



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN

Campus Los Ángeles

Escuela de Educación

Carrera de Pedagogía en Matemática

Los Logaritmos en Libros de Texto en Chile (2016-2023)

Trabajo de Título para optar al Grado de Licenciado(a) en Educación y al Título
Profesional de
Profesor(a) de Matemática

Christopher Contreras Guilloux
Gabriela Toro Ayala

Profesor guía:
Sr Jorge Cid Anguita

Los Ángeles, 2024

Resumen

La Ley General de Educación promulgada en el año 2009, trajo consigo la creación de las Bases Curriculares. Estas permitieron una mayor flexibilidad para la contextualización en el proceso de enseñanza, impactando directamente en el diseño de los libros de texto que entrega el Ministerio de Educación. Por esta razón, en esta investigación se realizó una caracterización de este material con el objetivo de analizar los libros de textos de segundo año medio en el periodo comprendido entre el año 2016 y 2023 en el contenido de logaritmos.

El análisis de textos escolares se enmarcó en una investigación cualitativa, correspondiente a un estudio de caso. Se analizaron los textos emanados por el Ministerio de Educación para segundo año medio entre los años 2016 y 2023. Se estudió el contenido de logaritmos mediante matrices de información general, de contenidos, de habilidades y de enfoque de aprendizaje. Luego, la información extraída fue analizada utilizando triangulación.

El principal resultado de esta investigación corresponde a una correcta presentación del contenido. Como falencia, la ausencia de demostraciones y restricciones pertinentes, en algunos casos. Las habilidades se abordan

completamente y el enfoque de aprendizaje avanza en el tiempo desde el conductismo al constructivismo.

Palabras claves: Libros de texto, Saber sabio, enfoques de aprendizaje, habilidades, Matrices de cotejo.

Abstract

The enactment of the Ley General de Educación brought about the creation of the Bases Curriculares. These allowed for greater flexibility in contextualization within the teaching process, directly impacting the design of textbooks provided by the Ministerio de Educación. For this reason, this research involved a characterization of this material with the aim of analyzing 10th grade textbooks from the period between 2016 and 2023 in the context of logarithms.

The analysis of school textbooks was framed within a qualitative research approach, corresponding to a case study. The textbooks issued by the Ministerio de Educación for the 10th grade between the years 2016 and 2023 were employed. The content of logarithms was studied through matrices of general information, content, skills, and learning approach. Subsequently, the extracted information was analyzed using various triangulation techniques.

The main outcome of this research corresponds to an appropriate presentation of the content, with a weakness being the absence of relevant demonstrations and restrictions in some cases. Skills are addressed

comprehensively, and the learning approach, in general, ranges from behaviorist to constructivist.

Keywords: Textbooks, Pedagogical Content Knowledge, Learning Approaches, Skills, Assessment Matrices

Dedicatoria

A mis hijos por ser mi motor durante todo este proceso. A mi familia y amigos por sostenerme en todo momento. A mi peladito que desde el plano en el que se encuentre, está feliz porque cumplimos nuestro sueño.

- **Gabriela Toro Ayala**

A mi madre y padre, Sandra y Alencio, por nunca dejar de creer en mí e impulsarme a ser siempre mejor. A mi hermana Alexandra, por ser mi ejemplo y a mi hermano Víctor, para que nunca deje de creer en sus sueños.

- **Crhistopher Contreras Guilloux**

Agradecimientos

Queremos agradecer a nuestras familias por acompañarnos y ser nuestro apoyo durante todo el periodo universitario, sin ellos no habiéramos logrado nuestra meta.

También queremos agradecer a nuestros profesores quienes fueron responsables de nuestra formación profesional, en especial a nuestro profesor guía Jorge Cid, quien siempre se mostró dispuesto a ayudarnos, entregándonos parte de su tiempo para explicarnos con mucha vocación y paciencia en la realización del proyecto.

ÍNDICE GENERAL

Resumen	2
Abstract	4
Dedicatoria	6
Agradecimientos	7
1 Capítulo I: Planteamiento del problema	19
1.1 Definición del tema	19
1.2 Planteamiento del problema	21
1.3 Justificación del problema.....	23
2 Capítulo II: OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN.....	29
2.1 Preguntas de investigación.....	29
3 Capítulo III. MARCO REFERENCIAL.....	31
3.1 Saber sabio	31
3.1.1 Logaritmos	32
3.2 Enfoques de aprendizaje.....	42
3.2.1 Enfoque conductista.....	44
3.2.2 Constructivismo	48
3.2.2.1. Desarrollo cognitivo:.....	50
3.3 Libros de texto.....	60
3.4 Habilidades en Matemática	67
3.4.1 Representar	68
3.4.2 Modelar	69
3.4.3 Resolución de problemas	69
3.4.4 Argumentar y Comunicar	70
3.5 Educación Chilena.....	72
3.5.1 Reformas Educativas en Chile	72
3.5.2 Ley General de Educación.....	75

3.5.3	Bases curriculares	76
4	Capítulo IV: Marco Metodológico.....	78
4.1	Tipo de investigación:	78
4.2	Diseño de investigación:	79
4.3	Población y Muestra:.....	80
4.4	Técnica de recolección de datos:.....	81
4.5	Instrumentos para la recolección de datos:	82
4.5.1	Matriz de Identificación General para la caracterización general de los libros de texto (MIGt) (Modificación MIGt Dr. Roberto Vidal). 83	
4.5.2	Matriz de Análisis de Contenido para la caracterización de los Libros de Texto (MAcT).	85
4.5.3	Matriz de análisis de contenido para la caracterización de libros de texto según enfoque de aprendizaje (MAEt)	86
4.5.4	Matriz de análisis de contenido para la caracterización de los libros de texto según habilidades (MAHt).....	88
4.5.5	Matrices de resumen y cotejo. Caracterización y perfiles.	90
5	Capítulo V: Resultados y Análisis de Datos	107
5.1	Caracterización de libros de texto	107
5.2	Caracterización libro 1	110
5.2.1	Aplicación de la MIGt para la caracterización del libro 1.....	110
5.2.2	Aplicación de la Matriz MAcT1 para la caracterización del libro 1. 112	
5.2.3	Aplicación de la MAEt para la caracterización del libro 1.....	123
5.2.4	Aplicación de la MAHt para la caracterización del libro 1.	129
5.3	Caracterización libro 2	135
5.3.1	Aplicación de la MIGt para la caracterización del libro 2.....	135
5.3.2	Aplicación de la MAcT para la caracterización del libro 2.	137
5.3.3	Aplicación de la MAEt para la caracterización del libro 2.....	147

5.3.4	Aplicación de la MAHt para la caracterización del libro 2.	154
5.4	Caracterización libro 3	159
5.4.1	Aplicación de la MIGt para la caracterización del libro 3.....	159
5.4.2	Aplicación de la MACt para la caracterización del 3.....	160
5.4.3	Aplicación de la MAEt para la caracterización del libro 3.....	167
5.4.4	Aplicación de la MAHt para la caracterización del libro 3.	176
5.5	Caracterización libro 4	179
5.5.1	Aplicación de la MIGt para la caracterización del libro 4.....	179
5.5.2	Aplicación de la MACt para la caracterización del libro 4.	180
5.5.3	Aplicación de la MAEt para la caracterización del libro 4.....	187
5.5.4	Aplicación de la MAHt para la caracterización del libro 4.	190
5.6	Resultados:	195
5.6.1	Caracterización del Saber a Enseñar en libros de texto.....	195
5.6.2	Triangulación de las Caracterizaciones entre libros de texto con el saber sabio.....	197
5.6.3	Triangulación de las Caracterizaciones entre libros de texto con los enfoques de aprendizaje	200
5.6.4	Triangulación de las Caracterizaciones entre libros de texto y las habilidades	202
6	Capítulo VI: Conclusiones.....	203
7	Capítulo VII: Proyecciones y limitaciones	205
	Referencias Bibliográficas	207

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Principales reformas educacionales	73
Tabla 2. Matriz de información general para la caracterización de libros de textos (Modificación Dr. Roberto Vidal, 2009)	84
Tabla 3. Tabla de resumen y cotejo de caracterización del saber sabio	97
Tabla 4. Tabla análisis enfoques de aprendizaje conductista (1) y constructivista (2).....	103
Tabla 5. Tabla simbología utilizada en tabla N°4	103
Tabla 6. Parámetros utilizados para clasificar el libro de texto dentro del enfoque conductista o constructivista	104
Tabla 7. Matriz de cotejo que representa el desarrollo de habilidades matemáticas.....	104
Tabla 8. Matriz de información general libros de textos	107
Tabla 9. Matriz de información general del libro 1	110
Tabla 10. Organización libro de texto 1	112
Tabla 11. Matriz de información general libro 2.....	135
Tabla 12. Organización contenidos libro 2	137
Tabla 13. Matriz información general libro 3	159
Tabla 14. Contenidos abordados en el libro 3.....	161

Tabla 15. Matriz de información general libro 4	179
Tabla 16. Organización de contenidos libros 4	181
Tabla 17. Matriz de cotejo. MAC	216
Tabla 18. Matriz de resumen. Contenidos.....	222
Tabla 19. Matriz de cotejo. Enfoques de aprendizaje	228
Tabla 20. Matriz de cotejo. Enfoques de aprendizaje	228
Tabla 21. Matriz de cotejo. Habilidades matemáticas	229
Tabla 22. Matriz de resumen. Habilidades matemáticas.....	229

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Triangulación y obtención de conclusiones.....	106
Figura 2. Definición de Logaritmo. Libro 1	113
Figura 3. Restricciones para la base del logaritmo. Libro 1	113
Figura 4. Restricciones para el argumento del logaritmo. Libro 1	114
Figura 5. Actividad involucrada en la introducción del concepto de logaritmo. Libro 1	114
Figura 6. Definición de logaritmo. Libro 1	115
Figura 7. Resumen definición logaritmo. Libro 1	115
Figura 8. Propiedades logaritmo. Libro 1	116
Figura 9. Demostración propiedad logaritmo de un producto y de un cociente. Libro 1.....	117
Figura 10. Demostración propiedad logaritmo de una potencia.....	118
Figura 11. Propiedades de logaritmos con sus restricciones. Libro 1.....	118
Figura 12. Propiedad cambio de base. Libro 1	119
Figura 13. Resumen propiedades de logaritmos. Libro 1	120
Figura 14. Ecuaciones logarítmicas. Libro 1	121
Figura 15. Resolución ecuaciones logarítmicas. Libro 1	122
Figura 16. Análisis de restricciones. Libro 1	124

Figura 17. Restricciones definición de logaritmo. Libro 1	124
Figura 18. Análisis restricciones de la base. Libro 1	124
Figura 19. Restricciones de la base de logaritmo. Libro 1	125
Figura 20. Ejercicios de análisis de restricciones del argumento. Libro 1	125
Figura 21. Análisis restricciones del argumento. Libro 1	125
Figura 22. Ejercicios cálculos logaritmo usando definición. Libro 1	126
Figura 23. Aplicación propiedades logaritmos. Libro 1	127
Figura 24. Propiedad cambio de base. Libro 1	128
Figura 25. Resolución ecuaciones logarítmicas. Libro 1	129
Figura 26. Habilidad de representar. Libro 1	130
Figura 27. Habilidad de modelar. Libro 1	131
Figura 28. Habilidad de argumentar y comunicar. Libro 1	132
Figura 29. Habilidad de resolver problemas. Libro 1	133
Figura 30. Habilidad de resolver problemas. Libro 1	134
Figura 31. Definición y restricciones logaritmo. Libro 2	138
Figura 32. Introducción al concepto de logaritmo. Libro 2	139
Figura 33. Escalas logarítmicas. Libro 2	140
Figura 34. Ejercicios definición logaritmos. Libro 2	141
Figura 35. Uso de calculadora. Libro 2	142

Figura 36. Propiedades logaritmos. Libro 2.....	143
Figura 37. Resumen propiedades de logaritmos. Libro 2	144
Figura 38. Ejercicios de aplicación propiedades de logaritmos. Libro 2...	145
Figura 39. Problema aplicación logaritmo. Libro 2.....	146
Figura 40. Taller de introducción concepto de logaritmo. Libro 2	147
Figura 41. Restricciones argumento de un logaritmo. Libro 2	148
Figura 42. Actividad propiedad logaritmo de la unidad y logaritmo de la base. Libro 2.....	149
Figura 43. Propiedad logaritmo de la base y de la unidad. Libro 2.....	149
Figura 44. Actividad propiedad logaritmo de un producto. Libro 2	150
Figura 45. Actividad propiedad logaritmo de un cociente. Libro 2.....	151
Figura 46. Actividad propiedad logaritmo de una potencia. Libro 2.....	152
Figura 47. Actividades de modelación. Libro 2.....	153
Figura 48. Habilidad de representar. Libro 2	155
Figura 49. Habilidad modelar. Libro 2.....	155
Figura 50. Habilidad modelar. Libro 2.....	156
Figura 51. Habilidad de comunicar y argumentar. Libro 2.....	157
Figura 52. Habilidad resolución de problemas. Libro 2	158
Figura 53. Definición de logaritmo. Libro 3	162

Figura 54. Actividad introducción de concepto logaritmo. Libro 3	162
Figura 55. Ejercicio aplicación definición de logaritmos. Libro 3	163
Figura 56. Propiedades logaritmo de la base y logaritmo de la unidad. Libro 3	164
Figura 57. Demostración propiedades logaritmo de un producto y un cociente. Libro 3.....	164
Figura 58. Propiedad logaritmo de un producto y logaritmo de un cociente. Libro 3	165
Figura 59. Demostración propiedad logaritmo de una potencia. Libro 3 ..	165
Figura 60. Propiedad logaritmo de una potencia. Libro 3	165
Figura 61. Demostración propiedad cambio de base de un logaritmo. Libro 3	166
Figura 62. Propiedad cambio de base de un logaritmo. Libro 3	166
Figura 63. Presentación concepto logaritmo. Libro 3	168
Figura 64. Propiedad logaritmo de la base y logaritmo de la unidad. Libro 3	169
Figura 65. Propiedad logaritmo de una potencia. Libro 3	170
Figura 66. Propiedad logaritmo de un producto y logaritmo de un cociente. Libro 3	172

Figura 67. Propiedad cambio de base de un logaritmo. Libro 3.....	173
Figura 68. Demostración propiedad cambio de base de un logaritmo. Libro 3.....	173
Figura 69. Aplicaciones de logaritmos. Libro 3.....	174
Figura 70. Ejercicio intensidad de sonido. Libro 3.....	175
Figura 71. Habilidad de representar. Libro 3.....	176
Figura 72. Habilidad de modelar. Libro 3.....	177
Figura 73. Habilidad de argumentar y comunicar. Libro 3.....	177
Figura 74. Habilidad resolver problemas. Libro 3.....	178
Figura 75. Definición de logaritmo. Libro 4.....	182
Figura 76. Actividad introducción al concepto de logaritmo. Libro 4.....	183
Figura 77. Ejercicios aplicación definición logaritmos. Libro 4.....	184
Figura 78. Propiedad logaritmo de la base y logaritmo de la unidad. Libro 4.....	184
Figura 79. Aplicación logaritmos. Libro 4.....	186
Figura 81. Introducción al concepto de logaritmos. Libro 4.....	187
Figura 80. Actividad introductoria. Libro 4.....	187
Figura 82. Actividad relación potencia-logaritmo. Libro 4.....	188
Figura 83. Reflexión restricciones logaritmo. Libro 4.....	189

Figura 84. Definición de logaritmo. Libro 4.....	189
Figura 85. Habilidad representar. Libro 4.....	191
Figura 86. Habilidad modelar. Libro 4.....	192
Figura 87. Habilidad de comunicar y argumentar. Libro 4.....	193
Figura 88. Habilidad de resolver problemas. Libro 4	194
Figura 89. Gráfico circular. Estudios autores libros de textos	196
Figura 90. Aplicación logaritmos. Logaritmos-Música. Libro 1	230
Figura 94. Aplicaciones logaritmos. Logaritmo-Medicina. Libro 1	231
Figura 91. Aplicación logaritmos. Logaritmos-Ciencias. Libro 1	231
Figura 96. Aplicaciones de logaritmos. Logaritmos-Medicina. Libro 2....	232
Figura 97. Aplicación de logaritmos. Logaritmos-Música. Libro 2	233
Figura 99. Aplicación logaritmos. Logaritmo-Astronomía. Libro 2	234

1 **Capítulo I: Planteamiento del problema**

1.1 **Definición del tema**

Desde la Constitución chilena de 1833 – que consagró la educación como una función del Estado – hasta la actualidad, la educación en territorio nacional ha debido enfrentar diversos cambios, con la necesidad de satisfacer las necesidades sociales y culturas a lo largo del tiempo. (Iglesias, 2017)

Ahora bien, los libros de textos - elaborados y distribuidos por el Ministerio de Educación (MINEDUC, en adelante) desde el año 2016 como consecuencia de los cambios sociales y educativos en Chile, también ha sufrido cambios, precedidos ya sea por reformas o ajustes curriculares, o también por cambios en el programa de estudio, entre otras cosas. Y si bien estos cambios vienen dados por la necesidad de adaptarse a las necesidades de la sociedad de la información, también pueden traer diversos errores o sesgos propios del ser humano. Bajo esta premisa, es preciso considerar que estos textos se encuentran constantemente en evaluación por la sociedad investigadora, observando si el traspaso del saber sabio al saber enseñado plasmado en los textos es adecuado para el aprendizaje de los estudiantes de dicho nivel, considerando errores, el enfoque a utilizado para el proceso

enseñanza-aprendizaje y la congruencia entre lo planteado en el texto versus lo que se espera esbozar por el programa de estudio, entre otras cosas.

Es por ello que la investigación a desarrollar se basará en analizar la calidad que poseen estos libros de texto, específicamente en el tema de logaritmos, siendo este un tema de mucho interés, tanto por su evolución histórica y aplicación, como también por la abstracción del término, causal por la que en muchas ocasiones se dificulta su aprendizaje.

1.2 Planteamiento del problema

La participación de los textos escolares a la hora de incurrir en el proceso de enseñanza-aprendizaje resulta clave para la ejecución de este (Remillard, 2000, como lo citó Vásquez y Alsina, 2015), y es que, más allá de la opcionalidad que pueda disponer el docente a la hora de su utilización en el aula de clases, estos se han convertido en los responsables de mediar las directrices curriculares, entre el currículum escrito y el trabajo del docente en el aula (Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y López-Martín, 2015; López, Guerrero, Carrillo y Contreras, 2015; Vásquez y Alsina, 2015). De igual forma, puede resultar una herramienta útil para el estudiantado en su proceso de adquisición de conocimientos, ya que este debería proporcionar diversas explicaciones que permitan al educando profundizar en su aprendizaje de manera autónoma, evidenciando claramente las relaciones entre teorías, conceptos y hechos propios de la matemática. (López et. al., 2015)

Sin embargo, puede existir cierta discordancia entre lo planteado en los libros de textos y lo estrictamente matemático. Para ello es importante analizar estos, con el fin de comprobar si es que la herramienta entregada a los estudiantes en Chile puede provocar errores epistemológicos o verificar cuál enfoque de aprendizaje es el predominante, o bien, observar si el texto

escolar permite desarrollar las cuatro habilidades planteadas en las bases curriculares, todo esto al momento de la apropiación cultural del estudiante con este instrumento. Cabe mencionar que los profesionales de la educación deben tener una mirada crítica hacia estos libros, con el fin de evitar que ocurra la situación planteada anteriormente, proporcionando la información correcta al estudiante.

1.3 Justificación del problema

El tratamiento de los logaritmos, según la visión general, ha sido uno de los tópicos matemáticos considerado como un contenido difícil dentro de la comunidad educativa. Datos como los entregados por el SIMCE 2017, en donde se da cuenta que más del 50% de los estudiantes de segundo año de Enseñanza Media no han consolidado la comprensión de la definición y lo que representan cada uno de los términos de un logaritmo, además que en la relación entre logaritmos y potencias, no son capaces de identificar la potencia que se asocia a un determinado logaritmo (Agencia de Calidad de la Educación, 2017), demuestra que es un concepto que complica a gran parte de la población estudiantil. Ahora bien, los factores que pueden explicar el rendimiento académico son de diversa índole, internos o externos al sistema educativo, y no pueden reducirse simplemente a las características del currículum. Sin embargo, es innegable que las definiciones curriculares abren o cierran oportunidades de aprendizaje para el estudiantado. (Uribe y Ortiz, 2014)

Es importante destacar que, en Chile, el currículum escolar responde a un modelo pedagógico por objetivos, que esencialmente responde a un

enfoque positivista de la educación, de modo que en cada asignatura disciplinar el docente tiene una lista de objetivos de aprendizaje (OA, en adelante) que desarrollar con sus estudiantes. Al resultado de este proceso se evaluará con una calificación, asignando una nota a cada estudiante (Mujica-Johnson, 2020). A modo de asegurar la calidad de la educación por nivel, el MINEDUC establece las bases curriculares, actualizadas el año 2016 (Ministerio de educación, 2015), las cuales disponen los OA a desarrollar por todos los centros educativos en el país, ya que cuentan con los contenidos mínimos y obligatorios que deben ser abordados por el docente en su respectivo nivel. El Consejo Nacional de Educación (CNED, de aquí en adelante) señala lo siguiente sobre las bases curriculares:

“Las Bases Curriculares establecen Objetivos de Aprendizaje (OA) que definen los desempeños mínimos que se espera que los estudiantes logren en cada asignatura y nivel de enseñanza. Los objetivos integran habilidades, conocimientos y actitudes que se consideran relevantes para que niños, niñas y jóvenes alcancen un desarrollo armónico e integral, que les permita enfrentar su futuro con las herramientas necesarias y participar de manera activa y responsable en la sociedad.”

(s.f)

En base a esto, también es importante señalar que existe un Programa de Estudio impulsado por el MINEDUC, el cual entrega directrices y orientaciones de cómo abordar los contenidos, planteando diversos indicadores de evaluación asociados al OA a trabajar. Estos entregan cierta flexibilidad al trabajar, solo siendo obligatorios para aquellos establecimientos que no hayan diseñado su propio programa de estudio. El CNED señala lo siguiente:

“Los programas de estudios ayudan a organizar y orientar el trabajo pedagógico del año escolar, proponiendo al docente un ordenamiento de los Objetivos de Aprendizaje (OA) determinados en las Bases Curriculares. Constituyen una orientación acerca de cómo secuenciar los OA, cómo combinarlos entre ellos, y cuánto tiempo destinar a cada uno durante el año”. (Consejo Nacional de Educación, s.f)

Como señala el MINEDUC (s.f) Estos objetivos de aprendizaje plasmados en las bases curriculares tienen como finalidad el definir los aprendizajes que cada individuo debiera lograr en toda su trayectoria por el sistema escolar. Es importante señalar que a partir de los OA se conjugan

otros elementos, como lo son, las Habilidades, las Actitudes y los Conocimientos. (MINEDUC, s.f)

Cuando hablamos de habilidades, el MINEDUC define estas como “Capacidades para realizar tareas y solucionar problemas con precisión y adaptabilidades, pudiéndose desarrollar en diversas áreas” (MINEDUC, 2015, p. 22). Además, en matemáticas “[...] tiene como propósito formativo el desarrollo de habilidades (resolver problemas, modelar, representar, argumentar y comunicar) para potenciar el pensamiento y el razonamiento matemático.” (MINEDUC, 2017)

Por este motivo, los libros de texto deben ser capaces de plasmar lo que el Ministerio de Educación busca implementar con los OA y los elementos (Habilidades, Actitudes y Conocimientos) que estos intentan desarrollar. La importancia de los libros de texto radica en que estos son mediadores entre el currículum prescrito (bases curriculares y programa de estudio) y el implementado (enseñanza efectiva de los docentes en el aula), es decir, que desarrollan las ideas del primero y las transforman en propuestas de actividades pedagógicas destinadas a los estudiantes. Valverde *et al.* (2002).

Siguiendo con esto mismo, el currículum aprendido, es decir, lo que efectivamente aprenden los estudiantes, se encuentra en función del currículum prescrito y el implementado, además de otros factores. (Como lo citan Uribe y Ortiz, 2014). Es por ello que resulta relevante estudiar el cómo es el tratamiento del contenido y el desarrollo de habilidades en los libros de texto.

El Ministerio de Educación a modo de responder a las necesidades actuales de la sociedad, ha comenzado a promover un aprendizaje integral para los estudiantes, orientando la educación a un desarrollo moral, intelectual, artístico, espiritual y físico de la juventud chilena, atendiendo las necesidades biológicas, afectivas y sociales, en cada caso (Ley 18.962, 1990). Lo anterior presupone que la educación en Chile se aleje del paradigma del conductismo - el cual se centra más en la conducta del individuo para adquirir un conocimiento - dando paso a un enfoque más constructivista, el cual parte del supuesto en que los estudiantes – a través de su propio quehacer – adquieran aprendizajes significativos a través de su experiencia (Cox, 2006).

Para analizar estas problemáticas, se estudiaron diversos libros de textos, desde el año 2016 al año 2023, para observar los diversos errores que estos puedan presentar a nivel de contenido, el enfoque de aprendizaje, para

identificar si efectivamente se acerca a uno constructivista en su totalidad, o si en realidad se acerca más al conductista y comprobar si contribuyen al desarrollo de las habilidades matemáticas.

Todo ello lleva a la siguiente pregunta: ¿Cómo es el tratamiento que se le da al contenido de Logaritmos en los libros de texto promovidos por el MINEDUC?

2 **Capítulo II: OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN**

2.1 Preguntas de investigación

- ¿Cómo presentan el contenido de logaritmos los libros de textos?
- ¿Qué tipo de enfoques de aprendizaje está presente en los libros de texto? Conductista o constructivista
- ¿El libro de texto contribuye a desarrollar las habilidades matemáticas declaradas en las bases curriculares?

OBJETIVO GENERAL

- Analizar libros de textos de segundo año medio en el periodo comprendido entre el 2016 y 2023 en el contenido de logaritmos.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Caracterizar el tratamiento del contenido de logaritmos en los libros de texto de segundo año medio en el periodo comprendido entre el 2016 y 2023.

- Estudiar los enfoques de aprendizaje que se utilizan en los libros de texto de segundo año medio entre los años 2016 y 2023, en el contenido de logaritmos.
- Comparar las habilidades que contribuyen a desarrollar los libros de texto de segundo año medio con las declaradas en las bases curriculares, en el contenido de logaritmos.

3 **Capítulo III. MARCO REFERENCIAL**

3.1 Saber sabio

El licenciado en matemáticas Yves Chevallard introduce el concepto de transposición didáctica “[...] con el fin de enriquecer los procesos de enseñanza y aprendizaje a través de estímulos para la mejor comprensión de los conceptos científicos. (Mora, 2014)

Como señala Mora (2014), Chevallard definía que la transposición didáctica se consigue a partir de un saber sabio para llegar al saber escolar, en donde existe un mediador entre lo que se quiere enseñar y lo que finalmente se enseña, lo cual constituye una relación didáctica entre la enseñanza y el aprendizaje.

Con ello, se define el saber sabio como “[...] un saber especializado; logrado a partir de un conjunto o procedimientos que se llevaron a cabo en algún lugar, espacio y tiempo. Su reconocimiento y la defensa de los valores son sostenidos por una cultura científica [...]” (De Faria, 2006) . Con lo cual el saber sabio vendría a ser todo lo que se ha podido demostrar como

verdadero, siendo la comunidad científica quien lo acredita y asume como tal.

Para efectos de la investigación, el saber sabio corresponde al contenido de logaritmos.

3.1.1 Logaritmos

3.1.1.1. Contexto histórico

Los logaritmos tienen un contexto histórico fascinante y están estrechamente relacionados con el desarrollo de la aritmética y las matemáticas en general. Aquí hay un breve contexto histórico sobre estos explicado por Tapia (2003):

1. John Napier (1550-1617): Matemático escocés que, a principios del siglo XVII, introdujo los logaritmos en su obra "Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio" (Descripción de los maravillosos cánones de los logaritmos), la cual fue publicada en 1614. Su desarrollo fue con la finalidad de facilitar los cálculos aritméticos y reducir la multiplicación y la división a operaciones más simples de suma y resta.

2. Henry Briggs (1561-1630): Matemático inglés que colaboró con Napier para extender y popularizar el uso de los logaritmos. Juntos trabajaron en la creación de tablas logarítmicas para facilitar los cálculos prácticos. Además, propuso el logaritmo en base 10.
3. Desarrollo de las Tablas Logarítmicas: Estas correspondían a un listado extenso de logaritmos para facilitar cálculos manuales, se convirtieron en herramientas esenciales para científicos, ingenieros y matemáticos durante varios siglos. Su utilidad radicaba en simplificar cálculos tediosos, especialmente en campos como la astronomía y la navegación.
4. El desarrollo de la teoría de números y el álgebra en los siglos XVIII y XIX profundizó la comprensión de los logaritmos y su relación con otras ramas de las matemáticas. Además, la invención de las calculadoras mecánicas en el siglo XIX simplificó los cálculos logarítmicos y redujo la dependencia de las tablas logarítmicas impresas.
5. Avances en Matemáticas y Computación: Con el tiempo, los logaritmos se integraron en desarrollos más amplios en matemáticas y ciencias de la computación. La llegada de las computadoras digitales

en el siglo XX hizo que los cálculos logarítmicos fueran más accesibles y rápidos.

Hoy en día, aunque las calculadoras y las computadoras han reducido la necesidad de utilizar tablas logarítmicas en la vida cotidiana, los logaritmos siguen siendo fundamentales en diversas ramas de las matemáticas, la ciencia y la ingeniería. Además, tienen aplicaciones en áreas como la teoría de la información, la criptografía y la resolución de ecuaciones diferenciales.

3.1.1.2. Definición de logaritmo

A partir del documento publicado por Chacón (s.f) se desprende lo siguiente:

Definición: Si b y x son dos números reales positivos, con $b \neq 1$ se dice que:

$$\log_b x = y \Leftrightarrow b^y = x$$

En la expresión $\log_b x$:

- b es la base del logaritmo
- x es el argumento del logaritmo
- La expresión $\log_b x$ se lee: logaritmo base b de x .
- El logaritmo $\log_b x$ representa el exponente al que debe elevarse la base b para obtener el argumento x .

A partir de la definición de logaritmos se deducen las siguientes propiedades de los logaritmos.

3.1.1.3. Propiedades de los logaritmos

A partir del Libro publicado por Gustafson y Frisk (2011) se desprende lo siguiente:

Propiedad 1: Logaritmo de la base

$$\log_b b = 1$$

Demostración:

Por la definición, como $b^1 = b$ entonces $\log_b b = 1$

Propiedad 2: Logaritmo de la unidad

$$\log_b 1 = 0$$

Demostración:

Por la definición, como $b^0 = 1$ entonces $\log_b b = 1$

Propiedad 3: Logaritmo del producto

Si M , N y b son números positivos y $b \neq 1$, entonces

$$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$$

Demostración:

Para demostrar esta propiedad, hacemos $x = \log_b M$ e $y = \log_b N$. Usamos la definición de logaritmos para escribir cada ecuación en forma exponencial.

$$M = b^x \text{ y } N = b^y$$

Entonces $MN = b^x b^y$. Por la propiedad de la multiplicación de potencias de igual base tenemos

$$MN = b^{x+y}$$

Escribimos esta ecuación exponencial en forma logarítmica

$$\log_b MN = x + y$$

Reemplazamos

$$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$$

Propiedad 4: Logaritmo del cociente

Si M , N y b son números positivos y $b \neq 1$, entonces

$$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$$

Demostración:

Para demostrar esta propiedad, hacemos $x = \log_b M$ e $y = \log_b N$. Usamos la definición de logaritmos para escribir cada ecuación en forma exponencial.

$$M = b^x \text{ y } N = b^y$$

Entonces $\frac{M}{N} = \frac{b^x}{b^y}$. Por la propiedad de la división de potencias de igual base

tenemos

$$\frac{M}{N} = b^{x-y}$$

Escribimos esta ecuación exponencial en forma logarítmica

$$\log_b \frac{M}{N} = x - y$$

Reemplazamos

$$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$$

Propiedad 5: Logaritmo de una potencia

Si M , p y b son números positivos y $b \neq 1$, entonces

$$\log_b M^p = p \log_b M$$

Demostración:

Para demostrar esta propiedad, hacemos $x = \log_b M$, escribimos la expresión en forma exponencial y elevamos a ambos lados a la p :

$$M = b^x$$

$$(M)^p = (b^x)^p$$

$$M^p = b^{px}$$

El uso de la definición de logaritmos da

$$\log_b M^p = px$$

Reemplazamos

$$\log_b M^p = p \log_b M$$

Propiedad 6: Cambio de base

Si a , b y x son números reales, entonces

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Demostración:

Si $t = \log_b x$ entonces $b^t = x$

Si $r = \log_a x$ entonces $a^r = x$

Si $s = \log_a b$ entonces $a^s = b$

Empezamos con la última igualdad, que vincula a y b

$$a^s = b$$

Deseamos obtener una nueva expresión en la que esté x

Elevando a la t ambos lados de la última igualdad tenemos

$$(a^s)^t = (b)^t$$

$$a^{st} = x$$

En la expresión anterior ya aparece x y como $a^r = x$

$$(a^s)^t = x = a^r$$

$$a^{st} = a^r$$

$$\text{Entonces } 1 = \frac{a^{st}}{a^r} = a^{st-r}$$

Siendo que $1 = a^0$ por lo que $st - r = 0$

Entonces $st = r$ por lo que $t = \frac{r}{s}$ ($s \neq 0$ pues $b \neq 1$)

Lo que quiere decir que $\log_b x = t = \frac{r}{s} = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

Entonces $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

3.2 Enfoques de aprendizaje.

A medida que pasa el tiempo, cada vez cobra mayor relevancia el estudio del aprendizaje desde la perspectiva del alumnado, quien es finalmente quien otorga significado y sentido a los materiales que procesa y el que decide lo que tiene que aprender, además también de la manera de hacerlo (González, 1997).

Es por ello que resulta relevante ver cómo funcionan los procesos cognitivos presentes en los estudiantes a la hora de aprender un nuevo contenido. Sobre el aprendizaje autores señalan lo siguiente:

“El aprendizaje es el medio que nos permite adquirir habilidades, conocimientos, valores, actitudes y reacciones emocionales. Los psicólogos conciben el aprendizaje de manera diferente sustentándolo en teorías, las mismas que proporcionan explicaciones sobre los mecanismos que subyacen al aprendizaje humano. Por ello el aprendizaje que tiene lugar en educación superior jamás puede dejarse al azar. Mientras mayor sea la comprensión de los factores que influyen en el aprendizaje (principios) y los procesos que subyacen a él (teorías), mayor será la generación de

aprendizajes que facilitarán el éxito a largo plazo en los estudiantes.”
(Figuerola, Muñoz, Vinício y Zavala, 2017, p. 2)

Las teorías de aprendizaje provienen del campo de la psicología, y se define como “constructos ligados entre sí que observan, describen y explican el proceso de enseñanza aprendizaje de las personas y aquello con lo que se piensa que está relacionado en dicho proceso” (Heredia y Sánchez, 2013), con lo cual se encargan de estudiar el como aprende un individuo a través de las estructuras cognitivas de estos.

Flores (s.f) señala que la matemática puede tener dos tendencias en cuanto a su aprendizaje. La primera es la tendencia conductual o conductivista, la cual considera es aprender a cambiar conductas e insistir en destrezas de cálculo, y mediante destrezas simples se llegue a aprender secuencias de destrezas más complejas. Por otro lado, tenemos las tendencias cognitivas o constructivistas, las cuales se originan partiendo de la resolución de problemas o de la realización de tareas más complejas.

Con esto dicho, se realizará un estudio sobre las teorías conductista y constructivista en la educación.

3.2.1 Enfoque conductista.

Corriente psicológica inaugurada por John B. Watson (1878-1958). Otros psicólogos que siguieron esta teoría son Iván Pavlov (1849-1936), Burrhus F. Skinner (1904-1990) y Edgard L. Thorndike (1874-1949). (Gallo, 2021, p. 29)

El conductismo se basa en el comportamiento del ser humano, es decir, controlar la conducta a través del condicionamiento, teoría que puede ser aplicada en educación.

Carlos Gallo (2021) señala que el conductismo es una corriente de la psicología que defiende la utilización de métodos netamente experimentales, para observar el comportamiento observable (la conducta) considerando al entorno como un conjunto estímulo-respuesta.

El conductismo se basa en los estudios mediante el condicionamiento, mediante una secuencia de estímulo-respuesta y no considera necesarios procesos mentales superiores para la comprensión, el mecanismo central de aprendizaje en esta corriente es el asociacionismo (Sarmiento, 2004).

Según Santrock (2006), en el conductismo podemos encontrar dos tipos de condicionamiento:

- Condicionamiento Clásico: es un tipo de aprendizaje en el que un organismo aprende a conectar o asociar estímulos.
- Condicionamiento Operante: Es una forma de aprendizaje donde las consecuencias de la conducta producen cambios en la probabilidad de su recurrencia.

Dentro de los programas de enseñanza se encuentra los de ejercitación y los tutoriales, en donde son predominantes las tareas de aprendizaje memorístico y algorítmico, pero no fomentan la comprensión. En estos los individuos aprenden mediante un proceso de ensayo-error, por medio de refuerzos (positivos o negativos) y utilizando la repetición de estrategias. (Marqués y Sancho, 1987, citado por Sarmiento, 2004).

3.2.1.1. Conductismo en educación

Para entender la influencia de la corriente conductivista en educación se deben abordar los condicionamientos utilizados por este modelo, los cuales son planteados en el escrito de Posso, Barba y Otáñez (2020) de la siguiente manera:

“Según Sarason (1981) el condicionamiento clásico es una forma de aprendizaje que se da mediante la asimilación de un estímulo como

primera instancia, por ejemplo, en el ingreso del docente al aula provoca que los estudiantes se pongan inmediatamente de pie, en espera de que les ordenen sentarse, este condicionamiento suplanta el saludo verbal normalmente usado. En palabras de Granda (2016) el condicionamiento clásico se caracteriza por las reacciones instintivas que no son controladas por el individuo y se producen por percepción sensorial.”

Por lo anterior, el condicionamiento clásico de la corriente conductivista orienta la educación de modo que los estudiantes solo son receptores y repetidores, sin modificar ni adaptar ninguno de los detalles del conocimiento entregado.

El enfoque conductista en la educación convierte al profesor en la principal figura en el proceso enseñanza-aprendizaje, debido a que es el único quien posee el conocimiento. Se plantea el conocimiento transmitido por el docente como una verdad absoluta, la cual no puede ser objetada por los estudiantes y debe ser aprendida sin modificaciones ni aportes. El docente determina que debe aprender el estudiante, moldeando al alumno al deseo del profesor, cumpliendo así con el objetivo del aprendizaje conductista.

Cuando nos enfocamos netamente en la educación matemática a trabajar con estudiantes de enseñanza media, el enfoque conductista considera la matemática como un conjunto de técnicas y datos que recordar (Vásquez, s.f., p. 57), en donde la memorización y repetición tiene un rol clave, por lo que en general, el profesor al aplicar el condicionamiento clásico, entrega una alternativa para llegar desarrollar algún problema, es decir un algoritmo, el cual los estudiantes deben repetir sin opción de modificar el procedimiento, ni buscar otros caminos para encontrar la respuesta, ignorando la diversidad y los estilos de aprendizaje que se pueden encontrar en un aula de clase.

3.2.2 Constructivismo

Es posible encontrar el origen del constructivismo en posturas tales como las de Vico, quien afirma que el ser humano puede conocer hasta donde sus estructuras cognitivas se lo permitan y Kant, quien atribuye la importancia a tres componentes en la construcción del conocimiento sujeto-objeto-manifestaciones fenomenológicas (Universidad San Buenaventura, 2015), teorías las cuales fueron planteadas en el siglo XVIII. Incluso, es posible encontrar esta ideología mucho antes, con los presocráticos y sofistas de la Antigua Grecia, y es que, el planteamiento constructivista no ha sido generado en un solo acto, hay muchas ideas que, a través de la historia han permitido moldear su configuración final. (Araya, Alfaro y Andonegui, 2007)

A partir de sus pensamientos y los de otros autores a lo largo de la historia, se apoyó la idea de que el ser humano es un activo constructor de su realidad, con lo cual, se establecieron algunos principios básicos para el constructivismo cuyo resumen se plantea a continuación:

“El conocimiento es una construcción del ser humano: cada persona percibe la realidad, la organiza y le da sentido en forma de constructos, gracias a la actividad de su sistema nervioso central, lo que contribuye

a la edificación de un todo coherente que da sentido y unicidad a la realidad.

Existen múltiples realidades construidas individualmente y no gobernadas por leyes naturales: cada persona percibe la realidad de forma particular dependiendo de sus capacidades físicas y del estado emocional en que se encuentra, así como también de sus condiciones sociales y culturales.” (Ortiz, 2015)

Desde el constructivismo, se puede pensar en el proceso enseñanza-aprendizaje como “una interacción dialéctica entre los conocimientos del docente y los del estudiante, que entran en discusión, oposición y diálogo, para llevar una síntesis productiva y significativa: el aprendizaje” (Ortiz, 2015).

Por lo tanto, podemos pensar en el constructivismo como una teoría en donde se le entrega el protagonismo al estudiante, el cual es el encargado de construir su propio conocimiento, dándole importancia a las experiencias nuevas que se van adquiriendo para construir procesos más complejos que le permitan asimilar nuevos aprendizajes de forma más específica.

Se pueden encontrar diversas formas y posturas sobre la definición de aprendizaje, una de estas, las expone Ortiz (2015) quien en su investigación señala que Pulgar (2005), entiende el aprendizaje como: “Proceso mediante el cual una persona adquiere destrezas o habilidades prácticas (motoras e intelectuales), incorpora contenidos formativos o adopta nuevas estrategias de conocimiento y/o acción” (p. 19)

Diversos autores han aportado al enfoque constructivista, ampliando así la teoría que sustenta este tipo de aprendizaje, dentro de esta revisión abordaremos los siguientes conceptos ligados a este enfoque:

- Desarrollo cognitivo
- Aprendizaje significativo
- Aprendizaje por descubrimiento
- Currículo en espiral

3.2.2.1. **Desarrollo cognitivo:**

El desarrollo cognitivo es el proceso mediante el cual el ser humano va adquiriendo conocimiento a través del aprendizaje y la experiencia. Quién más aporta a este concepto de la teoría constructivista es el psicólogo Suizo Jean Piaget, quien propone la teoría cognitiva o evolutiva, debido a que se

trata de un proceso paulatino y progresivo que avanza por distintas etapas de desarrollo cognitivo, conforme el niño madura física y psicológicamente.

El aprendizaje se realiza gracias a la interacción de dos procesos: asimilación y acomodación (Papalia, Wendkos y Duskin, 2007). El primero se refiere al contacto que el sujeto tiene con los objetos del mundo a su alrededor, es decir, a su interacción con el ambiente. El segundo se refiere a los aspectos que han sido asimilados y se modifican para adaptarse a una nueva información, contribuyendo a la construcción de nuevas estructuras de pensamientos, lo cual favorece a una mejor adaptación con el medio. (Ortiz, 2015, p. 98). Es por ello por lo que Piaget sostiene que el error no debe verse como un fracaso, sino como una oportunidad de aprendizaje y de integración con el entorno.

Quien resume la teoría de Piaget es Robbie Case (1989) exponiendo los siguientes puntos:

- a) El desarrollo cognitivo puede comprenderse como la adquisición sucesiva de estructuras lógicas cada vez más complejas que subyacen a las distintas áreas y situaciones que el sujeto es capaz de ir resolviendo a medida que crece.

- b) La teoría de Piaget ha permitido mostrar que en el desarrollo cognitivo existen regularidades y que las capacidades de los alumnos no son algo carente de conexión, sino que guardan una estrecha relación unas con otras.
- c) En este sentido, las adquisiciones de cada estadio, formalizadas mediante una determinada estructura lógica, se incorporan al siguiente, ya que dichas estructuras poseen un orden jerárquico.
- d) La capacidad de comprensión y aprendizaje de la información nueva está determinada por el nivel de desarrollo cognitivo del sujeto.
- e) Si existe demasiada discrepancia entre la información nueva y los esquemas del sujeto, es que éste no podrá asimilar la información que se le presenta.
- f) Lo que cambia a lo largo del desarrollo son las estructuras, pero no el mecanismo básico de adquisición de conocimiento. (Como lo cita Serna, 2007, p. 25-26)

En resumen, podríamos decir, que el desarrollo cognitivo hace referencia a que el individuo a medida que crece va adquiriendo estructuras lógicas cada vez más complejas, a raíz de diversas experiencias que el sujeto ha vivido. Ha medida que se adquieren nuevas experiencias en cada etapa, las

estructuras lógicas cambian, permitiendo al individuo asimilar nueva información cada vez más compleja.

3.2.2.2. Aprendizaje significativo:

Hace referencia a relacionar conocimientos previos con nueva información. Quién más abarca esta teoría es el psicólogo estadounidense David Ausubel, quien plantea que el aprendizaje se facilita cuando la nueva información se incorpora a la estructura cognitiva del estudiante y, en consecuencia, ocurre un proceso de asimilación cognoscitiva, en el que la nueva información se ve relacionada con los conocimientos previos. En este sentido, el rol que debe cumplir la educación es el de facilitador entre los conocimientos y los estudiantes a partir de actividades planificadas y organizadas para una correcta asimilación de los nuevos conocimientos y su asociación a conocimientos previos. (Garcés, Montaluisa y Salas, 2018, p. 234)

De esta forma lo que propone Ausubel es orientar la tarea educativa propuesta por los docentes y trabajar desde una base en la cual los educandos ya vienen con una serie de experiencias y conocimientos que afectarán a su

aprendizaje, aprovechando así su estructura cognitiva para construir nuevos conocimientos.

Para entender el planteamiento de David Ausubel (1983) y cuando ocurre el aprendizaje significativo, se presenta el siguiente enunciado:

“[...] el aprendizaje significativo ocurre cuando una nueva información “se conecta” con un concepto relevante “subsunsor” pre existente en la estructura cognitiva, esto implica que, las nuevas ideas, conceptos y proposiciones pueden ser aprendidos significativamente en la medida en que otras ideas, conceptos o proposiciones relevantes estén adecuadamente claras y disponibles en la estructura cognitiva del individuo y que funcionen como un punto de “anclaje” a las primeras (p. 14).” (Citado por Garcés, Montaluisa y Salas, 2018, p. 234)

Ausubel resume este hecho en el epígrafe de su obra de la siguiente manera “Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, enunciaría este: El factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese consecuentemente”. (Ausubel, 1983, citado por Garcés, Montaluisa y Salas, 2018, p. 234).

A grandes rasgos, la persona quien logra relacionar conocimientos nuevos con información que ya posee en su estructura cognitiva, está logrando construir un aprendizaje significativo y, además, reestructurar sus conocimientos, para así asociar más elementos a futuro.

3.2.2.3. Aprendizaje por descubrimiento:

Cuando hablamos de aprendizaje por descubrimiento, se habla que el individuo descubra por sí mismo el conocimiento, ya que esto conlleva a una investigación que resulta significativa para el estudiante, conectando lo aprendido con conocimientos previos, y siendo capaz de aplicar lo experimentado en nuevas situaciones.

Quien propone esta teoría del aprendizaje por descubrimiento es Jerome Bruner, a lo que Sprinthall y Sprinthall (1966), además de Santrok (2004) se refieren a ella de la siguiente manera:

“Bruner (1966) plantea el concepto de aprendizaje por descubrimiento para alcanzar un aprendizaje significativo, sustentado en que a través del mismo los maestros pueden ofrecer a los estudiantes más oportunidades de aprender por sí mismos. Así pues, el aprendizaje por descubrimiento es el aprendizaje en el que los estudiantes construyen

por sí mismos sus propios conocimientos, en contraste con la enseñanza tradicional o transmisora del conocimiento, donde el docente pretende que la información sea simplemente recibida por los estudiantes” (Sprinthall y Sprinthall, 1996; Santrok, 2004, citado por Eleizalde, Parra, Palomino, Reyna, Trujillo, 2010).”

Con ello, Bruner señala que es posible generar un aprendizaje significativo en estudiantes a través de una nueva estrategia, la cual incita a los estudiantes a instruirse al conocimiento por sí mismos, siendo el docente un guía en este proceso de descubrimiento.

Baro (2011) en su artículo señala que Bruner, al dar a conocer su teoría, plantea que existen tres tipos de descubrimiento, estos son:

- Descubrimiento inductivo: implica la colección y reordenación de datos para llegar a una nueva categoría, concepto o generalización.
- Descubrimiento deductivo: El descubrimiento deductivo implicaría la combinación o puesta en relación de ideas generales, con el fin de llegar a enunciados específicos, como en la construcción de un silogismo.

- Descubrimiento transductivo: En el pensamiento transductivo el individuo relaciona o compara dos elementos y advierte que son similares en uno o dos aspectos. (p. 5)

De este modo, el estudiante no solo tiene un camino para descubrir su conocimiento, sino que puede desde lo particular llegar a algo más general (inductivo), o desde ideas general llegar a otras más específicas (deductivo), o bien, comparar y encontrar similitudes entre dos elementos para sacar sus conclusiones (transductivo).

Por último, Baro (2011) señala que es necesario hacer restricciones para que se produzca un aprendizaje por descubrimiento:

- El ámbito de búsqueda debe ser restringido, ya que así el individuo se dirige directamente al objetivo que se planteó en un principio.
- Los objetivos y los medios estarán bastante especificados y serán atractivos, ya que así el individuo se incentivará a realizar este tipo de aprendizaje.
- Se debe contar con los conocimientos previos de los individuos para poder así guiarlos adecuadamente, ya que si se le presenta

un objetivo a un individuo del cual este no tiene la base, no va a poder llegar a su fin.

- Los individuos deben estar familiarizados con los procedimientos de observación, búsqueda, control y medición de variables, o sea, tiene el individuo que tener conocimientos de las herramientas que se utilizan en el proceso de descubrimiento para así poder realizarlo. (p. 6)

Estas restricciones permiten asegurar que exista un aprendizaje por descubrimiento, al acotar la tarea de la investigación, llamar la atención de los estudiantes, asegurarse de que estos posean conocimientos relevantes para enfrentar lo contingente, además de dar a conocer diversas herramientas útiles a la hora de descubrir un nuevo conocimiento, como lo es la investigación.

3.2.2.4. Currículo en espiral:

El currículo en espiral plantea la idea de que el conocimiento no ocurre de forma lineal, sino más bien, de forma progresiva, lo que permite conectar nuevos conocimientos previos con un nuevo conocimiento, dándole sentido a los contenidos a trabajar.

Este concepto surge a partir de Bruner, al momento de estudiar cómo deben ser diseñados los programas de estudio para una correcta asimilación de los conocimientos por parte de los estudiantes:

“[...] En este sentido Bruner (1988) plantea que el alumno no debe hablar de física, historia, matemáticas sino hacer física, historia o matemáticas. El conocimiento verdaderamente adquirido es aquel que se redescubre. Un currículo se basa en pasos sucesivos por un mismo dominio de conocimiento y tiene el objetivo de promover el aprendizaje de la estructura subyacente de forma cada vez más poderosa y razonada; este concepto se ha dado en llamar currículo en espiral” (Guilar, 2009)

Es decir, para Bruner, el conocimiento debe ser redescubierto para ser verdaderamente aprendido por parte de los estudiantes, para ello, el currículo debe promover una estructura adecuada para que los estudiantes aprendan nuevos conocimientos, a la vez que se trabaja con los conocimientos previos, haciendo una conexión que permite un aprendizaje significativo.

3.3 Libros de texto

Al hablar de los libros de texto, es posible afirmar que gran parte de la población es capaz de reconocerlos, ya que es distribuido por el Ministerio de Educación a lo largo y ancho del país, y se produce desde inicios de la escolaridad, es decir en primer ciclo, hasta fines de enseñanza media, además, es fácilmente reconocible por su portada y la clara indicación sobre la especialidad a trabajar.

Bernardo Gómez Alfonso (2000), catedrático de Universidad de nacionalidad española, define los libros de texto en su país de la siguiente manera:

“El libro de texto es una publicación especializada, con identidad propia, que nace en respuesta a las necesidades del sistema general y público de la enseñanza y del modelo de enseñanza simultánea. Es un libro fácilmente reconocible por su estructura y porque está rotulado claramente indicando la materia que trata y a quién va dirigido.” (p. 77)

En nuestro país la realidad no es muy distinta, ya que cumple con cada una de las características detalladas por Gómez, siendo un texto escrito por

académicos sobre una materia en particular, y que justamente responde a la necesidad del estado de hacer de la educación un sistema general, regido mediante los objetivos propuestos por las bases curriculares y los programas de estudio de las diversas asignaturas.

Vidal (2010) afirma que, en Chile, se considera como el inicio de la confección de libros de texto al año 1910, caracterizándose en ese entonces porque en su mayoría los autores son profesores que escriben para sus estudiantes, sin ser textos oficiales con contenidos específicos a seguir, sino más bien como algo que el docente prestaba al estudiante para profundizar en su aprendizaje. Ya para el año 1981, en particular, como consecuencia de la Reforma de la Educación del mismo año, la función del libro de texto obtiene una nueva trascendencia en el papel de la educación subvencionada por el estado, tomando ahora un rol clave en el proceso enseñanza-aprendizaje. Por ello, el año 1990 el Ministerio de Educación ha implementado una política de entrega gratuita de textos a los docentes y a los estudiantes de los colegios subvencionados, tanto municipales como privados, con el objetivo de facilitarles el acceso a este recurso que debería incidir en la calidad de la calidad de los aprendizajes y en la equidad de su distribución social. (Soaje y Orellana, 2013)

La presencia del libro de texto es uno de los factores que ha demostrado tener una influencia positiva en el rendimiento escolar de los estudiantes de los estudiantes (Fontaine e Izaguirre, 1997), y que es importante el hecho de que se incentive el uso de este, ya que se ha demostrado que los educando aprenden más usando textos de estudios que sin ellos, siempre en consideración de las habilidades y la calidad que presentan los profesores quienes imparten la asignatura y el uso que se le otorga a los textos escolares. (Ortúzar, s.f)

Siguiendo con la importancia del libro de texto Soaje y Orellana (2013) afirman lo siguiente:

“[...] Nadie duda de que se trata de un instrumento clave tanto para alumnos como para profesores, al colaborar con el proceso de enseñanza y aprendizaje como mediador del conocimiento, presentando de forma clara y precisa una selección de contenidos que están acordes con los planes de estudio vigentes, y que en el último término constituyen un conjunto de conocimientos, habilidades y valores que la sociedad considera indispensable transmitir a las generaciones más jóvenes”. (p. 11-12).

Por lo que no cabe duda, de que un buen libro de texto permitirá profundizar el proceso de enseñanza y aprendizaje, siendo una herramienta útil tanto para docentes y estudiantes en la construcción y asimilación de conocimientos.

Pero es importante destacar que, para obtener aquellos resultados, el libro de texto debe tomar en consideración ciertos elementos a la hora de construir un libro de texto de calidad. En 2007, Ingibjörg Ásgeirsdóttir (2007) presenta una serie de criterios que funcionan como indicadores de un buen texto escolar:

- En primer lugar, es relevante que cumpla con las normativas legales vigentes y con los requerimientos del currículum nacional.
- En segundo lugar, en la introducción se deben plantear los objetivos de modo preciso y especificar a que público está dirigido, el cual no solo se compone de los alumnos que lo van a utilizar sino también de los adultos que van a colaborar con él en el proceso de aprendizaje, tales como padres o hermanos mayores; luego, debe presentar también la estructura general del

libro y de los materiales anexos al mismo, como así también los fundamentos pedagógicos que subyacen a dicho texto.

- En tercer término, se debe considerar que el lenguaje, los conceptos utilizados, la presentación del material y el tratamiento del contenido estén adecuados a la madurez del lector al cual apunta el texto.
- En cuarto lugar, el libro debiera incluir las investigaciones más recientes dadas en el área de estudio al que está dedicado (Como lo citan Soaje y Orellana, 2013, p. 13).

Por lo que un texto de calidad debe ser capaz de cumplir con estos criterios propuestos, los cuales se enmarcan en seguir lo que dictan los Programas Ministeriales.

Ahora bien, Vidal (2010) expone lo siguiente sobre la importancia del libro de texto en nuestro país:

“La importancia que se le da al del libro de texto actualmente en nuestro país está relacionada entre otras cosas, con entregar las directrices para la preparación de las pruebas SIMCE y PSU, como una extensión o puesta en marcha de las actividades genéricas, contenidos

mínimos y aprendizajes esperados que aparecen redactados en los Programas Ministeriales”. (p.2)

Con ello podemos hacer una radiografía sobre lo que buscan los libros de texto en Chile, llevar a cabo lo propuesto por el Programa de Estudio y las Bases Curriculares, pero entregando orientaciones para preparar pruebas estandarizadas, como lo son el SIMCE y la PSU.

Según el Programa de Modernización de Textos Escolares, los estudiantes de todos los niveles educacionales no cuentan con textos escolares dotados de suficiente calidad que les permiten acceder a un aprendizaje significativo. Diversos autores como por ejemplo Horsley (2007) postularon que los textos escolares han evolucionado de acuerdo con las teorías de aprendizaje predominantes, partiendo desde un enfoque conductista, orientado hacia la transmisión de conocimientos, hasta el constructivista en donde se evidencia el dinamismo dentro del aprendizaje.

Ahora, considerando la crisis de salud que vivimos durante los últimos años, existen numerosos autores que revelan la importancia de los textos escolares en estos contextos, ya que, con el cierre de las escuelas, existen

muchos estudiantes que no poseen otra forma de fomentar su aprendizaje que no sea mediante la utilización de textos escolares (De Hoyos, 2020).

Según el libro “El futuro en riesgo: Nuestros textos escolares”, el cual comparo la calidad de los textos escolares utilizados en Chile y en el extranjero, confirmaron la importancia de los textos escolares durante el proceso educativo, además se evidenció la baja calidad de los textos utilizados en Chile. Las falencias encontradas se referían "a aspectos sustanciales de un texto de estudio, tales como la limitada e irrelevante información entregada y la pobre clarificación de objetivos, entre otros". Si bien este estudio data de 1997, la realidad no ha cambiado mucho. Con el paso de los años se ha aumentado considerablemente la inversión en textos escolares y su cobertura (MINEDUC, 2019)

3.4 Habilidades en Matemática

El currículum nacional corresponde a una construcción que se define como un proceso continuo y acumulativo, que se articula de manera sistémica con las experiencias anteriores que el sistema escolar ha internalizado, además incorpora actualizaciones e innovaciones que ocurren de manera permanente en materias pedagógicas. (Ministerio de Educación, 2015).

Las bases curriculares de 2013 y 2015 (Decreto Supremo N° 614 y N° 369 respectivamente) permitieron la elaboración por parte de la Unidad de Currículum y Evaluación del Ministerio de Educación de los programas de estudio para los niveles desde educación parvularia hasta segundo medio, de los cuales el que de nuestro interés (2° medio) entra en vigor el año 2018.

De acuerdo con la Ley General de Educación del 2009 (Ley N°20.370), las bases curriculares constituyen el documento principal del currículum nacional y cumple la misión de ofrecer una base central común para todo el país, mediante Objetivos de Aprendizaje establecidos para cada curso o nivel. Además, se reconoce que esta permite ser complementada por cada establecimiento de acuerdo con sus necesidades y a las características de su proyecto educativo. A partir de estas bases curriculares, los establecimientos

pueden desarrollar sus propios planes y programas o utilizar los que pone a disposición el Ministerio de Educación.

El papel crucial de la enseñanza de las matemáticas es desarrollar las habilidades que sean capaces de desarrollar el pensamiento matemático con el fin de comprender y producir información representada en términos matemáticos. Las habilidades en las que la asignatura se enfoca son: Representar, Modelar, Resolución de problemas, Argumentar y Comunicar (Ministerio de Educación, 2015). Estas serán detalladas a continuación:

3.4.1 Representar

Según las Bases Curriculares (2015) esta habilidad consiste en que las y los estudiantes sean capaces de transitar entre distintos niveles de representación, utilizando situaciones de la vida cotidiana y posteriormente traducirlo a lenguaje formal o utilizando símbolos matemáticos para resolver problemas o explicar situaciones completas, los distintos niveles de representación corresponde a concreto, pictórico y simbólico. En su desarrollo, las metáforas, representaciones y analogías juegan un rol importante, de esta manera se da la oportunidad para que las y los estudiantes construyan sus propios conceptos matemáticos, esta habilidad les permite ligar diversos niveles de

representación (concreto, pictórico y simbólico). Además, dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje posee grandes ventajas ya que permite relacionar el conocimiento intuitivo con su explicación formal.

3.4.2 Modelar

Esta habilidad tiene como objetivo de lograr que las o los estudiantes construyan una versión simplificada que consiste en un modelo físico o abstracto de un sistema que opera en la realidad, en donde este es capaz de adoptar patrones claves y expresarlos utilizando símbolos matemáticos, de esta forma la o el estudiante captura parte de las características de una realidad que le permite estudiarla, modificarla y/o evaluarla. De esta manera, descubren regularidades o patrones que los ayudan a expresar sus características con un lenguaje más formal (Ministerio de Educación, 2015).

3.4.3 Resolución de problemas

El Ministerio de Educación señala, a través de sus bases curriculares (2015), que el desarrollo de esta habilidad implica el dominio de habilidades anteriores: representar, modelar, argumentar y comunicar; además, precisa de la creatividad del estudiante para buscar y probar diversas soluciones. Con

esto es posible que las y los estudiantes descubran la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y conectarlas con otras asignaturas.

Esta habilidad, por lo tanto, se desarrolla cuando el estudiantado logra solucionar una problemática, contextualizada o no, sin que se haya indicado el procedimiento que debe realizar, demandando del estudiante estrategias y capacidad de comprobar y comunicar sus resultados, mediante la experimentación, elección, invención y comparación de métodos de resolución, además de la posterior evaluación de soluciones.

De este modo, la habilidad de resolución de problemas fomenta el pensamiento crítico, la reflexión y la creatividad de las y los estudiantes.

3.4.4 Argumentar y Comunicar

Para comprender el razonamiento que existe detrás de cada problema resuelto o concepto comprendido es necesario que se desarrolle la habilidad de expresar las ideas con claridad además es fundamental que las y los estudiantes desarrollen una actitud reflexiva y abierta al debate fundamentando de manera apropiada. Se torna importante que sean capaces de describir, explicar y discutir sus soluciones con sus pares, de esta manera

logren corregirse mutuamente. Así, les permite establecer la diferencia entre una argumentación intuitiva y una matemática y que frente a diversas situaciones sean capaces de plantear conjeturas, hipótesis, ejemplos y afirmaciones condicionadas (Ministerio de educación, 2015).

3.5 Educación Chilena

3.5.1 Reformas Educativas en Chile

El sistema escolar chileno históricamente ha sido considerado un sistema centralizado, en donde el estado lo financiaba y administraba, de esta manera, se ofrece educación gratis a todo aquel que lo solicite, además es el encargado de determinar sus orientaciones y metas (Vidal, 2009).

Las reformas educativas son el principal agente de cambio en el currículum chileno, estas tienen como uno de sus propósitos centrales que las escuelas, colegios y liceos brinden educación de calidad e inclusiva, que promueva los aprendizajes y formación integral del estudiantado. (MINEDUC, 2018) Estos objetivos quedan sujetos a una mayor eficiencia administrativa, a la inyección de recursos por parte de privados y a la competencia entre establecimientos. Ante esto, la reforma buscó adecuar el currículum de acuerdo con la realidad del estudiantado, tanto en cuanto a su entorno social, económico y geográfico, de esta manera el currículum ha tenido que experimentar una flexibilización en diversos aspectos ya que se reasignaron horarios y hubo cambios en algunas asignaturas (Herrera y Zagal, 2016).

En Chile, a partir del año 2006 florecieron una serie de eventos sociales que se tornaron relevantes con respecto al tema educacional, durante el gobierno de la ex – presidenta Michelle Bachelet Jeria, a partir de estas movilizaciones se plantea una reforma educacional importante, quizás la más relevante desde 1961.

Tabla 1. Principales reformas educacionales

Reforma	Objetivo	Hitos
1965	Promover la integración de las instituciones y servicios educativos	<ul style="list-style-type: none"> - Educación General Básica obligatoria y gratuita. - Enseñanza Media en dos modalidades HC y TP. - Creación planes de estudio para 7 y 8 EGB. - Se implementan nuevos marcos curriculares.
1981	Reforma educacional descentralizadora y privatizadora del sistema	<ul style="list-style-type: none"> - Transferencia de la administración de los establecimientos educacionales del país desde el MINEDUC a los Municipios, sin embargo, el Ministerio de Educación permanece como encargado de normar y definir el currículum, libros de texto, supervisión y evaluación (Vidal, 2009) - Cambia la forma de asignar recursos, de una modalidad basada en asignación de acuerdo a presupuestos históricos de gasto a una modalidad basada en el pago de una subvención por alumno atendido.

		<ul style="list-style-type: none"> - Traspaso de establecimientos públicos de nivel medio desde el Ministerio de Educación a corporaciones.
1996	Mejorar la calidad de la enseñanza y hacerlo con equidad	<ul style="list-style-type: none"> - Programas de mejoramiento e innovación pedagógica. - Desarrollo profesional de los docentes. - Reforma curricular - Jornada escolar completa

2009- LGE	Asegurar que todos los y todas las alumnas participen de una experiencia educativa similar y se conforme un bagaje cultural compartido que favorece la cohesión y la integración social. (Bases curriculares, Ministerio de Educación, 2016)	<ul style="list-style-type: none"> - Nueva estructura del ciclo escolar - Nuevos objetivos generales - Objetivos de aprendizaje para cada año o nivel. - Creación de bases curriculares y programas de estudio
--------------	--	--

3.5.2 Ley General de Educación

En el año 2009, y luego de fuertes movilizaciones sociales en el ámbito educativo, la ex-presidenta Michelle Bachelet Jeria promulga la Ley General de Educación (en adelante LGE), como una respuesta a las demandas sociales. Esta ley reemplaza a la anterior Ley Orgánica Constitucional de Enseñanza (en adelante LOCE).

Los principales aportes de la LGE, en respuesta a las demandas estudiantiles, corresponden a una activa promoción de la educación parvularia, el financiamiento estatal de la educación básica y media, deberes y derechos de los miembros de la comunidad educativa, calidad de la educación, promoción y reconocimiento de culturas indígenas y la inclusión educativa mediante flexibilidad curricular y una adecuada contextualización respecto a la cultura institucional y al proyecto educativo de cada establecimiento.

3.5.3 Bases curriculares

Con base en el principio de diversificación y contextualización de la educación, impulsado luego de la promulgación de la Ley General de Educación, el Ministerio de Educación genera las Bases Curriculares. Este documento, segmentado en niveles educativos, se publica en el año 2015 y establece los aprendizajes mínimos obligatorios para cada asignatura de acuerdo al respectivo nivel educativo. Establece una base cultural común para todo el país, unificando los aprendizajes necesarios de acuerdo con cada nivel, pero también ofrecen un alto nivel flexibilidad, permitiendo a cada establecimiento educativo expresar su diversidad al contextualizar los

contenidos y metodologías de enseñanza de acuerdo a las necesidades y la cultura de cada proyecto educativo (Ministerio de Educación, 2015)

4 **Capítulo IV: Marco Metodológico**

4.1 Tipo de investigación:

Esta investigación corresponde a un estudio de caso, ya que, tiene como propósito abordar de forma intensiva una unidad, estas pueden referirse a una persona, una familia, una organización o una institución (Muñiz, 2010). En esta tesis la unidad a analizar son los libros de texto de matemática entre los años 2016-2023 ya que en foco de interés se encuentra en describir, identificar y caracterizar la unidad de logaritmos en estos.

Además, esta investigación corresponde a un estudio retrospectivo no experimental (Vidal, 2009), ya que se realiza posterior a que se trabaja con datos recogidos de archivo desde las bases curriculares y los libros de texto utilizados por estudiantes de segundo medio en Chile, además las variables presentes en nuestra investigación no serán manipuladas, sino es una investigación del tipo observacional que solamente se limita a observar y medir.

4.2 Diseño de investigación:

Esta investigación se encuentra realizada bajo un paradigma cualitativo (Vidal, 2009), debido a que en esta es la que resulta apropiada para los fines descritos en la presentación de esta tesis, pues se caracterizan los libros de texto en diversos aspectos, como por ejemplo al compararlos con los programas oficiales, con el saber sabio y con los enfoques de aprendizaje, además se realiza una descripción física de los libros de texto.

4.3 Población y Muestra:

Según lo planteado en el marco teórico, esta tesis contempla los libros de textos de segundo medio que contenga el contenido de logaritmos, entregados por el Ministerio de Educación de Chile durante los años 2016-2023 (inclusive) debido a que en este periodo de tiempo ya se utilizan las bases curriculares para este nivel. Por esta razón, es que se ha decidido observar que ocurre con los libros de texto desde que estas fueron creadas. Cabe destacar que el MINEDUC entrega 1 libro de texto por cada año, sin embargo, encontramos que hay libros de texto que se repiten durante el periodo de tiempo analizado, esto nos lleva a tomar solamente 4 libros de texto que corresponden a los de los siguientes años 2016, 2018, 2021 y 2023, los cuales son enumerados consecutivamente como Libro 1, 2, 3 y 4.

Por lo tanto, los criterios de inclusión utilizados son los libros de texto de segundo medio entregados por el Ministerio de Educación de Chile desde los años 2016 hasta el 2023, que contengan el contenido de logaritmos. El criterio de exclusión empleado es la repetición del libro de texto, dejando uno representando cada periodo, dejando en total 4 libros de texto.

4.4 Técnica de recolección de datos:

La técnica utilizada para la recolección de los datos analizados corresponde a análisis de contenido (AC) que según Vidal (2009), corresponde a una técnica que permite encontrar herramientas de rupturas epistemológicas con el saber matemático erudito. Se utiliza esta técnica ya que su sistematización requiere de la elaboración de codificaciones por categorías, que se presentan en matrices de análisis. (Arostegui 2001, citado por Vidal, 2009).

4.5 Instrumentos para la recolección de datos:

La recolección de datos utilizada en esta tesis se realiza por medio de matrices elaboradas y validadas por el Dr. Roberto Vidal, adaptadas al contenido de nuestra investigación. Estas matrices se pueden clasificar en dos grupos:

- a. Matrices para la descripción y análisis de fuentes: Este tipo de matrices permite relatar, citar y comentar la información presente en los programas de estudio y los libros de textos. Este tipo de matrices a su vez se pueden subclasificar en: Matrices de información general (MIG) que son utilizadas para la caracterización estructural de los libros de texto, son considerar el contenido o Matrices de análisis de contenido (MAC) que se utilizan para realizar el análisis de contenido matemático, de los enfoques de aprendizaje y de las habilidades desarrolladas.
- b. Matrices de resumen y cotejo: El propósito de este tipo de matrices es elaborar perfiles para el saber enseñar de los libros de texto, objetivando y reduciendo la información obtenida en las matrices de descripción y análisis.

A continuación, se presentan en detalle las matrices antes mencionadas, incluyendo cada uno de los campos que las componen:

4.5.1 Matriz de Identificación General para la caracterización general de los libros de texto (MIGt) (Modificación MIGt Dr. Roberto Vidal)

- MIGt1: Número de texto, esta columna corresponde al orden que se le asignó a cada uno de los libros de textos analizados.
- MIGt2: Año, en este ítem se detalla el año en el cual el libro de texto fue utilizado por las y los estudiantes.
- MIGt3: Edición, se detalla el número y el lugar de edición de los libros de texto.
- MIGt4: Datos de autoría, en esta dimensión se describen los autores.
- MIGt5: Título y Procedencia: Corresponde al nombre del libro de texto.
- MIGt6: Editorial.
- MIGt7: Presentación física, se informa el número de páginas y características de la impresión.

- MIGt8: Segmento pp-pp de logaritmo. Corresponde al intervalo de páginas en donde se encuentra la unidad de logaritmos en los libros de textos analizados.

Esta matriz la encontramos representada en la tabla N°2

Tabla 2. Matriz de información general para la caracterización de libros de textos (Modificación Dr. Roberto Vidal, 2009)

N° Libro	Año	Edición	Autor(es)	Título	Editorial	Número de páginas	Segmento pp-pp de logartimo

4.5.2 Matriz de Análisis de Contenido para la caracterización de los Libros de Texto (MACT).

- **MACT1: Ecología de los logaritmos en los libros de texto**

El propósito de esta descripción es tomar la primera fotografía respecto al uso de los logaritmos, esto involucra si son tratados de manera adecuada, mencionando sus partes como corresponde matemáticamente, además nos permite analizar si las restricciones se encuentran bien utilizadas.

- **MACT2: Presentación de los Logaritmos.**

En este campo nos interesa conocer como es introducido el concepto de logaritmo, si esto se realiza de manera inductiva o deductiva, además este campo nos permite analizar si la definición se encuentra escrita de manera adecuada y si se relaciona con la exponencial.

- **MACT3: Tratamiento de las propiedades de los logaritmos.**

Este campo es el que constituye el de mayor detalle ya que describirá cada punto relacionado con el tratamiento de las propiedades de los logaritmos, esto abarca:

- Cuáles son las propiedades que se enuncian y cuál es su secuencia.

- Uso de restricciones o explicación de los campos de validez de cada propiedad
 - Pertinencia de las demostraciones que desarrolle desde el punto de vista lógico
 - Notaciones y representaciones semióticas utilizadas
- **Mact4: Aplicaciones de los logaritmos.**

En este campo se analizan los diversos contextos en los que pueden ser utilizados los logaritmos, este es un ítem que no se encuentra presente en las MACt presentadas por el Dr. Roberto Vidal (2009). El análisis que se realizará involucra a las aplicaciones en que son utilizados los logaritmos, tales como astronomía, ciencias, arqueología, música, geología, sicología, economía y medicina

4.5.3 Matriz de análisis de contenido para la caracterización de libros de texto según enfoque de aprendizaje (MAEt)

Esta matriz involucra el enfoque de aprendizaje que se encuentra predominantemente en diversas áreas del libro de texto en el contenido de logaritmos. Los enfoques que son analizados en esta matriz corresponden a enfoque conductista y constructivista en los 4 libros de textos. Ahora los

ítems en donde se realiza este análisis son: Definición, Propiedades y aplicaciones de los logaritmos (Tabla N°3). Para identificar con qué tipo de enfoque se encuentra relacionado cada libro de texto, se analizaron ciertos parámetros.

Según Armendáriz y colaboradores (1993), el análisis de los enfoques de aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas se encuentra relacionado con ciertos parámetros. Para clasificar un libro de texto dentro del enfoque conductista se tomaron en cuenta los siguientes parámetros: Existen jerarquías de aprendizaje desde una lógica disciplinar, hay secuencias de aprendizaje rígidas, se le otorga una gran importancia a la práctica de manera rutinaria. Ahora para clasificarlo dentro de un enfoque constructivista se consideraron las siguientes actividades: Desarrollo de actividad-descubrimiento, el libro de texto proporciona modelos alternativos de representación, de modo que, favorezca la inferencia por parte de las y los estudiantes, secuencia y organiza contenidos de forma que entregue un soporte a un proceso rico en significado y con sentido, permiten que el estudiantado interprete los errores como una oportunidad de aprendizaje.

4.5.4 Matriz de análisis de contenido para la caracterización de los libros de texto según habilidades (MAHt)

Permite relacionar las 4 habilidades que el Ministerio de Educación señala en las bases curriculares (Ministerio de Educación, 2015), las cuales deben estar presentes durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de logaritmos. Cada texto es analizado respecto a estas y presentados en esta matriz de contenido. Las habilidades analizadas en esta son: Modelar, Resolver problemas, Argumentar y comunicar, para determinar si se desarrolla cierta habilidad en esta investigación se utilizan las bases curriculares de matemática de Segundo medio, en donde se encuentra especificado cada parámetro de la siguiente forma:

- **Resolver problemas**

a. Resolver problemas utilizando estrategias como las siguientes:

- Simplificar el problema y estimar el resultado.
- Descomponer el problema en subproblemas más sencillos.
- Buscar patrones.
- Usar herramientas computacionales.

b. Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático.

c. Utilizar lenguaje matemático para identificar sus propias ideas o respuestas.

- Argumentar y comunicar

a. Describir relaciones y situaciones matemáticas usando lenguaje matemático, esquemas y gráficos.

b. Explicar:

- Soluciones propias y los procedimientos utilizados.
- Demostraciones de resultados mediante definiciones, axiomas, propiedades y teoremas.
- Generalizaciones por medio de conectores lógicos y cuantificadores utilizándolos apropiadamente.

c. Fundamentar conjeturas usando lenguaje algebraico para comprobar o descartar la validez de los enunciados.

d. Realizar demostraciones simples de resultados e identificar en una demostración si hay saltos o errores.

- Modelar

a. Usar modelos, utilizando un lenguaje funcional para resolver problemas cotidianos y para representar patrones y fenómenos de la ciencia y la realidad.

b. Ajustar modelos, eligiendo los parámetros adecuados para que se acerquen más a la realidad.

c. Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad y determinando sus limitaciones.

- Representar

a. Elegir o elaborar representaciones de acuerdo a las necesidades de la actividad, identificando sus limitaciones y validez de estas.

b. Transitar entre los distintos niveles de representación de funciones.

c. Representar y ejemplificar utilizando analogías, metáforas y situaciones familiares para resolver problemas

4.5.5 Matrices de resumen y cotejo. Caracterización y perfiles.

La información obtenida de los ítems anteriores en MIGt, MACt, MAEt y MAHt será tratada de manera de establecer las caracterizaciones de

manera que nos permita realizar las triangulaciones entre el saber sabio, los enfoques de aprendizaje y las habilidades desarrolladas en cada libro de texto.

A continuación, se presentará la matriz de resumen con el previo detalle de sus campos, aspectos y/o sub-aspectos, según corresponda. Esta matriz como ya se mencionó anteriormente corresponde a una adaptación a la que elaboró y validó el Dr. Roberto Vidal (2009).

Para realizar esta caracterización se comenzará por identificar cada uno de los descriptores que la componen, la Mr es del tipo $Mr(i,j,k)$ en donde i corresponde al campo, j al aspecto y k al sub-aspecto, esta denominación se utiliza para indicar el grado de especificidad que requiere el ítem.

- Campos y sus respectivos aspectos.

$Mr(1, j)$ Uso de la notación logaritmo: Este campo presenta 7 aspectos ($1 \leq j \leq 7$). Estos son:

- ✓ 1 A las expresiones con $\log_a b$ se les llama logaritmo.
- ✓ 2 En las expresiones $\log_a b$ llama a b como argumento.
- ✓ 3 En las expresiones $\log_a b$ llama a a como base.
- ✓ 4 Lo usa con restricciones solo para el argumento.

- ✓ 5 Lo usa con restricciones solo para la base.
- ✓ 6 Lo usa con restricciones para el argumento y la base.
- ✓ 7 Lo usa sin restricciones.

El objetivo principal de este campo y sus aspectos es precisar la concepción que da la fuente, respecto a cómo denomina a los objetos que se representan.

Mr (2, j) Introducción al concepto. Se desglosa en 5 aspectos

- ✓ 1 Deductiva.
- ✓ 2 Inductiva.
- ✓ 3 Como $\log_b a = c \leftrightarrow b^c = a$
- ✓ 4 Como inversa a la potenciación
- ✓ 5 Otro (especificar)

Los dos primeros apuntan al modo en que se presentan los logaritmos, si parte de la definición y luego sus casos particulares o bien al revés. Se ha dejado otro aspecto (5) por si se obtiene otra introducción al concepto distinta a las contempladas aquí.

Mr (3) Propiedades de los logaritmos. Se chequea la presencia de las propiedades siguientes:

$$\checkmark 1 \text{ Log}_a a = 1$$

$$\checkmark 2 \text{ log}_a 1 = 0$$

$$\checkmark 3 \text{ log}_a(b * c) = \text{log}_a b + \text{log}_a c$$

$$\checkmark 4 \text{ log}_a(b : c) = \text{log}_a b - \text{log}_a c$$

$$\checkmark 5 \text{ log}_a b^c = c \text{ log}_a b$$

$$\checkmark 6 \text{ log}_a b = \frac{\text{log}_c b}{\text{log}_c a}$$

Para cada aspecto se definieron 8 sub-aspectos para detallar su tratamiento con relación a lo que nos interesa:

1. **La demostración con errores lógicos.** Se refiere a errores cometidos al emplear teoremas que no han sido demostrados previamente.
2. **La demostración correctamente.** La demostración que presentan es lógicamente aceptable.
3. **No demuestra.** Sólo enuncia, pero no hay referencia a la demostración.

4. **Usa restricciones completas.** Al enunciar la propiedad, indica el ámbito numérico para cada una de las variables que la componen. En el caso de los aspectos 1 y 2 se especifica que $a > 0$; $a \neq 1$
5. **Usa restricciones incompletas.** Al enunciar la propiedad, da restricciones solamente para algunas de las variables que la componen. En el caso de los aspectos 1 y 2 se especifica que $a > 0$
6. **No restringe.** La propiedad es solo enunciada sin indicar contexto numérico de sus variables.
7. **La presenta unilateralmente.** La propiedad se presenta en el sentido izquierdo a derecha y es tratada de este modo. El tratamiento de una misma propiedad se divulga como dos propiedades distintas.
8. **La presenta bilateralmente.** El signo igual se utiliza como una relación de equivalencia, trabajando hacia ambos lados de la igualdad, como permite la simetría de la relación de igualdad.

Mr (4,j). Aplicaciones ($1 \leq j \leq 8$). En este campo se resume algunos de los ámbitos de la vida cotidiana en donde pueden utilizarse los logaritmos, para efectos de esta investigación veremos si los utiliza, pero no la forma en como lo realiza.

- ✓ 1 logaritmos y astronomía. Determinar la magnitud de las estrellas (razón entre 2)
- ✓ 2 logaritmos y ciencias. Determinar la concentración del ion Hidrogeno a partir del pH de una solución.
- ✓ 3 logaritmos y arqueología Determinar tiempo de un fósil, utilizando la degradación de diversos átomos radioactivos.
- ✓ 4 logaritmos y música. Determinar el volumen L en decibeles
- ✓ 5 logaritmos y geología. Determinar la intensidad de un sismo
- ✓ 6 logaritmos y sicología. Ley de sensación.
- ✓ 7 logaritmos y economía. Determinar la tasa de crecimiento.
- ✓ 8 logaritmos y medicina. Determinar la tasa de crecimiento bacteriano.

Una vez ya explicado cada uno de los campos que posee esta matriz, es necesario explicar la forma en la cual se irán completando estos, que es de la siguiente forma:

- Los aspectos o sub-aspectos que se encuentren en la descripción respectiva se marcan con una x

- Si el descriptor no aparece en la fuente examinada se colocará NI (No hay información) en la celda correspondiente.
- Si se necesita negar el descriptor se dejará en blanco el casillero respectivo.

Esta matriz se encuentra representada en la tabla N°3.

Tabla 3. Tabla de resumen y cotejo de caracterización del saber sabio

Campos, aspectos y sub-aspectos		L1	L2	L3	L4
1. Uso de la notación logaritmo	1.1 A las expresiones con $\log_a b$ los llama logaritmos				
	1.2 En las expresiones con $\log_a b$ llama a b como argumento				
	1.3 En las expresiones con $\log_a b$ llama a a como base				
	1.4 Lo usa con restricciones solo para el argumento				
	1.5 Lo usa con restricciones solo para la base				
	1.6 Lo usa con restricciones para el argumento y para la base.				
	1.7 Lo usa sin restricciones				
2. Introducción al concepto	2.1 Deductiva				
	2.2 Inductiva				
	2.3 Como $\log_b a = c \leftrightarrow b^c = a$				
	2.4 Como inversa de la exponencial				
	2.5 Otro (especificar)				

3. Propiedades	3.1 $\log_a a = 1$	3.1.1 La muestra con errores lógicos				
		3.1.2 La muestra correctamente				
		3.1.3 No la muestra				
		3.1.4 Usa restricciones completas. $a > 0$; $a \neq 1$				
		3.1.5 Usa restricciones incompletas. $a > 0$				
		3.1.6 No restringe				
		3.1.7 La presenta unilateralmente				
		3.1.8 La presenta bilateralmente				
	3.2 $\log_a 1 = 0$	3.2.1 La muestra con errores lógicos				
		3.2.2 La muestra correctamente				
		3.2.3 No la muestra				

		3.2.4 Usa restricciones completas. $a > 0$; $a \neq 1$				
		3.2.5 Usa restricciones incompletas. $a > 0$				
		3.2.6 No la restringe				
		3.2.7 La presenta unilateralmente				
		3.2.8 La presenta bilateralmente				
	3.3 $\log_a(b * c) = \log_a b + \log_a c$	3.3.1 La demuestra con errores lógicos				
		3.3.2 La demuestra correctamente				
		3.3.3 No la demuestra				
		3.3.4 Usa restricciones completas				
		3.3.5 Usa restricciones incompletas				

		3.3.6 No la restringe				
		3.3.7 La presenta unilateralmente				
		3.3.8 La presenta bilateralmente				
	3.4 $\log_a(b:c) = \log_a b - \log_a c$	3.4.1 La demuestra con errores lógicos				
		3.4.2 La demuestra correctamente				
		3.4.3 No la demuestra				
		3.4.4 Usa restricciones completas				
		3.4.5 Usa restricciones incompletas				
		3.4.6 No restringe				
		3.4.7 La presenta unilateralmente				
		3.4.8 La presenta bilateralmente				
		3.5	3.5.1 La demuestra con errores lógicos			

	$\log_a b^c$ $= c \log_a b$	3.5.2 La demuestra correctamente				
		3.5.3 No demuestra				
		3.5.4 Usa restricciones completas				
		3.5.5 Usa restricciones incompletas				
		3.5.6 No restringe				
		3.5.7 La presenta unilateralmente				
		3.5.8 La presenta bilateralmente				
		3.6	$\log_a b$ $= \frac{\log_c b}{\log_c a}$	3.6.1 La demuestra con errores lógicos		
3.6.2 La demuestra correctamente						
3.6.3 No demuestra						
3.6.4 Usa restricciones completas						

	3.6.5 Usa restricciones incompletas				
	3.6.6 No restringe				
	3.6.7 La presenta unilateralmente				
	3.6.8 La presenta bilateralmente				
4. Aplicaciones	4.1 Logaritmos y astronomía				
	4.2 Logaritmos y ciencias				
	4.3 Logaritmos y arqueología				
	4.4 Logaritmos y música				
	4.5 Logaritmos y geología				
	4.6 Logaritmos y sicología				
	4.7 Logaritmos y economía				
	4.8 Logaritmos y medicina				

La matriz de resumen y cotejo relacionada con el enfoque de aprendizaje se encuentra representada en la tabla N°4.

Los enfoques de aprendizaje que son analizados en esta matriz corresponden a enfoque conductista (1) y constructivista (2) en los 4 libros

de textos. Ahora los ítems en donde se realiza este análisis son: Definición, Propiedades y aplicaciones de los logaritmos (Tabla N°4). La simbología utilizada en esta se encuentra especificada en la tabla N°5. Para identificar con qué tipo de enfoque se encuentra relacionado cada libro de texto, se analizaron ciertos parámetros presentes en la tabla N°6.

Tabla 4. Tabla análisis enfoques de aprendizaje conductista (1) y constructivista (2)

		Libro 1		Libro 2		Libro 3		Libro 4	
		1	2	1	2	1	2	1	2
Definición									
Propiedades	a								
	b								
	c								
	d								
	e								
	f								
Aplicaciones									

Tabla 5. Tabla simbología utilizada en tabla N°4

Símbolo	Nombre Propiedad	Notación
a	Logaritmo de la base	$\log_a a = 1$
b	Logaritmo de la unidad	$\log_a 1 = 0$
c	Logaritmo de un producto	$\log_a (b * c) = \log_a b + \log_a c$
d	Logaritmo de un cociente	$\log_a (b : c) = \log_a b - \log_a c$
e	Potencia de un logaritmo	$\log_a b^c = c \log_a b$
f	Cambio de base	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

Tabla 6. Parámetros utilizados para clasificar el libro de texto dentro del enfoque conductista o constructivista

Símbolo	Enfoque	Parámetros
1	Conductista	<ul style="list-style-type: none"> - Jerarquías de aprendizaje desde una lógica disciplinar. - Secuencias de aprendizaje rígidas. - Gran importancia a la práctica. - Hipertrofia de lo sintáctico (ejercitación de rutinas)
2	Constructivista	<ul style="list-style-type: none"> - Desarrollo actividad-descubrimiento - Proporciona modelos alternativos de representación (favoreciendo la inferencia) - Secuencia y organiza contenidos de forma de que entregue un soporte a un proceso constructivo real (rico en significado y con sentido). - Interpreta errores como oportunidad de aprendizaje

La matriz de cotejo y resumen asociada al desarrollo de las habilidades matemáticas presentadas en las bases curriculares se presenta en la tabla N°7

Tabla 7. Matriz de cotejo que representa el desarrollo de habilidades matemáticas

Habilidad	Libro 1	Libro 2	Libro 3	Libro 4
Representar				
Modelar				
Argumentar y Comunicar				
Resolución de Problemas				

Triangulaciones y obtención de conclusiones.

Cuando se habla de triangulación se refiere al uso de múltiples informaciones para captar más densamente un constructo, que desde una sola fuente no podría ser captado en sus principales dimensiones (Heat, 2001, citado en Bolívar, Fernández y Molina, 2005)

La triangulación en investigación cualitativa es un enfoque que busca mejorar la validez y la confiabilidad de los resultados al utilizar múltiples fuentes de datos, métodos o perspectivas para abordar una pregunta de investigación (Bolívar, Fernández y Molina, 2005)

En esta investigación, la triangulación que se realizará corresponde a una triangulación a pares por un periodo de tiempo determinado, en forma secuencial, esto implica que se analizarán las matrices de cotejo que involucran Libros de texto- Saber erudito, Libros de texto-Habilidades, Libros de texto-enfoques de aprendizaje, a lo largo del tiempo de manera continua.

Esta triangulación se realizará como se muestra en la figura 1

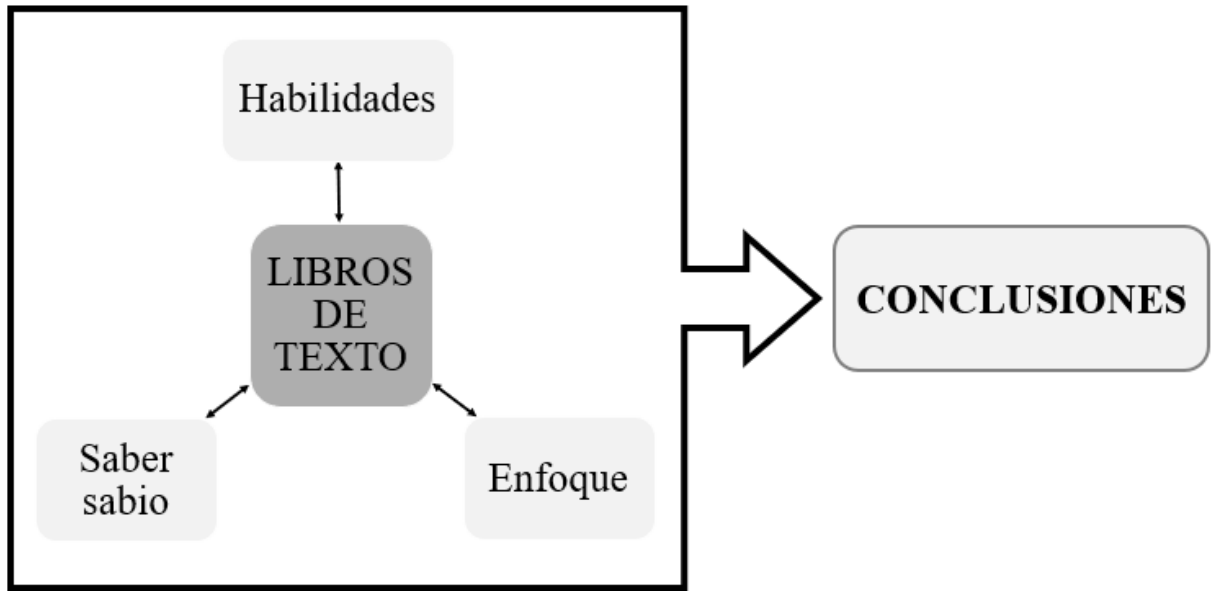


Figura 1. Triangulación y obtención de conclusiones

5 Capítulo V: Resultados y Análisis de Datos

5.1 Caracterización de libros de texto

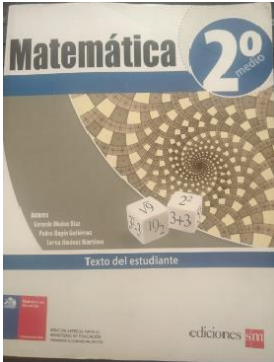
El análisis de los libros de textos, como se mencionó anteriormente se desarrolló a través de matrices, tanto de información general (MIGt, tabla N°8), contenidos (MACt), enfoques (MAEt) y habilidades (MAHt), estas 3 últimas variables nos permitirán realizar una caracterización de los libros de texto, en base a saber sabio, El enfoque de aprendizaje y las habilidades desarrolladas en los libros de texto de segundo medio en el contenido de logaritmos entregados por el Ministerio de Educación. .

Tabla 8. Matriz de información general libros de textos

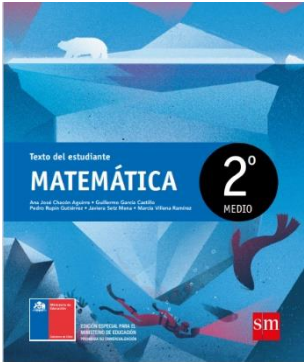
N° Libro	Año	Edición	Autor(es)	Título	Editorial	Número de páginas	Segmento pp-pp de logaritmo
1	2016	Primera	Muñoz, Jiménez, Rupin	Matemática Texto del estudiante	SM	384	56-85

				2°Medio			
2	201 8	Primera	Aguirre, García, Rupin, Setz, Villena	Texto del estudiante Matemática a 2°Medio	SM	367	50-75
3	202 1	Primera	Diaz, Ortiz, Morales, Rebolledo, Barrera, Norambuen a	Texto del estudiante Matemática a 2°Medio	SM	200	28-39
4	202 3	Tercera	Diaz, Ortiz, Morales, Rebolledo, Barrera, Norambuen a	Texto del estudiante Matemática a 2°Medio	SM	200	28-39

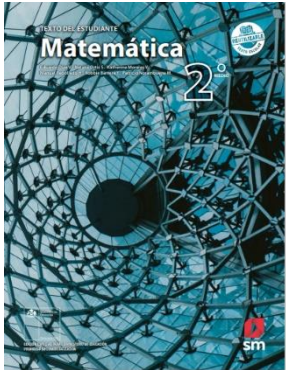
Las portadas de los libros correspondientes son:



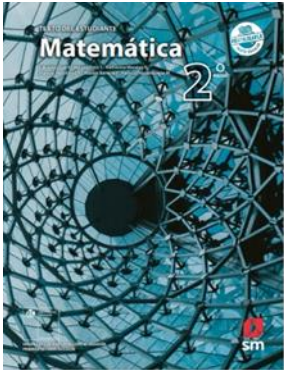
2016



2018



2021



2023

Caracterización Libros de Texto

5.2 Caracterización libro 1

5.2.1 Aplicación de la MIGt para la caracterización del libro 1.

Tabla 9. Matriz de información general del libro 1

Campos genéricos MIGt (i) con i=1,2,3,4	Libro 1
MIGt1: Título y Procedencia	Matemáticas segundo año de educación media. Distribuido por el Ministerio de Educación.
MIGt2: Datos de autoría	Lorna Jiménez Martínez. Estadístico y Profesora de Matemática de Educación Media. Licenciada en Matemática y Educación
	Gerardo Muñoz Díaz. Profesor de Matemática Pontificia Universidad Católica de Chile. Ingeniero eléctrico Universidad de Santiago de Chile. Magíster en Enseñanza de las Ciencias con mención en Didáctica de la

	Matemática Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
	Pedro Rupin Gutiérrez Profesor de Matemática Licenciado en Matemáticas Pontificia Universidad Católica de Chile.
MIGt3: Edición y tipo de obra	Ediciones SM Chile S.A. Primera edición 2016. Providencia. Chile. Este libro está destinado a estudiantes de segundo medio.
MIGt4: Presentación	Este libro se trabajó en formato digital y físico, cuenta con 384 páginas.

5.2.2 Aplicación de la Matriz MACt1 para la caracterización del libro 1.

En la segunda Página se encuentra el Índice, el cual se encuentra dividido en 4 unidades de la siguiente forma:

Tabla 10. Organización libro de texto 1

Unidad	Contenido
Unidad 1	Números
Unidad 2	Geometría
Unidad 3	Álgebra
Unidad 4	Datos y Azar

A contar de la página 56 se encuentra el contenido de Logaritmos, el cual se extiende hasta la página 85, esto corresponde a 29 páginas, las cuales representan al 7,6% del libro de texto. Las figuras desde la 2 a la 30 que se encuentran distribuidas, desde el apartado 5.2.2.1 hasta el apartado 5.2.4, corresponden a fotografías extraídas del libro de texto de Matemática de segundo año medio del año 2016 de los autores Diaz, G., Rupin, P. y Jiménez, L.

5.2.2.1. MACT1: Uso de la notación del Logaritmo

El logaritmo lo anota de la forma $\log_a b$, donde a es la base del logaritmo y b es su argumento, indicando de manera pertinente estos elementos (Fig. 2).

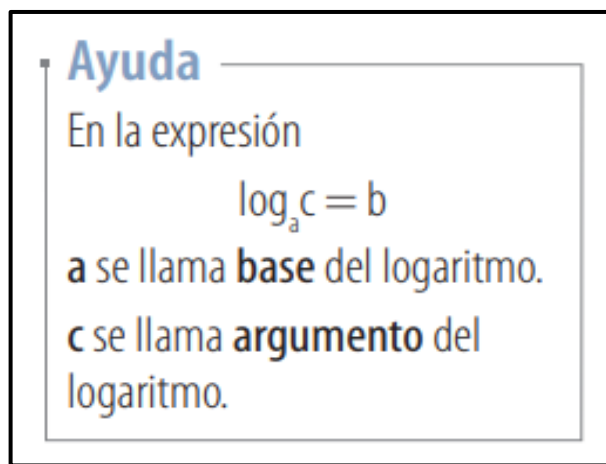


Figura 2. Definición de Logaritmo. Libro 1

Con respecto al uso de las restricciones que deben presentarse al definir el logaritmo, se encuentran enunciadas las restricciones tanto para la base (Fig. 3) como para el argumento (Fig. 4), tal como lo muestran los siguientes extractos del libro.

En general, para que una potencia siempre esté bien definida es necesario que su base no sea negativa. Por lo tanto, complementando la condición vista en el paso anterior, se exige que **la base a del logaritmo debe ser positiva y distinta de 1.**

Figura 3. Restricciones para la base del logaritmo. Libro 1

Por lo tanto, se exige que el argumento de un logaritmo sea **positivo**.

Figura 4. Restricciones para el argumento del logaritmo. Libro 1

5.2.2.2. MACT2: Introducción al concepto

El libro de texto comienza con una actividad (Fig. 5) en la cual se compara números grandes con números pequeños.

Actividad grupal

En parejas, lean y realicen las siguientes actividades.

- 1 ¿Qué distancias son capaces de estimar? Estimen, sin averiguar, la distancia entre Chile y Japón, la distancia de la Tierra a la Luna, etc.
- 2 ¿Qué tamaño tiene un microbio? ¿Cuál es el grosor de un cabello humano? Estimen y comparen.
- 3 Averigüen las medidas anteriores y compárenlas con su estimación. ¿Cómo fueron sus resultados?
- 4 Observen la animación de la página <http://htwins.net/scale2/lang.html> que muestra el universo con distintas escalas.

Figura 5. Actividad involucrada en la introducción del concepto de logaritmo. Libro 1

En la página siguiente del libro de texto (57) nos encontramos con ejercicios que involucran el uso de potencias y raíces con sus propiedades. Presenta el concepto de logaritmo de forma inductiva (Fig 6), llevándolo desde lo particular a lo general, y haciendo la asociación con los conocimientos previos tratados en la sección anterior, tales como las potencias y raíces, definiendo a los logaritmos como la inversa de las potencias (Fig 7). Lo anterior se muestra en las siguientes figuras:

Logaritmos

Considera la siguiente relación:

$$4^7 = 16\,384$$

Podemos observar que:

- 16 384 es la **séptima potencia de 4**, es decir, el resultado de multiplicar 7 veces el 4 por sí mismo.
- 4 es el número que, multiplicado 7 veces por sí mismo, da como resultado 16 384. Es decir, 4 es la **raíz séptima** de 16 384.
- 7 es el número al cual debemos elevar 4 para obtener 16 384. Decimos que **7 es el logaritmo de 16 384 en base 4**.

En general, dada la relación

$$a^b = c$$

decimos que **b** es el **logaritmo de c en base a**, y lo escribimos $\log_a c = b$. Corresponde al exponente de la potencia de base **a** cuyo resultado es **c**. Es decir,

$$b = \log_a c \leftrightarrow a^b = c$$

Figura 6. Definición de logaritmo. Libro 1

En resumen

Dado un número real positivo $a \neq 1$, y un número real $c > 0$, se llama **logaritmo de c en base a** al número al que se debe elevar **a** para obtener **c**. Es decir:

$$\log_a c = b \leftrightarrow a^b = c$$

Figura 7. Resumen definición logaritmo. Libro 1

5.2.2.3. MACT3: Tratamiento de las Propiedades de los Logaritmos.

Dentro de nuestra investigación se consideró el logaritmo de la base y el logaritmo de la unidad como propiedades, sin embargo, el libro de texto no las considera como tal y las presenta como definición. Además, estas no se encuentran demostradas y no cuentan con las restricciones pertinentes. El logaritmo de una potencia de la base no se aborda porque está considerada en otra propiedad. Lo anterior se puede observar en la figura 8:

Las definiciones y restricciones anteriores además nos permiten establecer que:

Logaritmo de la base	Logaritmo de la unidad	Logaritmo de una potencia de la base
$\log_a a = 1$	$\log_a 1 = 0$	$\log_a a^n = n$

Figura 8. Propiedades logaritmo. Libro 1

Posteriormente, siguiendo con las propiedades se visualiza el logaritmo de un producto y logaritmo de un cociente, las cuales se encuentran demostradas correctamente y cuentan con sus restricciones pertinentes. Cabe destacar que estas últimas no se enuncian al comienzo, sino que se presentan en un cuadro resumen con las propiedades de los logaritmos al final de la sección. Esto se observa en la figura 9 y en la figura 13.

Paso 1 ▶ Supongamos que x e y son números tales que

$$\log_a x = p \rightarrow a^p = x \qquad \log_a y = q \rightarrow a^q = y$$

Calcularemos el producto y el cociente entre x e y , representándolos como potencias y utilizando logaritmos.

$$x \cdot y = a^p \cdot a^q \qquad x : y = a^p : a^q$$

$$x \cdot y = a^{p+q} \qquad x : y = a^{p-q}$$

$$\rightarrow \log_a(x \cdot y) = p + q = \log_a x + \log_a y \qquad \rightarrow \log_a(x : y) = p - q = \log_a x - \log_a y$$

Se tienen así las siguientes propiedades:

Logaritmo del producto	Logaritmo del cociente
$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$	$\log_a(x : y) = \log_a x - \log_a y$

Paso 2 ▶ Observa la siguiente deducción:

Figura 9. Demostración propiedad logaritmo de un producto y de un cociente. Libro 1

Si bien ambas propiedades no se encuentran presentadas bilateralmente, al momento de ejercitar, si se encuentra explicado cómo realizarlo.

La propiedad denominada Logaritmo de una potencia se encuentra demostrada correctamente, sin embargo, su demostración puede confundir al estudiante en la parte donde se presenta la doble igualdad. Lo anterior se observa en la figura 10:

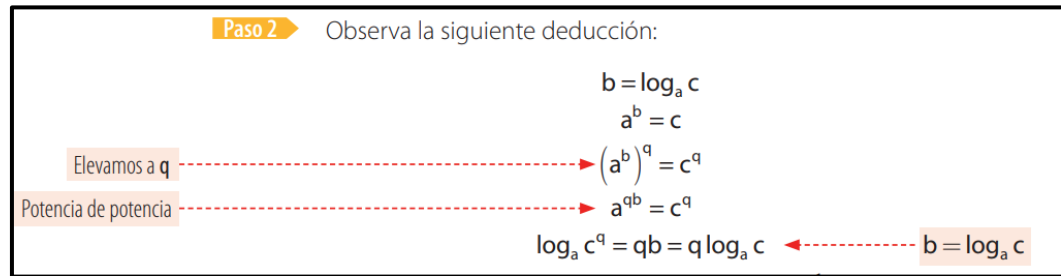


Figura 10. Demostración propiedad logaritmo de una potencia

Además, cuenta con sus restricciones correspondientes en el cuadro resumen de la figura 13

También se presentan como propiedades al logaritmo de una raíz y de un inverso, las cuales derivan de la propiedad Logaritmo de una potencia, por lo que no se consideran dentro de los análisis realizados (Fig. 11).

Considerando además los casos en que $q = -1$ y $q = \frac{1}{n}$, se tienen las siguientes propiedades (con $a > 0$, $a \neq 1$, $c > 0$):

Logaritmo de una potencia	Logaritmo de una raíz	Logaritmo de un inverso
$\log_a c^n = n \log_a c$	$\log_a \sqrt[n]{c} = \frac{\log_a c}{n}$	$\log_a \left(\frac{1}{c}\right) = \log_a c^{-1} = -\log_a c$

Figura 11. Propiedades de logaritmos con sus restricciones. Libro 1

Para finalizar el análisis de las propiedades tenemos a la de cambio de base. El libro de texto demuestra esta propiedad, a pesar que se encuentra explicado de manera correcta en este punto (Fig 12), no se mencionan las restricciones pertinentes, las que, si se encuentran presentadas en el cuadro final de la figura 13.

Paso 3 Las propiedades anteriores se cumplen solo si los logaritmos están expresados en la misma base, pero ¿qué se puede hacer cuando no lo están? Observa la siguiente deducción.

$$\log_a c = b \leftrightarrow a^b = c \quad \text{---} \xrightarrow{\text{---} / \log_p}$$

$$\rightarrow \log_p a^b = \log_p c \quad \text{---} \xleftarrow{\text{---}}$$

$$\rightarrow b \cdot \log_p a = \log_p c \quad \text{---} \xleftarrow{\text{---} \text{Despejamos } b}$$

$$\rightarrow b = \frac{\log_p c}{\log_p a}$$

Tenemos así la propiedad del cambio de base: $\log_a c = \frac{\log_p c}{\log_p a}$

Figura 12. Propiedad cambio de base. Libro 1

Al final de la página 63 del libro de texto encontramos un cuadro resumen en donde se muestran las propiedades consideradas por los autores.

En resumen		
Los logaritmos verifican las siguientes propiedades ($a, x, y, c, p > 0, a \neq 1, p \neq 1, n \in \mathbb{N}$):		
Logaritmo de un producto	Logaritmo de un cociente	Logaritmo de una raíz
$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$	$\log_a \sqrt[n]{c} = \frac{\log_a c}{n}$
Logaritmo de un inverso	Cambio de base	
$\log_a\left(\frac{1}{c}\right) = \log_a c^{-1} = -\log_a c$	$\log_a c = \frac{\log_p c}{\log_p a}$	

Figura 13. Resumen propiedades de logaritmos. Libro 1

Adicionalmente, en las demostraciones y presentaciones de las propiedades de los logaritmos, encontramos dos páginas de ejercicios en donde utilizan tanto la definición como las propiedades, estos ejercicios involucran expresar, calcular, aplicar y demostrar utilizando los contenidos vistos previamente. Además, las y los estudiantes deben realizar un desafío que involucra resolver ecuaciones en donde es necesario utilizar logaritmos para encontrar el valor de x y luego verificar su resultado.

5.2.2.4. MACT4: Aplicaciones de los logaritmos.

Para poder utilizar las aplicaciones de los logaritmos, primero este libro de texto considera necesario manejar las ecuaciones logarítmicas en donde, según los autores explican, se necesita trabajar cuatro aspectos descritos en la Figura 14. Paso b y c deberían ser considerados como uno solo para mayor claridad.

- a) Reducir las expresiones, cuando sea posible, utilizando las propiedades de logaritmos, hasta establecer una igualdad de logaritmos.
- b) Si dos logaritmos de igual base son iguales, sus argumentos son iguales.
- c) Utilizar la definición de logaritmo para obtener el valor de la incógnita que se encuentra en el argumento.
- d) Verificar la solución para considerar las posibles restricciones.

Figura 14. Ecuaciones logarítmicas. Libro 1

Además, explica paso a paso como resolver y verificar el resultado de una ecuación logarítmica (Fig. 15), utilizando dos ejemplos.

Paso 3 ▶ Observa los siguientes ejemplos de resolución de ecuaciones logarítmicas.

Ejemplo 1: $\log(8 - 4x) - \log(3 - 2x) = 2$

Tenemos que:

$$\log(8 - 4x) - \log(3 - 2x) = 2 \quad \leftarrow \text{Se aplican propiedades de logaritmos.}$$

$$\log\left(\frac{8 - 4x}{3 - 2x}\right) = 2$$

$$\frac{8 - 4x}{3 - 2x} = 10^2 = 100 \quad \leftarrow \text{Se aplica la definición de logaritmo.}$$

$$8 - 4x = 300 - 200x$$

$$196x = 292$$

$$x = \frac{292}{196} = \frac{73}{49}$$

Al remplazar en la ecuación, obtenemos

$$\log\left(8 - 4 \cdot \frac{73}{49}\right) - \log\left(3 - 2 \cdot \frac{73}{49}\right) = \log\left(\frac{100}{49}\right) - \log\left(\frac{1}{49}\right)$$

$$= \log 100 - \log 49 - \log 1 + \log 49 = 2$$

No hay restricciones, por lo que la solución obtenida es válida.

Figura 15. Resolución ecuaciones logarítmicas. Libro 1

Dentro de la práctica guiada, esta se refiere a ejercicios resueltos paso a paso por los autores dentro del libro de texto, solamente utilizan los logaritmos para el cálculo de la intensidad de sonido (Logaritmos y Música). Posteriormente dentro del libro de texto, específicamente en las páginas 68 y 69 encontramos una secuencia de ejercicios que involucra la resolución de ecuaciones logarítmicas seguidas de aplicar la definición y propiedades de logaritmos, utilizándolos en el cálculo de pH (Logaritmos y Ciencias),

cálculo de intensidad de sonido (Logaritmos y Música), Cálculo de Energía liberada en un terremoto (Logaritmos y Geología), Calcular niveles de alcohol en sangre y cantidad de medicamento administrados a un paciente (Logaritmos y Medicina). (Imágenes en anexo 7)

Para finalizar la unidad, presenta una actividad práctica que involucra la resolución de problemas y dos páginas (72 y 73) en donde las y los estudiantes deben resolver ejercicios que involucran tanto potencias, raíces y logaritmos, integrando los contenidos vistos en la unidad.

5.2.3 Aplicación de la MAEt para la caracterización del libro 1.

5.2.3.1. MAEt1: Definición de logaritmo

El concepto de logaritmo se introduce de forma inductiva tal como se mencionó en la sección MACT2: Introducción al concepto para el libro 1 (Fig. 6), sin embargo, este procedimiento lo realiza el libro de texto sin dar espacio al descubrimiento por parte del estudiante, por lo tanto, su definición se realiza de manera conductista.

Se continua de esta forma analizando las restricciones del logaritmo, dando paso a ejemplos revisados por el libro.

Paso 1 ▶ Observa los siguientes resultados:

$0^5 = 0$	0^{-2} no está definido	$0^{12} = 0$
$1^3 = 1$	$1^{-4} = 1$	$1^0 = 1$

Figura 16. Análisis de restricciones. Libro 1

Luego, a partir de esto, el libro de texto concluye:

Podemos observar que una potencia de base 0 puede ser igual a cero o no estar definida. Por otra parte, si la base de una potencia es igual a uno su resultado siempre será igual a uno. Para evitar estos problemas, se exigirá en el estudio de logaritmos que la **base** de este **siempre sea distinta de 0 y de 1**.

Figura 17. Restricciones definición de logaritmo. Libro 1

Siguiendo con las restricciones, se muestra la relación potencia-raíz como se presenta en la figura 18. Es importante señalar que para una mejor comprensión el libro debería indicar que el valor $(-16)^{\frac{1}{4}}$ no está definida en los reales.

Paso 2 ▶ En la sección anterior vimos que

$$\sqrt[5]{-1024} = (-1024)^{\frac{1}{5}} = -4$$

$$\sqrt[4]{-16} = (-16)^{\frac{1}{4}} \text{ no está definida.}$$

$$\sqrt[6]{64} = (64)^{\frac{1}{6}} = 2$$

$$\sqrt{16} = (16)^{\frac{1}{2}} = 4$$

Figura 18. Análisis restricciones de la base. Libro 1

A partir de estos ejemplos y de manera inductiva se llega a las restricciones de la base para un logaritmo.

En general, para que una potencia siempre esté bien definida es necesario que su base no sea negativa. Por lo tanto, complementando la condición vista en el paso anterior, se exige que **la base a del logaritmo debe ser positiva y distinta de 1.**

Figura 19. Restricciones de la base de logaritmo. Libro 1

Siguiendo con esto, y para presentar las restricciones del argumento (Fig. 20), nuevamente se trabaja con potencias de la siguiente manera:

Paso 3 ▶ Observa los siguientes resultados:

$$5^3 = 125 \qquad 5^0 = 1 \qquad 5^{-2} = \frac{1}{25}$$
$$5^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{25} \qquad 5^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{25}}$$

Figura 20. Ejercicios de análisis de restricciones del argumento. Libro 1

Como se muestra en los ejemplos, al trabajar con bases positivas el resultado es estrictamente mayor que 0, por lo que el argumento de un

Podemos observar que ninguno de los resultados es negativo ni cero, ya que hemos considerado una base positiva. En general, si la base de una potencia es positiva necesariamente su resultado será positivo, por lo que no tiene sentido preguntarse por el logaritmo de un número negativo.

Por lo tanto, se exige que el argumento de un logaritmo sea **positivo.**

Figura 21. Análisis restricciones del argumento. Libro 1

logaritmo será siempre positivo. El libro de texto lo describe de la siguiente manera:

El libro también entrega ejemplos de cómo resolver un logaritmo (Fig. 22), antes de dar paso a la ejercitación de los estudiantes:

Algunos ejemplos de cálculo:

$\log_3 81 = x$	$\log_{\frac{1}{2}} 0,125 = x$
$3^x = 81$	$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,125$
$3^x = 3^4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8}$
Entonces, $x = 4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^3$
$\log_3 81 = 4$	Entonces, $x = 3$
	$\log_{\frac{1}{2}} 0,125 = 3$

Figura 22. Ejercicios cálculos logaritmo usando definición. Libro 1

Luego, se formaliza todo este proceso realizando la definición de logaritmo a modo de resumen (Fig. 7)

Por lo tanto, al libro realizar todos los pasos para llegar a la definición de logaritmo, además de mostrar ejemplos de cómo resolver un logaritmo, se enmarca en un enfoque conductista.

5.2.3.2. MAEt2: Propiedades de los logaritmos

Para el caso de las propiedades, y tal como se mencionó en la sección MACT3: Propiedades de los logaritmos:

- Las propiedades Logaritmo de la base y Logaritmo de la unidad se introducen directamente, sin una demostración o una inducción para generalizar su estructura. Tampoco se da espacio al estudiante para que resuelva ejercicios aplicando estas propiedades, por lo que se definen con un enfoque conductista.
- Las propiedades Logaritmo del producto y Logaritmo del cociente se demuestran de forma deductiva, realizando un paso a paso. El libro de texto explica cómo aplicar estas propiedades condicionando al estudiante a seguir un ejemplo, por lo que se enmarca en un enfoque conductista.
- La propiedad Logaritmo de una potencia se demuestra de forma deductiva, explicando cada uno de los pasos realizados, sin embargo,

Estas propiedades permiten calcular los logaritmos de todos los números racionales teniendo solo los logaritmos de los números primos. Por ejemplo:

$$\log 56 = \log 2^3 \cdot 7 = 3 \log 2 + \log 7 \approx 3 \cdot 0,3 + 0,85 = 1,75$$

$$\log \frac{50}{77} = \log \frac{2 \cdot 5^2}{7 \cdot 11} = \log (2 \cdot 5^2) - \log (7 \cdot 11) = \log 2 + 2 \log 5 - \log 7 - \log 11$$

Figura 23. Aplicación propiedades logaritmos. Libro 1

luego se muestran ejemplos de cómo aplicarla (Fig. 23), por lo que se enmarcan en un enfoque conductista.

- La propiedad Cambio de base se demuestra de forma deductiva (Fig. 24), explicando cada uno de los pasos realizados, sin embargo, luego se muestran ejemplos de cómo aplicarla, por lo que se enmarcan en un enfoque conductista.

Esta propiedad tiene especial importancia ya que la mayoría de las calculadoras solo permiten calcular logaritmos en base 10 o e, y de esta manera podemos encontrar su equivalencia. Por ejemplo:

$$\log_3 5 = \frac{\log 5}{\log 3} \approx \frac{0,7}{0,48} = 1,458\bar{3}$$

Figura 24. Propiedad cambio de base. Libro 1

5.2.3.3. MAEt 3: Aplicaciones de los logaritmos

En el caso de la sección del libro llamada Aplicaciones de logaritmos, se desarrolla la idea en base a un ejemplo contextualizado sobre la Intensidad del Sonido y se introduce el concepto de ecuaciones logarítmicas tal como se vio en la sección 5.2.2.4 MACt4. Para resolver estas ecuaciones se entrega un algoritmo (Fig. 14)

Para luego dar paso a dos ejemplos, los cuales resuelve el libro de texto como se muestra en la figura 25.

Ejemplo 1: $\log(8 - 4x) - \log(3 - 2x) = 2$

Tenemos que:

$$\log(8 - 4x) - \log(3 - 2x) = 2$$

Se aplican propiedades de logaritmos.

$$\log\left(\frac{8 - 4x}{3 - 2x}\right) = 2$$

$$\frac{8 - 4x}{3 - 2x} = 10^2 = 100$$

Se aplica la definición de logaritmo.

$$8 - 4x = 300 - 200x$$

$$196x = 292$$

$$x = \frac{292}{196} = \frac{73}{49}$$

Al remplazar en la ecuación, obtenemos

$$\log\left(8 - 4 \cdot \frac{73}{49}\right) - \log\left(3 - 2 \cdot \frac{73}{49}\right) = \log\left(\frac{100}{49}\right) - \log\left(\frac{1}{49}\right)$$

$$= \log 100 - \log 49 - \log 1 + \log 49 = 2$$

No hay restricciones, por lo que la solución obtenida es válida.

Figura 25. Resolución ecuaciones logarítmicas. Libro 1

En la sección Practiquemos lo aprendido del libro de texto de este año se entregan tanto ejemplos de resolución de ecuaciones logarítmicas, como también ejemplos de las aplicaciones de los logaritmos. Por el modo en como desarrolla la idea el libro de texto, esta sección se enmarca en un enfoque conductista.

5.2.4 Aplicación de la MAHt para la caracterización del libro 1.

Para evaluar las habilidades representadas en estos libros de texto, se utilizarán los parámetros definidos en el Marco Metodológico, con lo que de acuerdo a estos se tiene que, en relación con la habilidad de representar,

encontramos ejercicios en donde el estudiantado debe transitar entre los distintos niveles de representación de logaritmos para poder resolverlos como los que se muestran en la figura 26.

Practicemos lo aprendido

Repaso

1. Expresa como logaritmo las siguientes potencias.

a) $2^3 = 8$	g) $4^{-1} = \frac{1}{4}$
b) $7^1 = 7$	h) $8^{-5} = \frac{1}{32\,768}$
c) $4^6 = 4096$	i) $8^{-3} = \frac{1}{512}$
d) $9^3 = 729$	j) $\left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3125}{7776}$
e) $6^5 = 7776$	
f) $2^{-5} = \frac{1}{32}$	

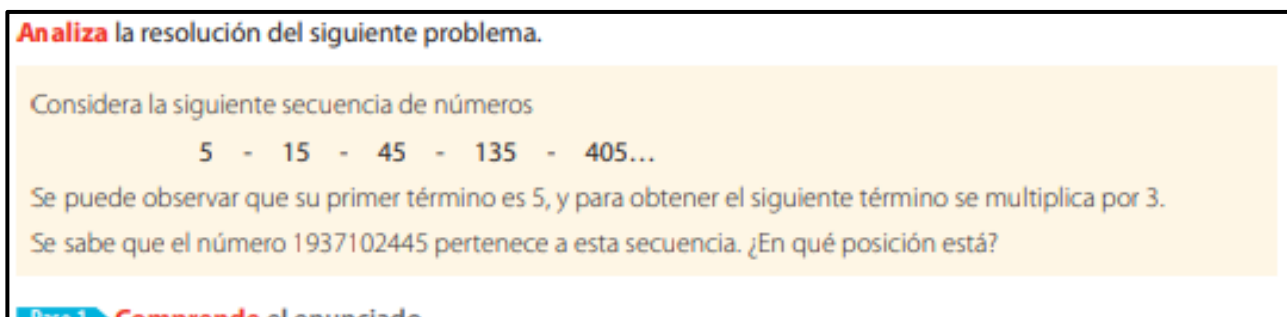
2. Expresa como potencia los siguientes logaritmos.

a) $\log_2 32 = 5$	e) $\log_7 117\,649 = 6$
b) $\log_8 512 = 3$	f) $\log_3 1 = 0$
c) $\log_{10} 10\,000\,000 = 7$	g) $\log_2 \frac{1}{32} = -5$
d) $\log_9 531\,441 = 6$	h) $\log_7 \frac{1}{343} = -3$

Figura 26. Habilidad de representar. Libro 1

Como podemos apreciar en esta imagen, la instrucción es utilizar la definición de logaritmo, de esta forma los estudiantes deben representar como logaritmo las potencias y viceversa.

Ahora con respecto a la habilidad de modelar, en estos libros de texto encontramos que existe un problema en donde se les muestra a los estudiantes como a partir de una secuencia numérica ellos deben encontrar la posición que ocupa en esta un número dado, sin embargo, esta práctica es guiada y dentro de los ejercicios presentes en el libro de texto no se encuentran problemas en donde las y los estudiantes deban modelar por si solos (Fig. 27).



Analiza la resolución del siguiente problema.

Considera la siguiente secuencia de números

$$5 - 15 - 45 - 135 - 405 \dots$$

Se puede observar que su primer término es 5, y para obtener el siguiente término se multiplica por 3.
Se sabe que el número 1937102445 pertenece a esta secuencia. ¿En qué posición está?

Responde el enunciado.

Figura 27. Habilidad de modelar. Libro 1

El desarrollo de la habilidad de argumentar y comunicar implica que se relacionen la capacidad de expresar ideas con claridad y, como se expuso dentro del marco teórico, busca que los estudiantes desarrollen una actitud reflexiva, por lo que deben ser capaces de comprender el razonamiento que existe detrás de cada problema. Dentro de los libros de textos analizados, siguiendo la pauta planteada dentro del marco metodológico podemos observar que esta habilidad se encuentra desarrollada ya que dentro de la práctica hay tres problemas de aplicación (página 69) en donde deben

concluir, inferir y discutir los resultados que obtienen al resolverlos. A continuación, se muestra uno de estos problemas (Fig. 28).

7. Al tomar un medicamento la cantidad de miligramos que quedan de él en la sangre luego de t horas de haber sido administrado se calcula mediante la fórmula

$$C = 10e^{-0.2t}$$

a) ¿Cuántos miligramos del medicamento hay en la sangre luego de una hora?

b) Si la cantidad de miligramos no puede bajar de 3, ¿aproximadamente, cada cuánto tiempo debe tomarse el medicamento?

c) Según esta fórmula, ¿hay algún momento en que deja de haber medicamento en la sangre? Justifica tu respuesta y discute con tus compañeros.

Figura 28. Habilidad de argumentar y comunicar. Libro 1

Ahora, si nos enfocamos en la habilidad de resolver problemas, según los indicadores que deben cumplirse para el desarrollo de esta habilidad, el libro de texto ejemplifica como desarrollar la habilidad, específicamente, a la hora de resolver ecuaciones logarítmicas, las cuales se explican de manera clara y realizando los pasos correspondientes, esto se muestra en la figura 29.

Ejemplo 2: $2 \log (x+1) - \log (x-2) = \log (x+3)$

Tenemos que:

$$2 \log (x+1) - \log (x-2) = \log (x+3) \leftarrow \text{Se aplican propiedades de logaritmos.}$$

$$\log \frac{(x+1)^2}{x-2} = \log (x+3)$$

$$\frac{(x+1)^2}{x-2} = x+3 \leftarrow \text{Se igualan los argumentos.}$$

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + x - 6$$

$$x = -7$$

Al remplazar en la ecuación tenemos:

$$2 \log (-7+1) - \log (-7-2) = \log (-7+3) \rightarrow 2 \log (-6) - \log (-9) = \log (-4)$$

Hay logaritmos con argumento negativo, por lo que la solución no es válida.

Figura 29. Habilidad de resolver problemas. Libro 1

Además, dentro de la práctica nos encontramos con ejercicios en donde los estudiantes deben resolver ecuaciones logarítmicas, en los cuales se desarrolla la habilidad de resolver problemas (Fig. 30).

Repaso

1. **Aplica** las propiedades de logaritmos para reducir las siguientes expresiones a un solo logaritmo.

a) $\log(x+5) + \log(x-2)$

b) $\log(2x+7) - \log(x+1)$

c) $\log(x^2+5x+1) - \log(x-1)$

d) $\frac{1}{2} \log(x^2+4x+4) - \log(x+2)$

e) $\log(x^2+7x+12) - \log(x^2+4x+3)$

f) $\log(x^2+4x-5) - \log(x+5) - \log(x+1)$

g) $\log\sqrt{x-2} - \log(x+7) - \log(x-2)$

Figura 30. Habilidad de resolver problemas. Libro 1

5.3 Caracterización libro 2

5.3.1 Aplicación de la MIGt para la caracterización del libro 2.

Tabla 11. Matriz de información general libro 2

Campos genéricos MIGt (i) con i=1,2,3,4	Libro 2
MIGt1: Título y Procedencia	Matemáticas segundo año de educación media. Distribuido por el Ministerio de Educación.
MIGt2: Datos de autoría	Ana José Chacón Aguirre Licenciada en Educación de Matemática y Computación Profesora de Estado de Matemática y Computación Universidad de Santiago de Chile
	Guillermo García Castillo Licenciado en Educación de Física y Matemática Profesor de Estado de Física y Matemática Universidad de Santiago de Chile

	<p>Pedro Rupin Gutiérrez Licenciado en Matemática, Profesor de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Chile</p>
	<p>Javiera Setz Mena Licenciada en Matemática, Profesora de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Chile</p>
	<p>Marcia Villena Ramírez Licenciada en Educación, Profesora de Matemática Magíster en Educación con mención Dificultades del Aprendizaje Pontificia Universidad Católica de Chile</p>
MIGt3: Edición y tipo de obra	<p>Ediciones SM Chile S.A. Primera, edición. Impreso en el año 2018. Providencia. Chile. Este libro está destinado a estudiantes de segundo medio.</p>
MIGt4: Presentación	<p>Este libro se trabajó en formato físico, cuenta con 367 páginas.</p>

5.3.2 Aplicación de la MACt para la caracterización del libro 2.

El índice de este libro de texto se encuentra en las páginas 4, 5 y 6, en donde los contenidos se encuentran divididos como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 12. Organización contenidos libro 2

Unidad	Contenido
Unidad 1	Números
Unidad 2	Algebra y Funciones
Unidad 3	Geometría
Unidad 4	Probabilidad y Estadística

A contar de la página 50 encontramos el contenido de logaritmos el cual se extiende hasta la página 75, lo que representa a un 6,8% del libro de texto. Las figuras desde la 31 a la 52 que se encuentran distribuidas, desde el apartado 5.3.2.1 hasta el apartado 5.3.4, corresponden a fotografías extraídas del libro de texto de Matemática de segundo año medio del año 2018 de los autores Chacon, A., García, G., Rupin, P., Setz, J., Villena, M.

5.3.2.1. MACT1: Uso de la notación Logaritmo.

La expresión $\log_a b$ es llamada logaritmo. Con respecto a sus componentes, a a se le denomina base, mientras que el argumento no es mencionado en su definición. Las restricciones pertinentes del logaritmo se encuentran completas (Fig. 31).

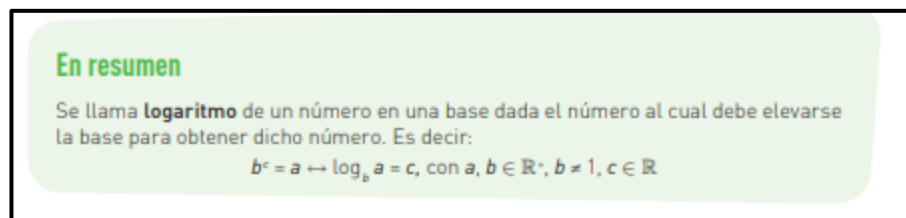


Figura 31. Definición y restricciones logaritmo. Libro 2

5.3.2.2. MACT2: Introducción al concepto

Para introducir el concepto de logaritmo, el libro de texto presenta un taller (Página 50) en el cual los estudiantes deben relacionar potencias con logaritmos sin aún conocer la definición, siguiendo un ejemplo (Fig. 32). Por ello, el taller a desarrollar se encuentra anterior a lo analizado en 5.3.2.1 MACT1: Uso del signo Logaritmo. Este se presenta como se muestra en la figura 31.

2 Completen la siguiente tabla, siguiendo el ejemplo.

Potencia	Base	Exponente	Logaritmo
$8^3 = 512$	8	3	$\log_8(512) = 3$
$10^4 = 10000$			
	6	-2	
			$\log_7(1) = 0$
$5^{-3} = 0,008$			
			$\log_{\mu}(4) = \frac{1}{3}$

Figura 32. Introducción al concepto de logaritmo. Libro 2

En este libro de texto se presenta un relato que tiene la finalidad de relacionar números grandes con muy pequeños, utilizando escalas logarítmicas para compararlos (Fig. 33).

Matemática y ciencia

Escalas logarítmicas

Las escalas logarítmicas son utilizadas en diversos ámbitos, por ejemplo la escala de magnitud sísmica de Richter con la cual se mide la intensidad de los terremotos y la del pH para medidas de acidez y alcalinidad; o bien en algunas unidades de medida, como los decibelios para el sonido o la magnitud estelar para el brillo de las estrellas. Estas escalas son especialmente pertinentes cuando el rango de datos de que se dispone es muy amplio y cuando los datos tienen (o así parece) una conducta exponencial o potencial.

Por ejemplo, si se considera la masa de los seres vivos, existen grandes diferencias entre los más pequeños y los mayores:

- un dragón de Komodo: $90 \text{ kg} = 90000 \text{ g} \approx 10^{4.96} \text{ g}$
- un rotífero (el menor animal pluricelular): $0,00000000603 \text{ g} \approx 10^{-7.22} \text{ g}$
- una ballena (el mayor de todos los animales): $120 \text{ Tm} = 120000000 \text{ g} \approx 10^{8.08} \text{ g}$

Entonces, para mostrar la relación entre sus masas o intentar graficar estos datos con la misma escala, es un problema que existan tales diferencias entre los valores. Una solución para esto es asignar a cada animal un valor, correspondiente al logaritmo (en base 10) de su masa, al que se le llama el "orden de magnitud". De esta manera, el orden de magnitud del rotífero es $-8,22$, el del dragón de Komodo es $4,96$ y el de la ballena, $8,08$.

Con estos valores se puede establecer una escala para la masa de los animales que no sea excesiva. El orden de magnitud de cada animal será un número entre -8 y 8 y se puede clasificar como:

- muy pequeños, los animales de órdenes entre -8 y -5
- pequeños, los que están entre -5 y -2
- medianos, los que están entre -2 y 2
- grandes, los que están entre 2 y 5
- muy grandes, los que están entre 5 y 8 .

En un rango pequeño, en este caso de -8 a 8 , con esta escala se consigue expresar realidades muy diferentes. Las escalas logarítmicas pueden ser muy útiles, pero ¡cuidado!... solo si se entienden bien. Por ejemplo, cuando se dice que la ballena es de orden 8 y la langosta es de orden 4 , no significa que la masa de una ballena sea el doble de la masa de la langosta.

De hecho, ya que $10^{8-4} = 10^4 = 10000$, esto significa que la ballena tiene 10000 veces la masa de la langosta.



Rotífero



Dragón de Komodo



Ballena jorobada

Figura 33. Escalas logarítmicas. Libro 2

Posterior a que la definición (Fig. 31) presentada en el libro de texto, los estudiantes deben utilizar la definición de logaritmos para determinar si se cumple o no la igualdad propuesta, tal como se muestra en la figura 34.

Actividades de práctica

1. Aplicando la definición de logaritmo, comprueba si las afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica.

a. $\log_5(25) = 2$	g. $\log_4(0,25) = -2$
b. $\log_2(0,25) = 0,5$	h. $\log_{36}(6) = 0,5$
c. $\log_3(-3) = 2$	i. $\log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt[5]{\frac{1}{81}}\right) = -\frac{8}{5}$
d. $\log_1(3,78) = 0$	j. $\log_{\frac{1}{2}}(125) = -3$
e. $\log(2) = 100$	k. $\log(10^9) = 5$
f. $\log(10) = 1$	l. $\log_3(\sqrt[3]{64}) = \frac{3}{2}$

2. Representa las siguientes relaciones numéricas usando logaritmos.

a. $9^3 = 729$

b. $5^{-2} = \frac{1}{25}$

c. $0,3^2 = 0,09$

d. $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$

e. $0,01^{-2} = 10\,000$

f. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 64$

g. $27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

Figura 34. Ejercicios definición logaritmos. Libro 2

Este libro de texto posee un apartado en donde se le indica al estudiante como introducir logaritmos en una calculadora científica. Esto se presenta en la figura 35 inserta a continuación.

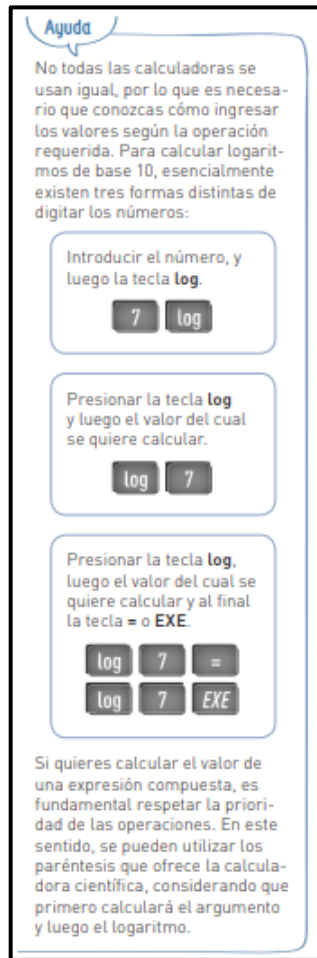


Figura 35. Uso de calculadora.
Libro 2

Como estrategia de razonamiento se utiliza el método inductivo, ya que comienza utilizando una actividad, y de forma guiada los estudiantes infieren la definición del logaritmo junto a sus restricciones, es decir, va desde lo particular a lo general (Fig. 32).

5.3.2.3. MACT3. Propiedades de los logaritmos

Las propiedades de los logaritmos son presentadas a partir de ejercicios en donde el estudiantado debe concluir y escribir las distintas propiedades (Fig. 36).

Taller

Consideren el valor de las siguientes potencias para resolver los ejercicios:

$2^0 = 1$	$3^0 = 1$	$4^0 = 1$	$6^0 = 1$
$2^1 = 2$	$3^1 = 3$	$4^1 = 4$	$6^1 = 6$
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$6^2 = 36$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$4^3 = 64$	$6^3 = 216$
$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$4^4 = 256$	$6^4 = 1296$
$2^5 = 32$	$3^5 = 243$	$4^5 = 1024$	$6^5 = 7776$
$2^6 = 64$	$3^6 = 729$	$4^6 = 4096$	$6^6 = 46656$

1 Calculen los siguientes logaritmos:

a. $\log_2(4) =$ d. $\log_2(2) =$

b. $\log_2(1) =$ e. $\log_3(5) =$

c. $\log_3(1) =$ f. $\log_6(1) =$

• ¿Qué pueden concluir?

2 Analicen si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas.

a. $\log_2(6 \cdot 36) = \log_2(6) + \log_2(36)$

b. $\log_2(16 \cdot 256) = \log_2(16) \cdot \log_2(256)$

c. $\log_2(8) + \log_2(4) = \log_2(8 \cdot 4)$

d. $\log_2(9 \cdot 81) = \log_2(9) + \log_2(81)$

e. $\log_2(4 + 4) = \log_2(4) + \log_2(4)$

f. $\log_2(1296) + \log_2(36) = \log_2(1296 \cdot 36)$

g. $\log_2(256 \cdot 4) = \log_2(256) + \log_2(4)$

h. $\log_2(8 + 8) = \log_2(8) \cdot \log_2(8)$

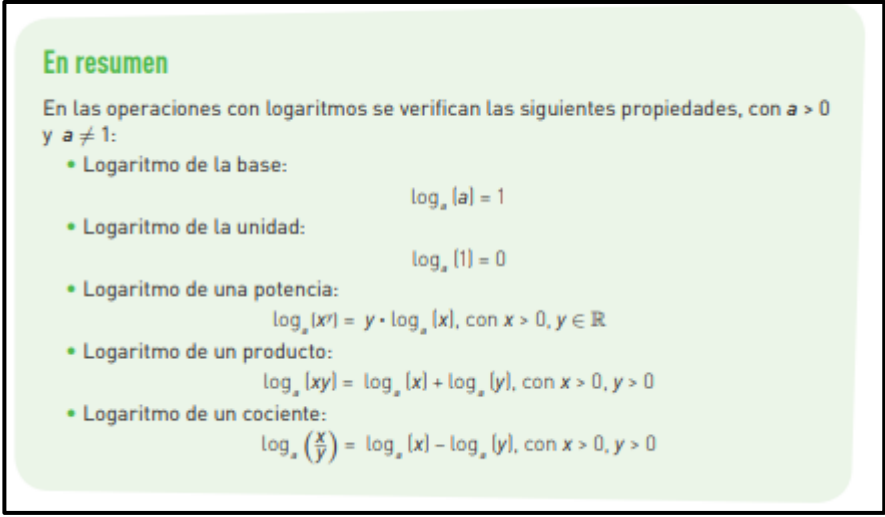
• ¿Qué pueden concluir?, ¿ocurrirá siempre lo mismo? Expliquen.

• Escriban una expresión algebraica que represente esta relación.

Figura 36. Propiedades logaritmos. Libro 2

Posteriormente al finalizar la unidad se presenta un cuadro resumen con las propiedades de los logaritmos, con sus restricciones completas (Fig. 37).

Por la forma en que se entregan las propiedades de los logaritmos, ninguna se encuentra demostrada y se presentan de manera unilateral.



En resumen

En las operaciones con logaritmos se verifican las siguientes propiedades, con $a > 0$ y $a \neq 1$:

- Logaritmo de la base:
 $\log_a(a) = 1$
- Logaritmo de la unidad:
 $\log_a(1) = 0$
- Logaritmo de una potencia:
 $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$, con $x > 0, y \in \mathbb{R}$
- Logaritmo de un producto:
 $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, con $x > 0, y > 0$
- Logaritmo de un cociente:
 $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$, con $x > 0, y > 0$

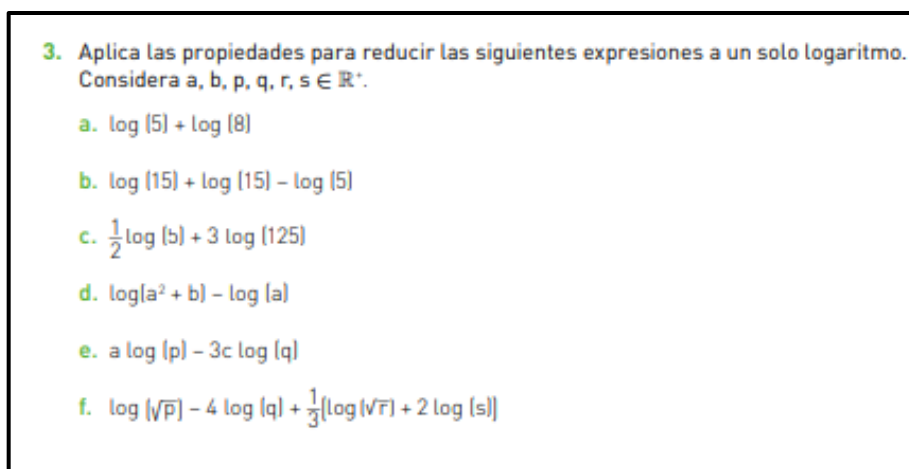
Figura 37. Resumen propiedades de logaritmos. Libro 2

En ella se encuentran las propiedades Logaritmo de la base, Logaritmo de la unidad, Logaritmo de una potencia, Logaritmo de un producto y Logaritmo de un cociente, faltando la propiedad de Cambio de base en el libro de texto a analizar.

Cabe destacar que las propiedades no se encuentran demostradas ya que se presentan como una actividad en donde se deben deducir a través de la inducción, siendo los estudiantes quienes deben descubrir cada una de las propiedades presentes en el texto.

5.3.2.4. MACT4: Aplicaciones de los logaritmos.

Por la forma en que fue enfocado el aprendizaje de los logaritmos en este libro de texto, las aplicaciones son planteadas como operaciones sencillas (Fig. 38), en donde los estudiantes deben calcular y despejar ecuaciones logarítmicas, sin que se hayan explicado antes, además se da pie a que el estudiante use calculadora científica para realizar los ejercicios propuestos.



3. Aplica las propiedades para reducir las siguientes expresiones a un solo logaritmo. Considera $a, b, p, q, r, s \in \mathbb{R}^+$.

- a. $\log (5) + \log (8)$
- b. $\log (15) + \log (15) - \log (5)$
- c. $\frac{1}{2} \log (b) + 3 \log (125)$
- d. $\log (a^2 + b) - \log (a)$
- e. $a \log (p) - 3c \log (q)$
- f. $\log (\sqrt{p}) - 4 \log (q) + \frac{1}{3}(\log (\sqrt{r}) + 2 \log (s))$

Figura 38. Ejercicios de aplicación propiedades de logaritmos. Libro 2

Dentro de la práctica en estos libros de texto se trabaja con la relación entre el área de la superficie corporal la masa y la estatura, la cantidad de medicamento en sangre (Logaritmos y Medicina), relación entre el tamaño de asteroides (Logaritmos y Astronomía), cálculos de pH e intensidad de la luz (Logaritmos y Ciencias) e Intensidad del sonido (Logaritmos y Música). (Imágenes en Anexo 8).

4. Ciencias naturales. Para describir la intensidad del sonido y relacionarla con su magnitud en watts por metro cuadrado (W/m^2) se utilizan los decibeles. La intensidad en decibeles y la magnitud (I) se relacionan mediante la fórmula

$$dB = 120 + 10 \log(I)$$

a. Analiza las siguientes situaciones y completa la tabla con la magnitud del sonido correspondiente.

Situación	Intensidad del sonido (dB)	Magnitud del sonido (W/m^2)
Pasos en el suelo	10	
Viento en los árboles	20	
Tráfico en hora de congestión	80	
Motocicleta	100	
Despegue de un avión	150	
Explosión	180	

b. Investiga: ¿qué umbrales de sonido, en decibeles, corresponden a un ambiente saludable?, ¿y al comienzo del dolor? Compara con tus compañeros.

c. ¿Cuál es la magnitud del sonido de un equipo de música utilizado en un concierto?, ¿a cuántos decibeles corresponde?

d. Si se sabe que un equipo de sonido tiene una magnitud igual al doble de la de otro, ¿cuál es la diferencia que poseen en intensidad?

Figura 39. Problema aplicación logaritmo. Libro 2

5.3.3 Aplicación de la MAEt para la caracterización del libro 2.

5.3.3.1. MAEt1: Definición de logaritmo

El libro de texto utiliza las potencias para introducir al concepto de logaritmo con el taller mencionado en la sección MACt2: Introducción al concepto.

Taller

Observen cómo se puede describir la siguiente relación.

$$4^5 = 1024$$

1024 es la quinta potencia de 4.

La raíz quinta de 1024 es 4.
 $4 = \sqrt[5]{1024}$

El logaritmo de 1024 en base 4 es 5. Es decir, 5 es el número al cual se eleva 4 para obtener 1024.
 $\log_4(1024) = 5$

1 En cada caso, describan la relación usando las tres interpretaciones señaladas.

$$2^8 = 256 \quad 3^{12} = 531441 \quad 5^6 = 15625$$

2 Completen la siguiente tabla, siguiendo el ejemplo.

Potencia	Base	Exponente	Logaritmo
$8^3 = 512$	8	3	$\log_8(512) = 3$
$10^4 = 10000$			
	6	-2	
			$\log_9(1) = 0$
$5^{-3} = 0,008$			
			$\log_{64}(4) = \frac{1}{3}$

Figura 40. Taller de introducción concepto de logaritmo. Libro 2

También se realizan las siguientes preguntas con respecto a las restricciones del argumento y de la base del logaritmo.

- 3** Respondan cada pregunta justificando sus respuestas.
- a. ¿La base de un logaritmo puede ser negativa?
 - b. ¿Existe el logaritmo de un número negativo?, ¿y el logaritmo de 0?
 - c. ¿Cuál es el logaritmo de 1 en base 3?, ¿y en base 7?
¿Depende tu respuesta de la base?

Figura 41. Restricciones argumento de un logaritmo. Libro 2

Esto, con la intención de que el estudiante descubra las restricciones que poseen los diversos elementos del logaritmo.

Por lo tanto, la definición del concepto se enmarca en el enfoque constructivista.

5.3.3.2. MAEt2: Propiedades de los logaritmos

Si bien, tal como se mencionó en el segmento MACt3. Propiedades de los logaritmos, ninguna de estas se encuentra demostradas bajo el razonamiento deductivo matemático, la intencionalidad del libro es otra, y es que se en la página 54 se presenta un taller en donde los estudiantes deben descubrir las propiedades por sí mismo.

Para abordar las propiedades Logaritmo de la unidad y Logaritmo de la base se presenta la siguiente actividad:

1 Calculen los siguientes logaritmos:

a. $\log_4(4) =$ <input type="text"/>	d. $\log_2(2) =$ <input type="text"/>
b. $\log_6(1) =$ <input type="text"/>	e. $\log_5(5) =$ <input type="text"/>
c. $\log_3(1) =$ <input type="text"/>	f. $\log_4(1) =$ <input type="text"/>

Figura 42. Actividad propiedad logaritmo de la unidad y logaritmo de la base. Libro 2

Con ello los estudiantes descubren que cuando la base y el argumento sean iguales, el resultado del logaritmo será 1, con lo que obtendrán la propiedad Logaritmo de la base. También concluirán que, cuando el argumento del logaritmo sea 1, independiente de su base, el resultado siempre será 0, con lo que obtendrán la propiedad Logaritmo de la unidad. Ambas propiedades se trabajarán de forma inductiva para luego generalizar:

• Logaritmo de la base:	$\log_a(a) = 1$
• Logaritmo de la unidad:	$\log_a(1) = 0$

Figura 43. Propiedad logaritmo de la base y de la unidad. Libro 2

Por lo tanto, se trabajan bajo un paradigma constructivista.

Para abordar la propiedad Logaritmo del producto se presenta la siguiente actividad:

2 Analicen si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas.

a. _____ $\log_6(6 \cdot 36) = \log_6(6) + \log_6(36)$

b. _____ $\log_4(16 \cdot 256) = \log_4(16) \cdot \log_4(256)$

c. _____ $\log_2(8) + \log_2(4) = \log_2(8 \cdot 4)$

d. _____ $\log_3(9 \cdot 81) = \log_3(9) + \log_3(81)$

e. _____ $\log_2(4 + 4) = \log_2(4) + \log_2(4)$

f. _____ $\log_6(1296) + \log_6(36) = \log_6(1296 \cdot 36)$

g. _____ $\log_4(256 \cdot 4) = \log_4(256) + \log_4(4)$

h. _____ $\log_2(8 + 8) = \log_2(8) \cdot \log_2(8)$

- ¿Qué pueden concluir?, ¿ocurrirá siempre lo mismo? Expliquen.
- Escriban una expresión algebraica que represente esta relación.

Figura 44. Actividad propiedad logaritmo de un producto. Libro 2

Al resolver cada una de estas expresiones, el estudiante debería ser capaz de diferenciar en a que equivale el producto del argumento en un logaritmo, por ejemplo, al resolver el ejercicio a utilizando los conocimientos previos, tanto el miembro izquierdo como el miembro derecho de la igualdad dan como resultado 3, por lo que la expresión $\log_6(6 \cdot 36) = \log_6(6) + \log_6(36)$, es válida. En cambio, al resolver el ejercicio b el lado izquierdo de la igualdad nos da como resultado 6, mientras que el lado derecho resulta 8,

con ello, la expresión $\log_4(16 \cdot 256) = \log_4(16) \cdot \log_4(256)$, no es correcta.

Por lo tanto, de forma inductiva se puede concluir que $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$, enmarcando su enseñanza de modo constructivista.

Para abordar la propiedad Logaritmo del cociente se procede de forma similar, a través de ejercicios a desarrollar (Fig. 44)

3 Analicen si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas.

a. _____ $\log_8(216:36) = \log_8(216) - \log_8(36)$

b. _____ $\log_4(256:4) = \log_4(256) : \log_4(4)$

c. _____ $\log_2(64 - 32) = \log_2(64) : \log_2(32)$

d. _____ $\log_2(32) - \log_2(8) = \log_2(32:8)$

e. _____ $\log_3(729:27) = \log_3(729) - \log_3(27)$

f. _____ $\log_4(1024:4) = \log_4(1024) - \log_4(4)$

g. _____ $\log_2(16 - 8) = \log_2(16) - \log_2(8)$

h. _____ $\log_6(7776) - \log_6(216) = \log_6(7776:216)$

- ¿Qué pueden concluir?, ¿ocurrirá siempre lo mismo? Expliquen.
- Escriban una expresión algebraica que represente esta relación.

Figura 45. Actividad propiedad logaritmo de un cociente. Libro 2

Para el ejemplo *a*, aplicando conceptos previos, el resultado tanto del miembro izquierdo como del miembro derecho de la igualdad serán equivalentes, siendo este 1, en cambio, para el ejemplo *b* la igualdad no se

cumpliría, ya que al lado izquierdo tendríamos como resultado 3, mientras que en el lado derecho resultaría en 4.

Por lo tanto, de forma inductiva se puede concluir que $\log_a(x:y) = \log_a x - \log_a y$, enmarcando su enseñanza de modo constructivista.

Del mismo modo se nos presenta un ítem para introducir la propiedad Logaritmo de una potencia del siguiente modo (Fig. 46).

4 Analicen si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas.

a. _____ $\log_6(36^2) = 2 \cdot \log_6 36$

b. _____ $\log_4(4^4) = \log_4(4 \cdot 4)$

c. _____ $\log_2(64) = 3 \cdot \log_2(4)$

d. _____ $2 \cdot \log_3(27) = \log_3(27^2)$

- ¿Qué pueden concluir?, ¿ocurrirá siempre lo mismo? Expliquen.
- Escriban una expresión algebraica que represente esta relación.

Figura 46. Actividad propiedad logaritmo de una potencia. Libro 2

Por ejemplo, al resolver el ejercicio *a* utilizando conceptos previos, el resultado de ambos miembros de la igualdad es 4, en cambio, al resolver el ejercicio *b*, la igualdad no es correcta, ya que obtenemos por un lado 4 y por el otro 2.

Por lo tanto, de forma inductiva se puede concluir que $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x$, enmarcando su enseñanza de modo constructivista.

Luego, se continúan trabajando de este modo, es decir de forma inductiva y sin aún definir las propiedades de las potencias, en un capítulo denominado Actividades de modelación (Fig. 47).

Actividades de modelación

1. Observa cómo se simplifica esta expresión y explica en qué consiste cada paso.

$$\log(121) + 4 \log(33) - \log \sqrt[3]{\frac{9}{11}}$$

= $\log(11^2) + 4 \log(3 \cdot 11) - \log \left(\frac{3^2}{11}\right)^{\frac{1}{3}}$ _____

= $2 \log(11) + 4(\log(3) + \log(11)) - \frac{1}{3}(2 \log(3) + \log(11))$ _____

= $2 \log(11) + 4 \log(3) + 4 \log(11) - \frac{2}{3} \log(3) - \frac{1}{3} \log(11)$ _____

= $\frac{17}{3} \log(11) + \frac{10}{3} \log(3)$ _____

- ¿Podría simplificarse más?, ¿por qué? _____
- _____
- Usando $\log(11) \approx 1,04$ y $\log(3) \approx 0,48$, ¿cuál es el valor de la expresión? _____
- _____

Figura 47. Actividades de modelación. Libro 2

Finalmente se definen las propiedades de los logaritmos en un cuadro resumen (Fig. 37).

Con ello, desde casos particulares se llegó a las propiedades de las potencias enunciadas.

En el caso de la propiedad Cambio de base, en el libro no se encuentra definida, por lo que no es posible evaluar el enfoque de aprendizaje a utilizar.

5.3.3.3. MAEt3: Aplicaciones de los logaritmos

En el caso del texto a analizar, este no cuenta con una sección llamada Aplicación de los logaritmos, sin embargo, si introduce su uso a través de un problema que tiene relación con la masa de los seres vivos.

Luego el texto realiza una actividad guiada en la cual los estudiantes deben utilizar la intensidad del sonido para calcular la magnitud de este y sacar conclusiones. En general, las aplicaciones de los logaritmos se revisan de modo que el estudiante debe ser quien descubra como resolver los ejercicios propuestos a través de los enunciados, por lo que su enfoque es constructivista.

5.3.4 Aplicación de la MAHt para la caracterización del libro 2.

Desde la primera página se impulsa el desarrollo de la habilidad de representar, ya que se propone una actividad en la cual los estudiantes deben transitar por distintos niveles requeridos por esta habilidad al completar una

tabla que relaciones potencias, raíces enésimas y logaritmos. Esto se muestra en la figura 48 plasmada a continuación.

6 Completa la siguiente tabla.

Potencia	Raíz enésima	Logaritmo
		$\log_4(1024) = 5$
$10^3 = 1000$		
	$\sqrt[3]{512} = 8$	
$5^{-4} = 0,0016$		
		$\log_4(1) = 0$
	$\sqrt[3]{243} = 3$	

Figura 48. Habilidad de representar. Libro 2

Con respecto a la habilidad de modelar, se presenta un taller de habilidades en donde se explica paso a paso el desarrollo de esta habilidad, seguido de un ejercicio práctico que debe realizar el estudiantado. Ambos problemas de muestran a continuación.

Taller de habilidades Modelar

Emilia publica un post en una página de sus redes sociales y observa cómo es visitado por sus amigos y los amigos de ellos a medida que pasa el tiempo.

Minutos	1	2	3	4	5	6
Visitas	3	12	48	192	768	3072

¿En cuánto tiempo alcanzará a tener 768 432 visitas?

Figura 49. Habilidad modelar. Libro 2

Este problema se encuentra desarrollado en cinco pasos, en los cuales se deben identificar si existe algún patrón o regularidad, luego se debe determinar el valor inicial y el que genera el patrón que se observa previamente, seguido de buscar el valor de n aplicando logaritmos, reemplazar valores y calcular para finalmente comprobar el resultado obtenido. Posteriormente las y los estudiantes desarrollan la siguiente actividad.

Emilia se entusiasma y publica otro post y observa la cantidad de visitas.

Minutos	1	2	3	4	5	6
Visitas	4	20	100	500	2500	125000

1 ¿Logrará 585 937 500 visitas?, ¿y 976 562 500?, ¿en cuánto tiempo?

2 Lucas publicó una foto y observó que en el primer minuto había 2 visitas, mientras que en el minuto 13 ya había 1 062 882 visitas. Si el patrón entre las cantidades es multiplicativo, ¿por cuál número se multiplican las cantidades?

Figura 50. Habilidad modelar. Libro 2

Se aborda la habilidad de Argumentar y comunicar en el desarrollo del problema número 4 de la página 53, en este se debe analizar una situación utilizando una tabla, investigar una situación y compararla con la de sus compañeros, respondiendo preguntas planteadas en el segmento a trabajar.

4. **Ciencias naturales.** Para describir la intensidad del sonido y relacionarla con su magnitud en watts por metro cuadrado (W/m^2) se utilizan los decibelios. La intensidad en decibelios y la magnitud (I) se relacionan mediante la fórmula

$$dB = 120 + 10 \log(I)$$

a. Analiza las siguientes situaciones y completa la tabla con la magnitud del sonido correspondiente.

Situación	Intensidad del sonido (dB)	Magnitud del sonido (W/m^2)
Pasos en el suelo	10	
Viento en los árboles	20	
Tráfico en hora de congestión	80	
Motocicleta	100	
Despegue de un avión	150	
Explosión	180	

- b. Investiga: ¿qué umbrales de sonido, en decibelios, corresponden a un ambiente saludable?, ¿y al comienzo del dolor? Compara con tus compañeros.
- c. ¿Cuál es la magnitud del sonido de un equipo de música utilizado en un concierto?, ¿a cuántos decibelios corresponde?
- d. Si se sabe que un equipo de sonido tiene una magnitud igual al doble de la de otro, ¿cuál es la diferencia que poseen en intensidad?
- e. ¿Qué recomendaciones existen para el uso de audífonos para escuchar música? ¿Los usas tú en niveles adecuados para tu salud?

Figura 51. Habilidad de comunicar y argumentar. Libro 2

Como podemos observar en la figura adjunta, se invita a profundizar en esta habilidad dentro de este libro de texto, ya que el estudiantado en cada pregunta debe argumentar y generar conjeturas, además de sacar conclusiones a partir de lo trabajado.

Finalmente, con respecto a la habilidad de resolver problemas, en este libro de texto encontramos una amplia gama de ejercicios que permiten trabajar esta habilidad, entre ellos se puede observar la figura 52 presentada a continuación.

¿Qué aprendí hoy?

Un médico detecta que un paciente requiere mantener los niveles de un medicamento en la sangre. La cantidad C de miligramos que hay presentes en ella va disminuyendo con el tiempo t en horas de acuerdo a la relación

$$\log C = 1 - 0,087t$$

- ¿Cuál es la dosis que se administra del medicamento?
- ¿Al cabo de cuántas horas quedan 0,5 mg del medicamento?
- ¿Cuántos miligramos quedan en la sangre 8 horas después?
- Si el medicamento se administra a las 8 A.M. y no debe bajar de 0,3 mg, ¿a qué hora debe recibir la siguiente dosis?

Figura 52. Habilidad resolución de problemas. Libro 2

En cuanto a las cuatro habilidades en este libro de texto, se puede afirmar que estas se encuentran notablemente más desarrolladas que en el libro anterior.

5.4 Caracterización libro 3

5.4.1 Aplicación de la MIGt para la caracterización del libro 3.

Tabla 13. Matriz información general libro 3

Campos genéricos MIGt (i) con i=1,2,3,4	Libro 3
MIGt1: Título y Procedencia	Matemáticas segundo año de educación media. Distribuido por el Ministerio de Educación.
MIGt2: Datos de autoría	Eduardo Díaz Valenzuela Licenciado en Educación Matemática y Computación Profesor de Estado en Matemática y Computación
	Natalia Ortiz Solís Licenciada en Educación Matemática y Computación Profesora de Estado en Matemática y Computación
	Patricio Norambuena Morales Licenciado en Educación Matemática y Computación.

	Katherine Morales Valderrama Licenciada en Educación Matemática y Computación
	Manuel Rebolledo Hernández Licenciado en Matemática
	Robbie Barrera Yáñez Profesor de Estado en Física y Matemática
MIGt3: Edición y tipo de obra	Ediciones SM Chile S.A. Primera edición. Impresa en el año 2021. Providencia. Chile. Este libro está destinado a estudiantes de segundo medio.
MIGt4: Presentación	Este libro se trabajó en formato digital, cuenta con 200 páginas.

5.4.2 Aplicación de la MACt para la caracterización del 3.

En las páginas 4 y 5 de estos libros de textos encontramos el índice, el cual se encuentra dividido en 4 unidades de la siguiente forma:

Tabla 14. Contenidos abordados en el libro 3

Unidad	Contenido
Unidad 1	Números
Unidad 2	Algebra y Funciones
Unidad 3	Geometría
Unidad 4	Probabilidad y Estadística

A contar de la página 28, encontramos el contenido de Logaritmos, el cual se extiende hasta la página 39, esto corresponde a 11 páginas que representan el 5,5% del libro de texto. Las figuras desde la 53 a la 74 que se encuentran distribuidas, desde el apartado 5.4.2.1 hasta el apartado 5.4.4, corresponden a fotografías extraídas del libro de texto de Matemática de segundo año medio del año 2021 de los autores Diaz, E., Ortiz, N., Morales, K., Rebolledo, M., Barrera, R. y Norambuena, P.

5.4.2.1. MACT1: Uso de la notación Logaritmo.

La expresión $\log_a b$ es llamada logaritmo. Con respecto a sus componentes, a a se le denomina base, mientras que el argumento no es mencionado en su definición (Fig. 53). Las restricciones pertinentes del logaritmo se encuentran completas.

Se llama **logaritmo de base b de a** al número c al cual debe elevarse la base b para obtener a. Es decir:

$$b^c = a \leftrightarrow \log_b a = c$$

Con $a, b \in \mathbb{R}^+, b \neq 1$ y $c \in \mathbb{R}$. Por ejemplo:

$5^3 = 125 \leftrightarrow \log_5 125 = 3$ y se lee "logaritmo en base 5 de 125".

$\sqrt{9} = 3 \leftrightarrow 9^{\frac{1}{2}} = 3 \leftrightarrow \log_9 3 = \frac{1}{2}$ y se lee "logaritmo en base 9 de 3".

▶ ♦ ¿Qué ventaja tiene representar en escala logarítmica las masas de los animales?

Cuando la base es 10, se omite: $\log_{10} x = \log x$


Figura 53. Definición de logaritmo. Libro 3

5.4.2.2. MACT2: Introducción al concepto


Para introducir el concepto el libro de texto presenta una actividad de análisis en donde se comparan potencias expresadas como notación científica, invitando al estudiante a sacar conclusiones sobre lo que se plantea en la actividad (Fig. 54).

BIología


1. Analiza la siguiente información. Luego, realiza las actividades.




Tardigrada = 1,25 ng




Mariposa 0,005 g



Chincol 30 g



Puma 70 kg



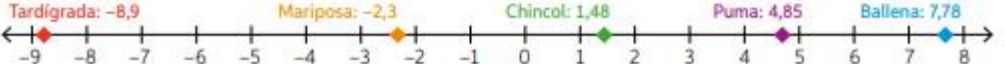
Ballena jorobada 30 t

a. Transforma a gramos la masa de los animales y relacionalas con las siguientes potencias racionales de 10. Utiliza las equivalencias de 1 kg = 1000 g, 1 t = 1000 kg y 1 ng = 10^{-9} g.

- $10^{-8,9}$
- $10^{-2,3}$
- $10^{1,48}$
- $10^{4,85}$
- $10^{7,48}$

b. ♦ Se quiere ubicar en una escala las masas de todos los animales anteriores. ¿Qué dificultades encuentras al construir la escala utilizando los gramos? Comenta con tu curso.

c. ♦ ¿Qué relación existe entre la siguiente escala y las potencias de 10 anteriores? Explica.



Tardigrada: -8,9 Mariposa: -2,3 Chincol: 1,48 Puma: 4,85 Ballena: 7,78

Figura 54. Actividad introducción de concepto logaritmo. Libro 3

Posteriormente se presenta la definición de logaritmos que se mostró en 5.4.2.1 MACT1: Uso del signo logaritmo, para continuar con una serie de ejercicios que permiten su aplicación, en estos ejercicios el estudiantado debe representar, calcular y comprobar igualdades, utilizando una metodología deductiva (Fig. 55).

2. Representa las siguientes relaciones numéricas usando logaritmos.

Ejemplo: $5^2 = 25 \leftrightarrow \log_5 25 = 2$

a. $9^3 = 729$	d. $9\frac{1}{2} = 3$	g. $(\frac{1}{2})^{-6} = 64$
b. $0,3^2 = 0,09$	e. $5^{-2} = \frac{1}{25}$	h. $27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$
c. $(\frac{2}{3})^5 = \frac{32}{243}$	f. $0,01^{-2} = 10000$	i. $8^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{32}$

3. Determina en cada caso el valor de a.

Ejemplo: $\log_2 a = 3 \leftrightarrow 2^3 = a \rightarrow 8 = a$

a. $\log_a 2 = \frac{1}{2}$	d. $\log_5 0,04 = a$	g. $\log_9 a = 4$
b. $\log_a 8 = 3$	e. $\log_{\frac{1}{81}} 9 = a$	h. $\log_7 a = 3$
c. $\log_a 5 = -2$	f. $\log_{\frac{1}{64}} 2 = a$	i. $\log_{1000} a = -\frac{1}{3}$

4. Lee la siguiente información y responde utilizando tu calculadora.

En una calculadora científica, el botón "log" por defecto tiene una base 10. Para calcular un logaritmo debes seguir la secuencia:

"Log", "cantidad" y "="

a. Calcula los siguientes logaritmos utilizando tu calculadora.

• $\log 1000$	• $\log 0,1$	• $\log 0,2$
• $\log 100$	• $\log 1$	• $\log 20$
• $\log 10$	• $\log 2$	• $\log 200$

b. ♦ Comprueba los resultados anteriores utilizando la definición de logaritmos.

c. ♦ ¿Cuál(es) de los resultados tiene(n) una diferencia aproximada de 0,301?

d. ♦ Ingresa en la calculadora "log", "-10" y "=", ¿Cómo explicas lo ocurrido?

5. ♦ Comprueba si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas. Justifica.

a. $\log_5 25 = 2$	e. $\log_2 10 = 100$	i. $\log 10^5 = 5$
b. $\log_2 0,25 = 0,5$	f. $\log_{10} 0 = 1$	j. $\log_5 125 = -3$
c. $\log_9 -3 = 2$	g. $\log_4 0,25 = -2$	k. $\log_8 \sqrt[3]{64} = \frac{3}{2}$
d. $\log_1 3,78 = 0$	h. $\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$	l. $\log_2 \sqrt[3]{64} = 2$

Figura 55. Ejercicio aplicación definición de logaritmos. Libro 3

5.4.2.3. MACT3. Propiedades de los logaritmos

En el libro de texto analizado, las propiedades Logaritmo de la base y de la unidad no se encuentran demostradas y tampoco presentan sus restricciones pertinentes (Fig. 56), además, son presentadas unilateralmente.

Si a es un número real positivo distinto de 1, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- Logaritmo de la base:
 $\log_a a = 1$
- Logaritmo de la unidad:
 $\log_a 1 = 0$

Figura 56. Propiedades logaritmo de la base y logaritmo de la unidad. Libro 3

Las propiedades Logaritmo de un producto y Logaritmo de un cociente se demuestran correctamente y de la siguiente forma:

Al calcular el producto y el cociente entre x e y representando como potencias los logaritmos:

$$\log_b(x) = m \rightarrow b^m = x \qquad \log_b(y) = n \rightarrow b^n = y$$

Se tiene que:

$$x \cdot y = b^m \cdot b^n = b^{m+n} \qquad x : y = b^m : b^n = b^{m-n}$$
$$\rightarrow \log_b(x \cdot y) = m + n = \log_b(x) + \log_b(y) \qquad \rightarrow \log_b(x : y) = m - n = \log_b(x) - \log_b(y)$$

Figura 57. Demostración propiedades logaritmo de un producto y un cociente. Libro 3

Luego de esto, se formaliza la definición de cada una de estas propiedades con sus respectivas definiciones.

Sean b , x e y números reales positivos con $b \neq 1$, entonces:

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y \qquad \log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$$

Dicho de otra forma, el logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de los factores manteniendo la misma base. El logaritmo de un cociente es la resta de los logaritmos de los factores manteniendo la misma base.

Figura 58. Propiedad logaritmo de un producto y logaritmo de un cociente. Libro 3

Para el caso del logaritmo de una potencia, la demostración procede de la siguiente forma:

Si $\log_b a = c$, entonces $b^c = a$

Paso 1: Elevamos a n ambos lados de la igualdad: $(b^c)^n = a^n \rightarrow b^{c \cdot n} = a^n$

Paso 2: Utilizando la definición de logaritmo: $\log_b(a^n) = n \cdot c$

Paso 3: Reemplazamos c por $\log_b a$: $\log_b(a^n) = n \cdot \log_b a$

Figura 59. Demostración propiedad logaritmo de una potencia. Libro 3

Para luego formalizar su definición con sus respectivas restricciones (Fig. 60)

Sean b y x números reales positivos con $b \neq 1$ y n un número real, se cumple la propiedad de logaritmo de una potencia de la base:

$$\log_b(x^n) = n \cdot \log_b(x)$$

Figura 60. Propiedad logaritmo de una potencia. Libro 3

Para el caso de la propiedad Cambio de base se procede del mismo modo, es decir, como se presenta en la siguiente imagen:

Sea $\log_b(a) = c \rightarrow b^c = a$

PASO 1: $b^c = a \Rightarrow \log_p(b^c) = \log_p(a)$

PASO 2: $c \cdot \log_p(b) = \log_p(a)$

PASO 3: $c = \frac{\log_p(a)}{\log_p(b)}$

PASO 4: $\log_b(a) = \frac{\log_p(a)}{\log_p(b)}$

Figura 61. Demostración propiedad cambio de base de un logaritmo. Libro 3

Posteriormente, se formaliza su definición con sus restricciones pertinentes.

● Sean a y b números reales positivos diferentes de 1 y x un número real positivo:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Dicho de otra forma, es posible realizar un cambio de base para expresar un logaritmo de una base cualquiera en otra base.

Figura 62. Propiedad cambio de base de un logaritmo. Libro 3

5.4.2.4. MACT4: Aplicaciones de los logaritmos.

En este grupo de libros de textos los logaritmos son utilizados para realizar cálculos en diversas áreas, como por ejemplo para calcular la

intensidad del sonido (Logaritmos y Música, fig. 70), cálculos de pH, cálculos población de ciertos insectos (Logaritmos y Ciencias), Calcular la intensidad del brillo de ciertas estrellas (Logaritmos y Astronomía. Fig. 74), Calcular superficie corporal de una persona (Logaritmos y Medicina. Fig. 72). En todos estos problemas el estudiantado debe realizar un análisis de sus cálculos que involucra determinar ecuaciones, despejar ecuaciones logarítmicas y argumentar sus resultados. (Imágenes en Anexo 9)

5.4.3 Aplicación de la MAEt para la caracterización del libro 3.

5.4.3.1. MAEt1: Definición de logaritmo

Para presentar el concepto de logaritmo se utiliza una actividad previa (Fig. 63) en donde los estudiantes deben comparar números muy pequeños con muy grandes, por lo que es necesario utilizar otro tipo de representación para observar cómo se contrastan, para ello el texto usa potencias de 10. Sin embargo, no se hace un anclaje entre la actividad previa y la definición de logaritmo.

a. Transforma a gramos la masa de los animales y relacionalas con las siguientes potencias racionales de 10. Utiliza las equivalencias de 1 kg = 1000 g, 1 t = 1000 kg y 1 ng = 10^{-9} g.

- $10^{-8,9}$
- $10^{-2,3}$
- $10^{1,48}$
- $10^{4,85}$
- $10^{7,48}$

b. ♦ Se quiere ubicar en una escala las masas de todos los animales anteriores. ¿Qué dificultades encuentras al construir la escala utilizando los gramos? Comenta con tu curso.

c. ♦ ¿Qué relación existe entre la siguiente escala y las potencias de 10 anteriores? Explica.

Se llama **logaritmo de base b de a** al número c al cual debe elevarse la base b para obtener a. Es decir:

$$b^c = a \leftrightarrow \log_b a = c$$

Con $a, b \in \mathbb{R}^+$, $b \neq 1$ y $c \in \mathbb{R}$. Por ejemplo:

$5^3 = 125 \leftrightarrow \log_5 125 = 3$ y se lee "logaritmo en base 5 de 125".

$\sqrt{9} = 3 \leftrightarrow 9^{\frac{1}{2}} = 3 \leftrightarrow \log_9 3 = \frac{1}{2}$ y se lee "logaritmo en base 9 de 3".

Cuando la base es 10, se omite: $\log_{10} x = \log x$

▶ ♦ ¿Qué ventaja tiene representar en escala logarítmica las masas de los animales?

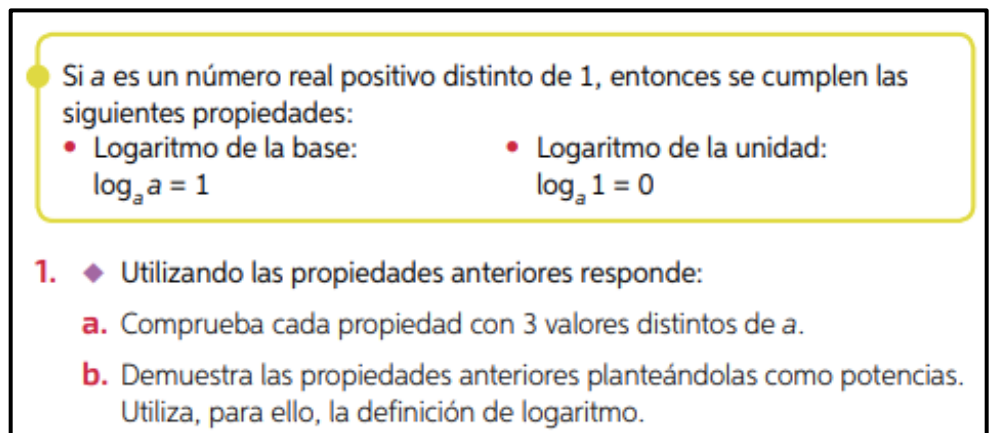
Figura 63. Presentación concepto logaritmo. Libro 3

El libro de texto entrega un ejemplo de cómo resolver logaritmos antes de dar paso a la práctica, lo cual condiciona al estudiante a seguir un paso a paso, por lo que el uso de la definición de logaritmo se enmarca en un enfoque conductista.

5.4.3.2. MAEt2: Propiedades de los logaritmos

Las propiedades Logaritmo de la base y Logaritmo de la unidad se enuncian al inicio del capítulo de Propiedades de los logaritmos presente en el libro de texto, es decir, no se demuestran ni se invita al estudiante a descubrirlas (Fig. 64).

Luego, se propone una actividad en donde se deben aplicar las propiedades con distintos valores para la base, además el libro de texto invita a demostrar las propiedades de forma deductiva, por lo que su enfoque de aprendizaje se basa en el constructivismo.



● Si a es un número real positivo distinto de 1, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- Logaritmo de la base:
 $\log_a a = 1$
- Logaritmo de la unidad:
 $\log_a 1 = 0$

1. ♦ Utilizando las propiedades anteriores responde:

- a. Comprueba cada propiedad con 3 valores distintos de a .
- b. Demuestra las propiedades anteriores planteándolas como potencias. Utiliza, para ello, la definición de logaritmo.

Figura 64. Propiedad logaritmo de la base y logaritmo de la unidad. Libro 3

La propiedad Logaritmo de una potencia se encuentra demostrada en el texto, luego invitando a razonar al estudiante sobre el método deductivo utilizado (Fig. 65). El texto se encarga de proponer una actividad donde los estudiantes deben aplicar las propiedades por primera vez, por lo que se enmarca en un enfoque constructivista.

de logaritmo.

2. ♦ Analiza el siguiente procedimiento. Luego, realiza las actividades:

Si $\log_b a = c$, entonces $b^c = a$

Paso 1: Elevamos a n ambos lados de la igualdad: $(b^c)^n = a^n \rightarrow b^{c \cdot n} = a^n$

Paso 2: Utilizando la definición de logaritmo: $\log_b(a^n) = n \cdot c$

Paso 3: Reemplazamos c por $\log_b a$: $\log_b(a^n) = n \cdot \log_b a$

a. ¿Qué propiedades de potencias se utilizaron? Nómbralas.

b. Comprueba cada propiedad con 3 valores distintos de a y n .

Sean b y x números reales positivos con $b \neq 1$ y n un número real, se cumple la propiedad de logaritmo de una potencia de la base:

$$\log_b(x^n) = n \cdot \log_b(x)$$

Dicho de otra forma, el logaritmo de una potencia es equivalente a la multiplicación del exponente por el logaritmo.

3. ♦ Utilizando la propiedad anterior, comprueba las siguientes proposiciones.

a. $\log_b(\sqrt[n]{a}) = \frac{\log_b a}{n}$

b. $\log_b\left(\frac{1}{a}\right) = -\log_b a$

Figura 65. Propiedad logaritmo de una potencia. Libro 3

La propiedad Logaritmo de un producto se introduce mediante una actividad contextualizada sobre los cálculos necesarios para el desarrollo de la astronomía, en donde los estudiantes observan como en la antigüedad, John Napier en vez de calcular $\log_4(65536 \cdot 16384)$, transformaba ambos factores del argumento a potencias, es decir $4^8 = 65536$ y $4^7 = 16384$, y luego convertía aquel logaritmo a un valor equivalente, el cual es $\log_4 4^8 + \log_4 4^7$, con lo cual, el resultado obtenido es 15. Siguiendo con

esto, se propone a los estudiantes utilizar este modelo para calcular logaritmos que posean multiplicaciones en su argumento, con lo cual, de un modo inductivo es posible llegar a su estructura, es decir, $\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$. Este trabajo no se realiza de un modo guiado, pero de todas formas se invita a trabajar al estudiante su aprendizaje con un enfoque constructivista.

La propiedad Logaritmo de un cociente solo se enuncia en la página 31 (Fig. 66), luego invitando al estudiante a la práctica en el ítem 5 de la página 31 en donde

ellos deben descubrir cómo aplicar la propiedad, por lo tanto, se enmarca en un enfoque constructivista

4. Calcula el valor de los logaritmos utilizando el siguiente razonamiento.

En los cálculos necesarios para el desarrollo de la astronomía, se presentaban operaciones como $65\,536 \cdot 16\,384$. Como se puede ver, los factores eran bastante grandes, lo que podía conducir a múltiples errores. Entonces, John Napier inventó "números artificiales" (logaritmos) que utilizaba para simplificar las operaciones de la siguiente forma:

Paso 1: Transformaba ambos números a una potencia de base común:

$$4^8 = 65536 \qquad 4^7 = 16384$$

Paso 2: Utilizando sus "números artificiales", transformaba la multiplicación en suma:

$$\log_4(65536 \cdot 16384) = \log_4(65536) + \log_4(16384) \\ \rightarrow \log_4 4^8 + \log_4 4^7 = 8 + 7 = 15$$

Paso 3: Así, en vez de calcular $65\,536 \cdot 16\,384$, obtenía el mismo resultado mediante la potencia de 4^{15} , el cual se buscaba en las tablas de potencias que había construido.

Vega, G. (1797). Tablas logarítmicas-trigonométricas (2. verb., verm. und gänzlich umgearb. Aufl., ed.). Leipzig: Weidmannische Buchhandlung.

- a. $\log_6(6 \cdot 36)$ d. $\log_6(1296 \cdot 36)$ g. $\log_{11}(11 \cdot 1331)$
- b. $\log_4(16 \cdot 256)$ e. $\log_4(256 \cdot 4)$ h. $\log_8(64 \cdot 32768)$
- c. $\log_3(9 \cdot 81)$ f. $\log_5(25 \cdot 3125)$ i. $\log_5(5 \cdot 390625)$

Sean b, x e y números reales positivos con $b \neq 1$, entonces:

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y \qquad \log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$$

Dicho de otra forma, el logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de los factores manteniendo la misma base. El logaritmo de un cociente es la resta de los logaritmos de los factores manteniendo la misma base.

5. En parejas, utilice cada uno un método de cálculo distinto para determinar los valores de los siguientes logaritmos. Una persona utilizará las propiedades anteriores de logaritmo y la otra seguirá el razonamiento de Napier. Luego, revisen su desarrollo y comparen sus resultados.
- a. $\log_6(216:36)$ c. $\log_2(32:8)$ e. $\log_6(7776 : 216)$
 - b. $\log_4(256:4)$ d. $\log_3(729:27)$ f. $\log_8(262\,144 : 512)$

Figura 66. Propiedad logaritmo de un producto y logaritmo de un cociente. Libro 3

La propiedad cambio de base se enuncia de la siguiente forma.

● Sean a y b números reales positivos diferentes de 1 y x un número real positivo:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Dicho de otra forma, es posible realizar un cambio de base para expresar un logaritmo de una base cualquiera en otra base.

Figura 67. Propiedad cambio de base de un logaritmo. Libro 3

Y luego, se demuestra de manera deductiva.

8. ♦ Analiza el siguiente procedimiento. Luego, realiza las actividades.

Sea $\log_b(a) = c \rightarrow b^c = a$

PASO 1: $b^c = a \Rightarrow \log_p(b^c) = \log_p(a)$

PASO 2: $c \cdot \log_p(b) = \log_p(a)$

PASO 3: $c = \frac{\log_p(a)}{\log_p(b)}$

PASO 4: $\log_b(a) = \frac{\log_p(a)}{\log_p(b)}$

a. Describe en cada paso los procedimientos realizados.

b. Comprueba si las siguientes proposiciones son correctas. Utiliza una calculadora y el teorema del cambio de base.

- $\log_2 10 \approx 3,322$
- $\log_8 2 = 0,3$
- $\log_5 3 \approx 0,683$

Recuerda que la tecla "log" se encuentra en base 10 y "ln" en base e.

Figura 68. Demostración propiedad cambio de base de un logaritmo. Libro 3

Como se observa, invita al estudiante a usar la calculadora pulsando la tecla log en ella, para ello el estudiante, en primer lugar, debe transformar cada uno de los logaritmos a logaritmos en base 10, por lo que es necesario aplicar la propiedad de cambio de base. Por ello y porque los estudiantes aplican la propiedad por primera vez por su parte, el texto se enmarca en un enfoque constructivista.

5.4.3.1. MAEt3: Aplicaciones de los logaritmos

Para trabajar la aplicación de los logaritmos este libro introduce una generalización para trabajar ecuaciones logarítmicas de la siguiente forma:

● En una expresión algebraica de la forma $a^b = c$ se pueden calcular cada una de sus cantidades si se conocen las otras dos. Esto se realiza mediante tres operaciones distintas:

- Si se desconoce c , se utilizan potencias para encontrar su valor. Ej: Si $a = 5$ y $b = 3$, entonces $c = 5^3 = 125$.
- Si se desconoce a , se utilizan raíces para encontrar su valor. Ej: Si $b = 4$ y $c = 81$, entonces $a^4 = 81 \rightarrow a = \sqrt[4]{81} = 3$.
- Si se desconoce b , se utilizan logaritmos para encontrar su valor. Ej: Si $a = 7$ y $c = 2401$, entonces $7^b = 2401 \rightarrow b = \log_7 2401 = 4$.

Figura 69. Aplicaciones de logaritmos. Libro 3

Luego, presenta una actividad contextualizada sobre la intensidad del sonido (Fig. 70) en la cual el libro de texto guía al estudiante para que calcule el umbral del sonido en decibeles, invitándolo a sacar conclusiones de esto.

SONIDO

1. La intensidad del sonido puede ser medida de dos formas distintas:

- **Intensidad sonora (β):** se mide en decibeles (dB).
- **Intensidad acústica (I):** corresponde a la cantidad de energía transportada por una onda sonora aplicada en una superficie. Se mide en watts sobre metro cuadrado ($\frac{W}{m^2}$). Estas se relacionan mediante la expresión:

$$\beta = 10 \cdot \log(I) + 120$$

a. El umbral del dolor es $1 \frac{W}{m^2}$ para el ser humano. ¿Cuál es la equivalencia en decibeles? ¿Qué situaciones de la imagen resultan dolorosas para el oído humano?

b. ¿Qué expresión algebraica se utiliza para calcular la intensidad acústica (I) dada la intensidad sonora (β)?

c. Utiliza la expresión anterior para determinar la intensidad acústica de 3 sonidos distintos.

d. ♦ Se sabe que la intensidad de un equipo duplica la de otro equipo. ¿Cuál es la diferencia que poseen en decibeles?

▶ ♦ ¿Por qué es importante no exponerse a sonidos de alta intensidad? Comenta.












	Fuegos artificiales	140 dB
	Motor de avión	130 dB
	Sirena de policía	120 dB
	Trombón	110 dB
	Helicóptero	100 dB
	Secador de pelo	90 dB
	Camión	80 dB
	Auto	70 dB
	Conversación	60 dB
	Lluvia moderada	50 dB
	Refrigerador	40 dB
	Susurro	30 dB
	Crujir de hojas	20 dB
	Respiración	10 dB
		0 dB

Figura 70. Ejercicio intensidad de sonido. Libro 3

Luego, se procede del mismo modo con cada una de las aplicaciones que trabaja este libro, por ello, se enmarca en un enfoque constructivista.

5.4.4 Aplicación de la MAHt para la caracterización del libro 3.

Dentro de este libro de texto se presentan ejercicios como el 2 y 3 de la página 29 (Fig. 71), en donde los estudiantes deben utilizar la habilidad de representar para transformar las potencias a logaritmos y viceversa.

2. Representa las siguientes relaciones numéricas usando logaritmos.

Ejemplo: $5^2 = 25 \leftrightarrow \log_5 25 = 2$

a. $9^3 = 729$	d. $9^{\frac{1}{2}} = 3$	g. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = 64$
b. $0,3^2 = 0,09$	e. $5^{-2} = \frac{1}{25}$	h. $27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$
c. $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$	f. $0,01^{-2} = 10000$	i. $8^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{32}$

3. Determina en cada caso el valor de a.

Ejemplo: $\log_2 a = 3 \leftrightarrow 2^3 = a \rightarrow 8 = a$

a. $\log_a 2 = \frac{1}{2}$	d. $\log_5 0,04 = a$	g. $\log_9 a = 4$
b. $\log_a 8 = 3$	e. $\log_{\frac{1}{81}} 9 = a$	h. $\log_7 a = 3$
c. $\log_a 5 = -2$	f. $\log_{\frac{1}{64}} 2 = a$	i. $\log_{1000} a = -\frac{1}{3}$

Figura 71. Habilidad de representar. Libro 3

La habilidad de Modelar la encontramos, por ejemplo, representada en el ejercicio 3 pregunta c (Fig. 72) en donde el estudiantado debe encontrar una expresión a partir de otra presentada anteriormente.

- 3.** La relación entre el área de la superficie corporal a de una persona en m^2 , su masa m en kg y su altura h en cm está dada por la expresión:
- $$\log(a) = -2,144 + 0,425 \log(m) + 0,725 \log(h)$$
- a.** ¿Cuál es el área aproximada de una persona si su masa es 70 kg y su altura, 1,75 m?
- b.** Determina la estatura aproximada de una persona si el área de su cuerpo es $2 m^2$ y su masa, 80 kg.
- c.** ♦ Utilizando propiedades de logaritmos, encuentra una expresión equivalente a la fórmula anterior. Compruébala utilizando los resultados anteriores.

Figura 72. Habilidad de modelar. Libro 3

Al analizar este libro de texto, se encuentra representada la habilidad de argumentar y comunicar en la mayoría de los problemas de aplicación. Se muestra un ejemplo en la figura 73, presentada a continuación

- Para concluir**
- a.** ¿En qué otras situaciones cotidianas podrías aplicar logaritmos? Investiga.
- b.** ¿Cómo explicarías la relación entre logaritmos y potencias de exponente racional?

Figura 73. Habilidad de argumentar y comunicar. Libro 3

Para finalizar, de acuerdo con los parámetros enunciados en el marco metodológico, la habilidad de resolver problemas se desarrolla en una amplia variedad de ejercicios, a continuación, se muestra uno de ellos.

- 8.** Para determinar el diámetro d de un asteroide (en km), los astrónomos utilizan la expresión $\log(d) = 3,7 - 0,2 \cdot g$. En ella, g corresponde su magnitud absoluta.
- a.** Determina el diámetro de un asteroide si su magnitud absoluta es 30.
 - b.** Calcula el diámetro de un asteroide si su magnitud absoluta es 20.
 - c.** ¿Cuál es la magnitud absoluta de un asteroide si su diámetro mide 5,8 km?

Figura 74. Habilidad resolver problemas. Libro 3

5.5 Caracterización libro 4

5.5.1 Aplicación de la MIGt para la caracterización del libro 4.

Tabla 15. Matriz de información general libro 4

Campos genéricos MIGt (i) con i=1,2,3,4	Libro 4
MIGt1: Título y Procedencia	Matemáticas segundo año de educación media. Distribuido por el Ministerio de Educación.
MIGt2: Datos de autoría	Eduardo Díaz Valenzuela Licenciado en Educación Matemática y Computación Profesor de Estado en Matemática y Computación
	Natalia Ortiz Solís Licenciada en Educación Matemática y Computación Profesora de Estado en Matemática y Computación
	Patricio Norambuena Morales Licenciado en Educación Matemática y Computación.

	Katherine Morales Valderrama Licenciada en Educación Matemática y Computación
	Manuel Rebolledo Hernández Licenciado en Matemática
	Robbie Barrera Yáñez Profesor de Estado en Física y Matemática
MIGt3: Edición y tipo de obra	Ediciones SM Chile S.A. Primera edición. Impresa en los años 2022 y 2023. Providencia. Chile. Este libro está destinado a estudiantes de segundo medio.
MIGt4: Presentación	Este libro se trabajó en formato digital, cuenta con 200 páginas.

5.5.2 Aplicación de la MACt para la caracterización del libro 4.

En las páginas 4 y 5 de estos libros de textos encontramos el índice, el cual se encuentra dividido en 4 unidades de la siguiente forma:

Tabla 16. Organización de contenidos libros 4

Unidad	Contenido
Unidad 1	Números
Unidad 2	Algebra y Funciones
Unidad 3	Geometría
Unidad 4	Probabilidad y Estadística

A contar de la página 28, encontramos el contenido de Logaritmos, el cual se extiende hasta la página 39, esto corresponde a 11 páginas que representan el 5,5% del libro de texto. Las figuras desde la 75 a la 88 que se encuentran distribuidas, desde el apartado 5.5.2.1 hasta el apartado 5.5.4, corresponden a fotografías extraídas del libro de texto de Matemática de segundo año medio del año 2023 de los autores Diaz, E., Ortiz, N., Morales, K., Rebolledo, M., Barrera, R. y Norambuena, P.

5.5.2.1. MACT1: Uso de la notación Logaritmo.

Dentro de estos libros de textos encontramos que a las expresiones $\log_a b$, se les nombran logaritmos, además dentro de este libro se denomina a y b como base y argumento respectivamente. Las restricciones son

utilizadas tanto para el argumento como para la base, es decir de manera completa. Tal como se muestra en el extracto siguiente:

● Se llama **logaritmo de base b de a** al número c al cual debe elevarse la base b para obtener a. Es decir:

$$b^c = a \leftrightarrow \log_b a = c \quad \text{Con } a, b \in \mathbb{R}^+, b \neq 1 \text{ y } c \in \mathbb{R}.$$

Por ejemplo: $5^3 = 125 \leftrightarrow \log_5 125 = 3$ y se lee "logaritmo en base 5 de 125".

Para relacionar una potencia, un logaritmo y una raíz enésima, se tiene lo siguiente:

$$\sqrt{9} = 3 \leftrightarrow 9^{\frac{1}{2}} = 3 \leftrightarrow \log_9 3 = \frac{1}{2}$$

b se denomina base del logaritmo y a se denomina argumento. Si b = 10, se habla de logaritmo decimal o común y en lugar de "log₁₀" se escribe simplemente "log".

Figura 75. Definición de logaritmo. Libro 4


5.5.2.2. MACT2: Introducción al concepto

Para introducir el concepto, en estos libros de texto se presenta una actividad en donde los estudiantes deben reconocer partes, interpretar y analizar potencias (Fig. 76). Cabe mencionar, que en este libro de texto el estudiantado tiene que rellenar una tabla, la cual genera cierta confusión al momento de analizar. Además, en estas deben utilizar la definición de logaritmos sin que hasta el momento sea presentada, solo deben seguir el ejemplo que se muestra.

1. En parejas, observen las relaciones descritas por los siguientes jóvenes referidas a la expresión $4^5 = 1024$.

a. En cada caso, describan la relación usando las tres interpretaciones señaladas:

$2^8 = 256$ $3^6 = 729$ $5^4 = 625$



b. Completen la tabla siguiendo el ejemplo.

Potencia	Base	Exponente	Logaritmo
$8^3 = 512$	8	3	$\log_8(512) = 3$
$10^4 = 10000$			
	6	-2	
			$\log_9(1) = 0$
			$\log_{64}(4) = \frac{1}{3}$

2. Respondan cada pregunta justificando sus respuestas.

a. ¿La base de un logaritmo puede ser negativa?

b. ¿Existe el logaritmo de un número negativo?, ¿y el logaritmo de 0?

c. ¿Cuál es el logaritmo de 1 en base 3?, ¿y en base 7? ¿Depende tu respuesta de la base?

Figura 76. Actividad introducción al concepto de logaritmo. Libro 4

Posterior a la presentación de la definición de logaritmos con sus respectivas restricciones, hay una serie de ejercicios donde la aplican siguiendo un ejemplo. Además, deben comprobar igualdades utilizando la definición.

<p>1. Representa las siguientes relaciones numéricas usando logaritmos.</p> <p style="text-align: center;">Ejemplo: $5^2 = 25 \leftrightarrow \log_5 25 = 2$</p> <p>a. $9^3 = 729$ d. $9^{\frac{1}{2}} = 3$ g. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = 64$</p> <p>b. $0,3^2 = 0,09$ e. $5^{-2} = \frac{1}{25}$ h. $27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$</p> <p>c. $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$ f. $0,01^{-2} = 10000$ i. $8^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{32}$</p> <p>2. Determina en cada caso el valor de a.</p> <p style="text-align: center;">Ejemplo: $\log_2 a = 3 \leftrightarrow 2^3 = a \rightarrow 8 = a$</p> <p>a. $\log_a 2 = \frac{1}{2}$ d. $\log_5 0,04 = a$ g. $\log_9 a = 4$</p> <p>b. $\log_a 8 = 3$ e. $\log_{\frac{1}{81}} 9 = a$ h. $\log_7 a = 3$</p> <p>c. $\log_a 5 = -2$ f. $\log_{\frac{1}{64}} 2 = a$ i. $\log_{1000} a = -\frac{1}{3}$</p>	<p>4. ♦ Comprueba si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas. Justifica.</p> <p>a. $\log_5 25 = 2$ e. $\log_2 10 = 100$ i. $\log 10^5 = 5$</p> <p>b. $\log_2 0,25 = 0,5$ f. $\log_{10} 0 = 1$ j. $\log_{\frac{1}{5}} 125 = -3$</p> <p>c. $\log_9 -3 = 2$ g. $\log_4 0,25 = -2$ k. $\log_8 \sqrt[3]{64} = \frac{3}{2}$</p> <p>d. $\log_1 3,78 = 0$ h. $\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$ l. $\log_2 \sqrt[3]{64} = 2$</p>
--	--

Figura 77. Ejercicios aplicación definición logaritmos. Libro 4

La metodología de aprendizaje es deductiva ya que las y los estudiantes deben desarrollar aplicaciones o ejercicios a partir de principios generales o la definición, esto ocurre en los 3 libros de textos analizados en este bloque.

5.5.2.3. MACT3. Propiedades de los logaritmos

En el libro de texto analizado, las propiedades Logaritmo de la base y de la unidad no se encuentran demostradas y tampoco presentan sus restricciones pertinentes, además, son presentadas unilateralmente (Fig. 78).

● Si a es un número real positivo distinto de 1, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- Logaritmo de la base: $\log_a a = 1$
- Logaritmo de la unidad: $\log_a 1 = 0$

Figura 78. Propiedad logaritmo de la base y logaritmo de la unidad. Libro 4

Las propiedades de Logaritmo de un producto, Logaritmo de un cociente, Logaritmo de una potencia de la base y cambio de base se encuentran demostradas y con sus respectivas restricciones y son presentadas unilateralmente. Si bien las demostraciones se encuentran dentro del libro de texto, se encuentran posterior a la presentación de las propiedades, incluso en algunas propiedades después de la ejercitación. Las imágenes de este libro se encuentran en el análisis del libro 3 ya que corresponden a las mismas (Figuras 57, 58, 59, 60, 61 y 62).

5.5.2.4. MACT4: Aplicaciones de los logaritmos.

En este grupo de libros de textos los logaritmos son utilizados para realizar cálculos en diversas áreas, como por ejemplo para calcular la intensidad del sonido (Logaritmos y Música), cálculos de pH, cálculos población de ciertos insectos (Logaritmos y Ciencias. Fig. 79), Calcular la intensidad del brillo de ciertas estrellas (Logaritmos y Astronomía). En todos estos problemas el estudiantado debe realizar un análisis de sus cálculos que involucra determinar ecuaciones, despejar ecuaciones logarítmicas y argumentar sus resultados.

4. La temperatura final de un cuerpo T_f transcurridos t minutos está dada por su temperatura inicial T_i , la temperatura ambiental T_a y la constante a de la forma:

$$T_f = T_a + (T_i - T_a) \cdot a^t$$

Considera un pan recién horneado a 180°C , en un día con 20°C ambientales.

- a. ¿Cuál es la ecuación que rige el enfriamiento si $a = 0,85$?
- b. ¿Luego de cuántos minutos se encuentra bajo los 34°C ?



Figura 79. Aplicación logaritmos. Libro 4

5.5.3 Aplicación de la MAEt para la caracterización del libro 4.

5.5.3.1. MAEt1: Definición de logaritmo

El libro de texto comienza el tratamiento de los contenidos de logaritmos realizando preguntas sobre la relación entre potencias y raíces.

<h3>Definición de logaritmos</h3> <p>¿A qué número es necesario elevar 2 para obtener $\sqrt{2}$?</p> <p>¿Qué ecuación plantearías para resolver el problema anterior?</p>	<p>Objetivo: Identificar los logaritmos y su relación con las potencias.</p>
---	--

Figura 81. Actividad introductoria. Libro 4



Figura 80. Introducción al concepto de logaritmos. Libro 4

Luego introduce el concepto de logaritmo a partir de una imagen que habla de la relación que se pueden establecer con la potencia $4^5 = 1024$.

Para luego establecer la relación que existe entre las potencias y los logaritmos.

b. Completen la tabla siguiendo el ejemplo.

Potencia	Base	Exponente	Logaritmo
$8^3 = 512$	8	3	$\log_8(512) = 3$
$10^4 = 10000$			
	6	-2	
			$\log_9(1) = 0$
			$\log_{64}(4) = \frac{1}{3}$

Figura 82. Actividad relación potencia-logaritmo. Libro 4

Como se puede observar, el ítem invita al estudiante a completar la tabla siguiendo el ejemplo resuelto por el libro de texto, condicionando al estudiante, por lo que la definición de logaritmo se realiza mediante un enfoque conductista.

Luego, se invita al estudiante a reflexionar sobre las restricciones que debe presentar el logaritmo, realizando las siguientes preguntas.

2. Respondan cada pregunta justificando sus respuestas.
- ¿La base de un logaritmo puede ser negativa?
 - ¿Existe el logaritmo de un número negativo?, ¿y el logaritmo de 0?
 - ¿Cuál es el logaritmo de 1 en base 3?, ¿y en base 7? ¿Depende tu respuesta de la base?

Figura 83. Reflexión restricciones logaritmo. Libro 4

Como el estudiante debe sacar conclusiones a partir de un trabajo guiado, este apartado se enmarca en un enfoque constructivista.

Luego de este trabajo, se formaliza el concepto de logaritmo

Se llama **logaritmo de base b de a** al número c al cual debe elevarse la base b para obtener a . Es decir:

$$b^c = a \leftrightarrow \log_b a = c \quad \text{Con } a, b \in \mathbb{R}^+, b \neq 1 \text{ y } c \in \mathbb{R}.$$

Por ejemplo: $5^3 = 125 \leftrightarrow \log_5 125 = 3$ y se lee "logaritmo en base 5 de 125".

Para relacionar una potencia, un logaritmo y una raíz enésima, se tiene lo siguiente:

$$\sqrt{9} = 3 \leftrightarrow 9^{\frac{1}{2}} = 3 \leftrightarrow \log_9 3 = \frac{1}{2}$$

b se denomina base del logaritmo y a se denomina argumento.

Si $b = 10$, se habla de logaritmo decimal o común y en lugar de " \log_{10} " se escribe simplemente "log".

Figura 84. Definición de logaritmo. Libro 4

5.5.3.2. MAEt2: Propiedades de los logaritmos

Las propiedades de los logaritmos se presentan exactamente de la misma manera que el texto 3 analizado anteriormente, de esta forma, todas las propiedades se enmarcan en una enseñanza con enfoque constructivista.

5.5.3.3. MAEt3: Aplicaciones de los logaritmos

Al igual que en 5.5.4.2 MAEt2, las aplicaciones de los logaritmos se presentan del mismo modo que en el texto 3, por lo que se enmarcan en un enfoque constructivista.

5.5.4 Aplicación de la MAHt para la caracterización del libro 4.

Al analizar este libro de textos, encontramos que las 4 habilidades se encuentran desarrolladas, podemos desglosarlas en los siguientes problemas. Al igual que en el libro 3 la habilidad de representar se encuentra en los ejercicios 1 y 2 de la página 29 (Fig. 85). En estos ejercicios las y los estudiantes deben utilizar la definición de logaritmos.

1. Representa las siguientes relaciones numéricas usando logaritmos.

Ejemplo: $5^2 = 25 \leftrightarrow \log_5 25 = 2$

a. $9^3 = 729$

d. $9^{\frac{1}{2}} = 3$

g. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = 64$

b. $0,3^2 = 0,09$

e. $5^{-2} = \frac{1}{25}$

h. $27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

c. $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$

f. $0,01^{-2} = 10000$

i. $8^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{32}$

2. Determina en cada caso el valor de a.

Ejemplo: $\log_2 a = 3 \leftrightarrow 2^3 = a \rightarrow 8 = a$

a. $\log_a 2 = \frac{1}{2}$

d. $\log_5 0,04 = a$

g. $\log_9 a = 4$

b. $\log_a 8 = 3$

e. $\log_{\frac{1}{81}} 9 = a$

h. $\log_7 a = 3$

c. $\log_a 5 = -2$

f. $\log_{\frac{1}{64}} 2 = a$

i. $\log_{1000} a = -\frac{1}{3}$

Figura 85. Habilidad representar. Libro 4

Ahora, la habilidad de modelar la encontramos plenamente representada en el problema siguiente (Fig. 86), en donde las y los estudiantes deben encontrar una expresión algebraica que represente sus resultados anteriores, esto se encuentra en el problema 2, pregunta d.

QUÍMICA

2. Para medir la acidez o alcalinidad de una sustancia se utiliza el pH. Este asocia la concentración de moles de hidrógeno $[H^*]$ en la sustancia (en moles por litro) según la fórmula: $pH = -\log[H^*]$

Ácido de batería, Jugos gástricos, Vinagre, Jugo de naranjas, Tomate, Café, Orina, Agua potable, Agua de mar, Bicarbonato de sodio, Tableta para indigestión, Amoniaco, Jaboncillo, Blanqueador, Limpiador de cañerías.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

Ácido Neutro Alcalino

a. Calcula el pH de una sustancia cuya concentración de iones de hidrógeno es de 0,00000038 moles por litro.
b. La escala de pH varía entre 0 y 14. ¿Cuáles son las concentraciones de moles de hidrógeno máximas y mínimas de la escala?
c. Calcula la concentración de moles de hidrógeno aproximada de 3 sustancias distintas.
d. ♦ ¿Qué expresión algebraica utilizaste para calcular las concentraciones anteriores? ¿Cómo se relaciona con la fórmula para calcular el pH?

Figura 86. Habilidad modelar. Libro 4

En la página 33 del libro de texto, se encuentra la siguiente actividad en donde se pone en manifiesto la habilidad de argumentar y comunicar.

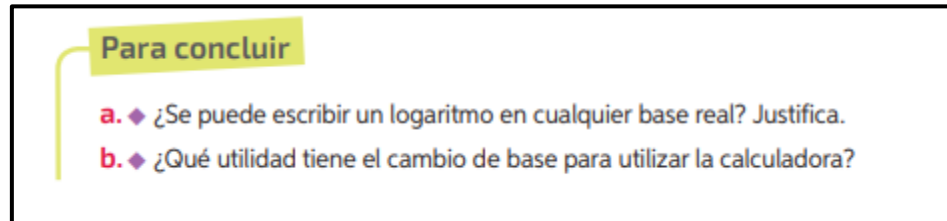


Figura 87. Habilidad de comunicar y argumentar. Libro 4

Finalmente, tenemos este problema en el cual se encuentran desarrolladas las 4 habilidades, recordemos que la resolución de problemas involucra el desarrollo de las otras habilidades, sin embargo, en este problema al resolver cada uno de los ítems presentes podemos apreciar como esto permite que se desarrolle cada una.

5. Analiza la siguiente información. Luego, realiza las actividades.

La escala de magnitudes aparentes (m) clasifica a las estrellas según la intensidad de su brillo estandarizado (I). Se calcula mediante la expresión:

$$m = \log_{100} \left(\frac{1}{I} \right)$$

Para saber más.
gbit.cl/T21M2MP036A



Las estrellas que se ven más brillantes son aquellas que tienen menor valor.

Las magnitudes aparentes de las estrellas principales de la constelación de Orión son:



- ¿Cuál es la estrella de la constelación de Orión que se ve más brillante en el cielo nocturno? ¿Cuál es la menos brillante?
- Simplifica y transforma la expresión utilizando propiedades para obtener una equivalente con logaritmo de base 10.
- La estrella Ácrux de la constelación de la Cruz del Sur tiene una intensidad de brillo estandarizada de 0,5. ¿Cuál es la magnitud aparente de Ácrux? ¿Es más o menos brillante que Rigel? ¿por qué?
- Determina la intensidad del brillo de las estrellas de Orión.
- ¿Cuánto varía la intensidad del brillo de Betelgeuse?
- La escala moderna incluye cuerpos celestes como la Luna y el Sol con una magnitud aparente de $-12,6$ y $-26,8$ respectivamente. ¿Cuántas veces más intenso es el brillo del Sol que el de la Luna?

Figura 88. Habilidad de resolver problemas. Libro 4

5.6 Resultados:

5.6.1 Caracterización del Saber a Enseñar en libros de texto.

Antes de entrar a las conclusiones referentes al saber sabio, observaremos algunos resultados que involucran la matriz de información general y entregan el contexto a los resultados relacionados con el contenido.

La totalidad de los libros de texto de segundo medio analizados corresponden a la editorial SM y son entregados por el Ministerio de Educación.

Quienes más participaron como autores de libros de textos de matemáticas en este nivel son Profesores de Estado en matemática y Profesores de Estado en matemática y física con un 27,3% en ambos casos. Le siguen con un 18,2% profesores de Estado en física y matemática y Licenciados en matemática y educación. Para finalizar con un 9,1% de Licenciados en Matemática.

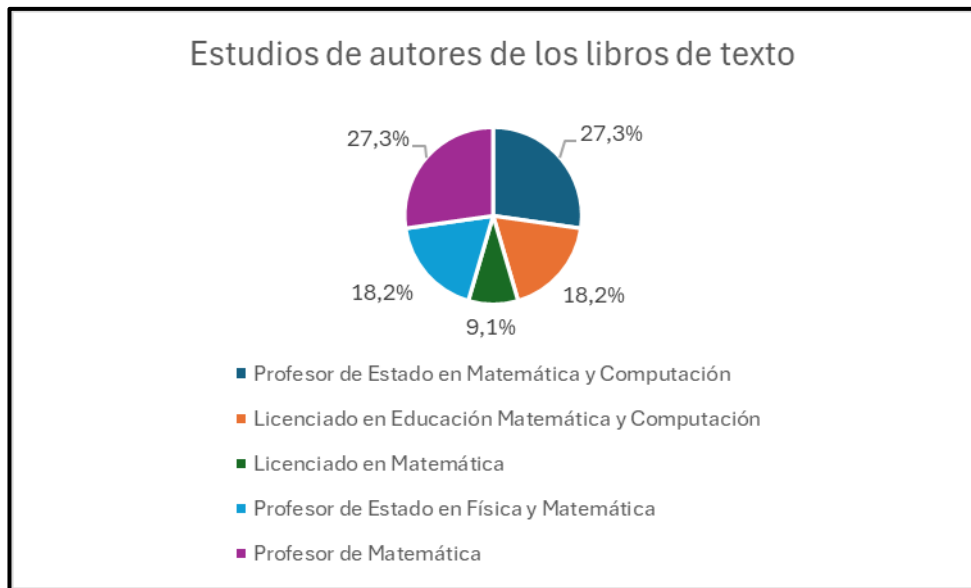


Figura 89. Gráfico circular. Estudios autores libros de textos

5.6.2 Triangulación de las Caracterizaciones entre libros de texto con el saber sabio

Se organiza la siguiente tabla en donde se presenta el porcentaje promedio entre los cuatro libros seleccionados para cada variable observada con respecto al Saber Enseñado en libros de texto.

A partir de la tabla MAC (Anexo 1) y la tabla Mr (Anexo 2) presentadas es posible concluir que a lo largo del período 2016-2023:

Uso del signo logaritmo: La totalidad de los libros analizados presentan a la expresión $\log_a b$ como logaritmos, además de utilizar las restricciones correspondientes para la base y el argumento, sin embargo, si bien en la totalidad de libros se presenta al término a como base, se puede observar que en L2 y L3 a la expresión b no se le llama como argumento, lo que puede generar confusión al buscar información en otras fuentes y desconocer este término como tal. Al hacer el análisis secuencial, se comete un error matemático al ignorar ese aspecto en L2 y L3 cuando L1 lo tenía enunciado correctamente, corrigiéndolo nuevamente en L4.

Introducción al concepto: En los dos primeros libros analizados es posible observar se escoge el método inductivo como razonamiento para

llegar a la definición de logaritmo, lo cual permitía al estudiante sacar conjeturas sobre el cómo trabajar con logaritmos. Mientras tanto, últimamente se ha optado por generalizar a través de la deducción matemática para obtener el concepto de logaritmo.

Propiedades de los logaritmos: Las propiedades Logaritmo de la base y Logaritmo de la unidad no se encuentran demostradas en los libros de texto, sin embargo, es importante mencionar que L2 invita al estudiante a descubrir esta propiedad, mientras que L3 y L4 lo enuncian y luego instan al estudiante a demostrarlas de manera deductiva.

Para el caso del logaritmo de un producto y logaritmo de un cociente estas se encuentran demostradas en tres de los cuatro libros analizados, sin embargo, el libro de texto que no las demuestra (L2) invita al estudiante a descubrirlas por inducción matemática a través de una actividad. Es posible observar que en L1 tanto el logaritmo de un producto como el logaritmo de un cociente no se encuentran restringidas, lo cual se corrige en los textos posteriores.

El logaritmo de una potencia se encuentra demostrada en tres de los cuatro libros analizados, y al igual que las propiedades anteriores expuestas,

esto se debe que en L2 se invita al estudiante a que descubran las propiedades por inducción matemática. Esta propiedad se encuentra correctamente restringida en todos los textos y es la única que se presenta bilateralmente en los libros L3 y L4, optando por presentarla así en los últimos años.

Por su parte la propiedad Cambio de Base es incluida en tres de los cuatro libros, ya que L2 no trabaja la propiedad. Se encuentra demostrada correctamente en todos los libros los cuales trabajan la propiedad y en L1 no se encuentra con sus restricciones correspondientes, corrigiendo esto en L3 y L4.

Aplicaciones de los Logaritmos: Las aplicaciones de los logaritmos utilizadas en libros de texto son:

- Logaritmos y astronomía, lo cual se trabaja en L2, L3 y L4.
- Logaritmos y ciencias, lo cual se trabaja en los cuatro libros.
- Logaritmos y música, lo cual se trabaja en los cuatro libros
- Logaritmos y geología, lo cual se trabaja en L1
- Logaritmos y medicina, lo cual se trabaja en los cuatro libros.

Las aplicaciones no utilizadas por los libros de texto son Logaritmos y arqueología; Logaritmos y sicología y Logaritmos y economía. Estas

opciones resultaría interesantes trabajarlas para ver la utilidad de las matemáticas en ámbitos no tan recurrentes en la matemática escolar, tales como el tema de Logaritmos y sicología o bien Logaritmos y arqueología, lo cual permitiría al estudiante observar como la disciplina se encuentra en otros ámbitos de la vida diaria.

5.6.3 Triangulación de las Caracterizaciones entre libros de texto con los enfoques de aprendizaje

A partir de la triangulación realizada entre los enfoques y los libros de textos analizados se obtienen los siguientes resultados:

Definición de logaritmo: Al realizar la primera aproximación a los logaritmos, es posible observar que en su gran mayoría se presenta con un enfoque conductista de la educación, a excepción de lo que es el libro de texto L2 el cuál, a través de la inducción invita al estudiante a descubrir por si solos el concepto de logaritmo.

Propiedades de los logaritmos: Al hablar de las propiedades de los logaritmos ocurre una particularidad, y es que, es posible observar como en el libro de texto L1 todas se trabajan desde un enfoque conductista, para luego desde L2 a L4 trabajar cada una de las propiedades bajo la teoría del

constructivismo, a excepción de la propiedad cambio de base la cual no se encuentra desarrollada en el texto L2.

Aplicaciones de los logaritmos: El libro L1, L3 y L4 introducen las aplicaciones de los logaritmos a partir de una nueva sección llamada Aplicaciones de los logaritmos. Por su parte el libro L2 incluye las propiedades en la ejercitación de logaritmos, guiando al estudiante para que llegue al resultado. El libro L1 entrega un ejemplo para resolver cada uno de los ejercicios planteados, condicionando al estudiante, por lo que trabaja con un enfoque conductista, luego es posible observar que a través de la progresión temporal se decidió trabajar este ítem con un enfoque constructivista, guiando al estudiante para obtener resultados en cada uno de los ejercicios que se aplican sobre este inciso.

5.6.4 Triangulación de las Caracterizaciones entre libros de texto y las habilidades

A partir de las triangulaciones realizadas entre las habilidades y los libros de texto podemos concluir que las 4 habilidades se encuentran representadas, sin embargo, en el libro 1 el desarrollo de estas es mucho menor que en el libro 4, este avance es progresivo. Cabe destacar que en esta investigación solamente se analizó si la habilidad de encontraba representada en el contenido de logaritmos, pero no el grado de representación.

6 **Capítulo VI: Conclusiones**

En relación al contenido matemático se puede establecer que, a contar de la implementación de las bases curriculares, en los libros de textos no existe gran discrepancia con el saber sabio. Sin embargo, es importante destacar el hecho que no en todos los libros se consideren las restricciones y demostraciones dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje del estudiantado, en la unidad temática de logaritmos. Se debe considerar que la falta de restricciones podría provocar obstáculos epistemológicos en el aprendizaje de los estudiantes, y la ausencia de demostraciones impediría al estudiante a desarrollar su razonamiento lógico y lo limitaría a entender las propiedades solo como meras fórmulas.

Ahora, en cuanto a los enfoques de aprendizaje que utilizan los libros de texto del nivel analizado en el contenido de logaritmos, a medida que avanzamos en el periodo estudiado los libros de texto fueron transitando de un enfoque conductista a uno más constructivista. Esto podría ser consecuencia que recién se está plasmando en los textos escolares, lo planteado por la LOCE del año 1990, la cual hace énfasis en una enseñanza más integral, lo que se adecua más a un enfoque constructivista y la reforma educacional del año

1996 la cual tiene énfasis en esta teoría. Además, de una fuerte inclinación de la educación mundial hacia dicho enfoque.

Las habilidades matemáticas presentadas en las bases curriculares se encuentran desarrolladas en todos los libros de textos analizados en esta investigación. Sin embargo, a medida que avanzamos en el tiempo estos contribuyen a desarrollarlas de mejor manera. Esto incidiría a que los educandos pudieran desenvolverse de mejor manera en el mundo actual que requiere de razonamientos más complejos. Así, no tan solo sabrían matemática, sino que también sabrían utilizarla.

Con lo anterior, podemos concluir que el tratamiento de los libros de texto está transitando a lo que busca la educación en Chile, ya que avanza hacia un enfoque constructivista y al desarrollo de habilidades matemáticas, lo que está acorde con la legislación chilena y lo que está ocurriendo a nivel mundial con la enseñanza de la matemática. Es necesario considerar que este avance mostrado en los libros de texto, también se pueda plasmar dentro del aula

7 **Capítulo VII: Proyecciones y limitaciones**

Finalizando esta investigación, a continuación, se muestran algunas proyecciones relacionadas:

- Efectuar un estudio similar que involucre libros de texto de segundo medio que contengan el contenido de logaritmos, que hayan sido entregados por el Ministerio de Educación antes de la creación de las Bases Curriculares.
- Que este trabajo sea la base para otras investigaciones de análisis de libros de textos en otros contenidos que involucren el de logaritmos, como la función logarítmica que, de acuerdo, con los programas de estudio se encuentran en el nivel de 3° medio.
- Realizar un análisis similar a libros de textos complementarios como el cuadernillo de ejercicios y a la guía docente de segundo medio entregados por el Ministerio de Educación.
- Desarrollar estudios utilizando libros de textos que no sean entregados por el Ministerio de Educación, es decir, que sean utilizados en colegios particulares y realizar una comparación entre ellos.

- Realizar un estudio que aborde el tema “¿Por qué los profesores no están utilizando el libro de texto entregado por el Ministerio de Educación?”

Referencias Bibliográficas

Agencia de Calidad de la Educación. (2017). Aprendiendo de los errores. Santiago, Chile.

Araya, V., Alfaro, M., y Andonegui, M. (2007). Constructivismo: orígenes y perspectivas. *Laurus*, 13(24), 76-92.

Arostegui, J. (1994). La investigación histórica: Teoría y método. *Crítica*. Barcelona.

Baro, A. (2011). Metodologías activas y aprendizaje por descubrimiento. *Innovación y experiencias educativas*, 6(45), 1-11.

Bravo, A., y Cantoral, R. (2012). Los Libros de Texto de Cálculo y el Fenómeno de la Transposición Didáctica. *Educación Matemática*, 24(2), 91-122.

Bolívar, A., Fernández, M. y Molina, E. (2005). Investigar la identidad profesional del profesorado: Una triangulación secuencial. Forum: *Qualitative social research*, 6(12).

Chacón, A., García, G., Rupin, P., Setz, J., Villena, M. (2018) Texto del estudiante Matemática 2º Medio. SM

- Chacón, E. (2021). *Demostración de las Propiedades de Logaritmos*.
Matemática General (MA0101). Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- Consejo Nacional de Educación (s.f). Marco Curricular y Bases
curriculares. Consejo Nacional de Educación.
<https://cned.cl/institucional/marco-curricular-y-bases-curriculares/>
- Cox, L. (2006). El constructivismo en la reforma de la educación en Chile.
Contextos, estudios de humanidades y ciencias sociales, 1(15), 13-24.
- De Faria, E. (2006). Transposición didáctica: Definición, Epistemología,
Objeto de Estudio. Cuadernos, 2, pp. 1-11.
- De Hoyos, R. (2020). Mitigando el impacto del COVID-19 sobre los
aprendizajes. *Aprender con evidencia*.
- Díaz, E., Ortiz, N., Morales, K., Rebolledo, M., Barrera, R. y Norambuena,
P (2021). Texto del estudiante Matemática 2º Medio. SM
- Díaz, E., Ortiz, N., Morales, K., Rebolledo, M., Barrera, R. y Norambuena,
P (2023). Texto del estudiante Matemática 2º Medio. SM
- Díaz, G., Rupin, P. y Jiménez, L., (2016). Matemática 2º Medio. Texto del
estudiante. SM

- Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. y López-Martín, M. (2015). Análisis de los gráficos estadísticos presentados en libros de texto de educación primaria chilena. *Educação Matemática Pesquisa*, 17(4), 715-739.
- Durán, N. y Gutiérrez, M. (2016). *Análisis de Libros de Texto en el contenido de Potencias y Raíces: Sus Cambios y Evoluciones (1969-2015)*. (Tesis de pregrado). Universidad de Concepción, Los Ángeles.
- Eleizalde, M., Parra, N., Palomino, C., Reyna, A. y Trujillo, I. (2010). Aprendizaje por descubrimiento y su eficacia en la enseñanza de la Biotecnología. *Revista de Investigación*, 34(71), 271-290.
- Figuroa, H., Muñoz, K., Vinício, E. y Zavala, D. (2017). Análisis crítico del conductismo y constructivismo, como teorías de aprendizaje en educación. *Revista Órbita Pedagógica*, 4(1), 1-12.
- Flores, P. (s.f) Aprendizaje en Matemáticas. <https://www.ugr.es/~pflores/textos/cLASES/CAP/APRENDI.pdf>
- Fontaine, L. e Eyzaguirre, B. (1997). Calidad y factores de calidad de la educación. *Estudios Públicos*. 68 (pp 355-369).

- Gallo, C. (2021). El aprendizaje de las matemáticas a partir las teorías del conductismo y la psicología de la Gestalt. *Mérito-Revista De Educación, 3(7)*, 26-37.
- Garcés, L., Montaluisa, A. y Salas, E. (2018). El aprendizaje significativo y su relación con los estilos de aprendizaje. *Canales de la Universidad Central del Ecuador, 1(376)*, 231-248.
- Gómez, B. (2000). Los libros de texto de Matemáticas. *Números 43-44*, 77-80.
- González, R. (1997). Concepciones y enfoques de aprendizaje. *Revista de Psicodidáctica, (4)*, 5-39.
- Gustafson, R., Frisk, P. (2011). Algebra intermedia 7a. edición (pp 606-611). Cengage Learning.
- Guilar, M. (2009). Las ideas de Bruner: De la revolución cognitiva a la revolución cultural. *Educere, 13(44)*, 235-241.
- Heredia, Y. y Sánchez, A. (2013). Teorías del aprendizaje en el contexto educativo. Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, México 2013.

<https://repositorio.tec.mx/bitstream/handle/11285/621390/P231.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Herrera, A. y Zagal, J. (2016). *Análisis de Libros de Texto Escolares en el contenido de triángulos* (Tesis de pregrado) Universidad de Concepción, Los Ángeles.

Horsley, Michael (2007). *Didáctica del uso de libros de texto: un análisis sociocultural*. CQUniversity. Conference contribution.

Iglesias, R. (2017). *La conformación del Estado nacional chileno durante el siglo XIX: Educación, nación y ciudadanía* (Tesis de doctorado). Universidad de Valladolid, Valladolid.

López, E., Guerrero, A., Carrillo, J. y Contreras, L. (2015). La resolución de problemas en los libros de texto: un instrumento para su análisis. *AIEM – Avances de investigación en Educación Matemática*, 1(8), 73-93.

Ley 18.962 (1990, 10 de Marzo). *Ley Orgánica Constitucional de Enseñanza*. Santiago de Chile: Diario Oficial de la República de Chile. Gobierno de Chile.

Ministerio de Educación (2015). Bases Curriculares 7° básico a 2° medio.

Ministerio de Educación. Santiago, Chile.

Ministerio de Educación (2018). Ciclo de mejoramiento en los establecimientos educacionales. Ministerio de Educación. Santiago, Chile.

Ministerio de Educación (2017). Orientaciones para la apropiación de las bases curriculares 7° Básico a 2° Medio. Ministerio de Educación. Santiago, Chile.

Ministerio de Educación (s.f). Orientaciones para la comprensión del currículum

nacional: enfoque e instrumentos. Ministerio de Educación. Santiago, Chile.

Ministerio de Educación (2019). Programa Modernización de Textos Escolares. Ministerio de Educación. Santiago, Chile.

Mora, J. (1985). Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias. *Revista Góndola*, 9(2), pp. 97-100.

- Mujica-Johnson, F. (2020). Análisis crítico del currículo escolar en Chile en función de la justicia social. *Educare*, 24(1), pp.472-485.
- Muñiz, M. (2005). Estudios de caso en la investigación cualitativa. México: Universidad Autónoma de Nuevo León.
- Ortiz, D. (2015). El constructivismo como teoría y método de enseñanza. *Sophia, Colección de Filosofía de la Educación*, (19), 93-110.
- Ortúzar, P. (s.f). Calidad, formato y mercado de los textos escolares en Chile. Instituto de estudios de la sociedad. <https://www.ieschile.cl/wp-content/uploads/2011/07/Informe-Textos-escolares.pdf>
- Papalia, D., Wendkos, S., y Duskin, R. (2007). Desarrollo humano (10ma edición). México D.F.: McGraw-Hill Interamericana.
- Posso, R., Barba, L. y Otáñez, N. (2020). El conductismo en la formación de los estudiantes universitarios. *Revista EDUCARE - UPEL-IPB - Segunda Nueva Etapa 2.0*, 24(1), 117–133. <https://doi.org/10.46498/reduipb.v24i1.1229>
- Santrock, J. (2006). Psicología de la educación (2° ed.) México, D. F., México: McGraw-Hill.

Sarmiento, M. (2004). *La enseñanza de las matemáticas y las Ntic. Una estrategia de formación permanente* (Tesis de doctorado). Universidad Rovira i Virgili, Tarragona.

Serna, F. (2007). *Propuesta de enseñanza del entrenamiento auditivo a través del juego* (Tesis de Maestría). Universidad Autónoma de Nuevo León, Nuevo León.

Soaje, R. y Orellana, P. (2013). *Textos escolares y calidad educativa: estudio de la calidad de los textos escolares de lenguaje y comunicación e historia, geografía y ciencias sociales entregados por el MINEDUC en el periodo 2000-2010*. Editorial Universitaria.

Tapia, F., (2003). Historia de los logaritmos. *Apuntes de Historia de las matemáticas*. 2(2). Departamento de Matemáticas. Universidad de Sonora

Universidad San Buenaventura. (2015). Las corrientes constructivistas y los modelos autoestructurantes. *Los modelos pedagógicos* (pp. 143-185). Bogotá: Universidad San Buenaventura.

- Uribe, M., Ortiz, I. (2014) Programa de estudio y textos escolares para la enseñanza secundaria en Chile: ¿qué oportunidades de alfabetización científica ofrecen? *Enseñanza de las ciencias*, 32(3), 37-52.
- Vásquez, C. y Alsina, A. (2015). Análisis de la probabilidad y sus significados en el currículo escolar y en libros de texto de educación básica en Vásquez, Claudia; Rivas, Hernán; Pincheira, Nataly; Rojas, Francisco; Solar, Horacio; Chandia, Eugenio; Parraguez, Marcela (Eds.), *Jornadas Nacionales de Educación Matemática XIX* (pp. 223-230). Villarrica, Chile: SOCHIEM.
- Vidal, R. (2009). *Las Raíces y Radicales en Libros de Texto en Chile (1969-2009): Un análisis de rupturas epistemológicas como aporte a la Didáctica de las Matemáticas*. (Tesis de doctorado). Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago.
- Vidal, R. (2010). El libro de texto de matemáticas en Chile en el último siglo 1910-2010. Cuadernos de educación N° 27, Facultad de Educación, Universidad Alberto Hurtado.

Anexo

Anexo 1

Tabla 17. Matriz de cotejo. MAC

Campos, aspectos y sub-aspectos		L1	L2	L3	L4
1. Uso de la notación logaritmo	1.1 A las expresiones con $\log_a b$ los llama logaritmos	x	x	x	x
	1.2 En las expresiones con $\log_a b$ llama a b como argumento	x	-	-	x
	1.3 En las expresiones con $\log_a b$ llama a a como base	x	x	x	x
	1.4 Lo usa con restricciones solo para el argumento	-	-	-	-
	1.5 Lo usa con restricciones solo para la base	-	-	-	-
	1.6 Lo usa con restricciones para el argumento y para la base.	x	x	x	x
	1.7 Lo usa sin restricciones	-	-	-	-
2. Introducción al concepto	2.1 Deductiva	-	-	x	x
	2.2 Inductiva	x	x	-	-
	2.3 Como $\log_b a = c \leftrightarrow b^c = a$	x	x	x	X
	2.4 Como inversa de la exponencial	x	x	x	x

	2.5 Otro (especificar)	-	-	-	-	
3. -Propiedades de los Logaritmos	3.1 $\log_a a = 1$	3.1.1 La muestra con errores lógicos	-	-	-	-
		3.1.2 La muestra correctamente	-	-	-	-
		3.1.3 No la muestra	x	x	x	x
		3.1.4 Usa restricciones completas. $a > 0$; $a \neq 1$	-	x	-	-
		3.1.5 Usa restricciones incompletas. $a > 0$	-	-	-	-
		3.1.6 No restringe	x	-	x	x
		3.1.7 La presenta unilateralmente	x	x	x	x
		3.1.8 La presenta bilateralmente	-	-	-	-
	3.2 $\log_a 1 = 0$	3.2.1 La muestra con errores lógicos	-	-	-	-
		3.2.2 La muestra correctamente	-	-	-	-

		3.2.3 No la muestra	x	x	x	x
		3.2.4 Usa restricciones completas. $a > 0$; $a \neq 1$	-	x	-	-
		3.2.5 Usa restricciones incompletas. $a > 0$	-	-	-	-
		3.2.6 No la restringe	x	-	x	x
		3.2.7 La presenta unilateralmente	x	x	x	x
		3.2.8 La presenta bilateralmente	-	-	-	-
	3.3	3.3.1 La muestra con errores lógicos	-	-	-	-
	$\log_a(b * c) = \log_a b + \log_a c$	3.3.2 La muestra correctamente	x	-	x	x
		3.3.3 No la muestra	-	x	-	-
		3.3.4 Usa restricciones completas	-	x	x	x

		3.3.5 Usa restricciones incompletas	-	-	-	-
		3.3.6 No la restringe	x	-	-	-
		3.3.7 La presenta unilateralmente	x	x	x	x
		3.3.8 La presenta bilateralmente	-	-	-	-
	3.4	3.4.1 La demuestra con errores lógicos	-	-	-	-
	$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$	3.4.2 La demuestra correctamente	x	-	x	x
		3.4.3 No la demuestra	-	x	-	-
		3.4.4 Usa restricciones completas	-	x	x	x
		3.4.5 Usa restricciones incompletas	-	-	-	-
		3.4.6 No restringe	x	-	-	-
		3.4.7 La presenta unilateralmente	x	x	x	x

		3.4.8 La presenta bilateralmente	-	-	-	-
3.5	$\log_a b^c$ $= c \log_a b$	3.5.1 La demuestra con errores lógicos	-	-	-	-
		3.5.2 La demuestra correctamente	x	-	x	X
		3.5.3 No demuestra	-	x	-	-
		3.5.4 Usa restricciones completas	x	x	x	X
		3.5.5 Usa restricciones incompletas	-	-	-	-
		3.5.6 No restringe	-	-	-	-
		3.5.7 La presenta unilateralmente	x	x	-	-
		3.5.8 La presenta bilateralmente	-	-	x	x
		3.6	$\log_a b$ $= \frac{\log_c b}{\log_c a}$	3.6.1 La demuestra con errores lógicos	-	NI
3.6.2 La demuestra correctamente	x			NI	x	x
3.6.3 No demuestra	-			NI	-	-

		3.6.4 Usa restricciones completas	-	NI	x	x
		3.6.5 Usa restricciones incompletas	-	NI	-	-
		3.6.6 No restringe	x	NI	-	-
		3.6.7 La presenta unilateralmente	x	NI	x	x
		3.6.8 La presenta bilateralmente	-	NI	-	-
4. Aplicaciones de los Logaritmos		4.1 Logaritmos y astronomía	-	x	x	x
		4.2 Logaritmos y ciencias	x	x	x	x
		4.3 Logaritmos y arqueología	-	-	-	-
		4.4 Logaritmos y música	x	x	x	x
		4.5 Logaritmos y geología	x	-	-	-
		4.6 Logaritmos y sicología	-	-	-	-
		4.7 Logaritmos y economía	x	-	-	-
		4.8 Logaritmos y medicina	x	x	x	x

Anexo 2

Tabla 18. Matriz de resumen. Contenidos

Variable Observada	Descripción	Libros de texto
1. Uso de la notación logaritmo	1.1 A las expresiones con $\log_a b$ los llama logaritmos	100%
	1.2 En las expresiones con $\log_a b$ llama a b como argumento	50%
	1.3 En las expresiones con $\log_a b$ llama a a como base	100%
	1.4 Lo usa con restricciones solo para el argumento	0%
	1.5 Lo usa con restricciones solo para la base	0%
	1.6 Lo usa con restricciones para el argumento y para la base.	100%
	1.7 Lo usa sin restricciones	0%
2. Introducción al concepto	2.1 Deductiva	50%
	2.2 Inductiva	50%
	2.3 Como $\log_b a = c \leftrightarrow b^c = a$	100%
	2.4 Como inversa de la exponencial	100%
	2.5 Otro (especificar)	0%

3. Propiedades	3.1 $\log_a a = 1$	3.1.1 La muestra con errores lógicos	0%
		3.1.2 La muestra correctamente	0%
		3.1.3 No la muestra	100%
		3.1.4 Usa restricciones completas. $a > 0$; $a \neq 1$	25%
		3.1.5 Usa restricciones incompletas. $a > 0$	0%
		3.1.6 No restringe	75%
		3.1.7 La presenta unilateralmente	100%
		3.1.8 La presenta bilateralmente	0%
	3.2 $\log_a 1 = 0$	3.2.1 La muestra con errores lógicos	0%
		3.2.2 La muestra correctamente	0%
		3.2.3 No la muestra	100%

		3.2.4 Usa restricciones completas. $a > 0$; $a \neq 1$	25%
		3.2.5 Usa restricciones incompletas. $a > 0$	0%
		3.2.6 No la restringe	75%
		3.2.7 La presenta unilateralmente	100%
		3.2.8 La presenta bilateralmente	0%
	3.3 $\log_a(b * c) = \log_a b + \log_a c$	3.3.1 La demuestra con errores lógicos	0%
		3.3.2 La demuestra correctamente	75%
		3.3.3 No la demuestra	25%
		3.3.4 Usa restricciones completas	75%
		3.3.5 Usa restricciones incompletas	0%

		3.3.6 No la restringe	25%
		3.3.7 La presenta unilateralmente	100%
		3.3.8 La presenta bilateralmente	0%
	3.4 $\log_a(b:c) = \log_ab - \log_ac$	3.4.1 La demuestra con errores lógicos	0%
		3.4.2 La demuestra correctamente	75%
		3.4.3 No la demuestra	25%
		3.4.4 Usa restricciones completas	75%
		3.4.5 Usa restricciones incompletas	0%
		3.4.6 No restringe	25%
		3.4.7 La presenta unilateralmente	100%
		3.4.8 La presenta bilateralmente	0%
		3.5	3.5.1 La demuestra con errores lógicos

	$\log_a b^c = c \log_a b$	3.5.2 La muestra correctamente	75%
		3.5.3 No muestra	25%
		3.5.4 Usa restricciones completas	100%
		3.5.5 Usa restricciones incompletas	0%
		3.5.6 No restringe	0%
		3.5.7 La presenta unilateralmente	50%
		3.5.8 La presenta bilateralmente	50%
		3.6	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
3.6.2 La muestra correctamente	75%		
3.6.3 No muestra	25%		
3.6.4 Usa restricciones completas	75%		

	3.6.5 Usa restricciones incompletas	0%
	3.6.6 No restringe	25%
	3.6.7 La presenta unilateralmente	100%
	3.6.8 La presenta bilateralmente	0%
4. Aplicaciones	4.1 Logaritmos y astronomía	75%
	4.2 Logaritmos y ciencias	100%
	4.3 Logaritmos y arqueología	0%
	4.4 Logaritmos y música	100%
	4.5 Logaritmos y geología	25%
	4.6 Logaritmos y sicología	0%
	4.7 Logaritmos y economía	25%
	4.8 Logaritmos y medicina	100%

Anexo 3

Tabla 19. Matriz de cotejo. Enfoques de aprendizaje

		Libro 1		Libro 2		Libro 3		Libro 4	
		1	2	1	2	1	2	1	2
Definición		x			x	x		x	
Propiedades	a	x			x		x		x
	b	x			x		x		x
	c	x			x		x		x
	d	x			x		x		x
	e	x			x		x		x
	f	x		NI	NI		x		x
Aplicaciones		x			x		x		x

Anexo 4.

Tabla 20. Matriz de cotejo. Enfoques de aprendizaje

		Libros	
		Conductismo	Constructivismo
Definición		75%	25%
Propiedades	a	25%	75%
	b	25%	75%
	c	25%	75%
	d	25%	75%

	e	25%	75%
	f	25%	75%
Aplicaciones		-	-

Anexo 5

Tabla 21. Matriz de cotejo. Habilidades matemáticas

Habilidad	Libro 1	Libro 2	Libro 3	Libro 4
Representar	X	X	X	X
Modelar	X	X	X	X
Argumentar y Comunicar	X	X	X	X
Resolución de Problemas	X	X	X	X

Anexo 6

Tabla 22. Matriz de resumen. Habilidades matemáticas

Habilidad	Libros de textos
Representar	100%
Modelar	100%
Argumentar y Comunicar	100%
Resolución de Problemas	100%

Anexo 7

Aplicaciones Logaritmos Libro 1

La intensidad del sonido se mide en vatios por metro cuadrado (W/m^2), siendo $10^{-12} W/m^2$ la menor intensidad que puede captar el oído humano. A partir de $1 W/m^2$ comienza el umbral del dolor en el oído.

Para comparar un sonido cualquiera con la menor intensidad audible se utilizan los decibeles (Db), mediante la siguiente fórmula:

$$Db = 120 + 10 \log I$$

donde I es la intensidad en W/m^2 .

Figura 90. Aplicación logaritmos. Logaritmos-Música. Libro 1

Resuelve los siguientes problemas.

3. El pH es una medida de la acidez o alcalinidad de una sustancia. Se mide de acuerdo con la concentración de moles de hidrógeno utilizando la fórmula:

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$$

Donde $[\text{H}^+]$ corresponde a la concentración de iones de hidrógeno, medida en moles por litro.

a) Calcula el pH de una sustancia, cuya concentración de iones de hidrógeno es de 0,00000038 moles por litro.

b) En algunos lugares muy contaminados se produce el fenómeno llamado "lluvia ácida". Se han dado lluvias con un pH de 2,8. Calcula su concentración de iones de hidrógeno.

c) Calcula la concentración de iones de hidrógeno de las siguientes sustancias, conociendo su pH aproximado.

Sustancia	pH
Vinagre	2,9
Jugo gástrico	1,5
Jugo de naranja	4,5
Orina	6,5
Jabón de manos	9,5

Figura 921. Aplicación logaritmos. Logaritmos-Ciencias. Libro 1

6. En Chile, a partir del año 2012 se estableció la ley de "Tolerancia 0" al alcohol, con la que se redujo a 0,3 g/L de sangre la concentración de alcohol considerada como "estado de ebriedad".

Se estima que el riesgo de sufrir un accidente (en porcentaje) se relaciona con la concentración de alcohol mediante la siguiente fórmula:

$$R = 6e^{kx}$$

a) Se estima que una concentración de 0,04 g/L de alcohol en la sangre ($x = 0,04$) corresponde a un riesgo del 10% ($R = 10$). Determina el valor de la constante k .

b) Una persona que, de acuerdo con la ley chilena, conduce en estado de ebriedad, ¿qué riesgo tiene de sufrir un accidente?

c) Si una persona presenta el doble de concentración de alcohol que otra, ¿cuánto mayor es su riesgo de accidente?

d) ¿Para qué concentración de alcohol en la sangre se puede estimar un riesgo de accidente del 100%? ¿Qué significa eso? Discute con tus compañeros.

Figura 92. Aplicaciones logaritmos. Logaritmos-Medicina. Libro 1

5. La energía liberada en los terremotos se mide en escala de Richter. Pese a ser modificada para intensidades superiores a 7, se puede relacionar la magnitud de un sismo y la energía liberada en él mediante la fórmula

$$\log E = 1,5R + 11,8$$

donde E es la cantidad de energía liberada medida en Ergios, y R es su intensidad en grados Richter.

a) Completa la siguiente tabla con la intensidad o la energía liberada en los siguientes terremotos ocurridos en Chile:

	Magnitud (R)	Energía liberada (E)
Terremoto de Valdivia (1960)	9,6	
Terremoto de Cauquenes (2010)	8,8	
Terremoto de Algarrobo (1985)		$3,16 \cdot 10^{23}$
Terremoto de Vallenar (2013)		$1,9 \cdot 10^{22}$

Figura 93. Aplicaciones Logaritmos. Logaritmos-Geología. Libro 1

7. Al tomar un medicamento la cantidad de miligramos que quedan de él en la sangre luego de t horas de haber sido administrado se calcula mediante la fórmula

$$C = 10e^{-0,2t}$$

a) ¿Cuántos miligramos del medicamento hay en la sangre luego de una hora?

b) Si la cantidad de miligramos no puede bajar de 3, ¿aproximadamente, cada cuánto tiempo debe tomarse el medicamento?

c) Según esta fórmula, ¿hay algún momento en que deja de haber medicamento en la sangre? Justifica tu respuesta y discute con tus compañeros.

Figura 914. Aplicaciones logaritmos. Logaritmo-Medicina. Libro 1

8 Resuelve los siguientes problemas.

- a. Si una persona deposita cierta cantidad C de dinero en un banco a un $i\%$ de interés mensual, el dinero que tiene al cabo de n meses se calcula con la fórmula

$$C(n) = C \left(1 + \frac{i}{100} \right)^n$$

Calcula cuántos meses habrá que mantener \$150 000 en el banco —con un interés del 5%— para que al cabo de ellos haya \$221 618.

Figura 95. Aplicaciones Logaritmos. Logaritmo-Economía. Libro 1

Anexo 8.

Aplicaciones Logaritmos libro 2

4. La relación entre el área de la superficie corporal a (m^2) de una persona, su masa m (kg) y su estatura h (cm) está dada por la siguiente expresión:
 $\log(a) = -2,144 + 0,425 \log(m) + 0,725 \log(h)$.

- a. ¿Cuál es el área aproximada del cuerpo de Alex si su masa es de 70 kg y su estatura es 175 cm?
- b. Si la masa corporal de Josefa es de 60 kg y su estatura es 1,6 m, ¿cuál es el área de su cuerpo aproximadamente?
- c. Determina la estatura aproximada de una persona, si el área de su cuerpo es $2 m^2$ y su masa es de 80 kg.



Figura 936. Aplicaciones de logaritmos. Logaritmos-Medicina. Libro 2

5. Ciencias naturales. El nivel de presión del sonido se puede calcular a partir de la expresión:

$$N = 20 \log\left(\frac{p}{2 \cdot 10^{-4}}\right),$$

donde p es la presión del sonido en dinas/cm².

- Si $p = 2 \cdot 10^{-4}$ dinas/cm², ¿cuál es el nivel de presión sonora?
- Si $p = 2 \cdot 10^{-3}$ dinas/cm², ¿cuál es el nivel de presión sonora?, ¿a cuántos pascuales (Pa) equivale? ← Usa 0,1 Pa = 1 dina/cm²
- Demuestra que el nivel de presión del sonido se puede expresar como

$$N = 20 \left(\log\left(\frac{p}{2}\right) + 4 \right).$$

Figura 947. Aplicación de logaritmos. Logaritmos-Música. Libro 2

6. Ciencias naturales. La intensidad de la luz que ingresa a un pozo de agua va disminuyendo con la profundidad. Para describir la profundidad a la que se puede percibir un porcentaje p de luz respecto de la inicial se utiliza la siguiente relación:

$$x = -\frac{\log(p)}{0,9}$$

Donde x se expresa en metros.

- Analizando la relación, ¿cómo se expresa p ? Explica.
- Si un buceador percibe un porcentaje de luz igual al 92% del que se percibe en la superficie, ¿a qué profundidad se encuentra?
- ¿A qué profundidades, respectivamente, se perciben porcentajes de 80%, 70% y 50%? Utiliza la calculadora y redondea el valor a dos cifras decimales.

Figura 98. Aplicación de logaritmos. Logaritmo-Ciencias. Libro 2

- 10 Ciencias naturales.** Para determinar el diámetro d de un asteroide (en kilómetros), los astrónomos utilizan la expresión: $\log(d) = 3,7 - 0,2 \cdot g$, donde g corresponde a la magnitud absoluta del asteroide.
- Determina el diámetro de un asteroide si su magnitud absoluta es 30.
 - Calcula el diámetro de un asteroide si su magnitud absoluta es 20. ¿Qué puedes concluir?
 - ¿Cuál es la magnitud absoluta de un asteroide si su diámetro mide 5,8 kilómetros?

Figura 959. Aplicación logaritmos. Logaritmo-Astronomía. Libro 2

- 21 Ciencias naturales.** El pH es una medida de la acidez o alcalinidad de una sustancia. Se mide de acuerdo con la concentración de moles de hidrógeno utilizando la fórmula:

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$$

Donde $[\text{H}^+]$ corresponde a la concentración de iones de hidrógeno, medida en moles por litro.



- Calcula el pH de una sustancia cuya concentración de iones de hidrógeno es de 0,00000038 moles por litro.
- En algunos lugares muy contaminados se produce el fenómeno llamado "lluvia ácida". Calcula la concentración de iones de hidrógeno de una lluvia ácida cuyo pH es 2,8.
- Calcula la concentración de iones de hidrógeno de las siguientes sustancias, conociendo su pH aproximado.

Sustancia	pH
Vinagre	2,9
Jugo gástrico	1,5
Jugo de naranja	4,5
Orina	6,5
Jabón de manos	9,5

- El pH del jugo de un tipo de limón es 2,5. Por otro lado, la concentración de iones de hidrógeno de un producto químico es cuatro veces mayor que la del limón. ¿El pH de ese producto es mayor o menor que el del limón?, ¿cuántas veces?

Figura 100. Aplicaciones logaritmos. Logaritmo-Ciencias. Libro 2

- 23** $\log(P) = \frac{20 + t \cdot \log(2)}{10}$ es la expresión que relaciona la población P de insectos en una bodega luego de pasar t horas cerrada.
- ¿Cuántos insectos había en el instante en que se cerró?
 - ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que la población de insectos se cuadruplique?

Figura 101. Aplicaciones logaritmos. Logaritmo-Ciencias. Libro 2

- 24** El área A de una herida superficial, luego de t horas de cicatrización, se puede modelar con $\log(A_0) - \log(A) = \frac{35t}{1000} \cdot \log(3)$, donde A_0 es el área original de la herida.
- Según esto, ¿cuánto tarda en cicatrizar la tercera parte de una herida?
 - Si una persona tiene una herida de 9 cm^2 , ¿cuánto tiempo tarda en reducirse a 1 cm^2 ?

Figura 102. Aplicaciones logaritmos. Logaritmo-Medicina. Libro 2

Anexo 9

Aplicaciones Libro 3

- 3.** La relación entre el área de la superficie corporal a de una persona en m^2 , su masa m en kg y su altura h en cm está dada por la expresión:
- $$\log(a) = -2,144 + 0,425 \log(m) + 0,725 \log(h)$$
- ¿Cuál es el área aproximada de una persona si su masa es 70 kg y su altura, 1,75 m?
 - Determina la estatura aproximada de una persona si el área de su cuerpo es 2 m^2 y su masa, 80 kg.
 - ♦ Utilizando propiedades de logaritmos, encuentra una expresión equivalente a la fórmula anterior. Compruébala utilizando los resultados anteriores.

Figura 103. Aplicaciones logaritmos. Logaritmos-Medicina. Libro 3

- 7.** Para calcular el pH de una solución química se utiliza la fórmula $pH = -\log[H^+]$. En ella, H^+ es la concentración de iones de hidrógeno presentes en la solución. ¿Cuál es el pH de una solución que tiene una concentración de $[H^+]$ igual a $9,5 \cdot 10^{-12}$?

Figura 104. Aplicaciones logaritmos. Logaritmos-Ciencias. Libro 3

- 8.** Para determinar el diámetro d de un asteroide (en km), los astrónomos utilizan la expresión $\log(d) = 3,7 - 0,2 \cdot g$. En ella, g corresponde su magnitud absoluta.
- a.** Determina el diámetro de un asteroide si su magnitud absoluta es 30.
 - b.** Calcula el diámetro de un asteroide si su magnitud absoluta es 20.
 - c.** ¿Cuál es la magnitud absoluta de un asteroide si su diámetro mide 5,8 km?

Figura 105. Aplicaciones logaritmos. Logaritmos-Astronomía. Libro 3

Cuestionario de auto reporte sobre contribuciones primarias y secundarias a los Objetivos de Desarrollo Sostenible, organizados por categorías.

En caso de que aplique, marque con una "X" un único Objetivo de Desarrollo Sostenible como aporte principal y otro objetivo como aporte secundario.

Bloques	Objetivos	1°	2°
Personas	1. Poner fin a la pobreza en todas sus formas y en el mundo.		
	2. Poner fin al hambre, lograr la seguridad alimentaria y la mejora de la nutrición y promover la agricultura sostenible		
	3. Garantizar una vida sana y promover el bienestar de todos y todas las edades.		
	4. Garantizar una educación inclusiva y equitativa de calidad y promover oportunidades de aprendizaje permanente para todos.		
	5. Lograr la igualdad de género y empoderar a todas las mujeres y las niñas.		
Planeta	6. Garantizar la disponibilidad y la gestión sostenible del agua y el saneamiento para todos.		
	12. Garantizar modalidades de consumo y producción sostenible.		
	13. Adoptar medidas urgentes para combatir el cambio climático y sus efectos.		
	14. Conservar y utilizar sosteniblemente los océanos, los mares y los recursos marinos para el desarrollo sostenible.		
	15. Proteger, restablecer y promover el uso sostenible de los ecosistemas terrestres, gestionar sosteniblemente los bosques, luchar contra la desertificación, detener e invertir la degradación de las tierras y detener la pérdida de biodiversidad.		
Prosperidad	7. Garantizar el acceso a una energía asequible, fiable, sostenible y moderna para todos.		
	8. Promover el crecimiento económico sostenido, inclusivo y sostenible, el empleo pleno y productivo y el trabajo decente para todos.		
	9. Construir infraestructuras resilientes, promover la industrialización inclusiva y sostenible y fomentar la innovación.		
	10. Reducir la desigualdad en los países y entre ellos.		
	11. Lograr que las ciudades y los asentamientos humanos sean inclusivos, seguros, resilientes y sostenibles.		
Paz	16. Promover sociedades pacíficas e inclusivas para el desarrollo sostenible, facilitar el acceso a la justicia para todos y construir a todos los niveles institucionales eficaces e inclusivas que rindan cuentas.		
Asociaciones	17. Fortalecer los medios de implementación y revitalizar la Alianza Mundial para el Desarrollo Sostenible		

