



Universidad de Concepción

Dirección de Postgrado

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas – Programa de Magíster en Ciencias con
Mención en Física

CANTIDADES CONSERVADAS INVARIANTES EN TEORÍAS GRAVITACIONALES EN PRESENCIA DE CAMPOS EXTERNOS

Tesis para optar al grado de Magíster en Ciencias con mención en Física

FELIPE IGNACIO PORTALES OLIVA
Concepción – Chile
2015

Profesor Guía: Guillermo Francisco Rubilar Alegría
Dpto. de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Índice general

Índice general	II
Lista de figuras	IV
Resumen	V
Abstract	VI
Agradecimientos	VII
1. Introducción	1
2. Cargas Conservadas Invariantes en la Teoría de Einstein-Cartan	5
2.1. El teorema de Noether en el lenguaje de formas diferenciales	5
2.1.1. Invarianza de Lorentz del lagrangeano	7
2.1.2. Invarianza bajo difeomorfismos	11
2.2. Cantidades conservadas gravitacionales no invariantes en sistemas cerrados	12
2.3. Cantidades conservadas gravitacionales invariantes en sistemas cerrados	14
2.3.1. El lagrangeano gravitacional	14
2.3.2. Lagrangeano de materia	16
2.3.3. Identidades de Noether correspondientes a difeomorfismos.	17
2.3.4. Corrientes escritas como superpotenciales	18
2.3.5. Cantidades conservadas para el agujero negro Kerr-AdS	20
3. Cargas Conservadas Invariantes en Teorías Métrico-Afines Generales	22
3.1. El teorema de Noether en la base holónoma	22
3.2. Identidades de Noether correspondientes a difeomorfismos	24
3.3. Corriente de difeomorfismo	25
3.4. Corrientes covariantes	29
3.5. Forma holónoma de la corriente en formas diferenciales	31
3.6. Vectores de Killing generalizados	31
3.7. Corriente asociada a vectores de Killing generalizados	32
3.8. Carga de difeomorfismo	33
3.8.1. Lagrangeano de Hilbert-Einstein	33
4. Cantidades conservadas gravitacionales invariantes en sistemas abiertos	35
4.1. Teoría de Einstein-Cartan	35
4.2. Teorías métrico-afines	36
5. Discusión final	37

A. Elementos de Geometría Diferencial	39
A.1. Definiciones básicas	39
A.2. Cambio de base	41
A.3. Diferenciación	41
A.4. Contracción	42
A.5. Derivada de Lie	43
A.6. Objetos geométricos	43
A.6.1. Métrica	43
A.6.2. Conexión y diferenciación covariante	44
A.6.3. Curvatura, torsión y no-metricidad	46
A.7. Isometrías	48
A.8. Integración sobre variedades	48
A.8.1. Orientabilidad	48
A.8.2. Volumen e integrales	48
A.8.3. El teorema de Stokes	50
B. El teorema de Noether en el espacio de Minkowski	52
B.1. Teorema de Noether	54
B.2. Simetrías externas	55
B.2.1. Traslaciones espacio-temporales	55
B.2.2. Transformaciones de Lorentz	57
Bibliografía	65



Índice de figuras

2.1. Subvariedad $\Omega = [t_1, t_2] \times \Sigma$. Se ven representados las secciones en las que se divide el borde.	7
B.1. Traslación 2-dimensional.	55
B.2. Transformación de Lorentz bidimensional mostrada como una rotación de las coordenadas del espacio tiempo.	57
B.3. La aplicación sucesiva de más de una transformación de Lorentz es también una transformación de Lorentz.	59
B.4. Ilustraciones de campos en el plano xy . ambas figuras son adaptaciones de gráficos obtenidos en [40].	64



Resumen

En este trabajo se presenta el formalismo para encontrar cargas conservadas a partir de la simetría de difeomorfismos en sistemas gravitacionales, tanto en la teoría de Einstein-Cartan y en teorías Métrico-Afines Generales. Se encuentra que el tratamiento “tradicional” que toma en cuenta solo las variaciones debidas a los difeomorfismos, no produce cargas conservadas escalares bajo transformaciones locales de Lorentz, por lo que se extiende el formalismo para incluir esta simetría, obteniendo así cargas de difeomorfismo invariantes bajo transformaciones locales de Lorentz. Se calcula también el superpotencial asociado a la corriente de difeomorfismo para teorías Métrico-Afines Generales, el que generaliza la construcción de Komar. Se estudian las corrientes inducidas por vectores de Killing generalizados, importantes al considerar la geometría como background. Finalmente se estudia el impacto de los campos no-dinámicos sobre la conservación de la corriente y de las cargas, en ambas teorías.



Abstract

In this thesis work, the formalism to construct conserved charges that arise from diffeomorphism symmetry in gravitational systems, considering both Einstein-Cartan and the more general Metric-Affine Gravity theories, is presented. We find that the “traditional” approach that takes into account only the variations due to diffeomorphisms doesn’t produce scalar conserved charges under local Lorentz transformations, therefore, the formalism is extended to include this symmetry, thus finding invariant conserved charges under local Lorentz transformations that arise from diffeomorphism. The superpotential associated with the diffeomorphism current is found, which generalizes the Komar construction. Currents induced by a generalized Killing vector field are also studied. Finally, the effects that non-dynamical fields have over the current and charge is analyzed.



Agradecimientos

Antes que cualquier otra mención, quiero expresar mi más profundo y sincero agradecimiento a mi familia: en particular a mis padres Jaime y Norma, ya que ellos me han dado de todo en esta vida, donde lo menos importante es lo material, ya que lo que realmente agradezco es el inmenso cariño que me han entregado, la paciencia que han tenido conmigo, el esfuerzo que han puesto para poder darme la educación que he recibido, el apoyo que me han brindado al escoger la formación científica, aún sin comprender completamente lo que significa ser un científico y en general, la formación integral que ellos se dedicaron a darme desde pequeño. Siempre han buscado darnos la felicidad a Victoria, Rodrigo y a mi, realmente soy afortunado de tenerlos, no todos tienen el privilegio de crecer en una familia como la que ellos han formado.

Magno es también mi agradecimiento a mi hermosa polola Catalina, siempre tuviste para mi la palabra de aliento justa, cuando me he sentido más débil y con ganas de abandonar. Me acompañó desde el día 1 de esta tesis y nunca me dejó darme por vencido, siempre convencida de que soy perfectamente capaz de lograr mi objetivo. De la misma forma, no puedo dejar de expresar mi gratitud a mis amigos: Nataly, Benjamín, Francisco, Alberto y muchos otros, quienes siempre estuvieron ahí para acompañarme cuando los necesité, me dieron las fuerzas necesarias para continuar y más de alguna discusión interesante compartieron conmigo.

De carácter fundamental ha resultado para el desarrollo de esta tesis y en mi formación como científico el apoyo brindado por mi profesor guía Guillermo Rubilar. Gracias por su infinita paciencia para conmigo, por el siempre tener la respuesta a las dudas que han ido surgiendo en el camino y la solución a los problemas que mi propia inexperiencia no me permitió ver. Gracias por su tremenda disposición para sus estudiantes, estoy seguro que todos y cada uno lo agradecemos de sobremana, por ver a la persona que busca consejo y no al estudiante que pasa a su oficina a molestar. Tampoco puedo olvidar a mis profesores del Departamento de Física de la Universidad de Concepción, entre los que puedo mencionar especialmente a Fernando Izaurieta, Juan Crisóstomo, quienes junto con el profesor Rubilar me han enseñado todo lo que sé sobre gravitación; a los profesores Félix Borotto y Aldo Delgado, quienes me han dado oportunidades importantísimas en mi desarrollo personal como han sido las ayudantías y experiencias de divulgación científica, respectivamente. En general, agradezco a todos los profesores del Departamento que han sido parte de mi formación. También siento que debo mencionar a los doctores Yuri Obukhov, de la Academia Rusa de Ciencias y Dirk Puetzfeld de la Universidad de Bremen, ya que comparten la autoría junto al profesor Rubilar y a mi de la publicación que surgió de este trabajo de tesis.

Gracias también a la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica, por la beca CONICYT-PCHA/MagísterNacional/2014-22141453; al Núcleo Científico Milenio “Óptica Avanzada”, Iniciativa Científica Milenio, Proyecto ICM N° P10-030-F, del que también soy becario; y a la Dirección de Postgrado de la Universidad de Concepción al otorgarme la beca Articulación Pregrado-Postgrado, instituciones sin las cuales esta tesis no sería posible.

Capítulo 1

Introducción

La *teoría clásica de campos* es la rama de la Física que describe el comportamiento de un sistema en términos de campos, los que son mapeos que asignan un valor específico a un punto del espacio-tiempo, para representar cantidades que caracterizan el estado del sistema. El objetivo es describir la dinámica a través de ecuaciones diferenciales. Los campos se interpretan físicamente como objetos extendidos sobre el espacio y el tiempo, interpretación que abarca sistemas mecánicos como el movimiento de una sábana al viento o interacciones fundamentales en la naturaleza, como el electromagnetismo. La teoría clásica de campos tiene aplicaciones en diversos ámbitos de la Física y fundamenta las bases de teorías de gran relevancia en el contexto actual, como la Teoría Cuántica de Campos, la Física de Partículas o las generalizaciones de la Relatividad General. La herramienta principal de la que hace uso esta teoría es el *formalismo lagrangeano*.

El formalismo lagrangeano permite caracterizar completamente un sistema físico a partir de un funcional llamado *acción*, un objeto abstracto representado por una integral en el que se encuentra codificada toda la información, como son la dinámica y las interacciones entre los campos y con el entorno. Además, nos permite describir la evolución del sistema a través de un conjunto de ecuaciones que se obtienen de un axioma inherentemente filosófico: *el principio de mínima acción* o *principio de Hamilton*, que establece que toda configuración aceptable de los campos corresponde con un valor mínimo de la acción.

Por otra parte, uno de los resultados más significativos y bellos de toda la Física, es el teorema de Noether [1]. Este teorema establece una relación entre las simetrías presentes en la acción y una corriente que se define para cada sistema. Bajo ciertas condiciones, la corriente obtenida tiene divergencia nula, lo que se conoce como una *ley de conservación*. El estudio de dichas leyes tiene un objetivo importantísimo: nos permite definir *cantidades conservadas*, es decir, que no evolucionan; las que son medibles al momento de llevar la teoría al laboratorio y hacer las observaciones correspondientes.

Podemos citar una numerosa cantidad de aplicaciones importantes del teorema de Noether. Por ejemplo, en la mecánica clásica, la *energía* y el *momentum angular* son cantidades que describen la dinámica del sistema y que se obtienen a partir de las leyes de conservación. Por ejemplo, si consideramos un sistema en el que todas las fuerzas externas son conservativas (esto quiere decir que el trabajo realizado por dichas fuerzas no depende del camino recorrido, o equivalentemente, que el trabajo realizado a lo largo de un camino cerrado es nulo), la energía no cambia en el tiempo. Así, uno puede hacer predicciones de manera sencilla sobre el estado futuro del sistema, conociendo el estado inicial, ya que la conservación de la energía reduce los grados de libertad del sistema.

Un claro ejemplo de la conservación de la energía se obtiene del oscilador armónico simple, en el que se considera una masa m que se ubica en una posición $x_0\hat{x}$ de un sistema de referencia cartesiano a la que se ha sujetado un resorte comprimido de constante k a lo largo del eje x con el otro extremo fijo. La fuerza que actúa sobre la masa está dada por

$$\mathbf{F} = -k(x - x_0)\hat{x} = m\ddot{x}\hat{x}, \quad (1.1)$$

que define una ecuación diferencial de segundo orden en $x = x(t)$. Esta es una fuerza conservativa,

por lo que la energía

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2, \quad (1.2)$$

es una cantidad conservada. Notemos nuevamente que ésta es una ecuación diferencial para $x(t)$, sin embargo, esta vez es de primer orden, por lo que la introducción de la cantidad conservada reduce la dificultad del problema. Ambas ecuaciones admiten una solución de la forma

$$x(t) = A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi_0 \right), \quad (1.3)$$

donde la amplitud A y la fase ϕ_0 se obtienen de las condiciones iniciales, que determinan también el valor de la energía E .

Otro ejemplo importante de cantidades conservadas que surge de la mecánica de la partícula es una partícula de masa m la que se encuentra sometida a una fuerza central. La fuerza que actúa sobre el cuerpo está dada por

$$\mathbf{F} = -\nabla V(r) = -\frac{dV}{dr} \hat{\mathbf{r}}, \quad (1.4)$$

donde $r > 0$ es la distancia entre el objeto y el centro de giro u origen y $\hat{\mathbf{r}}$ el vector unitario que apunta desde el origen a la masa. El momentum angular asociado a la partícula que rota respecto del origen está dado por (utilizando coordenadas cilíndricas para la descripción)

$$\mathbf{L} = mr^2 \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}}, \quad (1.5)$$

y es una constante, por lo que el movimiento tiene lugar en un plano. Así, se elimina un grado de libertad gracias a la conservación del momentum angular, simplificando la resolución y estudio del problema.

Hasta este punto está claro que existen cantidades conservadas para los sistemas mencionados, las que facilitan la tarea de resolver las ecuaciones de movimiento de las partículas. Sin embargo, no hemos hecho mención de las simetrías presentes en cada problema propuesto. En el caso del oscilador armónico simple, se tiene que la ecuación de movimiento (1.1) es invariante ante *reparametrizaciones temporales*. Por otra parte, en el caso de la fuerza central (1.4), ésta es la única fuerza que actúa sobre la partícula y es invariante bajo rotaciones, ya que depende únicamente de la distancia r . Vemos entonces que la aparición de la energía y del momentum angular como cantidades conservadas de los respectivos movimientos no es casualidad, ya que ambas aparecen de una **simetría** del sistema. En general de la mecánica clásica se obtienen tres resultados de gran interés para el análisis de cantidades conservadas: la invarianza del sistema bajo *reparametrizaciones temporales* tiene asociada la *energía* como carga conservada, la invarianza bajo *traslaciones espaciales* da origen a la conservación del *momentum lineal* y los sistemas invariantes bajo *rotaciones* tienen *momentum angular* constante. Estos importantísimos resultados tienen aplicaciones que van más allá del ámbito pedagógico en el estudio de los problemas de invariantes, ya que son resultados generales aplicables a cualquier sistema, incluso más allá de la mecánica clásica.

Otro resultado del teorema de Noether, que puede considerarse uno de los más notables y físicamente importantes se obtiene al considerar la teoría electromagnética de Maxwell, la que viene dada por las ecuaciones (en notación relativista)

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu, \quad (1.6)$$

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0, \quad (1.7)$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.8)$$

es la intensidad de campo de Faraday, que contiene la información respecto del campo eléctrico y magnético en el sistema; A_μ el cuadripotencial electromagnético y j^μ la cuadricorriente. Bajo esta

definición, la intensidad de campo es invariante bajo *transformaciones de gauge*, lo que quiere decir que uno puede reemplazar el cuadripotencial A_μ

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi, \quad (1.9)$$

donde χ es una función escalar, así

$$F'_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu}. \quad (1.10)$$

Esta es una simetría sobre las ecuaciones de campo, ya que esta transformación mantiene inalterada la dinámica descrita por las ecuaciones (1.6) y (1.7). Por otra parte, la acción de Maxwell-Faraday viene descrita por

$$S_{\text{EM}} = - \int_M d^4x \left(\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + j_\mu A^\mu \right), \quad (1.11)$$

donde M es el espacio de Minkowski 4-dimensional. Esta acción no pareciera ser invariante bajo la transformación de gauge, ya que al aplicarla la nueva acción se escribe

$$\begin{aligned} S'_{\text{EM}} &= - \int_M d^4x \left[\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + j^\mu A_\mu + \partial_\mu (j^\mu \chi) - \chi \partial_\mu j^\mu \right] \\ &= S_{\text{EM}} + \int_M d^4x [\partial_\mu (j^\mu \chi) - \chi \partial_\mu j^\mu], \end{aligned} \quad (1.12)$$

donde el término bajo la derivada total no contribuye a la dinámica del sistema, ya que es un término de borde. Sin embargo, si se satisface

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (1.13)$$

la acción es invariante bajo transformaciones de gauge. La ecuación (1.13) se conoce como *ley de conservación local de la carga* y establece que la variación de densidad de carga eléctrica en un punto se compensa con el flujo de corriente eléctrica. Así, la carga eléctrica

$$q := \int_{E_3} j^0 d^3x, \quad (1.14)$$

donde E_3 es el espacio euclidiano tridimensional, es una cantidad conservada.

En general, la teoría de campos contribuye con la búsqueda de cargas y corrientes conservadas de los sistemas, ya que definir las nociones de conceptos que se conocen de otras áreas ayuda a la completa descripción de los fenómenos físicos. Por ejemplo, un campo escalar acoplado al campo electromagnético tiene su propia carga eléctrica, la que puede obtenerse a través de los métodos del teorema de Noether. Lo mismo sucede para el campo de Dirac, etc. Así, la teoría de campos está intrínsecamente relacionada con el problema de los invariantes en Física.

Independientemente del desarrollo de la teoría de campos, en el año 1915, Einstein publicó su *Teoría General de la Relatividad* [2], en la que considera al espaciotiempo como una variedad, en la cual, la métrica que la caracteriza es una variable dinámica, por lo que el campo gravitacional se interpreta como la curvatura del espaciotiempo inducida por la dinamicidad de la métrica. Esta interpretación fue revolucionaria, ya que el concepto newtoniano de *acción a distancia*, en la que propagación del campo gravitacional se considera *instantánea* a toda la extensión del espacio, se reemplazó por la idea de que el campo gravitacional se propaga a una velocidad finita a lo largo del entramado espaciotemporal. Por otra parte, también eliminó la necesidad de definir el *espacio absoluto*, noción que Newton utilizó para definir a los observadores inerciales, que se encuentran en movimiento con velocidad constante o en reposo respecto de este espacio absoluto. En cambio, Einstein propuso que todo observador en *caída libre* es un *observador localmente inercial*, lo que quiere decir que las leyes de la Física (el electromagnetismo, la mecánica clásica, etc.) toman su forma más simple (sin efectos gravitatorios) en una vecindad de este observador. La teoría de Einstein ha predecido efectos que no se encuentran en su análogo newtoniano, de los cuales muchos han sido confirmadas observacionalmente, por lo que ha resistido la prueba del tiempo.

Sin embargo, las consideraciones de Einstein son bastante limitadas, ya que por simplicidad su teoría considera únicamente a la métrica como el campo dinámico, por lo que el concepto de afinidad dentro de la variedad queda determinado a partir de ésta. Ésto significa que la interacción de la microestructura de la materia (propiedades como el espín cuántico) con el campo gravitacional, no son considerados en la teoría. Así, es natural generalizar ésta, para independizar la afinidad de la metricidad, dando lugar a teorías como la *Teoría de Einstein-Cartan* y la *Gravedad Métrico-Afin*, siendo esta última, la más general de todas, ya que hace un menor número de suposiciones respecto de la naturaleza del espaciotiempo, lo que conlleva a aumentar la cantidad de grados de libertad.

En el contexto de las teorías gravitacionales, el estudio de las corrientes conservadas es de gran relevancia, ya que conceptos tan familiares de la mecánica newtoniana como la masa o el momento angular se pueden definir para una teoría gravitacional a través de las “cargas” que surgen de la simetría de difeomorfismo, esto es, de la invarianza de la acción bajo transformaciones generales de coordenadas, lo que nos permite obtener una idea de las causas de la existencia del campo gravitacional.

La literatura existente, respecto de las cargas conservadas en teorías gravitacionales es bastante extensa. Podemos encontrar el primer estudio de las cargas que surgen de la invarianza bajo transformaciones generales de coordenadas en una teoría gravitacional gracias a Komar [3,4], quien encontró la carga de difeomorfismo para la teoría general de la relatividad. Estos trabajos son un importante punto de referencia, ya que en casi toda la literatura se busca empalmar los resultados obtenidos con los de Komar. Más adelante la discusión se extendió aún más en el trabajo de Iyer y Wald [5], quienes sentaron las bases para encontrar cargas conservadas en teorías métricas generales, donde los lagrangeanos gravitacionales pueden depender de órdenes arbitrarios de las derivadas de la métrica. Dentro de la misma línea, Petrov y Lompay contruyeron identidades de Noether, leyes de conservación y superpotenciales para teorías métricas [6] y teorías métrico-torsionales [7,8], buscando que éstas fueran explícitamente covariantes. En los trabajos [9–12] se estudió el comportamiento de las teorías invariantes de gauge locales, lo que tiene aplicaciones a Relatividad General y sus extensiones. Por otra parte, Ferraris, Francaviglia y Raiteri desarrollaron un método para encontrar cantidades conservadas a partir de las ecuaciones de campo del sistema en [13]. En los trabajos [14–17] se utilizan directamente los métodos del teorema de Noether para calcular cargas conservadas de difeomorfismo. Otras contribuciones importantes vienen dadas por Giachetta, Sardanashvily y Mielke [18,19], quienes generalizaron el superpotencial de Komar para teorías métrico-afines. Son de especial importancia para esta tesis los trabajos de Obukhov y Rubilar [20–24], que tratan sobre la invarianza bajo transformaciones locales de Lorentz de las cargas que se obtienen de la simetría de difeomorfismo en la teoría de Einstein-Cartan, y los trabajos de Obukhov y Puetzfeld [25,26], que establecen las identidades de difeomorfismo para teorías métrico-afines generales.

En esta tesis se plantea el problema de las cargas de difeomorfismo invariantes en sistemas con campos externos; lo que hace referencia a las propiedades de transformación de la carga que surge de los difeomorfismos, bajo distintos tipos de transformaciones de los campos, para las cuales se estudian las modificaciones de su dinámica, inducidas por campos de fondo. En particular, es de gran interés que las cantidades conservadas obtenidas sean escalares bajo las simetrías más usuales que presentes en teorías gravitacionales. En el Capítulo 2 se presenta el formalismo de Noether para la construcción de corrientes en la *teoría de Einstein-Cartan*, escrito en el lenguaje de las formas diferenciales, que se aplica para encontrar la corriente de difeomorfismo y el respectivo superpotencial, reproduciendo como caso particular los resultados de Obukhov y Rubilar en [20–24]. En el Capítulo 3 se desarrolla nuevamente el formalismo de Noether, esta vez escrito en la base holónoma (à la Palatini) para *teorías Métrico-Afines Generales*, donde, utilizando los resultados de Obukhov y Puetzfeld [25,26], se calculan la corriente de difeomorfismo; el respectivo superpotencial, que se compara con el obtenido en el capítulo anterior tomando las restricciones correspondientes; y se estudia la conservación de la corriente al asociarla a un *vector de Killing generalizado*, resultados que fueron publicados en [27]. En el Capítulo 4 se presentan las consecuencias que tienen los campos no dinámicos sobre la conservación de la corriente y de la carga. En el Capítulo 5 se exponen las conclusiones y se discuten las consecuencias de los resultados obtenidos en esta tesis. En el Apéndice A se describe la notación y los convenios de respecto de la geometría que se utilizan a lo largo de la tesis y en el Apéndice B se muestran resultados de la teoría clásica de campos sobre el espacio de Minkowski.

Capítulo 2

Cargas Conservadas Invariantes en la Teoría de Einstein-Cartan

2.1. El teorema de Noether en el lenguaje de formas diferenciales

Una de las herramientas más importantes de la Física-Matemática es el teorema de Noether [1], el que establece que una simetría continua de un sistema tiene asociada una corriente conservada.

A grandes rasgos, nuestro interés es estudiar el cómo ciertas transformaciones de simetría afectan al comportamiento de sistemas que incluyen efectos gravitacionales y, naturalmente, las cargas conservadas que aparecen de éstas. Como punto de partida consideremos un sistema físico descrito por una acción definida mediante

$$S := \int_M \mathcal{L}(\Phi, d\Phi). \quad (2.1)$$

Aquí, M es la variedad espacio-temporal d -dimensional y $\mathcal{L}$ es la d -forma densidad lagrangeana, que depende de los campos Φ^A (los que se tratan como p_A -formas) y del primer orden de sus derivadas. El índice A recorre el intervalo $1, \dots, N$, con N la cantidad de campos independientes que describen al sistema.

Una variación infinitesimal de los campos induce una variación de la densidad lagrangeana que escribimos

$$\delta \mathcal{L} = \delta \Phi^A \wedge \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^A} + \delta(d\Phi^A) \wedge \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(d\Phi^A)}, \quad (2.2)$$

donde se induce el concepto de derivada parcial de la d -forma densidad lagrangeana con respecto de una p -forma como la $(d-p)$ -forma que acompaña a la respectiva variación. Si consideramos la definición usual de derivada funcional, dada por

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi^A} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^A} - (-1)^{p_A} d \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(d\Phi^A)} \right), \quad (2.3)$$

es posible reescribir la expresión (2.2) como

$$\delta \mathcal{L} = \delta \Phi^A \wedge \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi^A} + d \left(\delta \Phi^A \wedge \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(d\Phi^A)} \right). \quad (2.4)$$

Una transformación de simetría es una aplicación sobre los campos que no cambia la forma del lagrangeano, salvo quizás por un término de borde. En particular, es nuestro interés estudiar las transformaciones de simetría continuas sobre los sistemas físicos, es decir, aquellas que dependen de un parámetro continuo. Este tipo de transformaciones se representan mediante la acción de un elemento de un grupo de Lie sobre los campos. Si consideramos un grupo de Lie G , cuyos generadores Ω_i satisfacen el álgebra

$$[\Omega_i, \Omega_j] = f_{ij}^k \Omega_k, \quad (2.5)$$

podemos definir los *campos transformados* de manera que

$$\Phi'^A(\lambda, x) = (e^{\lambda^i \Omega_i})^A_B \Phi^B(x), \quad (2.6)$$

con $\lambda^i = \lambda^i(x)$ una función de punto que caracteriza a la transformación. De esta forma podemos escribir una variación infinitesimal de los campos bajo los elementos del grupo G como

$$\delta \Phi^A = \varepsilon \lambda^i (\Omega_i)^A_B \Phi^B, \quad (2.7)$$

donde ε es un parámetro infinitesimal. Ahora bien, puede que bajo esta transformación la acción sea quasi-invariante, es decir, que cambia solamente por un término de borde; de manera que la variación del lagrangeano está dada por

$$\delta \mathcal{L} = \varepsilon d\Lambda_G, \quad (2.8)$$

lo que nos permite reescribir (2.4) como

$$d \left(\lambda^i (\Omega_i)^A_B \Phi^B \wedge \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (d\Phi^A)} - \Lambda_G \right) = -\lambda^i (\Omega_i)^A_B \Phi^B \wedge \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi^A}. \quad (2.9)$$

Aquí, definiremos la $(d-1)$ -forma de corriente como

$$J(\lambda) := \lambda^i (\Omega_i)^A_B \Phi^B \wedge \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (d\Phi^A)} - \Lambda_G, \quad (2.10)$$

de manera que la ecuación (2.9) adopta la forma

$$dJ(\lambda) = -\lambda^i (\Omega_i)^A_B \Phi^B \wedge \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi^A}. \quad (2.11)$$

Hemos de introducir una diferenciación debida a la naturaleza de los campos involucrados en el sistema. Puede que existan campos fijos, que representen la interacción del sistema con su entorno. Llamamos a estos los *campos externos* o *no-dinámicos* y aparecen en la teoría como *background*, por lo que éstos no necesitan extremizar la acción. Denotaremos a éstos por ψ^I , con el índice $I = 1, \dots, N_E$ y $N_E < N$ la cantidad de campos externos. De esta forma, al estudiar la dinámica del sistema, no consideramos variaciones respecto de estos campos.

Ahora bien, también existen campos que están sujetos a evolución, tal que la acción definida en (2.1) sea extremada. Éstos son conocidos como *campos dinámicos* y los denotaremos por ϕ^α , donde $\alpha = 1, \dots, N_D$ y $N_D \leq N$ es la cantidad de campos dinámicos, que satisface $N_D + N_E = N$. La dinámica de éstos está gobernada por las llamadas *ecuaciones de campo*

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^\alpha} = 0, \quad (2.12)$$

que se obtienen del principio de mínima acción. Cuando los campos se encuentran en una configuración tal que se satisfacen las ecuaciones de campo, se dice que estamos *on-shell*¹ y que además la corriente satisface la ecuación de balance

$$dJ(\lambda) \stackrel{\text{on}}{=} -\lambda^i (\Omega_i)^I_J \psi^J \wedge \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi^I}. \quad (2.13)$$

Si consideramos ahora una subvariedad espacial $(d-1)$ -dimensional Σ de M , definimos la carga como

$$Q[\lambda] := \int_{\Sigma} J(\lambda). \quad (2.14)$$

En el caso de que el lado derecho de la ecuación (2.11) sea cero, la carga definida en (2.14) es una

¹De aquí en adelante, denotaremos las igualdades que solo son válidas cuando la configuración de los campos satisface las ecuaciones de campo mediante el símbolo $\stackrel{\text{on}}{=}$.

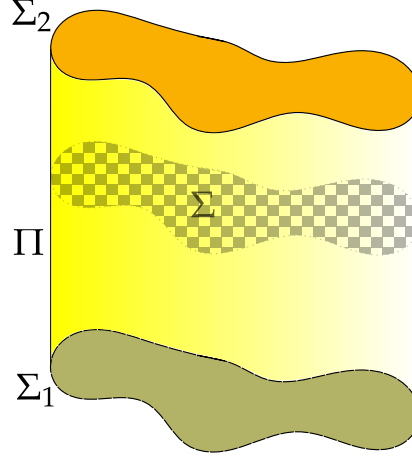


Figura 2.1: Subvariedad $\Omega = [t_1, t_2] \times \Sigma$. Se ven representados las secciones en las que se divide el borde.

carga conservada, en el sentido de que si consideramos una subvariedad de M dada por

$$\Omega := [t_1, t_2] \times \Sigma, \quad (2.15)$$

como la que se ve en la figura 2.1, podemos integrar

$$\int_{\Omega} dJ(\lambda) = \oint_{\partial\Omega} J(\lambda) = 0. \quad (2.16)$$

Ahora bien, el borde de esta variedad puede expresarse como la unión de 3 regiones

$$\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Pi, \quad \text{con } \Sigma_1 := \{t_1\} \times \Sigma, \quad \Sigma_2 := \{t_2\} \times \Sigma, \quad \Pi := (t_1, t_2) \times \partial\Sigma, \quad (2.17)$$

de manera que (2.16) toma la forma

$$\int_{\Omega} dJ(\lambda) = \int_{\Sigma_1} J(\lambda) + \int_{\Sigma_2} J(\lambda) + \int_{\Pi} J(\lambda) = 0. \quad (2.18)$$

Si suponemos que la corriente decae lo suficientemente rápido en el borde de la sección espacial Σ , tenemos que la integral sobre la región Π del borde de la subvariedad se anula, así,

$$\int_{\Sigma_1} J(\lambda) = - \int_{\Sigma_2} J(\lambda). \quad (2.19)$$

Esta ecuación puede relacionarse con la cantidad definida en (2.14) de manera sencilla. Simplemente recordamos la definición de Σ_1 y Σ_2 y consideramos que el signo negativo que aparece en (2.19) está relacionado con la orientación relativa entre las variedades. De esta forma, es sencillo ver que

$$Q[\lambda]|_{t_1} = Q[\lambda]|_{t_2}, \quad (2.20)$$

es decir, la carga no cambia a lo largo de la coordenada temporal. Es por este motivo que se le conoce como *carga conservada*.

2.1.1. Invarianza de Lorentz del lagrangeano

En el contexto de la teoría gravitacional de Einstein-Cartan, tenemos dos conceptos independientes que definen la geometría de la variedad, y por ende también la interacción gravitacional presente

en el sistema. Éstos pueden ser escritos en una base ortonormal, y quedan dados por las 1-formas de la base del espacio cotangente en cada uno de los puntos de la variedad ϑ^a y la conexión de espín Γ^a_b . Bajo transformaciones locales de Lorentz, descritas por la matriz $\Lambda^a_b(x)$ éstos transforman como

$$\vartheta'^a = \Lambda^a_b \vartheta^b \quad \text{y} \quad \Gamma'^a_b = \Lambda^a_c (\Lambda^{-1})^d_b \Gamma^c_d - (\Lambda^{-1})^c_b d\Lambda^a_c. \quad (2.21)$$

Teniendo esto en cuenta, podemos separar la d -forma lagrangeana de un sistema gravitacional en dos partes,

$$\mathcal{L} = \mathcal{V} + \mathcal{M}, \quad (2.22)$$

donde $\mathcal{V}$ contiene exclusivamente a las interacciones gravitacionales y $\mathcal{M}$ contiene los campos de materia y energía, además del acople de éstos con el campo gravitacional.

Por el momento, nos centraremos en la parte gravitacional. Teniendo en cuenta que deseamos estudiar sistemas invariantes de Lorentz, el lagrangeano gravitacional más general que podemos plantear toma la forma

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(\vartheta^a, T^a, R^a_b), \quad (2.23)$$

con R^a_b la 2-forma de curvatura definida en (A.71) y T^a la 2-forma de torsión definida en (A.68). No se incluye entre las dependencias de esta densidad lagrangiana la no-metricidad (A.66) ya que en este capítulo se considerará únicamente que este campo es nulo, ya que se presenta el formalismo de cargas conservadas en la teoría de Einstein-Cartan; ni la conexión de espín de forma explícita, ya que si lo hiciéramos no sería posible que $\mathcal{V}$ sea un escalar de Lorentz, sin embargo, la conexión de espín se manifiesta en el sistema a través de la curvatura y la torsión.

Si sometemos al lagrangeano gravitacional a una variación infinitesimal arbitraria de sus campos, obtenemos

$$\delta\mathcal{V} = \delta\vartheta^a \wedge \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\vartheta^a} + \delta T^a \wedge \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial T^a} + \frac{1}{2} \delta R^a_b \wedge \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial R^a_b}, \quad (2.24)$$

pero por mayor comodidad definiremos las $(d-2)$ -formas de *momentum de gauge traslacional y rotacional canónicas* respectivamente como

$$H_a := -\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial T^a} \quad \text{y} \quad H_a^b := -\frac{1}{2} \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial R^a_b}, \quad (2.25)$$

además de las $(d-1)$ -formas de *energía-momentum* y de *espín* (la que nos será útil más adelante) como

$$E_a := \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\vartheta^a} \quad \text{y} \quad E^{ab} := -\vartheta^{[a} \wedge H^{b]}, \quad (2.26)$$

así, podemos reescribir la variación de la densidad lagrangiana de manera más compacta:

$$\delta\mathcal{V} = \delta\vartheta^a \wedge E_a - \delta T^a \wedge H_a - \delta R^a_b \wedge H_a^b. \quad (2.27)$$

Sin embargo, es preferible seguir trabajando esta expresión para dejarla en función de las variaciones de los campos y no de sus derivadas. Para esto basta calcular las variaciones de la torsión y de la curvatura:

$$\delta T^a = D(\delta\vartheta^a) + \delta\Gamma^a_b \wedge \vartheta^b, \quad (2.28a)$$

$$\delta R^a_b = D(\delta\Gamma^a_b). \quad (2.28b)$$

Así, se tiene que la variación de la densidad lagrangeana se reescribe como

$$\delta\mathcal{V} = \delta\vartheta^a \wedge E_a - \left[D(\delta\vartheta^a) + \delta\Gamma^a_b \wedge \vartheta^b \right] \wedge H_a - D(\delta\Gamma^a_b) \wedge H_a^b, \quad (2.29)$$

por lo que al hacer el viejo truco de completar las derivadas para deshacernos de las derivadas covariantes de la variación de los campos obtenemos:

$$\delta\mathcal{V} = \delta\vartheta^a \wedge \mathcal{E}_a + \delta\Gamma^a_b \wedge \mathcal{C}_a^b - d \left(\delta\vartheta^a \wedge H_a + \delta\Gamma^a_b \wedge H_a^b \right), \quad (2.30)$$

donde hemos definido las derivadas funcionales con respecto a la base y a la conexión:

$$\mathcal{E}_a = E_a - DH_a \equiv \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \vartheta^a} \quad \text{y} \quad C_a{}^b = E_a{}^b - DH_a{}^b \equiv \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \Gamma_a{}^b}. \quad (2.31)$$

Ahora bien, en el caso particular de que esta variación sea debida a una transformación de Lorentz infinitesimal $\Lambda^a{}_b = \delta^a_b + \varepsilon^a{}_b$, con los parámetros infinitesimales $\varepsilon_{ab} = -\varepsilon_{ba}(x)$, los campos cambiarán de acuerdo a

$$\delta \vartheta^a = \varepsilon^a{}_b \vartheta^b \quad \text{y} \quad \delta \Gamma^a{}_b = -D\varepsilon^a{}_b, \quad (2.32)$$

entonces tendremos que la variación de la densidad lagrangiana es

$$\delta \mathcal{V} = \varepsilon^a{}_b \vartheta^b \wedge \mathcal{E}_a - D\varepsilon^a{}_b \wedge C_a{}^b - d \left(\varepsilon^a{}_b \vartheta^b \wedge H_a - D\varepsilon^a{}_b \wedge H_a{}^b \right), \quad (2.33)$$

por lo que si completamos las derivadas para eliminar las derivadas covariantes del parámetro de transformación, se tiene que

$$\delta \mathcal{V} = \varepsilon^a{}_b \left(\vartheta^b \wedge \mathcal{E}_a + DC_a{}^b \right) - d \left[\varepsilon^a{}_b \left(\vartheta^b \wedge H_a - DH_a{}^b + C_a{}^b \right) \right]. \quad (2.34)$$

De aquí se ve por la antisimetría del parámetro de la transformación de Lorentz y por las expresiones (2.25b), (2.26b) y la definición (2.31b), que el término que está agrupado bajo la derivada exterior se anula idénticamente. Además, como suponemos que la densidad lagrangiana es un escalar bajo transformaciones locales de Lorentz, el lado izquierdo de la ecuación anterior también se anula. Por lo tanto, como esto se satisface para todo parámetro $\varepsilon^a{}_b$, se ha de tener que

$$DC_{ab} + \vartheta_{[b} \wedge \mathcal{E}_{a]} \equiv 0, \quad (2.35)$$

una *identidad de Noether* que surge de la simetría del sistema gravitacional bajo transformaciones de Lorentz.

Es necesario estudiar también cómo se comporta el lagrangeano de *materia*² del sistema. En éste se encuentran contenidos los campos de materia, que pueden ser p -formas, en particular para los campos más conocidos, los espinores y campos escalares (fermiones y bosones respectivamente) son 0-formas y el campo electromagnético (también un bosón) una 1-forma escalar de Lorentz. Denotaremos a estos campos mediante el símbolo Ψ^A , donde el índice A es característico de la representación del grupo de Lorentz correspondiente a cada objeto, por lo que su derivada covariante está entonces dada por $D\Psi^A := d\Psi^A + \Gamma^A{}_b \wedge (s_a{}^b)^A{}_B \Psi^B / 2$. Entonces, si consideramos que el lagrangeano de materia incluye también el acoplamiento con el campo gravitacional, el cual puede ser no minimal (para no dejar fuera de este formalismo teorías donde existe este tipo de acoplamiento), podemos expresar de la forma más general

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(\Psi^A, D\Psi^A, \vartheta^a, T^a, R^a{}_b). \quad (2.36)$$

Así, tenemos que una variación infinitesimal arbitraria de los campos involucrados en este lagrangeano puede escribirse como:

$$\delta \mathcal{M} = \delta \Psi^A \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \Psi^A} + \delta (D\Psi^A) \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial (D\Psi^A)} + \delta \vartheta^a \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \vartheta^a} + \delta T^a \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial T^a} + \frac{1}{2} \delta R^a{}_b \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial R^a{}_b}. \quad (2.37)$$

Podemos calcular la variación de la derivada covariante de los campos de materia que aparece en la ecuación anterior

$$\delta (D\Psi^A) = D(\delta \Psi^A) + \frac{1}{2} \delta \Gamma^A{}_b \wedge (s_a{}^b)^A{}_B \Psi^B, \quad (2.38)$$

²En general, entendemos por materia cualquier campo que contribuya a modificar la geometría del espacio-tiempo.

de manera que en conjunto con las ecuaciones (2.28) se obtiene que podemos reescribir (2.37) como

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{M} = & \delta \Psi^A \wedge \left[\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \Psi^A} - (-1)^{p_A} D \left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial (D\Psi^A)} \right) \right] + \delta \vartheta^a \wedge \left[\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \vartheta^a} + D \left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial T^a} \right) \right] \\ & + \delta \Gamma^a_b \wedge \left[\frac{1}{2} (s_a^b)^A_B \Psi^B \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial (D\Psi^A)} + \vartheta^b \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial T^a} + \frac{1}{2} D \left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial R^a_b} \right) \right] \\ & + d \left(\delta \Psi^A \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial (D\Psi^A)} + \delta \vartheta^a \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial T^a} + \frac{1}{2} \delta \Gamma^a_b \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial R^a_b} \right). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Ahora bien, podemos presentar algunas definiciones para simplificar esta expresión. Primero, definiremos la *corriente canónica de energía-momentum* Σ_a como

$$\Sigma_a := \frac{\delta \mathcal{M}}{\delta \vartheta^a} \equiv \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \vartheta^a} + D \left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial T^a} \right), \quad (2.40a)$$

luego, definiremos la *corriente canónica de espín* como

$$\tau_a^b := \frac{1}{2} \frac{\delta \mathcal{M}}{\delta \Gamma^a_b} \equiv \frac{1}{2} \left[(s_a^b)^A_B \Psi^B \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial (D\Psi^A)} + \vartheta^b \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial T^a} - \vartheta_a \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial T_b} + D \left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial R^a_b} \right) \right], \quad (2.40b)$$

y finalmente, identificamos la derivada variacional de los campos de materia

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi^A} \equiv \frac{\delta \mathcal{M}}{\delta \Psi^A} := \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \Psi^A} - (-1)^{p_A} D \left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial (D\Psi^A)} \right). \quad (2.40c)$$

Así, podemos escribir

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{M} = & \delta \Psi^A \wedge \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi^A} + \delta \vartheta^a \wedge \Sigma_a + \delta \Gamma^a_b \wedge \tau_a^b \\ & + d \left(\delta \Psi^A \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial (D\Psi^A)} + \delta \vartheta^a \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial T^a} + \frac{1}{2} \delta \Gamma^a_b \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial R^a_b} \right). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Entonces, si consideramos que las variaciones de los campos son debidas a transformaciones de Lorentz infinitesimales como las que usamos para el caso únicamente gravitacional, tenemos que $\delta \vartheta^a = \varepsilon^a_b \vartheta^b$, $\delta \Gamma^a_b = -D\varepsilon^a_b$ y $\delta \Psi^A = \varepsilon^a_b (s_a^b)^A_B \Psi^B / 2$, entonces

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{M} = & \frac{1}{2} \varepsilon^a_b (s_a^b)^A_B \Psi^B \wedge \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi^A} + \varepsilon^a_b \vartheta^b \wedge \Sigma_a - D\varepsilon^a_b \wedge \tau_a^b \\ & + d \left(\frac{1}{2} \varepsilon^a_b (s_a^b)^A_B \Psi^B \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial (D\Psi^A)} + \varepsilon^a_b \vartheta^b \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial T^a} - \frac{1}{2} D\varepsilon^a_b \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial R^a_b} \right). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Así, al completar derivadas obtenemos finalmente que

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{M} = & \varepsilon^a_b \left(\frac{1}{2} (s_a^b)^A_B \Psi^B \wedge \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi^A} + \vartheta^b \wedge \Sigma_a + D\tau_a^b \right) \\ & + d \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon^a_b \left[(s_a^b)^A_B \Psi^B \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial (D\Psi^A)} + 2\vartheta^b \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial T^a} - 2\tau_a^b + D \left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial R^a_b} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

de donde reconocemos que el término que se encuentra bajo la derivada exterior se anula idénticamente, además de que por la antisimetría y arbitrariedad de la función de punto ε^{ab} y ya que suponemos que el lagrangeano de materia es invariante bajo transformaciones locales de Lorentz, se sigue que se satisface

$$\boxed{D\tau_{ab} + \vartheta_{[b} \wedge \Sigma_{a]} + \frac{1}{2} (s_{ab})^A_B \Psi^B \wedge \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi^A} \equiv 0,} \quad (2.44)$$

conocida como la identidad de Noether para el lagrangeano de materia.

A pesar de que consideramos una transformación de simetría del sistema, el lagrangeano no nos otorgará corrientes conservadas a partir de las transformaciones de Lorentz, ya que como se vio anteriormente, los términos de borde que aparecen al hacer la variación que corresponde a una transformación local de Lorentz se anulan idénticamente. En cambio, se obtienen las llamadas identidades de Noether para el sistema.

2.1.2. Invarianza bajo difeomorfismos

Un difeomorfismo, en el contexto de la geometría diferencial, es una aplicación que actúa sobre las coordenadas de un punto de la variedad, que además es invertible y diferenciable y cuya inversa es también diferenciable. En general también se les conoce como transformaciones generales de coordenadas y se pueden escribir como

$$x^\mu(P) \longrightarrow \bar{x}^\mu(P) = \bar{x}^\mu(x(P)). \quad (2.45)$$

En el régimen infinitesimal, en virtud del teorema de Taylor, pueden ser descritos como las coordenadas originales que son desplazadas a lo largo de una dirección que es determinada por un campo vectorial $\xi(P) = \xi^\mu(x(P))\partial_\mu$

$$x^\mu(P) \longrightarrow \bar{x}^\mu(P) = x^\mu(P) + \varepsilon \xi^\mu(x(P)). \quad (2.46)$$

Aquí, ε es un parámetro infinitesimal constante. También es posible interpretar esta transformación como el tomar el punto P de la variedad con coordenadas x^μ y trasladarlo a lo largo del campo ξ al punto P' de coordenadas $x^\mu + \varepsilon \xi^\mu$.

Se puede verificar fácilmente que al aplicar un difeomorfismo infinitesimal en una variedad, la variación del lagrangeano se reduce a la identidad

$$\ell_\xi \mathcal{L} = \ell_\xi \Phi^A \wedge \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi^A} + d \left(\ell_\xi \Phi^A \wedge \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (d\Phi^A)} \right). \quad (2.47)$$

donde el operador ℓ_ξ es la derivada de Lie en la dirección ξ y se define para una p -forma arbitraria ω^A como

$$\ell_\xi \omega^A = d(\xi \lrcorner \omega^A) + \xi \lrcorner d\omega^A. \quad (2.48)$$

Esto puede llevarnos a pensar que bajo estas transformaciones la variación de los campos está dada por

$$\delta \Phi^A = \varepsilon \ell_\xi \Phi^A, \quad (2.49)$$

sin embargo, esto no es válido para la conexión de espín, puesto que si se considera la igualdad $\delta \Gamma^a_b = \varepsilon \ell_\xi \Gamma^a_b$ como verdadera, tenemos que al lado izquierdo de esta igualdad se tiene un objeto que es un tensor de Lorentz y al lado derecho un objeto que no es covariante.

Ahora bien, como la densidad lagrangiana es una forma de rango maximal en la variedad, entonces

$$\ell_\xi \mathcal{L} = d(\xi \lrcorner \mathcal{L}), \quad (2.50)$$

por lo que podemos escribir la corriente de difeomorfismos, obtenida a partir de (2.47) como

$$J^{\text{diff}}(\xi) = \xi \lrcorner \mathcal{L} - \ell_\xi \Phi^A \wedge \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (d\Phi^A)} \quad (2.51a)$$

$$= \xi \lrcorner \mathcal{L} - d \left(\xi \lrcorner \Phi^A \wedge \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (d\Phi^A)} \right) - (-1)^{p_A} \xi \lrcorner \Phi^A \wedge d \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (d\Phi^A)} \right) - \xi \lrcorner d\Phi^A \wedge \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (d\Phi^A)}. \quad (2.51b)$$

Aprovechando el hecho que $d^2 \equiv 0$, podemos también definir una corriente efectiva de difeomorfismos

$$J_{\text{eff}}^{\text{diff}}(\xi) = \xi \lrcorner \mathcal{L} - (-1)^{p_A} \xi \lrcorner \Phi^A \wedge d \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (d\Phi^A)} \right) - \xi \lrcorner d\Phi^A \wedge \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (d\Phi^A)}. \quad (2.52)$$

Aunque este formalismo es correcto, las corrientes que aparecen de esta simetría usando este tratamiento no parecieran ser invariantes de Lorentz, ya que involucra a la derivada exterior de los campos. Este problema será comprobado a continuación y ya ha sido resuelto en [20–24], trabajos que serán analizados más adelante.

2.2. Cantidades conservadas gravitacionales no invariantes en sistemas cerrados

Para esta sección consideraremos que la dimensión del espacio-tiempo es $d = 4$. Aplicando el formalismo anterior al lagrangeano de Hilbert-Einstein escrito en la base *no-holónoma* y *ortonormal* del espacio cotangente

$$\mathcal{L}_{\text{HE}} = \frac{1}{4c\kappa_4} \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge \vartheta^c \wedge \vartheta^d, \quad \text{con} \quad \kappa_4 = \frac{8\pi G}{c^4}, \quad (2.53)$$

se obtiene como corriente de difeomorfismo en el vacío

$$J^{\text{diff}}[\xi] = \frac{1}{4c\kappa_4} \epsilon_{abcd} \left(\xi \rfloor R^{ab} - \ell_\xi \Gamma^{ab} \right) \wedge \vartheta^c \wedge \vartheta^d + \xi \rfloor \vartheta^a \mathcal{E}_a, \quad (2.54)$$

la que puede seguir siendo reducida utilizando la identidad $\ell_\xi \Gamma^{ab} - \xi \rfloor R^{ab} = d(\xi \rfloor \Gamma^{ab}) + \Gamma^a_c \wedge \xi \rfloor \Gamma^{cb} + \Gamma^b_c \wedge \xi \rfloor \Gamma^{ac}$. Entonces

$$J^{\text{diff}}[\xi] = -\frac{1}{4c\kappa_4} \epsilon_{abcd} d \left(\xi \rfloor \Gamma^{ab} \vartheta^c \wedge \vartheta^d \right) + \xi \rfloor \Gamma^{ab} \mathcal{C}_{ab} + \xi \rfloor \vartheta^a \mathcal{E}_a, \quad (2.55)$$

por lo que la carga on-shell asociada está dada por

$$Q^{\text{diff}}[\xi] \stackrel{\text{on}}{=} -\frac{1}{4c\kappa_4} \epsilon_{abcd} \oint_{\partial\Sigma} \xi \rfloor \Gamma^{ab} \vartheta^c \wedge \vartheta^d, \quad (2.56)$$

donde Σ es una sección tipo espacio.

Son más conocidas las llamadas cargas de Komar [3], las que pueden ser escritas usando el lenguaje coordinado (holónomo no-ortonormal) como

$$Q_K[\xi] = -\frac{1}{4c\kappa_4} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \oint_{\partial\Sigma} \sqrt{|g|} \nabla^\mu \xi^\nu dx^\lambda \wedge dx^\rho, \quad (2.57)$$

y donde además los vectores ξ son vectores de Killing de la geometría, definidos en (A.80).

Esta expresión nos entrega cargas dependientes de los vectores ξ en espacios asintóticamente planos (lo que se obtiene a partir de las condiciones de borde que se imponen al estudiar las ecuaciones de campo). Un ejemplo de esto se obtiene al estudiar la geometría de Kerr, la que en coordenadas de *Boyer-Lindquist* [28] es dada por

$$g = - \left(1 - \frac{2GMr}{c^2 \Xi} \right) c^2 dt \otimes dt - \frac{2aGMr \sin^2 \theta}{c^3 \Xi} (cdt \otimes d\varphi + d\varphi \otimes cdt) + \frac{\Xi}{\Delta} dr \otimes dr \\ + \Xi d\theta \otimes d\theta + \left(r^2 + \frac{a^2}{c^2} + \frac{2a^2 Mr \sin^2 \theta}{c^4 \Xi} \right) \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi, \quad (2.58)$$

donde las funciones Ξ y Δ se definen como

$$\Xi := r^2 + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta, \quad (2.59)$$

$$\Delta := r^2 - \frac{2GMr}{c^2} + \frac{a^2}{c^2}. \quad (2.60)$$

Claramente, esta métrica tiene al menos dos vectores de Killing:

$$\xi_1 := \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{y} \quad \xi_2 = \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (2.61)$$

direcciones asociadas naturalmente a la conservación de la energía y del momento angular. Al calcular las cargas de Komar asociadas a cada uno se obtienen (salvo por una (in)conveniente elección de unidades)

$$Q_K \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right] = \frac{Mc^2}{2} \quad \text{y} \quad Q_K \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \right] = -Mca = -J. \quad (2.62)$$

Nótese que acá aparecen dos factores de $1/2$ y -1 respectivamente, multiplicando los valores que uno podría esperar obtener de forma intuitiva. Muchos consideran que esto es un problema ya que no existiría un factor de normalización común para obtener las cargas “correctas”. Notemos además que en esta integral no aparecen términos que pongan en duda la invarianza de Lorentz de la carga.

Este último punto es evitable si consideramos un espacio Asintóticamente Localmente Anti-de Sitter (ALAdS). Un lagrangeano apropiado³ para este tipo de espacios queda dado por [15]

$$\mathcal{L}_{\text{ALAdS}} = \frac{1}{c\kappa_4} \epsilon_{abcd} \left(\frac{1}{4} R^{ab} \wedge \vartheta^c \wedge \vartheta^d + \frac{\Lambda}{4!} \vartheta^a \wedge \vartheta^b \wedge \vartheta^c \wedge \vartheta^d + \frac{3}{8\Lambda} R^{ab} \wedge R^{cd} \right). \quad (2.63)$$

Si calculamos directamente la carga asociada a la corriente de difeomorfismos para este lagrangeano obtenemos

$$Q[\xi] \stackrel{\text{on}}{=} \frac{3}{4\Lambda c\kappa_4} \epsilon_{abcd} \oint_{\partial\Sigma} \xi \rfloor \Gamma^{ab} \left(R^{cd} + \frac{\Lambda}{3} \vartheta^c \wedge \vartheta^d \right), \quad (2.64)$$

la que no es un escalar bajo transformaciones locales de Lorentz. Uno puede ver esto directamente ya que aparece el término $\xi \rfloor \Gamma^{ab}$ en el integrando.

Consideraremos ahora, a modo de ejemplo, la geometría Kerr-AdS que viene dada por

$$\vartheta^0 = \sqrt{\frac{\Delta}{\Xi}} (cdt - a\Omega \sin^2 \vartheta d\varphi), \quad (2.65a)$$

$$\vartheta^1 = \sqrt{\frac{\Xi}{\Delta}} dr, \quad (2.65b)$$

$$\vartheta^2 = \sqrt{\frac{\Xi}{f}} d\theta, \quad (2.65c)$$

$$\vartheta^3 = \sqrt{\frac{f}{\Xi}} \sin \theta (-acdt + \Omega(r^2 + a^2) d\varphi), \quad (2.65d)$$

donde hemos usado

$$\Delta := (r^2 + a^2) \left(1 - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right) - \frac{2GM}{c^2} r, \quad f := 1 + \frac{\Lambda}{3} a^2 \cos^2 \theta, \quad (2.65e)$$

$$\Omega := \frac{1}{1 + a^2 \Lambda/3}, \quad \Xi := r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (2.65f)$$

Podemos calcular las respectivas cargas dadas por los vectores definidos en (2.61) que también son Killings de esta geometría:

$$Q \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right] = \Omega Mc^2 \quad \text{y} \quad Q \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \right] = -\Omega^2 Mca. \quad (2.66)$$

Sin embargo, podemos probar (de hecho, es el objetivo de esta sección) que esta cantidad no es un invariante bajo transformaciones de Lorentz locales, lo que se debe a la presencia de la conexión en el integrando. Consideremos la transformación de Lorentz [21] dada por

$$\vartheta'^0 := \vartheta^0 \cosh[\chi(x)] + \vartheta^1 \sinh[\chi(x)], \quad \vartheta'^1 := \vartheta^0 \sinh[\chi(x)] + \vartheta^1 \cosh[\chi(x)], \quad (2.67)$$

$$\vartheta'^2 := \vartheta^2, \quad \vartheta'^3 := \vartheta^3, \quad (2.68)$$

³En el sentido de que las condiciones de borde que surgen al estudiar este lagrangeano son consistentes con la forma asintótica que se pide a este espacio-tiempo.

con $\chi(x) = \alpha_0 r t \sin \theta$ (α_0 una constante que se incluye por razones de unidades). Si evaluamos nuevamente la carga proveniente del vector ξ_1 utilizando esta nueva tetraada, vemos que la carga toma un valor

$$\mathcal{Q} \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right] = \Omega M c^2 - \frac{6\pi^2 \alpha_0 \Omega G M}{\kappa_4 c^2 \Lambda}, \quad (2.69)$$

por lo que las cargas no son invariantes bajo transformaciones locales de Lorentz en este formalismo, como era de esperarse de la ecuación (2.64).

2.3. Cantidades conservadas gravitacionales invariantes en sistemas cerrados

El problema de la no-invarianza de Lorentz de las cargas ya descritas en el formalismo anterior, surge del hecho de que la derivada de Lie no preserva la forma en que un objeto transforma bajo transformaciones locales de Lorentz. Esto quiere decir que, por ejemplo, la derivada de Lie de un vector bajo transformaciones locales de Lorentz no es un vector de Lorentz. Esto motiva el estudiar nuevamente el formalismo de Noether para cargas conservadas bajo difeomorfismo teniendo en cuenta esta simetría adicional. Podemos partir nuestro estudio considerando solo el lagrangeano gravitacional, para luego incorporar el estudio de la materia.

2.3.1. El lagrangeano gravitacional

A partir de la ecuación (2.47) podemos ver que para el lagrangeano gravitacional se tiene

$$\ell_{\xi} \mathcal{V} = \ell_{\xi} \vartheta^a \wedge E_a - \ell_{\xi} T^a \wedge H_a - \ell_{\xi} R^a{}_b \wedge H_a{}^b, \quad (2.70)$$

expresión que no pareciera ser covariante. Sin embargo, este no es el caso. Si consideramos una transformación local de Lorentz finita $\vartheta'^a = \Lambda^a{}_b \vartheta^b$, tenemos que las derivadas de Lie que aparecen en la ecuación anterior están dadas por

$$\ell_{\xi} \vartheta'^a = (\xi \rfloor d\Lambda^a{}_b) \vartheta^b + \Lambda^a{}_b \ell_{\xi} \vartheta^b, \quad (2.71)$$

$$\ell_{\xi} T'^a = (\xi \rfloor d\Lambda^a{}_b) T^b + \Lambda^a{}_b \ell_{\xi} T^b, \quad (2.72)$$

$$\ell_{\xi} R'^a{}_b = \left\{ \xi \rfloor d[\Lambda^a{}_c (\Lambda^{-1})^d{}_b] \right\} R^c{}_d + \Lambda^a{}_c (\Lambda^{-1})^d{}_b \ell_{\xi} R^c{}_d. \quad (2.73)$$

Entonces, podemos calcular rápidamente la derivada de Lie del lagrangeano gravitacional al cual le ha sido aplicado la transformación

$$\begin{aligned} \ell_{\xi} \mathcal{V}' &= \ell_{\xi} \mathcal{V} + (\Lambda^{-1})^e{}_a (\xi \rfloor d\Lambda^a{}_b) (\vartheta^b \wedge E_e - T^b \wedge H_e) \\ &\quad - (\Lambda^{-1})^e{}_a \Lambda^b{}_f \left\{ \xi \rfloor d[\Lambda^a{}_c (\Lambda^{-1})^d{}_b] \right\} R^c{}_d \wedge H_e{}^f \\ &= \ell_{\xi} \mathcal{V} + (\Lambda^{-1})^e{}_a (\xi \rfloor d\Lambda^a{}_b) (\vartheta^b \wedge E_e - T^b \wedge H_e - R^b{}_c \wedge H_e{}^c + R^c{}_e \wedge H_c{}^b) \\ &= \ell_{\xi} \mathcal{V} + (\Lambda^{-1})^a{}_c (\xi \rfloor d\Lambda^c{}_b) (DC^b{}_a + \vartheta^b \wedge \mathcal{E}_a). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Ahora bien, reconocemos que el término $(\Lambda^{-1})^a{}_c (\xi \rfloor d\Lambda^c{}_b)$ es antisimétrico en los dos índices libres, por lo que el término que hiciera parecer que la ecuación (2.74) es inconsistente, se anula idénticamente, gracias a lo que se ha probado en (2.35). Notemos además que podemos sumar a esta ecuación, un término $B^a{}_b (DC^b{}_a + \vartheta^b \wedge \mathcal{E}_a)$, con una 0-forma B_{ab} antisimétrica en sus índices de Lorentz y que en principio, depende del vector con respecto al cual se hace la transformación de difeomorfismo y de otros elementos de la geometría. Esto es equivalente a reemplazar en (2.70) la derivada de Lie por una

derivada de Lie covariante, la que satisface las mismas propiedades que la derivada de Lie y se define como

$$L_{\xi}\omega^A = \ell_{\xi}\omega^A + \frac{1}{2}B^{ab}(s_{ab})^A{}_B\omega^B, \quad (2.75)$$

donde ω^A es una p -forma con índices de Lorentz y $(s_{ab})^A{}_B$ es el generador de Lorentz para la representación correspondiente. Además, es necesario que la función $B^a{}_b$ transforme bajo transformaciones locales de Lorentz como

$$B'^a{}_b = \Lambda^a{}_c(\Lambda^{-1})^d{}_b B^c{}_d - (\Lambda^{-1})^c{}_b \xi^d \rfloor d\Lambda^a{}_c, \quad (2.76)$$

donde ξ corresponde al vector con el respecto a cual se calcula la derivada de Lie covariante. Esto se debe a que de la definición de la derivada de Lie generalizada (2.75), podemos reordenar

$$L_{\xi}\omega^A = D(\xi^{\rfloor}\omega^A) + \xi^{\rfloor}D\omega^A + \frac{1}{2}(B^a{}_b - \xi^{\rfloor}\Gamma^a{}_b)(s_a{}^b)^A{}_B\omega^B, \quad (2.77)$$

de manera que para asegurar la covarianza bajo transformaciones locales de Lorentz de esta definición, es necesario que el tercer término del lado derecho transforme como un tensor de Lorentz. Así, la función $B^a{}_b$ hereda ciertas propiedades de transformación del término $\xi^{\rfloor}\Gamma^a{}_b$ que se ven claramente en (2.76).

Podemos probar que el nuevo término que introdujimos en (2.75) no contribuye en (2.74). Tenemos que el segundo término que aparece en el lado derecho de (2.76) no contribuye a (2.74) por lo que se ha explicado anteriormente. Por lo tanto, es necesario probar para la parte de la función $B^a{}_b$ que transforma como tensor de Lorentz⁴ tampoco destruirá la invarianza bajo difeomorfismos. Por simplicidad, denotaremos este mediante $\bar{B}^a{}_b$. Para proceder, recordaremos primeramente que para los vectores contravariantes de Lorentz el respectivo generador está dado por

$$(s_{ij}^{(1)})^a{}_b = \delta_i^a g_{jb} - \delta_j^a g_{ib}, \quad (2.78a)$$

y para un tensor de rango $\binom{1}{1}$ el generador correspondiente es

$$(s_{ij}^{(1)})^a{}_{bc}{}^d = \delta_c^a (\delta_i^d g_{bj} - \delta_j^d g_{bi}) + \delta_b^d (\delta_i^a g_{cj} - \delta_j^a g_{ci}). \quad (2.78b)$$

Entonces, al introducir esto en la variación de los campos, aparecen los nuevos términos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\bar{B}^{ij} \left[(s_{ij}^{(CV)})^a{}_b (\theta'^b \wedge E'_a - T'^b \wedge H'_a) - (s_{ij}^{(1)})^a{}_{bc}{}^d R'^c{}_d \wedge H'^b{}_a \right] \\ = B^a{}_b (\theta^b \wedge E_a - T^b \wedge H_a - R^b{}_c \wedge H_a{}^c + R^c{}_a \wedge H_c{}^b) \\ = B^a{}_b (DC^b{}_a + \theta^b \wedge \mathcal{E}_a) \equiv 0, \end{aligned} \quad (2.79)$$

lo que prueba nuestra afirmación anterior.

Existen una serie de elecciones de la función $B^a{}_b$ que son de particular interés

$$B_{ab}^{\text{Natural}} := \xi^{\rfloor}\Gamma_{ab}, \quad (2.80a)$$

$$B_{ab}^{\text{Riemann}} := \xi^{\rfloor}\overset{\circ}{\Gamma}_{ab}, \quad (2.80b)$$

$$B_{ab}^{\text{Yano}} := -\Theta_{ab} = e_{[a}\rfloor\ell_{\xi}\theta_{b]}. \quad (2.80c)$$

Sin embargo, más allá de las elecciones particulares, podemos reescribir de manera completamente válida la ecuación (2.70) como

$$L_{\xi}\mathcal{V} = L_{\xi}\theta^a \wedge E_a - L_{\xi}T^a \wedge H_a - L_{\xi}R^a{}_b \wedge H_a{}^b. \quad (2.81)$$

Ahora bien, puede parecer complicado calcular los valores de la derivada de Lie generalizada de la torsión y de la curvatura ya que en éste aparecerá la derivada de Lie generalizada de la conexión de

⁴Primer término del lado derecho de (2.76).

espín, campo que bien sabemos no transforma como tensor bajo transformaciones locales de Lorentz, por lo tanto, no tenemos un generador de Lorentz para este objeto. Hemos de subsanar esta dificultad definiendo la derivada de Lie generalizada de la conexión de espín como (esto se hace de manera que las ecuaciones sean consistentes)

$$L_{\tilde{\zeta}}\Gamma^a_b := \ell_{\tilde{\zeta}}\Gamma^a_b - dB^a_b - \Gamma^a_c B^c_b + \Gamma^c_b B^a_b \equiv D(\tilde{\zeta}]\Gamma^a_b - B^a_b) + \tilde{\zeta}]\Gamma^a_b. \quad (2.82)$$

Gracias a esta definición tenemos que $[L_{\tilde{\zeta}}, d] = 0$ para todos los objetos geométricos definidos sobre la variedad espacio-temporal.

Ahora bien, usando las definiciones de la torsión y de la curvatura, encontramos que

$$L_{\tilde{\zeta}}T^a = D(L_{\tilde{\zeta}}\vartheta^a) + L_{\tilde{\zeta}}\Gamma^a_b \wedge \vartheta^b, \quad (2.83a)$$

$$L_{\tilde{\zeta}}R^a_b = D(L_{\tilde{\zeta}}\Gamma^a_b), \quad (2.83b)$$

por lo que al reemplazar en la ecuación (2.81) y completando derivadas, es inmediato obtener

$$L_{\tilde{\zeta}}\vartheta^a \wedge \mathcal{E}_a + L_{\tilde{\zeta}}\Gamma^a_b \wedge C_a^b - d(\tilde{\zeta}]\gamma + L_{\tilde{\zeta}}\vartheta^a \wedge H_a + L_{\tilde{\zeta}}\Gamma^a_b \wedge H_a^b) = 0, \quad (2.84)$$

por lo que podemos definir una corriente de difeomorfismos invariante de Lorentz debida a los potenciales gravitacionales como

$$J^{\text{grav.}}(\tilde{\zeta}) := \tilde{\zeta}]\gamma + L_{\tilde{\zeta}}\vartheta^a \wedge H_a + L_{\tilde{\zeta}}\Gamma^a_b \wedge H_a^b, \quad (2.85)$$

que satisface la ecuación de conservación

$$dJ^{\text{grav.}}(\tilde{\zeta}) = L_{\tilde{\zeta}}\vartheta^a \wedge \mathcal{E}_a + L_{\tilde{\zeta}}\Gamma^a_b \wedge C_a^b. \quad (2.86)$$

2.3.2. Lagrangeano de materia

Para el caso del lagrangeano de materia, tenemos, análogamente al caso gravitacional, que la invarianza de difeomorfismos implica

$$\ell_{\tilde{\zeta}}\mathcal{M} = \ell_{\tilde{\zeta}}\Psi^A \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \Psi^A} + \ell_{\tilde{\zeta}}(D\Psi^A) \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial (D\Psi^A)} + \ell_{\tilde{\zeta}}\vartheta^a \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \vartheta^a} + \ell_{\tilde{\zeta}}T^a \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial T^a} + \frac{1}{2}\ell_{\tilde{\zeta}}R^a_b \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial R^a_b}. \quad (2.87)$$

Si se aplica una transformación local de Lorentz sobre los campos, podemos ver que (2.87) transforma como

$$\begin{aligned} \ell_{\tilde{\zeta}}\mathcal{M}' &= \ell_{\tilde{\zeta}}\mathcal{M} + (\Lambda^{-1})^c_a \tilde{\zeta}]d\Lambda^a_b \left(\vartheta^b \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \vartheta^c} + T^b \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial T^c} + R^b_d \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial R^c_d} - R^b_d \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial R^c_d} \right) \\ &\quad + (\Lambda^{-1})^C_A \tilde{\zeta}]d\Lambda^A_B \left(\Psi^B \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \Psi^C} + D\Psi^B \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial (D\Psi^C)} \right). \end{aligned} \quad (2.88)$$

Ahora bien, como desconocemos la representación del grupo de Lorentz que corresponde a cada campo de materia que se introduce en el modelo, pareciera que no podemos avanzar más en esta expresión. Sin embargo, basta estudiar el caso de las transformaciones locales de Lorentz infinitesimales: $\Lambda^A_B = \delta^A_B + \varepsilon^{ij}(s_{ij})^A_B/2$,

$$\begin{aligned} \ell_{\tilde{\zeta}}\mathcal{M}' &= \ell_{\tilde{\zeta}}\mathcal{M} + \tilde{\zeta}]d\varepsilon^a_b \left(\vartheta^b \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \vartheta^a} + T^b \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial T^a} + R^b_c \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial R^a_c} - R^c_a \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial R^c_b} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(s_a^b)^A_B \left[\Psi^B \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \Psi^A} + D\Psi^B \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial (D\Psi^A)} \right] \right) \\ &= \ell_{\tilde{\zeta}}\mathcal{M} + \tilde{\zeta}]d\varepsilon^a_b \left(D\tau_a^b + \vartheta^b \wedge \Sigma_a + \frac{1}{2}(s_a^b)^A_B \Psi^B \wedge \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi^A} \right), \end{aligned} \quad (2.89)$$

de donde reconocemos del lado derecho, el término que aparece en (2.44), por lo que la ecuación (2.87) es invariante de Lorentz. Bajo el mismo razonamiento expuesto anteriormente, podemos reemplazar también las derivadas de Lie usuales, por las derivadas de Lie generalizadas, así, tenemos una expresión explícitamente covariante

$$L_{\xi}\mathcal{M} = L_{\xi}\Psi^A \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \Psi^A} + L_{\xi}(D\Psi^A) \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial (D\Psi^A)} + L_{\xi}\vartheta^a \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \vartheta^a} + L_{\xi}T^a \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial T^a} + \frac{1}{2}L_{\xi}R^a_b \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial R^a_b}, \quad (2.90)$$

la que podemos reescribir como

$$\begin{aligned} d(\xi]\mathcal{M}) &= L_{\xi}\Psi^A \wedge \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi^A} + L_{\xi}\vartheta^a \wedge \Sigma_a + L_{\xi}\Gamma^a_b \wedge \tau_a^b \\ &+ d\left(L_{\xi}\Psi^A \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial (D\Psi^A)} + L_{\xi}\vartheta^a \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial T^a} + \frac{1}{2}L_{\xi}\Gamma^a_b \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial R^a_b}\right), \end{aligned} \quad (2.91)$$

por lo que podemos definir la corriente debida a la materia

$$J^{\text{mat.}}(\xi) := \xi]\mathcal{M} - L_{\xi}\Psi^A \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial (D\Psi^A)} - L_{\xi}\vartheta^a \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial T^a} - \frac{1}{2}L_{\xi}\Gamma^a_b \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial R^a_b}, \quad (2.92)$$

que satisface

$$dJ^{\text{mat.}}[\xi] = L_{\xi}\Psi^A \wedge \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi^A} + L_{\xi}\vartheta^a \wedge \Sigma_a + L_{\xi}\Gamma^a_b \wedge \tau_a^b. \quad (2.93)$$

Por lo tanto, la corriente conservada que aparece de los difeomorfismos para el lagrangeano total está dada por

$$\begin{aligned} J(\xi) &= J^{\text{grav.}}(\xi) + J^{\text{mat.}}(\xi) \\ &= \xi]\mathcal{L} + L_{\xi}\vartheta^a \wedge \left(H_a - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial T^a}\right) + L_{\xi}\Gamma^a_b \wedge \left(H_a^b - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial R^a_b}\right) - L_{\xi}\Psi^A \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial (D\Psi^A)}, \end{aligned} \quad (2.94)$$

mientras que se satisface la ecuación de balance

$$dJ(\xi) = L_{\xi}\Psi^A \wedge \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi^A} + L_{\xi}\vartheta^a \wedge (\mathcal{E}_a + \Sigma_a) + L_{\xi}\Gamma^a_b \wedge (\mathcal{C}_a^b + \tau_a^b). \quad (2.95)$$

2.3.3. Identidades de Noether correspondientes a difeomorfismos.

Aunque uno de los objetivos principales de esta tesis es obtener las corrientes y cargas conservadas correspondientes a difeomorfismos, es importante también estudiar distintas consecuencias que aparecen de las distintas elecciones de derivadas de Lie generalizadas como las que hemos dado en (2.80).

En particular, comenzaremos nuestro estudio utilizando la primera de las 3 elecciones, es decir, utilizaremos la derivada de Lie generalizada

$$L_{\xi}\omega^A = \ell_{\xi}\omega^A + \frac{1}{2}\xi]\Gamma^a_b(s_a^b)^A{}_B\omega^B \equiv \xi]D\omega^A + D(\xi]\omega^A), \quad (2.96)$$

para una p -forma arbitraria ω^A , con índices de Lorentz representados por A . Utilizando esta derivada, encontramos que la ecuación (2.81) toma la forma

$$d(\xi]\mathcal{V}) = [\xi]T^a + D(\xi]\vartheta^a) \wedge E_a - \left[\xi](R^a_b \wedge \vartheta^b) + D(\xi]T^a)\right] \wedge H_a - D(\xi]R^a_b) \wedge H_a^b, \quad (2.97)$$

que podemos reescribir al completar las derivadas como

$$\begin{aligned} \xi]T^a \wedge (E_a - DH_a) - \xi]R^a_b \wedge (\vartheta^b \wedge H_a + DH_a^b) - \xi^a (DE_a + R^b_a \wedge H_b) \\ + d\left(\xi^a E_a - \xi]T^a \wedge H_a - \xi]R^a_b \wedge H_a^b - \xi]\mathcal{V}\right) = 0, \end{aligned} \quad (2.98)$$

donde vemos que ésta tiene la forma $\xi^a A_a + d(\xi^a B_a) = 0$, que es válida para todo campo vectorial ξ , en particular, podemos considerar el caso en que éste es un vector constante, de donde se obtiene inmediatamente que $A_a + d(B_a) = 0$. Además, esto implica que para cualquier vector ξ se debe tener $d\xi^a \wedge B_a = 0$, lo que se traduce en que $B_a = 0$ y entonces, $A_a = 0$. Para la ecuación (2.98), obtenemos las identidades

$$D\mathcal{E}_a \equiv e_a \rfloor T^b \wedge \mathcal{E}_b + e_a \rfloor R^c_b \wedge \mathcal{C}_c^b, \quad (2.99)$$

$$E_a \equiv e_a \rfloor T^b \wedge H_b + e_a \rfloor R^c_b \wedge H_c^b + e_a \rfloor \mathcal{V}. \quad (2.100)$$

Podemos hacer algo análogo para el caso del lagrangeano de materia. Esta vez la ecuación (2.90) se convierte en

$$\begin{aligned} d(\xi \rfloor \mathcal{M}) &= [D(\xi \rfloor \Psi^A) + \xi \rfloor D\Psi^A] \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \Psi^A} + \left\{ \frac{1}{2} \xi \rfloor [R^a_b \wedge (s^a{}^b)^A{}_B \Psi^B] + D[\xi \rfloor D\Psi^A] \right\} \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial (D\Psi^A)} \\ &+ [\xi \rfloor T^a + D(\xi \rfloor \vartheta^a)] \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \vartheta^a} + [\xi \rfloor (R^a_b \wedge \vartheta^b) + D(\xi \rfloor T^a)] \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial T^a} + \frac{1}{2} D(\xi \rfloor R^a_b) \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial R^a_b}, \end{aligned} \quad (2.101)$$

la que podemos reducir a la forma $\xi^a A_a + d(\xi^a B_a) = 0$ completando las derivadas covariantes, por lo que obtenemos

$$\begin{aligned} &\xi \rfloor D\Psi^A \wedge \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi^A} + \xi \rfloor T^a \wedge \Sigma_a + \xi \rfloor R^a_b \wedge \tau_a^b + (-1)^{p_A} \xi \rfloor \Psi^A \wedge D\left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi^A}\right) - \xi^a D\Sigma_a \\ &+ d\left(\xi \rfloor \Psi^A \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \Psi^A} + \xi \rfloor D\Psi^A \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial (D\Psi^A)} + \xi^a \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \vartheta^a} + \xi \rfloor T^a \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial T^a} + \frac{1}{2} \xi \rfloor R^a_b \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial R^a_b} - \xi \rfloor \mathcal{M}\right) = 0, \end{aligned} \quad (2.102)$$

de donde se sigue que se satisfacen las identidades

$$D\Sigma_a \equiv e_a \rfloor D\Psi^A \wedge \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi^A} + e_a \rfloor T^b \wedge \Sigma_b + e_a \rfloor R^c_b \wedge \tau_c^b + (-1)^{p_A} e_a \rfloor \Psi^A \wedge D\left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi^A}\right), \quad (2.103)$$

$$\Sigma_a \equiv e_a \rfloor \mathcal{M} - e_a \rfloor \Psi^A \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \Psi^A} - e_a \rfloor D\Psi^A \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial (D\Psi^A)} + D\left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial T^a}\right) - e_a \rfloor T^b \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial T^b} - \frac{1}{2} e_a \rfloor R^c_b \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial R^c_b}. \quad (2.104)$$

Vemos que la identidad (2.104) es la forma explícita del tensor de energía-momentum de materia, que reduce al caso de la relatividad especial (espacio-tiempo de Minkowski)

$$\Sigma_a = e_a \rfloor \mathcal{M} - e_a \rfloor \Psi^A \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \Psi^A} - e_a \rfloor d\Psi^A \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial (d\Psi^A)} \quad (2.105)$$

2.3.4. Corrientes escritas como superpotenciales

Un superpotencial es una $(d-2)$ -forma $H(\lambda)$ tal que la $(d-1)$ -forma de corriente J que aparece de la simetría de un sistema se puede escribir como $J = dH$, de manera que la carga conservada, como se define en (2.14) queda dada por

$$Q[\lambda] = \int_{\partial \Sigma} H(\lambda). \quad (2.106)$$

De la forma en que surge el formalismo descrito anteriormente, no es posible escribir la corriente de difeomorfismos en esta forma, sin embargo, podemos escribirla como la combinación lineal de las derivadas variacionales del lagrangeano con respecto a los campos y la derivada de una $(d-2)$ -forma, que toma el rol de un superpotencial cuando estamos on-shell. Esto es posible gracias a que podemos calcular de manera sencilla el valor de la derivada de Lie generalizada de la base del espacio cotangente

$$L_\xi \vartheta^a = D\xi^a + \xi \rfloor T^a + (B^a_b - \xi \rfloor \Gamma^a_b) \vartheta^b \quad (2.107)$$

y a las identidades (2.82), (2.100) y (2.104). Combinando éstas, encontramos que la corriente de difeomorfismos del lagrangeano gravitacional (2.85) queda dada por

$$\begin{aligned} J^{\text{grav.}}(\xi) &= \xi^a E_a - \xi \rfloor T^a \wedge H_a - \xi \rfloor R^a{}_b \wedge H_a{}^b \\ &\quad + \left[D\xi^a + \xi \rfloor T^a + (B^a{}_b - \xi \rfloor \Gamma^a{}_b) \vartheta^b \right] \wedge H_a + [D(\xi \rfloor \Gamma^a{}_b - B^a{}_b) + \xi \rfloor R^a{}_b] \wedge H_a{}^b \\ &= d \left[\xi^a H_a + (\xi \rfloor \Gamma^a{}_b - B^a{}_b) H_a{}^b \right] + \xi^a \mathcal{E}_a + (\xi \rfloor \Gamma^a{}_b - B^a{}_b) \mathcal{C}_a{}^b, \end{aligned} \quad (2.108)$$

de manera que cuando la configuración de los campos satisface las ecuaciones de campo en el vacío, tenemos un superpotencial gravitacional

$$H^{\text{grav.}}(\xi) := \xi^a H_a + (\xi \rfloor \Gamma^a{}_b - B^a{}_b) H_a{}^b, \quad (2.109)$$

tal que $J^{\text{grav.}} \stackrel{\text{on}}{=} dH^{\text{grav.}}$.

En el caso del que el sistema incluya campos de materia, podemos estudiar la corriente de materia (2.92) para lograr una expresión de una forma similar. En este caso, recurrimos a la expresión (2.104) para explicitar el término $\xi \rfloor \mathcal{M}$. Obtenemos así,

$$\begin{aligned} J^{\text{mat.}}(\xi) &= \xi \rfloor \Psi^A \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \Psi^A} + \xi \rfloor D\Psi^A \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial (D\Psi^A)} + \xi^a \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \vartheta^a} + \xi \rfloor T^a \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial T^a} + \frac{1}{2} \xi \rfloor R^a{}_b \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial R^a{}_b} \\ &\quad - \xi \rfloor T^a \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial T^a} - \frac{1}{2} \xi \rfloor R^a{}_b \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial R^a{}_b} - L_\xi \Psi^A \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial (D\Psi^A)} \\ &\quad - \left[D\xi^a + \xi \rfloor T^a + (B^a{}_b - \xi \rfloor \Gamma^a{}_b) \vartheta^b \right] \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial T^a} - \frac{1}{2} [D(\xi \rfloor \Gamma^a{}_b - B^a{}_b) + \xi \rfloor R^a{}_b] \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial R^a{}_b} \\ &= \xi \rfloor \Psi^A \wedge \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi^A} + \xi^a \Sigma_a + (\xi \rfloor \Gamma^a{}_b - B^a{}_b) \tau_a{}^b \\ &\quad - d \left[\xi^a \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial T^a} + \frac{1}{2} (\xi \rfloor \Gamma^a{}_b - B^a{}_b) \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial R^a{}_b} + \xi \rfloor \Psi^A \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial (D\Psi^A)} \right], \end{aligned} \quad (2.110)$$

por lo que podemos entonces definir

$$H^{\text{mat.}}(\xi) := -\xi^a \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial T^a} - \frac{1}{2} (\xi \rfloor \Gamma^a{}_b - B^a{}_b) \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial R^a{}_b} - \xi \rfloor \Psi^A \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial (D\Psi^A)},$$

tal que

$$J^{\text{mat.}}(\xi) = dH^{\text{mat.}}(\xi) + \xi \rfloor \Psi^A \wedge \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi^A} + \xi^a \Sigma_a + (\xi \rfloor \Gamma^a{}_b - B^a{}_b) \tau_a{}^b. \quad (2.111)$$

Definiendo el superpotencial total

$$H(\xi) := H^{\text{grav.}}(\xi) + H^{\text{mat.}}(\xi), \quad (2.112)$$

es claro entonces que la corriente total asociada a los difeomorfismos queda dada por

$$J(\xi) = dH(\xi) + \xi \rfloor \Psi^A \wedge \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi^A} + \xi^a (\mathcal{E}_a + \Sigma_a) + (\xi \rfloor \Gamma^a{}_b - B^a{}_b) (\mathcal{C}_a{}^b + \tau_a{}^b). \quad (2.113)$$

Si suponemos que todos los campos son dinámicos, esto es, que todas las derivadas variacionales del lagrangeano con respecto a los campos se anulan, se sigue que

$$H(\xi) = \xi^a \left(H_a - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial T^a} \right) + (\xi \rfloor \Gamma^a{}_b - B^a{}_b) \left(H_a{}^b - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial R^a{}_b} \right) - \xi \rfloor \Psi^A \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial (D\Psi^A)} \quad (2.114)$$

es un superpotencial que surge de la simetría de difeomorfismos, por lo que la carga conservada de difeomorfismos invariante de Lorentz queda dada por

$$Q_{\text{inv. L.}}^{\text{dif.}}[\xi] \stackrel{\text{on}}{=} \oint_{\partial \Sigma} \left[\xi^a \left(H_a - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial T^a} \right) + (\xi \rfloor \Gamma^a{}_b - B^a{}_b) \left(H_a{}^b - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial R^a{}_b} \right) - \xi \rfloor \Psi^A \wedge \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial (D\Psi^A)} \right]. \quad (2.115)$$

Tomando una elección de B^a_b y un lagrangeano particular, podemos dar ejemplos de las cargas conservadas. Por ejemplo, con el lagrangeano de Hilbert-Einstein (2.53) en la notación simplificada que hemos estado utilizando

$$E_a = \frac{1}{4c\kappa_4} \epsilon_{abcd} R^{cb} \wedge \vartheta^d, \quad H_a = 0, \quad E_{ab} = 0, \quad H_{ab} = -\frac{1}{4c\kappa_4} \epsilon_{abcd} \vartheta^c \wedge \vartheta^d, \quad (2.116)$$

por lo que la carga on-shell invariante de Lorentz (2.115) queda dada por

$$Q_{\text{inv. L.}}^{\text{dif.}}[\tilde{\zeta}] \stackrel{\text{on}}{=} \oint_{\partial\Sigma} \left(\tilde{\zeta} \rfloor \Gamma^{ab} - B^{ab} \right) \left(-\frac{1}{4c\kappa_4} \epsilon_{abcd} \vartheta^c \wedge \vartheta^d \right). \quad (2.117)$$

Si tomamos la elección de Yano para B^a_b , podemos ver que

$$\tilde{\zeta} \rfloor \Gamma^{ab} - B^{ab} = \tilde{\zeta} \rfloor \Gamma^{ab} - e^{[a} \rfloor \ell_{\tilde{\zeta}} \vartheta^{a]} \equiv -\frac{1}{2} \left[e^a \rfloor (D\tilde{\zeta}^b + \tilde{\zeta} \rfloor T^b) - e^b \rfloor (D\tilde{\zeta}^a + \tilde{\zeta} \rfloor T^a) \right] \stackrel{\text{on}}{=} -e^{[a} \rfloor D\tilde{\zeta}^{b]}, \quad (2.118)$$

de manera que la carga on-shell toma la forma

$$Y[\tilde{\zeta}] := Q_{\text{inv. L.-Yano}}^{\text{dif.-EH}}[\tilde{\zeta}] \stackrel{\text{on}}{=} \frac{1}{4c\kappa_4} \epsilon_{abcd} \oint_{\partial\Sigma} e^a \rfloor D\tilde{\zeta}^b \vartheta^c \wedge \vartheta^d. \quad (2.119)$$

Podemos además traducir esta carga a la base inducida por las coordenadas x^μ , utilizando las matrices de cambio de base h_a^μ que satisfacen

$$dx^\mu = h_a^\mu \vartheta^a, \quad \vartheta^a = h^\mu_a dx^\mu, \quad \Gamma^a_{b\mu} = h^a_\nu h_b^\lambda \Gamma^\nu_{\lambda\mu} + h^a_\lambda \partial_\mu h_b^\lambda, \quad (2.120)$$

donde h^μ_a es la matriz de transformación inversa. Así, al introducir esto en (2.119) se obtiene

$$Y[\tilde{\zeta}] = \frac{1}{4c\kappa_4} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \oint_{\partial\Sigma} \sqrt{|g|} \nabla^\mu \tilde{\zeta}^\nu dx^\lambda \wedge dx^\rho, \quad (2.121)$$

la que se diferencia de carga Komar definida en (2.57) por un signo. Por lo que la carga presentada anteriormente es invariante de bajo transformaciones locales de Lorentz, aunque en [3] esta carga se derivó utilizando un procedimiento distinto y sin tener en cuenta esta simetría.

2.3.5. Cantidades conservadas para el agujero negro Kerr-AdS

Podemos también calcular las cantidades conservadas que aparecen para el lagrangeano (2.63), con el objetivo de compararlas con aquellas obtenidas en la ecuación (2.64). Para ser consistentes con la notación usada anteriormente, vemos que a partir del lagrangeano (2.63) se obtiene

$$E_a = \frac{1}{2c\kappa_4} \epsilon_{abcd} \left(R^{bc} + \frac{\Lambda}{3} \vartheta^b \wedge \vartheta^c \right) \wedge \vartheta^d, \quad (2.122a)$$

$$H_a = 0, \quad (2.122b)$$

$$E_{ab} = 0, \quad (2.122c)$$

$$H_{ab} = -\frac{3}{4\Lambda c\kappa_4} \epsilon_{abcd} \left(R^{cd} + \frac{\Lambda}{3} \vartheta^c \wedge \vartheta^d \right), \quad (2.122d)$$

con las cantidades que surgen del lagrangeano de materia nulas (ya que este lagrangeano considera solo efectos gravitacionales). Así, vemos que la corriente conservada invariante de Lorentz, de acuerdo con la ecuación (2.113) está dada por

$$J_{\text{ALAdS}}(\tilde{\zeta}) = -\frac{3}{4\Lambda c\kappa_4} d \left[\epsilon_{abcd} (\tilde{\zeta} \rfloor \Gamma^{ab} - B^{ab}) \left(R^{cd} + \frac{\Lambda}{3} \vartheta^c \wedge \vartheta^d \right) \right] + \tilde{\zeta}^a \mathcal{E}_a + (\tilde{\zeta} \rfloor \Gamma^{ab} - B^{ab}) C_{ab}. \quad (2.123)$$

De manera que la carga invariante de Lorentz on shell, para cualquier elección de derivada de Lie generalizada, está dada por

$$Q_{\text{ALAdS}}[\xi] \stackrel{\text{on}}{=} -\frac{3}{4\Lambda\kappa\kappa_4}\epsilon_{abcd}\oint_{\partial\Sigma}\left[(\xi]\Gamma^{ab}-B^{ab}\right)\left(R^{cd}+\frac{\Lambda}{3}\vartheta^c\wedge\vartheta^d\right). \quad (2.124)$$

Podemos hacer un análisis más detallado de lo que sucede con la ecuación (2.124) a partir de las distintas elecciones de (2.80). Notemos que la elección natural de derivada de Lie generalizada, es decir, aquella dada por (2.80a) da inmediatamente una carga conservada nula, para cualquier vector ξ , lo que no nos da ninguna información sobre el sistema, ya que el valor de la carga es independiente de la configuración de éste. Por otra parte, la elección de Riemann dada por (2.80b), rinde la carga dada por

$$Q_{\text{ALAdS}}^{\text{Riemann}}[\xi] \stackrel{\text{on}}{=} -\frac{3}{4\Lambda\kappa\kappa_4}\epsilon_{abcd}\oint_{\partial\Sigma}\left[\xi\right]\kappa^{ab}\left(R^{cd}+\frac{\Lambda}{3}\vartheta^c\wedge\vartheta^d\right), \quad (2.125)$$

con κ^{ab} la 1-forma de contorsión. Notemos sin embargo que al desarrollar explícitamente la ecuación de campo $\mathcal{C}_{ab} = 0$, se obtiene necesariamente que $T^a = \kappa^a_b \wedge \vartheta^b = 0$, por lo que la carga conservada que surge usando esta elección es también nula. Sin embargo, si utilizamos la elección de Yano (2.80c) y la identidad (2.118) se obtiene

$$Q_{\text{ALAdS}}^{\text{Yano}}[\xi] \stackrel{\text{on}}{=} \frac{3}{4\Lambda\kappa\kappa_4}\epsilon_{abcd}\oint_{\partial\Sigma}\left[e^a\right]D\xi^b\left(R^{cd}+\frac{\Lambda}{3}\vartheta^c\wedge\vartheta^d\right). \quad (2.126)$$

Si calculamos esta última para el agujero negro Kerr-AdS dado anteriormente en (2.65), obtenemos las mismas cargas que se obtienen en la ecuación (2.66). Sin embargo, éstas no tienen el problema de depender de la elección de tétrada que hagamos para la geometría.

Capítulo 3

Cargas Conservadas Invariantes en Teorías Métrico-Afines Generales

Las transformaciones locales de Lorentz nos permiten definir objetos sobre la variedad que transformen de manera particular bajo esta simetría y no cambien bajo transformaciones generales de coordenadas. Este es el caso, por ejemplo, de los espinores que se utilizan para describir el conocido campo de Dirac.

Es posible también desarrollar el formalismo para construir cargas conservadas usando la base holónoma en vez de la base ortonormal. La gran diferencia que surge al usar esta base, es que únicamente se aprecia la simetría bajo transformaciones generales de coordenadas, ya que no está presente la simetría local de Lorentz. Sin embargo, la covarianza de las cantidades que aparecen al estudiar las corrientes de esta forma está asegurada de inmediato. Un desafío que podemos plantear es el corroborar que se obtienen las mismas cargas conservadas al hacer uso de una base u otra.

Además, el escribir las cantidades en la base holónoma tiene como ventaja el hecho de que es posible incluir de forma sencilla generalizaciones a la teoría de Einstein-Cartan, utilizada en el capítulo anterior. En particular, en este capítulo desarrollaremos el formalismo para espacios *métrico-afines generales*, esto es, espacios que tienen curvatura (A.72), torsión (A.69) y no-metricidad (A.67).

Esto implica, por supuesto, que las derivadas covariantes no conmutan con la métrica. A modo de ejemplo, podemos mencionar el caso de un vector contravariante ξ^μ , para el que se tiene

$$\nabla_\mu \xi_\nu = \nabla_\mu (g_{\nu\lambda} \xi^\lambda) \neq g_{\nu\lambda} \nabla_\mu \xi^\lambda. \quad (3.1)$$

Un estudio minucioso de las propiedades de las variedades con no-metricidad y torsión no nula puede encontrarse en [29]. En el apéndice A se encuentran las equivalencias entre cantidades geométricas definidas en ambas bases.

3.1. El teorema de Noether en la base holónoma

Nuevamente, consideramos un sistema descrito por una acción S definida mediante

$$S := \int_M \mathcal{L}(\Phi, \partial\Phi) dx^0 \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{(d-1)} \equiv \int_M \mathcal{L}(\Phi, \partial\Phi) d^d x, \quad (3.2)$$

donde $\mathcal{L}$ es una densidad escalar de peso 1 y que conocemos como densidad lagrangeana, que depende de los campos Φ^A y sus derivadas parciales $\partial_\mu \Phi^A$, donde el índice A corresponde a la enumeración de los campos y varía de acuerdo a $A = 1, \dots, N$, con N el número de campos independientes involucrados en el sistema. No establecemos una dependencia explícita de la densidad lagrangeana con respecto a las coordenadas, ya que toda esta información puede ser absorbida en un campo nuevo.

Ahora bien, una variación infinitesimal general de la acción se puede escribir como

$$\delta S = \int_M \left[(\delta \mathcal{L}) d^d x + \mathcal{L} \delta(d^d x) \right]. \quad (3.3)$$

La densidad lagrangeana y las coordenadas tienen su propio comportamiento particular, podemos entonces escribir

$$\delta(d^d x) = \partial_\mu (\delta x^\mu) d^d x, \quad (3.4)$$

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^A} \delta \Phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^A)} \delta (\partial_\mu \Phi^A). \quad (3.5)$$

Sin embargo, la variación del lagrangeano contiene información del cambio en la *configuración de los campos* que definen el estado del sistema y del efecto que tiene el *cambio de coordenadas* para la descripción del sistema. Una consecuencia inmediata es que a diferencia de la formulación del formalismo en formas diferenciales, no podemos conmutar inmediatamente la derivada de los campos con las variaciones. Podemos, por otra parte, definir la *variación sustancial*

$$\bar{\delta} \Phi^A := \delta \Phi^A - \delta x^\mu \partial_\mu \Phi^A, \quad (3.6)$$

que por definición conmuta con la derivada parcial

$$\bar{\delta} (\partial_\mu \Phi^A) \equiv \partial_\mu (\bar{\delta} \Phi^A), \quad (3.7)$$

para reescribir la ecuación (3.5) como

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi^A} \bar{\delta} \Phi^A + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^A)} \bar{\delta} \Phi^A \right) + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}, \quad (3.8)$$

de manera que, al combinar los resultados, la variación de la acción (3.3) se escribe

$$\delta S = \int_M \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi^A} \bar{\delta} \Phi^A + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^A)} \bar{\delta} \Phi^A + \delta x^\mu \mathcal{L} \right) \right], \quad (3.9)$$

donde

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi^A} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^A} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^A)} \right) \quad (3.10)$$

es la derivada funcional estándar de la densidad lagrangeana con respecto al campo Φ^A .

Vemos que no es necesario que la transformación hecha anteriormente sea una simetría sobre el sistema para realizar este cálculo. Podemos estar tratando con transformaciones para extremizar la acción, sin embargo, nuestro interés radica en las simetrías continuas, por lo que podemos escribir estas variaciones infinitesimales como

$$\bar{\delta} \Phi^A = \epsilon \lambda^i (\Omega_i)^A_B \Phi^B, \quad \delta x^\mu = \epsilon \lambda^i (\Omega_i)^\mu_\nu x^\nu, \quad (3.11)$$

con Ω_i los generadores correspondientes a cada representación del álgebra de Lie asociada a la transformación, λ^i los parámetros que definen a la transformación y ϵ un parámetro infinitesimal constante. Tenemos entonces que la ecuación (3.9) puede reescribirse como

$$\delta S = \epsilon \int_M \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi^A} \lambda^i (\Omega_i)^A_B \Phi^B + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^A)} \lambda^i (\Omega_i)^A_B \Phi^B + \lambda^i (\Omega_i)^\mu_\nu x^\nu \mathcal{L} \right) \right], \quad (3.12)$$

de donde definimos una densidad de corriente, que es una densidad vectorial de peso 1

$$\mathcal{J}^\mu(\lambda^i) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^A)} \lambda^i (\Omega_i)^A_B \Phi^B + \lambda^i (\Omega_i)^\mu_\nu x^\nu \mathcal{L}, \quad (3.13)$$

la que en el caso de que la acción sea invariante bajo la transformación, se tiene que se debe satisfacer la ecuación de balance

$$\partial_\mu \mathcal{J}^\mu(\lambda^i) = -\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi^A} \lambda^i(\Omega_i)^A{}_B \Phi^B. \quad (3.14)$$

Cuando en la descripción del sistema utilizamos campos no-dinámicos, tenemos que on-shell se debe satisfacer

$$\partial_\mu \mathcal{J}^\mu(\lambda^i) \stackrel{\text{on}}{=} -\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi^I} \lambda^i(\Omega_i)^I{}_J \psi^J, \quad (3.15)$$

la que eventualmente puede anularse, dependiendo del comportamiento de los campos no-dinámicos en el sistema.

La carga en este formalismo se define mediante

$$Q := \int_{\Sigma} \mathcal{J}^\mu(\lambda^i) \hat{n}_\mu(\Sigma) d\Sigma, \quad (3.16)$$

donde $d\Sigma$ es un elemento de la hipersuperficie Σ y $\hat{n}_\mu(\Sigma)$ un vector ortogonal a la hipersuperficie tipo espacio Σ , que apunta en dirección *futura*¹. Si definimos la sub-variedad Ω de la misma forma que en (2.15) y si tenemos que el lado derecho de (3.15) se anula, podemos integrar sobre ésta

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_\mu \mathcal{J}^\mu d^d x &= \int_{\partial\Omega} \mathcal{J}^\mu \hat{n}_\mu(\partial\Omega) d^{d-1}x \\ &= \int_{\Sigma_1} \mathcal{J}^\mu \hat{n}_\mu(\Sigma_1) d\Sigma - \int_{\Sigma_2} \mathcal{J}^\mu \hat{n}_\mu(\Sigma_2) d\Sigma + \int_{\Pi} \mathcal{J}^\mu \hat{n}_\mu(\Pi) d^{d-1}x \\ &= Q_1 - Q_2 + \int_{\Pi} \mathcal{J}^i \hat{n}_i d^{d-1}x, \end{aligned} \quad (3.17)$$

por lo que, si además suponemos que el flujo sobre la hipersuperficie Π se anula en el infinito espacial, vemos que

$$\Delta_{t_1 \rightarrow t_2} Q = 0, \quad (3.18)$$

lo que implica que la carga se conserva globalmente en la sub-variedad Ω .

3.2. Identidades de Noether correspondientes a difeomorfismos

En los trabajos [25, 26] Obukhov y Puetzfeld establecieron las identidades de difeomorfismo que se obtienen de la invarianza general de coordenadas, es decir, las transformaciones de difeomorfismo.

Para esto, consideraron los cambios infinitesimales de las coordenadas espaciotemporales, que afectan a las cantidades los campos de materia y geométricos como:

$$\delta x^\mu = \epsilon \tilde{\zeta}^\mu(x), \quad (3.19)$$

$$\delta g_{\mu\nu} = \epsilon [-(\partial_\mu \tilde{\zeta}^\lambda) g_{\lambda\nu} - (\partial_\nu \tilde{\zeta}^\lambda) g_{\mu\lambda}], \quad (3.20)$$

$$\delta \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu} = \epsilon [-(\partial_\lambda \tilde{\zeta}^\rho) \Gamma^\nu{}_{\rho\mu} - (\partial_\mu \tilde{\zeta}^\rho) \Gamma^\nu{}_{\lambda\rho} + (\partial_\rho \tilde{\zeta}^\nu) \Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} - \partial_\lambda \partial_\mu \tilde{\zeta}^\nu], \quad (3.21)$$

$$\delta \Psi^A = -\epsilon (\partial_\mu \tilde{\zeta}^\nu) (\sigma^A{}_B)_{\nu}{}^\mu \Psi^B. \quad (3.22)$$

Aquí, ϵ es un factor infinitesimal constante, $\tilde{\zeta}^\mu$ un campo vectorial que parametriza el difeomorfismo local y $(\sigma^A{}_B)_{\nu}{}^\mu$ son los generadores de las transformaciones generales de coordenadas. Estos últimos, satisfacen la relación de conmutación

$$(\sigma^A{}_C)_{\nu}{}^\mu (\sigma^C{}_B)_{\rho}{}^\lambda - (\sigma^A{}_C)_{\rho}{}^\lambda (\sigma^C{}_B)_{\nu}{}^\mu = (\sigma^A{}_B)_{\rho}{}^\mu \delta_\nu^\lambda - (\sigma^A{}_B)_{\nu}{}^\lambda \delta_\rho^\mu. \quad (3.23)$$

¹Esto quiere decir que $\hat{n}_\mu(\Sigma)$ es además un vector tipo tiempo.

Ahora bien, podemos utilizar las leyes de transformación dadas en (3.19) a (3.22) y la definición de la variación sustancial (3.6) para obtener que la variación de la acción (3.3) queda dada por

$$\delta S = -\epsilon \int \left[\xi^\lambda \Omega_\lambda + (\partial_\mu \xi^\lambda) \Omega_\lambda{}^\mu + (\partial_\mu \partial_\nu \xi^\lambda) \Omega_\lambda{}^{\mu\nu} + (\partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho \xi^\lambda) \Omega_\lambda{}^{\mu\nu\rho} \right] d^4x, \quad (3.24)$$

donde hemos definido

$$\begin{aligned} \Omega_\lambda := & \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi^A} \partial_\lambda \Psi^A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Gamma^\sigma{}_{\rho\tau}} \partial_\lambda \Gamma^\sigma{}_{\rho\tau} + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu g_{\sigma\tau})} \partial_\lambda g_{\sigma\tau} \right) \\ & + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\sigma{}_{\rho\tau})} \partial_\lambda \partial_\mu \Gamma^\sigma{}_{\rho\tau} + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi^A)} \partial_\lambda \Psi^A - \delta_\lambda^\mu \mathcal{L} \right), \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \Omega_\lambda{}^\mu := & 2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} g_{\lambda\nu} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi^A} (\sigma^A{}_B)_\lambda{}^\mu \Psi^B + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi^A)} \partial_\lambda \Psi^A - \delta_\lambda^\mu \mathcal{L} + 2 \partial_\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma g_{\mu\nu})} g_{\nu\lambda} \right) \\ & + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu g_{\rho\sigma})} \partial_\lambda g_{\rho\sigma} + \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Psi^A)} (\sigma^A{}_B)_\lambda{}^\mu \Psi^B \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Gamma^\nu{}_{\tau\mu}} \Gamma^\nu{}_{\tau\lambda} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Gamma^\nu{}_{\mu\tau}} \Gamma^\nu{}_{\lambda\tau} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Gamma^\lambda{}_{\tau\nu}} \Gamma^\mu{}_{\tau\nu} \\ & + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\tau\sigma})} \partial_\lambda \Gamma^\rho{}_{\tau\sigma} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \Gamma^\rho{}_{\mu\tau})} \partial_\sigma \Gamma^\rho{}_{\lambda\tau} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \Gamma^\rho{}_{\tau\mu})} \partial_\sigma \Gamma^\rho{}_{\tau\lambda} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \Gamma^\lambda{}_{\tau\rho})} \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\tau\rho}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \Omega_\lambda{}^{\mu\nu} := & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi^A)} (\sigma^A{}_B)_\lambda{}^\nu \Psi^B + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Gamma^\lambda{}_{(\mu\nu)}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\tau{}_{\nu\sigma})} \Gamma^\tau{}_{\lambda\sigma} \\ & + 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu g_{\nu\sigma})} g_{\lambda\sigma} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\tau{}_{|\rho|\nu})} \Gamma^\tau{}_{\rho\lambda} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{|\rho\sigma|})} \Gamma^\nu{}_{\rho\sigma}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\Omega_\lambda{}^{\mu\nu\rho} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu})}. \quad (3.28)$$

Ahora bien, si la acción es invariante bajo transformaciones generales de coordenadas, tenemos que el lado izquierdo de (3.24) es nulo; así, el integrando del lado derecho de esta misma ecuación ha de anularse idénticamente, por lo que, debido a la independencia lineal del vector ξ^μ con sus derivadas de orden superior, se ha de satisfacer que

$$\Omega_\lambda \equiv 0, \quad \Omega_\lambda{}^\mu \equiv 0, \quad \Omega_\lambda{}^{\mu\nu} \equiv 0, \quad \Omega_\lambda{}^{\mu\nu\rho} \equiv 0, \quad (3.29)$$

las que se conocen como *identidades de Noether para difeomorfismos*.

3.3. Corriente de difeomorfismo

Es importante estudiar también el comportamiento de la corriente que surge a partir de los difeomorfismos en el formalismo de coordenadas, en particular, resulta interesante saber cómo se relaciona éste con la corriente (2.51a) y con (2.113).

En este formalismo, podemos notar que la variación sustancial de los campos geométricos y de materia está dada por

$$\bar{\delta} g_{\mu\nu} = -\epsilon (\partial_\mu \xi^\lambda) g_{\lambda\nu} - \epsilon (\partial_\nu \xi^\lambda) g_{\mu\lambda} - \epsilon \xi^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu} \quad (3.30)$$

$$\bar{\delta} \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu} = -\epsilon (\partial_\lambda \xi^\rho) \Gamma^\nu{}_{\rho\mu} - \epsilon (\partial_\mu \xi^\rho) \Gamma^\nu{}_{\lambda\rho} + \epsilon (\partial_\rho \xi^\nu) \Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} - \epsilon \partial_\lambda \partial_\mu \xi^\nu - \epsilon \xi^\rho \partial_\rho \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu}, \quad (3.31)$$

$$\bar{\delta} \Psi^A = -\epsilon (\partial_\mu \xi^\nu) (\sigma^A{}_B)_\nu{}^\mu \Psi^B - \epsilon \xi^\mu \partial_\mu \Psi^A. \quad (3.32)$$

Por su parte, podemos definir la derivada de Lie de los elementos señalados:

$$\begin{aligned}\ell_{\xi}g_{\mu\nu} &:= (\partial_{\mu}\xi^{\lambda})g_{\lambda\nu} + (\partial_{\nu}\xi^{\lambda})g_{\mu\lambda} + \xi^{\lambda}\partial_{\lambda}g_{\mu\nu} \\ &\equiv g_{\lambda\nu}\nabla_{\mu}\xi^{\lambda} + g_{\mu\lambda}\nabla_{\nu}\xi^{\lambda} - \xi^{\lambda}\left(Q_{\lambda\mu\nu} + 2T_{(\mu\nu)\lambda}\right),\end{aligned}\quad (3.33)$$

$$\begin{aligned}\ell_{\xi}\Gamma_{\lambda\mu}{}^{\nu} &:= (\partial_{\lambda}\xi^{\rho})\Gamma_{\rho\mu}{}^{\nu} + (\partial_{\mu}\xi^{\rho})\Gamma_{\lambda\rho}{}^{\nu} - (\partial_{\rho}\xi^{\nu})\Gamma_{\lambda\mu}{}^{\rho} + \partial_{\lambda}\partial_{\mu}\xi^{\nu} + \xi^{\rho}\partial_{\rho}\Gamma_{\lambda\mu}{}^{\nu} \\ &\equiv \nabla_{\lambda}\nabla_{\mu}\xi^{\nu} + \nabla_{\lambda}(T^{\nu}{}_{\rho\mu}\xi^{\rho}) + \xi^{\rho}R^{\nu}{}_{\rho\lambda\mu},\end{aligned}\quad (3.34)$$

$$\begin{aligned}\ell_{\xi}\Psi^A &:= \xi^{\mu}\partial_{\mu}\Psi^A + (\partial_{\mu}\xi^{\nu})(\sigma^A{}_B)_{\nu}{}^{\mu}\Psi^B \\ &\equiv \xi^{\mu}\nabla_{\mu}\Psi^A + (\nabla_{\mu}\xi^{\nu})(\sigma^A{}_B)_{\nu}{}^{\mu}\Psi^B + T^{\lambda}{}_{\mu\nu}\xi^{\mu}(\sigma^A{}_B)_{\lambda}{}^{\nu}\Psi^B.\end{aligned}\quad (3.35)$$

Notamos que todas estas expresiones son covariantes bajo transformaciones generales de coordenadas. Además, podemos relacionarlas con las variaciones sustanciales,

$$\bar{\delta}g_{\mu\nu} = -\epsilon\ell_{\xi}g_{\mu\nu}, \quad (3.36)$$

$$\bar{\delta}\Gamma^{\nu}{}_{\lambda\mu} = -\epsilon\ell_{\xi}\Gamma^{\nu}{}_{\lambda\mu}, \quad (3.37)$$

$$\bar{\delta}\Psi^A = -\epsilon\ell_{\xi}\Psi^A, \quad (3.38)$$

por lo que la corriente (3.13) para los difeomorfismos puede escribirse como

$$\mathcal{J}^{\mu} = \xi^{\mu}\mathcal{L} - (\ell_{\xi}g_{\lambda\rho})\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}g_{\lambda\rho})} - \left(\ell_{\xi}\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\sigma}\right)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\sigma})} - \left(\ell_{\xi}\Psi^A\right)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\Psi^A)}. \quad (3.39)$$

De (3.14) vemos que esta corriente satisface la ecuación de balance

$$\partial_{\mu}\mathcal{J}^{\mu} = (\ell_{\xi}g_{\mu\nu})\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} + \left(\ell_{\xi}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\right)\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}} + \left(\ell_{\xi}\Psi^A\right)\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Psi^A}. \quad (3.40)$$

Para encontrar una forma de superpotencial para la corriente, expandiremos las derivadas de Lie que aparecen en (3.39), y usaremos las identidades (3.29). En particular, de (3.26) obtenemos inmediatamente

$$\begin{aligned}\xi^{\mu}\mathcal{L} &= 2\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}}\xi_{\nu} + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Psi^A}\xi^{\lambda}(\sigma^A{}_B)_{\lambda}{}^{\mu}\Psi^B + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Gamma^{\nu}{}_{\tau\mu}}\xi^{\lambda}\Gamma^{\nu}{}_{\tau\lambda} + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Gamma^{\nu}{}_{\mu\tau}}\xi^{\lambda}\Gamma^{\nu}{}_{\lambda\tau} - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\tau\nu}}\xi^{\lambda}\Gamma^{\mu}{}_{\tau\nu} \\ &+ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}g_{\rho\sigma})}\xi^{\lambda}\partial_{\lambda}g_{\rho\sigma} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\tau\sigma})}\xi^{\lambda}\partial_{\lambda}\Gamma^{\rho}{}_{\tau\sigma} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\Psi^A)}\xi^{\lambda}\partial_{\lambda}\Psi^A \\ &+ \xi^{\lambda}\partial_{\nu}\left(2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu}g_{\mu\rho})}g_{\rho\lambda} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu}\Psi^A)}(\sigma^A{}_B)_{\lambda}{}^{\mu}\Psi^B \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\tau})}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\tau} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\tau\mu})}\Gamma^{\rho}{}_{\tau\lambda} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\tau\rho})}\Gamma^{\mu}{}_{\tau\rho}\right),\end{aligned}\quad (3.41)$$

donde hemos aprovechado la definición de la derivada funcional de la conexión, dada por

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}} - \partial_{\rho}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\rho}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu})}\right). \quad (3.42)$$

Reemplazando lo encontrado en (3.41) en la corriente (3.39) con las derivadas de Lie explicitadas

y reduciendo términos semejantes se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}^\mu = & 2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} \xi_\nu + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi^A} \xi^\lambda (\sigma^A_B)_\lambda{}^\mu \Psi^B + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma^\nu_{\tau\mu}} \xi^\lambda \Gamma^\nu_{\tau\lambda} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma^\nu_{\mu\tau}} \xi^\lambda \Gamma^\nu_{\lambda\tau} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma^\lambda_{\tau\nu}} \xi^\lambda \Gamma^\mu_{\tau\nu} \\
& - 2(\partial_\nu \xi^\lambda) g_{\rho\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu g_{\rho\nu})} - (\partial_\lambda \xi^\nu) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi^A)} (\sigma^A_B)_\nu{}^\lambda \Psi^B \\
& - (\partial_\sigma \xi^\tau) \Gamma^\lambda_{\rho\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\rho\sigma})} - (\partial_\rho \xi^\tau) \Gamma^\lambda_{\tau\sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\rho\sigma})} + (\partial_\tau \xi^\lambda) \Gamma^\tau_{\rho\sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\rho\sigma})} - \partial_\rho \partial_\sigma \xi^\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\rho\sigma})} \\
& + \xi^\lambda \partial_\nu \left(2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu g_{\mu\rho})} g_{\rho\lambda} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Psi^A)} (\sigma^A_B)_\lambda{}^\mu \Psi^B \right. \\
& \left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\tau})} \Gamma^\rho_{\lambda\tau} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Gamma^\rho_{\tau\mu})} \Gamma^\rho_{\tau\lambda} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Gamma^\lambda_{\tau\rho})} \Gamma^\mu_{\tau\rho} \right). \tag{3.43}
\end{aligned}$$

Notamos ahora que podemos reescribir ciertos elementos de la ecuación anterior,

$$2(\partial_\nu \xi^\lambda) g_{\rho\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu g_{\rho\nu})} = \partial_\nu \left(2 \xi_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu g_{\rho\nu})} \right) - 2 \xi^\lambda \partial_\nu \left(g_{\rho\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu g_{\rho\nu})} \right), \tag{3.44}$$

$$(\partial_\lambda \xi^\nu) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi^A)} (\sigma^A_B)_\nu{}^\lambda \Psi^B = \partial_\lambda \left(\xi^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi^A)} (\sigma^A_B)_\nu{}^\lambda \Psi^B \right) - \xi^\nu \partial_\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi^A)} (\sigma^A_B)_\nu{}^\lambda \Psi^B \right), \tag{3.45}$$

$$(\partial_\sigma \xi^\tau) \Gamma^\lambda_{\rho\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\rho\sigma})} = \partial_\sigma \left(\xi^\tau \Gamma^\lambda_{\rho\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\rho\sigma})} \right) - \xi^\tau \partial_\sigma \left(\Gamma^\lambda_{\rho\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\rho\sigma})} \right), \tag{3.46}$$

por lo que, reemplazando en la ecuación (3.43), obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}^\mu = & 2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} \xi_\nu + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi^A} \xi^\lambda (\sigma^A_B)_\lambda{}^\mu \Psi^B + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma^\nu_{\tau\mu}} \xi^\lambda \Gamma^\nu_{\tau\lambda} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma^\nu_{\mu\tau}} \xi^\lambda \Gamma^\nu_{\lambda\tau} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma^\lambda_{\tau\nu}} \xi^\lambda \Gamma^\mu_{\tau\nu} \\
& - \partial_\nu \left(2 \xi_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu g_{\lambda\nu})} + \xi^\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi^A)} (\sigma^A_B)_\lambda{}^\nu \Psi^B \right. \\
& \left. + \xi^\tau \Gamma^\lambda_{\rho\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\rho\nu})} + \xi^\tau \Gamma^\lambda_{\tau\sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\sigma})} - \xi^\lambda \Gamma^\nu_{\rho\sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\rho\sigma})} \right) \\
& + 2 \xi^\lambda \partial_\nu \left(2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu g_{\mu\rho})} g_{\rho\lambda} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Psi^A)} (\sigma^A_B)_\lambda{}^\mu \Psi^B \right. \\
& \left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\tau})} \Gamma^\rho_{\lambda\tau} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Gamma^\rho_{\tau\mu})} \Gamma^\rho_{\tau\lambda} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Gamma^\lambda_{\tau\rho})} \Gamma^\mu_{\tau\rho} \right) \\
& - \partial_\rho \partial_\sigma \xi^\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\rho\sigma})}. \tag{3.47}
\end{aligned}$$

Ahora bien, notamos que de la ecuación (3.27) y de las identidades de Noether para difeomorfismos (3.29) obtenemos que

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Gamma^\lambda_{(\mu\nu)}} = & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi^A)} (\sigma^A_B)_\lambda{}^\nu \Psi^B + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\tau_{\nu\sigma})} \Gamma^\tau_{\lambda\sigma} \\
& + 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu g_{\nu\sigma})} g_{\lambda\sigma} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\tau_{|\rho|\nu})} \Gamma^\tau_{\rho\lambda} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda_{|\rho\sigma|})} \Gamma^\nu_{\rho\sigma}, \tag{3.48}
\end{aligned}$$

donde notamos que el lado derecho aparece idénticamente en (3.47) por lo que ésta se reduce a

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}^\mu = & 2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} \xi_\nu + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi^A} \xi^\lambda (\sigma^A{}_B)_\lambda{}^\mu \Psi^B + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma^\nu{}_{\tau\mu}} \xi^\lambda \Gamma^\nu{}_{\tau\lambda} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma^\nu{}_{\mu\tau}} \xi^\lambda \Gamma^\nu{}_{\lambda\tau} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma^\lambda{}_{\tau\nu}} \xi^\lambda \Gamma^\mu{}_{\tau\nu} \\
& - \partial_\nu \left(2 \xi_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu g_{\lambda\nu})} + \xi^\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi^A)} (\sigma^A{}_B)_\lambda{}^\nu \Psi^B \right. \\
& \quad \left. + \xi^\tau \Gamma^\lambda{}_{\rho\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu})} + \xi^\tau \Gamma^\lambda{}_{\tau\sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma})} - \xi^\lambda \Gamma^\nu{}_{\rho\sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{\rho\sigma})} \right) \\
& - 2 \xi^\lambda \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Gamma^\lambda{}_{(\mu\nu)}} \right) - \partial_\rho \partial_\sigma \xi^\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{(\rho\sigma)})}. \tag{3.49}
\end{aligned}$$

Podemos también usar (3.28) para mostrar que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{(\rho\sigma)})} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \Gamma^\lambda{}_{(\mu\sigma)})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \Gamma^\lambda{}_{(\mu\rho)})}, \tag{3.50}$$

por lo que podemos reescribir la última línea de (3.49) como

$$\begin{aligned}
& - 2 \xi^\lambda \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Gamma^\lambda{}_{(\mu\nu)}} \right) - \partial_\rho \partial_\sigma \xi^\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{(\rho\sigma)})} \\
& = - 2 \xi^\lambda \partial_\nu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma^\lambda{}_{(\mu\nu)}} \right) - \partial_\rho \partial_\sigma \left(\xi^\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{(\rho\sigma)})} \right) + 2 \partial_\rho \left(\xi^\lambda \partial_\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{(\rho\sigma)})} \right) \right). \tag{3.51}
\end{aligned}$$

También podemos trabajar los términos multiplicados por la conexión en la ecuación (3.49). En particular vemos que

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma^\nu{}_{\tau\mu}} \xi^\lambda \Gamma^\nu{}_{\tau\lambda} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma^\nu{}_{\mu\tau}} \xi^\lambda \Gamma^\nu{}_{\lambda\tau} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma^\lambda{}_{\tau\nu}} \xi^\lambda \Gamma^\mu{}_{\tau\nu} \\
& = (\xi^\lambda T^\nu{}_{\lambda\rho} + \nabla_\rho \xi^\nu) \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma^\nu{}_{\mu\rho}} - \xi^\lambda \nabla_\rho \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma^\lambda{}_{\rho\mu}} \right) - \partial_\rho \xi^\nu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma^\nu{}_{\mu\rho}} + \xi^\lambda \partial_\rho \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma^\lambda{}_{\rho\mu}} \right), \tag{3.52}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \xi^\tau \Gamma^\lambda{}_{\rho\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu})} + \xi^\tau \Gamma^\lambda{}_{\tau\sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma})} - \xi^\lambda \Gamma^\nu{}_{\rho\sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{\rho\sigma})} \\
& = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\nu\sigma})} \xi^\lambda T^\rho{}_{\lambda\sigma} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma})} \nabla_\sigma \xi^\lambda - \xi^\lambda \nabla_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu})} \right) \\
& \quad + 2 \xi^\lambda \partial_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{(\rho\nu)})} \right) + \xi^\lambda \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu})} - \partial_\sigma \left(\xi^\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma})} \right), \tag{3.53}
\end{aligned}$$

lo que podemos insertar en (3.49), obteniendo que

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}^\mu = & 2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} \xi_\nu + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi^A} \xi^\lambda (\sigma^A_B)_{\lambda}{}^\mu \Psi^B + (\xi^\lambda T^\nu{}_{\lambda\rho} + \nabla_\rho \xi^\nu) \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma^\nu{}_{\mu\rho}} - \xi^\lambda \nabla_\rho \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma^\lambda{}_{\rho\mu}} \right) \\
& - \partial_\rho \xi^\nu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma^\nu{}_{\mu\rho}} + \xi^\lambda \partial_\rho \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma^\lambda{}_{\rho\mu}} \right) \\
& - \partial_\nu \left[2 \xi_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu g_{\lambda\nu})} + \xi^\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi^A)} (\sigma^A_B)_{\lambda}{}^\nu \Psi^B \right. \\
& \quad + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\nu\sigma})} \xi^\lambda T^\rho{}_{\lambda\sigma} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma})} \nabla_\sigma \xi^\lambda - \xi^\lambda \nabla_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu})} \right) \\
& \quad \left. + 2 \xi^\lambda \partial_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{(\rho\nu)})} \right) + \xi^\lambda \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu})} - \partial_\sigma \left(\xi^\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma})} \right) \right] \\
& - 2 \xi^\lambda \partial_\nu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma^\lambda{}_{(\mu\nu)}} \right) - \partial_\rho \partial_\sigma \left(\xi^\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{(\rho\sigma)})} \right) + 2 \partial_\rho \left(\xi^\lambda \partial_\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{(\rho\sigma)})} \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.54}$$

lo que al reducir términos semejantes, nos conduce a

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}^\mu = & 2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} \xi_\nu + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi^A} \xi^\lambda (\sigma^A_B)_{\lambda}{}^i \Psi^B + (\xi^\lambda T^\nu{}_{\lambda\rho} + \nabla_\rho \xi^\nu) \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma^\nu{}_{\mu\rho}} - \xi^\lambda \nabla_\rho \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma^\lambda{}_{\rho\mu}} \right) \\
& - \partial_\nu \left[2 \xi_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu g_{\lambda\nu})} + \xi^\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi^A)} (\sigma^A_B)_{\lambda}{}^\nu \Psi^B \right. \\
& \quad + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\nu\sigma})} (\xi^\lambda T^\rho{}_{\lambda\sigma} + \nabla_\sigma \xi^\rho) - \xi^\lambda \nabla_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu})} \right) \\
& \quad \left. + \xi^\lambda \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu})} + \xi^\lambda \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}} \right].
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Así, podemos definir una densidad tensorial $\mathcal{H}^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{\mu\nu} := & -2 \xi_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu g_{\lambda\nu})} - \xi^\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi^A)} (\sigma^A_B)_{\lambda}{}^\nu \Psi^B - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\nu\sigma})} (\xi^\lambda T^\rho{}_{\lambda\sigma} + \nabla_\sigma \xi^\rho) \\
& + \xi^\lambda \nabla_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu})} \right) - \xi^\lambda \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu})} - \xi^\lambda \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}},
\end{aligned} \tag{3.56}$$

de manera que la corriente puede reescribirse de la forma compacta

$$\mathcal{J}^\mu = \partial_\nu \mathcal{H}^{\mu\nu} 2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} \xi_\nu + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi^A} \xi^\lambda (\sigma^A_B)_{\lambda}{}^i \Psi^B + (\xi^\lambda T^\nu{}_{\lambda\rho} + \nabla_\rho \xi^\nu) \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma^\nu{}_{\mu\rho}} - \xi^\lambda \nabla_\rho \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma^\lambda{}_{\rho\mu}} \right). \tag{3.57}$$

Es inmediato que en la configuración on-shell, la corriente se reduce a la forma más sencilla

$$\mathcal{J}^\mu \stackrel{\text{on}}{=} \partial_\nu \mathcal{H}^{\mu\nu}. \tag{3.58}$$

3.4. Corrientes covariantes

A primera vista, pudiese parecer que la definición (3.56) no corresponde a las componentes de una densidad tensorial bajo transformaciones generales de coordenadas. Sin embargo, es posible comprobar que en efecto lo es, cuando se considera un lagrangeano escrito en función de elementos covariantes. Esto quiere decir que a partir de ahora, escribiremos el lagrangeano de una forma equivalente pero funcionalmente distinta.

Recordamos que la densidad lagrangeana arbitraria definida en (3.2) está definida por los campos geométricos y de materia y sus derivadas a primer orden; esto es

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(g_{\mu\nu}, \partial_\lambda g_{\mu\nu}, \Gamma^\lambda_{\mu\nu}, \partial_\rho \Gamma^\lambda_{\mu\nu}, \Psi^A, \partial_\nu \Psi^A). \quad (3.59)$$

Sin embargo, este lagrangeano está escrito en función de variables no-covariantes, como son las derivadas parciales de la métrica, de la conexión y de los campos de materia. Más aún, la propia conexión no es covariante. Es por esto que conviene (y es siempre posible) escribirlo de una forma equivalente, haciendo uso de las cantidades covariantes correspondientes. La forma más sencilla de expresar el lagrangeano de esta forma es tomando su dependencia como

$$\mathcal{L} = \bar{\mathcal{L}}(g_{\mu\nu}, Q_{\mu\nu\lambda}, T^\lambda_{\mu\nu}, R^\lambda_{\mu\nu\rho}, \Psi^A, \nabla_\nu \Psi^A), \quad (3.60)$$

donde hemos utilizado una barra para denotar que, aunque la densidad lagrangeana tiene el mismo valor² su forma funcional cambia.

Debido a que la forma funcional del lagrangeano cambia, es necesario re-escribir las derivadas parciales de éste que aparecen en la corriente, para adaptarlo a la nueva notación. De particular interés para este objetivo es el uso de la regla de la cadena. En particular, podemos ver que a partir de la definición de la derivada covariante de los campos de materia

$$\nabla_\mu \Psi^A := \partial_\mu \Psi^A - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} (\sigma^A_B)^\nu_\lambda \Psi^B, \quad (3.61)$$

y de las definiciones de la nometricidad (A.67), torsión (A.69) y curvatura (A.72), que las derivadas parciales de la densidad lagrangeana quedan dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi^A)} = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial (\nabla_\mu \Psi^A)}, \quad (3.62a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu g_{\nu\lambda})} = - \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial Q_{\mu\nu\lambda}}, \quad (3.62b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\rho\sigma})} = 2 \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial R^\lambda_{\mu\rho\sigma}}, \quad (3.62c)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}} = 2 \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial T^\lambda_{\mu\nu}} + 2g_{\rho\lambda} \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial Q_{\mu\nu\rho}} - \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial (\nabla_\mu \Psi^A)} (\sigma^A_B)^\nu_\lambda \Psi^B + 2\Gamma^\nu_{\rho\sigma} \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial R^\lambda_{\mu\rho\sigma}} + 2\Gamma^\rho_{\sigma\lambda} \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial R^\rho_{\sigma\mu\nu}}. \quad (3.62d)$$

Así, reemplazando lo obtenido en (3.62) en la expresión (3.56) se obtiene que el superpotencial se reduce a

$$\mathcal{H}^{\mu\nu} = -2(\xi^\lambda T^\rho_{\lambda\sigma} + \nabla_\sigma \xi^\rho) \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial R^\rho_{\mu\nu\sigma}} - 2\xi^\lambda \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial T^\lambda_{\mu\nu}}. \quad (3.63)$$

La corriente puede expresarse como

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^\mu = & 2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} \xi_\nu + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi^A} \xi^\lambda (\sigma^A_B)^\mu_\lambda \Psi^B + (\xi^\lambda T^\nu_{\lambda\rho} + \nabla_\rho \xi^\nu) \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma^\nu_{\mu\rho}} - \xi^\lambda \nabla_\rho \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Gamma^\lambda_{\rho\mu}} \right) \\ & - 2\partial_\nu \left[(\xi^\lambda T^\rho_{\lambda\sigma} + \nabla_\sigma \xi^\rho) \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial R^\rho_{\mu\nu\sigma}} + \xi^\lambda \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial T^\lambda_{\mu\nu}} \right]. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Notamos que en los trabajos [18, 19] se utiliza un *superpotencial de Komar generalizado* para teorías métrico-afines, que es muy similar al que se obtiene en (3.63), salvo por el término correspondiente a la derivada de la densidad lagrangeana con respecto de la torsión. Notemos también que este superpotencial reduce al superpotencial de Komar cuando uno considera la densidad lagrangeana de Hilbert-Einstein.

²Manteniendo la misma acción.

3.5. Forma holónoma de la corriente en formas diferenciales

Recordamos que la corriente en formas diferenciales queda dada por la expresión (2.113) con el superpotencial definido en (2.114), el que podemos escribir de una forma más compacta, pero equivalente, como

$$H(\xi) = -\xi^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T^a} - \frac{1}{2}(\xi \rfloor \Gamma^a_b - B^a_b) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R^a_b} - \xi \rfloor \Psi^A \wedge \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D\Psi^A)}. \quad (3.65)$$

Es importante comparar lo obtenido en la ecuación (3.63) con los resultados del capítulo anterior. En particular, podemos escribir la expresión (2.114) haciendo uso de la base holónoma para compararla con (3.56). Esto es posible utilizando las transformaciones entre las cantidades geométricas en una base a otra. Hemos también de transformar la definición de las derivadas parciales que se usan en (2.114) a la base holónoma, tomando en cuenta que éstas dependen de la variación de la densidad lagrangeana $\mathcal{L}$ con respecto a los campos respectivos. Por otra parte, tenemos que escoger una función para la 0-forma B^a_b para definir de manera única un resultado.

Podemos tomar las relaciones mencionadas y tomar en cuenta que

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} dx^0 \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{(d-1)} \equiv \tilde{\mathcal{L}} dx^0 \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{(d-1)}, \quad (3.66)$$

para obtener la forma de algunas de las derivadas parciales. Así, vemos que la derivada de la d -forma densidad lagrangeana con respecto a la 2-forma de torsión queda dada por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T^a} = \frac{1}{2(d-2)!} h_a^\lambda \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial T^\lambda_{\mu\nu}} \epsilon_{\mu\nu\alpha_3 \dots \alpha_d} dx^{\alpha_3} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_d}, \quad (3.67)$$

y con respecto a la 2-forma de curvatura

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R^a_b} = \frac{1}{2(d-2)!} h_a^\lambda h^b_\rho \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial R^\lambda_{\mu\nu\rho}} \epsilon_{\mu\nu\alpha_3 \dots \alpha_d} dx^{\alpha_3} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_d}. \quad (3.68)$$

Por otra parte, entre las distintas elecciones posibles para la 0-forma B^a_b , utilizaremos la llamada elección de Yano (2.80c), por el simple hecho de que ya nos ha guiado a un resultado conocido anteriormente en (2.119). Recordamos para este fin el resultado (2.118), de manera de que tenemos que

$$\xi \rfloor \Gamma^{ab} - e^{[a} \rfloor \vartheta^{b]} \equiv -e^{[a} \rfloor D\xi^{b]} - e^{[a} \rfloor (\xi \rfloor T^{b]}) \equiv -g^{\mu\lambda} h^{[a}_\lambda h^{b]}_\nu (\nabla_\mu \xi^\nu + \xi^\rho T^\nu_{\rho\mu}). \quad (3.69)$$

Con esto, escribimos el superpotencial (3.65) como

$$H(\xi) = -\frac{1}{4(d-2)!} \left(2\xi^\lambda \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial T^\lambda_{\mu\nu}} + 2 \left[\nabla_\sigma \xi^\rho + \xi^\lambda T^\rho_{\lambda\sigma} \right] \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial R^\rho_{\mu\nu\sigma}} \right) \epsilon_{\mu\nu\alpha_3 \dots \alpha_d} dx^{\alpha_3} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_d} - \xi \rfloor \Psi^A \wedge \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D\Psi^A)}, \quad (3.70)$$

el que comparamos con la ecuación (3.56), y notamos que en la parte geométrica coinciden en sus componentes. Las componentes del superpotencial (2.114) cuando se utiliza la elección de Yano (2.80c), coinciden también con las de (3.63) en el caso de que los campos de materia sean 0-formas, o en un caso más general, en el que el último término de (3.70) se anule.

3.6. Vectores de Killing generalizados

En la sección A.7 los vectores de Killing se definen como los campos vectoriales ξ que satisfacen la ecuación

$$\ell_\xi g_{\mu\nu} = 0, \quad (3.71)$$

que además satisfacen condiciones como (A.81). El hecho de que éstas definan isometrías del espacio-tiempo, implica que estos vectores estén intrínsecamente conectados con las simetrías de la variedad.

En el caso de una teoría gravitacional riemanniana como la Relatividad General de Einstein, y escogiendo a un vector de Killing como parámetro que caracteriza al difeomorfismo infinitesimal, tenemos que las ecuaciones (3.39) y (3.40) se reducen a la forma más sencilla, dependiendo ambas expresiones únicamente de los campos de materia.

Sin embargo, en una teoría métrico-afín general, la conexión y la métrica son campos independientes, por lo que tenemos que considerar también cómo es afectada la primera por las transformaciones generales de coordenadas. Explícitamente, en la ecuación (3.34) encontramos la forma explícita de la derivada de Lie de la conexión.

La noción de simetría del espaciotiempo puede generalizarse a teorías métrico-afines. Sabemos que la distorsión (A.75) mide cuán *no-riemanniana* es la conexión, por lo que para un vector de Killing ζ tenemos que

$$\ell_\zeta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \ell_\zeta N^\lambda_{\mu\nu} - \ell_\zeta \hat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \ell_\zeta N^\lambda_{\mu\nu}, \quad (3.72)$$

de acuerdo a (A.81).

Llamaremos *vector de Killing generalizado* a un campo vectorial ζ que satisfaga las siguientes condiciones:

$$\ell_\zeta g_{\mu\nu} = 0, \quad (3.73a)$$

$$\ell_\zeta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0. \quad (3.73b)$$

Equivalentemente, un vector de Killing generalizado es una isometría a lo largo de la cual la derivada de Lie de la distorsión se anula

$$\ell_\zeta N^\lambda_{\mu\nu} = 0. \quad (3.74)$$

Este concepto es importante, ya que podemos probar que la corriente inducida por un vector de Killing generalizado es conservada, al hacer suposiciones bastante razonables.

Sin embargo, es interesante mencionar que los campos vectoriales ζ que satisfacen $\ell_\zeta \hat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = 0$ pero no son vectores de Killing, se conocen como *colineaciones afines*. Por otra parte, los vectores que satisfacen $\hat{R}^\lambda_{\mu\nu\rho} = 0$ y no son isometrías se les llaman *colineaciones de curvatura*. Ambos conceptos son interesantes en el contexto de las leyes de conservación ya que contienen otra información respecto de las simetrías del espaciotiempo que nos permite definir nuevas leyes de conservación. Un estudio de las implicancias de estas definiciones y de otras similares se encuentra en los trabajos [30–33].

3.7. Corriente asociada a vectores de Killing generalizados

Si consideramos un vector de Killing generalizado, como el definido en (3.73), la corriente de difeomorfismo (3.39) queda explícitamente dada por

$$\mathcal{J}^\mu = \zeta^\mu \bar{\mathcal{L}} - \left(\zeta^\lambda \nabla_\lambda \Psi^A + (\nabla_\rho \zeta^\lambda) (\sigma^A_B)_\lambda{}^\rho \Psi^B + T^\nu{}_{\lambda\rho} \zeta^\lambda (\sigma^A_B)_\nu{}^\rho \Psi^B \right) \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial (\nabla_\mu \Psi^A)}, \quad (3.75)$$

la que podemos reordenar de forma inmediata como

$$\mathcal{J}^\mu = -\zeta^\lambda \mathcal{T}_\lambda{}^\mu - \left(\nabla_\rho \zeta^\lambda - \zeta^\sigma T^\lambda{}_{\rho\sigma} \right) S^\rho{}_\lambda{}^\mu, \quad (3.76)$$

con $\mathcal{T}_\lambda{}^\mu$ la densidad tensorial de energía-momentum canónico de la materia

$$\mathcal{T}_\lambda{}^\mu := \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial (\nabla_\mu \Psi^A)} \nabla_\lambda \Psi^A - \delta_\lambda^\mu \bar{\mathcal{L}}, \quad (3.77)$$

y la densidad de hiper-espín $S^\rho{}_\lambda{}^\mu$, definida como

$$S^\rho{}_\lambda{}^\mu := \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial (\nabla_\mu \Psi^A)} (\sigma^A_B)_\lambda{}^\rho \Psi^B. \quad (3.78)$$

La correspondiente ley de conservación para este caso está dada por

$$\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = \left(\ell_\zeta \Psi^A \right) \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi^A}, \quad (3.79)$$

por lo que la corriente de difeomorfismos asociada a un vector de Killing generalizado se conserva bajo alguno de los siguientes casos:

1. La derivada de Lie de los campos de materia a lo largo del vector de Killing generalizado se anula
2. Todos los campos de materia son dinámicos y se encuentran en configuración on-shell.
3. La combinación lineal del lado derecho de (3.79) se anula idénticamente.

$$\ell_\zeta \Psi^A = 0. \quad (3.80)$$

La primera de estas condiciones es la más fuerte de todas, puesto que además de ser un vector de Killing, el vector ζ debe satisfacer dos condiciones extra, (3.73b) y (3.80). Por otra parte, la segunda condición es suficientemente razonable en el contexto de una teoría gravitacional ya que generalmente nos encontramos en este caso. Finalmente, la tercera condición es la más relajada de todas, ya que los campos dinámicos no contribuyen al lado derecho de (3.79) on-shell y podemos seleccionar el vector de Killing generalizado de manera que la corriente se conserve.

Además, es interesante notar la similitud de las definiciones (3.77) y (3.78) con las definiciones dadas para el espacio de Minkowski (B.29) y (B.59) respectivamente. Vemos claramente, que al ser el espacio de Minkowski una geometría particular que se obtiene para algunos lagrangeanos, el tensor de energía-momentum (3.77) y el tensor de hiperspín (3.78) son generalizaciones de las expresiones obtenidas para la Relatividad Especial.

3.8. Carga de difeomorfismo

Como vimos en la sección 3.1, podemos definir una carga asociada a la corriente. En el caso de los difeomorfismos, si consideramos una sección espacial Σ , tenemos que esta carga viene dada por

$$Q[\zeta] := \int_\Sigma J^\mu(\zeta) \hat{n}_\mu d^{(d-1)}\Sigma, \quad (3.81)$$

donde la corriente es dada por las expresiones equivalentes (3.39), (3.55) ó (3.64) y el vector $\hat{n}_\mu$ es un vector ortonormal a la hipersuperficie Σ . Ahora bien, en el caso en que todos los campos involucrados en la descripción del sistema sean dinámicos, la corriente queda determinada por el superpotencial, de manera que

$$J^\mu \stackrel{\text{on}}{=} \partial_\nu \mathcal{H}^{\mu\nu}, \quad (3.82)$$

por lo que, de acuerdo al teorema de Stokes (A.103), la carga se escribe

$$Q[\zeta] \stackrel{\text{on}}{=} \oint_{\partial\Sigma} \mathcal{H}^{\mu\nu}(\zeta) \hat{n}_\mu \hat{m}_\nu d^{(d-2)}\Sigma, \quad (3.83)$$

donde el vector $\hat{m}_\mu$ es ortogonal a la superficie $\partial\Sigma$.

3.8.1. Lagrangeano de Hilbert-Einstein

Podemos probar que en el caso de Relatividad General, la carga se reduce a la conocida carga de Komar. Para $d = 4$ en la base holónoma, la acción de Hilbert-Einstein se escribe

$$S_{\text{HE}} = \frac{1}{4c\kappa_4} \int_M R \sqrt{|g|} d^4x, \quad (3.84)$$

donde el escalar de curvatura se define mediante

$$R := R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} g^{\lambda\rho} \delta_\mu^\nu. \quad (3.85)$$

La ecuación de campo que surge de esta acción viene dada por

$$\mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathring{R} g_{\mu\nu} = 0, \quad (3.86)$$

con el tensor de Ricci definido por

$$\mathring{R}_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\lambda\mu\nu}. \quad (3.87)$$

En este caso, la torsión y la no-metricidad son siempre nulas. El superpotencial asociado a ésta acción está dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{HE}}^{\mu\nu}(\xi) &= -\frac{1}{2c\kappa_4} \sqrt{|g|} \left(\mathring{\nabla}_\sigma \xi^\rho \right) \left[g^{\nu\sigma} \delta_\rho^\mu - g^{\mu\sigma} \delta_\rho^\nu \right] \\ &= \frac{1}{2c\kappa_4} \sqrt{|g|} \left(\mathring{\nabla}^\mu \xi^\nu - \mathring{\nabla}^\nu \xi^\mu \right), \end{aligned} \quad (3.88)$$

es decir, el superpotencial de Komar. Así, la carga on-shell definida sobre una 3-superficie espacial Σ , queda dada por

$$Q[\xi] = \frac{1}{2c\kappa_4} \int_{\partial\Sigma} \sqrt{|g|} \left(\mathring{\nabla}^\mu \xi^\nu - \mathring{\nabla}^\nu \xi^\mu \right) \hat{n}_\mu \hat{m}_\nu d^2\Sigma, \quad (3.89)$$

una forma equivalente de (2.57).



Capítulo 4

Cantidades conservadas gravitacionales invariantes en sistemas abiertos

4.1. Teoría de Einstein-Cartan

Un sistema es abierto cuando aparecen campos no-dinámicos en la formulación de sus ecuaciones de evolución y en su acción. Es por esto que no se obtienen ecuaciones de campo al calcular la variación de estos campos, por lo que el término del lado derecho de (2.113) que depende de estos campos de materia no se anulará inmediatamente, lo que invalida a la ecuación (2.115). Se obtiene en cambio que la corriente on-shell queda dada por

$$J(\xi) \stackrel{\text{on}}{=} dH(\xi) + \xi \lrcorner \psi^I \wedge \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi^I}, \quad (4.1)$$

y satisface la ecuación de balance

$$dJ(\xi) \stackrel{\text{on}}{=} L_\xi \psi^I \wedge \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi^I}. \quad (4.2)$$

Existe la posibilidad de que el lado derecho de esta ecuación sea idénticamente nulo, es decir, la ecuación de balance sea realmente una ecuación de conservación. Esto puede darse en el caso que:

1. La combinación lineal de las derivadas de Lie generalizadas de los campos no-dinámicos con la derivada variacional del lagrangeano con respecto a estos mismos campos (el lado derecho de la ecuación (4.2)) sea nula. Entonces las interacciones del sistema con su entorno se cancelan entre sí y permiten la conservación local de la corriente.
2. La derivada de Lie generalizada de cada campo no-dinámico se anula. Esto quiere decir que el arrastre natural del campo inducido por el campo vectorial ξ es contrarrestado por la rotación descrita por el campo B^{ab} .

Sin hacer ninguna suposición sobre los campos no dinámicos, es posible el definir una carga on-shell

$$Q[\xi] \stackrel{\text{on}}{=} \oint_{\partial \Sigma} H(\xi) + \int_{\Sigma} \xi \lrcorner \psi^I \wedge \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi^I}, \quad (4.3)$$

la cual incluye un término integrado en el *bulk* y, en principio, no es conservada.

Podemos también estudiar la conservación global de la carga, integrando la corriente sobre la subvariedad Ω definida en (2.15). Se obtiene que

$$Q[\xi]|_{t_2} - Q[\xi]|_{t_1} \stackrel{\text{on}}{=} \int_{\Omega} \left(L_\xi \psi^I \wedge \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi^I} \right) - \int_{\Pi} J(\xi), \quad (4.4)$$

de manera que la carga on-shell se conserva *globalmente* si el lado derecho de la ecuación (4.4) se anula, o equivalentemente

$$\int_{\Omega} \left(L_{\xi} \psi^I \wedge \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi^I} \right) \stackrel{\text{on}}{=} \int_{\Pi} J(\xi). \quad (4.5)$$

Esto quiere decir que cuando los campos dinámicos del sistema se encuentran en una configuración tal que la acción es mínima, la suma de cada flujo de la corriente a través de la sección espacial debe ser igual a la combinación del arrastre, la rotación y la interacción del sistema con su entorno.

La ecuación (4.2) se interpreta como una *ecuación de balance*, que determina la forma en que los campos de background interactúan con la corriente. En particular, éstas interacciones determinan el comportamiento local de la corriente, determinando la conservación o no-conservación de la misma.

4.2. Teorías métrico-afines

En este caso, el análisis es equivalente al anterior. La ecuación de balance de la corriente de difeomorfismo (3.40) cuando los campos se encuentran on-shell queda dada por

$$\partial_{\mu} \mathcal{J}^{\mu} \stackrel{\text{on}}{=} \left(\ell_{\xi} \psi^I \right) \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi^I}, \quad (4.6)$$

donde la corriente esta vez queda dada por

$$\mathcal{J}^{\mu}(\xi) \stackrel{\text{on}}{=} \partial_{\mu} \mathcal{H}^{\mu\nu}(\xi) + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi^I} \xi^{\lambda} (\sigma^I_{\lambda})_{\lambda}^{\mu} \psi^I. \quad (4.7)$$

La corriente se conserva si

1. La combinación lineal del lado derecho de la ecuación (4.6). Decimos entonces que las interacciones del sistema con su entorno en conjunto con el arrastre de Lie a lo largo del campo vectorial ξ , se cancelan entre sí y permiten la conservación local de la corriente.
2. La derivada de Lie de cada campo no-dinámico se anula. Esto es una condición demasiado fuerte sobre el vector ξ , ya que puede no existir algún campo vectorial definido sobre la variedad que satisfaga esta condición para todos los campos no dinámicos. Sin embargo, si puede que suceda esto para regiones determinadas del espacio-tiempo.

La corriente (3.76) tiene las mismas posibilidades de conservarse, ya que la ecuación de balance a la que responde es exactamente (4.6), considerando un vector de Killing generalizado. Sin embargo, para esta corriente podemos relajar las condiciones de conservación, ya que como las derivadas de Lie de los campos geométricos son nulas, tenemos que la métrica y la torsión no tienen por qué satisfacer ecuaciones de campo para que la corriente sea conservada. Así, esta corriente es apropiada para la descripción de sistemas donde la gravedad es un campo de background, y la materia tiene carácter dinámico.

En el caso general, la carga queda dada por

$$Q[\xi] \stackrel{\text{on}}{=} \oint_{\partial \Sigma} \mathcal{H}^{\mu\nu}(\xi) \hat{n}_{\mu}(\Sigma) \hat{n}_{\nu}(\partial \Sigma) d^{(d-2)}\Sigma + \int_{\Sigma} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi^I} \xi^{\lambda} (\sigma^I_{\lambda})_{\lambda}^{\mu} \psi^I \hat{n}_{\mu}(\Sigma) d^{(d-1)}\Sigma, \quad (4.8)$$

y la evolución de ésta queda determinada por la condición

$$\Delta_{t_1 \rightarrow t_2} Q \stackrel{\text{on}}{=} \int_{\Omega} \left(\ell_{\xi} \psi^I \right) \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi^I} d^d x - \int_{\Pi} J^{\mu} \hat{n}_{\mu}(\Pi) d^{(d-1)}\Sigma, \quad (4.9)$$

donde definimos la subvariedad d -dimensional de M , Ω , de la misma forma que en (2.15). En el caso de que el lado derecho de (4.9) sea nulo, la carga se conserva globalmente aunque existan campos no-dinámicos, por lo que se ve improbable que esto suceda, ya que las condiciones impuestas son muy fuertes.

Capítulo 5

Discusión final

En esta tesis se estudió a profundidad el formalismo de cargas conservadas de Noether para dos tipos de teorías gravitacionales: teorías métrico-afines, que engloban a la mayor cantidad de teorías gravitacionales posibles, ya que se hacen muy pocas suposiciones respecto de la naturaleza del espaciotiempo, lo que implica que hay una mayor cantidad de campos geométricos involucrados en la descripción del estado del sistema; y la teoría de Einstein-Cartan, que es un caso particular de la anterior, en la cual se fija uno de los campos mencionados anteriormente. El enfoque particular de este estudio fueron las transformaciones de difeomorfismo, las que se relacionan con propiedades intrínsecas de los cuerpos que residen en el espaciotiempo, como son la masa y el momentum angular. Sin embargo, el objetivo principal que se perseguía era profundizar el estudio del efecto que tienen los campos no-dinámicos o de background, sobre las cargas conservadas asociadas a las transformaciones generales de coordenadas.

En el desarrollo de esta tesis se logró establecer las condiciones bajo las cuales se obtienen leyes de conservación tanto locales como globales de la corriente y de la carga, respectivamente, en sistemas que incluyen campos no-dinámicos. Éstos resultados son novedosos, ya que no existe una gran discusión respecto del efecto que tienen campos no-dinámicos en la descripción de sistemas gravitacionales, en particular de las leyes de conservación. Es la intención del estudiante el continuar con la búsqueda de modelos gravitacionales en los cuales existan campos externos para aplicar el método planteado y estudiar la (no-)conservación de las cantidades que surgen de los difeomorfismos. Es por esto que se deja como trabajo futuro el estudio de cargas conservadas para geometrías específicas.

En esta tesis se muestra que existe un superpotencial asociado a la corriente de difeomorfismo, para ambas teorías gravitacionales, siendo el más general el que se encuentra para las teorías métrico-afines en el capítulo 3, que coincide con los resultados obtenidos para la teoría de Einstein-Cartan reproducidos en el capítulo 2. Es fundamental el papel que toma en esta discusión la derivada de Lie generalizada que se utiliza al momento de calcular la corriente que surge de los difeomorfismos considerando la simetría de Lorentz local: es este nuevo operador el que nos permite obtener cargas y corrientes que son totalmente covariantes bajo ambos tipos de transformaciones. Dentro de todas las posibles elecciones de derivadas de Lie generalizadas, la llamada elección de Yano es claramente privilegiada por sobre el resto, ya que nos permite unificar los resultados que se obtienen al expresar la corriente como una forma diferencial, reduciéndolos a los resultados conocidos como las cargas de Komar y el superpotencial encontrado para las teorías métrico-afines. Claramente la derivada de Yano es la generalización de la derivada de Lie que conecta este operador con el definido para las componentes de un tensor.

Resulta interesante, por decir lo menos, que el superpotencial asociado a la corriente de difeomorfismo escrito en la base holónoma no tenga una dependencia explícita de los campos de materia, en el sentido que únicamente están involucrados objetos geométricos y las derivadas parciales con respecto a la torsión y a la curvatura. Esto implica que, para un lagrangeano en el que el acople entre el campo gravitacional y los campos de materia sea minimal, será equivalente calcular el superpotencial considerando solo el lagrangeano gravitacional, ya que el lagrangeano de materia no contribuirá directamente al superpotencial. Así, es claro que la carga on-shell asociada a un sistema

con acople minimal surge únicamente gracias al campo gravitacional. Por otra parte, al considerar las simetrías propias del espaciotiempo (los vectores de Killing generalizados), la corriente queda determinada únicamente por los campos de materia, ya que como hemos visto, aparecen explícitamente los tensores de energía-momentum e hiperespín. Es interesante plantear la posible existencia de un superpotencial asociado a esta corriente, ya que sería una contraparte directa del superpotencial antes mencionado y deberían producir las mismas cargas on-shell.

Gracias al desarrollo de esta tesis el estudiante logró obtener un conocimiento bastante profundo respecto al estudio de las leyes de conservación. Aprendió la verdadera utilidad de los superpotenciales al momento de calcular las cargas, ya que a veces el término que va dentro de una derivada total en la corriente se desestima, ya que no influye directamente en la ley de conservación local. Por otra parte, el estudiante también logró satisfactoriamente comprender los métodos utilizados para el cálculo explícito de las cargas conservadas en una teoría gravitacional, ya que debido a la naturaleza del procedimiento, el cálculo es engorroso, incluso para las geometrías más sencillas como el agujero negro de Schwarzschild, por lo que fue necesario recurrir a la herramienta computacional de cálculo OpenReduce, la que el estudiante aprendió a manejar de manera eficiente.



Apéndice A

Elementos de Geometría Diferencial

A.1. Definiciones básicas

Una variedad d -dimensional M es un conjunto de puntos tal que existe una colección de subconjuntos de M , los que denotaremos U_α y que llamamos abiertos, que satisfacen

$$M = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}, \quad (\text{A.1})$$

tales que para cada U_α existe un mapeo invertible x^α (que llamamos coordenadas de los puntos de U_α) definido por

$$x^\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^d, \quad (\text{A.2})$$

los que satisfacen:

1. Existen *transformaciones de coordenadas* (también conocidos como *difeomorfismos*) entre dos abiertos de M que se solapan. Esto es, para todo $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ se tiene que

$$x^\alpha \circ (x'^\beta)^{-1} : x'^\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^d \longrightarrow x^\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^d, \quad (\text{A.3})$$

$$x'^\beta \circ (x^\alpha)^{-1} : x^\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^d \longrightarrow x'^\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^d. \quad (\text{A.4})$$

2. La condición de Hausdorff: para dos puntos distintos de la variedad, se pueden encontrar abiertos distintos en la colección que no se solapan. Esto es, para todo par $P, Q \in M$, existe $U_P, U_Q \subset M$ tales que $P \in U_P, Q \in U_Q$ y $U_P \cap U_Q = \emptyset$.

La definición de *difeomorfismo* es fundamental. En general consideramos un abierto U de la variedad M para el que existen dos parametrizaciones coordenadas x^μ y x'^μ . Éstas satisfacen las condiciones (A.3) y (A.4) para el abierto U . Esto es equivalente a considerar la *transformación general de coordenadas* para un punto P

$$x^\mu(P) \longrightarrow x'^\mu(P) = x'^\mu(x(P)). \quad (\text{A.5})$$

Sobre cada punto P de la variedad, podemos definir funciones *escalares* del tipo $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, de manera que para cada punto P de la variedad se tiene

$$f(P) = f(x(P)) = f'(x'(P)) = \dots, \quad (\text{A.6})$$

es decir, que su valor depende únicamente del punto sobre el cual se evalúa el mapeo, no de las coordenadas que se usen para nombrarlo, por lo que no cambian su valor bajo transformaciones generales de coordenadas.

También, para cada punto P se define un espacio vectorial $T_P(M)$, llamado *espacio tangente* a M en el punto P , cuyos elementos son conocidos como *vectores tangentes* al punto P y están dados por

$\xi = \xi^\mu \partial_\mu$, donde ξ^μ , con $\mu = 0, 1, \dots, (d-1)$ son números reales. Estos vectores tangentes actúan sobre las funciones escalares f definidas sobre la variedad de manera que se obtiene el mapeo

$$\xi(f(P)) = \xi^\mu (\partial_\mu f)(x(P)), \quad (\text{A.7})$$

para el punto P . Los elementos ∂_μ forman la base del espacio vectorial $T_P(M)$ y se conoce como la *base holónoma* o *inducida por las coordenadas*. Bajo un difeomorfismo (A.5), las componentes de un vector cambian de acuerdo a

$$\xi'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \xi^\nu. \quad (\text{A.8})$$

Podemos también definir el correspondiente espacio dual a $T_P(M)$, el espacio cotangente, que denotaremos mediante $T_P^*(M)$, en el cual están contenidos los mapeos

$$dx^\mu : T_P(M) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\text{A.9})$$

que satisfacen

$$dx^\mu(\partial_\nu) = \delta_\nu^\mu, \quad (\text{A.10})$$

y cuyos elementos se conocen como covectores. Las componentes f_μ de un covector $f_\mu dx^\mu$ transforman bajo difeomorfismos como

$$f'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} f_\nu. \quad (\text{A.11})$$

Ahora bien, podemos definir los tensores de rango $\binom{p}{q}$ en el punto P mediante el producto tensorial $\otimes$ como elementos del conjunto

$$T^{(p)}_q(P; M) := \overbrace{T_P(M) \otimes \dots \otimes T_P(M)}^{p \text{ veces}} \otimes \underbrace{T_P^*(M) \otimes \dots \otimes T_P^*(M)}_{q \text{ veces}}, \quad (\text{A.12})$$

es decir, podemos escribirlos como

$$A = A^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_p} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_q}, \quad (\text{A.13})$$

donde los coeficientes $A^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ son conocidos como las *componentes holonómicas* del tensor A en el punto P . Éstas transforman bajo difeomorfismos como

$$A'^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\lambda_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\lambda_p}} \frac{\partial x^{\rho_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\rho_q}}{\partial x'^{\nu_q}} A^{\lambda_1 \dots \lambda_p}_{\rho_1 \dots \rho_q}. \quad (\text{A.14})$$

Las formas diferenciales son un caso particular de los tensores de rango $\binom{0}{q}$, esto es, porque definimos el *producto tensorial antisimétrico* $\wedge$ entre dos covectores ω_1 y ω_2 de manera que

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \omega_2 &:= \omega_1 \otimes \omega_2 - \omega_2 \otimes \omega_1 \\ &= (\omega_1)_\mu (\omega_2)_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

donde

$$dx^\mu \wedge dx^\nu := dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu, \quad (\text{A.16})$$

por lo que podemos definir el conjunto de las formas diferenciales de rango q (también conocidas como q -formas) en el punto P como

$$\Lambda_q(P; M) := \underbrace{T_P^*(M) \wedge \dots \wedge T_P^*(M)}_{q \text{ veces}}, \quad (\text{A.17})$$

y sus elementos se escriben como

$$\omega = \frac{1}{q!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_q} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_q}, \quad (\text{A.18})$$

donde el factor $1/q!$ aparece por la antisimetría que existe entre los índices y los coeficientes $\omega_{\mu_1 \dots \mu_q}$ se conocen como las *componentes holonómicas* de la q -forma ω .

En el caso de que tengamos que las componentes de los objetos definidos anteriormente son funciones dependientes de cada uno de los puntos de la variedad, se dice que tenemos un *campo*, por ejemplo, un campo vectorial, un campo tensorial, un campo forma diferencial, aunque en general para este último, se omite la palabra campo y se habla simplemente de una forma diferencial. En estos casos, se omite la notación referente a los puntos, por lo que el conjunto de las q -formas definidas sobre los puntos de la variedad M queda dado por

$$\Lambda_q(M) = \{\omega \mid \omega : M \longrightarrow \Lambda_q(P; M), \forall P \in M\}. \quad (\text{A.19})$$

Notamos también que todos los campos escalares son 0-formas y los campos de covectores son 1-formas. Sin embargo, no todos los tensores de rango $\binom{0}{q}$ son formas diferenciales.

Los campos vectoriales son útiles, ya que todo difeomorfismo de orden infinitesimal queda caracterizado por un campo vectorial. Esto quiere decir que a primer orden, considerando un parámetro infinitesimal constante ϵ , la expresión (A.5) puede escribirse, en virtud del teorema de Taylor como

$$x^\mu(P) \longrightarrow x'^\mu(P) = x^\mu(P) + \epsilon \xi^\mu(P), \quad (\text{A.20})$$

donde ξ^μ son las componentes de un campo vectorial $\xi(x)$.

A.2. Cambio de base

La base holonómica no es la única que se puede utilizar para definir objetos sobre la variedad. Sabemos bien que en todo espacio vectorial podemos definir cambios de base a través de matrices que permiten escribir los elementos de una base como combinación lineal de los de otra.

En particular, podemos definir los cambios de base

$$\vartheta^\alpha = h^\alpha_\mu dx^\mu, \quad e_\alpha = (h^{-1})^\mu_\alpha \partial_\mu, \quad (\text{A.21})$$

de manera que los tensores como (A.13) pueden ser reescritos

$$A = A^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_p} \otimes \vartheta^{\beta_1} \otimes \dots \otimes \vartheta^{\beta_q}, \quad (\text{A.22})$$

y las componentes en las respectivas bases se relacionan por

$$A^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = (h^{-1})^{\mu_1}_{\alpha_1} \dots (h^{-1})^{\mu_p}_{\alpha_p} h^{\beta_1}_{\nu_1} \dots h^{\beta_q}_{\nu_q} A^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}. \quad (\text{A.23})$$

Ahora bien, las transformaciones de cambio de base satisfacen

$$(h^{-1})^\mu_\alpha h^\alpha_\nu = \delta^\mu_\nu \quad \text{y} \quad (h^{-1})^\mu_\beta h^\beta_\mu = \delta^\alpha_\beta, \quad (\text{A.24})$$

las componentes de A en la base no holónoma se escriben

$$A^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} = h^{\alpha_1}_{\mu_1} \dots h^{\alpha_p}_{\mu_p} (h^{-1})^{\nu_1}_{\beta_1} \dots (h^{-1})^{\nu_q}_{\beta_q} A^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}. \quad (\text{A.25})$$

A.3. Diferenciación

Es importante estudiar cómo cambian los valores de los campos dentro de la variedad, para lo que es útil definir derivadas en geometría diferencial. Primeramente definimos la derivada exterior como un mapeo

$$d : \Lambda_q(M) \longrightarrow \Lambda_{(q+1)}(M), \quad (\text{A.26})$$

que actúa sobre las formas diferenciales como la definida en (A.18) de manera que la derivada exterior de ω está dada por

$$d\omega := \frac{1}{q!} \partial_\lambda \omega_{\mu_1 \dots \mu_q} dx^\lambda \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_q}. \quad (\text{A.27})$$

Notemos aquí que $\partial_\lambda \omega_{\mu_1 \dots \mu_q}$ no forma las componentes de un tensor de rango $\binom{0}{q+1}$, sin embargo, la antisimetrización de los índices asegura que $d\omega$ sí lo es, de hecho, es una forma diferencial.

El operador derivada exterior satisface las siguientes propiedades:

1. Linealidad: para toda q -forma ω , ϖ y los valores reales α y β se tiene

$$d(\alpha\omega + \beta\varpi) = \alpha d\omega + \beta d\varpi. \quad (\text{A.28a})$$

2. Regla de Leibniz (modificada): si tenemos una p -forma ω y una q -forma ϖ , se tiene que

$$d(\omega \wedge \varpi) = d\omega \wedge \varpi + (-1)^p \omega \wedge d\varpi. \quad (\text{A.28b})$$

3. Nilpotencia: para toda q -forma ω se tiene

$$d(d\omega) \equiv d^2\omega = 0. \quad (\text{A.28c})$$

A.4. Contracción

El producto interno entre un vector y una forma diferencial es una herramienta esencial al estudiar difeomorfismos. Éste se define como el mapeo

$$\cdot \rfloor \cdot : T(M) \times \Lambda_q(M) \longrightarrow \Lambda_{(q-1)}(M), \quad (\text{A.29})$$

de manera que para un vector ξ y una q -forma ω se obtiene

$$\xi \rfloor \omega := \frac{1}{(q-1)!} \xi^\lambda \omega_{\lambda\mu_2 \dots \mu_q} dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_q}. \quad (\text{A.30})$$

El producto interior satisface las propiedades de:

1. Linealidad: si ξ y ζ son campos vectoriales, tenemos que para una q -forma ω

$$(\xi + \zeta) \rfloor \omega = \xi \rfloor \omega + \zeta \rfloor \omega. \quad (\text{A.31a})$$

2. Distributividad: para las q -formas ω , ϖ y el campo vectorial ξ se tiene

$$\xi \rfloor (\omega + \varpi) = \xi \rfloor \omega + \xi \rfloor \varpi. \quad (\text{A.31b})$$

3. Anticonmutatividad: si tenemos dos campos vectoriales ξ , ζ y una q -forma ω se tiene

$$\xi \rfloor (\zeta \rfloor \omega) + \zeta \rfloor (\xi \rfloor \omega) \equiv 0. \quad (\text{A.31c})$$

Es importante mencionar que las bases no holónomas satisfacen

$$e_\beta \rfloor \vartheta^\alpha = h^\alpha_\mu (h^{-1})^\mu_b = \delta^\alpha_\beta, \quad (\text{A.32})$$

por lo que es conveniente abusar de la notación y usar el símbolo

$$h_\alpha^\mu := (h^{-1})^\mu_\alpha, \quad (\text{A.33})$$

de manera que el cambio de base pueda escribirse

$$\vartheta^\alpha = h^\alpha_\mu dx^\mu, \quad e_\alpha = h_\alpha^\mu \partial_\mu. \quad (\text{A.34})$$

A.5. Derivada de Lie

Una herramienta que sirve para medir el cambio de una forma diferencial a lo largo de un campo vectorial es la derivada de Lie. Para una forma diferencial ω , su derivada de Lie a lo largo del campo vectorial ξ está dada por

$$\ell_{\xi}\omega := \xi \rfloor (d\omega) + d(\xi \rfloor \omega). \quad (\text{A.35})$$

La derivada de Lie satisface las siguientes propiedades:

1. Regla de Leibniz: para una p -forma ω , una q -forma ϖ y un campo vectorial ξ se tiene que

$$\ell_{\xi}(\omega \wedge \varpi) = \ell_{\xi}\omega \wedge \varpi + \omega \wedge \ell_{\xi}\varpi. \quad (\text{A.36a})$$

2. No conmutatividad: para dos campos vectoriales ξ, ζ y una q -forma ω se tiene que:

$$\ell_{\zeta}(\ell_{\xi}\omega) - \ell_{\xi}(\ell_{\zeta}\omega) = \ell_{[\xi, \zeta]}\omega. \quad (\text{A.36b})$$

3. Conmutatividad con la derivada exterior: para un campo vectorial ξ y una q -forma ω se tiene:

$$\ell_{\xi}(d\omega) = d(\ell_{\xi}\omega). \quad (\text{A.36c})$$

4. No-conmutatividad con el producto interior: para los campos vectoriales ξ, ζ y la q -forma ω se tiene que:

$$\ell_{\xi}(\zeta \rfloor \omega) - \zeta \rfloor (\ell_{\xi}\omega) = [\xi, \zeta] \rfloor \omega. \quad (\text{A.36d})$$

También se definen las componentes coordenadas de la derivada de Lie de un tensor A de rango $\binom{p}{q}$ a lo largo del campo vectorial ξ como

$$\begin{aligned} \ell_{\xi}A^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} &:= \xi^{\lambda} \partial_{\lambda} A^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} \\ &+ \partial_{\nu_1} \xi^{\lambda} A^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\lambda \nu_2 \dots \nu_q} + \dots + \partial_{\nu_q} \xi^{\lambda} A^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_{q-1} \lambda} \\ &- \partial_{\lambda} \xi^{\mu_1} A^{\lambda \mu_2 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} - \dots - \partial_{\lambda} \xi^{\mu_p} A^{\mu_1 \dots \mu_{p-1} \lambda}_{\nu_1 \dots \nu_q}. \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

A.6. Objetos geométricos

A.6.1. Métrica

El concepto de metricidad induce la noción de distancias y ángulos dentro de una variedad. De forma similar que en espacio euclidiano se define el módulo de un vector $\vec{\xi}$ mediante

$$|\vec{\xi}| := \sqrt{\vec{\xi} \cdot \vec{\xi}} \equiv \sqrt{\delta_{ij} \xi^i \xi^j}, \quad (\text{A.38})$$

la delta de Kronecker se generaliza a una matriz simétrica $g_{\mu\nu}$ de manera que el elemento de línea

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} \otimes dx^{\nu}, \quad (\text{A.39})$$

es invariante bajo transformaciones generales de coordenadas. Este también se conoce como el tensor métrico, siendo sus componentes los elementos de la matriz $g_{\mu\nu}$.

En una base no-holónoma, este elemento de línea se escribe como

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} \vartheta^{\alpha} \otimes \vartheta^{\beta}, \quad (\text{A.40})$$

y si esta base es ortonormal y tal que las componentes pueden escribirse como

$$g_{\alpha\beta} = \text{diag}(\underbrace{+1, \dots, +1}_{n \text{ veces}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{d-n \text{ veces}}), \quad (\text{A.41})$$

reemplazamos los índices griegos α, β por los índices latinos a, b y estos coeficientes son invariantes ante transformaciones del grupo $SO(n, d-n)$ -local, conocido como el grupo local de Lorentz. Así, expresamos el tensor métrico como

$$ds^2 = -\vartheta^0 \otimes \vartheta^0 - \dots - \vartheta^{n-1} \otimes \vartheta^{n-1} + \vartheta^n \otimes \vartheta^n + \dots + \vartheta^{d-1} \otimes \vartheta^{d-1}, \quad (\text{A.42})$$

la que se considera la forma más sencilla de escribirlo. Llamamos métrica inversa al tensor simétrico g^{-1} de rango $\binom{2}{0}$ dado por

$$g^{-1} = g^{\mu\nu} \partial_\mu \otimes \partial_\nu, \quad (\text{A.43})$$

tal que sus componentes satisfacen

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu. \quad (\text{A.44})$$

Las componentes de la métrica se usan para bajar los índices de las componentes de un tensor y las de la métrica inversa para subir sus índices, de manera que para un campo vectorial ζ y la 1-forma ζ se tiene que

$$\zeta_\mu = g_{\mu\nu} \zeta^\nu, \quad \zeta^\nu = g^{\mu\nu} \zeta_\mu, \quad (\text{A.45})$$

forman las componentes de una 1-forma y de un campo vectorial respectivamente.

La métrica nos permite obtener una noción del tamaño de una variedad, nos permite definir la *d-forma de volumen* como

$$\eta := \sqrt{|g|} dx^0 \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{d-1} \equiv \sqrt{|g|} d^{(d)}x, \quad (\text{A.46})$$

donde $g := \det(g_{\mu\nu})$. En la base ortonormal en que la métrica es invariante bajo transformaciones locales de Lorentz, la forma de volumen se expresa de forma sencilla como

$$\eta = \vartheta^0 \wedge \dots \wedge \vartheta^{d-1}. \quad (\text{A.47})$$

A.6.2. Conexión y diferenciación covariante

Cuando tenemos campos escalares definidos sobre la variedad, vemos que la derivada exterior de estos produce una 1-forma. Ahora bien, por definición, esto es también cierto para q -formas: la derivada exterior las transforma en $(q+1)$ -formas diferenciales. Sin embargo, al calcular las derivadas parciales de las componentes de un tensor no se obtiene inmediatamente un objeto covariante. Esto puede verificarse de manera sencilla, considerando un campo vectorial con componentes ζ^μ que bajo transformaciones generales de coordenadas transforma como (A.8). Vemos entonces que las nuevas componentes de la derivada parcial de nuestro vector están dadas por

$$\partial'_\lambda \zeta'^\mu = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \partial_\rho \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \zeta^\nu \right) = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \partial_\rho \zeta^\nu + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \zeta^\nu, \quad (\text{A.48})$$

donde el último término de la expresión no corresponde a la ley de transformación de un tensor bajo difeomorfismos.

Podemos definir derivadas que transformen como tensores bajo transformaciones generales de coordenadas, para lo cual necesitamos introducir el concepto de conexión.

La conexión es un campo geométrico, en principio, independiente de la métrica que describe el concepto de afinidad sobre la variedad, esto es, nos permite definir paralelismos sobre la misma. Consideremos una curva $\mathcal{C}$ que une los puntos P y Q sobre la variedad y un campo vectorial de componentes ζ^μ . Definiremos el vector *transportado paralelamente* [34] a lo largo de la curva $\mathcal{C}$ como

$$\bar{\zeta}^\mu(Q) := \zeta^\mu(P) - \int_{\mathcal{C}} \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \zeta^\rho \frac{dx^\sigma}{d\lambda} d\lambda, \quad (\text{A.49})$$

donde hemos usado la barra para diferenciar el vector transportado paralelamente del que se obtiene al evaluar el campo vectorial ζ en Q . En (A.49) hemos utilizado los coeficientes de la conexión en la

base holónoma $\Gamma^\mu_{\rho\sigma}$, a partir de los cuales se define la noción de paralelismo. Nótese también que el integrando

$$\Gamma^\mu_{\rho\sigma} \tilde{\zeta}^\rho \frac{dx^\sigma}{d\lambda} d\lambda \quad (\text{A.50})$$

no se ha definido como una diferencial exacta, por lo que la integral de camino (A.49) depende de la elección de curva que se haga, por lo que no existe una noción de paralelismo global.

En general, la conexión es una 1-forma, que en la base ortonormal se escribe como,

$$\Gamma^a_b = \Gamma^a_{\mu b} dx^\mu, \quad (\text{A.51})$$

y las componentes entre las distintas bases se relacionan mediante

$$\Gamma^a_{\mu b} = h^a_\lambda h_b^\nu \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - h_b^\lambda \partial_\mu h^a_\lambda \quad \text{y} \quad \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = h_a^\lambda h^b_\nu \Gamma^a_{\mu b} - h_a^\lambda \partial_\mu h^a_\nu. \quad (\text{A.52})$$

Bajo transformaciones generales de coordenadas, las componentes de la conexión transforman como

$$\Gamma'^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma^\kappa_{\rho\sigma} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}. \quad (\text{A.53})$$

Por otra parte, bajo transformaciones locales de Lorentz $\vartheta'^a = \Lambda^a_b \vartheta^b$, la 1-forma de conexión transforma como

$$\Gamma'^a_b = \Lambda^a_c (\Lambda^{-1})^d_b \Gamma^c_d + \Lambda^a_c d(\Lambda^{-1})^c_b. \quad (\text{A.54})$$

En forma diferencial, la ecuación (A.49) puede escribirse como

$$\frac{dx^\rho}{d\lambda} \nabla_\rho \tilde{\zeta}^\mu = 0, \quad (\text{A.55})$$

donde hemos utilizado la definición de derivada covariante para un campo vectorial

$$\nabla_\lambda \tilde{\zeta}^\mu := \partial_\lambda \tilde{\zeta}^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\rho} \tilde{\zeta}^\rho. \quad (\text{A.56})$$

Esta definición puede ser extendida a tensores generales. Para un tensor de rango $\binom{p}{q}$ como el definido en (A.13), definimos las componentes de la derivada covariante como

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda A^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} &:= \partial_\lambda A^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} \\ &+ \Gamma^{\mu_1}_{\lambda\rho} A^{\rho\mu_2 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} + \dots + \Gamma^{\mu_p}_{\lambda\rho} A^{\mu_1 \dots \mu_{p-1}\rho}_{\nu_1 \dots \nu_q} \\ &- \Gamma^\rho_{\lambda\nu_1} A^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\rho\nu_2 \dots \nu_q} - \dots - \Gamma^\rho_{\lambda\nu_q} A^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_{q-1}\rho}. \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

Sin embargo, puede que no parezca necesario hacer esto para las formas diferenciales, ya que como hemos visto, el operador derivada exterior (A.27) genera nuevas formas diferenciales, las que sabemos transforman bien bajo difeomorfismos. Sin embargo, cuando uno encuentra objetos que son q -formas que transforman como tensores bajo la simetría local de Lorentz, por ejemplo

$$\omega^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n} = \frac{1}{q!} \omega^{a_1 \dots a_m}_{\mu_1 \dots \mu_q b_1 \dots b_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_q}, \quad (\text{A.58})$$

su derivada exterior no será un tensor bajo transformaciones locales de Lorentz, por ejemplo, un campo 0-forma vector de Lorentz $\tilde{\zeta}^a$, al someterlo a una transformación de Lorentz su derivada exterior estará dada por

$$d(\Lambda^a_b \tilde{\zeta}^b) = \Lambda^a_b d\tilde{\zeta}^b + \tilde{\zeta}^b d\Lambda^a_b, \quad (\text{A.59})$$

que claramente no transforma como un tensor de Lorentz. Así, también definimos derivadas covariantes para los objetos (A.58), mediante

$$\begin{aligned} D\omega^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n} &:= d\omega^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n} \\ &+ \Gamma^{a_1}_c \omega^{ca_2 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n} + \dots + \Gamma^{a_m}_c \omega^{a_1 \dots a_{m-1}c}_{b_1 \dots b_n} \\ &- \dots - \Gamma^c_{b_1} \omega^{a_1 \dots a_m}_{cb_2 \dots b_n} - \Gamma^c_{b_n} \omega^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_{n-1}c}. \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

Notemos que ambas definiciones (A.57) y (A.60) aumentan el rango tensorial de los objetos sobre los cuales se aplica. En particular, la derivada covariante sobre q -formas genera $(q + 1)$ -formas, de manera análoga a la derivada exterior, sin embargo, mantiene la covarianza bajo el grupo de Lorentz intacta.

La derivada covariante (A.57), definida sobre las componentes de tensores bajo transformaciones generales de coordenadas, satisface la regla de Leibniz: para un tensor A de rango $\binom{p}{q}$ y un tensor B de rango $\binom{m}{n}$,

$$\nabla_\lambda \left(A^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} B^{\sigma_1 \dots \sigma_m}_{\rho_1 \dots \rho_n} \right) = \left(\nabla_\lambda A^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} \right) B^{\sigma_1 \dots \sigma_m}_{\rho_1 \dots \rho_n} + A^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} \left(\nabla_\lambda B^{\sigma_1 \dots \sigma_m}_{\rho_1 \dots \rho_n} \right). \quad (\text{A.61})$$

Además, es un operador lineal. Si consideramos un número real α y A y B tensores de rango $\binom{p}{q}$, se tiene que

$$\nabla_\lambda \left(A^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} + \alpha B^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} \right) = \nabla_\lambda A^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} + \alpha \nabla_\lambda B^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}. \quad (\text{A.62})$$

Por otra parte, tenemos que la derivada covariante sobre formas diferenciales con índices de Lorentz libres tiene propiedades similares a la derivada exterior. Es (anti-)Leibniz, ya que si consideramos una q -forma $\omega^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n}$ y una p -forma $\omega^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s}$, se tiene que

$$D \left(\omega^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n} \wedge \omega^{c_1 \dots c_r}_{d_1 \dots d_s} \right) = D\omega^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n} \wedge \omega^{c_1 \dots c_r}_{d_1 \dots d_s} + (-1)^q \omega^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n} \wedge D\omega^{c_1 \dots c_r}_{d_1 \dots d_s}. \quad (\text{A.63})$$

También satisface la linealidad, si consideramos α un número real y dos q -formas $\omega^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n}$ y $\omega^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n}$, tendremos que

$$D(\alpha \omega^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n} + \omega^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n}) = \alpha D\omega^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n} + D\omega^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n}. \quad (\text{A.64})$$

Sin embargo, no es un operador nilpotente, ya que satisface propiedades que motivan la siguiente sección.

Un caso de especial interés de la conexión, se obtiene a partir de la definición de los símbolos de Christoffel de segunda especie, que a lo largo de esta tesis se denotan por $\hat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$, y que se definen a partir de la métrica

$$\hat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} := \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\rho g_{\mu\nu}), \quad (\text{A.65})$$

y notamos que son simétricos en sus índices covariantes. En esta tesis el operador derivada covariante asociado a la conexión de Christoffel se denota con un círculo por encima, ya sea $\hat{\nabla}_\mu$ o $\hat{D}$, al igual que la curvatura asociada a esta conexión $\hat{R}^\lambda_{\mu\nu\rho}$.

A.6.3. Curvatura, torsión y no-metricidad

Es importante estudiar cómo se comportan los objetos previamente definidos, ya que esto nos permite caracterizar a la variedad y el tipo de teoría gravitacional con la que se está trabajando. Con este fin, se introduce una cantidad de objetos geométricos con su propio papel dentro de la variedad.

El primer objeto que es interesante describir es la **no-metricidad**. Este está determinado por la derivada covariante de la métrica, en particular, este se define como

$$Q_{ab} := -Dg_{ab}, \quad (\text{A.66})$$

que en la base holónoma tiene componentes dadas por

$$Q_{ab} = h_a^\mu h_b^\nu Q_{\lambda\mu\nu} dx^\lambda, \quad \text{con } Q_{\lambda\mu\nu} := -\nabla_\lambda g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.67})$$

Por otra parte, la derivada covariante de la base del espacio cotangente define la **torsión**

$$T^a := D\theta^a, \quad (\text{A.68})$$

que claramente es una 2-forma y sus componentes se escriben

$$T^a = \frac{1}{2} h^a_{\lambda} T^{\lambda}_{\mu\nu} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}, \quad \text{con } T^{\lambda}_{\mu\nu} := \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}. \quad (\text{A.69})$$

Ahora bien, si consideramos una q -forma ω^a , su segunda derivada covariante estará dada por

$$\begin{aligned} DD\omega^a &= d(D\omega^a) + \Gamma^a_b \wedge D\omega^b \\ &= d(\Gamma^a_b \wedge \omega^b) + \Gamma^a_b \wedge d\omega^b + \Gamma^a_b \wedge \Gamma^b_c \omega^c \\ &= R^a_b \wedge \omega^b, \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

donde hemos utilizado la definición de la 2-forma de **curvatura**

$$R^a_b := d\Gamma^a_b + \Gamma^a_c \wedge \Gamma^c_b, \quad (\text{A.71})$$

cuyos coeficientes están dados por

$$R^a_b = \frac{1}{2!} h^a_{\lambda} h^{\rho}_b R^{\lambda}_{\mu\nu\rho} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}, \quad \text{con } R^{\lambda}_{\mu\nu\rho} := \partial_{\mu}\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} - \partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}. \quad (\text{A.72})$$

El resultado de (A.70) puede ser extendido a formas diferenciales como la definida en (A.58). En efecto, se puede probar que

$$\begin{aligned} DD\omega^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n} &= R^{a_1}_c \wedge \omega^{ca_2 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n} + \dots + R^{a_m}_c \wedge \omega^{a_1 \dots a_{m-1}c}_{b_1 \dots b_n} \\ &\quad - R^c_{b_1} \wedge \omega^{a_1 \dots a_m}_{cb_2 \dots b_n} - \dots - R^c_{b_n} \wedge \omega^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_{n-1}c}. \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

Notemos que por la naturaleza antisimétrica de las formas diferenciales, la doble aplicación de las derivadas covariantes en (A.73) es un conmutador de las derivadas, por lo que una expresión similar puede encontrarse para el conmutador de las derivadas covariantes escritas en la base holónoma. Explícitamente ésta está dada, para un tensor de componentes como las dadas en (A.13), por

$$\begin{aligned} \nabla_{\rho} \nabla_{\sigma} A^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} - \nabla_{\sigma} \nabla_{\rho} A^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} &= R^{\mu_1}_{\rho\sigma\lambda} A^{\lambda\mu_2 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} + \dots + R^{\mu_p}_{\rho\sigma\lambda} A^{\mu_1 \dots \mu_{p-1}\lambda}_{\nu_1 \dots \nu_q} \\ &\quad - R^{\lambda}_{\rho\sigma\nu_1} A^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\lambda\nu_2 \dots \nu_q} - \dots - R^{\lambda}_{\rho\sigma\nu_q} A^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\lambda\nu_2 \dots \nu_{q-1}\lambda} \\ &\quad - T^{\lambda}_{\rho\sigma} \nabla_{\lambda} A^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}. \end{aligned} \quad (\text{A.74})$$

Notemos que aquí además de la curvatura, aparece también la torsión involucrada en el cálculo.

Otra cantidad útil es la **distorsión**, que mide la desviación de la conexión a partir de los símbolos de Christoffel, esta se define a partir de

$$N^{\lambda}_{\mu\nu} := \mathring{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}, \quad (\text{A.75})$$

la que inmediatamente se puede reescribir, utilizando las definiciones de no-metricidad (A.67) y de torsión (A.69) como

$$N^{\lambda}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \left(Q^{\lambda}_{\mu\nu} - Q_{\nu\mu}{}^{\lambda} - Q_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu} + T_{\nu\mu}{}^{\lambda} + T_{\mu\nu}{}^{\lambda} - T^{\lambda}_{\mu\nu} \right), \quad (\text{A.76})$$

de donde vemos que la conexión queda totalmente determinada por los símbolos de Christoffel (A.65), la no-metricidad y la torsión

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \mathring{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left(Q^{\lambda}_{\mu\nu} - Q_{\nu\mu}{}^{\lambda} - Q_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu} + T_{\nu\mu}{}^{\lambda} + T_{\mu\nu}{}^{\lambda} - T^{\lambda}_{\mu\nu} \right). \quad (\text{A.77})$$

A.7. Isometrías

Sea $\mathcal{C}$ una curva definida sobre una variedad y $x^\mu(\lambda)$ las coordenadas de los puntos sobre la curva, con $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ un parámetro real. Definimos el *largo de $\mathcal{C}$* como la integral

$$L(\mathcal{C}) := \int_{\mathcal{C}} ds \equiv \int_{\mathcal{C}} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda. \quad (\text{A.78})$$

Definiremos también $\mathcal{C}'$, la *curva trasladada infinitesimalmente* a lo largo de un campo vectorial ζ , de manera que a un punto P de coordenadas x^μ , definido sobre la curva $\mathcal{C}$ le corresponda el punto P' sobre $\mathcal{C}'$, cuyas coordenadas vienen dadas por

$$x'^\mu(P') := x^\mu(P) + \epsilon \zeta^\mu(P). \quad (\text{A.79})$$

Si $\mathcal{C}'$ tiene el mismo largo que la curva $\mathcal{C}$, esto es: $L(\mathcal{C}) = L(\mathcal{C}')$, decimos que el campo vectorial ζ define una isometría en la variedad.

Los campos vectoriales que satisfacen esta condición se conocen como *campos vectoriales de Killing*, *vectores de Killing* o *isometrías* y satisfacen la *ecuación de Killing*

$$\ell_\zeta g_{\mu\nu} \equiv \nabla_\mu \zeta_\nu + \nabla_\nu \zeta_\mu = 0. \quad (\text{A.80})$$

Una consecuencia de esta definición, es que todos los objetos geométricos que dependen únicamente de la métrica también tienen derivadas de Lie nulas, por ejemplo

$$\ell_\zeta \overset{\circ}{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = 0 \quad \text{y} \quad \ell_\zeta \overset{\circ}{R}^\rho_{\mu\nu\rho} = 0. \quad (\text{A.81})$$

A.8. Integración sobre variedades

A.8.1. Orientabilidad

Una variedad M es orientable si para toda transformación de coordenadas el jacobiano de la transformación es definido positivo. Esto es, si consideramos un difeomorfismo (A.5) tenemos que

$$\det \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\mu} \right) > 0. \quad (\text{A.82})$$

Una variedad es orientable si y solo si existe una forma diferencial que no se anule en ningún punto de la misma [35].

De aquí en adelante, consideraremos únicamente variedades orientables.

A.8.2. Volumen e integrales

Para estudiar la noción de integrabilidad sobre una variedad primeramente puede motivarnos el conocer el tamaño de esta misma, por lo que ingenuamente podemos dejarnos llevar e intentar generalizar la noción de volumen en el espacio euclidiano mediante

$$\text{Vol}(M) = \int_M dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^{(d-1)}. \quad (\text{A.83})$$

Sin embargo, es sencillo ver que dicha definición produce una cantidad que depende de las coordenadas utilizadas para el cálculo. Para eliminar este inconveniente, podemos definir el volumen de la

variedad mediante la forma de volumen (A.46)

$$\begin{aligned}
\text{Vol}(M) &:= \int_M \eta \\
&\equiv \int_M \sqrt{|g|} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^{(d-1)} \\
&\equiv \frac{1}{d!} \int_M \sqrt{|g|} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_d} \\
&\equiv \int_M \vartheta^0 \wedge \dots \wedge \vartheta^{(d-1)} \\
&\equiv \frac{1}{d!} \int_M \epsilon_{a_1 \dots a_d} \vartheta^{a_1} \wedge \dots \wedge \vartheta^{a_d},
\end{aligned} \tag{A.84}$$

donde hemos utilizado $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d}$, el símbolo de Levi-Civita, que se define como

$$\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d} := \begin{cases} +1 & \mu_1 \mu_2 \dots \mu_d \text{ es una permutación par de } 01 \dots (d-2)(d-1), \\ -1 & \mu_1 \mu_2 \dots \mu_d \text{ es una permutación impar de } 01 \dots (d-2)(d-1), \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \tag{A.85}$$

Notemos que estamos definiendo la integral como una aplicación que mapea d -formas diferenciales, definidas sobre d -variedades a números reales.

Notemos además que la cantidad $\sqrt{|g|}$ no transforma como un escalar bajo difeomorfismos, en efecto, bajo una transformación general de coordenadas (A.5) tenemos que

$$\sqrt{|g'|} = \det \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \right) \sqrt{|g|}. \tag{A.86}$$

Cantidades que transforman de esta forma se conocen como *densidades escalares* de peso 1. Más en general, una *densidad tensorial* o *tensor relativo* [36] de peso w y rango $\binom{p}{q}$ es un objeto cuyas componentes $\mathcal{H}^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ transforman bajo difeomorfismos como

$$\mathcal{H}'^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = \left[\det \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} \right) \right]^w \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} \mathcal{H}^{\rho_1 \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_q}. \tag{A.87}$$

Así, vemos que los tensores son densidades tensoriales de peso 0. Esta definición, es de gran importancia al momento de estudiar la integrabilidad de un objeto.

Notamos además que la forma que aparece en el integrando de (A.83) transforma bajo difeomorfismos como

$$dx'^0 \wedge \dots \wedge dx'^{(d-1)} = \left[\det \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \right) \right]^{-1} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^{(d-1)}, \tag{A.88}$$

por lo que también transforma como una densidad, esta vez de peso -1 , como el símbolo de Levi-Civita. Así, para que las integrales de la forma

$$I = \int_M \mathcal{B}(x) dx^0 \wedge \dots \wedge dx^{(d-1)} \tag{A.89}$$

produzcan escalares bajo transformaciones generales de coordenadas, el integrando $\mathcal{B}(x)$ debe ser una densidad escalar de peso 1. Esto viene asegurado al integrar una d -forma diferencial, ya que si consideramos una d -forma B , ésta puede escribirse como

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{d!} B_{\mu_1 \dots \mu_d} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_d} \\
&= \mathcal{B} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^{(d-1)},
\end{aligned} \tag{A.90}$$

donde se define

$$\mathcal{B} := B_{01\dots(d-1)} \equiv \frac{1}{d!} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_d} B_{\mu_1 \dots \mu_d}, \quad (\text{A.91})$$

que transforma como una densidad escalar de peso +1; lo que es sencillo de probar al considerar la manera en que transforman las formas diferenciales bajo difeomorfismos. Así, la integral (A.89) se puede escribir de forma equivalente

$$I = \int_M B. \quad (\text{A.92})$$

A veces es necesario considerar la integral definida sobre una *subvariedad* Σ de M ; esto es, una variedad por derecho propio que está completamente contenida en la variedad original. Si la dimensión de esta subvariedad es $n < d$, debemos considerar n -formas al realizar esta integración. Si queremos calcular la integral sobre Σ de una n -forma ω sobre la variedad M , basta con definir la *restricción* de la forma a esta subvariedad. Más formalmente, consideraremos la aplicación de *pullback* o *restricción* X^* , definida por

$$X^* : \Lambda_n(M) \longrightarrow \Lambda_n(\Sigma), \quad (\text{A.93})$$

de manera que la n -forma ω definida sobre M sea mapeada por el pullback a la n -forma $X^*(\omega)$ definida sobre Σ , por lo que podemos definir la integral de ω sobre la variedad Σ como

$$\int_{\Sigma} \omega := \int_{\Sigma} X^*(\omega). \quad (\text{A.94})$$

Sin embargo, la construcción del pullback no es trivial y depende de la forma en que se define la subvariedad, por lo que se debe explicitar la forma de este mapeo al calcular este tipo de integrales.

Es también importante hacer notar que al momento de escribir integrales en la base holónoma, se define por razones de comodidad el *diferencial total de coordenadas*

$$d^d x := dx^0 \wedge \dots \wedge dx^{(d-1)}. \quad (\text{A.95})$$

En esta tesis se usan indistintamente ambas notaciones.

A.8.3. El teorema de Stokes

Consideremos una $(d-1)$ -forma ω sobre M . Tendremos que

$$\int_M d\omega = \oint_{\partial M} \omega. \quad (\text{A.96})$$

En la base holónoma, esto puede escribirse considerando que la derivada exterior de la $(d-1)$ -forma ω está dada por

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{1}{(d-1)!} \partial_{\mu_1} \omega_{\mu_2 \dots \mu_d} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_d} \\ &= \frac{1}{(d-1)!} \partial_{\mu_1} \omega_{\mu_2 \dots \mu_d} \left(\epsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_d} dx^0 \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{(d-1)} \right) \\ &= \partial_{\mu} \tilde{\omega}^{\mu} dx^0 \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{(d-1)}, \end{aligned} \quad (\text{A.97})$$

donde hemos definido

$$\tilde{\omega}^{\mu} := \frac{1}{(d-1)!} \epsilon^{\mu \mu_2 \dots \mu_d} \omega_{\mu_2 \dots \mu_d}, \quad (\text{A.98})$$

una densidad vectorial contravariante de peso 1. Así tenemos que la integral del lado izquierdo de (A.96) se escribe

$$\int_M d\omega = \int_M \partial_{\mu} \tilde{\omega}^{\mu} dx^0 \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{(d-1)}. \quad (\text{A.99})$$

Podemos encontrar la relación inversa de la definición (A.98), dada por

$$\omega_{\mu_2 \dots \mu_d} = \frac{1}{(d-1)!} \epsilon_{\mu \mu_2 \dots \mu_d} \tilde{\omega}^\mu, \quad (\text{A.100})$$

la que nos será de utilidad para probar que la integral de la derecha de (A.96) se escribe

$$\oint_{\partial M} \omega = \oint_{\partial M} \tilde{\omega}^\mu \hat{n}_\mu d^{(d-1)}\Sigma, \quad (\text{A.101})$$

donde $\hat{n}_\mu$ es un vector unitario ortogonal a la hipersuperficie ∂M y $d^{(d-1)}\Sigma$ el correspondiente elemento de superficie. Estos últimos se definen de manera que podamos escribir

$$\hat{n}_\mu d^{(d-1)}\Sigma = X^* \left(\frac{1}{(d-1)!} \epsilon_{\mu \mu_2 \dots \mu_d} dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_d} \right), \quad (\text{A.102})$$

con X^* el pullback que lleva las $(d-1)$ -formas sobre M a $(d-1)$ -formas sobre ∂M .

Finalmente, se tiene que el teorema de Stokes en la base holónoma se escribe como

$$\int_M \partial_\mu \tilde{\omega}^\mu dx^0 \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{(d-1)} = \oint_{\partial M} \tilde{\omega}^\mu \hat{n}_\mu d^{(d-1)}\Sigma. \quad (\text{A.103})$$



Apéndice B

El teorema de Noether en el espacio de Minkowski

En este apéndice, describiremos la teoría de campos, considerando el espacio de Minkowski en 4 dimensiones, fijando el sistema coordenado a las coordenadas cartesianas (ct, x, y, z) , esto quiere decir que la métrica está dada por

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1), \quad (\text{B.1})$$

lo que implica que en este sistema, la conexión es idénticamente nula. Éste es el tratamiento estándar sobre el cual se formula la teoría especial de la relatividad, ya que las simetrías del espaciotiempo en este caso son las simetrías bajo traslaciones globales y bajo transformaciones de Lorentz globales.

Los campos quedarán descritos mediante las variables $\Phi^A = \Phi^A(x)$, donde A es un índice tal que $A = 1, \dots, N$, con N la cantidad de campos involucrados en la descripción del sistema; mientras que la acción está dada por

$$S = \int_M \mathcal{L} d^4x, \quad (\text{B.2})$$

donde $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi, \partial\Phi)$ es la *densidad lagrangeana* que describe las interacciones y la dinámica del sistema, y M es el espacio de Minkowski de 4 dimensiones.

Toda acción está sujeta al *principio de mínima acción*, que establece que para toda configuración física de los campos, i.e., el estado del sistema, la acción debe tener un valor extremo. Es posible estudiar el caso en que esta condición se satisface, considerando perturbaciones de la configuración del sistema, descritos por

$$\Phi^A \rightarrow \Phi^A + \delta\Phi^A,$$

donde $\delta\Phi^A$ se conoce como una variación de los campos. Si esta variación es lo suficientemente pequeña, una expansión de Taylor a primer orden resulta en la variación de la acción:

$$\delta S = \int_M d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^A} \delta\Phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^A)} \delta(\partial_\mu \Phi^A) \right].$$

Si consideramos que la variación no afecta a las coordenadas, la derivada parcial conmuta con la variación

$$\delta S = \int_M d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^A} \delta\Phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^A)} \partial_\mu (\delta\Phi^A) \right], \quad (\text{B.3})$$

donde re-escribimos en términos de derivadas totales

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^A)} \partial_\mu (\delta\Phi^A) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^A)} \delta\Phi^A \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^A)} \right) \delta\Phi^A, \quad (\text{B.4})$$

por lo que es conveniente definir la derivada variacional como

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi^A} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^A} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^A)} \right], \quad (\text{B.5})$$

de manera tal que usando el teorema de Gauss

$$\delta S = \int_M d^4x \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi^A} \delta \Phi^A + \int_{\partial M} d^3\Sigma_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^A)} \delta \Phi^A, \quad (\text{B.6})$$

donde $d^3\Sigma_\mu$ es el elemento de superficie perpendicular al borde del espacio de Minkowski.

Del cálculo diferencial, sabemos que la acción tendrá un valor extremo cuando su variación (B.6) sea nula. Esto puede lograrse considerando lo siguiente. Primero, si el sistema tiene *condiciones de borde tipo Dirichlet*, que quiere decir que la variación de los campos en el borde sea idénticamente nula

$$\delta \Phi^A(x) \equiv 0, \quad \forall x \in \partial M. \quad (\text{B.7})$$

Sin embargo, esto no es suficiente para determinar la evolución del sistema. Hemos también de diferenciar la naturaleza de los distintos campos Φ^A que aparecen en la descripción. Primeramente, puede que existan algunos campos cuyo valor esté dado de antemano, que representan la interacción del sistema con su entorno. Este tipo de campos se conoce como *campos externos* o *no-dinámicos* y los denotaremos mediante ψ^a con $a = 1, \dots, N_E$, donde $N_E < N$ es el número de campos externos.

De la electrodinámica clásica encontramos un ejemplo de estos campos, dado por la densidad de corriente eléctrica j^μ que aparece en la acción de Maxwell-Faraday (escrita en unidades del SI)

$$S_{\text{EM}} = - \int_M d^4x \left(\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + j_\mu A^\mu \right), \quad (\text{B.8})$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el tensor electromagnético de Faraday y A_μ es el cuadripotencial electromagnético.

Por su naturaleza, los campos externos están fijos, por lo que no tiene sentido considerar su variación al momento de buscar un extremo de la acción, entonces

$$\delta \psi^a = 0, \quad \text{con } a = 1, \dots, N_E. \quad (\text{B.9})$$

En cambio, el resto de los campos representa propiedades del sistema que están sujetas a evolucionar. Se les conoce como *campos dinámicos* y son los campos que se varían para extremizar la acción. Este tipo de campos será denotado por ϕ^α , con $\alpha = 1, \dots, N_D$, donde $N_D \leq N$ es el número de campos dinámicos que se relaciona con el número de campos externos mediante $N_D + N_E = N$. Ahora bien, considerando lo obtenido en la ecuación (B.9) vemos que (B.6) se reduce a

$$\int_M d^4x \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^\alpha} \delta \phi^\alpha = 0, \quad (\text{B.10})$$

por lo que si consideramos que las variaciones de los campos son linealmente independientes, se obtiene que

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^\alpha} = 0, \quad (\text{B.11})$$

las que se conocen como *ecuaciones de Euler-Lagrange* del sistema o *ecuaciones de campo*.

La naturaleza de los campos involucrados en la descripción nos permite clasificar los sistemas como:

- *abiertos*, si existen campos no-dinámicos y
- *cerrados*, cuando no tenemos campos externos.

De aquí en adelante, usaremos Φ^A al referirnos indistintamente a campos dinámicos o no-dinámicos. Para una discusión más a fondo de estos temas, por favor dirigirse a las referencias [37,38].

B.1. Teorema de Noether

Una transformación de simetría es un cambio en las variables del sistema que mantienen la acción (B.2) *invariante*, es decir, que la variación de la acción debida a esta transformación es nula, o *quasi-invariante*, que quiere decir que la variación de la acción correspondiente es proporcional a un término de borde. Estas transformaciones pueden hacerse en el *espacio externo*, lo que significa que es un cambio en el sistema coordinado utilizado para describir el sistema

$$x^\mu \rightarrow \bar{x}^\mu = \bar{x}^\mu(x), \quad (\text{B.12})$$

o en el *espacio interno*, que es un cambio en la amplitud de los campos de cualquier naturaleza:

$$\Phi^A \rightarrow \bar{\Phi}^A = \bar{\Phi}^A(\Phi(x), \partial\Phi(x), x). \quad (\text{B.13})$$

Para presentar el formalismo del teorema de Noether, usaremos la notación de [39] y denotaremos las transformaciones de simetría mediante δ_s , para diferenciarlas de las variaciones que buscan extremizar la acción.

En particular, consideraremos transformaciones de simetría infinitesimales. Sea ϵ un número infinitesimal. Consideraremos además una transformación tal que la variación de los campos es proporcional al parámetro ϵ , es decir

$$\delta_s \Phi^A(x) = \epsilon \Delta^A(\Phi(x), \partial\Phi(x)), \quad (\text{B.14})$$

por lo que, de acuerdo al teorema de Taylor, la densidad lagrangeana transforma como

$$\delta_s \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^A} \delta_s \Phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^A)} \delta_s (\partial_\mu \Phi^A). \quad (\text{B.15})$$

Si suponemos que la transformación δ_s conmuta con las derivadas parciales, podemos completar las derivadas y usar la definición (B.5), de manera que

$$\delta_s \mathcal{L} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi^A} \delta_s \Phi^A + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^A)} \delta_s \Phi^A \right). \quad (\text{B.16})$$

Si una transformación de simetría mantiene la acción *quasi-invariante*, la correspondiente variación de la acción está dada por un *término de borde*,

$$\delta_s S = \epsilon \int_M \partial_\mu \Lambda^\mu d^4x = \epsilon \oint_{\partial M} \Lambda^\mu d^3\Sigma_\mu, \quad (\text{B.17})$$

donde la función $\Lambda^\mu = \Lambda^\mu(x)$ induce una modificación de los términos de borde del sistema. Podemos entonces escribir

$$\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = -\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi^A} \Delta^A, \quad (\text{B.18})$$

donde hemos definido la *densidad de corriente* mediante

$$\mathcal{J}^\mu(\Phi, \partial\Phi) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^A)} \Delta^A - \Lambda^\mu. \quad (\text{B.19})$$

De la ecuación (B.11), vemos inmediatamente, que cuando se satisfacen las ecuaciones de campo para los campos dinámicos, la ecuación (B.18) se reduce a

$$\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = -\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi^a} (\Delta_\psi)^a, \quad (\text{B.20})$$

donde $(\Delta_\psi)^a$ se define de manera tal que $\delta_s \psi^a = \epsilon (\Delta_\psi)^a$ es el cambio de los campos externos bajo la transformación de simetría.

De aquí es inmediato ver que si todos los campos son dinámicos, y estos se encuentran en la configuración on-shell

$$\partial_\mu \mathcal{J}^\mu \stackrel{\text{on}}{=} 0, \quad (\text{B.21})$$

la corriente se conserva.

Por otra parte, si el sistema interactúa con su entorno, el lado derecho de (B.20) no se anula de manera inmediata. Sin embargo, $\mathcal{J}^\mu$ será una corriente conservada del sistema si es que las derivadas funcionales de la densidad lagrangeana con respecto a los campos externos y el cambio de estos bajo la transformación de simetría es cero. Otra forma de lograr esto es que las transformaciones de simetría no afecten a los campos externos, i.e. $\delta_s \psi^a = 0$. Tenemos entonces que las transformaciones de simetría que producen corrientes conservadas están limitadas por estos campos externos.

B.2. Simetrías externas

Pondremos atención ahora a las simetrías externas, debido a que podemos estudiar las leyes de conservación que surgen de las simetrías internas, tenemos que dar una forma específica de los campos y del lagrangeano, lo que no es el caso cuando consideramos simetrías externas. En particular, estudiaremos el comportamiento bajo dos transformaciones: traslaciones y transformaciones de Lorentz, lo que nos permitirá definir el tensor de energía-momentum y los tensores de momento angular respectivamente.

B.2.1. Traslaciones espacio-temporales

Una traslación espacio-temporal es un desplazamiento del origen del sistema coordenado por una cantidad constante a^μ . Si las coordenadas de un evento arbitrario del espacio-tiempo P están dadas por $x^\mu(P)$ en un sistema de referencia, entonces las coordenadas $\bar{x}^\mu(P)$ del mismo punto, en el sistema trasladado, estarán dadas por

$$x^\mu(P) \rightarrow \bar{x}^\mu(P) = x^\mu(P) - a^\mu, \quad (\text{B.22})$$

como se ve en la figura B.1.

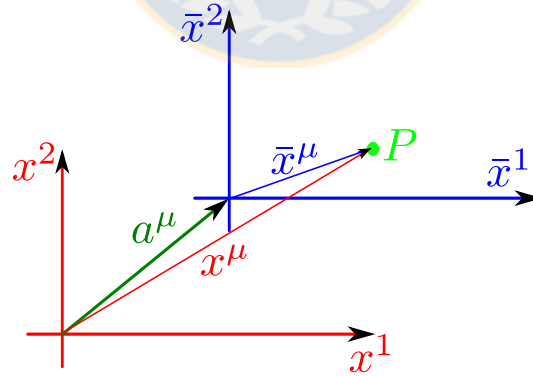


Figura B.1: Traslación 2-dimensional.

Los valores del campo $\Phi^A(x)$ no cambian bajo la transformación definida en (B.22),

$$\Phi^A(x(P)) \rightarrow \bar{\Phi}^A(\bar{x}(P)) = \Phi^A(x(P)), \quad (\text{B.23})$$

porque el valor de los campos está dado por el punto que se evalúan y no por la *etiqueta* con la que hacemos referencia a estos. Vemos entonces que

$$\bar{\Phi}^A(\bar{x}) = \Phi^A(\bar{x} + a), \quad (\text{B.24})$$

donde $\bar{\Phi}^A(\bar{x})$ es el mismo campo $\Phi^A(x)$ visto del sistema trasladado.

Si suponemos que la traslación es infinitesimal,

$$x^\mu(P) \rightarrow \bar{x}^\mu(P) = x^\mu(P) - \epsilon^\mu + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (\text{B.25})$$

podemos usar (B.25) en la ecuación (B.24), por lo que una expansión de Taylor implica que

$$\bar{\Phi}^A(\bar{x}) = \Phi^A(\bar{x}) + \epsilon^\lambda \bar{\partial}_\lambda \Phi^A(\bar{x}), \quad (\text{B.26})$$

así, usando la regla de la cadena: $\bar{\partial}_\lambda \equiv \partial_\lambda$, entonces la variación de los campos está dada por

$$\delta\Phi^A = \epsilon^\lambda \partial_\lambda \Phi^A. \quad (\text{B.27})$$

Vemos que esto es análogo a (B.14), por lo que la variación del lagrangeano en este caso queda dada por

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi^A} \delta\Phi^A + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda\Phi^A)} \delta(\partial_\lambda\Phi^A) \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi^A} \delta\Phi^A + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda\Phi^A)} \partial_\lambda(\delta\Phi^A) \\ &= \epsilon^\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi^A} \partial_\mu\Phi^A + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda\Phi^A)} \partial_\mu(\partial_\lambda\Phi^A) \right] \end{aligned}$$

de donde, si suponemos que la densidad lagrangeana no depende explícitamente de las coordenadas, reconocemos la regla de la cadena y

$$\delta\mathcal{L} = \epsilon^\mu \partial_\mu \left[\delta_\mu^v \mathcal{L} \right], \quad (\text{B.28})$$

por lo que el lagrangeano es quasi-invariante bajo traslaciones y por (B.27) podemos definir el *tensor de energía-momentum canónico* como

$$T_\mu^v := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\Phi^A)} \partial_\mu\Phi^A - \delta_\mu^v \mathcal{L}, \quad (\text{B.29})$$

que satisface la ecuación de balance

$$\partial_\nu T_\mu^v \equiv - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi^A} \partial_\mu\Phi^A, \quad (\text{B.30})$$

como lo asegura el teorema de Noether.

El tensor de energía-momentum

Podemos estudiar la relación entre el tensor de energía-momentum¹ y el momentum y la energía del sistema. Sabemos de la mecánica de partículas que la invarianza del lagrangeano con respecto a traslaciones espaciales da origen a la conservación del momentum, de la misma forma que las traslaciones temporales se relaciona con la conservación de la energía mecánica. De esta forma, es razonable esperar que los conceptos de energía y momentum del sistema puedan definirse a partir de este tensor.

Las componentes del tensor T_μ^v siempre se identifican como

$$T_\mu^v = \begin{pmatrix} \mathcal{U} & S^i/c \\ -c\pi_i & -p_i^j \end{pmatrix}, \quad (\text{B.31})$$

¹Probaremos también en este apéndice que el tensor de energía-momentum canónico definido en (B.29) no es el único objeto que se puede definir como un tensor de energía momentum.

donde $\mathcal{U}$ es la *densidad de energía*, S^i la *densidad de flujo de energía*, π_i es la *densidad de momentum* y p_i^j es el flujo de densidad de momentum, también conocido como tensor de stress. De estas definiciones, es fácil ver que el 4-momentum de los campos está dado por

$$p_\mu := \frac{1}{c} \int_{E_3} d^3x T_\mu^0, \quad (\text{B.32})$$

donde E_3 es el espacio Euclidiano tridimensional.

La ecuación (B.30) puede re-escribirse en función de estos términos

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \partial_i S^i = - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi^A} \frac{\partial \Phi^A}{\partial t}, \quad (\text{B.33a})$$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial t} + \partial_j p_i^j = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi^A} \partial_i \Phi^A. \quad (\text{B.33b})$$

De la menra usual, (B.33) indican que localmente, el balance entre la tasa de cambio temporal de la energía/momentum y el flujo neto de energía/momentum del sistema depende de las derivadas del lado derecho de, por lo que estas derivadas pueden ser interpretadas como las *densidades de trabajo/fuerza* actuando sobre el sistema, para (B.33a) y (B.33b) respectivamente. Es claro ver que en sistemas abiertos, el lado derecho de ambas ecuaciones se anula idénticamente, por lo que no hay pérdida de energía ni momentum debido a interacciones, de manera análoga a lo que ocurre en la mecánica clásica.

B.2.2. Transformaciones de Lorentz

Otro grupode transformaciones importantes en Física, ya que en todas las teorías relativistas se hace uso de ellas, está dado por las *transformaciones de Lorentz*. En primera aproximación, podemos dar una interpretación de las transformaciones de Lorentz como una “rotación espacio temporal” de los ejes de un sistema coordinado con un *sistema de referencia inercial* mediante ángulos constantes, los que vienen contenidos en la matrices Λ^μ_ν , donde los índices μ, ν identifican los ejes al rededor de los cuales se hace la rotación espacio temporal². Por lo tanto, si las coordenadas de un evento P del espacio-tiempo están dadas por $x^\mu(P)$ en el sistema original, en el sistema *transformado bajo Lorentz* sus coordendas estarán dadas por

$$x^\mu(P) \rightarrow \bar{x}^\mu(P) = \Lambda^\mu_\nu x^\nu(P). \quad (\text{B.34})$$

Una representación geométrica de esto está dada por B.2. Para que esta rotación espacio-temporal

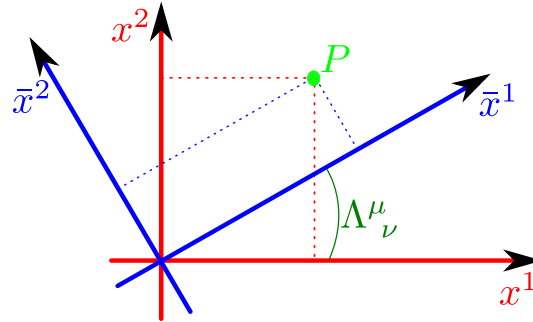


Figura B.2: Transformación de Lorentz bidimensional mostrada como una rotación de las coordenadas del espacio tiempo.

²Por ejemplo, $\Lambda^0_1 \neq 0$ y $\Lambda^2_3 \neq 0$ contienen información de la rotación en los planos (ct, x) y (y, z) respectivamente.

(B.34) prevee el módulo de los cuadvectores bajo transformaciones de Lorentz debe satisfacer las condiciones

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \Lambda_{\mu}^{\rho} \Lambda_{\nu}^{\sigma} \eta_{\rho\sigma} \quad \text{tal que} \quad \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = \eta_{\rho\sigma} d\bar{x}^{\rho} d\bar{x}^{\sigma}. \quad (\text{B.35})$$

Esto es análogo al caso de las rotaciones en el espacio tridimensional Euclidiano, caracterizados por la *matriz de rotaciones* R^i_j , que satisface $\delta_{ij} = R^k_i R^l_j \delta_{kl}$, de manera de que preserve el largo de vectores tridimensionales. Esto quiere decir que las transformaciones de Lorentz son generalizaciones de las rotaciones en el espacio Euclidiano, a un contexto tetradimensional con la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu} := \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. De hecho, para una transformación de Lorentz netamente espacial, las componentes Λ^i_j coinciden con las componentes de una rotación espacial R^i_j ,

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^i_j \end{pmatrix}, \quad \text{donde} \quad R^i_j \in O(3). \quad (\text{B.36})$$

Sin embargo, en los casos en que las componentes tiempo-espacio Λ^0_i son no nulas, estas transformaciones representan un cambio de observador inercial que pueden o no estar rotados uno respecto del otro. Las transformaciones de Lorentz entre observadores que tienen sus ejes espaciales paralelos uno de otro se conocen como los *boost de Lorentz* y están dadas por

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_i \\ -\gamma\beta^i & \delta^i_j + (\gamma - 1)\beta^i\beta_j/\beta^2 \end{pmatrix}, \quad \text{where} \quad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (\text{B.37})$$

donde $\beta^i := v^i/c$ es la *velocidad reducida* del observador en el nuevo sistema de referencia con respecto del antiguo.

Ya que el objetivo de esta sección consiste en estudiar las consecuencias de la simetría de Lorentz, es importante mencionar que la interpretación como un cambio entre observadores inerciales, ya que debido al *principio de relatividad*, que establece que todos los sistemas de referencia inerciales son equivalentes, sabemos que la aplicación sucesiva de transformaciones de Lorentz es también una transformación de Lorentz. Esto quiere decir que si consideramos 3 sistemas de referencia inerciales K , K' y $\bar{K}$ que se relacionan por las transformaciones

$$\begin{aligned} x'^{\mu} &= (\Lambda_1)^{\mu}_{\nu} x^{\nu} & (\text{de } K \text{ a } K'), \\ \bar{x}^{\mu} &= (\Lambda_2)^{\mu}_{\nu} x'^{\nu} & (\text{de } K' \text{ a } \bar{K}), \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

una tercera transformación de Lorentz Λ_3 debe existir, que relaciona el sistema K con el sistema $\bar{K}$ mediante

$$\bar{x}^{\mu} = (\Lambda_3)^{\mu}_{\nu} x^{\nu}. \quad (\text{B.39})$$

De la ecuación (B.38) es inmediato verificar que

$$(\Lambda_3)^{\mu}_{\nu} = (\Lambda_2)^{\mu}_{\rho} (\Lambda_1)^{\rho}_{\nu}, \quad (\text{B.40})$$

por lo que las transformaciones de Lorentz forman un conjunto cerrado de transformaciones.

Hemos también de centrar nuestra atención en la forma que actúa una transformación de Lorentz sobre un campo. Si consideramos dos campos independientes $\Phi^A(x)$ y $Y^A(x)$, estos transformarán de manera distinta, dependiendo de su *rango tensorial* que va representado en este caso por el índice A . Por ejemplo, un campo escalar $\Phi^A \rightarrow \varphi$ se define de manera tal que su valor no se vea afectado por las transformaciones de Lorentz: $\bar{\varphi}(\bar{x}) = \varphi(x)$, mientras que un campo tensorial $(1,1)$, como puede ser el tensor de energía-momento: $\Psi^A \rightarrow H^{\mu}_{\nu}$ transformará como $\bar{H}^{\mu}_{\nu}(\bar{x}) = \Lambda^{\mu}_{\rho} (\Lambda^{-1})^{\sigma}_{\nu} H^{\rho}_{\sigma}(x)$ bajo transformaciones de Lorentz. En este caso $(\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu}$ es la matriz inversa de Λ^{μ}_{ν} . En general, para un campo arbitrario $\Phi^A(x)$ supondremos que las transformaciones de Lorentz actuarán de manera lineal, esto es

$$\Phi^A(x(P)) \rightarrow \bar{\Phi}^A(\bar{x}(P)) = S^A_B(\Lambda) \Phi^B(x(P)), \quad (\text{B.41})$$

donde $S^A_B(\Lambda)$ es una matriz determinada por Λ^{μ}_{ν} , cuya forma depende de los campos Φ^A . Ahora, si consideramos de nuevo el caso representado en la figura B.3, usando las mismas transformaciones

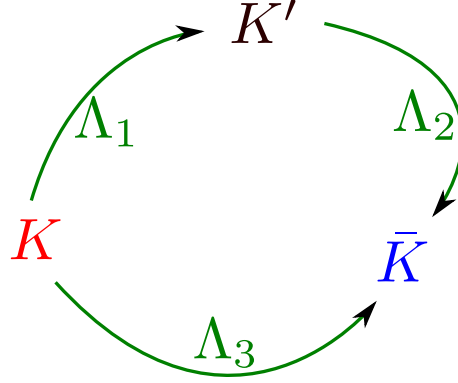


Figura B.3: La aplicación sucesiva de más de una transformación de Lorentz es también una transformación de Lorentz.

de coordenadas dadas en (B.38), el cambio entre los distintos observadores inerciales también afecta a los campos, de manera que

$$\begin{aligned}\Phi'^A(x'(P)) &= S_B^A(\Lambda_1)\Phi^B(x(P)), & (\text{de } K \text{ a } K'), \\ \bar{\Phi}^A(\bar{x}(P)) &= S_B^A(\Lambda_2)\Phi'^B(x'(P)), & (\text{de } K' \text{ a } \bar{K}).\end{aligned}\quad (\text{B.42})$$

Así, de la misma forma en que la tercera transformación de Lorentz del sistema de referencia inercial K al sistema $\bar{K}$ queda determinada por (B.40), vemos que la matriz $S_B^A(\Lambda_3)$ quedará dada por la aplicación sucesiva de las transformaciones de Lorentz correspondientes a la representación

$$S_B^A(\Lambda_2 \cdot \Lambda_1) = S_C^A(\Lambda_2) S_B^C(\Lambda_1), \quad (\text{B.43})$$

relacionando de manera unívoca a los campos descritos en el sistema $\bar{K}$ con los observados en el sistema K .

También es posible considerar una transformación infinitesimal de Lorentz, de manera análoga con lo que hicimos con las traslaciones. Tomamos un Λ^μ_ν infinitesimalmente cerca de la identidad. Esto es

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \lambda^\mu_\nu, \quad (\text{B.44})$$

donde λ^μ_ν son los parámetros infinitesimales. Reemplazando (B.44) en la condición (B.35), vemos que los parámetros λ^μ_ν son necesariamente antisimétricos:

$$\lambda_{\mu\nu} = -\lambda_{\nu\mu}, \quad \text{con} \quad \lambda_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho}\lambda^\rho_\nu. \quad (\text{B.45})$$

Una transformación infinitesimal de Lorentz debe producir una transformación infinitesimal en los campos. Esto se aplica al momento de plantear la forma de la matriz usada en la ecuación (B.41), que se define de manera que de una expansión de Taylor se obtiene

$$S_B^A(\Lambda) = \delta_B^A + \frac{1}{2}\lambda^{\rho\sigma}(s_{\rho\sigma})^A_B, \quad (\text{B.46})$$

donde $(s_{\rho\sigma})^A_B$ se conocen como *generadores de Lorentz* que se determinan para cada forma específica de campo $\Phi^A(x)$ en función de su naturaleza bajo transformaciones de Lorentz: si son escalares, vectores, tensores, espinores, etc.).

Entonces, reemplazando (B.44) en (B.34) y (B.46) en (B.41), obtenemos el como las coordenadas y los campos cambian bajo transformaciones locales de Lorentz:

$$x^\mu \rightarrow \bar{x}^\mu = x^\mu + \lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad (\text{B.47a})$$

$$\Phi^A(x) \rightarrow \bar{\Phi}^A(\bar{x}) = \Phi^A(x) + \frac{1}{2}\lambda^{\rho\sigma}(s_{\rho\sigma})^A_B \Phi^B(x). \quad (\text{B.47b})$$

Podemos dar algunos ejemplos de generadores de Lorentz para distintas representaciones. Primero, un campo escalar bajo transformaciones de Lorentz tiene generadores nulos: $(s_{\rho\sigma}) = 0$. Un cuadvectores contravariante A^μ y un vector covariante B_μ cambian bajo transformaciones de Lorentz como

$$\bar{A}^\mu(\bar{x}) = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x) \quad \text{y} \quad \bar{B}_\mu(\bar{x}) = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu B_\nu(x). \quad (\text{B.48})$$

Usando las transformaciones infinitesimales (B.44) es fácil ver que los respectivos generadores de Lorentz están dados por

$$(s_{\rho\sigma})^\mu_\nu = \delta^\mu_\rho \eta_{\nu\sigma} - \delta^\mu_\sigma \eta_{\nu\rho} \quad \text{y} \quad (s_{\rho\sigma})^\nu_\mu = \delta^\nu_\sigma \eta_{\mu\rho} - \delta^\nu_\rho \eta_{\mu\sigma}. \quad (\text{B.49})$$

También, los campos espinoriales de Dirac³ transforman de acuerdo a

$$\bar{\psi}(\bar{x}) = S(\Lambda)\psi(x), \quad (\text{B.50})$$

donde la matriz de 4×4 , $S(\Lambda)$, viene determinada por la relación $\Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu = S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda)$ en la cual γ^μ son las matrices Gamma de Dirac. Una transformación de Lorentz infinitesimal nos permite escribir los generadores como

$$(s_{\mu\nu}) := \frac{1}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu], \quad (\text{B.51})$$

donde bajamos el índice de las matrices Gamma usando $\gamma_\mu = \eta_{\mu\nu} \gamma^\nu$.

Todos estos son representaciones del álgebra de Lorentz, definida por las constantes de estructura $f_{\mu\nu\rho\sigma}^{\kappa\tau}$ que se obtienen del conmutador

$$[(s_{\mu\nu}), (s_{\rho\sigma})]_B^A = \underbrace{\left(\eta_{\mu\sigma} \delta_\nu^\kappa \delta_\rho^\tau - \eta_{\mu\rho} \delta_\nu^\kappa \delta_\sigma^\tau + \eta_{\nu\rho} \delta_\mu^\kappa \delta_\sigma^\tau - \eta_{\nu\sigma} \delta_\mu^\kappa \delta_\rho^\tau \right)}_{f_{\mu\nu\rho\sigma}^{\kappa\tau}} (s_{\kappa\tau})_B^A. \quad (\text{B.52})$$

Por definición, esto se satisface para todo los generadores de Lorentz.

Volviendo a (B.47b), vemos que la variación de los campos para una transformación infinitesimal de Lorentz viene dada por

$$\delta\Phi^A(x) = \frac{1}{2} \lambda^{\rho\sigma} (s_{\rho\sigma})_B^A \Phi^B(x), \quad (\text{B.53})$$

y $\delta x^\mu = \lambda^\mu_\nu x^\nu$ para las coordenadas. Sin embargo, la variación de la derivada parcial de los campos no es tan simple como en el caso de las traslaciones, ya que se modifica el rango tensorial de los campos, añadiendo una componente covariante extra, por lo que debemos calcular desde cero esta variación. podemos ver que en el nuevo sistema de coordenadas se tiene que

$$\bar{\partial}_\mu \bar{\Phi}^A(\bar{x}) = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu \bar{\Phi}^A(\Lambda x). \quad (\text{B.54})$$

En el caso infinitesimal, de acuerdo con las ecuaciones (B.44) y (B.47b); y omitiendo ordenes superiores de λ , esta ecuación se reduce a

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_\mu \bar{\Phi}^A(\bar{x}) &= (\delta_\mu^\nu - \lambda^\nu_\mu) \partial_\nu \left[\Phi^A(x) + \frac{1}{2} \lambda^{\rho\sigma} (s_{\rho\sigma})_B^A \Phi^B(x) \right] \\ &= \partial_\mu \Phi^A(x) - \lambda^\nu_\mu \partial_\nu \Phi^A(x) + \frac{1}{2} \lambda^{\rho\sigma} (s_{\rho\sigma})_B^A \partial_\mu \Phi^B(x). \end{aligned} \quad (\text{B.55})$$

Como $\lambda^{\rho\sigma}$ y $(s_{\rho\sigma})_B^A$ son constantes, la derivada parcial de la ecuación (B.53) y vemos que

$$\partial_\mu (\delta\Phi^A(x)) = \frac{1}{2} \lambda^{\rho\sigma} (s_{\rho\sigma})_B^A \partial_\mu \Phi^B(x). \quad (\text{B.56})$$

³No usaremos los índices para espinores explícitamente.

Por lo tanto,

$$\delta\left(\partial_\mu\Phi^A(x)\right) = -\lambda^\nu_\mu\partial_\nu\Phi^A(x) + \partial_\mu\left(\delta\Phi^A(x)\right), \quad (\text{B.57})$$

donde se ve explícitamente que no obtendremos una ecuación con la misma forma que (B.18), debido al término proporcional a $\partial_\mu\Phi^A(x)$.

Usando lo obtenido en (B.57), vemos que la variación de la densidad lagrangeana está dada por

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi^A}\delta\Phi^A + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^A)}\delta\left(\partial_\mu\Phi^A\right) \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi^A}\delta\Phi^A + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^A)}\partial_\mu\left(\delta\Phi^A\right) - \lambda^\nu_\mu(\partial_\nu\Phi^A)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^A)}. \end{aligned}$$

Usando la regla de Leibniz, la definición de derivada variacional (B.5) y reconociendo la definición del tensor de energía-momentum canónico escribimos

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi^A}\delta\Phi^A + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^A)}\delta\Phi^A\right) - \lambda^{\nu\mu}T_{\mu\nu}. \quad (\text{B.58})$$

El término $\eta_{\mu\nu}\mathcal{L}$ del tensor de energía-momentum canónico se cancela, ya que es simétrico y aparece multiplicado por el parámetro antisimétrico $\lambda^{\mu\nu}$.

Definiendo la *densidad de corriente de espín canónica* $S_{\rho\sigma}{}^\mu$ del sistema mediante

$$S_{\rho\sigma}{}^\mu := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^A)}(s_{\rho\sigma})^A{}_B\Phi^B, \quad (\text{B.59})$$

que satisface,

$$\frac{1}{2}\lambda^{\rho\sigma}S_{\rho\sigma}{}^\mu \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^A)}\delta\Phi^A, \quad (\text{B.60})$$

y suponiendo que las transformaciones de Lorentz mantienen la densidad lagrangeana invariante, $\delta\mathcal{L} = 0$, obtenemos la *identidad del momento angular* a partir de la ecuación (B.58)

$$\partial_\mu S_{\rho\sigma}{}^\mu - 2T_{[\rho\sigma]} \equiv -\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi^A}(s_{\rho\sigma})^A{}_B\Phi^B, \quad (\text{B.61})$$

donde hemos aprovechado la antisimetría y la arbitrariedad de $\lambda^{\mu\nu}$ para derivar esta identidad.

Es sencillo verificar que

$$T_{\mu\nu} = \partial_\lambda(x_\nu T_\mu{}^\lambda) - x_\nu\partial_\lambda T_\mu{}^\lambda \quad (\text{B.62})$$

y usando la ecuación del balance de la energía y el momentum (B.30) (suponiendo además que la acción es invariante bajo traslaciones) escribimos

$$T_{\mu\nu} = \partial_\lambda(x_\nu T_\mu{}^\lambda) + x_\nu\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi^A}\partial_\mu\Phi^A, \quad (\text{B.63})$$

que se reemplaza nuevamente (B.58) para obtener

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi^A}\delta\Phi^A + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^A)}\delta\Phi^A\right) - \lambda^{\nu\mu}\partial_\lambda(x_\nu T_\mu{}^\lambda) - \lambda^{\nu\mu}x_\nu\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi^A}\partial_\mu\Phi^A. \quad (\text{B.64})$$

Esta expresión puede reducirse a

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi^A}\left(\delta\Phi^A + \lambda^{\mu\nu}x_\nu\partial_\mu\Phi^A\right) + \partial_\lambda\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda\Phi^A)}\delta\Phi^A + \lambda^{\mu\nu}x_\nu T_\mu{}^\lambda\right). \quad (\text{B.65})$$

Sin embargo, podemos introducir nuevas definiciones para obtener información de esta ecuación de manera más inmediata. Definiendo el *operador de momento angular orbital* (similar al de la mecánica cuántica)

$$(l_{\rho\sigma})^A{}_B := \delta_B^A(x_\rho\partial_\sigma - x_\sigma\partial_\rho), \quad (\text{B.66})$$

que es claramente antisimétrico en ρ y σ , además satisface de manera inmediata

$$[(l_{\mu\nu}), (l_{\rho\sigma})]_B^A = (l_{\mu\nu})_C^A (l_{\rho\sigma})_B^C - (l_{\rho\sigma})_C^A (l_{\mu\nu})_B^C = f_{\mu\nu\rho\sigma}^{\kappa\tau} (l_{\kappa\tau})_B^A, \quad (\text{B.67})$$

con los coeficientes $f_{\mu\nu\rho\sigma}^{\kappa\tau}$ definidos anteriormente en (B.52), por lo que es una representación del álgebra de Lorentz. Sea además el *operador de momento angular total*

$$(j_{\rho\sigma})_B^A := (l_{\rho\sigma})_B^A + (s_{\rho\sigma})_B^A, \quad (\text{B.68})$$

que claramente satisface el álgebra de Lorentz. También definiremos la *densidad canónica de momentum angular orbital* del sistema mediante

$$L_{\rho\sigma}^\mu := x_\rho T_\sigma^\mu - x_\sigma T_\rho^\mu, \quad (\text{B.69})$$

y la *densidad canónica total de momento angular*

$$J_{\rho\sigma}^\mu := S_{\rho\sigma}^\mu + L_{\rho\sigma}^\mu. \quad (\text{B.70})$$

Estas cuatro cantidades se definen de manera tal que sea inmediato reducir la ecuación (B.65) a

$$\delta\mathcal{L} = \frac{1}{2}\lambda^{\sigma\rho} \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi^A} (j_{\rho\sigma})_B^A \Phi^B + \partial_\mu J_{\rho\sigma}^\mu \right), \quad (\text{B.71})$$

así, por la antisimetría y arbitrariedad de los parámetros $\lambda^{\sigma\rho}$ obtenemos la ecuación de balance

$$\partial_\mu J_{\rho\sigma}^\mu = - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi^A} (j_{\rho\sigma})_B^A \Phi^B. \quad (\text{B.72})$$

Es importante mencionar que en el caso de una teoría no-relativista, la densidad lagrangeana no será invariante bajo todas las transformaciones de Lorentz, en particular los boost, por lo que la identidad (B.61) no será satisfecha para todas las combinaciones de ρ, σ , sin embargo, si lo será si se escogen rotaciones espaciales $\rho, \sigma = i, j = 1, 2, 3$.

Los tensores de densidad de momentum angular

Podemos relacionar las densidades de momentum angular definidas más arriba al momentum angular de una forma análoga a lo que se hizo en la sección B.2.1. Primeramente, consideraremos la naturaleza de la información contenida en $S_{\rho\sigma}^\mu$, $L_{\rho\sigma}^\mu$ y $J_{\rho\sigma}^\mu$. Claramente, debido al nombre que le hemos dado, la última contiene información respecto del momentum angular del sistema. La primera, de su definición (B.59), describe el momento angular intrínseco contenido en los campos y de la identificación de los términos de las componentes del tensor de energía-momentum, vemos que $L_{\rho\sigma}^\mu$ representa un momentum angular similar al que se define en la mecánica clásica.

Ambos índices covariantes indican el plano espaciotemporal en el cual se hace la rotación, pero el índice contravariante indica la dirección en que se produce este flujo. Las componentes espaciales indican el flujo de momentum angular,

$$S_{\rho\sigma}^i := S_{\rho\sigma}^i, \quad \mathbb{L}_{\rho\sigma}^i := L_{\rho\sigma}^i \quad \text{y} \quad \mathbb{J}_{\rho\sigma}^i := J_{\rho\sigma}^i, \quad (\text{B.73})$$

cantidades que son similares al vector de flujo de energía. La componente temporal tiene una interpretación mucho más familiar, la identificamos con la *densidad de momentum angular* en el plano $\rho\sigma$

$$S_{\rho\sigma} := \frac{1}{c} S_{\rho\sigma}^0, \quad \mathcal{L}_{\rho\sigma} := \frac{1}{c} L_{\rho\sigma}^0 \quad \text{y} \quad \mathcal{J}_{\rho\sigma} := \frac{1}{c} J_{\rho\sigma}^0, \quad (\text{B.74})$$

que nos permite definir el momentum angular total

$$J_{\rho\sigma} := \frac{1}{c} \int_{E_3} d^3x J_{\rho\sigma}^0. \quad (\text{B.75})$$

Esta definición puede extenderse a la densidad de espín y de momentum angular orbital.

Generadores de Lorentz

Sabemos que los generadores de Lorentz $(s_{\rho\sigma})^A_B$, $(l_{\rho\sigma})^A_B$ y $(j_{\rho\sigma})^A_B$ son representaciones del álgebra de Lorentz, que generaliza las rotaciones al espacio-tiempo de Minkowski en 4 dimensiones. Particularmente, $(s_{\rho\sigma})^A_B$ es el generador de cambio en los campos sometidos a transformaciones de Lorentz infinitesimales como se han definido en (B.47b), y $(l_{\rho\sigma})^A_B$ es el generador que aparece implícitamente en (B.65) como consecuencia del cambio de las coordenadas espaciotemporales. Esto implica que $(j_{\rho\sigma})^A_B$, siendo la suma de ambos, es el generador total de la simetría de los campos bajo transformaciones de Lorentz y dado un campo Φ^B , diremos que es simétrico bajo transformaciones de Lorentz si y solo si

$$(j_{\rho\sigma})^A_B \Phi^B(x) = 0. \quad (\text{B.76})$$

Podemos ilustrar mejor esto considerando rotaciones en el espacio tridimensional. Consideremos el plano xy , en el cual definimos dos campos vectoriales A^i y B^i , de forma que

$$\mathbf{A}(r, \varphi) = A(r)\hat{\mathbf{r}} \quad \text{y} \quad \mathbf{B}(r, \varphi) = B(r)\hat{\boldsymbol{\varphi}}. \quad (\text{B.77})$$

Una representación gráfica de estos campos viene dada en la figura B.4.

Los generadores de Lorentz $(j_{\rho\sigma})^A_B \Phi^B$ para este caso, después de usar la regla de la cadena para escribirlo en función de las derivadas en coordenadas polares estará dado

$$(j_{xy})^i_j = \delta^i_y \delta_{xj} - \delta^i_x \delta_{yj} - \delta^i_j \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad i, j = 1, 2. \quad (\text{B.78})$$

Para los campos definidos en (B.77) vemos que

$$\begin{aligned} (j_{xy})^x_j A^j &= -A(r) \sin \varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi} (A(r) \cos \varphi) \equiv 0, \\ (j_{xy})^x_j B^j &= -B(r) \cos \varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi} (-B(r) \sin \varphi) \equiv 0, \\ (j_{xy})^y_j A^j &= A(r) \cos \varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi} (A(r) \sin \varphi) \equiv 0, \\ (j_{xy})^y_j B^j &= -B(r) \sin \varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi} (B(r) \cos \varphi) \equiv 0, \end{aligned}$$

lo que implica que los campos A^i y B^i son simétricos bajo rotaciones,

$$(j_{xy})^i_j A^j = 0 \quad \text{y} \quad (j_{xy})^i_j B^j = 0. \quad (\text{B.79})$$

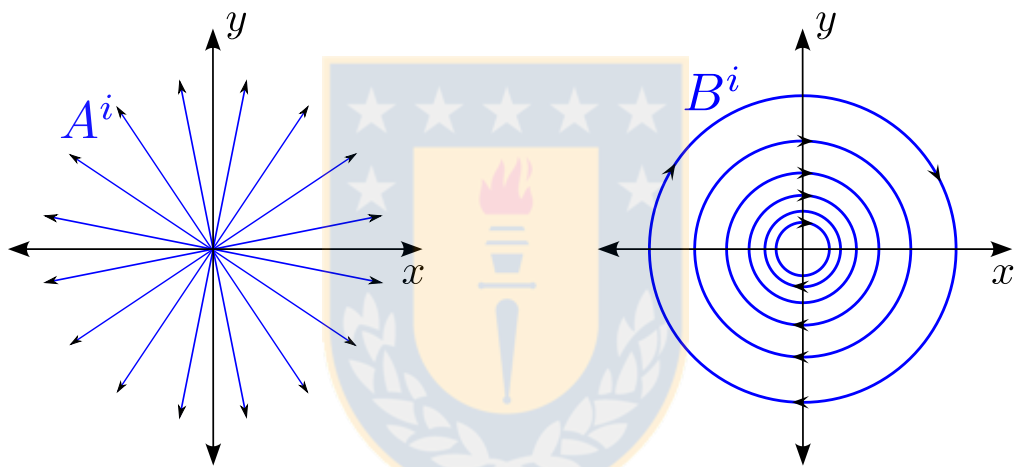


Figura B.4: Ilustraciones de campos en el plano xy . ambas figuras son adaptaciones de gráficos obtenidos en [40].

Bibliografía

- [1] E. Noether: *Invariante Variationsprobleme*. Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Klasse, **1918**: 235 – 257, 1918. Puede encontrarse una traducción al inglés por M. A. Tavel en arXiv:physics/0503066 [physics.hist-ph], la que fue publicada por F. Wang.
- [2] A. Einstein: *Grundgedanken der allgemeinen Relativitätstheorie und Anwendung dieser Theorie in der Astronomie*. Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte, **315**, 1915.
- [3] A. Komar: *Covariant Conservation Laws in General Relativity*. Phys. Rev., **113**: 934–936, 1959.
- [4] A. Komar: *Asymptotic covariant conservation laws for gravitational radiation*. Phys. Rev., **127**: 1411, 1962.
- [5] V. Iyer y R. M. Wald: *Some properties of the Noether charge and a proposal for dynamical black hole entropy*. Phys. Rev. D, **50**: 846, 1994.
- [6] A. N. Petrov y R. Lompay: *Covariantized Noether identities and conservation laws for perturbations in metric theories of gravity*. Gen. Relativ. Gravit., **45**: 545, 2013.
- [7] R. Lompay y A. N. Petrov: *Covariant differential identities and conservation laws in metric-torsion theories of gravitation. I. General consideration*. J. Math. Phys., **54**: 062504, 2013.
- [8] R. Lompay y A. N. Petrov: *Covariant differential identities and conservation laws in metric-torsion theories of gravitation. II. Manifestly generally covariant theories*. J. Math. Phys., **54**: 102504, 2013.
- [9] B. Julia y S. Silva: *Currents and superpotentials in classical gauge-invariant theories: I. Local results with applications to perfect fluids and general relativity*. Class. Quantum Grav., **15**: 2173, 1998.
- [10] B. Julia y S. Silva: *Currents and superpotentials in classical gauge-invariant theories: II. Global aspects and the example of affine gravity*. Class. Quantum Grav., **17**: 4733, 2000.
- [11] G. Giachetta, L. Mangiarotti y G. Sardanashevily: *Energy-momentum and gauge conservation laws*. Gravitation and Cosmology, **5**: 92, 1999.
- [12] G. Sardanashevily: *Stress-energy-momentum conservation law in gauge gravitation theory*. Class. Quantum Grav., **14**: 1357, 1997.
- [13] M. Ferraris, M. Francaviglia y M. Raiteri: *Conserved quantities from the equations of motion: with applications to natural and gauge natural theories of gravity*. Class. Quantum Grav., **20**: 4043, 2003.
- [14] N. Deruelle y Y. Morisawa: *Mass and angular momenta of Kerr anti-de Sitter spacetimes in Einstein-Gauss-Bonnet theory*. Class. Quantum Grav., **22**: 933, 2005.
- [15] R. Aros, M. Contreras, R. Olea, R. Troncoso y J. Zanelli: *Conserved Charges for Gravity with Locally Anti-de Sitter Asymptotics*. Phys. Rev. Lett., **84**: 1647–1650, 2000.
- [16] R. Aros, M. Contreras, R. Olea, R. Troncoso y J. Zanelli: *Conserved charges for even dimensional asymptotically AdS gravity theories*. Phys. Rev. D, **62**: 044002, 2000.

- [17] L. Fatibene, M. Ferraris, M. Francaviglia y M. Raiteri: *Remarks on conserved quantities and entropy of BTZ black hole solutions I. The general setting*. Phys. Rev. D, **60**: 124012, 1999.
- [18] G. Giachetta y G. Sardanashvily: *Stress-energy-momentum of affine-metric gravity. Generalized Komar superpotential*. Class. Quantum Grav., **13**: L67, 1996.
- [19] E. Mielke: *Affine generalization of the Komar complex of general relativity*. Phys. Rev. D, **63**: 044018, 2001.
- [20] Y.N. Obukhov y G.F. Rubilar: *Covariance properties and regularization of conserved currents in tetrad gravity*. Phys. Rev. D, **73**: 124017, Jun 2006.
- [21] Y.N. Obukhov y G.F. Rubilar: *Invariant conserved currents in gravity theories with local Lorentz and diffeomorphism symmetry*. Phys. Rev. D, **74**: 064002, 2006.
- [22] Y.N. Obukhov y G.F. Rubilar: *Invariant conserved currents for gravity*. Physics Letters B, **660**(3): 240 – 246, 2008, ISSN 0370-2693.
- [23] Y.N. Obukhov y G.F. Rubilar: *Invariant conserved currents in gravity theories: Diffeomorphisms and local gauge symmetries*. Phys. Rev. D, **76**: 124030, Dec 2007.
- [24] Y.N. Obukhov, G.F. Rubilar y J. G. Pereira: *Conserved currents in gravitational models with quasi-invariant Lagrangians: Application to teleparallel gravity*. Phys. Rev. D, **74**: 104007, Nov 2006.
- [25] Y.N. Obukhov y D. Puetzfeld: *Conservation laws in gravity: A unified framework*. Phys. Rev. D, **90**: 024004, Jul 2014.
- [26] Y.N. Obukhov y D. Puetzfeld: *Conservation laws in gravitational theories with general nonminimal coupling*. Phys. Rev. D, **87**: 081502, Apr 2013.
- [27] Y.N. Obukhov, F. Portales-Oliva, D. Puetzfeld y G.F. Rubilar: *Invariant conserved currents in generalized gravity*. Trabajo ya enviado para su publicación a la revista Phys. Rev. D, preprint en arXiv:1507.02191 [gr-qc].
- [28] R. H. Boyer y R. W. Lindquist: *Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric*. Journal of Mathematical Physics, **8** (2): 265–281, 1967.
- [29] A. Kleyn: *Metric-Affine Manifold*. E-Print en arXiv:gr-qc/0405028., 2004.
- [30] G. H. Katzin, J. Levine y W. R. Davis: *Curvature collineations: a fundamental symmetry property of the spacetimes of general relativity defined by the vanishing Lie derivative of the Riemann curvature tensor*. J. Math. Phys., **10**: 617, 1969.
- [31] C. D. Collinson: *Conservation laws in general relativity based upon the existence of preferred collineations*. Gen. Rel. Grav., **1**: 137, 1970.
- [32] S. Hojman, L. Nuñez, A. Patiño y H. Rago: *Symmetries and conserved quantities in geodesic motion*. J. Math. Phys., **27**: 281, 1986.
- [33] G. S. Hall: *Symmetries and curvature structure in general relativity*. World Scientific, Singapore, 2004.
- [34] D. Lovelock y H. Rund: *Tensors, differential forms, and variational principles*. Dover Publications, 1989.
- [35] F.W. Hehl y Y.N. Obukhov: *Foundations of Classical Electrodynamics: Charge, Flux, and Metric*. Progress in Mathematical Physics. Birkhäuser Boston, 2012, ISBN 9781461200512.
- [36] J.L. Synge y A. Schild: *Tensor Calculus*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2012, ISBN 9780486141398.

- [37] H. Goldstein: *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, 2nd edición, 1980.
- [38] M. Burgess: *Classical Covariant Fields*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2002, ISBN 9781139432979.
- [39] H. Kleinert: *Particles and Quantum Fields*. Notas de clase disponibles en <http://users.physik.fu-berlin.de/~kleinert/kleinert/?p=lecnotes>, 1996.
- [40] Geek3: *Galery of Vector Field Plot generated images*. Originales disponibles en <http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Geek3/Gallery>. Vía Wikimedia Commons. Recuperado el 11 de Oct., 2013.

