



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA Y CIENCIAS DE LA
COMPUTACIÓN

Ubicando pares de vértices en ciclos hamiltonianos

Por: Daniel Zúñiga Cavieres

Tesis presentada a la Facultad de Ingeniería
de la Universidad de Concepción para optar al grado
académico de Magister en Ciencias de la Computación

Enero 2026

Concepción, Chile

Profesor Guía: Dr. Nicolás Sanhueza Matamala

AGRADECIMIENTOS

Resumen

En esta tesis daremos una demostración a la conjetura de Enomoto para grafos de tamaño lo suficientemente grande. Enomoto conjeturó que si un grafo con n vértices tiene grado mínimo al menos $n/2 + 1$, entonces para todo par de vértices x, y existe un ciclo hamiltoniano C tal que la distancia de x a y en el ciclo C es exactamente $\lfloor n/2 \rfloor$. Nuestra demostración no utiliza el Lema de Regularidad de Szemerédi, por lo que el valor mínimo de n para el cual nuestro resultado es cierto es considerablemente menor al conocido hasta la fecha. Nuestra principal herramienta es la Tricotomía de los grafos de Dirac, además de distintos resultados que aseguran la existencia de caminos hamiltonianos entre cualquier par de vértices, y resultados relacionados a grafos expansores robustos.

Índice general

AGRADECIMIENTOS	I
Resumen	II
1. Introducción	1
1.1. Trabajo realizado	3
1.2. Estrategia para el resultado principal	4
2. Definiciones	6
3. Preliminares	8
3.1. Resultados generales	8
3.2. Resultados específicos	11
4. Resultado débil	14
4.1. Preliminares	14
4.2. Demostración Lema 4.1	15
5. Caso dos cliques disjuntos	20
5.1. Preliminares	20
5.2. Demostración Lema 5.1	21
6. Caso bipartito completo	26
6.1. Preliminares	27
6.2. Chvátal vs No Chvátal	28
6.3. Estructurando el grafo bipartito hamiltoniano	35
6.4. Casos fáciles	38
6.5. Casos restantes	49
6.6. Unificando	68
7. Caso expensor robusto	70
7.1. Estrategia	70
7.2. Preliminares	72
7.3. Construcción de la estructura absorbente	75
7.4. Demostración Lema 7.1	79

8. Resultado principal	81
9. Diseñando algoritmo polinomial	83
9.1. Paso de la tricotomía de Dirac	83
9.2. Caso cercano a dos cliques disjuntos	86
9.3. Caso cercano a bipartito completo	86
9.4. Caso expensor robusto	87
10. Conclusión y trabajo futuro	89
Referencias	92

Capítulo 1

Introducción

Un grafo es una estructura matemática usada para modelar la relación de a pares entre objetos. Un grafo está compuesto por vértices (también llamados nodos), que son conectados a través de aristas. Una estructura que interesa encontrar en un grafo son los ciclos hamiltonianos. Un ciclo hamiltoniano es una secuencia de vértices y aristas, en que cada vértice del grafo es visitado exactamente una vez, y luego se vuelve al vértice inicial. El problema de encontrar esta estructura en un grafo tiene su origen en un juego inventado por W.R. Hamilton en 1857, en el cual ciclos hamiltonianos tenían que ser encontrados en un dodecaedro. Más de cien años más tarde el concepto fue desarrollado mientras se estudiaba el problema combinatorial llamado *el problema del vendedor viajero*. Aquí, un vendedor tiene que visitar a distintos clientes, que se encuentran cada uno en una ciudad distinta, por lo que el vendedor debe encontrar una ruta circular tal que los visite a todos.

El encontrar ciclos hamiltonianos en un grafo tiene aplicaciones en diversas áreas, como por ejemplo en logística y transporte [9] [4], donde la búsqueda de ciclos hamiltonianos puede ayudar a optimizar rutas de entrega. En computación, donde los ciclos hamiltonianos son relevantes en la optimización de circuitos eléctricos y en el diseño de algoritmos eficientes para resolver problemas de rutas [6] [13] [20]. También en el mapeado de genomas [2] [26], donde los científicos deben combinar fragmentos pequeños de código genético (llamados "lecturas") en una sola secuencia genómica (una "supercadena"). Esto se puede hacer encontrando un ciclo hamiltoniano, donde cada una de las lecturas se considera nodos en un grafo y cada superposición (lugar donde el final de una lectura coincide con el

comienzo de otra) se considera una arista.

Si bien existen familias de grafos, como los grafos completos, donde el encontrar ciclos hamiltonianos no es una tarea compleja, el problema general de decidir si un grafo posee un ciclo hamiltoniano es NP-completo [12]. Por ello se desconoce, y se conjetura que no existe, algoritmo que decida en tiempo polinomial si un grafo es hamiltoniano, es decir que contiene un ciclo hamiltoniano.

Dada la complejidad del problema, es natural e interesante estudiar condiciones suficientes, las cuales sean verificables rápidamente, para asegurar la existencia de un ciclo hamiltoniano. Dirac [10] demostró que si el grado de cada vértice es al menos la mitad del orden del grafo, entonces el grafo es hamiltoniano. Más aún, la demostración de dicho resultado diseña un algoritmo, el cual es capaz de construir un ciclo hamiltoniano en el grafo. Notemos que la condición de Dirac es una condición de grado mínimo, y verificarla en un grafo es una tarea que puede realizarse en tiempo polinomial. Por lo tanto, si bien el problema general de decidir si un grafo cualquiera es hamiltoniano es complejo, el resultado de Dirac mostró que existen familias de grafos donde verificar la existencia de un ciclo hamiltoniano no es difícil, y que además puede construirse en tiempo polinomial.

Si bien se conocen condiciones para encontrar ciclos hamiltonianos en un grafo, es interesante también estudiar qué condiciones suficientes son necesarias para encontrar ciclos hamiltonianos con alguna característica particular. Por ejemplo, en una red de comunicación del tipo Token Ring [25], los paquetes de datos circulan por un ciclo hasta llegar a su destino. Para optimizar el flujo de datos, se busca balancear la carga que circula, y una manera de lograrlo es posicionar nodos claves (por ejemplo, un nodo servidor principal y un nodo cliente) como antípodas en el ciclo, para así distribuir la carga de manera uniforme. En esta aplicación, el ciclo hamiltoniano que se desea encontrar tiene la particularidad que cierto par de vértices se encuentran en polos opuestos en el ciclo. Por lo tanto, un problema interesante es encontrar condiciones suficientes fáciles de verificar, las cuales aseguren la existencia de un ciclo hamiltoniano donde cierto par de vértices fijados anteriormente se encuentre a distancia $n/2$.

Enomoto [14] conjeturó que si en un grafo todo vértice tiene grado mayor a la mitad del orden del grafo, entonces para todo par de vértices existe un ciclo hamiltoniano tal que, la distancia de dicho par en el ciclo es máxima. Es decir,

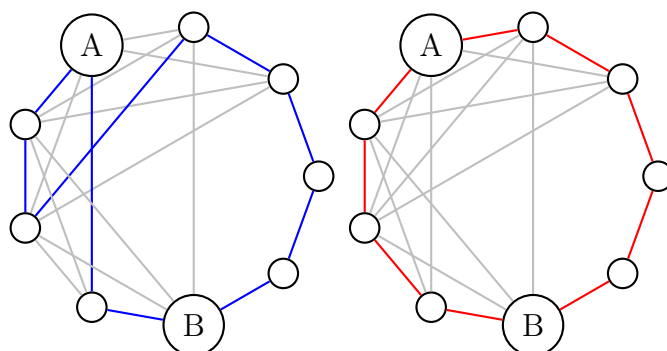


Figura 1.0.1: Dos ciclos hamiltonianos de un mismo grafo con $n = 9$ vértices. En azul se marca un ciclo hamiltoniano tal que la distancia entre los vértices A y B es 2. En rojo se marca un ciclo hamiltoniano donde la distancia entre A y B es $\lfloor n/2 \rfloor = 4$.

Enomoto conjeturó lo siguiente:

Teorema 1.0.1. (Conjetura de Enomoto): *Sea G un grafo con n vértices y grado mínimo $\delta(G) \geq n/2 + 1$. Entonces para todo par de vértices x, y distintos, existe un ciclo hamiltoniano C tal que la distancia entre x e y en el ciclo es exactamente $\lfloor n/2 \rfloor$.*

Han habido distintos acercamientos a la demostración de la conjetura de Enomoto. He, Li y Sun [15] mostraron utilizando herramientas como el Lema de Regularidad de Szemerédi que la conjetura de Enomoto es cierta para grafos con una cantidad de vértices lo suficientemente grande. Esta condición en el tamaño del grafo es una limitación a la hora de diseñar algún algoritmo que decida si un grafo es hamiltoniano. Esto es debido a que la condición necesaria es de grado mínimo, y verificarla toma tiempo polinomial respecto al número de vértices. Dado que el número de vértices se encuentra en el rango de millones de millones, actualmente esta tarea no es posible de realizar de manera rápida. Por ello, debilitar esta condición de tamaño es un problema de interés y que sigue abierta.

1.1. Trabajo realizado

El resultado principal de esta tesis es el siguiente:

Teorema 1.1.1. *Sea G un grafo con $n \geq 20000$ vértices con $\delta(G) \geq n/2 + 1$. Luego para todo par de vértices x, y distintos existe un ciclo hamiltoniano C tal que la distancia de x a y en el ciclo es exactamente $\lfloor n/2 \rfloor$.*

Este teorema muestra que la conjetura de Enomoto es cierta cuando el tamaño del grafo es lo suficientemente grande. Como veremos más adelante, la estrategia usada para demostrar este teorema no utiliza el Lema de Regularidad, por lo que el tamaño del grafo para el cual la conjetura es cierta es considerablemente menor al conocido hasta la fecha. Además como se verá en el Capítulo 9 la demostración presentada induce un algoritmo que construye los ciclos hamiltonianos que queremos a tiempo polinomial.

Antes de explicar a grandes rasgos como llevaremos a cabo la demostración presentaremos otro resultado obtenido, que si bien es más débil que nuestro teorema principal, la demostración es simple.

Lema 1.1. *Sea G un grafo con n vértices y $\delta(G) \geq n/2 + 40\sqrt{n}$. Entonces para todo par de vértices x, y distintos, y para todo entero $2 \leq l \leq \lfloor n/2 \rfloor$ existe un ciclo hamiltoniano C tal que $\text{dist}_C(x, y) = l$.*

Ahora notemos que este resultado es válido para todo valor de n , y además nos permite encontrar para todo par de vértices y una distancia fija un ciclo hamiltoniano tal que la distancia de los vértices en el ciclo es la fijada. En particular lo podemos hacer para una distancia $\lfloor n/2 \rfloor$ (que es lo que buscamos en el caso de la conjetura de Enomoto). Por lo tanto, si bien la condición del grado mínimo es más fuerte, el resultado no deja de ser interesante, y la demostración presentada en el Capítulo 4 es simple.

1.2. Estrategia para el resultado principal

En esta sección describiremos a grandes rasgos como se demostrará nuestro resultado principal.

Sea G un grafo con n vértices y grado mínimo $\delta(G) \geq n/2 + 1$. Como demostraremos más adelante (véase Lema 3.3) vamos a poder centrarnos únicamente en el caso cuando n es par. Sean x, y dos vértices distintos.

Luego el grafo $\tilde{G} = G - \{x, y\}$ cumple $\delta(\tilde{G}) \geq |V(\tilde{G})|/2$, por lo tanto \tilde{G} es un grafo de Dirac. Dado que \tilde{G} es grafo de Dirac, entonces el grafo cumple una de las siguientes condiciones:

- \tilde{G} es cercano a dos cliques disjuntos,

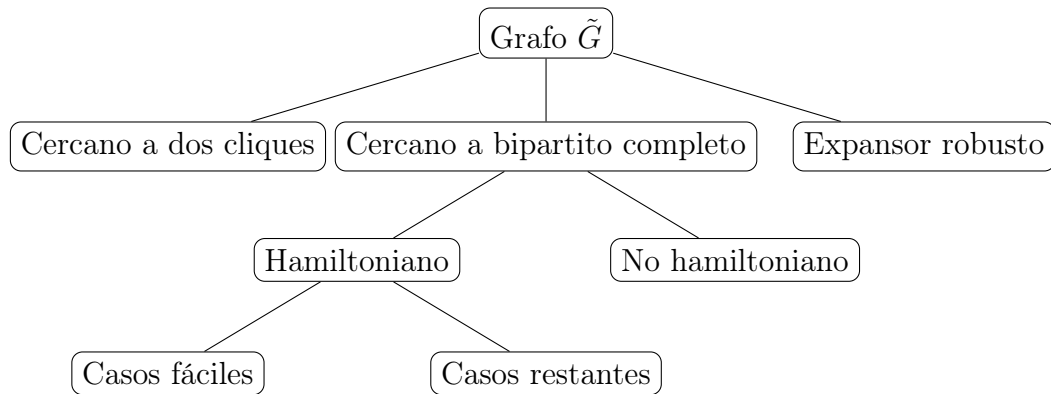


Figura 1.2.1: Árbol que indica todos los casos a estudiar. Dado que el grafo \tilde{G} es de Dirac, entonces tiene una estructura clara: es cercano a dos cliques, cercano a un bipartito completo o bien es un expansor robusto. Se estudiará cada caso por separado.

- \tilde{G} es cercano a un grafo bipartito completo,
- \tilde{G} es un grafo expansor robusto (en Definición 3.2.1 se explica formalmente que significa esto).

Entonces, basta encontrar para cada caso, un ciclo hamiltoniano C tal que $\text{dist}_C(x, y) = n/2 = k + 1$. En la Figura 1.2.1 se observa un diagrama que da una idea de como se clasifican y subclasifican los distintos casos a estudiar en esta tesis.

En el Capítulo 5 se aborda y resuelve el caso cuando el grafo es cercano a dos cliques. En el Capítulo 6 se resuelve el caso cuando el grafo es cercano a un bipartito completo, mientras que en el Capítulo 7 se demuestra el último caso. Finalmente en el Capítulo 8 juntamos cada uno de estos resultados para concluir nuestro resultado principal.

Capítulo 2

Definiciones

Dado un conjunto A , denotamos $[A]^k$ como el conjunto de todos los subconjuntos de A de tamaño k .

Un *grafo* es un par (V, E) que cumple $E \subseteq [V]^2$. Los elementos de V son llamados *vértices* del grafo G , y los elementos de E son las *aristas* del grafo G . Dados dos vértices u, v distintos, diremos que u es *vecino* de v si existe la arista uv , y usaremos la notación $u \sim v$.

Dado dos grafos $G = (V, E)$, $G' = (V', E')$, si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$, entonces G' es un *subgrafo* de G , escrito como $G' \subseteq G$. Si $G' \subseteq G$ y G' contiene todas las aristas $xy \in E$ con $x, y \in V'$, entonces G' es un *subgrafo inducido* de G . Decimos que V' *induce* G' en G y se escribe $G[V'] := G'$.

Dados dos conjuntos de vértices U, V , se define $e(U, V) := |E(G)| - |E(G[U])| - |E(G[V])|$. Es decir, el valor $e(U, V)$ contabiliza la cantidad de aristas que existen entre los conjuntos U y V , en el grafo G .

Para un vértice $v \in V(G)$ se define la *vecindad* de v como $N_G(v) := \{w \in V(G) : vw \in E(G)\}$. Se define el *grado* de un vértice v en el grafo G como $d_G(v) := |N_G(v)|$. Dado un subconjunto $S \subseteq V(G)$ se define $d_G(v, S) := |N_G(v) \cap S|$. $N_G(S)$ define la vecindad del conjunto S en el grafo G . Es decir,

$$N_G(S) := \{v \in V(G) : \text{existe } s \in S, s \sim v\}$$

Estas últimas cuatro definiciones pueden simplificarse eliminando el subíndice que hace referencia al grafo, siempre y cuando la referencia sea clara. El número

$\delta(G) := \min\{d(v) : v \in V(G)\}$ es el *grado mínimo* del grafo G .

Para un subconjunto de vértices U , se define $G - U := G[V \setminus U]$, es decir $G - U$ es obtenido de G eliminando todos los vértices de U y sus aristas incidentes. Si $U = \{u\}$, $G - u := G - \{u\}$. Para un subconjunto $F \subseteq [V]^2$ escribimos $G + F := (V, E \cup F)$, y $G + \{e\}$ se abrevia $G + e$.

Un *camino* es un grafo no vacío $P = (V, E)$ de la forma

$$V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \quad E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\}$$

donde todos los x_i son distintos. Nos referimos a un camino a través de la secuencia natural de sus vértices. Decimos que $P = x_0x_1 \cdots x_k$ es un (x_0, x_k) -camino, un camino *que va* de x_0 a x_k .

Para $0 \leq i \leq j \leq k$ escribimos:

$$Px_i := x_0x_1 \cdots x_i$$

$$x_iP := x_ix_{i+1} \cdots x_k$$

$$x_iPx_j := x_ix_{i+1} \cdots x_j$$

El *largo* de un camino P se define como la cantidad de aristas que tiene P .

Si $P = x_0x_1 \cdots x_{k-1}$ es un camino y $k \geq 3$, entonces el grafo $C := P + x_{k-1}x_0$ es un *ciclo*. Dado un grafo G , un ciclo C es *hamiltoniano* si C es subgrafo de G y $V(C) = V(G)$.

Sea $\{A, B\}$ una partición de los vértices de G . Denotaremos como $G[A, B]$ al *grafo bipartito inducido por la partición*, es decir al grafo que contiene únicamente a las aristas ab , con $a \in A, b \in B$.

Decimos que un grafo es *Hamilton-conexo* si para todo par de vértices existe un camino hamiltoniano que los conecta. Diremos que un grafo G es un *grafo de Dirac* si su grado mínimo es $|V(G)|/2$.

Sea P una proposición lógica. Se define $\|P\|$ como una función binaria, la cual toma el valor 1 si la proposición P es verdadera, y el valor 0 si la proposición es falsa.

Capítulo 3

Preliminares

En este capítulo presentaremos distintos resultados que usaremos a lo largo de las demostraciones que siguen.

3.1. Resultados generales

Primero enunciamos el teorema de Chvátal [7], el cual da una condición suficiente en la secuencia de grados de los vértices de un grafo, para asegurar que el grafo es hamiltoniano.

Teorema 3.1.1. (Teorema de Chvátal): *Sea G un grafo con n vértices, y sea a_1, a_2, \dots, a_n la secuencia de grados de los vértices de G , ordenada de menor a mayor. Si para todo entero $1 \leq i < n/2$ se cumple $a_i > i$ o bien $a_{n-i} \geq n - i$, entonces G tiene un ciclo hamiltoniano.*

De ahora en adelante, cada vez que mencionemos un teorema o resultado que relacione una secuencia de grados de vértices para concluir alguna propiedad relacionada a ciclos hamiltonianos, diremos que es un resultado del tipo Chvátal.

El siguiente lema nos entrega una desigualdad que nos será de utilidad al momento de trabajar con particiones de los vértices, las cuales son minimales respecto a la cantidad de aristas que hay dentro de una de las partes.

Lema 3.1. *Sea G un grafo con $2n$ vértices y sea $\{A, B\}$ una partición de $V(G)$ tal que $|A| = |B| = n$, y la cantidad de aristas en $G[A]$ es minimal. Entonces para todo par de vértices $a \in A, b \in B$ se cumple $d(a, A) \leq d(b, A)$.*

Demostración. Supongamos que existen $a \in A, b \in B$ tal que $d_G(a, A) > d_G(b, A)$. Luego, si consideramos los conjuntos $A' = A - \{a\} + \{b\}$, $B' = B - \{b\} + \{a\}$, entonces se tiene que

$$e(A') = e(A) - d_G(a, A) + d_G(b, A) < e(A)$$

lo que contradice la minimalidad de A . \square

El siguiente resultado nos dice que si tenemos un grafo bipartito casi completo, es decir, que tiene pocos vértices de grado pequeño, entonces podemos construir un ciclo que use pocos vértices y que contenga a todos los vértices de grado pequeño.

Lema 3.2. *Sea G un grafo bipartito con partes $\{A, B\}$ de tamaño k cada una, y sea $\gamma < 1/2^{12}$. Se definen los conjuntos*

$$S_A = \{a \in A : d(a, B) \leq 15k/16\}$$

$$S_B = \{b \in B : d(b, A) \leq 15k/16\}.$$

Si

- G es hamiltoniano,
- $|E(G)| \geq (1 - 4\gamma)k^2$,

entonces existe un ciclo C_{chico} en G que contiene a todo $S_A \cup S_B$, tiene dos vértices consecutivos fuera de $S_A \cup S_B$, y $|V(C_{chico})| \leq 2^{10}\gamma k$.

Demostración. Sea $C_{bipartito}$ un ciclo hamiltoniano en G . Supongamos que $S_A = S_B = \emptyset$. Luego el ciclo $C_{bipartito}$ ya cumple lo que queremos. Por tanto podemos suponer que $S_A \cup S_B \neq \emptyset$.

Notemos que

$$e(A, B) \leq |S_A|(15k/16) + (k - |S_A|)k$$

Por otro lado, sabemos que $k^2 - \gamma k^2 \leq e(A, B)$. Luego usando la desigualdad anterior y despejando se tiene

$$|S_A| \leq 64\gamma k^2$$

Análogamente se puede mostrar que $|S_B| \leq 64\gamma k$. Ahora, para todo $c_i \in S_A \cup S_B$,

se define el conjunto

$$I_{c_i} = \begin{cases} \{c_{i-2}, c_{i-1}, c_i, c_{i+1}\} & \text{si } c_i \in S_A, \\ \{c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, c_{i+2}\} & \text{si } c_i \in S_B. \end{cases}$$

Sean P_1, P_2, \dots, P_d los caminos inducidos por $\bigcup_{c_i \in S_A \cup S_B} I_{c_i}$, con $d \geq 1$. Dado que $|S_A \cup S_B| \leq 128\gamma k$, y para todo $c_i \in S_A \cup S_B$, $|I_{c_i}| = 4$, entonces

$$\left| \bigcup_{j=1}^d V(P_j) \right| \leq 4 * 128\gamma k = 2^9 \gamma k$$

donde la mitad de esos vértices pertenece a A , y la otra mitad pertenece a B .

Notemos que los extremos de estos caminos son vértices fuera de $S_A \cup S_B$. En efecto, supongamos que no. Entonces existe un camino P_i tal que uno de sus extremos está en $S_A \cup S_B$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que el extremo es el vértice $c_l \in S_A$. Luego, por definición, $I_{c_l} = \{c_{l-2}, c_{l-1}, c_l, c_{l+1}\}$, donde todos esos vértices son consecutivos en $C_{\text{bipartito}}$.

Por lo tanto, $P_i c_{l+1}$, o bien $P_i c_{l-1} c_{l-2}$ es un camino inducido por $\bigcup_{c_i \in S_A \cup S_B} I_{c_i}$, lo que es una contradicción.

La idea ahora es conectar estos caminos usando vértices fuera de $S_A \cup S_B$. Dado que a lo más hay un camino por cada vértice $c_i \in S_A \cup S_B$, entonces la cantidad de caminos a conectar es a lo más $|S_A \cup S_B| \leq 128\gamma k$.

Sean P_i, P_j dos caminos distintos, con extremos a_i, b_i, a_j, b_j respectivamente. Notemos que para todo vértice $a \in A \setminus S_A$, y para todo $b \in B \setminus S_B$ se cumple que

$$d(a, B \setminus S_B) > (15k/16) - 2^6 \gamma k$$

$$d(b, A \setminus S_A) > (15k/16) - 2^6 \gamma k.$$

En particular, lo cumplen los vértices a_i, a_j, b_i, b_j . Consideremos la vecindad de b_i en $A \setminus S_A$, es decir $N(b_i) \cap (A \setminus S_A)$. También definimos R como la vecindad en $A \setminus S_A$, del conjunto de vecinos de a_j en $B \setminus S_B$. Formalmente, R se define como

$$R := \{a \in A \setminus S_A : \text{existe un } b \in B \setminus S_B \text{ tal que } b \sim a_j\}$$

Notemos que

$$|N(b_i) \cap (A \setminus S_A)| = d(b_i, A \setminus S_A) > (15k/16) - 2^6\gamma k$$

y además

$$R = \bigcup_{b \in N(a_j) \cap (B \setminus S_B)} N(b) \cap (A \setminus S_A),$$

entonces

$$\begin{aligned} |R| &= \sum_{b \in N(a_j) \cap (B \setminus S_B)} d(b, A \setminus S_A) \\ &> (15k/16) - 2^6\gamma k. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} |R \cap (N(b_i) \cap (A \setminus S_A))| &\geq |R| + |N(b_i) \cap (A \setminus S_A)| - |R \cup (N(b_i) \cap (A \setminus S_A))| \\ &> (15k/16) + (15k/16) - 2^7\gamma k - k \\ &= 14k/16 - 2^7\gamma k. \end{aligned}$$

Como $\gamma < 1/2^{12}$, entonces podemos concluir que $14k/16 - 2^7\gamma k > 64\gamma k \geq d$. Así, podemos conectar los d caminos usando vértices fuera de $S_A \cup S_B$, formando un ciclo C_{chico} en \tilde{G} , el cual contiene todo vértice de $S_A \cup S_B$. Dado que $|\cup_{j=1}^d V(P_j)| \leq 2^9\gamma k$, y que para unir dos caminos usamos dos vértices fuera de $S_A \cup S_B$, entonces

$$|V(C_{chico})| \leq 2^9\gamma k + 2d \leq 2^9\gamma k + 2^8\gamma k \leq 2^{10}\gamma k.$$

□

3.2. Resultados específicos

En esta sección daremos definiciones y resultados que requieren hipótesis más restrictivas. Sea G un grafo con n vértices. Diremos que G es un *grafo de Enomoto* si para todo par de vértices x, y distintos, existe un ciclo hamiltoniano C , tal que

$$\text{dist}_C(x, y) = \lfloor n/2 \rfloor.$$

Nos interesa saber para qué familias de grafos podemos decir que son grafos de Enomoto. En particular, analizaremos los grafos con n vértices y grado mínimo al menos $n/2 + 1$. Para ello, nos apoyaremos en un resultado que caracteriza los grafos de grado mínimo al menos $n/2$.

Kühn, Osthus y Treglown [18] introdujeron el concepto de expansores robustos para estudiar ciclos hamiltonianos en grafos densos. Para $0 < \nu < 1$ y $X \subseteq V(G)$, se define la *vecindad ν -robusta* de X en G como:

$$\text{RN}(\nu, X) := \{v \in V(G) : d_G(v, X) \geq \nu n\}$$

Definición 3.2.1. *Sea $0 < \nu \leq \tau < 1$. Un grafo G es un (ν, τ) -expansor robusto si para cada conjunto $X \subseteq V(G)$ con $\tau n \leq |X| \leq (1 - \tau)n$, se cumple:*

$$|\text{RN}(\nu, X)| \geq |X| + \nu n.$$

Los expansores robustos con grado mínimo suficientemente grande contienen ciclos hamiltonianos [18].

Sea $0 < \gamma < 1$. Un grafo G con n vértices es

- γ -cercano a $K_{n/2, n/2}$ si existe $A \subseteq V(G)$ con $|A| = \lfloor n/2 \rfloor$ tal que $e(A) \leq \gamma n^2$.
- γ -cercano a $2K_{n/2}$ si existe $A \subseteq V(G)$ con $|A| = \lfloor n/2 \rfloor$ tal que $e(A, V(G) \setminus A) \leq \gamma n^2$.

Csaba, Kühn, Lo, Osthus, Treglown demostraron en [8, Lema 1.3.2] la siguiente tricotomía para grafos de Dirac

Teorema 3.2.2. (Tricotomía de los grafos de Dirac) *Sea $n \in \mathbb{N}$, y supongamos $0 < 1/n \ll \nu \ll \gamma, \tau < 1$. Sea G un grafo con n vértices y $\delta(G) \geq n/2$. Entonces G satisface una de las siguientes propiedades*

- G es γ -cercano a $2K_{n/2}$.
- G es γ -cercano a $K_{n/2, n/2}$.
- G es un (ν, τ) -expansor robusto.

El siguiente resultado prueba que es suficiente analizar el caso cuando G tiene un número par de vértices para poder concluir la conjetura de Enomoto.

Lema 3.3. *Sea n par. Si todo grafo G con n vértices y grado mínimo $\delta(G) \geq n/2+1$ es de Enomoto, entonces todo grafo G' con $n+1$ vértices y grado mínimo al menos $(n+1)/2+1$ es de Enomoto.*

Demostración. Sea G' un grafo cualquiera con $n+1$ vértices, grado mínimo al menos $(n+1)/2+1$. Como n es par, entonces $n+1$ es impar. Sean x, y, v vértices de G' distintos. Luego el grafo $G = G' - v$ tiene n vértices, y cumple $\delta(G) \geq n/2+1$. Luego por hipótesis tenemos que G es un grafo de Enomoto. Por tanto, en G existe ciclo hamiltoniano C tal que $\text{dist}_C(x, y) = \lfloor n/2 \rfloor$.

Ahora, como el vértice v en el grafo G' tiene grado al menos $(n+1)/2+1$, y $G = G' - v$, entonces v también tiene grado al menos $(n+1)/2+1$ en G . Como además $|V(G)| = n$, entonces existen u_i, u_{i+1} vértices consecutivos en el ciclo C tal que v es vecino de ambos. Por lo tanto, el ciclo $C' = xCu_ivu_{i+1}Cy$ es un ciclo hamiltoniano en G' tal que $\text{dist}_{C'}(x, y) = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$. Como x, y eran vértices cualesquiera, podemos concluir que G' es un grafo de Enomoto. Como G' era un grafo cualquiera con $n+1$ y $\delta(G') \geq (n+1)/2+1$, entonces todo grafo que cumple lo anterior es de Enomoto. \square

Capítulo 4

Resultado débil

En este capítulo utilizaremos resultados probabilísticos para obtener un resultado que si bien es más débil que el resultado principal de esta tesis, su demostración es simple. El lema que demostraremos en este capítulo es el siguiente:

Lema 4.1. *Sea G un grafo con n vértices y $\delta(G) \geq n/2 + 40\sqrt{n}$. Entonces para todo par de vértices x, y distintos, y para todo entero $2 \leq l \leq \lfloor n/2 \rfloor$ existe un ciclo hamiltoniano C tal que $\text{dist}_C(x, y) = l$.*

4.1. Preliminares

En esta sección enunciaremos unos lemas que nos ayudarán a la hora de demostrar el lema. El primer resultado, demostrado por Chartrand, Kapoor y Kronk [5] es una condición en los grados de los vértices del grafo para asegurar que sea Hamilton-conexo.

Lema 4.2. (Condición tipo Pósa para Hamilton-conexidad) *Sea G un grafo con n vértices. Si para todo entero $2 \leq i \leq n/2$ la cantidad de vértices con grado menor o igual a i es menor a $i - 1$, entonces G es Hamilton-conexo.*

A lo largo de la demostración usaremos distintas cotas para acotar la probabilidad de que una variable aleatoria tome ciertos valores. La cota más sencilla que usaremos es la de Markov [16, Ecuación 1.3].

Lema 4.3. (Cota de Markov) *Sea X una variable aleatoria no negativa con*

esperanza $\mathbb{E}[X]$. Luego para todo $t > 0$ se cumple

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}.$$

Una variable aleatoria *hipergeométrica* representa el número de ‘éxitos’ obtenidos al seleccionar una muestra sin reemplazo de una población finita. Se utiliza para calcular la probabilidad de obtener un número específico de éxitos x al extraer n elementos de una población de tamaño N que contiene m éxitos. Su esperanza es nm/N . El siguiente resultado nos entrega una cota superior para la probabilidad de que una variable aleatoria hipergeométrica esté alejada de su esperanza.

Lema 4.4. (Cota de Chernoff) Sea X una variable aleatoria hipergeométrica con parámetros N, n, m , y $\lambda = \mathbb{E}[X] = mn/N$. Luego se cumple

$$\mathbb{P}(X \leq \mathbb{E}[X] - t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2\lambda}\right), \quad t \geq 0$$

Esta cota se obtiene combinando los resultados [16, Teorema 2.1] y [16, Teorema 2.10].

4.2. Demostración Lema 4.1

Demostración. Primero notemos que si $2 \leq l \leq n/6$, entonces por resultado obtenido por Faudree, Lehel y Yoshimoto [11] existe un ciclo hamiltoniano C tal que $\text{dist}_C(x, y) = l$. Por lo tanto podemos suponer que $n/6 \leq l \leq \lfloor n/2 \rfloor$. Sean x, y vértices de G . Sea V_1 un subconjunto de $V(G) - \{x, y\}$ de tamaño $l - 1$ escogido uniformemente al azar. Sea $V_2 := V(G) - \{x, y\} - V_1$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $|V_1| \leq |V_2|$. Notemos que si para todo $i \in \{1, 2\}$ se cumple:

(A1) x tiene vecinos x_i en V_i , e y tiene vecinos y_i en V_i tales que $x_i \neq y_j$, con $j \in \{1, 2\}$

(A2) $G[V_i]$ es Hamilton-conexo,

entonces existe un ciclo hamiltoniano C tal que $\text{dist}_C(x, y) = l$. En efecto dado que $G[V_1]$ es Hamilton-conexo, entonces existe un camino P_1 que va de x_1 a y_1 , que usa todos los vértices de V_1 . De la misma manera, como $G[V_2]$ es Hamilton-conexo, entonces existe un camino P_2 que va de x_2 a y_2 , que usa todos los vértices de V_2 .

Luego el ciclo $C := xx_1P_1y_1yy_2P_2x_2x$ cumple lo que queremos.

La idea entonces es mostrar que las condiciones **(A1)**, **(A2)** se cumplen. Definiremos como \tilde{G} al grafo G sin los vértices x e y . Para todo $2 \leq j \leq n/2$ se define el conjunto

$$A_j := \{v \in V(\tilde{G}) : d_{\tilde{G}}(v) \leq j\}.$$

Definimos los siguientes eventos:

$$E_1 := \{x \text{ tiene al menos dos vecinos en } V_1\}$$

$$E_2 := \{x \text{ tiene al menos dos vecinos en } V_2\}$$

$$E_3 := \{y \text{ tiene al menos dos vecinos en } V_1\}$$

$$E_4 := \{y \text{ tiene al menos dos vecinos en } V_2\}$$

$$E_5 := |A_{|V_1|/2}| < \frac{|V_1| - 2}{3}$$

$$E_6 := |A_{|V_2|/2}| < \frac{|V_2| - 2}{3}$$

$$E_7 := |A_{|V_1|/3}| = 0$$

$$E_8 := |A_{|V_2|/3}| = 0.$$

La idea es mostrar que el evento $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^8 E_i^c) < 1$. Notemos que si se cumplen todos los eventos anteriores estamos listos, pues las primeras cuatro condiciones nos aseguran la existencia de vecinos distintos de x e y en los conjuntos V_1 y V_2 (condición **(A1)**), y el resto de condiciones nos asegura que los grafos $G[V_i]$ cumplan las hipótesis del Lema 4.2, lo que implica que los grafos sean Hamilton-conexos (condición **(A2)**).

Dado un vértice v en G (es decir el grafo original) se define la variable aleatoria Z_v como la cantidad de vecinos de v en V_1 , en el grafo \tilde{G} . Es decir $Z_v = |N_{\tilde{G}}(v) \cap V_1|$. Notemos que cada variable aleatoria Z_v es de tipo hipergeométrica con parámetros $|N_{\tilde{G}}(v)|, |V_1|, n - 2$. Entonces

$$\mathbb{E}[Z_v] = |N_{\tilde{G}}(v)| \frac{|V_1|}{n - 2}$$

Como $|N_{\tilde{G}}(v)| \geq \delta(G) - 2 \geq n/2 + 40\sqrt{n} - 2$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_v) &\geq \frac{|V_1|}{n-2} (n/2 + 40\sqrt{n} - 2) \\ &\geq \frac{|V_1|}{n} (n/2 + 30\sqrt{n}) \\ &= |V_1| \left(\frac{1}{2} + \frac{30}{\sqrt{n}} \right). \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_x < 2) &= \mathbb{P}(Z_x - \mathbb{E}[Z_x] < 2 - \mathbb{E}[Z_x]) \\ &\leq \mathbb{P}\left(Z_x - \mathbb{E}[Z_x] < 2 - \frac{|V_1|}{2} - \frac{30|V_1|}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Usando la cota de Chernoff dada por el Lema 4.4 tenemos que

$$\mathbb{P}(Z_x < 2) \leq \exp\left(-\frac{(|V_1|\sqrt{n} + 60|V_1| - 4\sqrt{n})^2}{8n\mathbb{E}[Z_x]}\right).$$

Dado que $|N(x)| \leq n$, entonces $\mathbb{E}[Z_x] \leq |V_1| \leq n$, se tiene que:

$$\mathbb{P}[Z_x < 2] \leq \exp\left(-\frac{(|V_1|\sqrt{n} + 60|V_1| - 4\sqrt{n})^2}{8n^2}\right).$$

Notemos que esto último es menor a $1/8$. En efecto, queremos mostrar

$$\exp\left(-\frac{(|V_1|\sqrt{n} + 60|V_1| - 4\sqrt{n})^2}{8n^2}\right) < \exp(-\ln 8)$$

lo que es equivalente a

$$\frac{(|V_1|\sqrt{n} + 60|V_1| - 4\sqrt{n})^2}{8n^2} > \ln(8).$$

Manejando un poco la expresión se llega que basta mostrar

$$|V_1|\sqrt{n} + 60|V_1| - 4\sqrt{n} > \sqrt{8\ln(8)}n.$$

Como $17 > 8\ln(8)$, entonces basta mostrar que

$$|V_1|\sqrt{n} + 60|V_1| - 4\sqrt{n} > \sqrt{17}n$$

lo que es cierto pues $|V_1| \geq n/6$.

Dado que el conjunto V_2 es $V(G) - \{x, y\} - V_1$, entonces para todo vértice v , la cantidad $|N_{\tilde{G}} \cap V_2|$ también es una variable aleatoria hipergeométrica. Como además $|V_1| \leq |V_2|$, entonces un análisis análogo muestra que $\mathbb{P}(E_i^c) < 1/8$, para todo $i \in \{2, 3, 4\}$. Para el evento E_5^c acotaremos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(|A_{|V_1|/2}| \geq \frac{|V_1| - 2}{3}\right) &\leq \frac{3\mathbb{E}[|A_{|V_1|/2}|]}{|V_1| - 2} \\ &\leq \frac{6\mathbb{E}[|A_{|V_1|/2}|]}{|V_1|}, \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad sale de la desigualdad de Markov dada por Lema 4.3. Notemos que $\mathbb{E}[|A_{|V_1|/2}|] = |V_1|\mathbb{P}(v \in A_{|V_1|/2})$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(|A_{|V_1|/2}| \geq \frac{|V_1| - 2}{3}\right) &\leq 6\mathbb{P}(v \in A_{|V_1|/2}) \\ &= 6\mathbb{P}(|N(v) \cap V_1| \leq |V_1|/2) \\ &= 6\mathbb{P}(Z_v - \mathbb{E}[Z_v] \leq |V_1|/2 - \mathbb{E}[Z_v]). \end{aligned}$$

Como $n \geq \mathbb{E}[Z_v] \geq |V_1|/2 + 30|V_1|/\sqrt{n}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(|A_{|V_1|/2}| \geq \frac{|V_1| - 2}{3}\right) &\leq 6\mathbb{P}\left(Z_v - \mathbb{E}[Z_v] \leq -\frac{30|V_1|}{\sqrt{n}}\right) \\ &\leq 6\exp\left(-\frac{900|V_1|^2}{2n\mathbb{E}[Z_v]}\right) \\ &\leq 6\exp\left(-\frac{900|V_1|^2}{2n^2}\right) \end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad sale de la desigualdad de Chernoff. Como $|V_1| \geq n/6$ se tiene que la última expresión es menor a $1/8$. Así mostramos que $\mathbb{P}[E_5^c] < 1/8$. Análogamente se muestra que $\mathbb{P}[E_6^c] < 1/8$.

Solo falta analizar los últimos dos eventos. Nuevamente mostraremos que los eventos complementos tiene probabilidad menor a $1/8$. Lo mostraremos para E_7^c

(el otro es análogo).

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|A_{|V_1|/3}| \geq 1) &= \mathbb{P}(\text{existe } v \in V_1 : Z_v < |V_1|/3) \\
&\leq |V_1| \mathbb{P}(Z_v < |V_1|/3) \\
&= |V_1| \mathbb{P}(Z_v - \mathbb{E}[Z_v] < |V_1|/3 - \mathbb{E}[Z_v]) \\
&\leq |V_1| \mathbb{P}\left(Z_v - \mathbb{E}[Z_v] < -|V_1|/6 - \frac{30|V_1|}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

Usando la cota de Chernoff y que $n \geq \mathbb{E}[Z_v]$ se tiene

$$\mathbb{P}(|A_{|V_1|/3}| \geq 1) \leq |V_1| \exp\left(-\frac{(|V_1|\sqrt{n} + 180|V_1|)^2}{72n^2}\right).$$

Dado que $|V_1| \geq n/6$ entonces se puede deducir que $\sqrt{n}|V_1| + 180|V_1| > \sqrt{72 \ln(8|V_1|)}n$. Entonces se tiene que

$$|V_1| \exp\left(-\frac{(|V_1|\sqrt{n} + 180|V_1|)^2}{72n^2}\right) < 1/8.$$

Por lo tanto, $\mathbb{P}(E_7^c) < 1/8$.

De esta manera, tenemos que $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^8 E_i^c) < 1$. Luego por método probabilista existe un subconjunto V_1 de $V(G) - \{x, y\}$ tal que se cumple todo lo que necesitamos para asegurar la existencia de un ciclo hamiltoniano C tal que $\text{dist}_C(x, y) = l$. \square

Capítulo 5

Caso dos cliques disjuntos

En este capítulo nos centraremos en estudiar el caso cuando un grafo G es γ -cercano a $2K_k$. El resultado principal de este capítulo es el siguiente:

Lema 5.1. *Sea G un grafo con $n = 2k + 2$ vértices y $\delta(G) \geq n/2 + 1$. Sea $\gamma < 1 - 3/k$, y sean x, y vértices de G distintos, tal que $\tilde{G} := G - \{x, y\}$ es γ -cercano a $2K_k$. Entonces existe un ciclo hamiltoniano C en G tal que $\text{dist}_C(x, y) = k + 1$.*

5.1. Preliminares

Para mostrar el lema anterior, usaremos dos teoremas que dan condiciones suficientes para concluir que un grafo es Hamilton-conexo.

El siguiente teorema, demostrado por Ore [23], presenta una condición suficiente en el grado mínimo de un grafo, para concluir que es Hamilton-conexo.

Teorema 5.1.1. *Sea G un grafo con $n \geq 4$ vértices y grado mínimo $\delta(G) \geq (n + 1)/2$. Entonces G es Hamilton-conexo.*

Notemos que la condición anterior es una variación del Teorema de Dirac [10] para la propiedad de ser hamiltoniano.

Otra condición suficiente para la hamiltonicidad es la propuesta por Chvátal. El resultado siguiente, demostrado por Berge [3] es una adaptación de la condición de tipo Chvátal para la propiedad de ser Hamilton-conexo.

Teorema 5.1.2. *Sea $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ la secuencia de grados de un grafo*

G , con $n \geq 4$ vértices. Si para todo $2 \leq i < (n+1)/2$ se cumple $d_{i-1} > i$ o $d_{n-i} \geq n-i+1$, entonces G es Hamilton-conexo.

5.2. Demostración Lema 5.1

Demostración. Sea G grafo con $n = 2k+2$ vértices y x, y vértices tal que $\tilde{G} = G - \{x, y\}$ es γ -cercano a $2K_k$. Luego por definición, existen conjuntos $A, B \subseteq V(\tilde{G})$, de tamaño k cada uno, tales que $e(A, B) \leq 4\gamma k^2$. Sean A, B los conjuntos que minimizan $e(A, B)$.

Afirmación 5.2.1. Si $\tilde{G}[A], \tilde{G}[B]$ son Hamilton-conexo, entonces para todo par de vértices x, y existe un ciclo hamiltoniano C tal que $\text{dist}_C(x, y) = k+1$.

Demostración. Se definen los conjuntos

$$A_x := \{a \in A : a \sim x\}$$

$$A_y := \{a \in A : a \sim y\}$$

$$B_x := \{b \in B : b \sim x\}$$

$$B_y := \{b \in B : b \sim y\}.$$

Dado que $d_G(x) \geq n/2 + 1 = k+2$, entonces $d_{\tilde{G}}(x, A \cup B) \geq k+1$, y como $|A| = |B| = k$, podemos concluir que $|A_x| \geq 1, |B_x| \geq 1$. El mismo argumento sirve para concluir que $|A_y| \geq 1, |B_y| \geq 1$.

Supongamos que $|A_x \cup A_y| \geq 2$ y $|B_x \cup B_y| \geq 2$. Luego, existen vértices a_x, a_y, b_x, b_y pertenecientes a los conjuntos A_x, A_y, B_x, B_y respectivamente.

Por hipótesis tenemos que $\tilde{G}[A]$ es Hamilton-conexo, por lo que existe un (a_x, a_y) -camino hamiltoniano en $\tilde{G}[A]$. Análogamente, como $\tilde{G}[B]$ es Hamilton-conexo, entonces existe un (b_y, b_x) -camino hamiltoniano en $\tilde{G}[B]$. Llamemos a estos caminos P_A, P_B respectivamente.

Por lo tanto, el ciclo $C := xP_A y P_B x$ es hamiltoniano en G y cumple que $\text{dist}_C(x, y) = k+1$ (Véase Figura 5.2.1).

Por lo tanto podemos suponer que $|A_x \cup A_y| = 1$ o $|B_x \cup B_y| = 1$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $|B_x \cup B_y| = 1$, con $B_x \cup B_y = \{b_{xy}\}$. Como

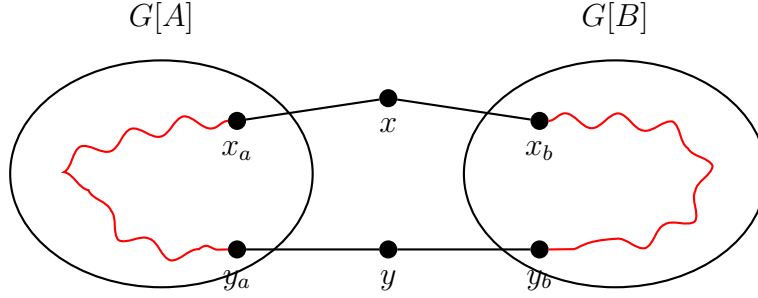


Figura 5.2.1: Ciclo hamiltoniano C en el grafo G , donde en rojo se marca el (x_a, y_a) -camino hamiltoniano en $\tilde{G}[A]$, y el (x_b, y_b) -camino hamiltoniano en $\tilde{G}[B]$.

$d_{\tilde{G}}(x, A \cup B) \geq k + 1$ y $d_{\tilde{G}}(x, B) = 1$, entonces $d_{\tilde{G}}(x, A) \geq k$. Análogamente se tiene que $d_{\tilde{G}}(y, A) \geq k$.

Además $|A| = |B| = k$, entonces para todo $a \in A$ se cumple $a \sim x, a \sim y$. Sea $P := b_1 b_2 b_3 \cdots b_{k-1} b_{xy}$ un (b_1, b_{xy}) -camino hamiltoniano en $\tilde{G}[B]$ (dicho camino existe, pues $\tilde{G}[B]$ es Hamilton-conexo).

Sea $b \in B$ un vértice cualquiera distinto de b_{xy} . Luego

$$\begin{aligned} d_{\tilde{G}}(b, A) &= d_G(b) - d_{\tilde{G}}(b, B) - d_G(b, \{x, y\}) \\ &\geq \delta(G) - (k - 1) \quad , \text{ con } d(b, \{x, y\}) = 0 \\ &\geq k + 2 - (k - 1) \\ &= 3. \end{aligned}$$

Sea $\tilde{P} := a_1 a_2 a_3 \cdots a_{k-1} a_k$ un camino hamiltoniano en $\tilde{G}[A]$ con $a_1 \sim b_1, a_k \sim b_2$. Además, dado que $d_{\tilde{G}}(b_1, A) \geq 3$, entonces existe un vértice $a_i \in \tilde{P}$, tal que $a_i \neq a_1, a_i \neq a_k$ (Véase Figura 5.2.2a). Luego los caminos $P_1 := a_k b_2 P b_{xy}$ y $P_2 := a_{k-1} \tilde{P} a_i b_1 a_1 \tilde{P} a_{i-1}$ son disjuntos, cubren todos los vértices de \tilde{G} , y además tienen como extremos a vecinos de x e y (Véase Figura 5.2.2b).

Por lo tanto, el ciclo $C := x P_1 y P_2 x$ es hamiltoniano en G , el cual cumple $\text{dist}_C(x, y) = k + 1$. \square

Entonces, por la afirmación anterior, basta demostrar que $\tilde{G}[A], \tilde{G}[B]$ son Hamilton-conexos para concluir. Definimos para todo $1 \leq i \leq k/2$ los conjuntos

$$A_{\leq i} := \{a \in A : d(a, A) \leq i\}$$

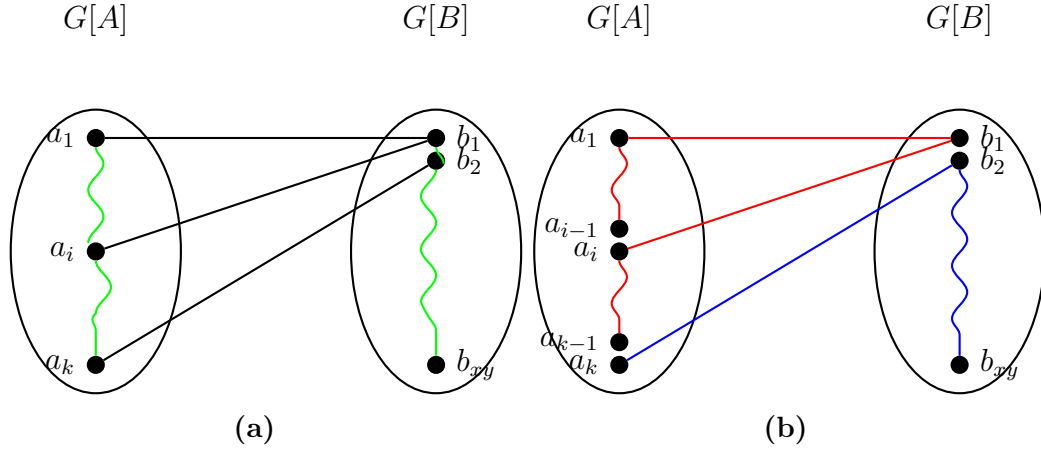


Figura 5.2.2: En verde se marcan los caminos hamiltonianos de a_1 a a_k , y de b_1 a b_{xy} . En azul se representa el camino P_1 que va de a_k hacia b_{xy} , y en rojo se representa el camino P_2 que va de a_{k-1} hacia a_{i-1} .

$$B_{\leq i} := \{b \in B : d(b, B) \leq i\}.$$

Notemos que si $A_{\leq k/2} = \emptyset$, entonces para todo $a \in A$, $d_{\tilde{G}}(a, A) > k/2 = |A|/2$, lo que implica por Teorema 5.1.1 que $\tilde{G}[A]$ es Hamilton-conexo. Por lo tanto, si $A_{\leq k/2} = \emptyset$ y $B_{\leq k/2} = \emptyset$, entonces $\tilde{G}[A], \tilde{G}[B]$ son Hamilton-conexos, lo que es suficiente para concluir.

Por otro lado, dado que $\delta(\tilde{G}) \geq k$ y $|B| = k$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} k^2 &\leq \sum_{b \in B} d_{\tilde{G}}(b) \\ &= e(A, B) + \sum_{b \in B} d_{\tilde{G}}(b, B) \\ &\leq 4\gamma k^2 + \sum_{b \in B} d_{\tilde{G}}(b, B). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$k^2 - 4\gamma k^2 \leq \sum_{b \in B} d_{\tilde{G}}(b, B) \quad (5.2.1)$$

Supongamos que $\tilde{G}[B]$ no es Hamilton-conexo, y sea $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_k$ la secuencia de grados de los vértices de B , ordenados de menor a mayor. Por contrarecíproco de la condición de Berge (ver Teorema 5.1.2), tenemos que existe $2 \leq j \leq k/2$ tal que $d_{j-1} \leq j$ y $d_{k-j-1} \leq k - j - 1$.

Sea i el mínimo valor que cumple lo anterior. Luego $|B_{\leq i}| \geq i - 1$, y además

$$|B_{\leq k-i-1}| \geq k - i - 1.$$

Luego

$$\begin{aligned} \sum_{b \in B} d(b) &= \sum_{b \in B_{\leq i}} d_{\tilde{G}}(b) + \sum_{b \in (B_{\leq k-i-1} \setminus B_{\leq i})} d_{\tilde{G}}(b) + \sum_{b \in B \setminus B_{\leq k-i-1}} d_{\tilde{G}}(b) \\ &\leq |B_{\leq i}|i + |(B_{\leq k-i-1} \setminus B_{\leq i})|(k - i - 1) + |B \setminus B_{\leq k-i-1}|k \\ &\leq (i - 1)i + (k - 2i)(k - i - 1) + (i + 1)(k - 1) \\ &= 3i^2 + k^2 - 2ik - 1. \end{aligned}$$

Nos interesa saber para qué valor de i , el lado derecho de la desigualdad alcanza un valor máximo. Para ello, notemos que los términos k^2 y -1 no dependen de i , por lo tanto basta analizar el máximo de la función

$$f(i) := 3i^2 - 2ik$$

la cual es convexa. Dado que i está entre 2 y $k/2$, entonces $f(i)$ es una función convexa definida en un intervalo cerrado y acotado, por lo que su máximo se alcanza en uno de sus extremos. Luego

$$f(2) = 12 - 4k$$

$$f(k/2) = -k^2/4$$

donde $f(2) \geq f(k/2)$ para todo $k \geq 13$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{b \in B} d_{\tilde{G}}(b) &\leq 3i^2 + k^2 - 2ik - 1 \\ &\leq f(2) + k^2 - 1 \\ &= k^2 - 4k + 11 \\ &< k^2 - 4k + 12. \end{aligned}$$

Además, sabemos que $k^2 - 4\gamma k^2 \leq \sum_{b \in B} d_{\tilde{G}}(b)$. Luego, juntando ambas desigualdades se tiene que

$$k^2 - 4\gamma k^2 < k^2 - 4k + 12$$

que ocurre si y solo si $\gamma > 1 - 3/k$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto, $\tilde{G}[B]$ es Hamilton-conexo. Análogamente podemos mostrar que $\tilde{G}[A]$ es Hamilton-conexo. Así, por afirmación anterior, podemos concluir lo deseado. \square

Capítulo 6

Caso bipartito completo

En este capítulo estudiaremos el caso cuando un grafo \tilde{G} con $2k$ vértices es γ -cercano a $K_{k,k}$ (véase Figura 6.0.1). El resultado principal de esta sección es el siguiente:

Lema 6.1. *Sea G un grafo con $n = 2k + 2$ vértices y $\delta(G) \geq n/2 + 1$. Sea $1/n < \gamma < 1/2^{12}$ y sean x, y vértices de G distintos, tal que $\tilde{G} := G - \{x, y\}$ es γ -cercano a $K_{k,k}$. Entonces existe un ciclo hamiltoniano C en G tal que $\text{dist}_C(x, y) = k + 1$.*

Dada la extensión de este capítulo, se particionó las diferentes partes en secciones para tener un mejor entendimiento. En la sección 6.1 **Preliminares** se presentarán diversos resultados de la literatura que entregan condiciones suficientes para encontrar caminos y ciclos hamiltonianos.

La primera división de casos que se tendrá se verá en la sección 6.2 **Chvátal vs**

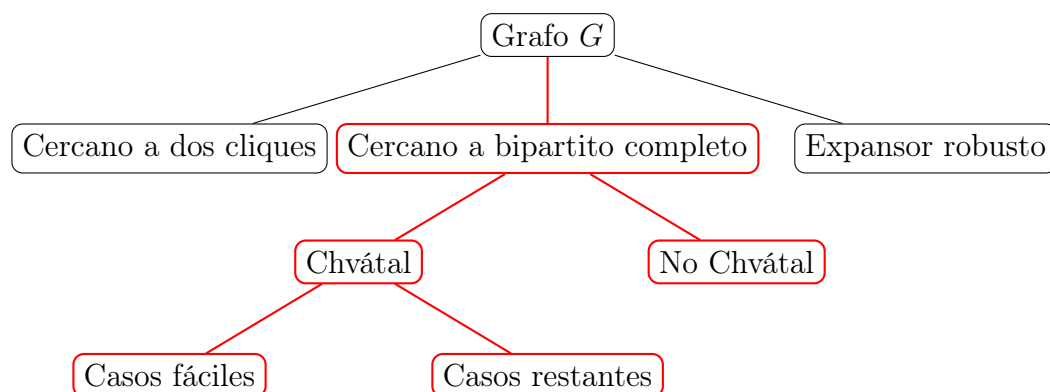


Figura 6.0.1: Árbol que indica todos los casos a estudiar. En rojo los casos que se estudiarán en este capítulo.

No Chvátal, donde primero consideraremos una partición de los vértices $\{A, B\}$ de igual tamaño, para luego analizar el caso cuando el grafo bipartito $\tilde{G}[A, B]$ no cumple la condición de Chvátal para la hamiltonicidad. El no cumplir esta condición provocará que el grafo tenga una estructura muy clara, la cual nos permitirá construir el ciclo hamiltoniano de interés de otra manera. El Lema 6.2 encapsula el resultado obtenido en esa sección.

Luego de ello, estudiaremos el caso cuando el grafo bipartito $\tilde{G}[A, B]$ si cumple la condición de Chvátal para la hamiltonicidad. Gracias a esto, podemos asegurar la existencia de un ciclo hamiltoniano. Dado este ciclo hamiltoniano, construiremos un ciclo con pocos vértices, y que contenga a todo vértice con grado pequeño dentro del grafo bipartito. Esto ayudará pues el grafo que se obtiene quitando este ciclo pequeño tiene grado mínimo muy alto, por lo que cumplirá con holgura condiciones que nos permitirán encontrar caminos hamiltonianos para cualquier par de vértices. En la sección 6.3 **Estructurando el grafo bipartito** veremos todo esto, y como queda estructurado el grafo. De esta manera solo tendremos que preocuparnos por conectar este ciclo chico a alguno de estos caminos, y la ubicación de los vecinos de los vértices que queremos conectar con el ciclo hamiltoniano.

Esta última dificultad es la que nos obligará a estudiar este subcaso en dos secciones distintas. En la sección 6.4 **Casos fáciles**, introduciremos un grafo auxiliar que nos ayudará a entender qué clase de estructuras necesitamos para construir el ciclo hamiltoniano que buscamos sin mucha dificultad. Luego de ello estudiaremos exactamente como se construyen los ciclos hamiltonianos en cada uno de estos casos fáciles.

Por otro lado, en la sección 6.5 **Casos restantes**, estudiamos los casos donde la construcción de los ciclos hamiltonianos requiere más trabajo.

Finalmente, en la sección 6.6 **Unificando** juntamos todos los resultados obtenidos en las secciones previas, y notamos que cubrimos todos los casos posibles, demostrando el resultado principal de este capítulo.

6.1. Preliminares

En esta sección presentaremos diversos resultados de la literatura, relacionados a grafos bipartitos balanceados, y qué condiciones deben cumplir estos para

ser hamiltonianos, o para encontrar caminos hamiltonianos para ciertos pares de vértices. El primer resultado, obtenido por Letzter [21, Corolario 20] es una condición del tipo Chvátal, para la hamiltonicidad en grafos bipartitos.

Teorema 6.1.1. *Sea G un grafo bipartito balanceado con $2n$ vértices con partición $\{A, B\}$. Sea a_1, a_2, \dots, a_n la secuencia de grados de A y sea b_1, b_2, \dots, b_n la secuencia de grados de B , ambas ordenadas de menor a mayor. Si para todo $1 \leq i < n$ se cumple $a_i \geq i + 1$ o $b_{n-i} \geq n - i + 1$, entonces G contiene un ciclo hamiltoniano.*

Por otro lado, notemos que un grafo bipartito no es Hamilton-conexo, pues para cualquier par de vértices de un mismo conjunto no existe camino hamiltoniano. Por ello, uno da la siguiente definición. Un grafo bipartito balanceado con partes A, B es *Hamilton-conexo-bipartito* si para todo par de vértices de partes distintas, existe un camino hamiltoniano que los conecta.

Con esta definición clara, uno puede dar condiciones suficientes para decidir cuando un grafo bipartito balanceado es Hamilton-conexo-bipartito. Wei y You [27, Corolario 2.2] mostraron una condición en la suma de grados de vértices no adyacentes que es suficiente

Teorema 6.1.2. *Un grafo bipartito balanceado G de tamaño $2n$ es Hamilton-conexo-bipartito si $d(a) + d(b) \geq n + 2$ para cualquier par de vértices no adyacentes a, b de partes distintas.*

Ahora nos interesa analizar dos casos posibles, si existe una partición $\{A, B\}$ minimal en $e(A)$ tal que el grafo bipartito $\tilde{G}[A, B]$ cumple las condiciones del Teorema 6.1.1, o caso contrario, para toda partición $\{A, B\}$ minimal (respecto a la cantidad de aristas interiores del conjunto A) el grafo $\tilde{G}[A, B]$ no cumple la condición del tipo Chvátal. En las siguientes secciones se muestra que en cualquiera de los casos, es posible construir en el grafo \tilde{G} dos caminos de largo $k - 1$, vértice disjuntos y con extremos a vecinos de x e y . Esto es suficiente pues basta conectar los vértices x e y a estos caminos para obtener el ciclo hamiltoniano que buscamos.

6.2. Chvátal vs No Chvátal

En esta sección estudiaremos el caso cuando para toda partición $\{A, B\}$ minimal de los vértices de \tilde{G} , el grafo $\tilde{G}[A, B]$ no cumple la condición del tipo Chvátal del Teorema 6.1.1. El lema que sigue a continuación es el resultado principal de esta

sección.

Lema 6.2. *Sea G un grafo con $n = 2k + 2$ vértices y $\delta(G) \geq n/2 + 1$. Sean x, y vértices de G distintos, tal que para toda partición $\{A, B\}$ minimal en $e(A)$ de los vértices de $\tilde{G} := G - \{x, y\}$, el grafo bipartito $\tilde{G}[A, B]$ no es hamiltoniano. Entonces existe un ciclo hamiltoniano C en G tal que $\text{dist}_C(x, y) = k$.*

Demostración. Supongamos que para toda partición de vértices de \tilde{G} minimal, el grafo bipartito inducido por la partición no es hamiltoniano. Consideremos el conjunto de particiones de igual tamaño de los vértices de $V(\tilde{G})$ que son minimales respecto a la cantidad de aristas dentro de una de las partes. Sea $\{A, B\}$ una de estas particiones y que maximice $\min_{a \in A} d(a, B)$. Sea $H := \tilde{G}[A, B]$. Vamos a notar que en este caso, el grafo H tiene una estructura particular, la cual nos permitirá construir dos caminos disjuntos de largo $k - 1$, cada uno con un extremo vecino de x y el otro extremo vecino de y .

Sea a_1, a_2, \dots, a_k la secuencia ordenada de grados de los vértices de A , y b_1, b_2, \dots, b_k la secuencia ordenada de grados en B . Dado que H no es hamiltoniano, entonces no se cumple la condición del Teorema 6.1.1, por lo que existe un entero $1 \leq i < k$ tal que $a_i \leq i$ y $b_{k-i} \leq k - i$. Sea i uno de estos enteros, fijo pero arbitrario.

Sea $\delta := \min_{a \in A} d(a, B)$. Dado que $\delta(G) \geq k + 2$ y $\tilde{G} = G - \{x, y\}$, entonces el grado de todo vértice en el grafo \tilde{G} es al menos k , por lo que para todo vértice $a \in A$ se tiene que $d(a, A) \geq k - \delta$. Dado que $\{A, B\}$ es una partición minimal en $e(A)$, con conjuntos de igual tamaño, entonces por Lema 3.1 sabemos que todo vértice $b \in B$ cumple $d(b, A) \geq d(a, A) \geq k - \delta$.

Ahora vamos a mostrar una serie de observaciones que nos darán información sobre la estructura del grafo H .

Observación 6.2.1. Se tiene que $i = \delta$. Además $a_i = i$ y $b_{k-i} = k - i$.

Demostración. Notemos que $\delta \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$, por lo que si $i < \delta$, entonces tenemos $i < \delta \leq a_i \leq i$, lo que es una contradicción.

Por otro lado, si $\delta < i$, entonces se tiene que $k - i < k - \delta$. Como todo vértice de B tiene grado al menos $k - \delta$ hacia A , entonces se cumple $k - i < k - \delta \leq b_{k-i} \leq k - i$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $i = \delta$, $a_i = i$ y $b_{k-i} = k - i$. \square

Observación 6.2.2. Para todo vértice $a \in A$ se cumple $d(a, A) \leq k - i$.

Demostración. Dado que para todo par de vértices $a \in A, b \in B$ se cumple $d(a, A) \leq d(b, A)$ (por Lema 3.1), y que existe vértice en B con grado hacia A exactamente $k - i$, entonces se concluye que todo vértice $a \in A$ cumple $d(a, A) \leq k - i$. \square

Observación 6.2.3. Sean $a \in A, b \in B$ vértices tales que $d(a, A) = k - i = d(b, A)$. Luego a no es vecino de b .

Demostración. Supongamos que a y b son vecinos. Entonces si uno define los conjuntos $A' = A - \{a\} + \{b\}$ y $B' = B - \{b\} + \{a\}$ entonces se tiene $e(A') < e(A)$, lo que contradice la minimalidad. \square

Se define

$$\begin{aligned} X_A &:= \{a \in A : d(a, B) = i\} \\ X_B &:= \{b \in B : d(b, A) = k - i\}. \end{aligned}$$

Observación 6.2.4. Se tiene que $|X_A| = i$ y $|X_B| = k - i$.

Demostración. Dado que $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_i = i$, y $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{k-i} = k - i$, entonces tenemos que la cantidad de vértices de A con grado i es al menos i , y que la cantidad de vértices de B con grado $k - i$ es al menos $k - i$. Es decir $i \leq |X_A|$ y $k - i \leq |X_B|$.

Sabemos por la Observación 6.2.2 que todo vértice $a \in A$ cumple $d(a, A) \leq k - i$. Consideremos ahora un vértice de $a \in A$ con grado i hacia B (es decir tiene grado mínimo). Como $d_{\bar{G}}(a) \geq k$, entonces $d(a, A) \geq k - i$. Como además $d(a, A) \leq k - i$, entonces se tiene que todo vértice de A con grado i hacia B , tiene grado hacia A exactamente $k - i$.

Por Observación 6.2.3 se tiene que entre vértices de X_A y vértices de X_B no hay aristas. Esta observación implica que $|X_A| \leq i$ y $|X_B| \leq k - i$. Por lo tanto $|X_A| = i$ y $|X_B| = k - i$. \square

Ahora, nos enfocaremos en las aristas dentro de X_A y dentro de X_B . Mostraremos que o bien X_A y X_B son conjuntos independientes, o que podemos encontrar otra partición A', B' también minimal (por lo que todo el razonamiento anterior es válido) donde los conjuntos $X_{A'}, X_{B'}$ son independientes, con $X_{A'}, X_{B'}$ conjuntos definidos de manera análoga a X_A y X_B .

La estrategia será la siguiente: Supondremos que uno de los conjuntos no es independiente y tomaremos una arista del grafo inducido por ese conjunto. Luego mostraremos que existe otra partición minimal, pero con una cantidad de aristas dentro de los conjuntos menor a la partición original. Así, haciendo esto de manera recursiva acabaremos en una partición con conjuntos independientes.

Sea aa^* una arista con a, a^* vértices de X_A . Sea $b \in X_B$. Luego se define la partición $\{A', B'\}$ con $A' = A - \{a\} + \{b\}$ y $B' = B - \{b\} + \{a\}$.

Recordemos que el corchete de Iverson $[p]$ convierte cualquier proposición lógica p en un número que es 1 si la proposición es cierta, y 0 si no.

Ahora notemos que

$$e(A') = e(A) - d(a, A) + d(b, A) - [a \sim b].$$

Como $d(a, B) = i$ (pues $a \in X_A$), entonces $d(a, A) = k - i = d(b, A)$. Por lo mostrado anteriormente, a y b no pueden ser vecinos, por lo que $[a \sim b] = 0$. Entonces $e(A') = e(A)$. Ahora por la maximalidad de $\min_{a \in A} d(a, B) = i$, se tiene que $\min_{a \in A'} d(a, B') \leq \min_{a \in A} d(a, B)$. Dado que ningún vértice de X_A es vecino a un vértice de X_B , y que justamente los vértices que estamos intercambiando pertenecen a estos conjuntos, entonces $\min_{a \in A} d(a, B) \leq \min_{a \in A'} d(a, B')$. Por lo tanto $\min_{a \in A'} d(a, B') = \min_{a \in A} d(a, B)$.

Además como b no es vecino de ningún vértice de X_A , entonces $e(X_{A'}) < e(X_A)$, y $e(X_{B'}) \leq e(X_B)$. Por lo tanto, si repetimos este proceso, podemos obtener una partición $\{A^*, B^*\}$ donde X_{A^*} y X_{B^*} son independientes.

Desde ahora, diremos que la partición $\{A, B\}$ cumple que X_A, X_B son independientes. Como los vértices de X_A tienen grado i hacia B , entonces tienen grado al menos $k - i$ hacia A . Por Observación 6.2.2 sabemos que tienen grado a lo más $k - i$ hacia A , por lo que podemos concluir que todo vértice de X_A tiene grado exactamente $k - i$ hacia A . Por esto, y que $e(X_A) = 0$, entonces se tiene

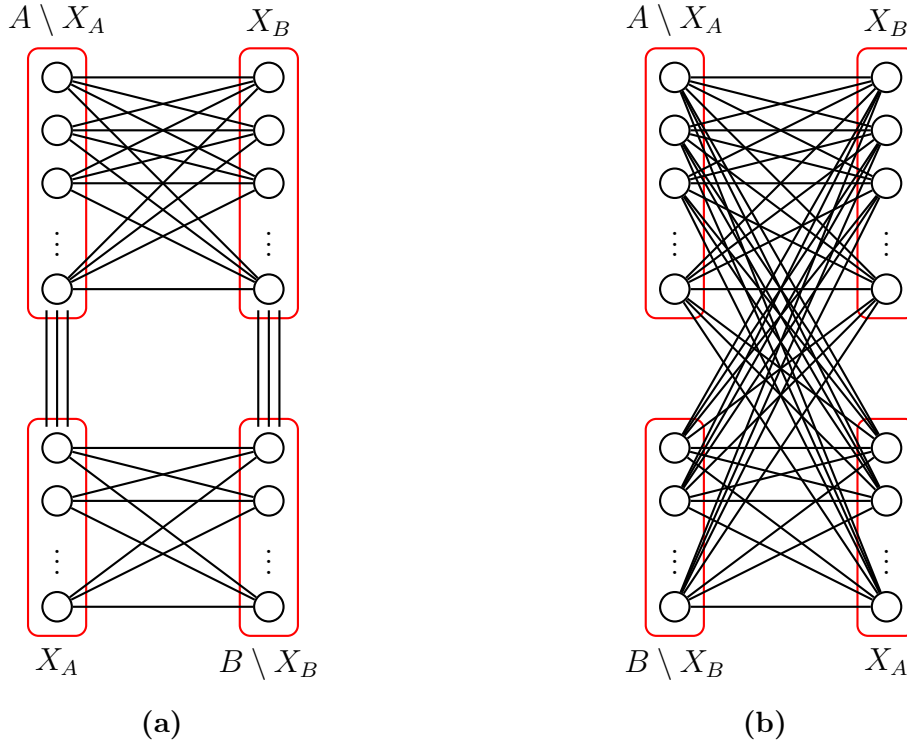


Figura 6.2.1: Grafo \tilde{G} con conjuntos de vértices X_A , $A \setminus X_A$, X_B y $B \setminus X_B$. Entre los vértices de $A \setminus X_A$ y X_B existen todas las aristas posibles, y lo mismo entre los conjuntos X_A y $B \setminus X_B$, los conjuntos X_A y $A \setminus X_A$, y los conjuntos X_B y $B \setminus X_B$. Los conjuntos X_A , $B \setminus X_B$ tienen tamaño i , mientras que los conjuntos $A \setminus X_A$ y X_B tienen tamaño $k - i$.

para todo $a \in X_A$ y todo $a' \in A \setminus X_A$ que a es vecino de a' . Análogamente se justifica que para todo $b \in X_B$ y todo $b' \in B \setminus X_B$ se tiene que b es vecino de b' . En la Figura 6.2.1a se puede ver la estructura del grafo \tilde{G} .

Ahora, notemos que si definimos los conjuntos $A' = (A \setminus X_A) \cup (B \setminus X_B)$ y $B' = X_B \cup X_A$, entonces tenemos que $\{A', B'\}$ es una partición de los vértices del grafo, y además $\tilde{G}[A', B']$ es un grafo bipartito completo (véase Figura 6.2.1b).

En este grafo construiremos dos caminos disjuntos de largo $k - 1$, cada uno con un extremo vecino de x y el otro extremo vecino de y . Notemos que hacer esto es suficiente para construir el ciclo hamiltoniano C tal que $\text{dist}_C(x, y) = k + 1$, pues basta conectar estos dos caminos usando los vértices x e y para obtener dicho ciclo.

Primero notemos que todo vértice de X_A y todo vértice de X_B son vecinos de x e y , pues su grado en el grafo \tilde{G} es exactamente k , y el grado mínimo del grafo G

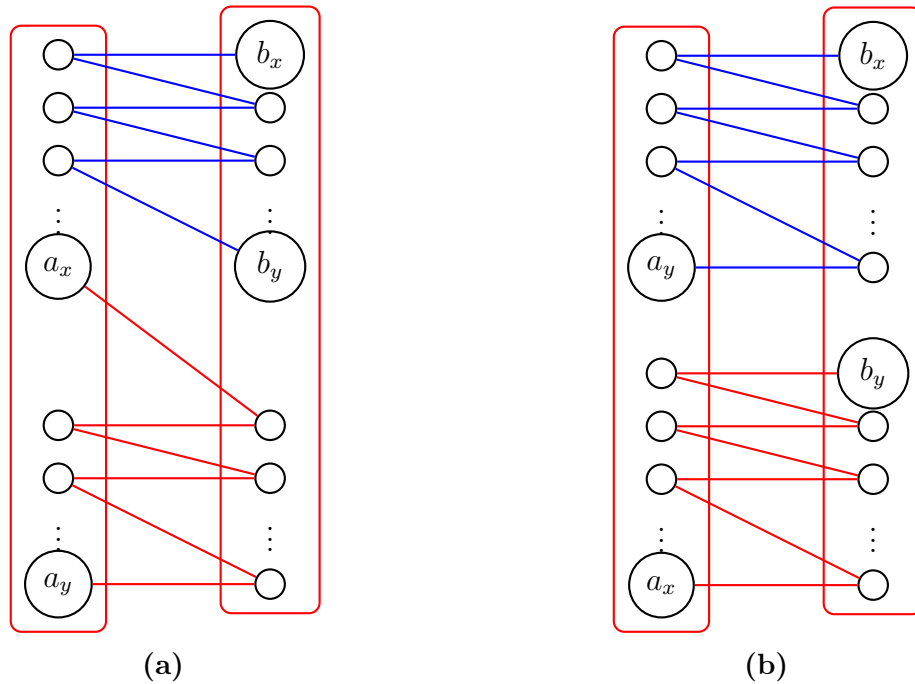


Figura 6.2.2: Construcción de los caminos disjuntos cuando en ambos conjuntos existen al menos dos vecinos de x , y dos vecinos de y . A la derecha la construcción cuando k es par, y a la izquierda cuando k es impar.

es al menos $k + 2$. Por lo tanto en B' hay dos vértices distintos, uno vecino de x y el otro vecino de y . Llamemos a estos vértices b_x, b_y respectivamente.

Si en A' también hay dos vértices distintos a_x, a_y vecinos de x e y respectivamente, entonces construir los caminos de largo $k - 1$ que requerimos no es tarea compleja. La construcción de estos caminos dependerá de la paridad de k , como veremos a continuación.

Si k es impar, entonces basta construir caminos $P_1 := a_x b_1 a_2 b_2 \cdots b_{k-1} a_y$, $P_2 := b_x \tilde{a}_1 \tilde{b}_2 \tilde{a}_2 \cdots \tilde{a}_{k-1} b_y$, con $a_j \neq \tilde{a}_j$ y $b_j \neq \tilde{b}_j$, para todo j (Véase Figura 6.2.2a). Estos caminos se pueden construir ya que el grafo es bipartito completo.

Ahora si k es par, entonces basta construir caminos $P_1 := a_x b_1 a_2 b_2 \cdots a_{k-1} b_y$, $P_2 := b_x \tilde{a}_1 \tilde{b}_2 \tilde{a}_2 \cdots \tilde{b}_{k-1} a_y$, con $a_j \neq \tilde{a}_j$ y $b_j \neq \tilde{b}_j$, para todo j (Véase Figura 6.2.2b). Nuevamente, estos caminos existen pues el grafo es un bipartito completo.

De esta manera, nos resta analizar el caso cuando en A' hay exactamente un vértice que es vecino de x e y . Llamemos a ese vértice a_{xy} . Como todo vértice en A' distinto a a_{xy} no es vecino de x ni de y , además de que $\delta(G) = \delta(\tilde{G} \cup \{x, y\}) \geq k + 2$ y $|B'| = k$, entonces podemos concluir que existe una arista aa' , con a, a' vértices

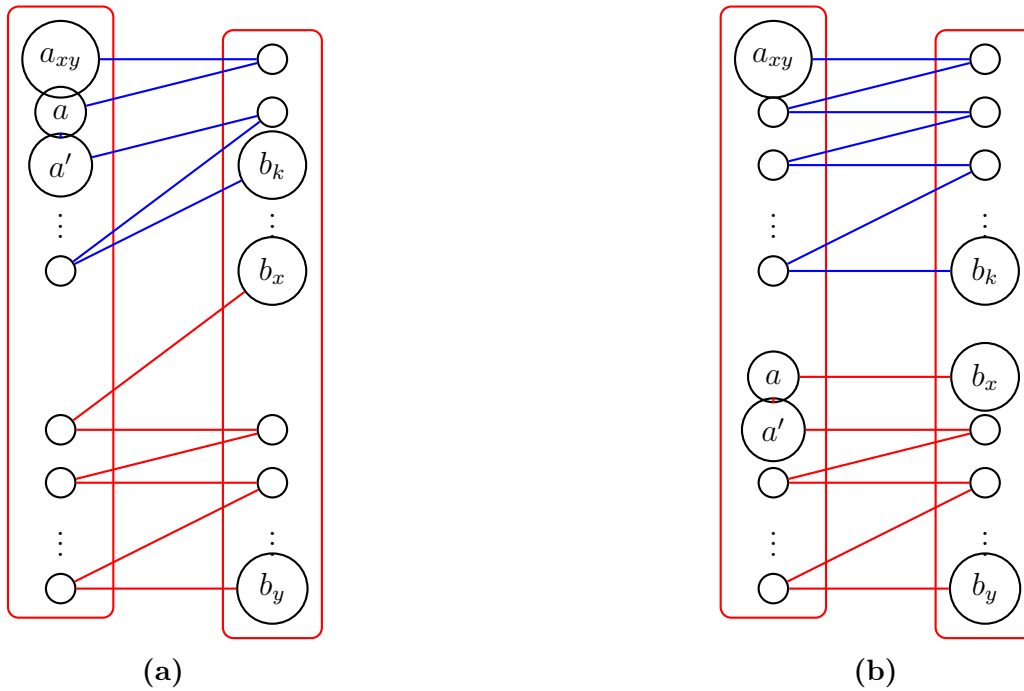


Figura 6.2.3: Construcción de los caminos disjuntos cuando en el conjunto A hay exactamente un vecino de x y de y . A la derecha la construcción cuando k es impar, y a la izquierda la construcción cuando k es par.

de A' . Además, dado que $d(x, A' \cup B') \geq k + 1$ y $d(x, A') = 1$, entonces todo vértice de B' es vecino de x . Por el mismo motivo se tiene que y es vecino de todo vértice de B' .

Nuevamente los caminos a construir dependen de la paridad del valor de k . Si k es impar, entonces construimos los caminos $P_1 := a_{xy}b_1a_2b_2 \cdots aa'b \cdots a_{k-1}b_k$, $P_2 := \tilde{b}_1\tilde{a}_1\tilde{b}_2\tilde{a}_2 \cdots \tilde{a}_{k-1}\tilde{b}_k$ con $a_j \neq \tilde{a}_j$ y $b_j \neq \tilde{b}_j$, para todo j (Véase Figura 6.2.3a). Ahora si k es par, basta construir los caminos $P_1 := a_{xy}b_1a_2b_2 \cdots a_{k-1}b_k$, $P_2 := \tilde{b}_1aa'\tilde{b}_2\tilde{a}_3\tilde{b}_3 \cdots \tilde{a}_{k-1}\tilde{b}_k$, con $a_j \neq \tilde{a}_j$ y $b_j \neq \tilde{b}_j$, para todo j (Véase Figura 6.2.3b).

De esta manera mostramos que si el grafo bipartito inducido por la partición $\{A, B\}$ no es hamiltoniano, de todas formas podemos construir los caminos de largo $k - 1$ vértice disjuntos que buscamos, y como se notó antes, esto es suficiente para concluir que existe un ciclo hamiltoniano C en G tal que $\text{dist}_C(x, y) = k + 1$. \square

6.3. Estructurando el grafo bipartito hamiltoniano

Ahora podemos suponer que existe una partición $\{A, B\}$ de los vértices de \tilde{G} , tal que el grafo $\tilde{G}[A, B]$ es hamiltoniano. El siguiente lema es el que mostraremos a lo largo de las siguientes secciones.

Lema 6.3. *Sea G un grafo con $n = 2k + 2$ vértices y $\delta(G) \geq n/2 + 1$. Sean x, y vértices distintos en G , sea $1/n < \gamma < 1/2^{12}$ tal que $\tilde{G} := G - \{x, y\}$ es γ -cercano a $K_{k,k}$. Sea $\{A, B\}$ una partición minimal en $e(A)$ de los vértices de \tilde{G} tal que el grafo bipartito $\tilde{G}[A, B]$ es hamiltoniano. Entonces existe un ciclo hamiltoniano C en G tal que $\text{dist}_C(x, y) = k + 1$.*

Antes de presentar la demostración, analizaremos el grafo, e identificaremos una estructura que estará siempre presente. Una definición útil y que englobará la estructura del grafo es la siguiente.

Definición 6.3.1. *Una tupla $(G, x, y, A, B, C_{chico}, A_{grande}, B_{grande})$ es una tupla (γ, k) -extremal si*

- G es un grafo con $2k$ vértices y $\delta(G) \geq k + 2$,
- x, y son vértices de G , y el grafo $G - \{x, y\}$ es γ -cercano a $K_{k,k}$,
- $\{A, B\}$ es una partición balanceada de los vértices de $G - \{x, y\}$,
- C_{chico} es ciclo del grafo bipartito $G[A, B]$, que contiene a todo vértice $a \in A$ que cumple $d(a, B) \leq 15k/16$ y a todo vértice $b \in B$ que cumple $d(b, A) \leq 15k/16$. Además C_{chico} tiene dos vértices consecutivos con grado mayor a $15k/16$, y $|V(C_{chico})| \leq 2^{10}\gamma k$.
- $A_{grande} \subseteq A$, $B_{grande} \subseteq B$ son conjuntos que cumplen $(A \setminus A_{grande}) \cup (B \setminus B_{grande}) \subseteq V(C_{chico})$,
- Para todo $a \in A_{grande}$ se cumple $d(a, B) > 15k/16$, para todo $b \in B_{grande}$ se cumple $d(b, A) > 15k/16$.

Con esta definición clara, mostraremos que en el caso que estamos analizando, siempre podremos hablar de una tupla (γ, k) -extremal.

Proposición 6.3.2. *Sea G un grafo con $n = 2k + 2$ vértices y $\delta(G) \geq n/2 + 1$. Sean x, y vértices de G distintos tal que $\tilde{G} := G - \{x, y\}$ es γ -cercano a $K_{k,k}$, y sea $\{A, B\}$ partición de $V(G)$ tal que el grafo $G[A, B]$ es hamiltoniano. Luego*

existe ciclo C_{chico} tal que $(G, x, y, A, B, C_{\text{chico}}, A_{\text{grande}}, B_{\text{grande}})$ es una tupla (γ, k) -extremal.

Demostración. Por hipótesis ya sabemos que $\delta(G) \geq n/2 + 1 = k + 2$, y que el grafo $\tilde{G} = G - \{x, y\}$ es γ -cercano a $K_{k,k}$. Llamemos H al grafo hamiltoniano $\tilde{G}[A, B]$.

Sea $C_{\text{bipartito}} = c_1 c_2 \cdots c_{2k}$ un ciclo hamiltoniano de H . Como H es subgrafo de \tilde{G} , entonces $C_{\text{bipartito}}$ también es ciclo hamiltoniano en \tilde{G} . Como \tilde{G} es γ -cercano a $K_{k,k}$, entonces se cumple que $e(A) \leq 4\gamma k^2$. Como además el grado máximo del grafo es a lo más k , entonces $e(A, B) \geq k^2 - 4\gamma k^2$.

De esta manera, por Lema 3.2, tenemos que existe un ciclo C_{chico} que contiene a todos los vértices $a \in A$ que cumplen $d(a, B) \leq 15k/16$, y a todos los vértices $b \in B$ que cumplen $d(b, A) \leq 15k/16$. Además $|V(C_{\text{chico}})| \leq 2^{10}\gamma k$.

A continuación, definimos los conjuntos

$$\begin{aligned} A_{\text{chico}} &:= V(C_{\text{chico}}) \cap A \\ B_{\text{chico}} &:= V(C_{\text{chico}}) \cap B \\ A_{\text{grande}} &:= A \setminus A_{\text{chico}} \\ B_{\text{grande}} &:= B \setminus B_{\text{chico}}. \end{aligned}$$

La Figura 6.3.1 muestra como se descompone el grafo G . Así, la tupla $(G, x, y, A, B, C_{\text{chico}}, A_{\text{grande}}, B_{\text{grande}})$ cumple todas las condiciones para ser una tupla (γ, k) -extremal. \square

En las dos secciones que siguen, estudiaremos todos los casos posibles que pueden darse cuando estamos bajo los supuestos del Lema 6.3, y en cada uno de ellos la idea es construir dos caminos disjuntos, que cubran todo $V(\tilde{G})$, de largo $k - 1$ cada uno, y que sus extremos sean vecinos de los vértices x, y .

Una herramienta clave al momento de construir los caminos de largo $k - 1$ es el siguiente lema, que nos muestra que podemos particionar los conjuntos de vértices de grado alto, y aún así los grafos inducidos por estas particiones no pierden la propiedad de ser Hamilton-conexo-bipartito.

Lema 6.4. *Sea $(G, x, y, A, B, C_{\text{chico}}, A_{\text{grande}}, B_{\text{grande}})$ una tupla (γ, k) -extremal.*

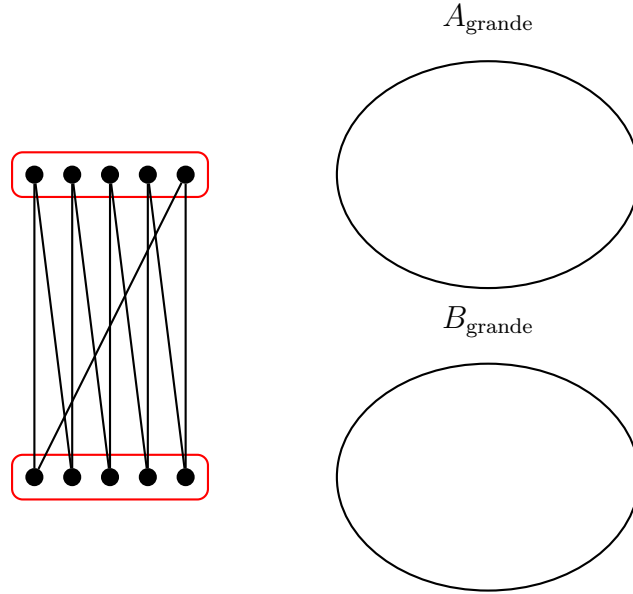


Figura 6.3.1: Descomposición de los vértices de $G - \{x, y\}$. A la izquierda tenemos un ciclo que contiene a todos los vértices con grado bajo, y a la derecha los conjuntos $A_{\text{grande}}, B_{\text{grande}}$.

Sean $A_{\text{grande}}^1, B_{\text{grande}}^1$ subconjuntos de $A_{\text{grande}}, B_{\text{grande}}$ respectivamente, con $|A_{\text{grande}}^1| \geq \lfloor k/8 \rfloor$ y $|B_{\text{grande}}^1| \geq \lfloor k/8 \rfloor$. Luego $G[A_{\text{grande}}^1, B_{\text{grande}}^1]$ es Hamilton-conexo-bipartito.

Demostración. Mostraremos que para todo $a \in A_{\text{grande}}^1, b \in B_{\text{grande}}^1$, existe un camino hamiltoniano de a hacia b en el grafo $G[A_{\text{grande}}^1, B_{\text{grande}}^1]$. Para ello mostraremos que todo vértice $a \in A_{\text{grande}}^1$ cumple $d(a, B_{\text{grande}}^1) > |B_{\text{grande}}^1|/2$ y todo vértice $b \in B_{\text{grande}}^1$ cumple $d(b, A_{\text{grande}}^1) > |A_{\text{grande}}^1|/2$. Esto es suficiente pues luego podemos usar el Teorema 6.1.2.

Sea $a \in A_{\text{grande}}^1$. Notemos que es suficiente mostrar

$$|B_{\text{grande}}^1 \setminus N(a, B_{\text{grande}}^1)| < |B_{\text{grande}}^1|/2.$$

Dado que $B_{\text{grande}}^1 \subseteq B_{\text{grande}}$, que $|B_{\text{grande}}| \leq k$, y que $d(a, B_{\text{grande}}) > 15k/16$, entonces

$$\begin{aligned} |B_{\text{grande}}^1 \setminus N(a, B_{\text{grande}}^1)| &< k - 15k/16 \\ &= k/16 \\ &\leq |B_{\text{grande}}^1|/2 \end{aligned}$$

Análogamente se puede mostrar que para todo $b \in B_{\text{grande}}^1$ se cumple $d(b, A_{\text{grande}}^1) > |A_{\text{grande}}^1|/2$. Luego por Teorema 6.1.2 el grafo $G[A_{\text{grande}}^1, B_{\text{grande}}^1]$ es Hamilton-conexo-bipartito. \square

6.4. Casos fáciles

En esta sección estudiaremos tres casos donde la construcción de los caminos que buscamos no es una tarea compleja. Estos casos se dividen dependiendo de la cantidad de aristas interiores (es decir aristas dentro del grafo original pero fuera del grafo bipartito) que se usarán a la hora de construir los caminos.

Sea $(G, x, y, A, B, C_{\text{chico}}, A_{\text{grande}}, B_{\text{grande}})$ una tupla (γ, k) -extremal. Ahora consideremos un grafo auxiliar M que se define de la siguiente manera:

- $V(M) := A_{\text{grande}} \cup B_{\text{grande}}$.
- $uv \in E(M)$ si y solo si $u \in N(x)$ y $v \in N(y)$.

Diremos que el grafo M es el grafo auxiliar *asociado* a la tupla $(G, x, y, A, B, C_{\text{chico}}, A_{\text{grande}}, B_{\text{grande}})$. Recordemos que el objetivo es construir dos caminos vértice disjuntos de largo $k - 1$ que tienen como extremos a vecinos de x e y . El grafo M nos permitirá analizar de mejor manera todos los casos posibles. Otra herramienta útil para lo que sigue es la función $\pi : (A_{\text{grande}} \cup B_{\text{grande}})^2 \rightarrow \{0, 1\}$, con

$$\pi(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{si } u, v \text{ pertenecen al mismo conjunto} \\ 0, & \text{si } u, v \text{ pertenecen a conjuntos distintos.} \end{cases}$$

Esta función nos ayudará a ordenar el análisis de casos, dependiendo de la posición en que se encuentren los vértices vecinos de x e y . Otra cosa que nos interesa saber es cuando un conjunto de vértices que estamos analizando es balanceado respecto a un par de conjuntos. Diremos que un conjunto de vértices D es *balanceado* respecto a los conjuntos $\{A, B\}$, si la cantidad de vértices de D que están en A es igual a la cantidad de vértices de D que están en B .

El lema a continuación nos da condiciones respecto a la estructura del grafo auxiliar que son suficientes para construir los caminos que queremos sin usar aristas interiores.

Lema 6.5. (*Construcción con 0-aristas interiores*) Sea

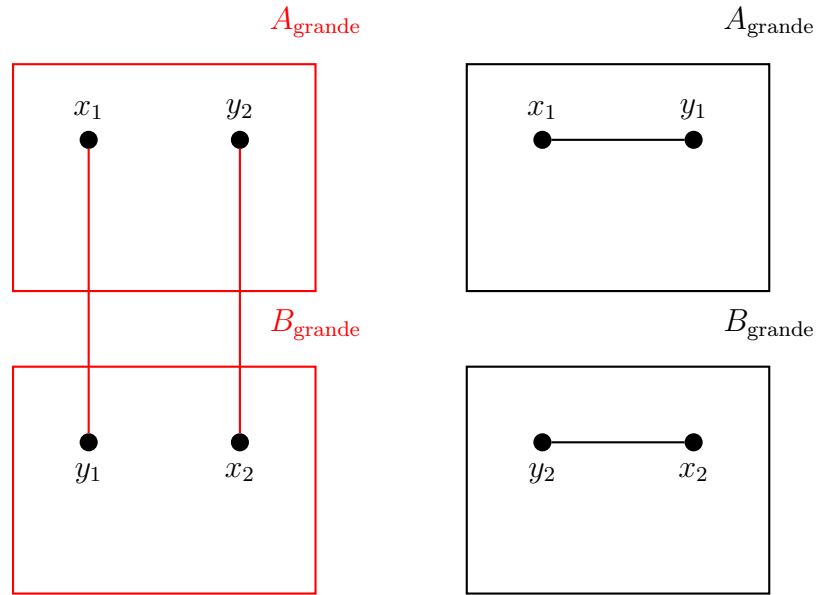


Figura 6.4.1: Ejemplo de la forma del grafo M cuando k es par o impar, y cumple las condiciones del Lema 6.5. En rojo se tiene el grafo M cuando k es par, mientras que en negro se ve el grafo M cuando k es impar.

$(G, x, y, A, B, C_{chico}, A_{grande}, B_{grande})$ una tupla (γ, k) -extremal, y sea M el grafo auxiliar asociado a la tupla. Si existen vértices x_1, x_2, y_1, y_2 tales que:

- x_1y_1 y x_2y_2 son aristas de M ,
- $x_i \in N(x)$, $y_i \in N(y)$, para $i \in \{1, 2\}$,
- $\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ es balanceado (es decir, dos vértices son de A_{grande} y los otros dos son de B_{grande}), y
- $\pi(x_i, y_i) = k \pmod{2}$ para $i \in \{1, 2\}$

entonces en \tilde{G} existen dos caminos vértice disjuntos de largo $k - 1$ que tienen como extremos a vecinos de x e y .

Demostración. La construcción de los caminos depende de la paridad de k . Supongamos primero que k es par. Como $\pi(x_i, y_i) = k \pmod{2}$ y k es par, entonces $\pi(x_i, y_i) = 0$, por lo que podemos suponer sin pérdida de generalidad que x_1, x_2 son vértices de A_{grande} , y los vértices y_1, y_2 pertenecen a B_{grande} .

Ahora particionamos los conjuntos A_{grande}, B_{grande} en conjuntos $A_{grande}^1, A_{grande}^2$ y $B_{grande}^1, B_{grande}^2$ respectivamente, tales que:

- $|A_{grande}^1| = |B_{grande}^1| = k/2 - |V(C_{chico})|/2$

- $|A_{\text{grande}}^2| = |B_{\text{grande}}^2| = k/2$
- $x_1 \in A_{\text{grande}}^1, y_1 \in B_{\text{grande}}^1$
- $x_2 \in A_{\text{grande}}^2, y_2 \in B_{\text{grande}}^2$.

Luego por Lema 6.4 tenemos que $\tilde{G}[A_{\text{grande}}^1, B_{\text{grande}}^1]$ y $\tilde{G}[A_{\text{grande}}^2, B_{\text{grande}}^2]$ son grafos Hamilton-conexos-bipartitos. Por ello, existe un camino P_1' hamiltoniano en $\tilde{G}[A_{\text{grande}}^1, B_{\text{grande}}^1]$ que va de x_1 a y_1 , y existe un camino P_2 hamiltoniano en $\tilde{G}[A_{\text{grande}}^2, B_{\text{grande}}^2]$ que va de x_2 a y_2 (véase Figura 6.4.2).

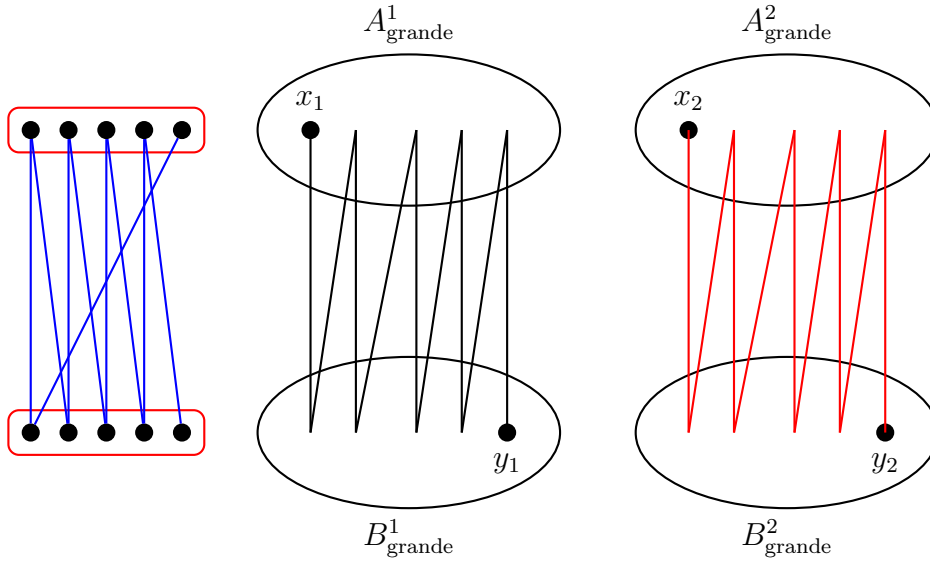


Figura 6.4.2: Construcción de dos caminos hamiltonianos en $\tilde{G}[A_{\text{grande}}^1, B_{\text{grande}}^1]$ y $\tilde{G}[A_{\text{grande}}^2, B_{\text{grande}}^2]$ respectivamente.

Como $|A_{\text{grande}}^2| = |B_{\text{grande}}^2| = k/2$, entonces P_2 es un camino de largo $k - 1$. Ahora nos interesa agregar el ciclo C_{chico} al camino P_1' para así formar un nuevo camino P_1 , vértice disjunto a P_2 y de largo $k - 1$.

Por hipótesis sabemos que el ciclo C_{chico} tiene dos vértices consecutivos c_i, c_{i-1} tales que ambos están fuera de $S_A \cup S_B$. Como C_{chico} es un ciclo en el grafo bipartito, entonces sin pérdida de generalidad podemos suponer que $c_i \in A$ y

$c_{i-1} \in B$. Luego

$$\begin{aligned} d(c_i, B_{\text{grande}}^1) &= d(c_i, B) - d(c_i, B_{\text{grande}}^2) - d(c_i, V(C_{\text{chico}})) \\ &> 15k/16 - d(c_i, B_{\text{grande}}^2) - d(c_i, V(C_{\text{chico}})) \\ &\geq 15k/16 - k/2 - |V(C_{\text{chico}})|/2 \\ &\geq 7k/16 - 2^9\gamma k. \end{aligned}$$

Dado que $\gamma < 1/2^{12}$, entonces

$$7k/16 - 2^9\gamma k > k/4 - 2^8\gamma k = |B_1^{\text{grande}}|/2$$

Por lo tanto, concluimos que

$$d(c_i, B_{\text{grande}}^1) > |B_{\text{grande}}^1|/2$$

Análogamente uno puede mostrar que

$$d(c_{i-1}, A_{\text{grande}}^1) > |A_{\text{grande}}^1|/2$$

Consideremos los conjuntos $N(c_i) \cap V(P_1)$ y

$$N^+(c_{i-1}) := \{b_j \in B_{\text{grande}}^1 : a_{j+1} \in N(c_{i-1}), 1 \leq j < |B_{\text{grande}}^1|\}$$

Dado que $|N(c_{i-1})| > |B_{\text{grande}}^1|/2$, entonces $|N^+(c_{i-1})| \geq |B_{\text{grande}}^1|/2$. Por lo tanto, se cumple que

$$|N(c_i) \cap N^+(c_{i-1})| > 0$$

Así, en el camino P'_1 existen vértices v_i, v_{i-1} consecutivos, que no son los extremos y que $v_i \sim c_i$, $v_{i-1} \sim c_{i-1}$. De esta manera se tiene el camino $P_1 := x_1 P'_1 v_{i-1} c_{i-1} C_{\text{chico}} c_i v_i P'_1 y_1$ es de largo $k - 1$, disjunto a P_2 y tiene como extremos a vecinos de x e y (véase Figura 6.4.3).

Debemos ahora analizar el caso cuando k es impar. Como $\pi(x_i, y_i) = k \pmod{2}$, entonces $\pi(x_i, y_i) = 1$, es decir los vértices x_i, y_i se encuentran en un mismo conjunto.

Luego particionamos los conjuntos A_{grande} y B_{grande} en conjuntos $\{A_{\text{grande}}^1, A_{\text{grande}}^2\}$ y $\{B_{\text{grande}}^1, B_{\text{grande}}^2\}$ respectivamente, tales que:

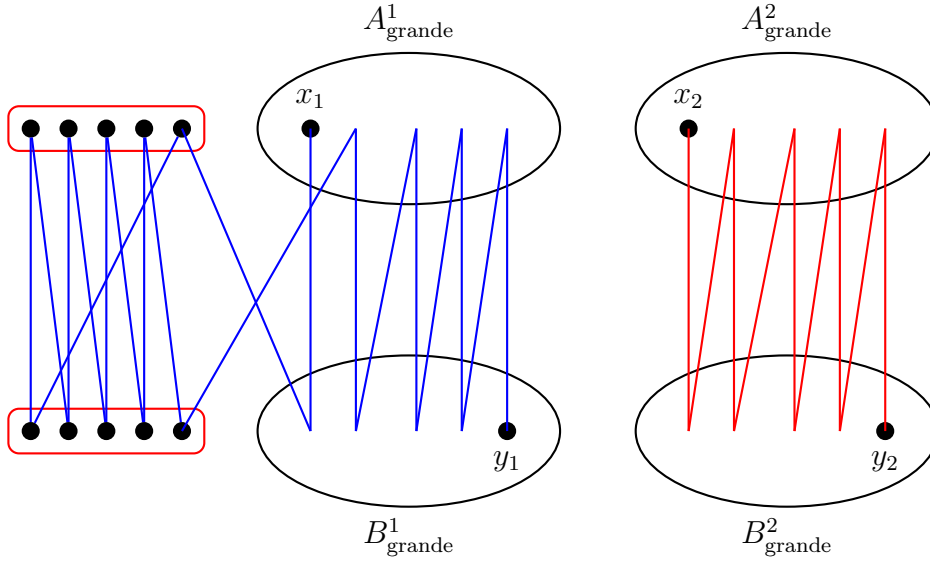


Figura 6.4.3: Construcción de los dos caminos de largo $k - 1$. Al camino hamiltoniano en $\tilde{G}[A^1_{\text{grande}}, B^1_{\text{grande}}]$ se le añade el ciclo C_{chico} .

- x_1, y_1 están en A^1_{grande} ,
- x_2, y_2 están en B^2_{grande} ,
- $|A^1_{\text{grande}}| = \lceil k/2 \rceil - |V(C_{\text{chico}})|/2$, $|B^1_{\text{grande}}| = \lfloor k/2 \rfloor - |V(C_{\text{chico}})|/2$,
- $|A^2_{\text{grande}}| = \lfloor k/2 \rfloor$, $|B^2_{\text{grande}}| = \lceil k/2 \rceil$.

Por Lema 6.4 sabemos que el grafo $\tilde{G}[A^1_{\text{grande}}, B^1_{\text{grande}}]$ es Hamilton-conexo-bipartito, por lo que existe un camino hamiltoniano que va de x_1 a y_1 . Análogamente se puede deducir que en el grafo $\tilde{G}[A^2_{\text{grande}}, B^2_{\text{grande}}]$ existe un camino hamiltoniano P_2 que va de x_2 a y_2 . Notemos que P_2 es un camino de largo $k - 1$ que tiene como extremos a vecinos de x e y .

Al igual que en el caso anterior podemos construir un camino P_1 que use todo vértice de P'_1 y del ciclo C_{chico} , y que tiene como extremos a los vértices x_1 e y_1 .

Así se tienen dos caminos vértice disjuntos de largo $k - 1$ y que tienen como extremos a vecinos de x e y (véase Figura 6.4.5).

□

El siguiente lema considera el caso cuando en el grafo auxiliar M hay al menos una arista interior y hay al menos una arista que va de A^1_{grande} a B^1_{grande} , mientras que en el grafo \tilde{G} hay una arista entre vértices de A^1_{grande} o bien hay una arista

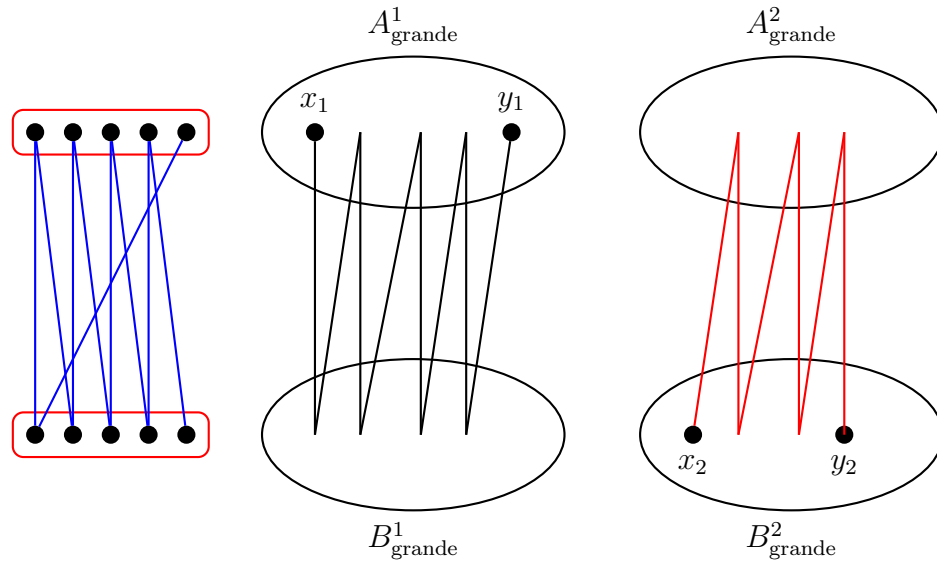


Figura 6.4.4: Construcción de caminos hamiltonianos en $\tilde{G}[A^1_{\text{grande}}, B^1_{\text{grande}}]$ y $\tilde{G}[A^2_{\text{grande}}, B^2_{\text{grande}}]$.

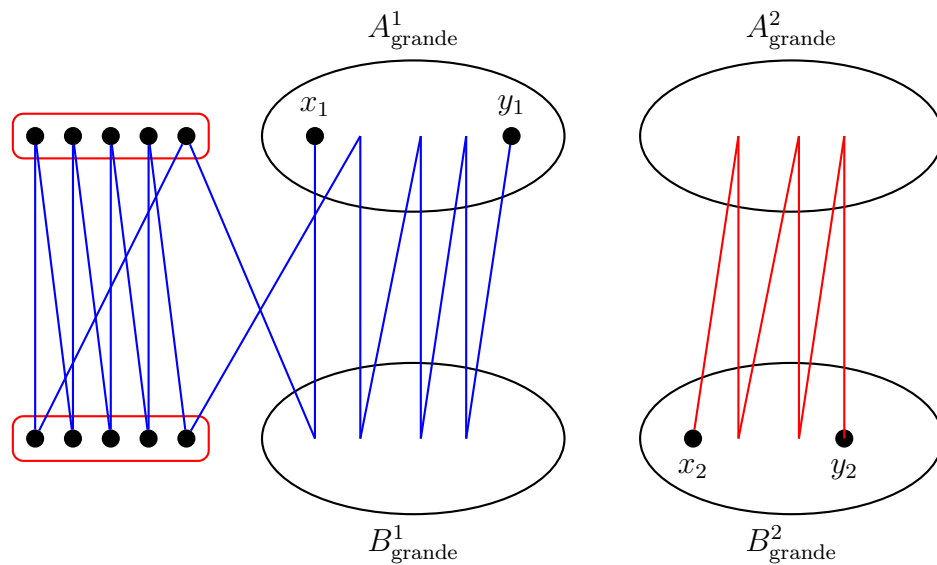


Figura 6.4.5: Construcción de los caminos de largo $k - 1$ uniendo el camino hamiltoniano con el ciclo chico.

entre vértices de B_{grande}^1 .

Lema 6.6. (Construcción con 1-arista interior) Sea $(G, x, y, A, B, C_{\text{chico}}, A_{\text{grande}}, B_{\text{grande}})$ una tupla (γ, k) -extremal. Sea v_1, v_2 vértices de $A_{\text{grande}} \cup B_{\text{grande}}$, y sea $\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ subconjunto de $A_{\text{grande}} \cup B_{\text{grande}}$. Si

- v_1, v_2 son vértices de un mismo conjunto (es decir ambos pertenecen a A_{grande} o ambos pertenecen a B_{grande}),
- $v_1 v_2$ es arista del grafo \tilde{G} ,
- x_1, x_2 son vecinos de x ,
- y_1, y_2 son vecinos de y ,
- $\pi(x_1, y_1) \neq \pi(x_2, y_2)$, y además el conjunto $\{x_1, x_2, y_1, y_2, v_1, v_2\}$ es balanceado en $\{A, B\}$

entonces en \tilde{G} existen dos caminos vértice disjuntos, de largo $k - 1$ y que tienen como extremos a vecinos de x e y .

Demostración. Supongamos que los vértices v_1, v_2 están en el conjunto B , y además $\pi(x_1, y_1) = 1$ (los otros casos son análogos). Nuevamente los caminos a construir varían dependiendo de la paridad de k . Supongamos que k es par. Luego particionamos los conjuntos A_{grande} y B_{grande} en $\{A_{\text{grande}}^1, A_{\text{grande}}^2, A_{\text{grande}}^3\}$ y $\{B_{\text{grande}}^1, B_{\text{grande}}^2, B_{\text{grande}}^3\}$ respectivamente, tales que

- $|A_{\text{grande}}^1| = \lfloor k/4 \rfloor = |B_{\text{grande}}^1|$,
- $x_1 \in A_{\text{grande}}^1, v_1 \in B_{\text{grande}}^1$,
- $|A_{\text{grande}}^2| = \lceil k/4 \rceil - |V(C_{\text{chico}})|/2 = |B_{\text{grande}}^2|$,
- $y_1 \in A_{\text{grande}}^2, v_2 \in B_{\text{grande}}^2$,
- $x_2 \in A_{\text{grande}}^3, y_2 \in B_{\text{grande}}^3$,
- $|A_{\text{grande}}^3| = k/2, |B_{\text{grande}}^3| = k/2$.

Por Lema 6.4 tenemos que cada grafo bipartito $\tilde{G}[A_{\text{grande}}^i, B_{\text{grande}}^i]$ Hamilton-conexo-bipartito, con $i \in \{1, 2, 3\}$. Por lo tanto existe un camino P_1 de largo $k - 1$ que va de x_1 a y_1 , un camino P_2' que va de x_2 a v_1 , y un camino P_2'' que va de v_2 a y_2 . Dado que $v_1 v_2$ es arista, entonces $x_2 P_2' v_1 v_2 P_2'' y_2$ es un camino que conecta

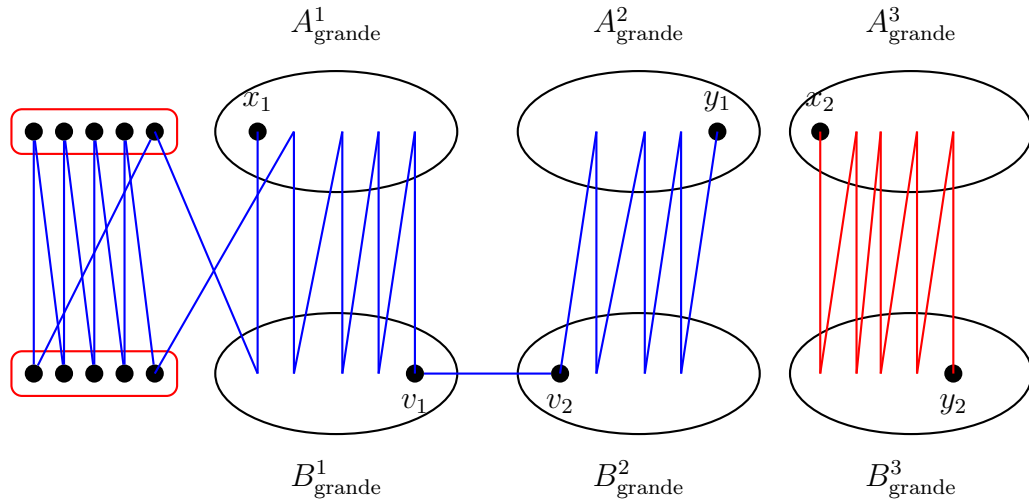


Figura 6.4.6: Dos caminos vértice disjuntos de largo $k - 1$ cada uno, cuando el valor de k es par.

x_2 con y_2 . Análogamente al caso anterior, podemos construir un camino P_2 que contenga todos los vértices del ciclo C_{chico} , de los caminos P'_2, P''_2 y que tenga como extremos a x_2 e y_2 .

Así tenemos dos caminos vértice disjuntos de largo $k - 1$ que tienen como extremos a vecinos de x e y (Véase Figura 6.4.6). Ahora si k impar, podemos construir los dos caminos de manera análoga (Véase Figura 6.4.7), modificando ligeramente las particiones de los conjuntos $A_{\text{grande}}, B_{\text{grande}}$ de la siguiente manera:

- $|A_{\text{grande}}^1| = \lfloor k/4 \rfloor = |B_{\text{grande}}^1|$,
- $x_2 \in A_{\text{grande}}^1, b_1 \in B_{\text{grande}}^1$,
- $|A_{\text{grande}}^2| = \lfloor k/4 \rfloor - |V(C_{\text{chico}})|/2, |B_{\text{grande}}^2| = \lceil k/4 \rceil - |V(C_{\text{chico}})|/2$,
- $y_2 \in B_{\text{grande}}^2, b_2 \in B_{\text{grande}}^2$,
- $x_1 \in A_{\text{grande}}^3, y_1 \in B_{\text{grande}}^3$,
- $|A_{\text{grande}}^3| = \lceil k/2 \rceil, |B_{\text{grande}}^3| = \lfloor k/2 \rfloor$.

□

El último caso que se estudiará en esta sección es cuando en una de las partes del grafo auxiliar M existen dos aristas disjuntas, y en el grafo \tilde{G} existen dos aristas disjuntas, pero ubicadas en una parte distinta a la del grafo auxiliar.

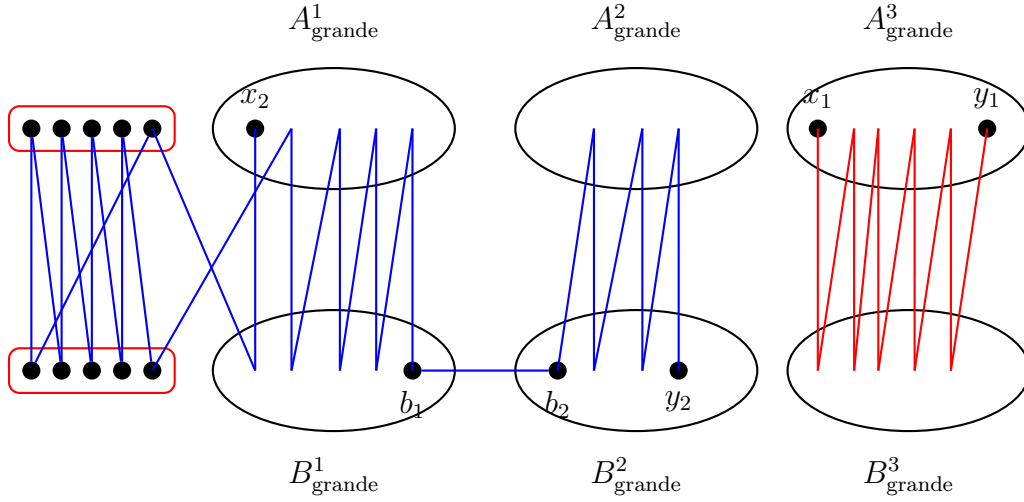


Figura 6.4.7: Dos caminos vértice disjuntos de largo $k - 1$ cada uno, cuando el valor de k es impar.

Lema 6.7. (Construcción con 2-aristas interiores) Sea $(G, x, y, A, B, C_{chico}, A_{grande}, B_{grande})$ una tupla (γ, k) -extremal y sea M el grafo auxiliar asociado a la tupla. Si:

- En el grafo $\tilde{G}[B_{grande}]$ existen aristas v_1v_2, v_3v_4, y
- en el grafo M existen x_1, x_2, y_1, y_2 vértices de A_{grande} tales que x_1y_1, x_2y_2 son aristas en M

entonces en el grafo \tilde{G} existen dos caminos vértice disjuntos de largo $k - 1$ que tienen como extremos a vecinos de x e y . Lo mismo se cumple intercambiando los roles de A_{grande} y B_{grande} .

Demostración. Supongamos que las aristas v_1v_2, v_3v_4 están en $\tilde{G}[B_{grande}]$ (el otro caso es simétrico). Supongamos primero que k es par. Sean $\{A_{grande}^{11}, A_{grande}^{12}, A_{grande}^{21}, A_{grande}^{22}\}$ y $\{B_{grande}^{11}, B_{grande}^{12}, B_{grande}^{21}, B_{grande}^{22}\}$ particiones de los vértices de los conjuntos A_{grande}, B_{grande} respectivamente. Estas particiones cumplen lo siguiente:

- $|A_{grande}^{11}| = |B_{grande}^{11}| = k/4$
- $|A_{grande}^{12}| = |B_{grande}^{12}| = k/4 - |V(C_{chico})|/2$.
- $|A_{grande}^{21}| = |A_{grande}^{22}| = |B_{grande}^{21}| = |B_{grande}^{22}| = k/4$.
- $x_1 \in A_{grande}^{11}, y_1 \in A_{grande}^{12}$.

- $v_1 \in B_{\text{grande}}^{11}, v_2 \in B_{\text{grande}}^{12}$.
- $x_2 \in A_{\text{grande}}^{21}, y_2 \in A_{\text{grande}}^{22}$.
- $v_3 \in B_{\text{grande}}^{21}, v_4 \in B_{\text{grande}}^{22}$.

En la Figura 6.4.8 podemos ver la forma del grafo \tilde{G} .

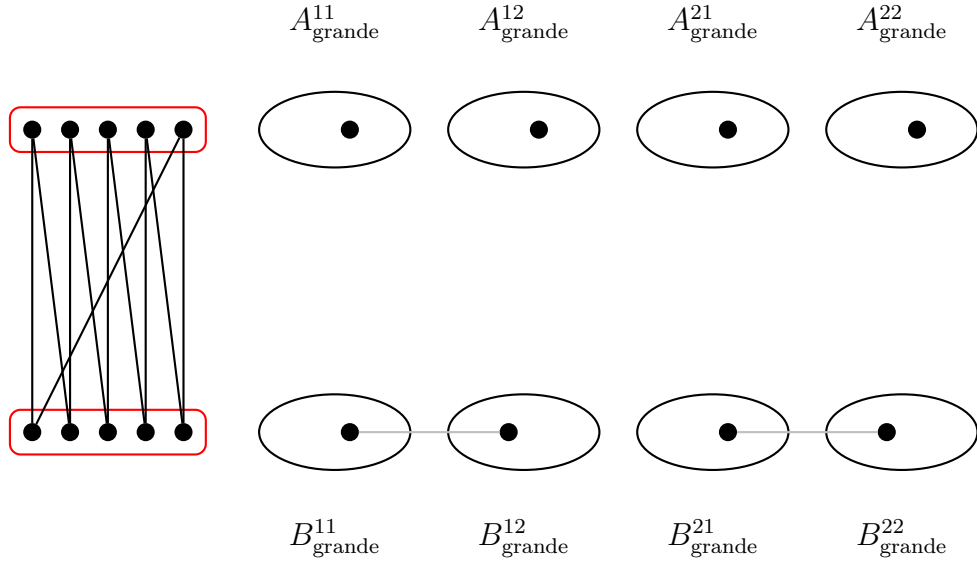


Figura 6.4.8: Estructura del grafo \tilde{G} .

Como todo conjunto de las particiones es de tamaño al menos $k/4 - |V(C_{\text{chico}})|/2$, entonces por Lema 6.4 concluimos que para todo $i, j \in \{1, 2\}$ los grafos $\tilde{G}[A_{\text{grande}}^{ij}, B_{\text{grande}}^{ij}]$ son Hamilton-conexo-bipartitos. Por ello, existen los siguientes caminos:

- Camino P_{11} hamiltoniano en $\tilde{G}[A_{\text{grande}}^{11}, B_{\text{grande}}^{11}]$ que va de x_1 a v_1 .
- Camino P_{12} hamiltoniano en $\tilde{G}[A_{\text{grande}}^{12}, B_{\text{grande}}^{12}]$ que va de v_2 a y_1 .
- Camino P_{21} hamiltoniano en $\tilde{G}[A_{\text{grande}}^{21}, B_{\text{grande}}^{21}]$ que va de x_2 a v_3 .
- Camino P_{22} hamiltoniano en $\tilde{G}[A_{\text{grande}}^{22}, B_{\text{grande}}^{22}]$ que va de v_4 a y_2 .

Así, construimos los caminos $P'_1 = a_x P_{11} v_1 v_2 P_{12} a_y$ y $P_2 = a'_x P_{21} v_3 v_4 P_{22} a'_y$. Notemos que ambos caminos tienen extremos a vecinos de x e y , y además el camino P_2 es de largo $k - 1$.

Como en los casos anteriores, podemos agregar el ciclo C_{chico} al camino de P'_1 , y así obtener otro camino de largo $k - 1$ con extremos vecinos de x e y (Véase

Figura 6.4.9).

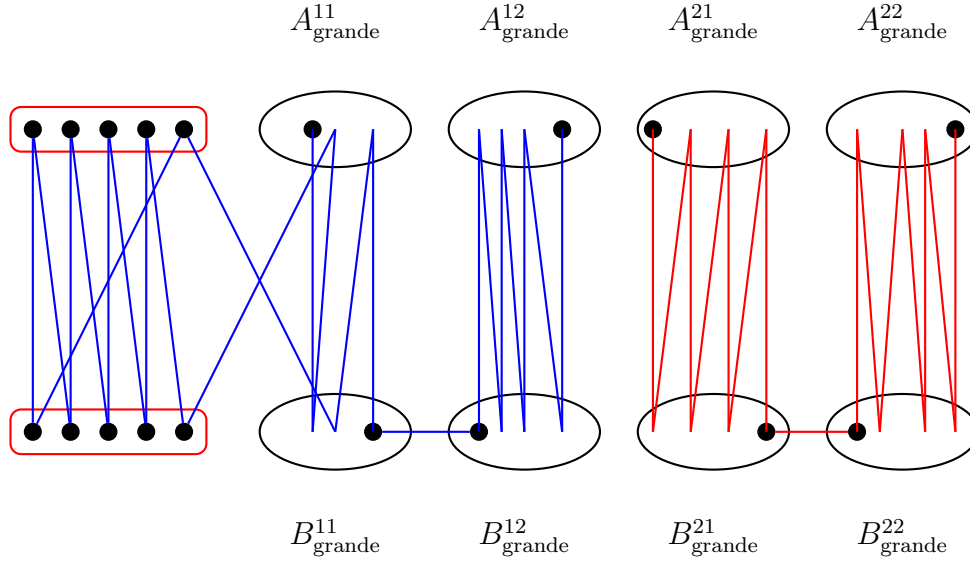


Figura 6.4.9: Construcción de los dos caminos vértice disjuntos en el caso del Lema 6.7 cuando el valor de k es par.

Ahora solo falta considerar el caso cuando k es impar. Sean $\{A_{grande}^{11}, A_{grande}^{12}, A_{grande}^{21}, A_{grande}^{22}\}$ y $\{B_{grande}^{11}, B_{grande}^{12}, B_{grande}^{21}, B_{grande}^{22}\}$ particiones de los vértices de A_{grande} y B_{grande} respectivamente. Estas particiones cumplen lo siguiente:

- $|A_{grande}^{11}| = \lceil k/6 \rceil, |B_{grande}^{11}| = \lfloor k/6 \rfloor,$
- $|A_{grande}^{12}| = \lfloor k/6 \rfloor, |B_{grande}^{12}| = \lceil k/6 \rceil,$
- $|A_{grande}^{21}| = |B_{grande}^{21}| = \lfloor k/6 \rfloor - |V(C_{chico})|/2,$
- $|A_{grande}^{22}| = \lceil k/2 \rceil, |B_{grande}^{22}| = \lfloor k/2 \rfloor,$
- x_1, y_1 son vértices de $A_{grande}^{11},$
- $x_2 \in A_{grande}^{12}, b_1 \in B_{grande}^{12},$
- b_2, b_3 son vértices de $B_{grande}^{21},$
- $b_4 \in B_{grande}^{22}, y_2 \in A_{grande}^{22}.$

Por Lema 6.4 tenemos que cada grafo $\tilde{G}[A_{grande}^{ij}, B_{grande}^{ij}]$ es Hamilton-conexo-bipartito, con $i, j \in \{1, 2\}.$

A partir de esto, de manera similar a cuando k es par podemos construir dos caminos vértice disjuntos de largo $k - 1$ y que tienen como extremos a vecinos de x e y (Véase Figura 6.4.10).

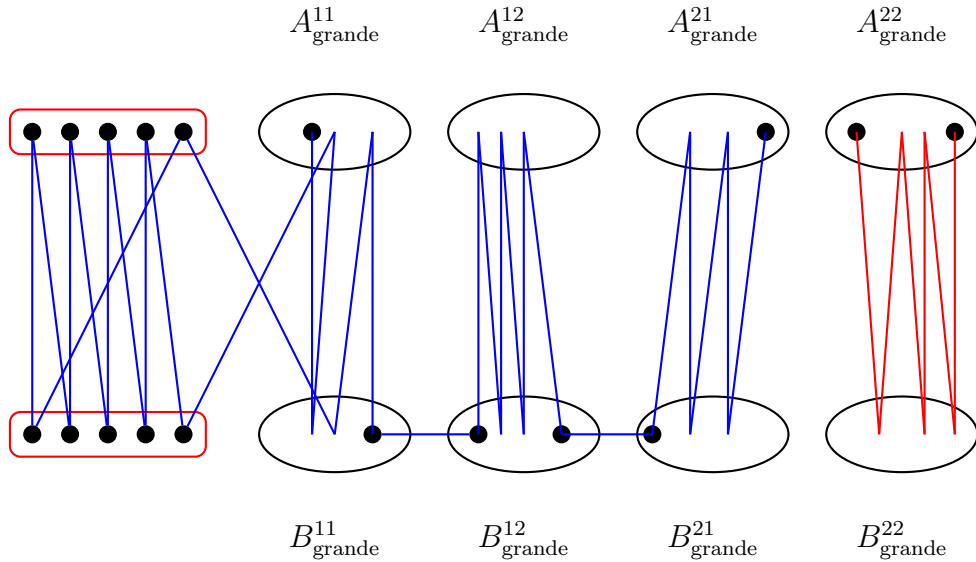


Figura 6.4.10: Construcción de los dos caminos vértice disjuntos en el caso del Lema 6.7 cuando el valor de k es impar.

□

6.5. Casos restantes

En esta sección vamos a suponer que no nos encontramos en ninguno de los casos analizados en la sección anterior, para así obtener información estructural del grafo, la cual nos permitirá construir los caminos de igual forma.

Nuevamente, sea $(G, x, y, A, B, C_{\text{chico}}, A_{\text{grande}}, B_{\text{grande}})$ una tupla (γ, k) -extremal. Recordemos que $d(x, A \cup B) \geq k + 1$. Luego $d(x, A_{\text{grande}} \cup B_{\text{grande}}) \geq k + 1 - |V(C_{\text{chico}})|$. Análogamente se tiene que $d(y, A_{\text{grande}} \cup B_{\text{grande}}) \geq k + 1 - |V(C_{\text{chico}})|$. Como $k + 1 - |V(C_{\text{chico}})| > 4$, entonces en el grafo M siempre podemos tomar cuatro vértices que son vecinos de x o de y .

Notemos que si existe un conjunto $\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ de vértices de M donde x_1, x_2 son vecinos de x e y_1, y_2 son vecinos de y , tal que es balanceado en $\{A, B\}$, y $\pi(x_i, y_i) = k \pmod{2}$ para $i \in \{1, 2\}$ entonces se cumplen las condiciones del Lema 6.5 (0-arista).

Entonces quedan dos casos por analizar. Cuando todo conjunto de cuatro vértices vecinos de x o y es balanceado, pero para algún $i \in \{1, 2\}$ no se cumple $\pi(x_i, y_i) = k$ (mód 2), o bien cuando todo conjunto de cuatro vértices vecinos de x o y no es balanceado en $\{A, B\}$. Supongamos esto último. Sea $\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ uno de estos conjuntos. Consideraremos dos casos: cuando $\pi(x_i, y_i) = k$ (mód 2) para $i \in \{1, 2\}$, y el caso complemento.

Analicemos primero el caso cuando $\pi(x_i, y_i) \neq k$ (mód 2), para algún $i \in \{1, 2\}$. Primero estudiaremos el caso cuando para un valor de i se cumple lo anterior, y para el otro valor no se cumple. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\pi(x_1, y_1) = 0$ y $\pi(x_2, y_2) = 1$. El lema a continuación considera este caso.

Lema 6.8. *Sea $(G, x, y, A, B, C_{chico}, A_{grande}, B_{grande})$ una tupla (γ, k) -extremal. Supongamos que todo conjunto de cuatro vértices vecinos de x o y no es balanceado en $\{A, B\}$. Si existe conjunto $\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ que cumple $\pi(x_1, y_1) = 0$ y $\pi(x_2, y_2) = 1$ (o vice versa), entonces podemos construir dos caminos vértice disjuntos de largo $k - 1$ que tienen como extremos a vecinos de x e y .*

Demostración. Supongamos $\pi(x_2, y_2) = 1$, entonces los vértices x_2, y_2 están en A_{grande} , o bien ambos vértices están en B_{grande} . Analizaremos el primer caso (el otro es análogo). Notemos que si existe una arista con ambos extremos en el conjunto B_{grande} entonces se cumplen las condiciones del Lema 6.6 (Construcción 1-arista interior). Por ello, podemos suponer que tal arista no existe.

Por otro lado notemos que todo vértice $b \in B_{grande}$, distinto de y_1 cumple que no es vecino de x ni de y , pues de lo contrario tendríamos un vértice b' que es vecino de x o y . Luego tendríamos un conjunto de cuatro vértices que son vecinos de x o y que es balanceado, lo que es una contradicción, pues suponemos que tal conjunto no existe.

Definamos los siguientes conjuntos:

$$X_A := N(x) \cap A_{chico}$$

$$X_B := N(x) \cap B_{chico}$$

$$A^{\text{cross}} := \{a \in A_{chico} : d(a, B_{grande} - \{y_1\}) \geq 1\}$$

$$B^{\text{same}} := \{b \in B_{chico} : d(b, B_{grande} - \{y_1\}) \geq 1\}.$$

Notemos que

$$|X_B| + |X_A| + |N(x) \cap A_{\text{grande}}| + |N(x) \cap B_{\text{grande}}| \geq k + 1.$$

Sabemos que $|N(x) \cap B_{\text{grande}}| \leq 1$ y además sabemos que $|N(x) \cap A_{\text{grande}}| \leq k - |A_{\text{chico}}|$. Así, se tiene

$$|X_B| + |X_A| + k - |A_{\text{chico}}| + 1 \geq k + 1,$$

lo que es equivalente a

$$|X_A| \geq |A_{\text{chico}}| - |X_B|. \quad (6.5.1)$$

Observación 6.5.1. Se cumple que $|B^{\text{same}}| \geq |A_{\text{chico}} \setminus A^{\text{cross}}| + 3$

Demostración. Notemos que un vértice en $A_{\text{chico}} \setminus A^{\text{cross}}$ es un vértice que tiene como único vecino posible en B_{grande} al vértice y_1 .

Luego, para todo $b' \in B_{\text{grande}}$ distinto a y_1 se cumple:

- $d(b', A) \leq k - |A_{\text{chico}} \setminus A^{\text{cross}}|$
- $b' \approx x, b' \approx y$, por lo que $d(b', A \cup B) \geq k + 2$.

Uniendo estas dos desigualdades, obtenemos que

$$d(b', B) \geq |A_{\text{chico}} \setminus A^{\text{cross}}| + 2$$

Llamemos J al conjunto de vértices de B_{grande} que tiene al menos $|A_{\text{chico}} \setminus A^{\text{cross}}|$ vecinos en B_{chico} . Sabemos que en B_{grande} no hay aristas, salvo las incidentes al vértice y_1 . Luego se cumple que todo vértice $b' \in B_{\text{grande}}$, distinto de y_1 cumple

$$\begin{aligned} d(b', B_{\text{chico}}) &= d(b', B) - d(b', B_{\text{grande}}) \\ &\geq |A_{\text{chico}} \setminus A^{\text{cross}}| + 2 - d(b', B_{\text{grande}}) \\ &\geq |A_{\text{chico}} \setminus A^{\text{cross}}| + 2 - 1 \\ &= |A_{\text{chico}} \setminus A^{\text{cross}}| + 1, \end{aligned}$$

por lo que podemos deducir que

$$\begin{aligned} |J| &\geq |B_{\text{grande}}| - 1 \\ &> |A_{\text{chico}} \setminus A^{\text{cross}}| + 3. \end{aligned}$$

Así, podemos decir que en B_{chico} , hay al menos $|A_{\text{chico}} \setminus A^{\text{cross}}|$ vértices con al menos un vecino en $B_{\text{grande}} - \{y_1\}$, es decir $|B^{\text{same}}| \geq |A_{\text{chico}} \setminus A^{\text{cross}}|$. \square

Observación 6.5.2. Se tiene que $|X_A| \geq |A_{\text{chico}}| - |B^{\text{same}}|$ o $|X_B| \geq |B_{\text{chico}}| - |A^{\text{cross}}|$.

Demostración. Supongamos que lo anterior no es cierto. Esto es

$$|X_A| \leq |A_{\text{chico}}| - |B^{\text{same}}| - 1 \quad (6.5.2)$$

y

$$|X_B| \leq |B_{\text{chico}}| - |A^{\text{cross}}| - 1. \quad (6.5.3)$$

Combinando la Ecuación 6.5.1 con la Ecuación 6.5.3 se tiene

$$|X_A| \geq |A_{\text{chico}}| - |B_{\text{chico}}| + |A^{\text{cross}}| + 1.$$

Como $|A_{\text{chico}}| = |B_{\text{chico}}|$ entonces

$$|X_A| \geq |A^{\text{cross}}| + 1.$$

Luego por la Ecuación 6.5.2 se cumple la siguiente desigualdad

$$|A_{\text{chico}}| - |B^{\text{same}}| - 1 \geq |A^{\text{cross}}| + 1$$

de donde se deduce que

$$|A_{\text{chico}} \setminus A^{\text{cross}}| \geq |B^{\text{same}}| + 2$$

lo que es una contradicción a la Observación 6.5.1. \square

Por la observación anterior, tenemos que $|X_A| \geq |A_{\text{chico}}| - |B^{\text{same}}|$ o $|X_B| \geq$

$|B_{\text{chico}}| - |A^{\text{cross}}|$. Supongamos lo primero. La idea ahora es construir dos caminos de largo $k - 1$, con extremos a vecinos de x e y .

En efecto, primero definimos los conjuntos

$$X_A^+ := \{v_{i+1} \in V(C_{\text{chico}}) \cap B_{\text{chico}} : v_i \in X_A, 1 \leq i < |B_{\text{chico}}|\}$$

$$X_A^- := \{v_{i-1} \in V(C_{\text{chico}}) \cap B_{\text{chico}} : v_i \in X_A, 1 < i \leq |B_{\text{chico}}|\}.$$

Notemos que $|X_A^+ \cup X_A^-| + |B^{\text{same}}| \geq |A_{\text{chico}}| + 1$. En efecto, primero supongamos que $X_A^+ \cup X_A^- = A_{\text{chico}}$. Luego como $B^{\text{same}} \neq \emptyset$ entonces claramente $|X_A^+ \cup X_A^-| + |B^{\text{same}}| \geq |A_{\text{chico}}| + 1$.

Ahora si $X_A^+ \cup X_A^- \subseteq A_{\text{chico}}$, entonces se tiene que $|X_A^+ \cup X_A^-| \geq |X_A| + 1$. Luego

$$\begin{aligned} |X_A^+ \cup X_A^-| + |B^{\text{same}}| &\geq |X_A| + 1 + |B^{\text{same}}| \\ &\geq |A_{\text{chico}}| - |B^{\text{same}}| + 1 + |B^{\text{same}}| \\ &= |A_{\text{chico}}| + 1, \end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad sale del supuesto que estamos haciendo. Lo anterior implica que

$$|(X_A^+ \cup X_A^-) \cap B^{\text{same}}| \geq 1,$$

por lo que $|X_A^+ \cap B^{\text{same}}| \geq 1$, o bien $|X_A^- \cap B^{\text{same}}| \geq 1$. Supongamos lo primero (el otro caso es análogo). Sea $\tilde{b} \in X_A^+ \cap B^{\text{same}}$. Como $\tilde{b} \in X_A^+$, entonces en el ciclo C_{chico} hay un vértice \tilde{a} que es vecino de \tilde{b} , y además es vecino de x . Por otro lado, como \tilde{b} está en B^{same} , entonces existe un vértice $b \in B_{\text{grande}}$, distinto a y_1 tal que \tilde{b} es vecino de b .

Ahora la construcción de los caminos dependerá de la paridad de k .

k es par: Particionamos A_{grande} y B_{grande} en conjuntos $\{A_{\text{grande}}^1, A_{\text{grande}}^2\}$ y $\{B_{\text{grande}}^1, B_{\text{grande}}^2\}$ respectivamente, tales que:

- $|A_{\text{grande}}^2| = |B_{\text{grande}}^2| = k/2$
- $x_1 \in A_{\text{grande}}^2, y_2 \in B_{\text{grande}}^2$
- $b \in A_{\text{grande}}^1, y_1 \in A_{\text{grande}}^1$.

Luego por Lema 6.4 los grafos $\tilde{G}[A_{\text{grande}}^1, B_{\text{grande}}^1]$ y $\tilde{G}[A_{\text{grande}}^2, B_{\text{grande}}^2]$ son

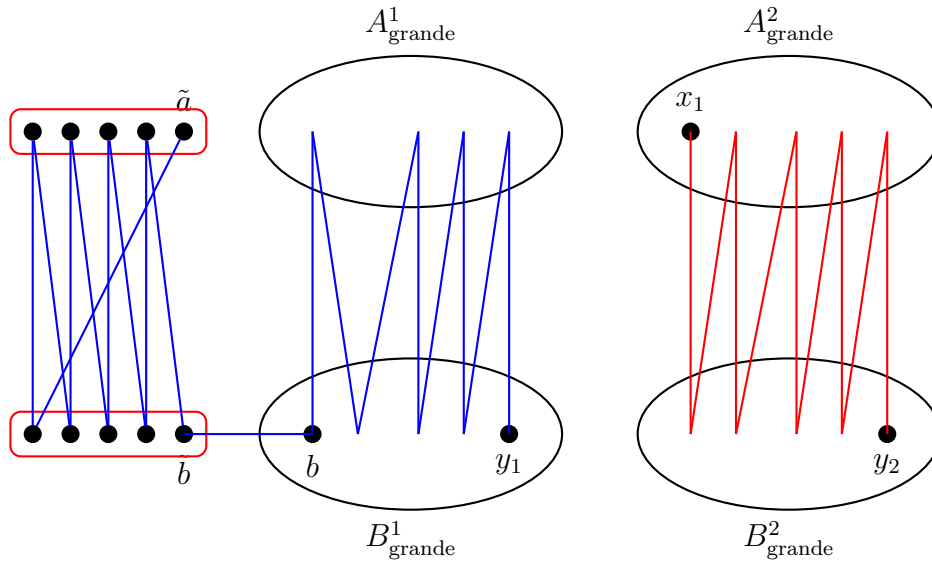


Figura 6.5.1: Construcción de los dos caminos vértice disjuntos para el Lema 6.8, cuando k es par.

Hamilton-conexo-bipartitos. Por lo tanto existe un camino hamiltoniano P_2 en $\tilde{G}[A^2_{\text{grande}}, B^2_{\text{grande}}]$ de x_1 a y_1 , y existe un camino hamiltoniano P'_1 en $\tilde{G}[A^2_{\text{grande}}, B^2_{\text{grande}}]$ que va de b a y_2 . Como $|A^2_{\text{grande}}| = |B^2_{\text{grande}}| = k/2$, entonces el camino P_2 es de largo $k - 1$.

Luego el camino $P_1 := \tilde{a}C_{\text{chico}}\tilde{b}bP'_1y_2$ es otro camino de largo $k - 1$, vértice disjunto de P_2 y tiene como vértices extremos a vecinos de x e y (véase Figura 6.5.1).

k es impar: Particionamos A_{grande} y B_{grande} en conjuntos $\{A^1_{\text{grande}}, A^2_{\text{grande}}\}$ y $\{B^1_{\text{grande}}, B^2_{\text{grande}}\}$ respectivamente, tales que:

- $|A^2_{\text{grande}}| = \lceil k/2 \rceil, |B^2_{\text{grande}}| = \lfloor k/2 \rfloor$
- x_2, y_2 son vértices de A^2_{grande}
- b, y_1 son vértices de B^1_{grande}

Luego por Lema 6.4 los grafos $\tilde{G}[A^1_{\text{grande}}, B^1_{\text{grande}}]$ y $\tilde{G}[A^2_{\text{grande}}, B^2_{\text{grande}}]$ son Hamilton-conexo-bipartitos. Por lo tanto existe un camino hamiltoniano P'_1 en $\tilde{G}[A^1_{\text{grande}}, B^1_{\text{grande}}]$ de b_2 a y_1 , y existe un camino hamiltoniano P_2 en $\tilde{G}[A^2_{\text{grande}}, B^2_{\text{grande}}]$ que va de x_2 a y_2 . Como $|A^2_{\text{grande}}| = |B^2_{\text{grande}}| = k/2$, entonces el camino P_2 es de largo $k - 1$.

Luego el camino $P_1 := \tilde{a}C_{\text{chico}}\tilde{b}bP'_1y_1$ es otro camino de largo $k - 1$, vértice disjunto de P_2 y tiene como vértices extremos a vecinos de x e y .

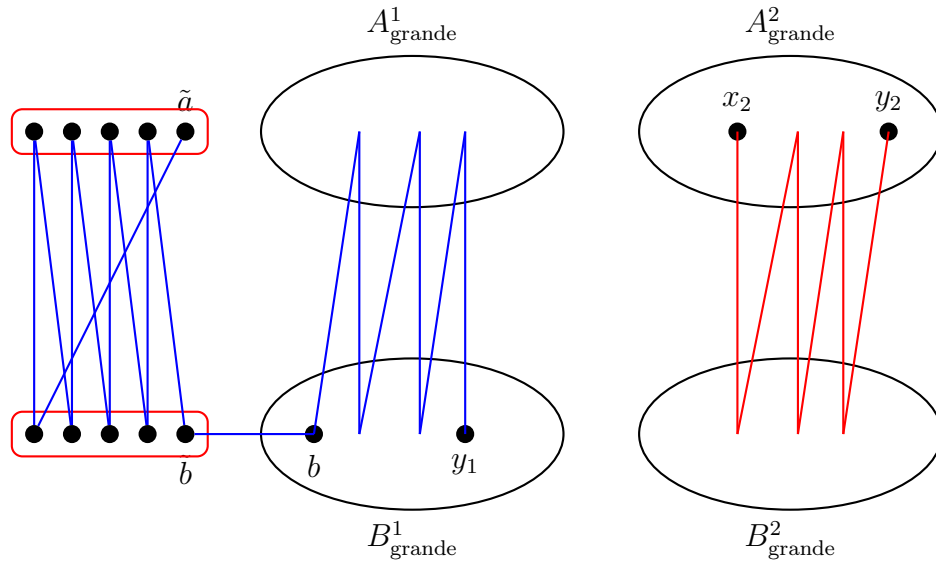


Figura 6.5.2: Construcción de los dos caminos vértice disjuntos para el Lema 6.8, cuando k es impar.

De esta forma, construimos dos caminos de largo $k - 1$ que son vértice disjuntos y sus extremos son vecinos de x e y (véase Figura 6.5.2).

□

Ahora consideremos el caso cuando el conjunto $\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ no es balanceado en $\{A, B\}$, y $\pi(x_1, y_1) = \pi(x_2, y_2)$ para todo $i \in \{1, 2\}$.

Lema 6.9. *Sea $(G, x, y, A, B, C_{chico}, A_{grande}, B_{grande})$ una tupla (γ, k) -extremal. Si todo conjunto $\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ no es balanceado en $\{A, B\}$, y para todo $i \in \{1, 2\}$ $\pi(x_1, y_1) = \pi(x_2, y_2)$, entonces podemos construir dos caminos vértice disjuntos de largo $k - 1$ que tienen como extremos a vecinos de x e y .*

Demostración. Notemos que si $\pi(x_1, y_1) = \pi(x_2, y_2) = 0$, entonces el conjunto $\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ sería balanceado, lo que es una contradicción. Por lo tanto, basta analizar el caso cuando $\pi(x_1, y_1) = \pi(x_2, y_2) = 1$. Como el conjunto no es balanceado, entonces podemos concluir que el conjunto $\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ es subconjunto de A , o bien es subconjunto de B . Supongamos lo primero (el otro caso es análogo).

Notemos que para todo vértice b de B_{grande} se cumple que b no es vecino de x ni de y , pues de lo contrario el conjunto $\{x_1, x_2, b, y_2\}$ cumple las condiciones del Lema 6.8.

Notemos que si existen dos aristas disjuntas, que tienen como extremos a vértices de B_{grande} , entonces se estarían cumpliendo las condiciones del Lema 6.7 (Construcción 2-aristas interiores). Por tanto, supondremos que no existen dos aristas disjuntas. Luego en B_{grande} hay a lo más un vértice con grado mayor a 2 hacia B_{grande} (de lo contrario tendríamos dos aristas disjuntas). Por la misma razón, en B_{grande} hay a lo más tres vértices con grado 2 hacia B_{grande} .

Por lo tanto, hay al menos $|B_{\text{grande}}| - 4$ vértices en B_{grande} que cumplen:

- No son vecinos de x ni de y ,
- tienen a lo más un vecino en B_{grande} .

De forma similar al caso estudiado antes, se definen los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} X_A &:= N(x) \cap A_{\text{chico}} \\ X_B &:= N(x) \cap B_{\text{chico}} \\ A^{\text{cross}} &:= \{a \in \tilde{A} : d(a, B_{\text{grande}}) \geq 1\} \\ B^{\text{same}} &:= \{b \in \tilde{B} : d(b, B_{\text{grande}}) \geq 1\}. \end{aligned}$$

Notemos que

$$|X_B| + |X_A| + |N(x) \cap A_{\text{grande}}| + |N(x) \cap B_{\text{grande}}| \geq k + 1.$$

Sabemos que $|N(x) \cap B_{\text{grande}}| = 0$ y además sabemos que $|N(x) \cap A_{\text{grande}}| \leq k - |A_{\text{chico}}|$. Así, se tiene

$$|X_B| + |X_A| + k - |A_{\text{chico}}| \geq k + 1,$$

lo que es equivalente a

$$|X_A| \geq |A_{\text{chico}}| - |X_B| + 1. \tag{6.5.4}$$

Observación 6.5.3. Se tiene que $|B^{\text{same}}| \geq |A_{\text{chico}} \setminus A^{\text{cross}}| + 4$.

Demostración. Notemos que un vértice en $A_{\text{chico}} \setminus A^{\text{cross}}$ es un vértice que puede tener como únicos vecinos en B_{grande} a los vértices b_1, b_2 .

Luego, para todo $b' \in B_{\text{grande}}$ distinto a b_1 y a b_2 se cumple:

- $d(b', A) \leq k - |A_{\text{chico}} \setminus A^{\text{cross}}|$
- $b' \approx x, b' \approx y$, por lo que $d(b', A \cup B) \geq k + 2$.

Uniendo estas dos desigualdades, obtenemos que

$$d(b', B) \geq |A_{\text{chico}} \setminus A^{\text{cross}}| + 2.$$

Llamemos J al conjunto de vértices de B_{grande} que tiene al menos $|A_{\text{chico}} \setminus A^{\text{cross}}| + 1$ vecinos en B_{chico} . Sabemos que en B_{grande} hay al menos $|B_{\text{grande}}| - 4$ vértices que tienen a lo más un vecino en este conjunto. Luego, hay al menos $|B_{\text{grande}}| - 4$ vértices b' que cumplen

$$\begin{aligned} d(b', B_{\text{chico}}) &= d(b', B) - d(b', B_{\text{grande}}) \\ &\geq |A_{\text{chico}} \setminus A^{\text{cross}}| + 2 - d(b', B_{\text{grande}}) \\ &\geq |A_{\text{chico}} \setminus A^{\text{cross}}| + 2 - 1 \\ &= |A_{\text{chico}} \setminus A^{\text{cross}}| + 1. \end{aligned}$$

por lo que podemos deducir que

$$\begin{aligned} |J| &\geq |B_{\text{grande}}| - 4 \\ &\geq |A_{\text{chico}} \setminus A^{\text{cross}}| + 4. \end{aligned}$$

Así, podemos decir que en B_{chico} , hay al menos $|A_{\text{chico}} \setminus A^{\text{cross}}| + 3$ vértices con al menos un vecino en $B_{\text{grande}} - \{b_1, b_2\}$, es decir $|B^{\text{same}}| \geq |A_{\text{chico}} \setminus A^{\text{cross}}| + 4$. \square

Observación 6.5.4. Se tiene que $|X_A| \geq |A_{\text{chico}}| - |B^{\text{same}}| + 3$ o $|X_B| \geq |B_{\text{chico}}| - |A^{\text{cross}}| + 3$.

Demostración. Supongamos que lo anterior no es cierto. Esto es

$$|X_A| \leq |A_{\text{chico}}| - |B^{\text{same}}| + 2 \tag{6.5.5}$$

y

$$|X_B| \leq |B_{\text{chico}}| - |A^{\text{cross}}| + 2. \tag{6.5.6}$$

Combinando la Ecuación 6.5.4 con la Ecuación 6.5.6 se tiene

$$|X_A| \geq |A_{\text{chico}}| - |B_{\text{chico}}| + |A^{\text{cross}}| - 1.$$

Como $|A_{\text{chico}}| = |B_{\text{chico}}|$ entonces

$$|X_A| \geq |A^{\text{cross}}| - 1.$$

Luego por la Ecuación 6.5.5 se cumple la siguiente desigualdad

$$|A_{\text{chico}}| - |B^{\text{same}}| + 2 \geq |A^{\text{cross}}| - 1$$

que es equivalente a

$$|A_{\text{chico}} \setminus A^{\text{cross}}| + 3 \geq |B^{\text{same}}|$$

lo que es una contradicción a la Observación 6.5.3. \square

Por la observación anterior, tenemos que $|X_A| \geq |A_{\text{chico}}| - |B^{\text{same}}| + 3$ o $|X_B| \geq |B_{\text{chico}}| - |A^{\text{cross}}| + 3$. Supongamos lo primero. La idea ahora es construir dos caminos de largo $k - 1$, con extremos a vecinos de x e y .

En efecto, primero definimos los conjuntos:

$$X_A^+ := \{v_{i+1} \in V(C_{\text{chico}}) \cap B_{\text{chico}} : v_i \in X_A, 1 \leq i < |B_{\text{chico}}|\}.$$

Notemos que $|X_A^+| + |B^{\text{same}}| \geq |A_{\text{chico}}| + 2$. En efecto, primero supongamos que $X_A^+ = B_{\text{chico}}$. Luego como $|B^{\text{same}}| \geq 4$ entonces claramente $|X_A^+| + |B^{\text{same}}| \geq |B_{\text{chico}}| + 4$.

Ahora si $X_A^+ \subsetneq A_{\text{chico}}$ se cumple que $|X_A^+| \geq |X_A| - 1$. Luego

$$\begin{aligned} |X_A^+| + |B^{\text{same}}| &\geq |X_A| + 1 + |B^{\text{same}}| \\ &\geq |A_{\text{chico}}| - |B^{\text{same}}| + 3 - 1 + |B^{\text{same}}| \\ &= |A_{\text{chico}}| + 2 \end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad sale del supuesto que estamos haciendo. Lo anterior

implica que

$$|X_A^+ \cap B^{\text{same}}| \geq 2$$

Sea $b_1 \in X_A^+ \cap B^{\text{same}}$. Como b es vértice de X_A^+ , entonces en el ciclo C_{chico} hay un vértice \tilde{a}_1 que es vecino de \tilde{b}_1 . Además ambos vértices son vecinos de x . Por otro lado, como b_1 está en B^{same} , entonces existe un vértice $b \in B^{\text{grande}}$ tal que b_1 es vecino de b . Ahora redefinimos los conjuntos B^{same} y A^{cross} como

$$\begin{aligned} A^{\text{cross}} &:= \{a \in \tilde{A} : d(a, B_{\text{grande}} - \{b\}) \geq 1\} \\ B^{\text{same}} &:= \{b \in \tilde{B} : d(b, B_{\text{grande}} - \{b\}) \geq 1\}. \end{aligned}$$

Notemos que todo el análisis previo sigue siendo válido si ahora nos restringimos a estos conjuntos. Esto pues la única desigualdad que varía es la del conjunto J . En este caso tendremos que $|J| \geq |B^{\text{grande}}| - 5$, lo que sigue siendo más grande que $|A_{\text{chico}} \setminus A^{\text{cross}}| + 4$, pues B^{grande} es mucho más grande que $|A_{\text{chico}} \setminus A^{\text{cross}}|$.

Por lo tanto, existe un vértice $b_2 \in X_A^+ \cap B^{\text{same}}$ distinto de b_1 , tal que tiene un vecino $a_2 \in V(C_{\text{chico}})$ distinto a $\tilde{b} \in B^{\text{grande}}$, que es distinto a b .

Notemos que los caminos $a_1 C_{\text{chico}} b_2$, $a_2 C_{\text{chico}} b_1$ cubren todo el ciclo C_{chico} . Digamos que la distancia de a_1 a b_2 en el ciclo C_{chico} es l_1 , y la distancia de a_2 a b_1 en el ciclo C_{chico} es l_2 .

Luego la construcción de los caminos dependerá de la paridad de k . Si k es par, entonces particionamos A_{grande} y B_{grande} en conjuntos $\{A_{\text{grande}}^1, A_{\text{grande}}^2\}$, y $\{B_{\text{grande}}^1, B_{\text{grande}}^2\}$ respectivamente, tales que

- $y_1 \in A_{\text{grande}}^1, b \in B_{\text{grande}}^1$,
- $|A_{\text{grande}}^1| = |B_{\text{grande}}^1| = k/2 - \lfloor (l_2 + 1)/2 \rfloor$,
- $\tilde{b} \in B_{\text{grande}}^2, y_2 \in A_{\text{grande}}^2$,
- $|A_{\text{grande}}^2| = |B_{\text{grande}}^2| = k/2 - \lfloor (l_1 + 1)/2 \rfloor$,

Luego por Afirmación 6.4 los grafos $\tilde{G}[A_{\text{grande}}^1, B_{\text{grande}}^1]$, $\tilde{G}[A_{\text{grande}}^2, B_{\text{grande}}^2]$ son Hamilton-conexo-bipartitos. Por lo tanto existe un camino hamiltoniano P'_1 en $\tilde{G}[A_{\text{grande}}^1, B_{\text{grande}}^1]$ de b a y_1 , y existe un camino hamiltoniano P'_2 en $\tilde{G}[A_{\text{grande}}^2, B_{\text{grande}}^2]$ que va de \tilde{b} a y_2 . Dado el tamaño de los conjuntos, tenemos que

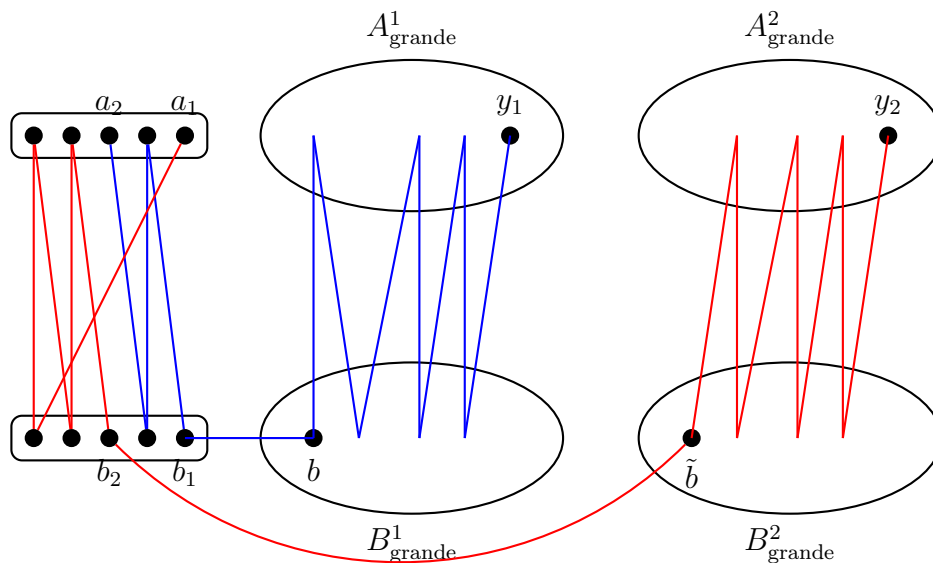


Figura 6.5.3: Construcción de los dos caminos vértice disjuntos para el Lema 6.8, cuando k es par.

el camino

$$P_1 := a_2 C_{\text{chico}} b_1 b P'_1 y_1$$

es de largo $k - 1$ (véase Figura 6.5.3).

Por otro lado, el camino $P_2 := a_1 C_{\text{chico}} b_2 \tilde{b} P'_2 y_2$ es otro camino de largo $k - 1$, vértice disjunto de P_1 y tiene como vértices extremos a vecinos de x e y .

Supongamos ahora que k es impar. Luego particionamos los conjuntos A_{grande} y B_{grande} en conjuntos $\{A^1_{\text{grande}}, A^2_{\text{grande}}\}$, y $\{B^1_{\text{grande}}, B^2_{\text{grande}}\}$ respectivamente, tales que

- $x_2, y_2 \in A^2_{\text{grande}}$,
- $|A^2_{\text{grande}}| = |B^2_{\text{grande}}| = \lfloor k/2 \rfloor$,
- $b, \tilde{b} \in B^1_{\text{grande}}$,
- $|A^1_{\text{grande}}| = |B^1_{\text{grande}}| = \lfloor k/2 \rfloor - |V(C_{\text{chico}})|/2$.

Luego por Afirmación 6.4 los grafos $\tilde{G}[A^1_{\text{grande}}, B^1_{\text{grande}}]$, $\tilde{G}[A^2_{\text{grande}}, B^2_{\text{grande}}]$ son Hamilton-conexo-bipartitos. Por lo tanto existe un camino hamiltoniano P'_1 en $\tilde{G}[A^1_{\text{grande}}, B^1_{\text{grande}}]$ de b a \tilde{b} , y existe un camino hamiltoniano P'_2 en $\tilde{G}[A^2_{\text{grande}}, B^2_{\text{grande}}]$ que va de x_2 a y_2 . Dado el tamaño de los conjuntos, tenemos

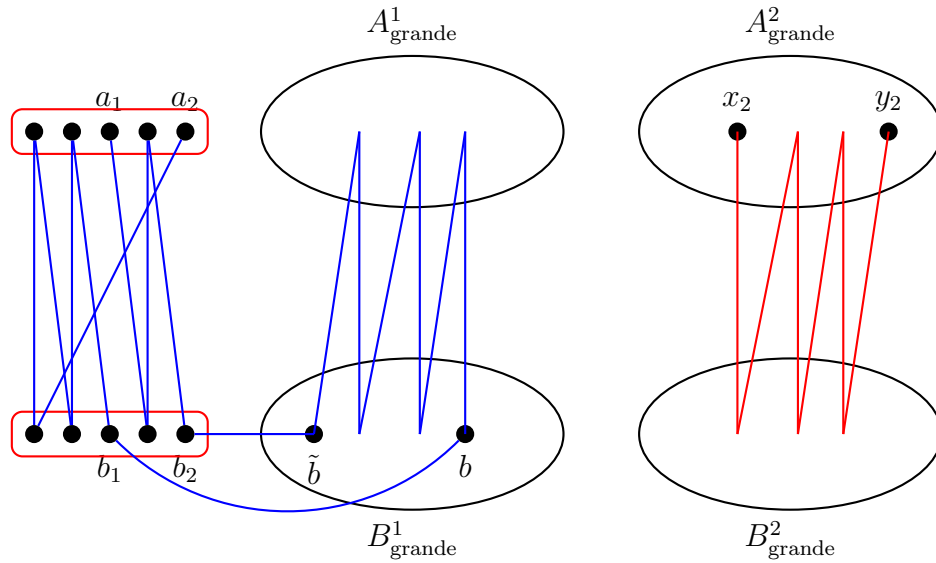


Figura 6.5.4: Construcción de los dos caminos vértice disjuntos para el Lema 6.9, cuando k es impar.

que el camino

$$P_1 := a_1 C_{\text{chico}} b_2 \tilde{b} P'_1 b b_1 C_{\text{chico}} a_2$$

es de largo $k - 1$.

Por otro lado, dado el tamaño de los conjuntos A^2_{grande} y B^2_{grande} , el camino P_2 es otro camino de largo $k - 1$, vértice disjunto de P_1 y tiene como vértices extremos a vecinos de x e y (véase Figura 6.5.4). \square

De esta manera, analizamos todos los casos cuando el conjunto $\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ no es balanceado en $\{A, B\}$.

Por ello, ahora supondremos que $\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ es un conjunto balanceado en $\{A, B\}$. Si $\pi(x_i, y_i) = k \pmod{2}$ para $i = 1, 2$, entonces se cumplirían las hipótesis del Lema 6.5 (0-arista), por lo que podemos suponer que para algún $i \in \{1, 2\}$ no se cumple la igualdad. Sin embargo, notemos que si $\pi(x_1, y_1) = k \pmod{2}$ y $\pi(x_2, y_2) \neq k \pmod{2}$ (o vice versa) se concluye que el conjunto $\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ no es balanceado en $\{A, B\}$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto, podemos suponer que para $i \in \{1, 2\}$ se cumple $\pi(x_i, y_i) \neq k \pmod{2}$. La siguiente afirmación analiza este caso y muestra que sigue siendo posible construir los caminos con las propiedades deseadas.

Lema 6.10. Sea $(G, x, y, A, B, C_{\text{chico}}, A_{\text{grande}}, B_{\text{grande}})$ una tupla (γ, k) -extremal.

Si $\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ es un conjunto balanceado en $\{A, B\}$, y para todo $i \in \{1, 2\}$ se cumple $\pi(x_i, y_i) \neq k \pmod{2}$, entonces podemos construir dos caminos vértice disjuntos de largo $k - 1$ que tienen como extremos a vecinos de x e y .

Demostración. Supongamos primero que k es par. Luego $\pi(x_1, y_1) = 1$, y $\pi(x_2, y_2) = 1$. Pero eso implica que $\pi(x_1, y_2) = 0$, y $\pi(x_2, y_1) = 0$. Por lo tanto renombrando y_2 como y_1 , tenemos las condiciones del Lema 6.5 (Construcción con 0-arista interiores), por lo que podemos construir dos caminos vértice disjuntos de largo $k - 1$ que tienen como extremos a vecinos de x e y .

Entonces, podemos suponer que k es impar. Luego $\pi(x_1, y_1) = 0$, y $\pi(x_2, y_2) = 0$. Sin pérdida de generalidad supongamos que x_1, x_2 son vértices de A_{grande} , mientras que y_1, y_2 son vértices de B_{grande} .

Notemos que si en A_{grande} existe un vértice a que es vecino de y , entonces el conjunto $\{x_1, x_2, y_1, a\}$ es un conjunto desbalanceado en $\{A, B\}$ y donde se cumple $\pi(x_1, y_1) = 0$, y $\pi(x_2, a) = 1$. Luego por Lema 6.8 podemos construir dos caminos vértice disjuntos de largo $k - 1$ que tienen como extremos a vecinos de x e y .

Podemos concluir lo mismo si es que en B_{grande} existe un vértice b que es vecino de x . Por lo tanto, tenemos que

- Para todo $a \in A_{\text{grande}}$ se tiene que a no es vecino de y .
- Para todo $b \in B_{\text{grande}}$ se tiene que b no es vecino de x .

Por otro lado, si existe una arista a_1a_2 con vértices a_1, a_2 en A_{grande} , y existe una arista b_1b_2 con vértices b_1, b_2 en B_{grande} , entonces podemos construir los caminos que necesitamos de forma análoga a la usada en la demostración del Lema 6.7 (Véase Figura 6.5.5)

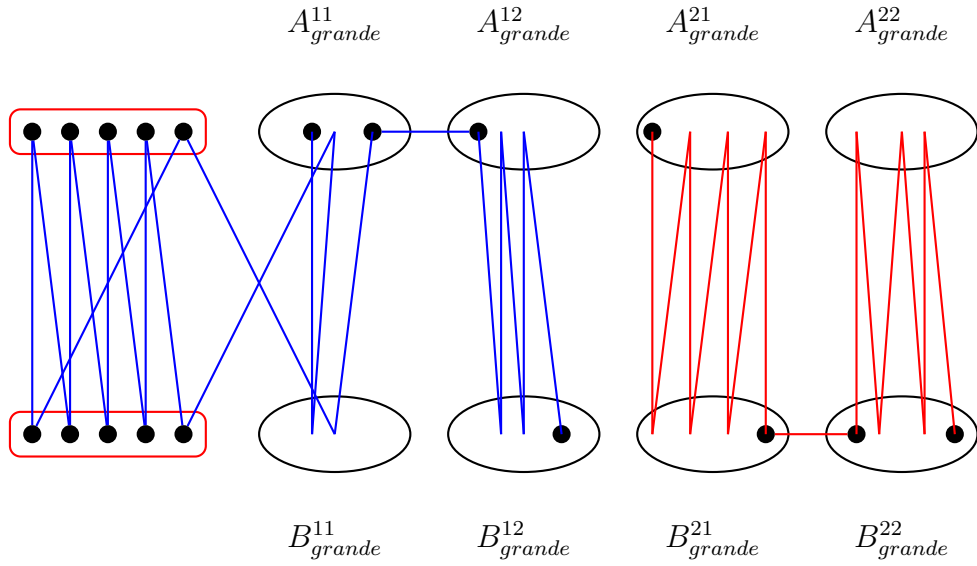


Figura 6.5.5: Construcción de los caminos vértice-disjuntos cuando estamos en el caso del Lema 6.10, con k par y además suponemos que existen aristas en A_{grande} y en B_{grande} .

Más aún, si $e(A_{grande}) = 0$ y $e(B_{grande}) > 0$ (o vice versa) entonces una construcción análoga a la usada en la demostración del Lema 6.6 es suficiente (véase Figura 6.5.6)

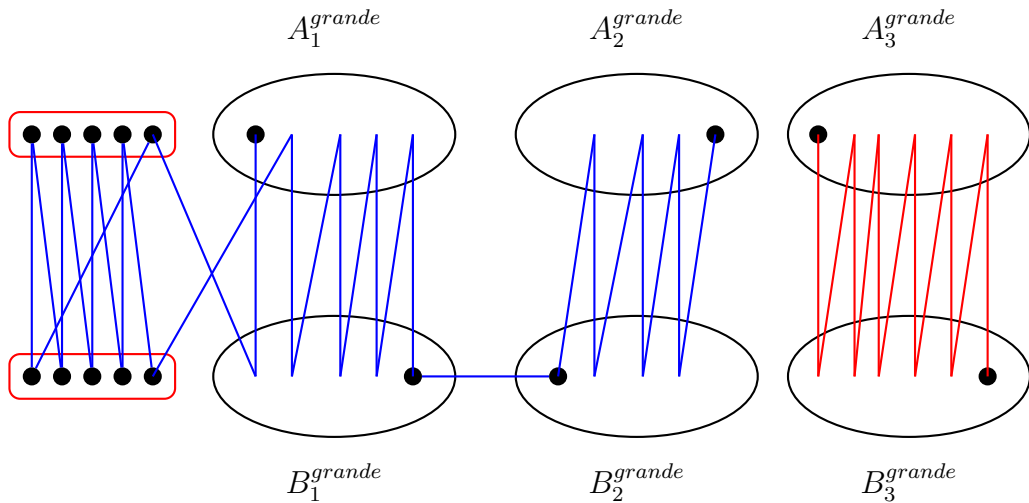


Figura 6.5.6: Construcción de los caminos vértice-disjuntos cuando estamos en el caso del Lema 6.10, con k par y además suponemos que existe una arista en A_{grande} o en B_{grande} .

Por lo tanto, solo falta analizar cuando $e(A_{grande}) = e(B_{grande}) = 0$. Definimos los

conjuntos

$$\begin{aligned}
X_A &:= N(x) \cap A_{\text{chico}} \\
X_B &:= N(x) \cap B_{\text{chico}} \\
Y_A &:= N(y) \cap A_{\text{chico}} \\
Y_B &:= N(y) \cap B_{\text{chico}} \\
A^{\text{cross}} &:= \{a \in A_{\text{chico}} : d(a, B_{\text{grande}}) \geq 1\} \\
B^{\text{cross}} &:= \{b \in B_{\text{chico}} : d(b, A_{\text{grande}}) \geq 1\} \\
A^{\text{same}} &:= \{a \in A_{\text{chico}} : d(a, A_{\text{grande}}) \geq 1\} \\
B^{\text{same}} &:= \{b \in B_{\text{chico}} : d(b, B_{\text{grande}}) \geq 1\}
\end{aligned}$$

Recordemos que $\delta(G) \geq k + 2$. Luego todo v3rtice $a \in A_{\text{chico}}$ cumple $d(a, A \cup B) = d_G(a) - d(a, \{x, y\}) \geq k$. Como $k > |V(C_{\text{chico}})|$ entonces necesariamente $d(a, A_{\text{grande}}) > 0$ o bien $d(a, B_{\text{grande}}) > 0$, lo que implica que $A_{\text{chico}} = A^{\text{cross}} \cup A^{\text{same}}$.

Por el mismo argumento tenemos que $B_{\text{chico}} = B^{\text{cross}} \cup B^{\text{same}}$. Sea $a \in A_{\text{grande}}$. Como $a \approx y$, entonces $d(a, A \cup B) \geq k + 1$. Dado que $e(A_{\text{grande}}) = 0$ y que $|B| = |A| = k$ se tiene que

$$d(a, A_{\text{chico}}) \geq k + 1 - d(a, B) - d(a, A_{\text{grande}}) \geq 1$$

Por lo que el conjunto $A^{\text{same}} \neq \emptyset$. Un c3lculo similar nos permite concluir que $A^{\text{same}} \neq \emptyset$.

Como adem3s $e(B_{\text{grande}}) = 0$, an3logamente a lo anterior se puede mostrar que los conjuntos $B^{\text{cross}}, B^{\text{same}}$ son no vac3os.

Ahora notemos que un v3rtice en $A_{\text{chico}} \setminus A^{\text{cross}}$ es un v3rtice que no tiene vecinos en A_{grande} . Luego, para todo v3rtice $b \in B_{\text{grande}}$ se cumple

$$\begin{aligned}
d(b, B_{\text{chico}}) &\geq (k + 1) - d(b, A) - d(b, B_{\text{grande}}) \\
&\geq (k + 1) - (k - |A_{\text{chico}} \setminus A^{\text{cross}}|) - 0 \\
&= |A_{\text{chico}} \setminus A^{\text{cross}}| + 1.
\end{aligned}$$

An3logamente, todo $a \in A_{\text{grande}}$ cumple

$$d(a, A_{\text{chico}}) \geq |B_{\text{chico}} \setminus B^{\text{cross}}| + 1.$$

Estas dos desigualdades implican que

$$|A^{\text{same}}| \geq |A_{\text{chico}} \setminus A^{\text{cross}}| + 1$$

$$|B^{\text{same}}| \geq |B_{\text{chico}} \setminus B^{\text{cross}}| + 1.$$

Esto, sumado a que $A_{\text{chico}} = A^{\text{same}} \cup A^{\text{cross}}$ y $B_{\text{chico}} = B^{\text{same}} \cup B^{\text{cross}}$ nos permite concluir que en el ciclo C_{chico} hay vértices consecutivos $a^{\text{cross}}, b^{\text{cross}}$, o bien hay vértices consecutivos $a^{\text{same}}, b^{\text{same}}$.

Recordemos que queremos construir dos caminos vértice disjuntos de largo $k - 1$ que tienen como extremos a vecinos de x e y . Ahora mostraremos que si existen ciertos vértices en el ciclo C_{chico} entonces construir los caminos no es difícil.

- (A1) Si en C_{chico} existe un par a_x, b_y , con $a_x \in X_A$ y $b_y \in Y_B$, y un par $a^{\text{same}}, b^{\text{same}}$ con $a^{\text{same}} \in A^{\text{same}}$ y $b^{\text{same}} \in B^{\text{same}}$.
- (A2) Si en C_{chico} existe un par a_y, b_x , con $a_y \in Y_A$ y $b_x \in X_B$, y un par $a^{\text{cross}}, b^{\text{cross}}$ con $a^{\text{cross}} \in A^{\text{cross}}$ y $b^{\text{cross}} \in B^{\text{cross}}$.
- (A3) Si en C_{chico} existe un par a_y, b_y , con $a_y \in Y_A$ y $b_y \in Y_B$, y un par $a^{\text{cross}}, b^{\text{same}}$ con $a^{\text{cross}} \in A^{\text{cross}}$ y $b^{\text{same}} \in B^{\text{same}}$.
- (A4) Si en C_{chico} existe un par a_x, b_x , con $a_x \in X_A$ y $b_x \in X_B$, y un par $a^{\text{same}}, b^{\text{cross}}$ con $a^{\text{same}} \in A^{\text{same}}$ y $b^{\text{cross}} \in B^{\text{cross}}$.

Mostraremos el primer caso. El resto de casos sigue una idea análoga. Primero diremos que el largo del ciclo C_{chico} es l , mientras que la distancia de a_x a a^{same} en el ciclo es l_1 , y la distancia de b_y a b^{same} es l_2 . Como $a^{\text{same}} \in A^{\text{same}}$, entonces existe un vértice $a \in A_{\text{grande}}$ tal que a^{same} es vecino de a . Por otro lado, como $b^{\text{same}} \in B^{\text{same}}$, entonces existe un vértice $b \in B_{\text{grande}}$ tal que b^{same} es vecino de b .

Ahora, particionamos los conjuntos $A_{\text{grande}}, B_{\text{grande}}$ en $\{A_{\text{grande}}^1, A_{\text{grande}}^2\}$ y $\{B_{\text{grande}}^1, B_{\text{grande}}^2\}$ tales que:

- $|A_{\text{grande}}^1| = |B_{\text{grande}}^1| = \lfloor k/2 \rfloor - l_1/2$
- $a \in A_{\text{grande}}^1, y_1 \in B_{\text{grande}}^1$
- $b \in B_{\text{grande}}^2, x_2 \in A_{\text{grande}}^2$.

Luego, los grafos $\tilde{G}[A_{\text{grande}}^i, B_{\text{grande}}^i]$ son Hamilton-conexo-bipartitos para todo $i \in$

$\{1, 2\}$. Luego existe camino P'_1 hamiltoniano que va de a a y_1 en $\tilde{G}[A_{\text{grande}}^1, B_{\text{grande}}^1]$, y existe camino P'_2 hamiltoniano que va de b a x_2 en $\tilde{G}[A_{\text{grande}}^2, B_{\text{grande}}^2]$. Luego, el camino $P_1 := a_x C_{\text{chico}} a^{\text{same}} a P'_1 y_1$, y el camino $P_2 := b_y C_{\text{chico}} b^{\text{same}} b P'_2 x_2$ son vértice disjuntos, de largo $k - 1$ cada uno, y cada uno tiene un extremo vecino de x , y el otro extremo vecino de y .

El resto de casos favorables se demuestra de manera similar.

Ahora, sabemos que

$$|X_A| + |X_B| + |N(x) \cap A_{\text{grande}}| + |N(x) \cap B_{\text{grande}}| \geq k + 1.$$

Como $|N(x) \cap B_{\text{grande}}| = 0$, entonces

$$|X_A| \geq |A_{\text{chico}}| - |X_B| + 1.$$

Análogamente se tiene que

$$|Y_A| \geq |A_{\text{chico}}| - |Y_B| + 1.$$

Sumando ambas expresiones tenemos lo siguiente

$$|X_A| + |Y_A| \geq 2|A_{\text{chico}}| + 2 - |X_B| - |Y_B|$$

que es lo mismo que

$$|X_A| + |X_B| + |Y_A| + |Y_B| \geq 2|A_{\text{chico}}| + 2. \quad (6.5.7)$$

Recordemos ahora que en el ciclo C_{chico} existe un par de vértices consecutivos $a^{\text{same}}, b^{\text{same}}$, o bien un par $a^{\text{cross}}, b^{\text{cross}}$. Supongamos lo primero. Se definen los siguientes conjuntos

$$X_A^+ := \{v_{i+1} \in V(C_{\text{chico}}) : v_i \in X_A\}$$

$$X_A^- := \{v_{i-1} \in V(C_{\text{chico}}) : v_i \in X_A\}.$$

Notemos que $|X_A^+ \cup X_A^-| \geq |X_A| + 1$. Si $|X_A| \geq |B_{\text{chico}}| - |Y_B|$, entonces

$$\begin{aligned} |X_A^+ \cup X_A^-| + |Y_B| &\geq |X_A| + |Y_B| + 1 \\ &\geq |B_{\text{chico}}| - |Y_B| + |Y_B| + 1 \\ &= |B_{\text{chico}}| + 1. \end{aligned}$$

Lo que implica que $|(X_A^+ \cup X_A^-) \cap Y_B| \geq 1$. Esto significa que en el ciclo C_{chico} existe un par de vértices consecutivos $(a_x, b_y) \in (X_A \times Y_B)$. Por suposición tenemos un par de vértices consecutivos $(a^{\text{same}}, b^{\text{same}}) \in (A^{\text{same}} \times B^{\text{same}})$, luego por el caso **(A1)**, podemos construir los dos caminos que queremos.

Por lo tanto, supondremos que $|X_A| < |B_{\text{chico}}| - |Y_B|$, que es lo mismo que $|X_A| + |Y_B| < |B_{\text{chico}}|$.

Esto, unido a la Ecuación 6.5.7 nos permite concluir que

$$|X_B| + |Y_A| \geq |A_{\text{chico}}| + 3.$$

Esto último implica que en el ciclo C_{chico} existe un par de vértices consecutivos $(a_y, b_x) \in (Y_A \times X_B)$.

Si además existe un par de vértices consecutivos $(a^{\text{cross}}, b^{\text{cross}}) \in (A^{\text{cross}}, B^{\text{cross}})$, entonces por caso **(A2)** podemos construir dos caminos con las propiedades que queremos. Por lo tanto, supondremos que dicho par de vértices no existe. Esto es, para todo $a_j \in A^{\text{cross}}$ se cumple que b_{j-1}, b_{j+1} son vértices de B^{same} , y para todo $b_j \in B^{\text{cross}}$ se cumple que a_{j-1}, a_{j+1} son vértices de A^{same} .

Por lo anterior, podemos decir que existe un par de vértices consecutivos $(b^{\text{same}}, a^{\text{cross}}) \in (B^{\text{same}}, A^{\text{cross}})$, y existe un par de vértices consecutivos $(b^{\text{cross}}, a^{\text{same}}) \in (B^{\text{cross}}, A^{\text{same}})$.

Por los casos **(A3)** y **(A4)**, si existe un par de vértices consecutivos a_x, b_x o un par a_y, b_y podemos construir los caminos disjuntos que queremos. Es decir, si

$$|(X_A^+ \cup X_A^-) \cap X_B| \geq 1$$

o

$$|(Y_A^+ \cup Y_A^-) \cap Y_B| \geq 1$$

entonces estamos listos. Lo anterior se cumple si $|X_A| + |X_B| \geq |B_{chico}|$, o si $|Y_A| + |Y_B| \geq |B_{chico}|$. Por lo tanto, supondremos lo contrario, es decir

$$|X_A| + |X_B| < |B_{chico}| = |A_{chico}|$$

$$|Y_A| + |Y_B| < |B_{chico}| = |A_{chico}|.$$

Sumando ambas expresiones

$$|X_A| + |X_B| + |Y_A| + |Y_B| < 2|A_{chico}|$$

lo que es una contradicción a la Ecuación 6.5.7. □

6.6. Unificando

En esta sección mostraremos el Lema 6.1, que es el resultado principal de esta sección, el cual es el siguiente

Lema 6.1. *Sea G un grafo con $n = 2k + 2$ vértices y $\delta(G) \geq n/2 + 1$. Sea $1/n < \gamma < 1/2^{12}$ y sean x, y vértices de G distintos, tal que $\tilde{G} := G - \{x, y\}$ es γ -cercano a $K_{k,k}$. Entonces existe un ciclo hamiltoniano C en G tal que $\text{dist}_C(x, y) = k + 1$.*

Demostración. Notemos que podemos considerar dos casos: cuando existe una partición balanceada $\{A, B\}$ de vértices de \tilde{G} tal que el grafo bipartito $\tilde{G}[A, B]$ no es hamiltoniano, y cuando si lo es.

Notemos que el caso cuando el grafo bipartito no es hamiltoniano es el Lema 6.2 que fue demostrado en la sección **Chvatal vs No Chvatal 6.2**.

Entonces supongamos que existe una partición balanceada $\{A, B\}$ de los vértices de \tilde{G} tal que el grafo $\tilde{G}[A, B]$ es hamiltoniano. Luego por Proposición 6.3.2 existe una tupla (γ, k) -extremal $(G, x, y, A, B, C_{chico}, A_{grande}, B_{grande})$. Sea M el grafo auxiliar asociado a la (γ, k) -tupla extremal. Ahora si existen vértices x_1, x_2, y_1, y_2 tales que:

- x_1y_1 y x_2y_2 son aristas de M ,
- $x_i \in N(x)$, $y_i \in N(y)$, para $i \in \{1, 2\}$,

- $\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ es balanceado (es decir, dos vértices son de A_{grande} y los otros dos son de B_{grande}), y
- $\pi(x_i, y_i) = k \pmod{2}$ para $i \in \{1, 2\}$

entonces por Lema 6.5 estamos listos.

Sea v_1, v_2 vértices de $A_{\text{grande}} \cup B_{\text{grande}}$, y sea $\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ subconjunto de $A_{\text{grande}} \cup B_{\text{grande}}$. Si

- v_1, v_2 son vértices de un mismo conjunto (es decir ambos pertenecen a A_{grande} o ambos pertenecen B_{grande}),
- v_1v_2 es arista del grafo \tilde{G} ,
- x_1, x_2 son vecinos de x ,
- y_1, y_2 son vecinos de y ,
- $\pi(x_1, y_1) \neq \pi(x_2, y_2)$, y además el conjunto $\{x_1, x_2, y_1, y_2, v_1, v_2\}$ es balanceado en $\{A, B\}$

entonces por Lema 6.6 estamos listos.

Por otro lado, si

- En el grafo $\tilde{G}[B_{\text{grande}}]$ existen aristas v_1v_2, v_3v_4 , y
- en el grafo M existen x_1, x_2, y_1, y_2 vértices de A_{grande} tales que x_1y_1, x_2y_2 son aristas en M , o bien se cumple lo anterior pero invirtiendo los roles de B_{grande} con A_{grande}

entonces por Lema 6.7 estamos listos. Por lo tanto, suponemos que ninguno de los tres casos anteriores se tiene. Por ello y como vimos en la sección 6.5 los casos restantes son resueltos en los Lemas 6.8, 6.9, 6.10. De esta manera abarcamos todos los casos posibles y así se concluye la demostración. \square

Capítulo 7

Caso expansor robusto

En este capítulo estudiaremos el caso cuando un grafo es (ν, τ) -expansor robusto, con ν, τ constantes. El resultado principal de esta sección es el siguiente.

Lema 7.1. *Sea G un grafo con $n = 2k + 2$ vértices y $\delta(G) \geq n/2 + 1$. Sea $\frac{1600 \ln(n)}{n} < \nu, \tau < 1$ y sean x, y vértices de G distintos, tal que $\tilde{G} := G - \{x, y\}$ es (ν, τ) -expansor robusto. Entonces existe un ciclo hamiltoniano C en G tal que $\text{dist}_C(x, y) = k + 1$.*

7.1. Estrategia

Para mostrar el lema enunciado, utilizaremos técnicas usadas para probar otro tipo de problemas asociados a ciclos hamiltonianos en digrafos.

La estrategia va a ser la siguiente: construiremos en el grafo G caminos P_1, P_2 vértice disjuntos. Cada uno de ellos cumplirán lo siguiente:

- Para cada $i \in \{1, 2\}$ se cumple que $|V(P_i)|$ es pequeño,
- cada camino tiene un extremo x_i que es vecino de x , y un extremo y_i que es vecino de y , y
- dado un camino P vértice disjunto de P_i , existe un camino P' tal que $V(P') = V(P) \cup V(P_i)$, y cuyos extremos sigan siendo x_i, y_i . En ese caso diremos que el camino P_i “absorbió” el camino P .

La primera condición nos permite asegurar que el grafo resultante de quitar ambos

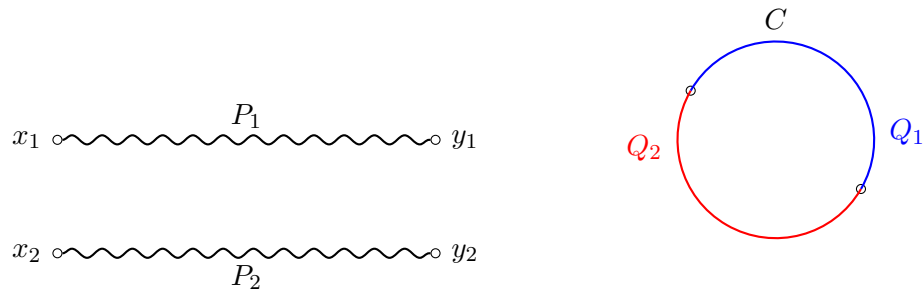


Figura 7.1.1: Los caminos P_1, P_2 son caminos que pueden absorber cualquier camino vértice-disjunto a ellos. El ciclo C es un ciclo que contiene a todo vértice restante, y se descompone en dos caminos: Q_1 y Q_2 .

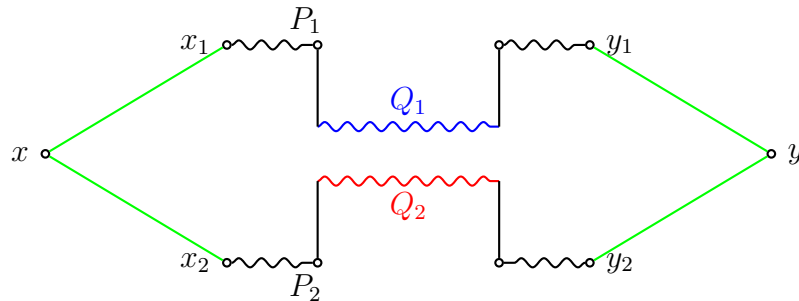


Figura 7.1.2: Construcción del ciclo hamiltoniano en G tal que los vértices x, y se encuentran a distancia $k + 1$. El camino P_1 absorbió al camino Q_1 , y el camino P_2 absorbió al camino Q_2 .

camino sigue siendo un grafo expensor robusto, pues la cantidad de vértices que quitamos es pequeña en relación a la cantidad de vértices del grafo G . Luego, el grafo resultante es hamiltoniano, por lo que existe un ciclo hamiltoniano C en $G - (P_1 + P_2)$ (véase Figura 7.1.1). Luego particionamos el ciclo C en dos caminos de largo conveniente, de tal manera que el camino P_1 absorba uno y P_2 absorba el camino restante. Así obtenemos caminos P'_1, P'_2 , ambos con un extremo vecino de x y otro extremo vecino de y , tal que $xP'_1yP'_2x$ es un ciclo hamiltoniano en G y la distancia entre x e y en el ciclo es exactamente $k + 1$ (véase Figura 7.1.2).

La construcción de los caminos P_1, P_2 no es una tarea trivial. Primero construiremos el camino P_1 . Para ello, mostraremos usando un argumento probabilista que existe un conjunto de pares de vértices K tal que:

- Los pares de vértices de K son vértice-disjuntos.
- $|K| = m$, con m un valor muy pequeño en relación a la cantidad de vértices del grafo.

- Para todo par de vértices $(u, v) \in V(G)^2$ existe un elemento $(s, t) \in K$ tal que $u \sim s$ y $v \sim t$.

Luego para cada elemento de K construiremos una estructura conformada por tres caminos que llamaremos artilugio, la cual será capaz de absorber un camino vértice-disjunto sin modificar los extremos del artilugio. Así, usando caminos de largo pequeño conectaremos cada uno de estos artilugios y conectaremos un camino con un extremo vecino de x , y otro camino con un extremo vecino de y .

De esta manera obtendremos el camino P_1 que buscamos, y para construir el camino P_2 bastará realizar el mismo procedimiento pero en el grafo $G - P_1$.

7.2. Preliminares

Para la demostración usaremos distintos resultados relacionados a grafos expansores robustos. Uno de ellos es el obtenido por Lo y Patel [22, Proposición 3.1], el cual nos dice que si tenemos un grafo que es expansor robusto, entonces podemos quitar una cantidad pequeña de vértices y el grafo resultante seguirá siendo expansor robusto. Si bien el resultado original está enunciado para digrafos, la misma idea de demostración sirve para concluir lo mismo en grafos.

Lema 7.2. *Sea $G = (V, E)$ un grafo que es (ν, τ) -expansor robusto y $S \subseteq V$ con $|S| \leq \epsilon n$. Entonces $G - S$ es un $(\nu - \epsilon, \tau/(1 - \epsilon))$ -expansor robusto.*

Otro resultado que nos será de utilidad, es el obtenido por Lo y Patel [22, Teorema 1.3], que nos dice que un grafo expansor robusto es hamiltoniano, cuando el tamaño del grafo es lo suficientemente grande. Una ventaja de este resultado es que no se utiliza el Lema de Regularidad de Szemerédi.

Teorema 7.2.1. *Sea G un grafo con n vértices, $\nu, \gamma, \tau \in (0, 1)$ y $\delta(G) \geq \gamma n$ tal que el grafo es (ν, τ) -expansor robusto. Si n es lo suficientemente grande entonces G es hamiltoniano.*

Antes de comenzar cualquier demostración, definiremos ciertos conceptos que facilitarán el entendimiento de los resultados que estudiaremos a lo largo del capítulo. Dados los pares de vértices $(u, v), (s, t)$ de $V(G)^2$, diremos que el par (u, v) cubre a (s, t) si $u \sim s$, y $v \sim t$. Dados conjuntos $K \subseteq V(G)^2$, $S \subseteq V(G)^2$ diremos que K cubre al conjunto S si para todo par $(s, t) \in S$ existe un par en K que cubre el par (s, t) . Dado un camino P con extremos a, b , y dado un camino Q

vértice disjunto a P , diremos que P absorbió al camino Q si existe un camino P' tal que $V(P') = V(P) \cup V(Q)$, y los extremos del camino P' son a, b .

El siguiente resultado muestra que en un grafo con n vértices y grado mínimo al menos $(1/2 - \epsilon)n$ existe un conjunto de pares de vértices K vértice disjuntos, de tamaño $10 \ln(n)$ tal que cada uno de ellos cubre a $V(G)$.

Lema 7.3. *Sea G un grafo con n vértices y $\delta(G) \geq (1/2 - \epsilon)n$, con n lo suficientemente grande. Entonces existe conjunto $K \subseteq V(G)^2$ donde los pares de vértices son vértice-disjunto, con $|K| = m = 10 \ln(n)$ y K cubre a $V(G)$.*

Demostración. Sea K^* un subconjunto de $V(G)^2$ de tamaño m , donde cada elemento de K^* fue escogido uniformemente al azar, y de manera independiente. Por lo tanto en K^* puede que hayan dos pares de vértices que no sean vértice disjuntos o puede que el conjunto no cubra a $V(G)$. Tenemos

$$\mathbb{P}(K_1^* \text{ es vértice-disjunto}) = \prod_{i=0}^{m-1} \left(\frac{\binom{n-2i}{2}}{\binom{n}{2} - i} \right).$$

Como $\binom{n}{2} - i \leq \binom{n}{2} \leq n^2/2$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(K_1^* \text{ es vértice-disjunto}) &\geq \prod_{i=0}^{m-1} \left(\frac{\binom{n-2i}{2}}{n^2/2} \right) \\ &= \frac{2^m}{n^{2m}} \prod_{i=0}^{m-1} \left(\frac{(n-2i)(n-2i-1)}{2} \right) \\ &= \frac{2^m}{2^m n^{2m}} \prod_{i=0}^{m-1} (n-2i)(n-2i-1) \\ &= \frac{1}{n^{2m}} \prod_{i=0}^{2m-1} (n-i) \\ &= \prod_{i=0}^{2m-1} \left(1 - \frac{i}{n} \right) \\ &\geq 1 - \sum_{i=0}^{2m-1} \frac{i}{n} \\ &\geq 1 - \frac{2m^2}{n}, \end{aligned}$$

y dado que $m = 10 \ln(n)$ y n es lo suficientemente grande, entonces $1 - \frac{2m^2}{n} > 1/2$.

Ahora, sea $(s, t) \in V(G)^2$, y sea $\text{cub}(s, t)$ el conjunto de elementos en $V(G)^2$ que cubre a (s, t) . Para un elemento $(u, v) \in V(G)^2$ escogido de manera aleatoria se tiene

$$p := \mathbb{P}((u, v) \in \text{cub}(s, t)) \geq \frac{(n/2 - \epsilon n)(n/2 - \epsilon n - 1)}{n(n-1)} > 1/4.$$

Sea $E_{s,t}$ el número de distintos elementos de K^* que cubre a (s, t) . Luego $E_{s,t} \sim \text{bin}(m, p)$. En particular

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_{s,t} < 1) &= \mathbb{P}(E_{s,t} = 0) \\ &= (1 - p)^m. \end{aligned}$$

Como $p \geq 1/4$, entonces $1 - p \leq 3/4$ por lo que

$$\mathbb{P}(E_{s,t} < 1) \leq (3/4)^m \leq (1/2)n^{-2},$$

esto último pues $m = 10 \ln(n)$. Sea X el número de elementos de $V(G)^2$ que no tienen elementos en K^* que los cubra. Entonces

$$\mathbb{P}(X \geq 1) \leq \mathbb{E}(X) = \sum_{(s,t) \in V(G)^2} \mathbb{P}(E_{s,t} < 1) \leq 1/2.$$

Por lo tanto $\mathbb{P}(X = 0 \text{ y } K_1^* \text{ es vértice disjunto}) > 0$, por lo que existe un conjunto $K \subseteq V(G)^2$, de tamaño m , donde los pares son vértice disjuntos y 1-cubre a $V(G)$. \square

La idea ahora es, dado el conjunto cubridor K , construir para cada par $(u, v) \in K$ una estructura de 14 vértices que llamaremos artilugio. Estas estructuras serán esenciales para obtener un camino con la capacidad de absorber otro camino (disjunto a este) sin modificar sus extremos. Antes de construir los artilugios, mostraremos el siguiente lema, el cual nos da una condición suficiente en el grado mínimo para asegurar la existencia de caminos de largo 5 para cualquier par de vértices. Este resultado será la principal herramienta que usaremos para construir los artilugios, y luego el grafo absorbente que buscamos.

Lema 7.4. *Sea G un grafo (ν, τ) -expansor robusto con n vértices y $\delta(G) \geq (1/2 - \epsilon)n$, con $\nu > 4\epsilon$. Entonces para todo par de vértices u, v en $V(G)$ existe un*

(u, v) -camino de largo 5.

Demostración. Sean u, v vértices distintos de G , fijos pero arbitrarios, y sean $u_1 \in N(u)$, $v_1 \in N(v)$, con $u_1 \neq v_1$.

Definimos $X := N(u_1)$, y $Y := N(v_1)$. Dado que $\delta(G) \geq (1/2 - \epsilon)n$, entonces

$$|X| \geq (1/2 - \epsilon)n$$

$$|Y| \geq (1/2 - \epsilon)n.$$

Dado que G es un (ν, τ) -expansor robusto, entonces

$$|\text{RN}(\nu, X)| \geq |X| + \nu n$$

$$|\text{RN}(\nu, Y)| \geq |Y| + \nu n.$$

Luego se tiene que

$$\begin{aligned} |\text{RN}(\nu, X) \cap Y| &\geq 2n(1/2 - \epsilon) + \nu n - n \\ &= \nu n - 2\epsilon n \\ &> \nu n/2 \quad (\text{pues } \nu > 4\epsilon) \\ &> 2. \end{aligned}$$

Entonces existe $y \in Y \cap \text{RN}(\nu, X)$. Además como $|N(y) \cap X| \geq \nu n > 4$, entonces existe $x \in N(y)$, y existe $x \in N(y) \cap X$ tales que los vértices u, v, u_1, v_1, x, y son todos distintos. Así el camino uu_1xyv_1v es un (u, v) -camino de largo 5. \square

7.3. Construcción de la estructura absorbente

En esta sección nos centraremos en construir, dado un grafo G , dos vértices x, y , y un conjunto K que cubre a $V(G)$, un camino absorbente P que contenga a todo K , y además tenga un extremo vecino de x , y el otro extremo vecino de y .

Ahora, dado un par de vértices (u, v) definiremos lo que es un artilugio. Sean P_1, P_2, P_3 caminos con las siguientes características

- $P_1 := uu_1w_2ww_4v$,
- $P_2 := w_1z_1z_2z_3z_4w_4$,

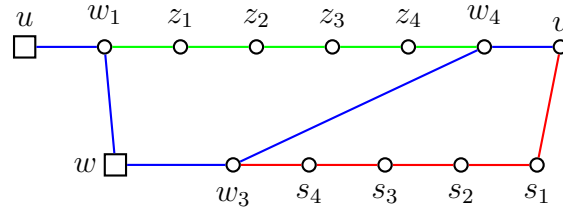


Figura 7.3.1: (u, v, w) -artilugio. En azul está el camino que va de u a v , en verde el camino que va de w_1 a w_4 , y en rojo el camino que va de v a w_3 .

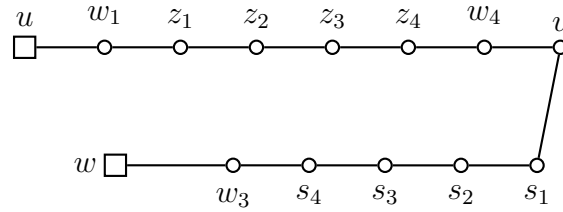


Figura 7.3.2: (u, w) -camino asociado al (u, v, w) -artilugio.

- $P_3 := vs_1s_2s_3s_4w$.
- Los caminos P_1, P_2, P_3 son internamente vértice-disjuntos.

Luego el grafo $L := P_1 \cup P_2 \cup P_3$ es un (u, v, w) -artilugio (véase Figura 7.3.1). No es difícil ver que $|V(L)| = 14$. Llamaremos $P_L := uw_1P_2w_4vP_3w_3w$ a este camino que pasa por todos los vértices del artilugio, que va de u a w (véase Figura 7.3.2). Este camino es de gran interés pues dado un camino Q vértice disjunto a P_L , con extremos (u', v') tales que $u' \sim u, v' \sim v$, entonces el camino $P := uu'Qv'vP_Lw_3w_4P_Lw_1w$ cumple que $V(P) = V(P_L) \cup V(Q)$, y tiene como extremos a los vértices u y w (véase Figura 7.3.3).

El siguiente lema muestra que dado un conjunto K cubridor, y dado un elemento cualquiera de K , podemos construir un artilugio asociado a ese elemento.

Lema 7.5. *Sea G un grafo con n vértices, (ν, τ) -expansor robusto y $\delta(G) \geq (1/2 - \epsilon)n$ con n lo suficientemente grande. Sea $K \subseteq V(G)^2$ un conjunto cubridor de $V(G)$. Luego para un par $(u, v) \in K$, fijo pero arbitrario, existe un artilugio $L_{u,v}$ asociado al par (u, v) .*

Demostración. La demostración es constructiva. A continuación se describe la construcción de un artilugio para un elemento de K .

1. Sea $(u, v) \in K$.

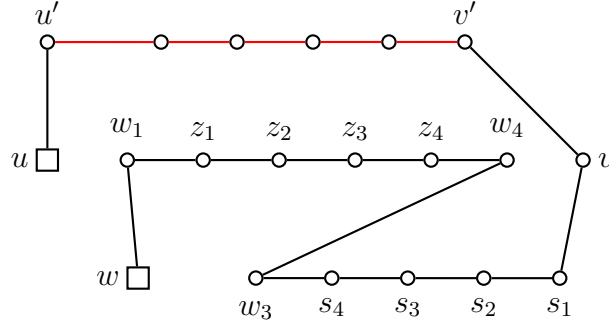


Figura 7.3.3: Camino que se obtiene luego de que el (u, w) -camino asociado a el (u, v, w) -artilugio absorbiera a un (u', v') -camino, que es vértice-disjunto.

2. Por Lema 7.4 sabemos que existe camino $P_1 := uw_1w_2w_3w_4v$.
3. Quitamos los vértices u, w_2, w_3, v del grafo G .
4. El grafo resultante sigue cumpliendo las condiciones del Lema 7.4, por lo que existe camino $P_2 := w_1z_1z_2z_3z_4w_4$.
5. Quitamos los vértices w_1, z_2, z_3, z_4 y agregamos el vértice v .
6. Nuevamente, el grafo resultante cumple las condiciones del Lema 7.4, por lo que existe camino $P_3 := vs_1s_2s_3s_4z_1$.
7. Así obtenemos el artilugio $L_{u,v} := P_1 \cup P_2 \cup P_3$.

Esta construcción es válida siempre y cuando en cada paso podamos usar el Lema 7.4. Como el artilugio tiene 14 vértices, entonces la cantidad total de vértices que quitamos es 14 lo que es mucho menor que n . Luego el grafo resultante sigue siendo expensor robusto (por Lema 7.2) y además sigue cumpliendo la condición de grado mínimo necesaria para usar el Lema 7.4. \square

El lema que sigue muestra que de hecho podemos construir para cada elemento de un conjunto 1-cubridor un artilugio, y cada uno de ellos es vértice disjunto a los demás.

Lema 7.6. *Sea G un grafo con n vértices, (ν, τ) -expensor robusto y $\delta(G) \geq (1/2 - \epsilon)n$ con n lo suficientemente grande. Sea $K \subseteq V(G)^2$ un conjunto cubridor de $V(G)$ de tamaño $m = 10 \ln(n)$. Luego existen L_1, L_2, \dots, L_m artilugios vértice disjuntos, cada uno asociado a un elemento de K distinto.*

Demostración. Nuevamente, la demostración es constructiva. Sea $(u_1, v_1) \in K$.

Por Lema 7.5 existe un artilugio L_1 asociado al par (u_1, v_1) . Luego quitamos L_1 del grafo G . Sea $(u_2, v_2) \in K$ par distinto a (u_1, v_1) . Nuevamente se cumplen las condiciones del Lema 7.5 por lo que existe un artilugio L_2 asociado al par (u_2, v_2) , y además este es vértice-disjunto a L_1 .

Repitiendo este proceso, donde en cada paso quitamos los vértices del artilugio construido, obtenemos para cada elemento de K un artilugio vértice-disjunto a los demás. Nuevamente esta construcción es válida siempre y cuando en cada paso podamos usar el Lema 7.5. Como el artilugio tiene 14 vértices, y el tamaño de K es $10 \ln(n)$, entonces la cantidad total de vértices que quitamos es $140 \ln(n)$ lo que es mucho menor que n . Por tanto el grafo $G - \bigcup_{i=1}^m L_i$ sigue cumpliendo las hipótesis necesarias. \square

Ya con el conjunto de artilugios, lo único que nos falta para tener nuestra estructura absorbente es unir cada uno de los caminos asociados a los artilugios y luego conectar caminos que tengan como extremos a vértices de interés.

Lema 7.7. *Sea G grafo con n vértices, (ν, τ) -expansor robusto y $\delta(G) \geq (1/2 - \epsilon)n$, con n lo suficientemente grande. Sean x, y vértices distintos de G y sea $K \subseteq V(G - \{x, y\})^2$ 1-cubridor de $V(G)$ de tamaño $m = 10 \ln(n)$. Entonces existe camino P tal que*

- $|V(P)| \leq 190 \ln(n)$
- Tiene como extremos a vértices x_1, y_1 con x_1 vecino de x , y_1 vecino de y .
- Dado un camino Q vértice disjunto de P , existe camino P^* con $V(P^*) = V(P) \cup V(Q)$, y cuyos extremos siguen siendo x_1, y_1 .

Demostración. Sean x_1, y_1 vecinos de x e y respectivamente, y que no están en K . Luego el grafo $G - \{x, y, x_1, y_1\}$ cumple las condiciones del Lema 7.6. Por ello sabemos que para cada elemento de K existe un artilugio. Sean L_1, L_2, \dots, L_m todos estos artilugios, y sean $P_{L_1}, P_{L_2}, \dots, P_{L_m}$ los caminos asociados a estos artilugios. Para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ llamaremos u_i, w_i a los extremos del camino P_{L_i} . La idea es conectar todos los caminos usando caminos de largo 5. Estos caminos los llamaremos R_j y tendrán como extremos a vértices w_j, u_{j+1} , es decir conectan el final del camino P_{L_j} con el inicio del camino $P_{L_{j+1}}$. Luego la cantidad de vértices usados que no pertenecen a ningún artilugio son 4. Supongamos que ya conectamos los caminos $P_{L_1}, P_{L_2}, \dots, P_{L_i}$ para algún $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, es decir

tenemos un camino P' de la forma $P_{L_1}R_1P_{L_2}R_2\dots R_{i-1}P_{L_i}$, con R_1, R_2, \dots, R_{i-1} caminos de largo 5. Mostraremos que podemos conectar el camino P_{L_i} con el camino $P_{L_{i+1}}$.

Para ello, analicemos el grafo $G - \left(V(P') \cup \bigcup_{j=i+1}^m V(P_{L_j}) \right) \setminus \{w_i, u_{i+1}\}$, es decir el grafo sin los caminos de largo 5 ya usados y sin los artilugios, salvo los vértices w_i, u_{i+1} . Dado que la cantidad de caminos de largo 5 usados es a lo más $i - 1 < i \leq m = 10 \ln(n)$, y que hay m caminos con 14 vértices cada uno, entonces a lo más estamos quitando $180 \ln(n)$ vértices. Como n es lo suficientemente grande, el grafo sigue cumpliendo las condiciones del Lema 7.4, por lo que existe un (w_i, u_{i+1}) -camino de largo 5. De esta manera conectamos los caminos $P_{L_i}, P_{L_{i+1}}$. Llamemos \tilde{P} al camino $P_{L_1}R_1\dots R_{m-1}P_{L_m}$.

Ahora con los caminos asociados a los artilugios conectados, lo que haremos será conectar un camino entre x_1 y u_1 , y luego conectaremos y_1 con w_m . Nuevamente usando el Lema 7.4 ahora en el grafo $G - \left(V(\tilde{P}) \setminus \{u_1\} \right)$ existe un camino R_x de largo 5 entre x_1 y u_1 , que es vértice disjunto a \tilde{P} . Argumentando de manera similar podemos decir que existe un camino R_y de largo 5 entre v_m y y_1 . Así el camino $P = R_x\tilde{P}R_y$ cumple:

- $|V(P)| \leq 180 \ln(n) + 10 \leq 190 \ln(n)$ (el 10 sale de los vértices provenientes de los caminos R_x, R_y).
- P tiene como extremos a vértices x_1, y_1 , con $x_1 \sim x$, y $y_1 \sim y$.
- Dado camino Q vértice disjunto a P , existe camino P^* con $V(P^*) = V(P) \cup V(Q)$. Esto pues P contiene a todo camino P_{L_i} con $i \in \{1, \dots, m\}$, los cuales pueden absorber cualquier camino vértice-disjunto ya que K cubre a todo $V(G)$.

□

7.4. Demostración Lema 7.1

En esta sección mostraremos el resultado principal de este capítulo, que recordamos a continuación:

Lema 7.1. *Sea G un grafo con $n = 2k + 2$ vértices y $\delta(G) \geq n/2 + 1$. Sea $\frac{1600 \ln(n)}{n} < \nu, \tau < 1$ y sean x, y vértices de G distintos, tal que $\tilde{G} := G - \{x, y\}$*

es (ν, τ) -expansor robusto. Entonces existe un ciclo hamiltoniano C en G tal que $\text{dist}_C(x, y) = k + 1$.

Demostración. Sean x_1, x_2 dos vecinos distintos de x , y sean y_1, y_2 dos vecinos distintos de y . Luego podemos aplicar el Lema 7.3 al grafo $G - \{x, y, x_1, x_2, y_1, y_2\}$, teniendo así un conjunto K cubridor. Aplicando el Lema 7.7 en el grafo $G - \{x, y\}$ y en el conjunto K tenemos un camino P_1 que va de x_1 a y_1 , con la capacidad de absorber a cualquier camino vértice disjunto. Realizando el mismo procedimiento pero quitando además todos los vértices del camino P_1 , obtenemos un camino P_2 , que va de x_2 a y_2 , es vértice disjunto de P_1 y también tiene la capacidad de absorber a cualquier camino vértice disjunto de $G - P_1 - \{x, y\}$.

Como tanto P_1 y P_2 tienen a lo más $190 \ln(n)$ vértices, entonces el conjunto $S = V(P_1) \cup V(P_2) \cup \{x, y\}$ tiene tamaño a lo más $380 \ln(n) + 2 \leq \epsilon n$, considerando un $\epsilon = 400 \ln(n)/n$. Luego por Lema 7.2 el grafo $G - S$ es $(\nu - \epsilon, \tau/(1 - \epsilon))$ -expansor robusto. Luego por Teorema 7.2.1 el grafo $G - S$ es hamiltoniano. Digamos que C' es un ciclo hamiltoniano, y Q_1, Q_2 son dos caminos vértice disjuntos del ciclo C' tal que el largo del camino Q_1 es $k + 1 - 2 - (|P_1| - 1)$.

Como P_1 es un camino absorbente, entonces existe camino P_1^* con $V(P_1^*) = V(P_1) \cup V(Q_1)$ y extremos x_1, y_1 . Notemos que el largo del camino P_1^* es $k + 1 - 2$, por lo que el camino $xx_1P_1^*y_1y$ es de largo $k + 1$. Por otro lado el camino P_2 también es un camino absorbente, por lo que podemos absorber el camino Q_2 y así obtener un camino P_2^* con extremos x_2, y_2 . Finalmente el ciclo $C := xx_1P_1^*y_1yy_2P_2^*x_2x$ es un ciclo hamiltoniano en G que cumple $\text{dist}_C(x, y) = k + 1$. \square

Capítulo 8

Resultado principal

En este capítulo mostraremos lo que es nuestro resultado principal, el cual es una demostración de la conjetura de Enomoto cuando el tamaño del grafo es lo suficientemente grande.

Teorema 8.0.1. *Sea G un grafo con n vértices, $\delta(G) \geq n/2 + 1$, con n lo suficientemente grande. Entonces para todo par de vértices x, y existe un ciclo hamiltoniano C en G tal que $\text{dist}_C(x, y) = \lfloor n/2 \rfloor$.*

Demostración. Sean x, y vértices fijos pero arbitrarios. Por Lema 3.3 podemos suponer que $n = 2k + 2$. Luego el grafo $\tilde{G} := G - \{x, y\}$ es un grafo con $2k$ vértices y grado mínimo al menos k . Entonces \tilde{G} es un grafo de Dirac. Por la tricotomía de los grafos de Dirac 3.2.2, \tilde{G} cumple una de las siguientes condiciones:

- γ -cercano a $2K_k$,
- γ -cercano a $K_{k,k}$,
- o bien es un (ν, τ) -expansor robusto.

Supongamos que es γ -cercano a $2K_k$. Luego por Lema 5.1 existe ciclo hamiltoniano C en G tal que $\text{dist}_C(x, y) = k + 1 = n/2$. Supongamos ahora que \tilde{G} es γ -cercano a $K_{k,k}$. Luego por Lema 6.1 existe ciclo hamiltoniano C en G tal que $\text{dist}_C(x, y) = k + 1 = n/2$. Por lo tanto, solo queda analizar el caso cuando \tilde{G} es un (ν, τ) -expansor robusto. Por Lema 7.1 existe ciclo hamiltoniano C en G tal que $\text{dist}_C(x, y) = k + 1 = n/2$. □

Notemos que en cada caso el valor de n para el cual es válida la construcción del ciclo varía. Para evitar cálculos explícitos que dificulten la lectura del texto, decidimos hacer un cálculo aproximado del valor de n . Note que el caso expensor robusto es el más restrictivo en este sentido, pues debe cumplirse la desigualdad $\frac{1600 \ln n}{n} < 1$. Esta desigualdad es cierta cuando n es mayor o igual a 20000.

Capítulo 9

Diseñando algoritmo polinomial

En los capítulos anteriores mostramos que la conjetura de Enomoto es cierta para grafos lo suficientemente grandes. La demostración se dividió en distintos casos, y en cada uno de ellos construimos el ciclo hamiltoniano con las características deseadas. En este capítulo analizaremos si cada una de esas construcciones puede realizarse en tiempo polinomial respecto al tamaño del grafo, para así diseñar un algoritmo a tiempo polinomial que dado un grafo construya el ciclo hamiltoniano.

9.1. Paso de la tricotomía de Dirac

Sea G un grafo con n vértices y grado mínimo al menos $n/2 + 1$, y sean x, y dos vértices distintos de G . Si recordamos como se llevaron a cabo las demostraciones, notaremos que el primer paso fue notar que el grafo $G - \{x, y\}$ es un grafo de Dirac, por lo cual cumple la tricotomía de los grafos de Dirac. Esta tricotomía nos indica que el grafo tiene una estructura clara: es cercano a dos cliques disjuntos, cercano a un grafo bipartito completo, o bien es un grafo expensor robusto. En esta sección mostraremos que decidir en cual caso nos encontramos es una tarea que puede realizarse en tiempo polinomial.

Para ello, primero vamos a definir el problema *Bisección*: dado un grafo, buscamos particionar el conjunto de vértices en dos partes iguales de forma que el número de aristas entre las dos partes sea mínimo. A partir de esto podemos definir el problema aproximado, es decir ahora buscamos una partición balanceada $\{A, B\}$ de los vértices tal que la cantidad de aristas que va de A a B está acotada por el

óptimo más un error.

Problema: Bisección mínima aproximada

Dado un grafo denso y un valor ϵ , buscamos particionar el conjunto de vértices en dos partes iguales de forma que el número de aristas entre las dos partes sea cercano al mínimo, con un error asociado al valor ϵ .

Entrada: Un grafo G con n vértices y grado mínimo $\Omega(n)$, un valor ϵ .

Salida: Partición $\{A, B\}$ de los vértices de G tal que $e(A, B) \leq \text{OPT} + \epsilon n^2$, con OPT el valor de la bisección mínima.

Arora, Karger y Karpinski demostraron en [17, Sección 5] que se puede resolver el problema Bisección mínima aproximada en tiempo polinomial. El siguiente teorema es un caso particular de su resultado, pero para nuestro interés es más apropiado.

Teorema 9.1.1. (Arora, Karger y Karpinski) *Existe un algoritmo con:*

Entrada: Un grafo G con n vértices y $\delta(G) \geq n/2$, ϵ .

Salida: Partición $\{A, B\}$ de los vértices de G tal que $e(A, B) \leq \text{OPT} + \epsilon n$, con OPT el valor de la bisección mínima.

Tiempo: $O(n^{c\epsilon})$, con c una constante.

Recordemos que para que un grafo con n vértices sea γ -cercano a $2K_{n/2}$ tiene que existir una partición $\{A, B\}$ de los vértices del grafo tal que $e(A, B) \leq \gamma n^2$. Entonces, podemos usar el algoritmo que resuelve Bisección mínima aproximada en el grafo $G - \{x, y\}$ y con $\epsilon = \gamma/2$. Luego, se pueden dar dos casos:

1. Si la partición $\{A, B\}$ obtenida por el algoritmo cumple $e(A, B) \leq \gamma n^2$, entonces podemos concluir que el grafo es γ -cercano a $2K_{n/2}$.
2. En caso contrario tenemos $e(A, B) > \gamma n^2$. Como además sabemos que $e(A, B) \leq \text{OPT} + \epsilon n^2$, y $\epsilon = \gamma/2$, entonces uniendo ambas desigualdades tenemos

$$\gamma n^2 < \text{OPT} + (\gamma/2)n^2$$

que es equivalente a $(\gamma/2)n^2 < \text{OPT}$. Por lo tanto podemos concluir que el grafo no es $(\gamma/2)$ -cercano a $2K_{n/2}$.

Ahora se define el problema *Subgrafo k -denso*: Dado un grafo encontrar un conjunto

de k vértices que induce un subgrafo con la mayor cantidad de aristas posibles. Nuevamente podemos definir el problema aproximado.

Problema: Subgrafo k -denso aproximado.

Dado un grafo denso, un valor ϵ y un valor k , buscamos un conjunto de k vértices que induce un subgrafo con una cantidad de aristas cercana al máximo, con un error asociado al valor ϵ .

Entrada: Un grafo G con n vértices y grado mínimo $\Omega(n)$, un valor ϵ y un entero k .

Salida: Subconjunto A de vértices de G tal que $e(A) \geq \text{OPT} - \epsilon n^2$, con OPT la cantidad de aristas del subgrafo con k vértices más denso.

Nuevamente Arora, Karger y Karpinski demostraron en [17, Sección 4.2] que se puede resolver dicho problema de manera aproximada usando un algoritmo a tiempo polinomial. Recordemos que un grafo con n vértices es γ -cercano a $K_{n/2, n/2}$ si existe un subconjunto A de vértices de tamaño $n/2$ tal que $e(A) < \gamma n^2$. Esto es equivalente a encontrar en el grafo complemento un subconjunto de vértices A tal que $e(A) \geq \gamma n^2$. Ahora, llamemos $(G - \{x, y\})^c$ al grafo complemento de $G - \{x, y\}$. En este grafo vamos a resolver el problema Subgrafo $n/2$ -denso aproximado, con $\epsilon = \gamma/2$. De nuevo, hay dos casos posibles:

1. El subconjunto A obtenido cumple $e(A) \geq \gamma n^2$. Esto implica que en el grafo original, el conjunto A cumple $e(A) < \gamma n^2$. Por lo tanto, el grafo es γ -cercano a $K_{n/2, n/2}$.
2. Caso contrario tenemos que el subconjunto A cumple $e(A) < \gamma n^2$. Como además $e(A) \geq \text{OPT} - \epsilon n^2$, y $\epsilon = \gamma/2$, entonces uniendo ambas desigualdades se tiene que $\text{OPT} \leq (3\gamma/2)n^2$. Esto implica que en el grafo original todo conjunto de vértices A de tamaño $n/2$ cumple $e(A) > (3\gamma/2)n^2 > (\gamma/2)n^2$. Por lo tanto, el grafo no es $(\gamma/2)$ -cercano.

Así, tenemos una estrategia clara para saber cual condición de la tricotomía cumple nuestro grafo $G - \{x, y\}$: Resolvemos el problema Bisección mínima aproximada con $\epsilon = \gamma/2$. Esto nos indica si el grafo es γ -cercano a $2K_{n/2}$, o si no es $(\gamma/2)$ -cercano a $2K_{n/2}$. Si estamos en este segundo caso, entonces resolvemos el problema Subgrafo k -denso aproximado en el grafo complemento, con $k = n/2$ y $\epsilon = \gamma/2$. Esto nos indicará si el grafo original es γ -cercano a $K_{n/2, n/2}$, o si no es $(\gamma/2)$ -

cercano a $K_{n/2, n/2}$. Si nos encontramos en este segundo caso, pues ya por descarte sabemos que el grafo es un expansor robusto.

9.2. Caso cercano a dos cliques disjuntos

Si recordamos la construcción del ciclo hamiltoniano, cuando el grafo es cercano a $2K_{n/2}$, lo único que usamos para construir el ciclo son caminos hamiltonianos con vértices extremos fijados anteriormente. Esto lo podemos asegurar mostrando que el grafo es Hamilton-conexo, y eso lo hacemos asegurando que se cumple alguna condición relacionada a los grados de los vértices. Dado que verificar el grado de los vértices es una tarea que puede realizarse en tiempo polinomial, lo que falta por analizar es si la obtención de estos caminos hamiltonianos se da en tiempo polinomial.

Para ello, basta notar lo siguiente: para mostrar la condición de tipo Chvátal para decidir si el grafo es Hamilton-conexo, basta considerar un grafo auxiliar con un vértice extra, que sea vecino de los vértices que queremos conectar a través de un camino hamiltoniano. Este nuevo grafo es hamiltoniano pues cumple las condiciones de Chvátal, y la demostración del teorema de Chvátal induce una construcción de ese ciclo hamiltoniano que puede hacerse en tiempo polinomial. Luego basta quitar el vértice extra y obtenemos el camino hamiltoniano con extremos fijados anteriormente.

De esta manera, vemos que si el grafo $G - \{x, y\}$ es cercano a $2K_{n/2}$, entonces la construcción del ciclo hamiltoniano con la propiedad deseada se logra en tiempo polinomial.

9.3. Caso cercano a bipartito completo

En el caso cuando el grafo $G - \{x, y\}$ es cercano a $K_{n/2, n/2}$, consideramos varios subcasos. La primera división se tiene al momento de decidir si el grafo bipartito, que se obtiene dada una partición minimal respecto a la cantidad de aristas dentro de los conjuntos, cumple una condición de hamiltonicidad para grafos bipartitos. La obtención de la partición minimal es una tarea simple: basta partir de una partición balanceada $\{A, B\}$ cualquiera de los vértices, y a partir de ahí hacer intercambio de vértices de partes distintas, formando una nueva partición $\{A', B'\}$.

Luego si $e(G[A']) < e(G[A])$, entonces nos quedamos con esta nueva partición e iteramos. Para decidir si $e(G[A']) < e(G[A])$, verificamos una desigualdad que compara el grado de dos vértices (que son los que se están intercambiando). Por tanto, el obtener la partición minimal se logra en tiempo polinomial, pues a lo más tenemos que hacer n^2 intercambios.

Ahora, el verificar si el grafo bipartito dado por la partición minimal cumple la condición de Chvátal se hace en tiempo polinomial, pues basta verificar los grados de todos los vértices. Luego la construcción del ciclo, tanto en el caso cuando no cumple la condición de Chvátal como cuando si la cumple se hace en tiempo polinomial, pues solo usamos caminos hamiltonianos de extremos fijos que vienen del hecho que subgrafos de interés son Hamilton-conexo-bipartitos. Al igual que en el caso cercano a dos cliques, estos caminos hamiltonianos se obtienen en tiempo polinomial.

9.4. Caso expensor robusto

En este caso, para construir el ciclo hamiltoniano primero construimos dos caminos con la característica de ser absorbentes. Para obtener estos caminos, usamos caminos de largo 5, que se pueden construir en tiempo polinomial, y usamos un argumento probabilista para asegurar la existencia de un conjunto cubridor. Este argumento nos indica que existe un algoritmo probabilista que es capaz de encontrar este conjunto cubridor. Existen métodos que desaleatorizan estos algoritmos probabilistas [1, Capítulo 16.1] y que nos entregan algoritmos a tiempo polinomial que cumplen el mismo objetivo. Por tanto, el construir estos caminos absorbentes es una tarea que puede realizarse en tiempo polinomial.

Ahora, el otro paso que falta por analizar es el encontrar un ciclo hamiltoniano, dado un grafo expensor robusto. Este paso es esencial ya que a partir de este ciclo hamiltoniano obtenemos los caminos que nos interesa absorber y así construir el ciclo hamiltoniano que buscamos. El Teorema 7.2.1 de Lo y Patel induce un algoritmo polinomial que encuentra un ciclo hamiltoniano en un grafo expensor robusto.

De esta manera, vemos que en este caso, también podemos construir el ciclo hamiltoniano que queremos en tiempo polinomial. Por lo tanto nuestra demostración induce un algoritmo a tiempo polinomial que construye, dado G con

n vértices, grado mínimo al menos $n/2 + 1$, y vértices x, y , un ciclo hamiltoniano C tal que $\text{dist}_C(x, y) = \lfloor n/2 \rfloor$.

Capítulo 10

Conclusión y trabajo futuro

En esta tesis logramos mostrar que dado un grafo con n vértices, grado mínimo al menos $n/2 + 1$ y n lo suficientemente grande, existe para todo par de vértices un ciclo hamiltoniano tal que la distancia de estos vértices en el ciclo es exactamente $\lfloor n/2 \rfloor$. Lo importante a notar en nuestro resultado es que la demostración realizada no utiliza el lema de regularidad, por lo que el valor de n desde el cual la conjetura de Enomoto es cierta es considerablemente menor al conocido hasta la fecha. Además la demostración induce un algoritmo a tiempo polinomial que construye para cada par de vértices el ciclo hamiltoniano deseado. La pregunta obvia después de ello es si lo anterior es cierto para todo valor de n .

Por otro lado, también sería interesante saber si una generalización de este resultado es posible. Por ejemplo, es natural preguntarse si bajo la misma condición de grado mínimo somos capaces de construir un ciclo hamiltoniano, pero donde el par de vértices fijado se encuentra a una distancia l . Es decir, responder la siguiente pregunta:

Pregunta 10.0.1. *Sea G un grafo con n vértices y $\delta(G) \geq n/2 + 1$. ¿Existe para todo par de vértices x, y distintos, y para todo $2 \leq l \leq \lfloor n/2 \rfloor$ un ciclo hamiltoniano C tal que $\text{dist}_C(x, y) = l$?*

Ya existen distintas aproximaciones a este resultado, por ejemplo Faudree, Lehel y Yoshimoto mostraron en [11] que lo anterior es cierto para todo valor de l menor a $n/6$. Creemos que las técnicas usadas en nuestras demostraciones se pueden adaptar para responder la pregunta anterior.



Figura 10.0.1: A la izquierda un grafo H , a la derecha una subdivisión obtenida insertando un vértice en cada arista.

Otro problema interesante es el dado un grafo G con ciertas condiciones de grado mínimo, encontrar una subdivisión recubridora de un subgrafo H . Decimos que el grafo H' es *subdivisión* de H si H' se obtiene reemplazando una o más aristas por caminos vértice disjuntos (véase Figura 10.0.1). Si una arista $v_1 v_2$ de H es reemplazada por un (w_1, w_2) -camino en la subdivisión H' , decimos que los vértices w_1, w_2 son los vértices *testigos* de los vértices v_1, v_2 respectivamente. Si en la subdivisión H' los caminos son todos del mismo largo (salvo una diferencia de a lo más uno) decimos que H' es una *subdivisión balanceada* de H . Si además la subdivisión H' es subgrafo de G y $V(H') = V(G)$, entonces decimos que es una *subdivisión recubridora balanceada*. Otra definición que uno puede introducir es la de subdivisión recubridora balanceada enraizada. Sea $\{h_1, h_2, \dots, h_t\}$ el conjunto de vértices de H y sea $\{w_1, w_2, \dots, w_t\}$ un conjunto de vértices del grafo G . Si H' es una subdivisión recubridora y para todo $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ se cumple que w_i es vértice testigo de h_i , entonces decimos que H' es una *subdivisión recubridora balanceada enraizada* en el conjunto $\{w_1, w_2, \dots, w_t\}$. Esta definición es más fuerte pues no solo buscamos caminos que “representen” aristas, sino que buscamos caminos con extremos fijados previamente. Cuando el grafo G es denso, uno esperaría encontrar subdivisiones grandes, y por lo tanto es natural preguntarse si hay condiciones del tipo Dirac que aseguren la existencia de subdivisiones recubridoras. En este sentido, Pavez-Signé [24] mostró que para todo grafo con n vértices y grado mínimo al menos $(1 + o(1))n/2$ contiene una subdivisión recubridora balanceada de K_t , con $t = O(\sqrt{n})$. Notemos que esto es lo mejor que se puede hacer, pues en una subdivisión de un grafo H , se agrega al menos un vértice por cada arista del grafo, por lo que la cantidad de vértices de la subdivisión es $V(H)^2$. Eso implica que la cantidad de vértices máxima que puede tener el grafo es $O(\sqrt{n})$. Recientemente Lee, Pavez-Signé, Petrov [19] estudiaron la existencia de subdivisiones recubridoras de cliques en grafos que satisfacen ciertas condiciones pseudoaleatorias. Notemos que el problema que estudiamos en la presente tesis también se puede abordar bajo

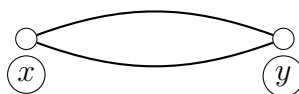


Figura 10.0.2: Multigrafo que va de x a y . Un ciclo hamiltoniano en un grafo G que va de x a y es una subdivisión recubridora balanceada enraizada de este multigrafo en G .

este contexto, pues un ciclo hamiltoniano lo podemos ver como una subdivisión recubridora de un ciclo. Más aún, nuestro resultado mostró que para todo par de vértices x, y existe un ciclo hamiltoniano tal que este par se encuentra a distancia $\lfloor n/2 \rfloor$, por lo que dicho ciclo podemos verlo como una subdivisión recubridora balanceada enraizada del multigrafo con vértices x, y y dos aristas que lo conectan (véase Figura 10.0.2).

Por ello, nos preguntamos si dado un grafo H , existe una constante c (que dependa solo de H) tal que cualquier grafo con n vértices y grado mínimo $n/2 + c$ contenga una subdivisión recubridora balanceada de H . Es decir, nos preguntamos lo siguiente:

Pregunta 10.0.2. *Sea H grafo con t vértices. ¿Existe una constante $c(H)$ tal que todo grafo G con n vértices, $\delta(G) \geq n/2 + c(H)$ y todo conjunto de vértices S de tamaño t contenga una subdivisión recubridora balanceada enraizada en S de H ?*

Bibliografía

- [1] N. Alon and J. H. Spencer. *The probabilistic method*. John Wiley & Sons, 2016.
- [2] B. Ashton. Graph theory in DNA sequencing: Unveiling genetic patterns. *International Journal of Biology and Life Sciences*, 3(1):9–13, 2023.
- [3] C. Berge. *Graphs and hypergraphs*, volume Vol. 6 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, revised edition, 1976. Translated from the French by Edward Minieka.
- [4] E. Çakir, Z. Ulukan, and T. Acarman. Shortest fuzzy hamiltonian cycle on transportation network using minimum vertex degree and time-dependent Dijkstra’s algorithm. *IFAC-PapersOnLine*, 54(2):348–353, 2021.
- [5] G. Chartrand, S. F. Kapoor, and H. V. Kronk. A generalization of Hamiltonian-connected graphs. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 48:109–116, 1969.
- [6] S. D. Chen, H. Shen, and R. Topor. An efficient algorithm for constructing Hamiltonian paths in meshes. *Parallel Computing*, 28(9):1293–1305, 2002.
- [7] V. Chvátal. On Hamilton’s ideals. *J. Combinatorial Theory Ser. B*, 12:163–168, 1972.
- [8] B. Csaba, D. Kühn, A. Lo, D. Osthus, and A. Treglown. Proof of the 1-factorization and Hamilton decomposition conjectures. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 244(1154):v+164, 2016.
- [9] J. B. David Simchi-Levi, Xin Chen. *The logic of logistics: theory, algorithms, and applications for logistics management*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer New York, NY, 3 edition, 1997.
- [10] G. A. Dirac. Some theorems on abstract graphs. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(1):69–81, 1952.
- [11] R. J. Faudree, J. Lehel, and K. Yoshimoto. Note on locating pairs of vertices on Hamiltonian cycles. *Graphs and Combinatorics*, 30(4):887–894, 2014.
- [12] M. R. Gary and D. S. Johnson. *Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness*, 1979.

- [13] P. Girard, C. Landrault, S. Pravossoudovitch, and D. Severac. Reducing power consumption during test application by test vector ordering. In *1998 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, volume 2, pages 296–299. IEEE, 1998.
- [14] R. J. Gould. Recent advances on the Hamiltonian problem: Survey III. *Graphs Combin.*, 30(1):1–46, 2014.
- [15] W. He, H. Li, and Q. Sun. Locating any two vertices on Hamiltonian cycles in large graphs. *Discrete Math.*, 343(9):111941, 15, 2020.
- [16] S. Janson, T. Luczak, and A. Rucinski. *Random graphs*. John Wiley & Sons, 2011.
- [17] M. Karpinski. Polynomial time approximation schemes for some dense instances of NP-hard optimization problems. volume 30, pages 386–397. 2001. Approximation algorithms for combinatorial optimization problems.
- [18] D. Kühn, D. Osthus, and A. Treglown. Hamiltonian degree sequences in digraphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 100(4):367–380, 2010.
- [19] H. Lee, M. Pavez-Signé, and T. Petrov. Spanning clique subdivisions in pseudorandom graphs. *arXiv preprint arXiv:2504.01642*, 2025.
- [20] J. B. Leite and J. R. S. Mantovani. Distribution system state estimation using the Hamiltonian cycle theory. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 7(1):366–375, 2015.
- [21] S. Letzter. Monochromatic cycle partitions of 2-coloured graphs with minimum degree $3n/4$. *Electron. J. Combin.*, 26(1):Paper No. 1.19, 67, 2019.
- [22] A. Lo and V. Patel. Hamilton cycles in sparse robustly expanding digraphs. *Electron. J. Combin.*, 25(3):Paper No. 3.44, 21, 2018.
- [23] O. Ore. Hamilton connected graphs. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 42:21–27, 1963.
- [24] M. Pavez-Signé. Spanning subdivisions in Dirac graphs. *Combin. Probab. Comput.*, 33(1):121–128, 2024.
- [25] N. C. Strole. The IBM token-ring network—a functional overview. *IEEE Network*, 1(1):23–30, 1987.
- [26] M. A. Trujillo Achury. The Hamiltonian path problem applied to genomes assembly. 2019.
- [27] J. Wei and Z. You. The degrees, number of edges, spectral radius and weakly Hamilton-connectedness of bipartite graphs. *arXiv preprint arXiv:1809.05265*, 2018.