UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE EDUCACIÓN
Pedagogía en Filosofía

LA GENERALIDAD LÓGICA Y EL DEBATE SOBRE LA CAPACIDAD EXPRESIVA DEL OPERADOR *N* EN EL *TRACTATUS* DE WITTGENSTEIN

POR MARTIN NAHUM GUITERREZ BENARDOS

Tesis presentada a la facultad de educación de la Universidad de Concepción para optar al título Profesor de Filosofía
Profesor Guía: Javier Vidal López.

Enero 2024
Concepción, Chile

A mis padres por el apoyo,
a Romina por su amor y
paciencia infinita y al
Profesor Javier Vidal por
su guía y enseñanza.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo es sobre la filosofía de la lógica de Wittgenstein en el *Tractatus*. Sobre esta gran obra se ha escrito bastante, es aún más impresionante pensar en las decenas de miles de páginas que se han escrito sobre este libro, a pesar de tener menos de cien páginas. Del *Tractatus* se ha dicho de todo, en los primeros años luego de su publicación lo que más se hablaba era de su teoría figurativa del significado, es decir, su principal lectura se enmarcaba en la filosofía del lenguaje. Luego de haberse (casi) agotado estas lecturas, apareció quien quería a ver en Wittgenstein a un místico, de ahí se derivan los textos sobre el significado de la vida o sobre el espíritu en el *Tractatus*. Hace pocos años, alrededor del año 2000, se reactivó el interés por los escritos tempranos de este gran filósofo austriaco. Este trabajo se en arca dentro de un área aún poco conocida, de nicho, presente en el *Tractatus*, a saber, el intento de Wittgenstein de crear un lenguaje lógicamente correcto a través de una lógica consistente que utilice *una* sola contante lógica, esto lo expone Wittgenstein a través de su forma general de la proposición: $[p, \xi, N(\xi)]$. A través de esta expresión, Wittgenstein intenta delimitar lo que puede ser dicho. Él mismo nos dice, poco antes de formularla matemáticamente:

> 4.5 La forma general de proposición es: así están las cosas.[1]

A través de ella se reportan los estados de cosas, tal y cual cosa es o no el caso. Para construir proposiciones a través de la forma general de la proposición, Wittgenstein propone que debemos utilizar un único operador veritativo (una operación) que aplicaremos a proposiciones individuales, a conjuntos o a funciones proposiciones, para poder construir cualquier otra proposición. Esta es una de las ideas centrales presentes en el texto y es el centro de esta investigación.

En el primer capítulo se sientan las bases mínimas para poder comprender el desarrollo posterior de la investigación, en específico se presenta la teoría figurativa del significado, a saber, que los nombres están por objetos en el lenguaje, y que la manera

[1] De ahora en adelante, toda cita que aparezca de esta forma, a saber, un numero con o sin otro seguido de un punto, corresponde a una cita del *Tractatus*, siguiendo la traducción de Pears y McGuiness (1961).

en que se ordenan los objetos en la realidad es la manera en que los nombres se deben ordenar entre ellos en una proposición para que esta última figure la realidad. En el segundo apartado del primer capítulo, se revisan las críticas que plantea Wittgenstein a la lógica precedida por Frege y Russell, aparece ahí el rechazo a la visión universalista de lógica y también el *Grundgedanke* o la idea de que las constantes lógicas no representan nada.

En el segundo capítulo se presenta la concepción tractariana de la generalidad lógica o cómo aparecen las proposiciones generales. En la primera parte se presenta la concepción de Frege y Russell de las proposiciones generales y cómo estas se derivan de los conceptos de suma y producto lógico, para luego presentar las críticas de Wittgenstein a esa concepción, y en segundo lugar se presenta el operador *N* y su función, para finalmente diferenciar la generalidad de la cuantificación.

Finalmente, en el capítulo tres se expone el grueso de la investigación, se busca responder a la pregunta ¿Podemos, a través del operador *N* construir cualquier proposición de un lenguaje lógico de primer orden? La postura que defiendo es que sí. En este apartado se presenta el debate sobre la capacidad expresiva de este operador lógico, protagonizado por Robert Fogelin y Peter Geach, el primero acusa a Wittgenstein de cometer un error fundamental que deriva en la incapacidad de *N* de poder expresar todas las proposiciones, luego es Geach quien amplía la notación tractariana para que pueda ser recatada de esta acusación.

El operador *N* y el debate sobre su capacidad expresiva es un debate importante al momento de estudiar la lógica del Tractatus y hasta ahora parece ser un momento olvidado de la lógica del siglo XX. Con este trabajo espero ampliar el conocimiento sobre la filosofía de la lógica del Tractatus y además presentar estas ideas al público de habla hispana.

CAPÍTULO I. LA LÓGICA DEL *TRACTATUS*

1. La teoría figurativa del significado

Para una correcta explicación del modo en que las proposiciones representan la realidad en el programa de Wittgenstein, debemos dar cuenta del atomismo lógico del *Tractatus*. Seguiremos para ello el orden en que el propio autor expone las ideas y presenta los elementos metafísicos que subyacen a su teoría figurativa del significado:

1.1 El mundo es la totalidad de los hechos, no de las cosas.
1.2 El mundo se divide en hechos.
2. Lo que es el caso, un hecho, es la existencia de estados de cosas.
2.01 Un estado de cosas es una combinación de objetos (cosas).

En estos famosos primeros pasajes del *Tractatus*, Wittgenstein nos deja claro que en su metafísica, hechos y cosas no son lo mismo, y de este modo también se separa de aquellas teorías que identifican al mundo como un conjunto de objetos y sus relaciones. También introduce en este extracto conceptos fundamentales de su metafísica, los cuales serán muy importantes a la hora de comprender la lógica del *Tractatus*, estos conceptos son: Hechos (*Tatsachen*), Objetos (*Sachen*), y Estados de Cosas (*Sachverhalten*). Wittgenstein nos explica que el mundo no es un mera suma de objetos, o el conjunto de los objetos, sino que el mundo es la totalidad de los hechos, y un hecho es la existencia de estados de cosas, que están compuestos por objetos, por esta razón, continuamos nuestra exposición explicando qué es lo que Wittgenstein entiende por objeto en el *Tractatus*.

Una de las características más importantes de los objetos tractarianos es su simplicidad (2.02). Esto quiere decir, en la metafísica tractariana, que los objetos son inanalizables, es decir, conforman los átomos de la realidad, conforman la unidad mínima de la realidad. Potter (2009) lo explica con bastante claridad “Los objetos son permanentes; lo que varía entre los mundos posibles no son los objetos, sino cómo estos se configuran para crear estados de cosas” (p. 261). Por esta razón:

2.021 Los objetos conforman la substancia del mundo.
Por eso no pueden ser compuestos.

Esta observación a 2.02 es importante para la posibilidad de llevar a cabo el análisis de las proposiciones (más adelante veremos la conexión de los objetos con las proposiciones). Los objetos son la substancia del mundo, pues, si el mundo no tuviera substancia, un límite al análisis o descomposición, el hecho que una proposición tenga o no sentido dependería del hecho de que otra proposición fuese verdadera (2.0211), esto se explicará con mayor detalle cuando se presente la teoría figurativa del significado. El argumento de Wittgenstein es regresivo en el sentido de que, si no podemos asegurar que una proposición tiene sentido (ya que hay una lista interminable de dependencias entre proposiciones), entonces, en vistas de la teoría figurativa del significado, no podríamos hacernos ninguna figura del mundo, ni verdadera ni falsa (2.0212).

Habiendo caracterizado brevemente la simplicidad de los objetos es momento de ver qué son los estados de cosas. Como dijimos anteriormente, los estados de cosas están conformados por objetos (2.0272), a lo que Wittgenstein agrega una característica esencial para la teoría figurativa:

2.03 En un estado de cosas los objetos están entrelazados unos con otros como los eslabones de una cadena.
2.031 En un estado de cosas los objetos están relacionados unos con otros de una modo y manera determinados.

Aquí Wittgenstein está distinguiendo entre un conjunto, una mera colección de elementos, y un estado de cosas, al que le es esencial que los objetos estén combinados de cierta manera (esto es bastante importante).

A continuación, Wittgenstein presenta la base de la teoría figurativa, su concepto de figura, y su relación con los hechos.

2.1 Nos hacemos figuras de los hechos.
2.11 Una figura representa una situación en el espacio lógico, la existencia y no existencia de estados de cosas.
2.12 Una figura es un modelo de la realidad.
2.13 A los objetos les corresponden en la figura los elementos de la propia figura.
2.131 Los elementos en la figura son en ella los representantes de los objetos.

En estos pasajes vemos que, para Wittgenstein, creamos modelos de la realidad, y en esta relación entre el modelo y la realidad los elementos en el modelo corresponden a los objetos en la realidad. Es claro que tanto la relación entre figura y hecho como la relación entre objeto y elemento, deben tener un fundamento, y exponer ese fundamento es uno de los grandes temas del desarrollo inicial del *Tractatus*.

2.14 Una figura consiste en que sus elementos se relacionan unos con otros de un modo y manera determinados.

La gran pregunta que queda pendiente en este momento es: ¿Qué es aquello que nos permite decir que una figura representa algo? La respuesta de Wittgenstein es que aquello que nos permite trazar la relación entre figura y realidad es la *estructura* y *forma de figuración*:

2.15 El que los elementos de la figura se relacionen unos con otros de un modo y manera determinados representa que las cosas [objetos] se relacionan también así unas con otras.
A esta conexión de los elementos de la figura la llamo estructura de la figura, y a la posibilidad de estructura, forma de figuración de la figura.

El que los elementos de la figura están en relación con los objetos en el mundo se declara en 2.1514, y es a esto a lo que Wittgenstein llama la *relación figurativa*, esta relación es entre cada objeto con cada elemento de la figura, y este es el primer paso para comprender a cabalidad la relación entre figura y figurado. Ahora, lo segundo que es necesario para que ocurra la figuración es que la estructura del hecho sea la misma que la estructura de la figura, de esta manera tenemos que, los elementos en la figura están por objetos en la realidad, además, para que una figura represente los figurado debe tener la misma estructura, y el fundamento de esta estructura tanto en el caso de la estructura de la figura como en la estructura de un estado de cosas, es la forma de figuración. Este es el último elemento que es necesario para que se asegure la relación entre figura y figurado, que haya una forma de figuración compartida, des este modo se asegura igualdad de estructura, cabe indagar ahora más en profundidad ¿qué es eso de la forma de figuración?

Wittgenstein acude a la noción de forma en varias ocasiones, en primer lugar lo hace con respecto a los objetos, en este caso la forma es la *posibilidad* de ocurrencia de ellos en un rango determinado de estados de cosas. En un segundo momento se refiere a la forma con respecto a los estados de cosas para los cuales significa su *posibilidad* de estructura (Fogelin, 1996).

Una figura es un hecho (2.141), en tano un hecho es la existencia de estados de cosas, que son a su vez, un conjunto de elementos coordinados de un modo y manera determinados. Agrega Wittgenstein:

2.16 Un hecho, para ser una figura, debe tener algo en común con lo figurado.
2.161 En la figura y en lo figurado ha de haber algo idéntico para que, en suma, la una pueda ser figura de la otra.
2.17 Lo que una figura tiene que tener en común con la realidad para poder figurarla a su modo y manera -correcta o erróneamente- es su forma de figuración.

Las figuras para Wittgenstein pueden ser de variadas formas: por ejemplo, si recreamos una carrera de autos reales, usando un modelo a escala con Hot Wheels en una pista, estamos hablando de una figura espacial, y si representamos una naranja con un círculo de color naranja en un bastidor podríamos decir que es una figura de algo coloreado, etc. Esto nos podría llevar a creer que, para que una figura pueda representar algo, la forma de figuración debe tener algo material, pero no necesariamente es así, lo que argumenta Wittgenstein es que para que una figura pueda figurar, es necesario una forma de figuración, pero no una forma específica de figuración. Por esto mismo se requiere una forma más abstracta:

2.18 Lo que toda figura, cualquiera que sea su forma, tiene que tener en común con la realidad para que, en suma, pueda figurarla -correcta o erróneamente-, es la forma lógica, esto es: la forma de la realidad.

Vemos entre 2.17 y 2.18 un paso del concepto de forma de figuración al concepto de forma lógica. Justo el recurso de la forma lógica es lo que nos permite dar cuenta de aquello que tienen en común la figura y lo figurado sin la necesidad de apelar a una noción de forma basada en ciertos rasgos materiales específicos, o en general a distintas formas particulares de representación (Fogelin, 1996). A continuación, agrega Wittgenstein que si la forma de figuración de una figura es lógica, entonces la figura se llamará 'figura lógica'. Además, toda figura será a la vez una figura lógica, pero no toda figura es, por ejemplo, espacial. (2.181 - 2.182).

Las figuras representan una situación posible en el espacio lógico (2.202), y por ello pueden ser verdaderas o falsas (2.21), es decir, pueden o no estar de acuerdo con la realidad. La figura representa algo gracias a su forma (2.22), y la verdad o falsedad de la figura depende del acuerdo o desacuerdo del sentido de esta, lo que representa, con la realidad. Del mismo modo, una figura no puede ser verdadera *a priori*, si queremos conocer su verdad o falsedad debemos compararla con la realidad (2.221 - 2.223).

Cuando Wittgenstein concluye su tratamiento de la figura en solitario, introduce un nuevo concepto, el concepto de pensamiento (*Gedanke*), para trazar la relación entre estado de cosas y proposición:

3. Una figura lógica de los hechos es un pensamiento.
3.1 En una proposición el pensamiento se expresa de modo perceptible por los sentidos.

Los pensamientos no son materiales, por lo tanto, su forma de figuración será solo la más abstracta posible, que es la forma lógica. Aquí nos encontramos por primera vez con la proposición, a través de la cual el pensamiento es expresado. A continuación, Wittgenstein presenta una distinción importante a nivel lingüístico:

3.11 Usamos el signo perceptible por los sentidos (signo sonoro o escrito, etc.) de una proposición como proyección de una situación posible.
El método de proyección es el pensar el sentido de la proposición.

Proposición y signo proposicional no son lo mismo, la diferencia sería la siguiente:

3.12 Llamo al signo mediante el que expresamos un pensamiento, signo proposicional. Y una proposición es un signo proposicional en su relación proyectiva con el mundo.

Aquí Wittgenstein nos presenta una distinción importante a saber que la proyección corresponde es la figuración de una situación, que el signo proposición es un vehículo lingüístico de la figuración. y lo que es proyectado es el sentido de una proposición, o lo que es lo mismo, una situación posible en el espacio lógico.

Teniendo clara la distinción entre signo proposicional y proposición, Wittgenstein da paso a examinar la proposición directamente:

3.14 El signo proposicional consiste en que sus elementos, las palabras, se relacionan unos con otros de un modo y manera determinados.
Un signo proposicional es un hecho.

Como este pasaje es un guiño a 2.14, podemos entender también que la proposición es una figura. Una proposición está articulada, es decir, no es una sopa de palabras, o un mero conjunto de nombres (3.141). Un signo proposicional es un hecho, y sólo los hechos pueden expresar un sentido, del mismo modo que las figuras son hechos (2.141) y las figuras representan situaciones posibles en el espacio lógico. Luego de estas aclaraciones es que por fin llegamos a la relación figurativa entre proposiciones y realidad:

3.2 En una proposición, un pensamiento puede expresarse de tal manera que a los objetos del pensamiento les correspondan elementos del signo proposicional.
3.201 A estos elementos los llamo "signos simples" y a la proposición "completamente analizada".
3.202 Los signos simples empleados en las proposiciones se llaman nombres.
3.203 Un nombre significa un objeto. El objeto es su significado. ("A" es el mismo signo que "A").
3.21 A una configuración de signo simples en un signo proposicional le corresponde una configuración de objetos en una situación.
3.22 En una proposición un nombre es el representante de un objeto.

En primer lugar, el concepto de nombre corresponde a lo más básico de nuestra ontología, es decir son "signos simples" en el mismo sentido en que los objetos son simples, es decir, constituyen el elemento inanalizable del lenguaje, la unidad mínima. Y la proposición que solo contiene nombres está completamente analizada, pues siendo una configuración o concatenación de signos simples no puede analizarse más.

Es así como llegamos a la formulación de la teoría figurativa del significado: en una proposición, los nombres hacen las veces de objetos en una situación para que las proposiciones relevantes (más adelante veremos qué proposiciones) puedan figurar estados de cosas, o posibles situaciones en el espacio lógico. En virtud de la relación figurativa entre nombres y objetos más la forma lógica, es decir, el modo de combinación que comparte la proposición con un estado de cosas, la proposición figura ese estado de cosas. Y es el hecho de si la proposición siendo la figura representa el estado de cosas lo que nos permite comprender la verdad o falsedad de ellas.

Para terminar con este apartado introductorio, solo queda la tarea de plantear la distinción entre las proposiciones del lenguaje ordinario y las proposiciones *elementales*:

4.21 La proposición más simple, la proposición elemental, asevera la existencia de un estado de cosas.
4.22 Una proposición elemental consta de nombres. Es una trabazón, una concatenación de nombres.
4.23 Un nombre sólo ocurre en una proposición dentro de la trabazón de una proposición elemental.
4.25 Si una proposición elemental es verdadera, entonces el estado de cosas existe; si la proposición elemental es falsa, entonces el estado de cosas no existe.

Lo primero que salta a la vista en esta seguidilla de pasajes es que las proposiciones elementales surgen del análisis de las proposiciones del lenguaje ordinario. Es decir, las proposiciones de un lenguaje están conformadas por proposiciones elementales, y si antes se dijo que las proposiciones están constituidas por nombres, en el sentido tractariano de signos simples, eso es sólo en virtud de las proposiciones elementales. Quedaría preguntar, ¿qué representan las proposiciones elementales? Debemos recordar que los nombres en una proposición elemental representan objetos en un posible estado de cosas. Los estados de cosas constan de objetos concatenados como los eslabones de una cadena, de un modo y manera determinados; y vemos que en las proposiciones elementales, los nombres están concatenados así; por lo tanto, una proposición elemental representa un posible estado de cosas.

2. La crítica a la 'vieja' lógica en el *Tractatus*.

Los avances que hoy tenemos en lógica son relativamente recientes. La lógica aristotélica dominó el panorama de estudio durante siglos, pues a Aristóteles le siguieron los estoicos, los escolásticos y algunos modernos. La aparición de la lógica como la conocemos sucede alrededor del año 1847 con la aparición de *El análisis matemático de la lógica* de George Boole, quien introdujo la idea de un álgebra lógica, donde las premisas se expresaban a través de letras. Hubo más lógicos junto a Boole que ayudaron a dar forma a la nueva lógica, pero sin duda quien proporcionó un fundamento sólido fue Gottlob Frege, el iniciador del proyecto logicista (al que más tarde se sumaría Bertrand Russell). El logicismo es una corriente filosófico-matemática que argumenta que la matemática es reducible a la lógica, o que a través de axiomas lógicos podría derivarse la matemática, en el caso de Frege deduce la aritmética de la lógica.

Frege en 1879 publicó su *Conceptografía (Begriffsschrift)*, donde introdujo los cuantificadores en el desarrollo de la lógica de predicados y nos proveyó de una precisa notación simbólica para la formalización del lenguaje natural.

Unos años más tarde, luego de haber leído las grandes obras de Frege, aparecen los *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead, quienes a través de las miles de demostraciones que este libro contiene buscaron derivar la matemática desde cinco axiomas lógicos (proyecto similar al que intentó Frege en *Las leyes de la aritmética (Grundgesetze).* Wittgenstein, poco antes de llegar a Cambridge y durante toda su estancia allí, leyó y estudió críticamente las obras de Russell, incluyendo los *Principia*. Muchas de las críticas que hace Wittgenstein tanto a Frege como a Russell se encuentran ya en las *Notes dictated to G. E. Moore* (1914), las *Notes on Logic* (1913) y en variada correspondencia entre ellos. En el *Tractatus*, se menciona la "vieja lógica" en dos ocasiones (4.126 y 6.125) para referirse a la concepción universalista de la lógica que tanto Frege como Russell tenían. En lo que sigue se busca presentar de manera más o menos profunda las críticas de Wittgenstein a partir de una introducción previa de las ideas que Russell y Frege tenían sobre la lógica.[2]

Antes de pasar a ello me parece de utilidad realizar un comentario sobre la comprensión que tenía Wittgenstein de los trabajos de Frege y Russell. Se ha dicho que en varios pasajes del *Tractatus* y de sus escritos pretractarianos, Wittgenstein presenta una comprensión como menos superficial de las tesis fregeanas, por lo mismo, la mayoría de las veces sus críticas no dan en el clavo o, como menos, surgen de malas interpretaciones. Esto es un debate exegético por sí mismo, el debate sobre si las

[2] Como dato adicional, el nombre de Frege aparece diecisiete veces y el de Russell veintisiete veces en el *Tractatus*. En el caso de Russell, muchas veces se le nombra para manifestar una deuda con los trabajos de Russell, y otras tantas veces se hace para criticar tanto su teoría de tipos como la teoría del juicio como relación múltiple.

críticas hacen o no justicia al propio Frege, que no es el objetivo de este apartado. Pero cabe decir para lo que sigue nos basamos principalmente en los artículos de Ricketts (1996, 2002), quien pertenece al grupo de teóricos para quienes el *Tractatus* es un trabajo que, además de estar fuertemente influenciado por la lógica fregeana, constituye un intento de resolver tensiones internas al pensamiento de Frege (McGinn, 2006, p. 28). Con respecto a la comprensión que tenía Wittgenstein de los textos de Russell, no hay tanto debate, pues las ideas de Russell fueron discutidas más pronto que tarde entre ambos, por lo que había una "correcta fiscalización" de parte del autor. Muy por el contrario, la relación entre Frege y Wittgenstein fue menos estrecha, pero aun así intercambiaron varias cartas y se tiene evidencia de al menos dos viajes que hizo Wittgenstein a Jena para discutir asuntos de lógica con Frege.

Pues bien, la concepción universalista de la lógica se caracteriza por presentar la lógica como la ciencia que trata de los rasgos más generales del mundo, de modo que es universalista porque es capaz de generalizar sobre todas las cosas. Por ello mismo, la lógica, para Frege y Russell, debe reglar la demostración mediante inferencias en todas las ciencias, y en ese sentido es máximamente general (Ricketts, 1996). Uno de los hitos de la "vieja lógica" es la introducción de la expresión funcional (a través de adoptar la forma de las funciones) de los enunciados, y especialmente la incorporación de los cuantificadores para poder generalizar. Así, por ejemplo, el enunciado "Sócrates es Mortal", donde la mortalidad se predica de Sócrates, puede traducirse en notación funcional como "Ms" (La M mayúscula indica el predicado "Mortal" y la minúscula indica al sujeto "Sócrates"), y si, por ejemplo, quisiéramos generalizar mediante el enunciado "Todos los hombres son mortales", haríamos uso de los cuantificadores, en específico del cuantificador universal, de la siguiente manera "$\forall(x).\ Mx$". Para evitar las confusiones del lenguaje ordinario, tanto Frege como Russell intentaron crear un lenguaje "lógicamente perfecto" en el cual, a través de la aplicación de principios lógicos generales a premisas, pudieran alcanzarse conclusiones correctas en todas las ciencias. Ricketts (1996) señala en esta línea que el *Begriffsschrift* de Frege es "un marco conceptual para un lenguaje en el que puede decirse todo aquello que puede ser dicho. Sus límites son los límites del lenguaje" (p. 61). Como consecuencia de la concepción universalista, hallamos también que tanto Frege como Russell creían que la lógica nos entrega nuevos conocimientos. Con esto nos referimos a que, para estos autores, la lógica tiene la capacidad de, a través de un conjunto inicial de premisas, podemos obtener una conclusión que nos permita ver algo que no está explícitamente en alguna de las premisas consideradas individualmente. Un ejemplo, sería el razonamiento de tipo inductivo: "Si llueve la tierra se moja" "la tierra amaneció mojada", por lo tanto "ayer llovió".

Wittgenstein se opone de varias maneras a esta concepción universalista de la lógica, en primer lugar, atacando la idea de la lógica como dadora o creadora de nuevo conocimiento:

6.1 Las proposiciones de la lógica son tautologías.
6.11 Por tanto, las proposiciones de la lógica no dicen nada. (Son las proposiciones analíticas).

En este famoso pasaje, debemos entender la idea de las proposiciones de la lógica, o tautologías, según Wittgenstein con relación a la idea de los axiomas lógicos en Frege, para quien los axiomas son verdades genuinas (aunque autoevidentes) porque las leyes de la lógica no carecen de contenido, sino que dicen algo. Ahora bien, el hecho de que las proposiciones de la lógica no digan nada, no les quita importancia, puesto que se trata, usando la distinción tractariana entre decir y mostrar, de que sin decir nada las proposiciones de la lógica muestran la lógica del lenguaje y del mundo. Por ejemplo, a través del análisis de una proposición de la lógica como "o Esteban Paredes hace un gol o no lo hace", el contenido descriptivo de la proposición se cancela, pues la proposición no nos dice nada del partido del Colo-Colo. Pero al cancelarse el contenido descriptivo, se nos muestra la forma lógica de la proposición "Esteban Paredes hace un gol", que, recordemos, es aquello que debe tener en común una proposición con el mundo para poder figurarlo. Al inicio de las *Notes dictated to G. E. Moore*, Wittgenstein dice: "Las proposiciones -así llamadas- de la lógica muestran las propiedades lógicas del lenguaje y por lo tanto del universo, pero no dicen nada" (p. 107).

Wittgenstein distingue entre el rol que cumplen los predicados genuinos y el rol que cumplen las conectivas lógicas como la negación y la implicación material en las proposiciones. A este respecto, la base de la crítica de Wittgenstein a Frege y Russell radica en su idea fundamental (*Grundgedanke*):

4.0312 La posibilidad de las proposiciones se basa en el principio de que los objetos tienen a los signos como representantes suyos.
Mi idea fundamental es que las constantes lógicas no representan nada. Que la lógica de los hechos no consiste en tener representantes.

A diferencia de las proposiciones que representan hechos en el espacio lógico, cuya posibilidad descansa en que los signos simples (los nombres) hagan las veces de los objetos, la lógica de los hechos dice él, no consiste en tener representantes: las constantes lógicas no funcionan como los nombres. La diferencia principal que observa Wittgenstein entre su visión y la de sus predecesores está relacionada con la distinción entre proposiciones empíricas y proposiciones lógicas. La posibilidad de las primeras recae en que constan de nombres que son representantes de objetos, las segundas funcionan de acuerdo con un mecanismo totalmente diferente que no está basado en elementos representando objetos sean estos del tipo que sean: las constantes lógicas no representan nada. Morris (2008) nos remite a 5.4, donde se dice que no existen objetos lógicos por los cuales las constantes lógicas estén, en el sentido de Frege y Russell. También nos muestra que al menos Russell veía necesario postular "objetos lógicos" como entidades del mundo (p. 205).

Para comprender el argumento que lleva a Wittgenstein a refutar la idea de las constantes lógicas como representantes de objetos, tomemos la proposición "llueve o no llueve", que se puede formalizar como "$p \vee \neg p$". Esta proposición es necesariamente verdadera, y eso quiere decir que su verdad no depende de la verdad de la proposición particular "llueve", lo que puede verse en que, si sustituimos "p" por, digamos, "Carlos Caszely falla el penal", obtenemos igualmente una proposición verdadera. Esto es decir que el contenido descriptivo de "p" es totalmente irrelevante.

Parece entonces que la verdad de “p v ¬p” debe residir de una u otra manera en el significado de las constantes lógicas “v” y “¬”.

En la concepción del *Tractatus* sobre la negación podemos ver mejor el argumento de Wittgenstein contra la idea de las constantes lógicas como representantes de objetos. Así, Fogelin (1987) se pregunta: si una proposición elemental representa una situación en el espacio lógico, ¿qué representa entonces su negación? La negación, nos dice, es interna a la proposición como figura. Luego, si aceptamos que la negación en una proposición está por una entidad como un objeto lógico, la negación también debería formar parte de lo figurado, pero esto no es posible, pues la proposición no puede representar la “desconfiguración” de los objetos. Fogelin (1987) expresa esta idea más claramente “No hay manera en que una proposición elemental puede ilustrar la no combinación de objetos sin convertirse en un conjunto desconfigurado de nombre i.e todo lo contrario a una proposición” (p. 40). Básicamente, el absurdo sería ver la negación como representando que ciertos objetos no están en la relación que la proposición propone.

Veamos ahora específicamente la crítica a Russell sobre las constantes lógicas. En los *Principia*, Russell consideraba la implicación material como designando una relación diádica entre proposiciones. Además, hacia el año 1910, Russell comprendía la verdad y la falsedad como propiedades que tenían las proposiciones. Wittgenstein dirá luego, por un lado, que las conectivas lógicas no son predicados, es decir, no expresan relaciones entre proposiciones y, por otro lado, que la verdad y la falsedad no son propiedades genuinas.

La razón de Wittgenstein para rechazar la idea de las constantes como relaciones puede verse en el siguiente pasaje:

5.42 Es evidente que ∨, →, etc. No son relaciones en el sentido en que derecha, izquierda, etc. Lo son.
La interdefinibilidad de los “signos primitivos” de Frege y Russell basta para mostrar que éstos no son tales signos primitivos y, más aún, que no designan relación alguna.

En este pasaje Wittgenstein plantea dos críticas primero al hablar de la interdefinibilidad de las constantes lógicas, se está refiriendo a que, por ejemplo, podemos definir la implicación material a través de disyunciones y negaciones, como del mismo modo podemos reemplazar la disyunción y la negación en una proposición, usando el símbolo de la implicación material. El hecho de que podamos a través de dos definiciones distintas, obtener proposiciones con iguales valores de verdad nos permite decir que no hay ninguna de estas definiciones que sea "primitiva" o prioritaria a la otra, por lo mismo, no están completamente analizadas, es decir, no pueden ser nombre de objetos. En segundo lugar, para Wittgenstein, las relaciones se expresan a través de enunciados como los que da en el pasaje, "a la derecha de", o "a la izquierda de", la diferencia entre estas relaciones y las "relaciones" que pretender mostrar las contantes lógicas radica en que la primeras indican qué cosas pueden entrar en relación, las segundas no, además debemos recordar que una proposición elemental representa un estado de cosas, que nos es otra cosa que objetos ordenados de un modo determinado, es decir, en relaciones determinadas, como por ejemplo estar a la derecha de o estar a la izquierda de.

Otra característica esencial de esta crítica, que es muy relevante para comprender cómo se concibe la lógica en el *Tractatus*, es que Wittgenstein entiende las constantes lógicas como operadores, y en términos tractarianos eso significa que las operaciones transforman proposiciones elementales en proposiciones. Las constantes lógicas son un tipo especial de operadores, son operadores veritativo-funcionales mediante los cuales obtenemos los valores de verdad de una proposición a partir de los valores de verdad de las proposiciones elementales contenidas en la proposición[3]. Además, estos operadores pueden ser aplicados de manera iterativa, por ejemplo, el resultado de una operación como la negación, una proposición no elemental "$\neg p$", puede ser la base luego de otra operación con la negación que produce como resultado "$\neg\neg p$", y así sucesivamente. Más relevante aún para los objetivos de este trabajo es que "no solo toda la lógica es reducible a lógica veritativo-funcional, debe ser posible desarrollar

[3] Se trata *in extenso* el tema de los operadores y las proposiciones en los capítulos siguientes.

toda la lógica usando una sola constante lógica” (White, 2017, p. 296). Con relación a lo anterior, Wittgenstein entiende que una constante, al aplicarse a una proposición elemental o a un conjunto de proposiciones elementales, transforma la proposición en tanto cambia sus valores de verdad, por ejemplo, cuando tengo la proposición elemental “*p*” y le aplico una negación, obtengo “¬*p*”, la negación en este caso no da como resultado una diferencia en la relación que hay entre los objetos que la proposición “*p*” representa, pues, tanto *p* como a ¬*p* acuden a la misma realidad al mismo mundo que nos permite saber que verdadera o la otra falsa, es en este sentido que las constantes son operaciones pues transformar los valores de verdad de una proposición, trabajan en el plano semántico, no metafísico.

Para apoyar la tesis defendida en 4.0312, Wittgenstein presenta una alternativa al uso de constantes lógicas en las proposiciones a través de las tablas de verdad, de ahí que Fogelin (1987) hable de la “teoría de la desaparición de las constantes lógicas” (p.42). Pues en una tabla de verdad ya no estarían presentes las constantes lógicas, como veremos ahora.

Las tablas de verdad consisten en un procedimiento mediante el cual puede calcularse, a partir de los valores de verdad de ciertas proposiciones (y en último caso, de las proposiciones elementales del *Tractatus*), las condiciones de verdad de una proposición lógicamente compleja. A continuación se muestra un ejemplo de la tabla de verdad de la conjunción. Se observa en ella cuáles son los valores de verdad que deben tomar las proposiciones “p” y “q” para hacer a “p ∧ q” tanto verdadera como falsa:

p	q	p ^ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La manera de usar las tablas de verdad para Wittgenstein es un poco distinta, como vemos aquí

“p	q	p”
T	T	T
F	T	T
T	F	F
F	F	T

En el uso tractariano de la tabla de verdad, lo primero que notamos es la ausencia de la implicación material (si…, entonces ...). Esto se debe a que Wittgenstein toma todo lo que se presenta en la figura, la tabla con los valores de verdad, como un signo proposicional en una notación alternativa a “p $\rightarrow$ q”[4], de ahí el uso de las comillas. El lado izquierdo de la tabla, donde se ubican los valores de verdad de las proposiciones “p” y “q”, será siempre igual para cualquier proposición compleja con “p” y “q”, por lo cual, para representar la proposición “p $\rightarrow$ q” es suficiente quedarse con el lado derecho de la tabla, donde se indican los valores de verdad que distinguen esa proposición de cualquier otra. Wittgenstein propone entonces otra notación más en la que los valores de verdad de la columna derecha conforman una fila, algo como: “(VVFV) (p, q)”. Este signo proposicional tiene el mismo sentido, o condiciones de verdad, que la proposición de la lógica proposicional “p $\rightarrow$ q”. El mismo Wittgenstein nos dice luego:

4.441 Es claro que al complejo de los signos “V” y “F” no le corresponde ningún objeto (o complejo de objetos), como tampoco a las líneas horizontales y verticales o a los paréntesis. - “No hay objetos lógicos”.

[4] Wittgenstein distribuye los valores de verdad de las proposiciones al revés de lo que se hace hoy en día. El uso común para tablas de verdad hoy en día es el de la figura 2, pero el uso de Wittgenstein corresponde al de la figura 2.1. Ver 4.31.

Naturalmente, algo análogo vale para todos los signos que expresan lo mismo que los esquemas con las inscripciones “V” y “F”.

Por lo tanto, la forma tractariana de las principales constantes lógicas binarias sería la siguiente:

1) Tautología: (VVVV) (p,q)
2) Contradicción: (FFFF) (p,q)
3) Condicional: (VVFV) (p,q)
4) Conjunción: (VFFF) (p,q)
5) Disyunción: (VVVF) (p,q)
6) Bicondicional (VFFV) (p,q).

Este análisis eliminatorio de las conectivas lógicas muestra de modo claro la crítica de Wittgenstein a Frege y Russell contenida en la “idea fundamental”. Pues, independientemente de qué tipo de notación se ocupe para formalizar nuestro lenguaje ordinario, se puede llevar a cabo un análisis como este y establecer así que las constantes lógicas no representan nada. Otro logro de la notación lógica del *Tractatus* es que nos permite ver muy claramente que toda proposición es una función de verdad de proposiciones elementales (5), pero esto será abordado en el capítulo siguiente.

CAPÍTULO II. LA GENERALIDAD

1. La generalidad entendida como conjunción y disyunción

En el ámbito de la lógica proposicional, usamos letras que reemplazan a las proposiciones atómicas (proposiciones sin constantes lógicas), tales como: p, q, r, s, etc.

Cuando analizamos un argumento en forma de silogismo, como, por ejemplo:

1. Todos los árboles tienen tronco.
2. Todos los troncos sirven para construir.

∴ Por lo tanto, todos los árboles sirven para construir.

Asignamos, usando las herramientas de la lógica proposicional, a cada parte del silogismo, a cada proposición del argumento, una letra, de esta manera nos queda:

1. p
2. q

∴ r

Pero esta notación no nos permite ver la complejidad del argumento, o las razones de su validez[5]. Por esta razón y gracias a los grandes desarrollos de Frege y de Russell, llegamos a una notación lógico-funcional[6] para los argumentos. Esta consiste en expresar los predicados como funciones cuyos argumentos son los sujetos, cuando el

---

[5] Para esta explicación estoy en deuda con Fogelin (1987), cuya clarísima exposición de los fundamentos del análisis funcional de las proposiciones me permitió poder explicar esto de manera (espero) más amena.

[6] Una notación funcional hace referencia a las expresiones para funciones matemáticas como, por ejemplo, la definición de un número par: "fx= 2×x"**.** La función es la operación que se aplicará sobre un argumento o argumentos, en el caso del análisis de los enunciados/proposiciones del lenguaje ordinario, Frege propuso usar una notación funcional para formalizar enunciados de manera lógica. El proceso es el siguiente: tomemos la proposición "El té se enfrió". Frege propone descomponer la proposición en dos partes, la primera es "El té", el argumento de la función, y la segunda es "x se enfrió" como la parte funcional, lo que reescrito en la notación con la parte funcional como "Ex" y el argumento como la letra menor "t" queda así: "Et" expresa la proposición "El té se enfrió".

análisis parte de proposiciones de la forma aparente de sujeto-predicado. Este tipo de notación luego conformaría la llamada lógica de predicados.

De este modo podemos reescribir el argumento anterior en notación funcional utilizando cuantificadores, que son funciones que nos permitir tratar a una cantidad estipulada de miembros de un conjunto, usando cuantificadores queda lo siguiente:

1. $(\forall x)\ (Ax \rightarrow Tx)$
2. $(\forall x)\ (Tx \rightarrow Cx)$

$\therefore (\forall x)\ (Ax \rightarrow Cx)$

Aquí sí se nos muestra claramente la estructura interna de cada una de las proposiciones que conforman el argumento, pudiendo ver a través de esta notación cómo se da la validez del argumento.

La notación funcional que se ha revisado es integrada por Wittgenstein en su lógica, en particular, siempre que se habla de función en el *Tractatus* (aparte de las proposiciones como funciones de verdad**)**, se trata de la función *proposicional*. Wittgenstein nos explica cómo debemos entender las funciones proposicionales así:

3.315 Si convertimos una parte constituyente de una proposición en una variable, hay una clase de proposiciones que son todas ellas valores de la proposición variable resultante.

Según esta explicación, de una proposición como "Fa" obtenemos la función "Fx" transformando una de sus partes componentes en una variable, en este caso el nombre "a", y los valores de esa función serán todas las proposiciones que resulten de colocar un nombre en el lugar de la variable. Frank Ramsey (1931) expresa de manera muy aclaratoria el concepto de función proposicional en *The Foundations of Mathematics.* "Podemos usar funciones proposicionales para reunir todo el rango de proposiciones que son los valores de la función para todos los valores posibles de x. Así "x es un hombre" reúne en conjunto todas las proposiciones "a es un hombre", "b es un hombre", etc. Habiendo a través de una función proposicional, obtenido un conjunto definido de proposiciones, podemos, usando una notación apropiada afirmar la suma o producto lógico de esto" (pp. 8)

En parte, la lógica trata con proposiciones sobre individuos como "El auto es rojo" o "La mesa es grande", que si las formalizamos en notación funcional resultan en "Ra" y "Gm", respectivamente. Pero cuando formalizamos proposiciones del tipo: "Todos los autos son rojos" o "Al menos una persona es calva", que son consideradas proposiciones generales, surgen algunas dificultades, pues no tratan de una u otra entidad individual sino de un conjunto de entidades. Para poder trabajar con este tipo de proposiciones, Russell y Frege presentan los cuantificadores universal ∀ y existencial ∃. El paso de proposiciones sobre individuos a proposiciones que generalizan a partir de individuos obligó a la creación de fórmulas lógicas que permitan describirlas y poder trabajar con ellas.

En la introducción al *Tractatus,* Russell hace hincapié en un asunto sobre la generalidad: "La teoría del Sr. Wittgenstein de la derivación de las proposiciones generales a partir de conjunciones y disyunciones" (Wittgenstein, 1922/2013, p.91). Lo que Russell trata de decir aquí es que, según él, la forma de llegar a las proposiciones generales de Wittgenstein consiste en derivarlas a partir de conjunciones y disyunciones de otras proposiciones, o, en otras palabras, de derivar los conceptos de *todo* y *algún* de los conceptos de suma y producto lógico.

Cuando decimos que las proposiciones generales surgen de la conjunción y la disyunción de otras proposiciones, nos estamos refiriendo a la definición de los cuantificadores, pues lo que Russell dice es que los cuantificadores se definirían así:

$(\forall x)\ Fx = \text{def. } Fa \land Fb \land Fc \land Fd \land \ldots$
$(\exists x)\ Fx = \text{def. } Fa \lor Fb \lor Fc \lor Fd \lor \ldots$

Cuando tenemos la fórmula $(\forall x)\ Fx$, nos estamos refiriendo al conjunto de todas las proposiciones que se obtienen al reemplazar x por valores constantes en Fx, que son:

Fa, Fb, Fc, etc. y al resultado de esta operación cuya verdad requeriría que todas esas proposiciones sean verdaderas lo llamamos 'producto lógico'. Y cuando tenemos la fórmula (∃x) Fx, estamos especificando el mismo conjunto, pero en este caso solo se requiere que uno de los argumentos que tome Fx haga verdadera la función (es decir, que una de las proposiciones resultantes sea verdadera), por lo que al resultado de esta operación lo llamamos 'suma lógica'.[7]

Si bien es Russell quien atribuye a Wittgenstein este tratamiento de la generalidad, en el *Tractatus* (5.521) es el mismo Wittgenstein quien le atribuye esta posición a Frege y Russell. Para algunos, lo que ocurre aquí es que Russell simplemente malentendió a Wittgenstein[8], pues, lo que él hace en el *Tractatus* es justamente lo contrario, busca dar con un modo de llegar a las proposiciones generales que no dependa justamente de los conceptos de suma y producto lógico.

2. La forma general de la proposición y el operador *N*

Un paso inicial que presenta Wittgenstein y que es clave para luego entender cómo surgen las proposiciones generales es el siguiente:

5 Una proposición es una función de verdad de proposiciones elementales.
(Una proposición elemental es una función de verdad de sí misma).

Más adelante agrega:

5.3 Todas las proposiciones son resultados de operaciones veritativas con proposiciones elementales.

Lo que tenemos aquí es una de las tesis principales del *Tractatus*, que toda proposición se deriva de proposiciones elementales, es decir, las tiene a ellas como su base de operaciones veritativas. Una operación veritativa, como las operaciones matemáticas,

[7] Desde ahora cuando escriba proposiciones o funciones proposicionales lo haré sin comillas.
[8] Véase Fogelin (1996) p. 61.

nos llevan de una base a un resultado: si tenemos los números 4 y 6, podemos ordenarlos y usar con ellos diferentes operaciones, por ejemplo, podemos multiplicarlos, lo que nos da como resultado 24. Una operación veritativa tendrá como *base* una proposición y como *resultado* otra proposición, distinta a la de la base.

En su tratamiento de la generalidad lógica, Wittgenstein hará uso de una sola operación, que aplicada de manera sucesiva nos permitirá derivar todas las proposiciones a partir de proposiciones elementales.[9] Esta operación Wittgenstein la introduce como *N*[10], y aquí aparece mencionada por primera vez:

5.502 Por ello escribo "*N(ξ)*", en lugar de "(----- V) (*ξ*, ...)".
N(ξ) es la negación de todos los valores de la variable proposicional *ξ*.

El uso del Operador *N* y su rol en la aparición de la generalidad, se nos muestra más claramente al revisar uno de los grandes temas de Wittgenstein en el *Tractatus*, la forma general de la proposición:

6 La forma general de una función de verdad es *[p, ξ, N(ξ)]*.
Esta es la forma general de la proposición.
6.001 Esto no dice sino que toda proposición es un resultado de aplicaciones sucesivas de la operación *N(ξ)* a proposiciones elementales.

La forma general de la proposición es aquella estructura que nos permite decir que tal o cual cosa es el caso (4.5), por lo que a través de ella trazamos un límite a aquello que puede ser dicho en un lenguaje con sentido. En la expresión de la forma general de la proposición, "p" es una variable para el conjunto de todas las proposiciones elementales; "*ξ*" corresponde a una selección arbitraria de proposiciones, que puede contener tanto proposiciones elementales como proposiciones ordinarias; y "*N(ξ)*"

[9] En 5.32, Wittgenstein nos dice: "Todas las funciones de verdad son resultado de aplicaciones sucesivas a proposiciones elementales de un número finito de operaciones veritativas".
[10] La inclusión de un operador del cual todas las constantes lógicas (y con ello todas las proposiciones) pueden derivarse viene de desarrollos como la flecha de Peirce y la daga de Sheffer.

corresponde a la aplicación de la operación *N* al conjunto previamente seleccionado. El operador *N* corresponde a la operación de negación conjunta, como en (¬p ∧ ¬q), del conjunto base, aquí (p, q). La operación *N*, aplicada a un conjunto de proposiciones, resultará en una proposición verdadera en el caso de que todas las proposiciones a la base de la operación sean falsas, y esa proposición será falsa en caso contrario. En el símbolo alternativo que usa Wittgenstein, la operación *N* se representa como "(----- V) (*ξ*, ...)" el cual es una generalización de (FFFV) (p,q), la operación de negación conjunta en notación tractariana, básicamente se dice que todas excepto la última columna de la tabla de verdad son falsas para un conjuntos de proposiciones estipulado por *ξ*. (Rogers y Wehmeier, 2012, p. 555). La expresión de la forma general de la proposición nos muestra así la regla general para construir cualquier proposición.

¿Cómo es posible que a través del operador *N* podamos construir proposiciones cuantificadas (generales)? En una función, el argumento indica un conjunto de valores que puede tomar la variable, por ejemplo, la función "Fx", representa todas las proposiciones que se obtienen de reemplazar x por un argumento, a saber: Fa, Fb, Fc, etc. En el caso de la derivación de las proposiciones cuantificadas, en vez de tomar como base de la operación un conjunto arbitrario de proposiciones, tomamos como base la función Fx que representa ese conjunto, con lo que obtenemos *N*(Fx). Como se dijo más arriba, la operación *N* corresponde a la negación conjunta de las proposiciones a la base de la operación, en este caso, las proposiciones a la base de la operación son el conjunto de todos los valores que toma la función Fx, es decir, Fa, Fb, Fc, etc. Aplicando *N* obtenemos entonces: ¬Fa ∧ ¬Fb ∧ ¬Fc ∧ ¬Fd, etc. La proposición obtenida antes es lógicamente equivalente, es decir, tiene los mismos valores de verdad de la proposición cuantificada (∀x) ¬Fx.

5.52 Si los valores de *ξ* son todos los valores de la función fx para todos los valores de x. entonces *N(ξ)* = ¬ (∃x) Fx.

Una vez hemos dado cuenta del cuantificador universal, veamos ahora cómo podemos analizar el cuantificador existencial. Para continuar tomamos ahora el resultado de la operación anterior, (∀x) ¬Fx *N*(Fx) como la base de la operación *N*, lo que nos queda

N(*N*(Fx)), lo que como negación conjunta es lógicamente equivalente a ¬(∀x) ¬Fx, la negación de la cuantificación universal, que obviamente es lógicamente equivalente a la cuantificación existencial (∃x) Fx.

El rol del operador *N* en este punto es el de mostrar cómo cualquier proposición de la lógica proposicional o de la lógica de predicados puede ser traducida en términos tractarianos.

La superioridad de este método con respecto al método de derivar los cuantificadores, y con ello las proposiciones generales, de los conceptos de suma y producto lógicos es que, a través de un sólo operador lógico, una sola constante lógica, es posible derivar toda noción lógica (Fogelin, 1996, p. 63), desde la negación y la conjunción a los cuantificadores, puesto que toda proposición con constantes lógicas puede expresarse a través de aplicaciones sucesivas de *N*.

3. La distinción entre generalidad y cuantificación

Ahora bien, para Wittgenstein la generalidad como tal hace su aparición con el concepto de variable proposicional, para Wittgenstein podemos cambiar cualquier parte componente de una proposición por una variable para obtener una proposición variable, esta proposición representa todos los valores que puede tomar si cambiamos la parte variable por algún nombre, por ejemplo, tomemos la proposición "El gato es naranjo" cuya formalización sería "Ng", a esta proposición podemos cambiarle "g" por la variable x para obtener la proposición variable "Nx" "x es naranjo", es en este momento donde aparece la generalidad, a continuación se muestra cómo expone esto Wittgenstein.

La generalidad surge de uno de los métodos de seleccionar el conjunto ξ, es decir, de especificar el conjunto de proposiciones usado como base de la operación veritativa. Wittgenstein dice:

5.501 Podemos distinguir tres géneros de descripción:

1. La enumeración directa. En este caso podemos colocar simplemente en el lugar de la variable sus valores constantes.
2. La indicación de una función Fx cuyos valores de x son las proposiciones que se han de describir.
3. La indicación de una ley formal de acuerdo con la cual se forman esas proposiciones. En este caso, los términos de la expresión que va entre paréntesis son, todos ellos, los términos de una serie de formas.

El primer tipo de descripción es el que Wittgenstein asocia a Frege y Russell. Se refiere con ello a entender la especificación de las proposiciones base como la enumeración de todos los valores de Fx, es decir, algo como esto: Fa, Fb, Fc, Fd, … Fn. Wittgenstein explica claramente su diferencia con respecto a esta forma de expresión de la generalidad con el método 2. Para él la generalidad aparece cuando estipulamos que el conjunto ξ de proposiciones base son todos los valores de la función Fx. Es a esto a lo que nos referimos cuando decimos que para construir proposiciones cuantificadas debemos aplicar *N* a una función proposicional como por ejemplo Fx.

Wittgenstein continúa explicitando su crítica a la generalidad de la vieja lógica un poco más adelante:

5.521 Separo el concepto *todo* de las funciones de verdad.
Frege y Russell introdujeron la generalidad en conexión con el producto o la suma lógicos. Así resultaba difícil entender las proposiciones "(∃x). Fx" y "(x). Fx", en la que las dos ideas se encuentran enraizadas.

Cuando se dice "separo el concepto *todo* de las funciones de verdad" Wittgenstein se refiere específicamente a que el concepto *todo* en las funciones de verdad está íntimamente relacionado con la expresión de *todos* los valores que toma x en la función proposicional Fx, recordemos que para Frege y Russell los cuantificadores surgen a la luz de los conceptos de suma y producto lógico, estos conceptos exponen, a través de conjunciones y disyunciones individuales todas las proposiciones del estilo Fx, es decir: Fa, Fb, Fc, etc. Como ya hemos revisado, Wittgenstein no está de acuerdo con esta manera de concebir la generalidad. Esto implicaría proporcionar una enumeración de las proposiciones que figuran en el producto o suma lógicos, siguiendo con ello el método 1 (en 5.501). Pero justo una enumeración de todas y cada una de las proposiciones no puede ser una expresión de generalidad. Por el contrario, ya sabemos que, según el *Tractatus*, para dar cuenta de la generalidad debemos definir claramente cuál es el conjunto de proposiciones que tomamos como base, sólo hace falta la aplicación reiterada del operador *N* a una función proposicional como Fx, y es especificando esta función como se describe un conjunto de proposiciones (y, por tanto, se expresa la generalidad) sin tener que ir recorriendo cada proposición del conjunto de Fx, que sería el error de Frege y Russell. La notación funcional le permite a Wittgenstein entender Fx como una *protofigura* de las proposiciones que son sus valores, por lo que muestra la forma que ha de tener cada proposición.

5.522 Lo peculiar del signo de generalidad es, en primer lugar que señala hacia una protofigura y en segundo lugar, que otorga preminencia a las constantes.

5.523 El signo de generalidad entra en escena como argumento.

El hecho de que Fx señale hacia una protofigura demuestra que el método de llegar a la generalidad de Frege y Russell es erróneo, pues, al usar las instancias de la protofigura para llegar a la generalidad, no están realmente generalizando sino enumerando las proposiciones particulares sin indicación de su forma común. En cambio, al usar la función o variable proposicional Fx como la base de la operación *N*, Wittgenstein emplea la noción más general posible para un conjunto de proposiciones. Lo que dice Wittgenstein en 5.523 es que la generalidad parece en primer lugar como argumento, un argumento de una función, la generalidad se expone con la función proposicional Fx, y a través de ella y el operador *N*, obtenemos proposiciones cuantificadas. "Sólo cuando aplicamos la operación *N* a la clase de proposiciones que son descritas en términos de una variable proposicional es que llegamos a entender la generalidad." (Roger y Wehmeier, 2012, p. 557).

La generalidad para Frege y Russell aparece con los cuantificadores ∃ y ∀, entendidos como sumas y productos lógicos, respectivamente. Pero Wittgenstein ya ha desechado la necesidad de acudir a una multiplicidad de constantes lógicas para formar las proposiciones ordinarias. Wittgenstein finaliza comentando que la lógica del Tractatus (una *N*-lógica) tiene todo el poder expresivo de la lógica de Frege y Russell. Veremos en el siguiente capítulo que es en esa afirmación donde surge el debate sobre la capacidad expresiva del operador *N*.

Capítulo III. La capacidad expresiva del Operador N.

A fines de la década de 1970 y principios de la década de 1980, coincidiendo con la publicación de la primera edición del libro *Wittgenstein* de Robert Fogelin[11], surgió una controversia en torno al operador *N* y la forma general de la proposición, centrándose especialmente en su capacidad expresiva. A continuación, se presenta una reconstrucción y análisis detallado de este debate en dos niveles: 1) con respecto a la interpretación sobre el cuantificador universal y, por ello, las funciones proposicionales negativas, y 2) con respecto a las proposiciones con cuantificadores mixtos.

1. El problema sobre el cuantificador universal.

Como ya se ha visto anteriormente, Wittgenstein afirma que a través de la aplicación de *un* operador veritativo *N* a proposiciones elementales, podemos construir todas las proposiciones del lenguaje (5.3, 5.5). Revisamos, también, cómo se construyen proposiciones con *N*, tanto cuando aplicamos *N* a una enumeración de proposiciones, como cuando lo aplicamos a una función proposicional para generar proposiciones generales (5.501).

Para comenzar a entrar en la discusión es necesario recordar cómo se construyen proposiciones cuantificadas a través de funciones proposicionales. En 5.52 Wittgenstein dice que *N*(fx) es lógicamente equivalente a la proposición ¬(∃x)fx, o lo que es lo mismo, (∀x)¬fx. Fogelin (1987) continúa derivando proposiciones equivalentes a proposiciones cuantificadas, en notación tractariana, de esta manera, como las operaciones son iterativas, es decir, pueden aplicarse sucesivamente, usando el resultado como su base (5.2521), aplicamos *N* a la proposición anterior y obtenemos la proposición *N*(*N*(fx)), que es equivalente a (∃x)fx. Así obtenemos, en un lenguaje tractariano, proposiciones equivalentes a algunas proposiciones generales.

[11] La primera edición de este libro fue publicada en 1976 y la segunda en 1987. En este capítulo hacemos referencia a ambas, pues, justamente en lo respectivo al "error fundamental en la lógica del *Tractatus*", según Fogelin, hay varios agregados importantes.

El problema que da pie al debate es el siguiente. Según la interpretación de Fogelin, posteriores aplicaciones de *N* a la proposición obtenida en 5.52, a saber, *N*(fx) no logran construir de ningún modo una proposición cuantificada universalmente como (∀x) fx. Según Fogelin, para obtener una proposición equivalente a esta, deberíamos tomar primero, no la función proposicional fx, sino que su negación ¬fx, para así obtener la proposición *N*(¬fx), que sí sería lógicamente equivalente a (∀x) fx. Pero aquí, creo, Fogelin ha cometido un pequeño error, de haber notado esto, se habría dado cuenta de que el error que encuentra en la lógica del Tractatus es más amplio. Wittgenstein pretende con el operador *N* construir una lógica que tenga a este operador como su *única* constante lógica (cf. Cheung, 2000, p. 247). En un sentido estricto, por tanto, no podemos tener una proposición como *N*(¬fx) porque si empezáramos con la función ¬fx, estaríamos usando más constantes de las necesarias, pues, un sistema lógico que tiene a *N* como su única constante no puede utilizar otras, como por ejemplo, la negación, la conjunción, la disyunción, etc. Es importante recordar que toda proposición puede ser construida a partir de aplicaciones sucesivas de operadores veritativos a proposiciones elementales. Cuando aplicamos *N* a *una* proposición, obtenemos su negación (5.51), sólo en ese caso *N* funcionaría como la negación común de una proposición "¬", en cualquier otro caso el resultado que obtenemos es equivalente a la negación conjunta de un conjunto de proposiciones. Esto es lo que ocurre, por ejemplo, con *N*(fx), que sería la negación conjunta de todas las proposiciones que son valores de fx. De este modo, en la interpretación de Fogelin, no podríamos dar cuenta de (∀x)fx, pues, para ello, sería necesario comenzar desde una función proposicional en conjunto con una negación, que no puede crearse dentro de los límites tractarianos.

En el año 1981 Peter Geach publicó una nota en la revista *Analysis*, en la cual da cuenta del problema en la interpretación de Fogelin del uso de *N* para obtener la cuantificación universal, por lo que propone una adición a la notación del *Tractatus* que permitiría superar este problema:

"Para mostrar en su total extensión cómo funciona el operador *N*, necesitamos (algo que él mismo [Wittgenstein] no provee) una notación explícita para una clase de proposiciones en la que sólo un constituyente varía. Usaré "*N*(ẍ: fx)" para denominar la negación conjunta de la clase de proposiciones que se obtienen al sustituir nombres por la variable en la función proposicional (representada por) "fx"." (pp. 169).

En una mirada ingenua, puede parecer que esa notación que agrega Geach (ẍ: fx) dice exactamente lo mismo que si usáramos simplemente la función proposicional fx. Pero la gran innovación viene a la hora de usar esta nueva notación para construir proposiciones cuantificadas. Más adelante en su texto, Geach nos dice que, en su notación, las proposiciones cuantificadas (∃x)fx y (∀x)fx deberían escribirse como *N*(*N*(ẍ: fx)) y *N*(ẍ: *N*(fx)), respectivamente. En el caso de la cuantificación existencial *N*(*N*(ẍ: fx)), vemos que el uso de *N* más o menos concuerda con el de Fogelin (N(N(fx))), pero es cuando examinamos el equivalente tractariano de (∀x)fx, cuando se deja ver todo el potencial de la nueva notación. En la expresión que propone Geach para representar el equivalente a la cuantificación universal, *N*(ẍ: *N*(fx)), vemos que *N* es aplicado dos veces, al igual que en el caso de la cuantificación existencial, pero la aplicación es distinta, pues, en caso de la cuantificación existencial**,** estamos aplicando *N* primero a la función proposicional fx, y la segunda vez, al tener sólo una proposición a la base, *N* funciona como la negación común de una proposición, en cambio, en el segundo caso, el de notación al estilo Geach, la segunda *N* es aplicada a un conjunto de proposiciones, es decir, se aplica como la negación conjunta de todos los valores de ¬fx. Esto es así porque el rol que cumple esta expresión (ẍ: *N*(fx)) es justo el de representar, en notación tractariana modificada, la función proposicional ¬fx. Lo que nos permite esta nueva notación es la posibilidad de permitir a *N*, como aparece en (ẍ: *N*(fx)), introducir una cierta función proposicional, esto será revisado un poco más adelante.

Al año siguiente de la publicación de la nota de Geach defendiendo al *Tractatus* de las acusaciones de incompletitud expresiva, Fogelin, en la misma revista, publica una nota respondiendo a Geach. El argumento de Fogelin ataca justamente el equivalente lógico de la cuantificación universal (∀x)fx, que en la notación de Geach es *N*(ẍ: *N*(fx)). Como lo observamos hace un momento, cuando consideramos esta expresión, parece ser que sólo se están realizando dos aplicaciones de *N*. Según Fogelin esto es falso, pero para asegurar eso, es necesario un matiz: "para Geach la expresión '(ẍ: *N*(fx))' especifica un conjunto de proposiciones que es el resultado de una posiblemente infinita cantidad de aplicaciones de *N* a un conjunto de proposiciones." (Fogelin, 1982, p. 125). El autor nos invita a comparar la proposición anterior *N*(ẍ: *N*(fx)) con una proposición que usa la notación "pura" de Wittgenstein en la cual se aplica *N* dos veces algo como esto *N*(*N*(fx)). Esta última proposición sí contiene dos aplicaciones del operador *N*. Para mostrar claramente la diferencia que hay, Fogelin analiza en conjunto ambas proposiciones, obteniendo lo siguiente:

1) *N*(*N*(fx)) = *N*(*N*(fa, fb, fc, …)) = (∃x)fx
2) *N*(ẍ: *N*(fx)) = *N*(*N*(fa), *N*(fb), *N*(fc), …)) = (∀x)fx

Lo que Fogelin quiere demostrar aquí es que, a pesar de que en ambos casos se ven dos aplicaciones y en ambas notaciones estamos lidiando con posiblemente infinitas proposiciones de la forma fx, la notación de Geach cae en un error en el sentido de que propone algo que el *Tractatus* (según la interpretación de Fogelin) no permite, a saber: la aplicación *infinita* de operaciones veritativas. La referencia de Fogelin para su crítica proviene de:

5.32 Todas las funciones de verdad son resultados de aplicaciones *sucesivas* de un número finito de operaciones veritativas a proposiciones elementales.

Fogelin apunta a que la propuesta de Geach entra en contradicción con esta "doctrina esencial del *Tractatus*", él acusa a la propuesta de Geach de "violar la demanda de *finitud* y *sucesión*[12]" (Fogelin, 1982, p. 126) requeridas por 5.32.

En trabajos más recientes sobre este debate, se ha argumentado que la lectura de Fogelin de 5.32 es errada, pues, lo que él interpreta es que no es posible aplicar un operador veritativo de manera infinita: "Wittgenstein nunca dice que la construcción de una proposición debe incorporar infinitas aplicaciones del operador N, de hecho, dice todo lo contrario" (Fogelin, 1976, p. 73). Rogers y Wehmeier (2012) argumentan que Fogelin malinterpretó 5.32, pues, lo que Wittgenstein dice no es que toda

[12] En estos párrafos sólo se trata el tema de finitud de aplicaciones, un poco más adelante tratamos el tema de sucesión de la mano de Leo Cheung.

proposición es el resultado de finitas *aplicaciones* de operadores veritativos a proposiciones elementales, sino que toda proposición es el resultado de aplicaciones sucesivas (finitas o infinitas) de un número finito de *operaciones* veritativas a proposiciones elementales, "De hecho, Wittgenstein argumenta que son el resultado de una sola operación, a saber *N*" (Rogers y Wehmeier, 2012, 562). Lo que pide Wittgenstein no es finitud de aplicación sino finitud en la *cantidad* de operadores veritativos que utilicemos en nuestra lógica.

Si bien ese era el núcleo de la crítica de Fogelin a Geach, hay en la propia interpretación de Fogelin sobre la notación de Geach un problema que demuestra que Fogelin no ha comprendido a cabalidad el poder de esta notación. Como revisamos más arriba, Fogelin entiende la expresión '*N*(ẍ: *N*(fx))' como '*N*(*N*(fa), *N*(fb), *N*(fc), …))', y por tanto lo que está diciendo es que la primera expresión es una abreviación de la otra. Pero si esto fuera efectivamente el caso, entonces las variables o funciones proposicionales obtenidas por el segundo método de 5.501 serían meras abreviaturas de enumeraciones de proposiciones, del mismo estilo que en el primer método. Básicamente, según la interpretación de Fogelin, el primer y el segundo método serían idénticos. Lo que Wittgenstein dice es que cuando aplicamos *N* a una lista enumerada de proposiciones, obtenida a través del primer método de 5.501, obtenemos una proposición que es la negación conjunta de los miembros de la lista (5.51). En cambio, si aplicamos *N* a una función proposicional descrita por el segundo método, es decir, una función proposicional como fx, obtenemos una proposición lógicamente equivalente a (∀x)¬fx. Esta diferencia puede ser ejemplificada del siguiente modo: cuando describimos la variable proposicional "*ξ*" en *N(ξ)* a través del primer método dado en 5.501, entonces enumeramos una cantidad finita de proposiciones (cf. Ferreira, 2023, p. 35), por ejemplo, si tenemos las proposiciones: Hp, Hq, Hr, Hs, a través de la aplicación de *N*, obtenemos la proposición: ¬Hp ∧ ¬Hq ∧ ¬Hr ∧ ¬Hs. En cambio, cuando describimos la variable proposicional "*ξ*" a través del segundo método, a saber, la estipulación de una función proposicional del estilo "fx", obtenemos, mediante la aplicación de N, una proposición lógicamente equivalente a (∀x)¬fx. esta proposición es la definición del concepto de suma lógica, que para Wittgenstein no exhibe generalidad; en cambio, si aplicamos *N* a la función proposicional fx, a saber: *N*(fx), obtenemos proposiciones cuantificadas, pues estamos generalizando al máximo nivel. Esto sucede porque, como dijimos en el capítulo anterior, una función proposicional exhibe generalidad.

2. El error fundamental en la lógica del *Tractatus*

El debate Fogelin-Geach, tal como es tratado en la literatura sobre el tema, no es principalmente el debate sobre el cuantificador universal que revisamos en el apartado anterior, pero es ahí donde se da luces sobre este problema. Robert Fogelin, en el capítulo número VI de su libro, titulado *The naive constructivism of the* Tractatus, plantea lo que él considera "el error fundamental en la lógica del *Tractatus*", con lo que se refiere a la crítica de la incompletitud expresiva del operador *N*. Pero esta crítica está principalmente orientada a demostrar que, dados los procedimientos para construir proposiciones en el *Tractatus*, no podemos construir proposiciones que involucren cuantificaciones mixtas con cuantificadores tanto existenciales como universales. Fogelin comienza dando ocho ejemplos de proposiciones con cuantificaciones múltiples, para intentar construirlas a través de aplicaciones sucesivas de *N*:

1. (∀x) (∀y)fxy
2. (∀x)(Ey)fxy
3. (Ex)(∀y)fxy
4. (∀x)(∀y)¬fxy
5. (Ex)(Ey)¬fxy
6. (∀x)(Ey)¬fxy
7. (Ex)(∀y)¬fxy

Para comenzar a derivar estas fórmulas desde una notación tractariana, debemos en primer lugar describir el valor de la variable ξ, que en este caso es la función *fxy* que representa el subconjunto de las proposiciones elementales consistente en los valores de esa función para todos los valores de 'x' e 'y', es decir: *faa, fab, fba, fac, fbc, etc*. Así, la primera aplicación de *N* a esa función sería *N*(fxy), lo que daría como resultado una proposición equivalente a ¬(∃x)(∃y)fxy, en esta proposición usamos la leyes de De Morgan para mover la negación hacia adentro y obtenemos la proposición 5: (∀x)(

$\forall$y)¬fxy. Ahora apliquemos *N* a 5, usando un procedimiento similar al anterior y obtendremos como resultado una proposición equivalente a 2: ($\exists$x)($\exists$y)fxy. El problema relevante aparece cuando intentamos aplicar *N* a 2 para obtener una nueva proposición, pues lo que resulta en realidad es otra vez una proposición equivalente a 5. Nos encontramos entonces con un muro que no nos permite avanzar en la construcción de proposiciones: si aplicamos *N* sucesivamente a estas proposiciones sólo obtendremos equivalentes de 2 y de 5.

Fogelin ahora intenta revisar un camino alternativo tal que, en vez de ocupar fxy como base de la operación, ocupemos su negación ¬fxy[13], con lo que el resultado de aplicar *N* a esta función, *N*(¬fxy), es una proposición equivalente a la proposición 1: ($\forall$x)($\forall$y)fxy. Ahora, si como en el caso anterior, aplicamos *N* a 1 obtenemos algo equivalente a la proposición 6: (Ex)(Ey)¬fxy, y luego de esto, como dice Fogelin, el camino se vuelve estéril una vez más sin que podemos llegar a producir las cuatro fórmulas cuantificadas restantes de la lista (3, 4, 7 y 8), que justamente son las cuantificaciones mixtas. El gran problema entonces es que no podemos, dados los procedimientos del *Tractatus*, construir proposiciones que contengan cuantificación mixta.

La razón por la cual Fogelin atribuye incompletitud expresiva al operador *N* tiene que ver con cómo (según él) el operador *N* se aplica a funciones proposicionales con más de una variable (cf. Rogers y Wehmeier, 2012, p. 559).

"Cuando aplicamos el operador *N* a las proposiciones que son los valores de función *f*xy, ambos espacios para los argumentos bajo la función son tratados al mismo tiempo y de la misma manera, i.e., ambas variables son capturadas. De este modo cualquier cuantificador que aparezca actuando sobre una variable, ese mismo tipo de cuantificador debe aparecer actuando sobre la otra" (Fogelin, 1987, p. 79)

Recordemos que Fogelin (1987) en la misma página menciona que "dados los procedimientos notacionales dados explícitamente en el *Tractatus*, no es posible

[13] Como ya vimos en el capítulo anterior, usar la negación de la función proposicional como base de la operación *N* es un error con consecuencias importantes en el tratamiento fogeliano del operador *N*.

construir proposiciones con cuantificaciones mixtas.” (p. 79). Cheung reconoce que no hay, en el *Tractatus*, tal procedimiento explícito para tratar con funciones proposicionales con más de una variable, pero a continuación señala: “El problema con el argumento de Fogelin es que nunca prueba que no hay ninguna otra manera de aplicar *N* para proposiciones generales heterogéneas y múltiples.” (Cheung, 2000, p. 248). La crítica de Cheung podría descartarse argumentando, como lo hace Fogelin, que el *Tractatus* establece explícitamente cuáles son los procedimientos para las aplicaciones de *N* (cf. Fogelin, 1987, p 79). Pero lo único que dice Wittgenstein sobre las aplicaciones de *N* es que si lo aplicamos a una proposición obtenemos su negación, y si lo aplicamos a dos o más proposiciones obtenemos una conjunción de negaciones correspondientes a cada una de esas proposiciones (ej. $N(p, q, r) = (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$). Y también dice, finalmente, que si aplicamos *N* a la función proposicional fx, obtenemos una proposición equivalente a $\neg(\exists x)fx$ (5.52). Pero lo relevante, en particular, es que Wittgenstein jamás habla de la aplicación de *N* a una función proposicional como fxy. Por esta razón, Fogelin se equivoca en el sentido de que, siguiendo a Cheung, no da razones tractarianas de por qué *N* no podría aplicarse de otra manera distinta a la que él propone, en el caso de aplicarlo a funciones proposicionales con dos variables.

Algunos autores han comentado que la manera en la que Fogelin construye proposiciones con cuantificadores múltiples entra en contradicción con

3.315 Si convertimos una parte constituyente de una proposición en una variable, hay una clase de proposiciones que son todas ellas valores de la proposición variable resultante.

En primer lugar, debemos recordar que para Wittgenstein si convertimos un constituyente de una proposición en una variable, hay una clase de proposiciones que consta de todos los valores que resultan de reemplazar la variable por nombres. Para ilustrar este punto veamos el siguiente caso: si tenemos la proposición ‘fa’, podemos reemplazar el nombre ‘a’ por la variable x, para obtener la función proposicional fx, del mismo modo que si tenemos una proposición cualquiera como, por ejemplo, ‘Mark Gonzales jugó en Liverpool’, formalizada en lenguaje de predicados como Lm, podemos cambiar ‘Mark Gonzales’ por la variable x y obtenemos una variable proposicional como 'x jugó en Liverpool' tal que hay una clase de proposiciones que se obtienen a través de reemplazar x por un nombre en ella (o, equivalentemente, en la función proposicional Lx).

Ahora, volviendo al tema de las funciones con múltiples variables, intentemos construir la proposición $(\forall x)(\exists y)fxy$ con el operador *N* siendo fieles a 3.315, para lo cual sigo la argumentación de Rogers y Wehmeier (2012). Primero introduciremos una proposición cualquiera "a ama a b" (fay), luego transformamos esa proposición en una variable cambiando b por y, obteniendo "a ama a y" a continuación, obtenemos, por aplicación de *N* la proposición *N*(fay) que es lógicamente equivalente a $\neg(\exists y)fay$. Sabemos que la proposición $\forall x \exists y\ fxy$ es equivalente a $\neg\exists x \neg\exists y\ fxy$, por lo que el camino a seguir para llegar a estas proposiciones es el de aplicar *N* a una proposición de la forma $\neg(\exists y)fxy$, una forma similar a la que ya obtuvimos, de este modo, si a través de *N*(fay) obtuvimos una proposición equivalente a $\neg(\exists y)fay$, entonces al aplicar nuevamente *N* a esa proposición *N*(*N*(fay)), debemos reemplazar "a" por "x" para obtener *N*(*N*(fxy)). El problema aquí aparece cuando vemos que, según el procedimiento de Fogelin, *N*(*N*(fxy)) corresponde a $(\exists x)(\exists y)fxy$, no a la cuantificación mixta $(\forall x)(\exists y)fxy$. Lo que podemos ver aquí es que, como mínimo, la manera de Fogelin de trabajar con funciones proposicionales con más de una variable no es la única, ni necesariamente la correcta.

Dentro de los límites del *Tractatus*, es ciertamente permisible pasar de *N*(fay) $\equiv$ $\neg(\exists y)fay$ a *N*(fxy) $\equiv$ $\neg(\exists y)fxy$. Pues, según 3.315 podemos hacer de una parte constituyente de una proposición, una variable obteniendo una variable proposicional. Pero según la interpretación de Fogelin *N*(fxy) es equivalente a $(\forall x)(\forall y)fxy$. El problema subyacente que quiero mostrar aquí es que, según la interpretación de Fogelin (interpretación estrecha) del operador *N*, no podemos distinguir entre el caso en que *N*(fxy) es obtenido a través de reemplazar 'a' por x en *N*(fay) y el caso en que *N*(fxy) es obtenido a través de aplicar directamente *N* a fxy, pues, a pesar de obtener resultados distintos, ambas aplicaciones se simbolizan igual. Este es un ejemplo que muestra que la notación de Fogelin (notación que según él proviene de reglas explícitas del *Tractatus*) no es del todo satisfactoria.

Ahora es momento de volver al trabajo de Geach: una de las cosas importantes del dispositivo que agrega este filósofo es que, en los casos de funciones proposicionales con más de una variable, nos permite diferencia entre variables ligadas y variables libres, y estas serán una u otra cosa dependiendo de la variable que especifiquemos al lado izquierdo de la expresión. Recordemos que Geach presenta la expresión ‘ẍ: fx’ para representar “la clase de proposiciones que se obtienen al sustituir nombres por la variable en la función proposicional (representada por) ‘fx’.” (Geach, 1981, p. 169), entonces, en esta expresión, la ẍ representa que la variable ligada a reemplazar por un nombre es x en la función proposicional fx. De esta manera, Geach muestra cómo podemos representar proposiciones con cuantificadores mixtos usando una notación tractariana. McGray (2006) llama a este dispositivo agregado por Geach “class-specifying variable” (p. 151), pues, cuando trabajamos con funciones proposicionales con más de una variable, este dispositivo nos permite seleccionar cuál es la variable ligada, y de este modo identificar una clase de proposiciones. Así, ẍ: fxy identifica una clase de proposiciones cuyos miembros son fay, fby, fcy, etc. En esta línea, Geach muestra cómo pueden representarse proposiciones con cuantificadores mixtos usando su notación, por ejemplo, el equivalente a (∃x)(∀y)fxy en notación tractariana es *N*(*N*(ẍ:(*N*(ÿ: *N*(fxy))))).

A continuación se expondrá cómo una proposición como *N*(*N*(ẍ:(*N*(ÿ: *N*(fxy))))) es equivalente a una proposición con cuantificación mixta, y al mismo tiempo se verá cómo trabajar a través de especificar variables con la notación de Geach. Para comenzar a trabajar con la proposición *N*(*N*(ẍ:(*N*(ÿ: *N*(fxy))))) debemos en primera instancia identificar la primera (más externa) *class-specifying variable*[14], que en este caso es ẍ, luego de esto debemos reemplazarla por un nombre de un objeto, por ejemplo “a”, así obtenemos *N*(*N*(a:(*N*(ÿ: *N*(fay))))), a continuación identificamos la última (más interna) *class-specifying variable*, que es este caso es ÿ, y luego ÿ: *N*(fay) con todas las proposiciones que resultan de reemplazar “y” con todos sus valores, a continuación aplicamos *N* a lo que acabamos de obtener. Lo que debemos hacer a continuación es repetir los pasos anteriores, pero reemplazando ẍ por todos sus valores.

[14] Para esta explicación sigo a McGray (2006).

En virtud de que la explicación sea más clara expongo el proceso explicado por McGray (2006):

1. $N(N(\ddot{x} : N(\ddot{y} : N(Lxy))))$	
2. $N(N(a : N(\ddot{y} : N(Lay))))$	Replace '$\ddot{x}$' with the name 'a'.
3. $N(N(a : N(N(Laa), N(Lab), N(Lac), \ldots)))$	Replace '$\ddot{y} : N(Lay)$' with the set of unit set N operator propositions resulting from the replacement of '$\ddot{y}$' with all its values.
4. $N(N(a : N(\neg Laa, \neg Lab, \neg Lac, \ldots)))$	Apply the inner N operators.
5. $N(N(a : (Laa \wedge Lab \wedge Lac \wedge \ldots)))$	Apply N to construct the joint negation of all negated propositions. Eliminate double negations.
6. $N(N(b : (Lba \wedge Lbb \wedge Lbc \wedge \ldots)))$	Repeat above steps for '$\ddot{x}$' replaced with 'b'.
7. $N(N(c : (Lca \wedge Lcb \wedge Lcc \wedge \ldots)))$	Repeat above steps for '$\ddot{x}$' replaced with 'c'.
8. $N(N((Laa \wedge Lab \wedge Lac \wedge \ldots), (Lba \wedge Lbb \wedge Lbc \wedge \ldots), (Lca \wedge Lcb \wedge Lcc \wedge \ldots), \ldots))$	Repeat for every value of '$\ddot{x}$'.
9. $N(\neg(Laa \wedge Lab \wedge Lac \wedge \ldots) \wedge \neg(Lba \wedge Lbb \wedge Lbc \wedge \ldots) \wedge \neg(Lca \wedge Lcb \wedge Lcc \wedge \ldots) \wedge \ldots)$	Apply the inner N operator to construct the joint negation of every proposition in the extended set.
10. $(Laa \wedge Lab \wedge Lac \wedge \ldots) \vee (Lba \wedge Lbb \wedge Lbc \wedge \ldots) \vee (Lca \wedge Lcb \wedge Lcc \wedge \ldots) \vee \ldots$	Apply the outer N operator to the extended conjunction. This is an application of De Morgan's Law. Eliminate the double negations.
11. $\forall yLay \vee \forall yLby \vee \forall yLcy \vee \ldots$	Reverse universal expansion on each disjunct.
12. $\exists x \forall yLxy$	Reverse existential expansion of the logical sum.

(pp. 154-155).

Es de este modo cómo podemos usar la notación de Geach para completar o para rescatar a *N* del ataque de Fogelin. La integración de una variable que especifica qué variable está libre y qué variable y cuál ligada. Un dispositivo como este nos permite usar el operador *N* para poder crear equivalentes de cualquier proposición de un lenguaje lógico de primer orden.

Actualmente en casi todos los libros de texto sobre el *Tractatus*, o en historias de la filosofía analítica que tratan el tema del operador *N* en el *Tractatus*, dan por hecho que la notación que se ha de utilizar para representar las equivalencias de las fórmulas cuantificadas en términos tractarianos es la notación de Geach (McGinn (2006), Morris (2008), Soames (2018).

CONCLUSIÓN

En esta investigación se ha presentado el debate sobre la capacidad expresiva del operador *N*. Para llegar a eso, en primera instancia se revisó cómo surge la generalidad en el marco tractariano, a saber, a través de la especificación de la variable proposicional con la cual trabajar en la forma general de la proposición, también planteamos la diferencia entre la generalidad y la cuantificación. En segunda instancia presentamos la crítica de Fogelin a la forma general de la proposición que consiste en alegar que a través de la aplicación del operador *N,* y según lo estipulado en el texto, no es posible crear proposiciones que involucren cuantificación mixta, se revisó en profundidad esta crítica para valorar sus fallas y sus aciertos, el principal problema con la interpretación de Fogelin del operador *N* es que peca de estrecha, a saber, presenta una manera de trabajar con funciones proposicionales con más de una variable, pero nunca defiende que su postura es la correcta, la postura que defiende Fogelin es que si cuantificamos sobre una variable, el mismo cuantificador debe gobernar sobre la otra variable, de este modo ya en la explicación del método sabemos que no es posible crear proposiciones con cuantificación mixta.

Ante este ataque al *Tractatus* por parte de Fogelin, Peter Geach responde argumentando que para mostrar todo el potencial del operador *N* y de la forma general de la proposición, es necesario agregar una pieza de notación que Wittgenstein no provee, este agregado resulta en el siguiente dispositivo: $\ddot{x}$: fx que nos permite, en el caso de funciones proposicionales con una sola variable, representar (en conjunto con una aplicación de *N*) la negación de la función proposicional, y en el caso de las funciones proposicionales con más de una variable, la variable que esté a la izquierda y con diéresis nos permite especificar qué variable se reemplazará en la proposición para crear esa clase de proposiciones.

En este trabajo se argumentó que el camino correcto se inclina en dirección de la interpretación de Geach con todos los agregados que han aparecido en el camino. A pesar de los problemas que pueda presentar esta notación, o a pesar de que sigan apareciendo (unos pocos) detractores, esta sigue siendo la manera más correcta (útil) de interpretar la función del operador *N*. En el final del texto se muestra cómo se pueden crear proposiciones utilizando la notación de Geach y cómo demostrar su equivalencia con las proposiciones de la lógica cuantificacional.

ANEXO: UNIDAD PEDAGÓGICA

<table>
<tr><th colspan="3">Planificación unidad didáctica</th></tr>
<tr><td>Asignatura: Seminario de Filosofía</td><td>Nivel: 4to Medio</td><td>Semestre: Segundo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Título unidad didáctica: La lógica en el Siglo XX: Frege, Russell y Wittgenstein.</td><td>Total Horas: 6 hrs</td></tr>
<tr><td colspan="3">Objetivo o propósito general de la Unidad: Comprender el surgimiento de la lógica en el siglo XX de la mano de sus principales autores: Frege, Russell y Wittgenstein</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Habilidad(es)

Participar activamente en dialogos filosóficos.
Fundamentar visiones personales considerando diversas perspectivas.
Analizar problemas filosóficos mediante métodos de razonamiento y argumentación.</td><td>Objetivo(s) de Aprendizaje – OA2 Evaluar y contrastar métodos de razonamiento para abordar un concepto o preblema filosófico.</td><td rowspan="2">Actitud(es)

Pensar con reflexión propia y autonomía para gestionar el propio aprendizaje, identificando capacidades, fortalezas y aspectos por mejorar.

Pensar con apertura hacia otros para valorar la comunicación</td></tr>
<tr><td>Objetivo(s) de Aprendizaje – OA5 Formular una tesis filosófica con respecto a un problema relevante para su contexto, a partir de una investigación sobre diversas perspectivas filosóficas presentes en la historia de la filosofía</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Objetivo(s) de Aprendizaje – OA1 Explicar textos filosóficos que aborden un problema presente en la historia de la filosofía, considerando sus antecedentes, principales planteamientos, supuetos y contexto sociocultural.</td><td colspan="2">como una forma de relacionarse con diversas personas y culturas, compartiendo ideas que favorezcan el desarrollo de la vida en sociedad.</td></tr>
<tr><td>Conocimiento (s) previo(s)</td><td>Contenido(s)</td><td>Actividad(es) genérica(s)</td><td>Indicador(es) de evaluación o logro</td><td>Tiempo estimad o</td></tr>
<tr><td>Algebra, distinción entre sujeto y predicado</td><td>La formalización de la lógica y la notación funcional en Frege.</td><td>1. La lógica trata sobre argumentos.
2. Cómo pasamos del lenguaje natural al lenguaje lógico.
3. Formulas en lógica</td><td>Los y las estudiantes analizan proposiciones naturales y las traducen en términos lógicos</td><td>2hrs.</td></tr>
<tr><td>Formalizació n en lógica y</td><td>Lógica cuantificación</td><td></td><td>Los y las estuidantes</td><td>2hrs.</td></tr>
</table>

Formulas lógicas.	**al según Russell**	**1. ¿Sólo se puede hablar de individuos en lógica?** **2. Como podemos generalizar.** **3. ¿Qué son los cuantificador es?**	**definen correctament e los conceptos y pueden interpretar una formula cantificada.**	
Lógica cuantificacion al.	**El operador N y la generalidad según Wittgenstein.**	**1. Creo que hay problemas con Frege y Russell.** **2. La relación entre Wittgenstein y Russell.** **3. ¿Para qué tantas constante lógicas?** **4. Debemos tener una sola constante para contruir todas las proposiciones .**	**Los y las estudiantes son capaces de hallar equivalencias entre la lógica cuantificacio nal y una lógica que tenga al operador N como la única constante.**	**2hrs.**

BIBLIOGRAFÍA

1. Cheung, L. (2000). The Tractarian Operation N and Expressive Completeness. *Synthese*, 123(2), 247-261.

2. Ferreira, R. (2023). The expressive power of the *N*-operator and the Decidability of Logic in Wittgenstein's Tractatus. *History and Philosophy of Logic*, 44, 33-53.

3. Fogelin, R. (1982). Wittgenstein´s Operator N. *Analysis*, 42, 124-127.

4. Fogelin, R. (1987). Wittgenstein (2ed). New York: Routledge.

5. Geach, P. (1981). Wittgenstein´s Operator N. *Analysis*, 41, 168-171.

6. Geach, P. (1982). More on Wittgenstein´s Operator N. *Analysis*, 42, 127-129.

7. Jacquette, D. (2001). Analysis of Quantifiers in Wittgenstein´s *Tractatus*: A Critical Survey. *History of Philosophy and Logical Analysis*, 4, 191-202.

8. McGinn, M. (2006). Elucidating the *Tractatus*: Wittgenstein Early Philosophy of Logic and Language. Oxford: Oxford University Press.

9. Miller III, H.(1995). Tractarian Semantics for Predicate Logic. *History and Philosophy of Logic,* (16), 197-215.

10. Morris, M. (2008). Wittgenstein and the *Tractatus Logico-Philosophicus*. New York: Routledge.

11. Potter, M. (2008). Wittgenstein´s Notes on Logic. New York: Oxford University Press.

12. Potter, M. (2009). The Logic of the *Tractatus*. En: *Handbook of the History of Logic. Volume 5. Logic from Russell to Church*, editado por Dov M. Gabbay y John Woods. Elsevier.

13. Ricketts, T. (2002). Wittgenstein against Frege and Russel. En: *From Frege to Wittgenstein,* editado por Erich H. Reck. Oxford: Oxford University Press.

14. Ricketts, T. (1996). Pictures, logic, and the limits of sense in Wittgenstein's *Tractatus*. En: *Cambridge Companion to Wittgenstein*, editado por Hans Sluga y David Stern. Cambridge: Cambridge University Press.

15. Rogers, B. y Wehmeier, K. (2012). Tractarian First Order Logic: Identity and the N-operator. *The Review of Symbolic Logic*, *5*(4), 538-573.

16. Russell, B. (1996). Ensayos filosóficos. Barcelona: Altaya.

17. Soames, S. (2018). The Analytic Tradition in Philosophy (Volume II): A New Vision. New Jersey: Princeton University Pres.

18. White, R. (2017). Logic and the Tractatus. En: *A Companion to Wittgenstein*, editado por Hans-Johann Glock y John Hyman. Hoboken: Wiley

19. Wittgenstein, L. (1922/2013). Tractatus logico-philosophicus (4ed). Madrid: Tecnos.

20. Wittgenstein, L. (1961). Notebooks 1914-1916. New York: Harper and Brothers Publishers.

21. Zalabardo, J. (2015). Representation and Reality in Wittgenstein's *Tractatus*. Oxford: Oxford University Press.