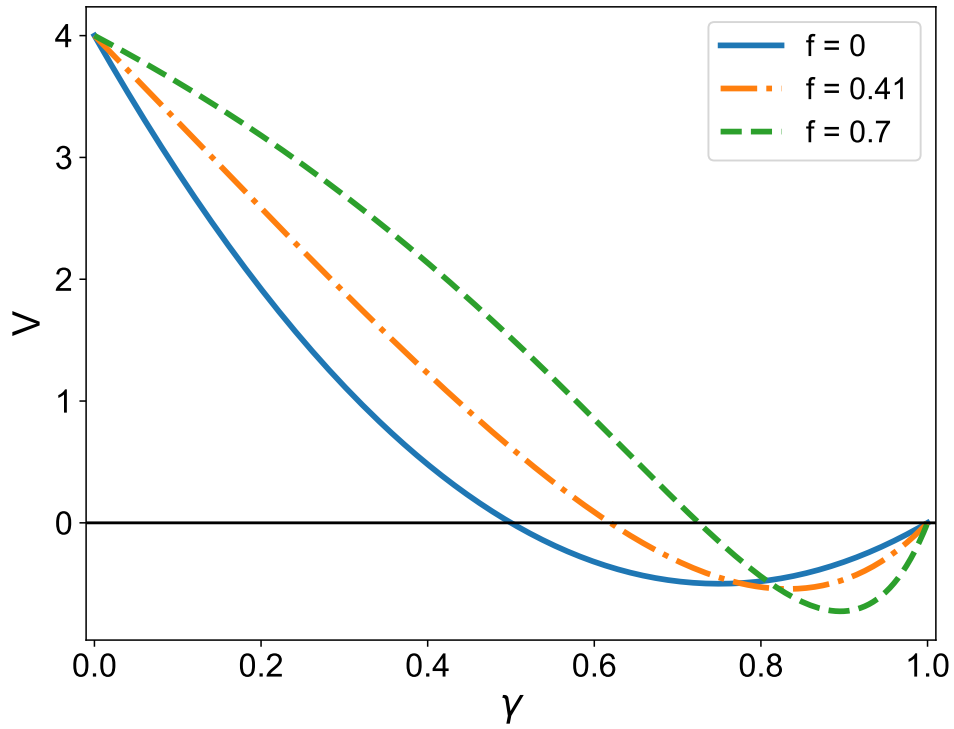


Figura 2.4.1: Comparativa de las curvas de $f = 0$ (sin filtro) con $f = 0,41$ y $f = 0,7$. Se observa cómo el filtrado estocástico expande la región donde $V > 0$ (restaurando la ventaja metrológica cuántica), superando el umbral de ruido del escenario sin filtrado.

Capítulo 3

Metodología

3.1. Propuesta experimental

3.2. Fuente de fotones

Inicialmente, se utilizó una fuente de fotones individuales anunciados (*heralded single-photon source*), los cuales se generan a través de un proceso llamado conversión paramétrica descendiente (SPDC por sus siglas en inglés). Para esto, se utiliza un cristal de fosfato de titanilo y potasio periódicamente polado (PPKTP) de 20 mm de longitud, el cual es bombeado por un láser de onda continua de 405 nm para generar pares de fotones degenerados en frecuencia (ambos centrados a 810 nm) y con polarizaciones ortogonales, debido al proceso SPDC tipo II [14]. Para asegurar que solo se seleccionen los fotones generados por el SPDC, se utilizan filtros de banda estrecha con un ancho de banda de 0.5 nm para asegurar las condiciones de *phase-matching*, fibras ópticas monomodo para eliminar las correlaciones espaciales indeseables, placas de media onda y separador de haz polarizante (PBS) para construir un polarizador ajustable.

Para maximizar la producción de la fuente, se considera la condición para un acople máximo, propuesta en [26]. Ya que el ancho del modo del haz de bombeo es w_p y que w_{SPDC} es el ancho de la frecuencia degenerada de los fotones generados por el proceso en el centro del cristal PPKTP tipo II, la condición óptima para un acople máximo es cuando $w_{SPDC} = w_p\sqrt{2}$. La configuración que se utilizó para lograr esto fue a través de una lente de una distancia focal de 20 cm para enfocar

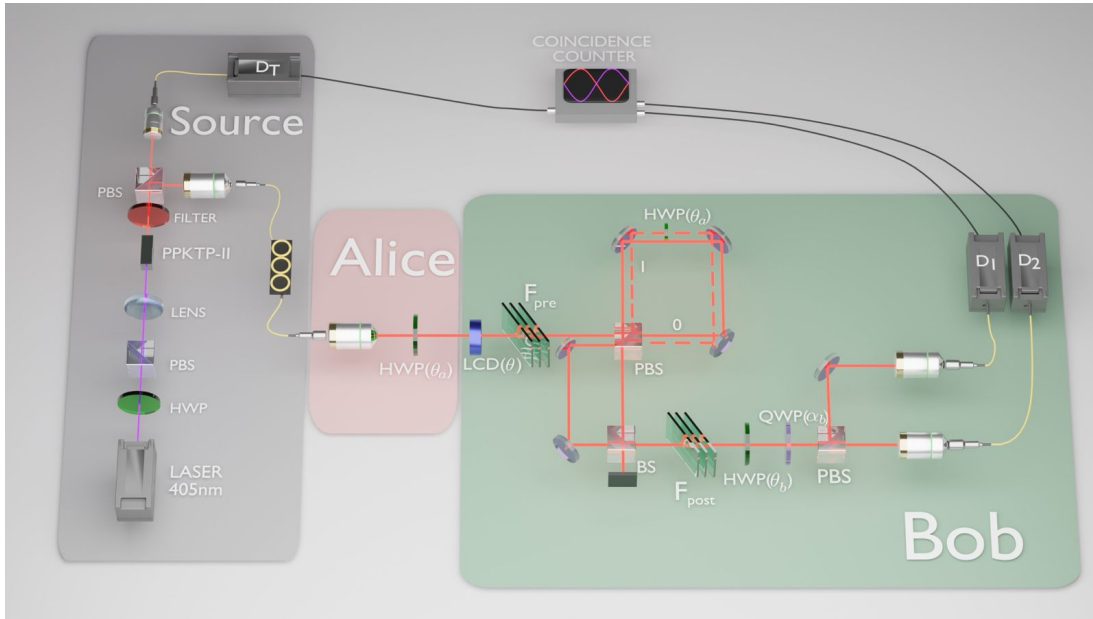


Figura 3.1.1: Se utiliza una fuente de pares de fotones utilizando el proceso de SPDC para enviar uno al detector D_T y así avisar que existe un único fotón enviado hacia Alice. La implementación de Alice incluye una HWP (θ_a) que se utiliza para preparar cuatro estados codificados en el grado de libertad de polarización: $\rho_{0|0}$, $\rho_{0|1}$, $\rho_{1|0}$ y $\rho_{1|1}$. La codificación de la fase unitaria es aplicada a través del LCVR θ ; posteriormente, se aplica el primer set de filtros F_{pre} . Luego, el canal ruidoso ADC es implementado, cuya intensidad se controla mediante el parámetro θ_1 . Posteriormente, el estado se transmite a través del segundo set de filtros. Finalmente, en la zona de Bob, se realizan las mediciones mediante una placa QWP, HWP, un PBS y dos detectores de fotones D_1 y D_2 que realizan las coincidencias con el detector antes mencionado D_T .

los fotones del haz de bombeo en el centro del cristal PPKTP tipo II y lentes objetivo de 10X para enfocar los fotones convertidos en las fibras ópticas.

El proceso SPDC genera pares de fotones con polarizaciones ortogonales a 810 nm. Un divisor de haz polarizante (PBS) separa los fotones en función de su polarización; uno de ellos incide en un fotodetector de avalancha que actúa como señal de disparo D_T , indicando que, tras un retardo calibrado, el segundo fotón alcanzará la etapa de detección. Este segundo es enviado a un controlador de fibra manual (MPC) y luego al laboratorio de Alice (y luego al de Bob). La información bruta extraída del sistema de detección son las coincidencias entre los detectores D_T y D_1 (o D_2 , dependiendo de la medida), con un retraso entre ellos de 32 ns (debido a que primero llega el fotón al detector D_T y luego de este retardo a D_1 o D_2) y con un tiempo de integración de 10 segundos (tiempo en donde se suman los conteos) por conteo de coincidencia.

Este proceso es un estándar en la óptica cuántica para la generación de pares de fotones correlacionados y entrelazados [14, 27, 28].

3.3. Preparación de estados

Posteriormente, los fotones se propagan en espacio libre. En la etapa de preparación (Alice), se utiliza una placa de media onda (HWP) con la cual, dependiendo de su ángulo, se generan los cuatro estados necesarios para el experimento: $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ y $\{|D\rangle, |A\rangle\}$, donde $|D\rangle = (|H\rangle + |V\rangle)/\sqrt{2}$, $|A\rangle = (|H\rangle - |V\rangle)/\sqrt{2}$, los cuales corresponden a los autoestados de las matrices de Pauli σ_z y σ_x , respectivamente, los cuales representan los ajustes de medición incompatibles de Alice en el escenario de *steering* temporal, expresados en matrices densidad:

$$\rho_{0|0} = |H\rangle\langle H|, \quad (3.3.1)$$

$$\rho_{1|0} = |V\rangle\langle V|, \quad (3.3.2)$$

$$\rho_{0|1} = |D\rangle\langle D|, \quad (3.3.3)$$

$$\rho_{1|1} = |A\rangle\langle A|. \quad (3.3.4)$$

3.4. Operación unitaria

Uno de los pilares fundamentales del experimento es la operación unitaria, la codificación sobre el estado para lograr la comunicación.

Como se mencionó anteriormente, la operación unitaria corresponde a $e^{-i\sigma_z\theta}$. Aunque esta operación representa una rotación que podría implementarse con placas de onda estándar, es útil factorizar la expresión (2.1.7) para obtener:

$$e^{-i\sigma_z\theta} = e^{i\theta/2} \begin{bmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.4.1)$$

la cual corresponde a un retardador de fase, difiriendo únicamente por una fase global. Para esto, se emplea un retardador variable de cristal líquido (*liquid crystal variable retarder*, LCVR).

Como ilustra la figura 3.4.1, un LCVR consiste en una celda transparente llena de una solución de moléculas de cristal líquido (LC, por sus siglas en inglés) que funciona como una placa de onda variable. La orientación de las moléculas de LC está determinada por el alineamiento de las placas en la ausencia de un voltaje aplicado. Debido a la birrefringencia del material LC, este retardador LC actúa como una placa de onda óptica anisotrópica, con su eje lento marcado en la placa. Cuando un voltaje AC es aplicado, las moléculas del LC se reorientan desde su alineamiento por defecto de acuerdo al voltaje aplicado; con esto, variando el voltaje, se puede controlar activamente la retardancia del cristal líquido, lo que es equivalente a rotar el estado controlando el desfase θ impreso exclusivamente sobre la componente horizontal del estado de polarización, mientras que la componente vertical permanece inalterada [2, 29].

Para caracterizar este dispositivo, se calibra el voltaje en función de la retardancia. La operación identidad se establece identificando el voltaje correspondiente a un desfase de 2λ . A partir de este punto de operación, se introducen desviaciones controladas de $\pm h$ en el voltaje para evaluar numéricamente la derivada de la distribución de probabilidad.

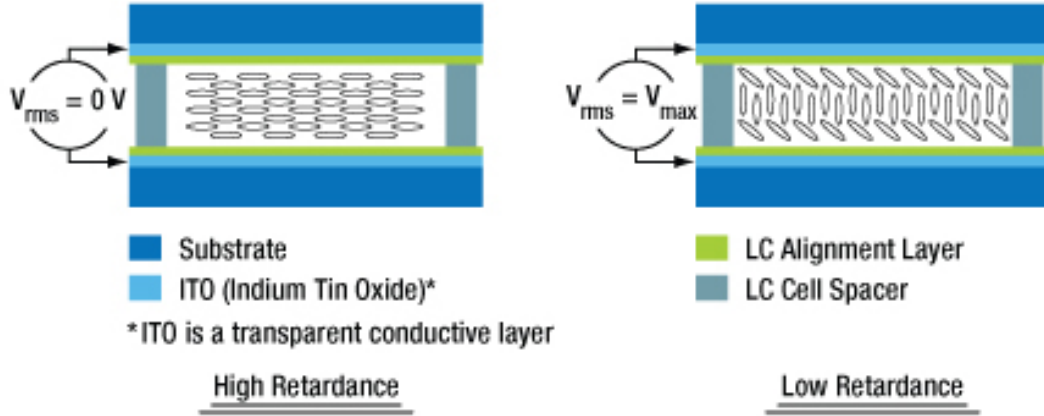


Figura 3.4.1: En su fase nemática, las moléculas de cristal líquido tienen una orientación ordenada, la cual, junto con la forma de las moléculas, forma una anisotropía óptica. Cuando un campo eléctrico es aplicado, las moléculas se alinean con el campo y el nivel de birrefringencia es controlado por la inclinación de las moléculas de LC. Figura y texto reproducido de [2].

3.5. Interferómetro Sagnac

Como se mencionó previamente, para representar el ruido se emplea el canal cuántico *amplitude damping channel* (ADC). Como se ve en la propuesta experimental 3.1.1 se emplea un interferómetro Sagnac de dos caminos [30, 31], el cual permite un acople muy estable entre el grado de libertad de la polarización y el espacial o de camino. Además, las salidas de este primer interferómetro están acopladas a un segundo interferómetro Mach-Zehnder con una asimetría en la longitud de sus brazos (mayor a la longitud de coherencia del fotón). Esto asegura que al recombinarse en el BS, los modos espaciales se sumen de forma completamente incoherente, completando así la dinámica de los operadores de Kraus.

Inicialmente, el fotón incide en el divisor de haz en polarización (PBS), el cual separa las componentes horizontal y vertical en dos modos espaciales $|0\rangle$ y $|1\rangle$, añadiendo así un subsistema ancila, ilustrado con las líneas continuas y punteadas en la figura 3.1.1, respectivamente. El PBS puede ser pensado como una compuerta NOT-controlada (CNOT) entre los grados de libertad de polarización y momento lineal, descrito como:

$$\text{PBS} = \hat{h} \otimes (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) + i\hat{v} \otimes (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|), \quad (3.5.1)$$

donde $\hat{h} = |H\rangle\langle H|$ y $\hat{v} = |V\rangle\langle V|$. Al aplicar este operador al estado de entrada $|\Psi\rangle = |\psi\rangle |0\rangle$, donde el estado $|\psi\rangle$ representa cualquier polarización de entrada, se obtiene:

$$|\Psi'\rangle = \hat{h} |\psi\rangle |0\rangle + i\hat{v} |\psi\rangle |1\rangle.$$

Dentro del interferómetro, se añade una placa de media onda $\text{HWP}(\theta_1)$ en el camino 1 con su eje rápido alineado con el ángulo θ_1 . Experimentalmente, es importante agregar otra placa de media onda que aplique la identidad en el camino 0 (orientada a 0° para que actúe como la identidad sobre la polarización H , no descrita en la figura). Esto compensa la diferencia de camino óptico introducida por la primera placa. Tras esta etapa, el estado se describe como:

$$|\Psi''\rangle = \hat{h} |\psi\rangle |0\rangle + i\hat{H}(\theta_1)\hat{v} |\psi\rangle |1\rangle,$$

donde $\hat{H}$ es la matriz de Jones que representa la aplicación de la placa de media onda [29] rotada en un ángulo θ_1 respecto al eje x :

$$\hat{H}(\theta_1) = \begin{pmatrix} \cos(2\theta_1) & \sin(2\theta_1) \\ \sin(2\theta_1) & -\cos(2\theta_1) \end{pmatrix}. \quad (3.5.2)$$

Los dos caminos se recombinan, gracias a los espejos, en el PBS, lo que implementa una segunda compuerta CNOT como en (3.5.1). Por lo tanto, después del PBS, se obtiene el siguiente estado:

$$|\Psi'''\rangle = [\hat{h} - \hat{v}\hat{H}(\theta_1)\hat{v}] |\psi\rangle |0\rangle + i [\hat{h}\hat{H}(\theta_1)\hat{v}] |\psi\rangle |1\rangle. \quad (3.5.3)$$

Luego del PBS, el modo espacial $|1\rangle$ recorre una distancia mayor que el estado $|0\rangle$. En el divisor de haz (BS), ambos modos se recombinan espacialmente. Dado que la diferencia de camino óptico excede la longitud de coherencia del fotón, la recombinación es estrictamente incoherente, lo cual implementa físicamente la traza parcial sobre los grados de libertad del momento lineal. Aunque esto introduce una pérdida de transmisión del 50 %, las probabilidades condicionales asociadas a la polarización permanecen inalteradas. Bajo el supuesto estándar de muestreo justo (*fair sampling assumption*) [10, 32], la atenuación global y no

sesgada permite concluir que el estado de polarización resultante es idéntico a la salida teórica del canal ADC. Esto garantiza una evaluación experimental válida del *steering* temporal.

El estado de salida del canal, descrito con el operador densidad, es finalmente:

$$\rho_{out} = K_0 |\psi\rangle\langle\psi| K_0^\dagger + K_1 |\psi\rangle\langle\psi| K_1^\dagger, \quad (3.5.4)$$

donde los operadores de Kraus están dados por:

$$\begin{aligned} K_0 &= \hat{h} - \hat{v}\hat{H}(\theta_1)\hat{v}, \\ K_1 &= \hat{h}\hat{H}(\theta_1)\hat{v}. \end{aligned}$$

Reemplazando los componentes de la matriz de Jones y comparando con la ecuación (2.2.2), se obtiene la relación entre el ángulo de la placa de media onda θ_1 y el valor de ruido γ :

$$\sin(2\theta_1) = \sqrt{\gamma}, \quad (3.5.5)$$

$$\cos(2\theta_1) = \sqrt{1 - \gamma}, \quad (3.5.6)$$

lo cual permite el control de γ a través del ángulo de la placa de media onda θ_1 .

Con la operación unitaria y el canal ADC caracterizados, se evalúa el parámetro de *steering* frente a distintos niveles de γ . En la etapa receptora (Bob), se implementan proyectores en las bases de los observables σ_y , que permite evaluar la información clásica de Fisher (2.3.3), y σ_z , que se utiliza para calcular ΔH^{opt} (2.3.4), con lo que se logra así el primer set de mediciones correspondiente a la figura 2.3.1. Como se ilustra en el recuadro asignado a Bob en la figura 3.1.1, la proyección sobre estos observables se implementa mediante una placa de cuarto de onda QWP(α_b), una placa de media onda HWP(θ_b), un PBS, seguidos de detectores de fotones individuales. Diferentes configuraciones de estas placas permiten medir en las bases requeridas.

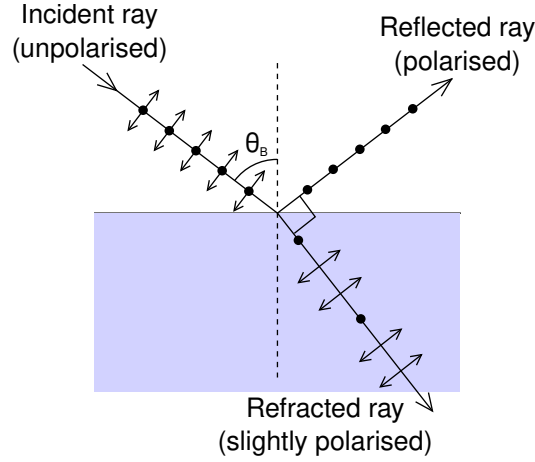


Figura 3.6.1: Ilustración de la luz despolarizada que incide en una superficie en el ángulo de Brewster. Figura reproducida de [34].

3.6. Filtros estocásticos

Para mitigar la degradación inducida por el canal, se implementan experimentalmente los filtros estocásticos analizados en el marco teórico, los cuales modifican de forma condicional las amplitudes de polarización transmitidas. Estos filtros consisten en láminas delgadas de vidrio posicionadas en el ángulo de Brewster [11].

En el contexto de la refracción, cuando un haz de luz cambia de un medio con índice de refracción n_i a otro medio n_t , tal que $n_i < n_t$, al cumplirse que el ángulo con el que el haz se refleja más el ángulo con el que se transmite suman noventa grados ($\theta_r + \theta_t = 90^\circ$), la polarización paralela al plano de incidencia se anula y solo se refleja la ortogonal. Como se puede ver en la figura 3.6.1, el haz reflejado está polarizado y el transmitido es parcialmente polarizado. Este ángulo está definido por los índices de refracción de los medios [33]:

$$\tan(\theta_B) = \frac{n_t}{n_i}. \quad (3.6.1)$$

En el arreglo experimental, los fotones inciden desde el aire ($n_i \approx 1$) hacia láminas de vidrio ($n_t \approx 1,5$), lo que resulta en un ángulo de Brewster teórico de $\theta_B \approx 56^\circ$.

De este modo, la luz reflejada contiene solo una polarización, mientras que en el haz transmitido una componente es parcialmente filtrada y la ortogonal permanece

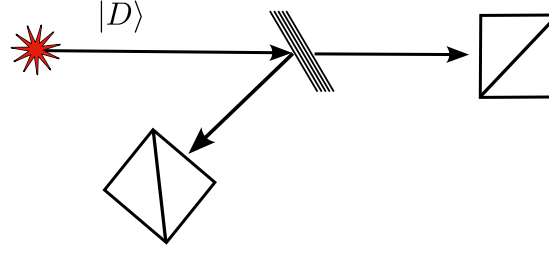


Figura 3.6.2: Utilizando un láser de alineación y un medidor de intensidad de luz, se estudia la componente horizontal y vertical del haz que refleja y transmite el paquete de vidrios delgados para así calcular el valor de f del filtro.

sin cambios. La diferencia entre F_{pre} y F_{post} radica en la posición del eje principal de las placas de vidrio, las cuales son ortogonales entre sí, lo que permite filtrar las componentes vertical u horizontal, respectivamente.

Para su implementación, el soporte del filtro se posiciona perpendicularmente a la mesa óptica y se rota hacia el ángulo de Brewster.

Para caracterizar el parámetro f de los filtros, se utilizó un láser de alineación para medir las potencias horizontal y vertical transmitidas y reflejadas, como se ilustra en la figura 3.6.2. A través de estos valores y la fórmula (3.6.2), se determinó que un arreglo de tres láminas de vidrio proporciona un valor de $f = 0,41 \pm 0,05$, mientras que un arreglo de ocho láminas de vidrio logra un valor de $f = 0,70 \pm 0,02$ a través de:

$$f = 1 - \frac{I_T^\perp}{I_T^\perp + I_R^\perp}, \quad (3.6.2)$$

donde las intensidades $I^\perp$ corresponden a la componente de la polarización perpendicular al plano de incidencia (la cual es parcialmente reflejada), mientras que la componente paralela al plano de incidencia se transmite en su totalidad ($f = 0$). Con la caracterización e inclusión de estos componentes, el montaje experimental queda completamente definido para la adquisición de datos.

Capítulo 4

Resultados

Este capítulo detalla los resultados experimentales obtenidos. Previamente, se describe el protocolo de preparación de los estados y el esquema de medición implementado.

4.1. Preparación y medición

Una vez completado el ensamblaje del arreglo experimental, la calibración del interferómetro requiere atención particular para asegurar la fidelidad del proceso.

La implementación del canal ADC consiste en un interferómetro Sagnac de dos caminos acoplado a un interferómetro Mach-Zehnder desbalanceado. Para garantizar la fiabilidad del arreglo experimental, es necesario asegurar una visibilidad óptica de alta calidad. Esta cantidad se define como:

$$\text{Vis} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (4.1.1)$$

donde este valor cuantifica la calidad de la recombinación óptica. Teóricamente, al introducir un estado de polarización diagonal en un régimen libre de ruido ($\gamma = 0$), el estado debe conservar su polarización a la salida tras los procesos de división y recombinación espacial. Esta caracterización se lleva a cabo con dos bases necesariamente ortogonales. Una elección común son las bases $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ y $\{|+\rangle, |-\rangle\}$. A estas corresponden las intensidades máximas y mínimas de la ecuación (4.1.1). Por lo tanto, tener un número cercano a uno es fundamental.

La optimización de la visibilidad requirió un ajuste fino de la posición del divisor de haz polarizante (PBS) central. Dado que este procedimiento induce una desviación en la segunda salida del PBS, fue necesario un proceso iterativo de compensación. Este consistió en el ajuste de la placa de media onda interna ($\text{HWP}(\theta_1)$) para garantizar un acoplamiento constante de los fotones que recorren la trayectoria óptica más larga hacia los detectores.

Finalizada la alineación del arreglo experimental, la etapa de preparación de estados (realizada por Alice) consistió en la generación de los autoestados correspondientes a los operadores σ_x y σ_z , que son el conjunto $\{|D\rangle, |A\rangle, |H\rangle, |V\rangle\}$.

Teóricamente, este proceso se describe a partir de un estado completamente mixto, donde la aplicación de los operadores genera los autoestados de manera equiprobable. Experimentalmente, se comienza con un estado en polarización horizontal, por lo que, para generar los cuatro autoestados, se utiliza una placa de media onda con los ángulos dados por la tabla 4.1.1.

Generar	$\text{HWP}(\theta_a)$
H	0°
V	45°
D	22.5°
A	-22.5°

Cuadro 4.1.1: Tabla de ángulos (θ_a) necesarios para generar los autoestados de los operadores σ_z y σ_x a partir de un estado con polarización horizontal con una placa de media onda ($\text{HWP}(\theta_a)$).

Cada uno de estos estados es sometido a la operación unitaria. En el modelo teórico, la fase se trata como una variable continua; no obstante, para este conjunto de mediciones, se fijó experimentalmente en $\theta = \pi$ mediante un retardador de fase variable de cristal líquido (LCVR).

4.2. Mediciones

El primer set de mediciones, sin filtros y $\gamma = 0$, se realiza sobre cada uno de estos estados. En la etapa de medición, Bob aplica mediciones proyectivas sobre los autoestados de los operadores σ_y y σ_z correspondientes a $\{|L\rangle, |R\rangle, |H\rangle, |V\rangle\}$.

Experimentalmente, realizar estas mediciones corresponde a ajustar las placas de onda para efectuar la proyección según la tabla 4.2.1.

Medir	QWP(α_b)	HWP(θ_b)
H	0°	0°
V	0°	45°
L	0°	22.5°
R	0°	-22.5°

Cuadro 4.2.1: Tabla de ángulos (α_b , θ_b) necesarios para medir las componentes de los autoestados de los operadores σ_z y σ_y de los fotones que recibe Bob.

A partir de estas mediciones, se registraron los datos de los detectores de avalancha para extraer la tasa de coincidencias entre el detector heraldo (D_T) y el módulo de Bob. Este registro confirma la generación de pares de fotones correlacionados mediante el proceso SPDC, lo que garantiza la operación en un régimen cuántico de fotones individuales.

A partir de los resultados de las mediciones de los autoestados de $y = 0$, $|V\rangle$ ($b = 1$) y $|H\rangle$ ($b = 0$), se extraen las coincidencias C_b , así construir la probabilidad y luego calcular la varianza óptima del operador σ_z (2.3.4) obtenidas de la forma:

$$p(b = i | \sigma_z, \rho_{a|x}^B) = \frac{C_{b=i}}{C_{b=1} + C_{b=0}}. \quad (4.2.1)$$

Para el cálculo de la información clásica de Fisher (2.3.3), se requiere evaluar tanto la distribución de probabilidad como su derivada con respecto al parámetro de fase de los autoestados de $y = 1$, $|R\rangle$ ($b = 1$) y $|L\rangle$ ($b = 0$). Para ello, se utiliza la expresión de la derivada centrada en el valor $\theta = \pi$:

$$\partial_\theta p_\pi = \frac{p_\pi^{+h}(b | \sigma_y, \rho_{a|x}) - p_\pi^{-h}(b | \sigma_y, \rho_{a|x})}{2h}. \quad (4.2.2)$$

Esta derivada numérica se evalúa introduciendo un incremento angular $h = 2,5^\circ$ (equivalente a 0,043 [rad]) en el retardador de cristal líquido. Como se explicó en la sección de metodología, el valor de θ o del desfase se ajusta a través del controlador cambiando el valor del voltaje aplicado.

Al replicar este procedimiento para distintos valores de ruido ($\gamma = 0; 0,25; 0,5; 0,6; 0,7; 1$) ajustando la placa de media onda interna del interferómetro, se obtiene la figura 4.2.1. En esta gráfica se observa un alto grado de concordancia entre la curva teórica y los datos experimentales, lo cual demuestra que, al incrementar el nivel de ruido del canal, la estimación del parámetro θ se

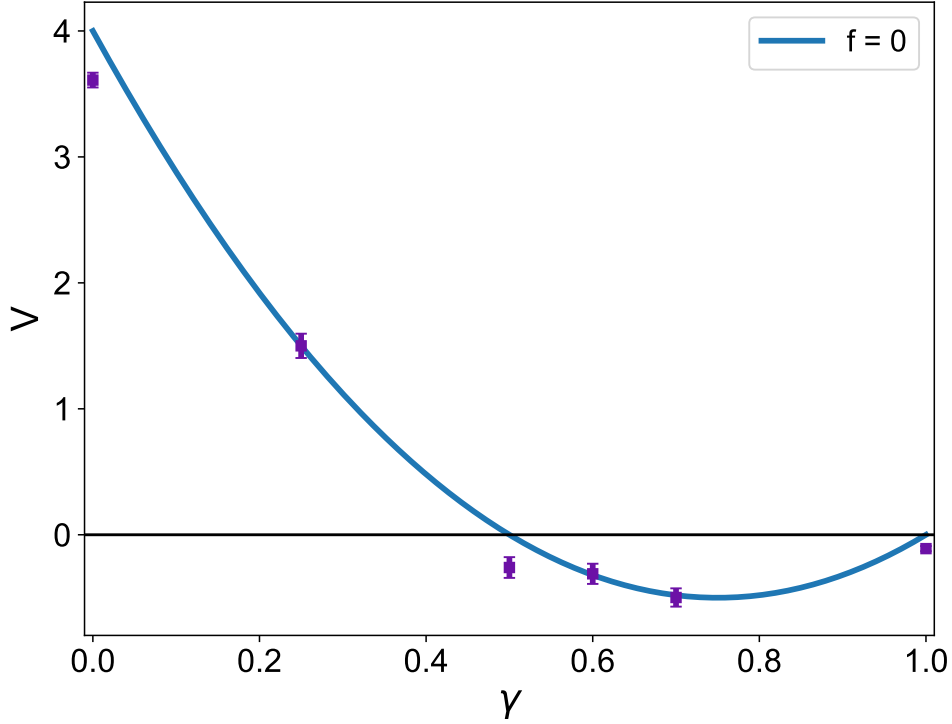


Figura 4.2.1: Comparación de curva teórica con resultados experimentales de cálculo de parámetro de *steering* (V) para distintos valores de γ sin la implementación de filtros.

vuelve gradualmente inviable.

Posteriormente, se implementaron las operaciones de filtrado estocástico (F_{pre} y F_{post}). La inserción de estos elementos ópticos introduce desviaciones en el haz transmitido, lo que hace imperativa una realineación espacial para recuperar los niveles óptimos de visibilidad antes de proceder con las mediciones correspondientes a los factores de filtrado $f = 0,41$ y $f = 0,7$. Cuando el sistema está listo nuevamente, se realizan las mediciones de los distintos valores de ruido variando la placa dentro del interferómetro para los grupos de filtros de $f = 0,41$ y $f = 0,7$, que representan las curvas naranja y verde, respectivamente, en la figura 4.2.2. Este comportamiento corrobora la teoría inicialmente explicada.

Los resultados evidencian que el incremento en el factor de filtrado (a costa de la reducción en la tasa de conteo de fotones) permite recuperar la ventaja metrológica cuántica en la estimación del parámetro θ en regímenes de ruido. Específicamente, se observan mejoras operativas en el punto $\gamma = 0,6$ al comparar los escenarios de

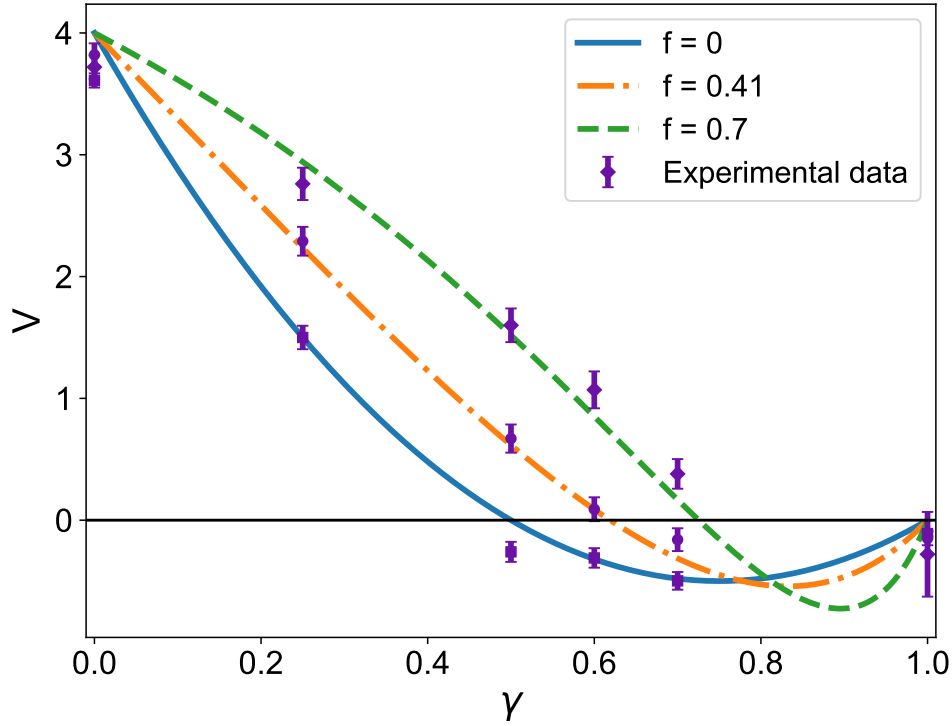


Figura 4.2.2: Demostración experimental de mejora del parámetro de *steering* en función del ruido γ para distintos valores de los filtros $f = 0,41$ y $f = 0,7$.

$f = 0$ y $f = 0,41$, así como en el punto de $\gamma = 0,7$ donde el sistema con el filtro $f = 0,7$ logra superar el rendimiento de las configuraciones anteriores.

Capítulo 5

Conclusión

Este trabajo demostró que la aplicación de operaciones de filtrado estocástico de pre- y post-selección permite activar el *steering* metrológico oculto en canales de fase ruidosos, restaurando su utilidad para la metrología cuántica mediante la revitalización de la violación de la desigualdad de *steering* metrológica (MSI). Se cuantificó el umbral máximo de ruido tolerable; se encontró que se amplía de $\gamma_c \approx 0,5$ sin filtrado a $\gamma_c \approx 0,6$ y $\gamma_c \approx 0,75$ con parámetros de filtro $f = 0,41 \pm 0,05$ y $f = 0,70 \pm 0,02$, respectivamente.

Es importante destacar que la cantidad recuperada corresponde a una ventaja de *steering* metrológico, la cual permite a Alice preparar remotamente a Bob para una estimación de fase que supera la cota impuesta por el modelo de estados ocultos locales (LHS), una propiedad distinta y no garantizada por la mera recuperación de entrelazamiento o fidelidad del estado.

La reproducción experimental de un escenario realista de pérdidas, en el contexto de la metrología cuántica y el *temporal steering*, requirió la aplicación rigurosa de la hipótesis de muestreo justo (*fair sampling assumption*). La configuración del interferómetro Sagnac, acoplada a un interferómetro Mach-Zehnder asimétrico, impone una pérdida de la mitad de los fotones compartidos entre Alice y Bob. Esta atenuación sitúa al sistema por debajo del umbral de eficiencia necesario para implementaciones libres de vulnerabilidades (*loophole-free*). En consecuencia, la adopción de esta hipótesis resulta fundamental; al asumir que las atenuaciones de los componentes ópticos actúan de manera global y no sesgada, se garantiza que las correlaciones observadas corresponden auténticamente a *temporal steering*.

y no a artefactos derivados de ineficiencias en la detección.

Tras realizar los estudios metrológicos de los estados en el escenario ruidoso, se procedió con la implementación de los filtros estocásticos. A partir de ello, se concluye que estos permiten una mejora altamente efectiva para la reactivación del *temporal steering*. Específicamente, los resultados experimentales evidencian que el incremento del parámetro de filtro f propicia un aumento en la información de Fisher clásica ($\mathbb{F}_C$). Sin embargo, cabe destacar que, al ser filtros estocásticos (probabilísticos), se ignora la cantidad de fotones absorbidos, de tal manera que la técnica propuesta resulta óptima en escenarios de metrología post-seleccionada donde la calidad de la información transmitida prima sobre el flujo completo de la señal óptica.

Dado el interés del *steering* como recurso en protocolos de información cuántica, estos resultados son directamente relevantes para otras aplicaciones, como la distribución de claves cuánticas *device-independent* de un solo lado (1sDI-QKD) o la adaptación de ruido para la certificación de canales cuánticos, y motivan la investigación experimental de protocolos metrológicos adaptados al ruido para otros modelos de ruido canónicos.

Bibliografía

- [1] Michael A. Nielsen & Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*, volume 7. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2010.
- [2] Inc Thorlabs. Full-wave liquid crystal variable retarders, 2026. <https://www.thorlabs.com/full-wave-liquid-crystal-variable-retarders-wave-plates?tabName=Overview> [Accedido: 2026].
- [3] Matteo G. A. Paris. Quantum estimation for quantum technology, 2009.
- [4] Vittorio Giovannetti, Seth Lloyd, and Lorenzo Maccone. Advances in quantum metrology. *Nature photonics*, 5(4):222–229, 2011.
- [5] Zhengfeng Ji, Guoming Wang, Runyao Duan, Yuan Feng, and Mingsheng Ying. Parameter estimation of quantum channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, 54(11):5172–5185, 2008.
- [6] H. M. Wiseman, S. J. Jones, and A. C. Doherty. Steering, entanglement, nonlocality, and the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. *Physical Review Letters*, 98(14), April 2007.
- [7] M. D. Reid, P. D. Drummond, W. P. Bowen, E. G. Cavalcanti, P. K. Lam, H. A. Bachor, U. L. Andersen, and G. Leuchs. Colloquium: The einstein-podolsky-rosen paradox: From concepts to applications. *Reviews of Modern Physics*, 81(4):1727–1751, December 2009.
- [8] Benjamin Yadin, Matteo Fadel, and Manuel Gessner. Metrological complementarity reveals the einstein-podolsky-rosen paradox. *Nature Communications*, 12(1), April 2021.
- [9] Kuan-Yi Lee, Jhen-Dong Lin, Adam Miranowicz, Franco Nori, Huan-Yu Ku, and Yueh-Nan Chen. Steering-enhanced quantum metrology using superpositions of noisy phase shifts. *Physical Review Research*, 5(1), February 2023.
- [10] Roope Uola, Ana C.S. Costa, H. Chau Nguyen, and Otfried Gühne. Quantum steering. *Reviews of Modern Physics*, 92(1), March 2020.
- [11] Paul G. Kwiat, Salvador Barraza-Lopez, André Stefanov, and Nicolas Gisin. Experimental entanglement distillation and ‘hidden’ non-locality. *Nature*, 409(6823):1014–1017, Feb 2001.

- [12] Lluís Masanes, Yeong-Cherng Liang, and Andrew C. Doherty. All bipartite entangled states display some hidden nonlocality. *Phys. Rev. Lett.*, 100:090403, Mar 2008.
- [13] Huan-Yu Ku, Hao-Cheng Weng, Yen-An Shih, Po-Chen Kuo, Neill Lambert, Franco Nori, Chih-Sung Chu, and Yueh-Nan Chen. Hidden nonmacrorealism: Reviving the leggett-garg inequality with stochastic operations. *Phys. Rev. Res.*, 3:043083, Oct 2021.
- [14] H. S. Karthik, S. Gómez, F. M. Quinteros, Akshata Shenoy H., M. Pawłowski, S. P. Walborn, G. Lima, and E. S. Gómez. Noise-resilient quantum random access codes. *Phys. Rev. A*, 111:032613, Mar 2025.
- [15] A Peres. *Quantum Theory: Concepts and Methods*. Springer Science & Business Media, June 2006.
- [16] E. Schrödinger. Probability relations between separated systems. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 32(3):446–452, 1936.
- [17] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777–780, May 1935.
- [18] Marco Túlio Quintino, Tamás Vértesi, and Nicolas Brunner. Joint measurability, einstein-podolsky-rosen steering, and bell nonlocality. *Physical Review Letters*, 113(16), October 2014.
- [19] Roope Uola, Tobias Moroder, and Otfried Gühne. Joint measurability of generalized measurements implies classicality. *Phys. Rev. Lett.*, 113:160403, Oct 2014.
- [20] Yueh-Nan Chen, Che-Ming Li, Neill Lambert, Shin-Liang Chen, Yukihiro Ota, Guang-Yin Chen, and Franco Nori. Temporal steering inequality. *Phys. Rev. A*, 89:032112, Mar 2014.
- [21] H. S. Karthik, J. Prabhu Tej, A. R. Usha Devi, and A. K. Rajagopal. Joint measurability and temporal steering. *Journal of the Optical Society of America B*, 32(4):A34, March 2015.
- [22] M. D. Reid. Demonstration of the einstein-podolsky-rosen paradox using nondegenerate parametric amplification. *Phys. Rev. A*, 40:913–923, Jul 1989.
- [23] Vittorio Giovannetti, Seth Lloyd, and Lorenzo Maccone. Quantum metrology. *Phys. Rev. Lett.*, 96:010401, Jan 2006.
- [24] Rafal Demkowicz-Dobrzański and Lorenzo Maccone. Using entanglement against noise in quantum metrology. *Phys. Rev. Lett.*, 113:250801, Dec 2014.
- [25] Samuel L. Braunstein and Carlton M. Caves. Statistical distance and the geometry of quantum states. *Phys. Rev. Lett.*, 72:3439–3443, May 1994.

- [26] Daniel Ljunggren and Maria Tengner. Optimal focusing for maximal collection of entangled narrow-band photon pairs into single-mode fibers. *Phys. Rev. A*, 72:062301, Dec 2005.
- [27] Esteban S. Gómez, Santiago Gómez, Pablo González, Gustavo Cañas, Johanna F. Barra, Aldo Delgado, Guilherme B. Xavier, Adán Cabello, Matthias Kleinmann, Tamás Vértesi, and Gustavo Lima. Device-independent certification of a nonprojective qubit measurement. *Phys. Rev. Lett.*, 117:260401, Dec 2016.
- [28] S. Gómez, A. Mattar, I. Machuca, E. S. Gómez, D. Cavalcanti, O. Jiménez Farías, A. Acín, and G. Lima. Experimental investigation of partially entangled states for device-independent randomness generation and self-testing protocols. *Phys. Rev. A*, 99:032108, Mar 2019.
- [29] Malvin Carl Teich Bahaa E. A. Saleh. *Fundamentals of Photonics*, volume 3. John Wiley & Sons, 2019.
- [30] M. P. Almeida, F. de Melo, M. Hor-Meyll, A. Salles, S. P. Walborn, P. H. Souto Ribeiro, and L. Davidovich. Environment-induced sudden death of entanglement. *Science*, 316(5824):579–582, Apr 2007.
- [31] A. Salles, F. de Melo, M. P. Almeida, M. Hor-Meyll, S. P. Walborn, P. H. Souto Ribeiro, and L. Davidovich. Experimental investigation of the dynamics of entanglement: Sudden death, complementarity, and continuous monitoring of the environment. *Phys. Rev. A*, 78:022322, Aug 2008.
- [32] Nicolas Brunner, Daniel Cavalcanti, Stefano Pironio, Valerio Scarani, and Stephanie Wehner. Bell nonlocality. *Rev. Mod. Phys.*, 86:419–478, Apr 2014.
- [33] Eugene Hecht. *Optics*. Addison Wesley, 4th intern edition, 2002.
- [34] Pajs. illustration of brewster angle, 2007.
- [35] Vern Lindberg. *Uncertainties and Error Propagation*. Louisiana State University, 2000. Part I of a manual on Uncertainties, Graphing, and the Vernier Caliper.

A1. Probabilidades y propagación de error

Las probabilidades utilizadas de la forma $p(b|M, \rho_{a|x}(\theta))$ descritas anteriormente se simplifican a $p(i|j)$, donde el índice i corresponde al estado en donde se proyecta la medición (existiendo dos salidas posibles $i = i_0, i_1$ al tratarse de medidas proyectivas), mientras que el índice j denota el estado enviado por Alice. Las probabilidades se representan en términos de las cuentas registradas en los detectores

$$p(i|j) = \frac{C(i|j)}{C(i_0|j) + C(i_1|j)}, \quad (\text{A1.1})$$

donde el término $C(i|j)$ corresponde al número de cuentas al proyectar sobre el estado i , siendo j el estado enviado por Alice. Cabe destacar que el cálculo se fundamenta en el *fair-sampling*; por lo que no se consideran las cuentas que son absorbidas por los filtros.

Estas expresiones ahora son utilizadas para reemplazar en las fórmulas de la varianza óptima del operador $\Delta\sigma_z^{opt}$ (2.3.4) y para la información de Fisher clásica óptima $\mathbb{F}_C^{opt}$ (2.3.3). Cada una es expresada en función de las probabilidades de la siguiente forma:

$$\Delta\sigma_z^{opt} = \min \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\{p(H|H) - p(V|H)\}^2 - \{p(H|V) - p(V|V)\}^2 \right], \right. \\ \left. 1 - \frac{1}{2} \left[\{p(H|+) - p(V|+)\}^2 - \{p(H|-) - p(V|-)\}^2 \right] \right\}, \quad (\text{A1.2})$$

$$\Delta\sigma_z^{opt} = \min \{g_1, g_2\}$$

La información clásica de Fisher queda de la forma

$$\mathbb{F}_C^{opt} = \max \left\{ \sum_{j:H,V} \sum_{i:L,R} \frac{1}{p(i|j)} \left(\frac{\partial p(i|j)}{\partial \theta} \right)^2, \sum_{j:+,-} \sum_{i:R,L} \frac{1}{p(i|j)} \left(\frac{\partial p(i|j)}{\partial \theta} \right)^2 \right\}, \quad (\text{A1.3})$$

$$\mathbb{F}_C^{opt} = \max \{f_1, f_2\}.$$

Para el cálculo experimental de la derivada, se emplea el método de la derivada centrada

$$\frac{\partial p(i|j)}{\partial \theta} = \frac{p^{+h}(i|j) - p^{-h}(i|j)}{2h},$$

en el experimento se utilizó un paso $h \approx 0,0436$ [rad].

Por otra parte, para estimar el error de cada punto en los gráficos, se utiliza el método de propagación de errores, el cual permite calcular la varianza. Para una variable $X = X(A, B)$, la varianza obtenida mediante propagación de errores está dada por [35]

$$\Delta X^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial A} \Delta A \right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial B} \Delta B \right)^2. \quad (\text{A1.4})$$

Por lo tanto, la expresión del error de la varianza óptima del operador σ_z corresponde a:

$$\begin{aligned} (\Delta g_1)^2 &= |p(H|H) - p(V|H)|^2 \Delta p(H|H)^2 + \\ &\quad |p(H|H) - p(V|H)|^2 \Delta p(V|H)^2 + \\ &\quad |p(H|V) - p(V|V)|^2 \Delta p(H|V)^2 + \\ &\quad |p(H|V) - p(V|V)|^2 \Delta p(V|V)^2, \\ (\Delta g_2)^2 &= |p(H|+) - p(V|+)|^2 \Delta p(H|+)^2 + \\ &\quad |p(H|+) - p(V|+)|^2 \Delta p(V|+)^2 + \\ &\quad |p(H|-) - p(V|-)|^2 \Delta p(H|-)^2 + \\ &\quad |p(H|-) - p(V|-)|^2 \Delta p(V|-)^2 \end{aligned} \quad (\text{A1.5})$$

donde, dependiendo del valor que se escoja al utilizar la varianza óptima del operador σ_z , se escogerá Δg_1 o Δg_2 .

Por su parte, el error asociado a la información óptima de Fisher clásica corresponde

a:

$$\begin{aligned}
 (\Delta \mathbb{F}_C^i)^2 &= \left| \frac{\partial \mathbb{F}_C^i}{\partial p(i|j)} \right|^2 \Delta(p(i|j))^2 + \left| \frac{\partial \mathbb{F}_C^i}{\partial \left(\frac{\partial p(i|j)}{\partial \theta} \right)} \right|^2 \Delta \left(\frac{\partial p(i|j)}{\partial \theta} \right)^2, \\
 (\Delta \mathbb{F}_C^i)^2 &= \sum_{i:R,L} \left| -\frac{1}{p(i|j)^2} \left(\frac{\partial p(i|j)}{\partial \theta} \right)^2 \right|^2 \Delta(p(i|j))^2 + \\
 &\quad \sum_{i:R,L} \left| \frac{1}{p(i|j)} \cdot 2 \cdot \left(\frac{\partial p(i|j)}{\partial \theta} \right) \right|^2 \Delta \left(\frac{\partial p(i|j)}{\partial \theta} \right)^2,
 \end{aligned} \tag{A1.6}$$

se define $\mathbb{F}_C^j$ como la información de Fisher del estado j asociado a θ . La expresión $\mathbb{F}_C^{opt}$ se compone de cuatro términos, uno por cada estado preparado por Alice. En particular, los términos asociados a los estados $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ se anulan, ya que estos corresponden a autoestados del generador $H = \sigma_z$ y por lo tanto no cambian bajo la rotación $U(\theta)$, resultando en información de Fisher nula. Por esto solo es necesario propagar el error de los términos asociados a los estados $\{|+\rangle, |-\rangle\}$.

Para estudiar el error asociado a la información de Fisher de los estados $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ se analizan primero sus probabilidades de proyectar sobre los estados $\{|R\rangle, |L\rangle\}$ en el escenario general con f, γ variables.

$$\begin{aligned}
 p(+, R) &= \frac{1}{2 - f\gamma} \left(\sin(2\theta) \sqrt{1 - \gamma} - \frac{1}{2} f\gamma + 1 \right), \\
 p(+, L) &= \frac{1}{2 - f\gamma} \left(-\sin(2\theta) \sqrt{1 - \gamma} - \frac{1}{2} f\gamma + 1 \right), \\
 p(-, R) &= \frac{1}{2 - f\gamma} \left(-\sin(2\theta) \sqrt{1 - \gamma} - \frac{1}{2} f\gamma + 1 \right), \\
 p(-, L) &= \frac{1}{2 - f\gamma} \left(\sin(2\theta) \sqrt{1 - \gamma} - \frac{1}{2} f\gamma + 1 \right).
 \end{aligned}$$

Al evaluar el valor absoluto de la derivada respecto a θ de cada una de estas probabilidades se obtiene la misma expresión

$$\frac{\partial p(i, j)}{\partial \theta} = \frac{2 \cos(2\theta) \sqrt{1 - \gamma}}{2 - f\gamma}.$$

Tras evaluar $\theta = \pi$, el cual corresponde al escenario de trabajo, es posible realizar

la propagación de errores según (A1.4)

$$\Delta \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right)^2 = \left| \frac{-2 + 2f - f\gamma}{\sqrt{1 - \gamma}(2 - f\gamma)^2} \right|^2 (\Delta\gamma)^2 + \left| \frac{2\gamma\sqrt{1 - \gamma}}{(2 - f\gamma)^2} \right|^2 (\Delta f)^2.$$

Aquí se observa la necesidad de realizar nuevamente un análisis de propagación de errores. Para el término $(\Delta\gamma)^2$ se emplea la relación (3.5.5) resultando en

$$(\Delta\gamma)^2 = \left| 4\sqrt{\gamma(1 - \gamma)} \right|^2 (\Delta\theta_1)^2$$

donde el error del ángulo se considera como la mitad de la sensibilidad de la placa de media onda, de tal manera que $(\Delta\theta_1)^2 \approx (0,017 \text{ rad})^2$. Y para el error de f se realiza la propagación de errores sobre (3.6.2). Obteniendo

$$(\Delta f)^2 = \frac{|I_T|^2 + |I_R|^2}{(I_T + I_R)^4} (\Delta I)^2,$$

donde $(\Delta I)^2$ representa el error de la intensidad del láser de alineación que, nuevamente, se considera como la mitad de la sensibilidad del instrumento de medida, correspondiendo a $(\Delta I)^2 = (0,0005 \text{ mW})^2$.

Finalmente el error asociado a la probabilidad $\Delta(p(i|j))$ viene dado por

$$\Delta(p(i|j)) = \frac{\sqrt{C(i_0|j) \cdot C(i_1|j) \cdot N}}{N^2},$$

donde N corresponde a $C(i_0|j) + C(i_1|j)$, y las cuentas siguen una distribución de Poisson $\Delta C(i|j) = \sqrt{C(i|j)}$.