



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INFORMÁTICA Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

Jardines del Edén en redes dinámicas finitas

Tesis para optar al grado de
MAGISTER EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

POR

Nikolas Fernando Jara Cádiz

Profesor Guía: Dr. Julio Bernardo Aracena Lucero (Universidad de Concepción).

XX de XX de 2026,
Concepción, Chile.

© 2026 Nikolas Fernando Jara Cádiz

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento.

Agradecimientos

Índice general

Agradecimientos	II
Contenido	III
Índice de figuras	v
1. Introducción	1
1.1. Organización de contenidos	3
2. Definiciones	5
2.1. Conceptos básicos	5
2.2. Redes dinámicas finitas	9
2.3. Familia acotada	13
3. Digrafo de interacción y Jardines del Edén	17
3.1. Redes dinámicas finitas con digrafos de interacción no conexos	17
3.2. Resultados generales	21

4. Jardines del Edén en redes disyuntivas y conjuntivas	31
4.1. Cotas dado el digrafo de interacción	31
4.2. Máximo y mínimo de Jardines del Edén.	42
4.3. Familias n-acotadas	47
5. Complejidad temporal	79
5.1. Resultados generales.	79
5.2. Redes disyuntivas y conjuntivas.	82
5.3. Familias acotadas	88
5.4. Conclusiones.	91
5.5. Trabajo futuro	92
Bibliografía	95

Índice de figuras

2.1. Digrafos D , D' y su versión canónica $\mathbf{C}(D)$ de ejemplo 2.1.	8
2.2. $D_I(f)$ del Ejemplo 2.2.1.	11
2.3. $D(f)$ del Ejemplo 2.2.1	12
3.1. Digrafo D de Ejemplo 3.2.1.	22
3.2. Digrafo D con $\Delta^+(D) = 1$	27
3.3. Digrafo $\overset{\circ}{K}_5$	30
4.1. Digrafo de iteración para la red disyuntiva $f[D]$	35
4.2. Digrafo de interacción para las funciones f y g	35
4.3. Digrafo $\overset{\circ}{C}_3$ y su versión canónica $\mathbf{C}(\overset{\circ}{C}_3)$	36
4.4. Digrafo de iteración para $f[\overset{\circ}{C}_3]$ y $f[\overset{\circ}{C}_6]$	38
4.5. $\mathbf{C}(\overset{\circ}{C}_6)$	39
4.6. Cotas (4.1.1) y (4.1.2) para digrafo ciclo doble.	40
4.7. Digrafo C de Ejemplo 4.2.1.	44

4.8. Digrafo D de Ejemplo 4.2.1.	44
4.9. Digrafos que cumplen Corolario 4.2.6.	47
4.10. Digrafos de iteración $D_I(f)$ y $D_I(f^T)$ de Ejemplo 4.3.1.	59
4.11. Digrafos de Ejemplo 4.3.2.	64
4.12. Comparación de Algoritmo 1 con $\text{mbf}(k)$	70
4.13. $\mathcal{C}(k)$ dado por Algoritmo 1.	71
4.14. Digrafos D y \widehat{D} de Ejemplo 4.3.5.	75
4.15. Digrafo D de Ejemplo 4.3.6 y estructura de su matriz de adyacencia M	75
5.1. Digrafo de interacción de para Teorema 5.1.1.	80
5.2. Digrafo D_a de Ejemplo 5.2.1.	84
5.3. Iteraciones del Algoritmo 2 sobre el digrafo de Figura 5.2.	85
5.4. Algoritmo 3 sobre digrafo de Figura 5.2.	87
5.5. Algoritmo 3 sobre digrafo D_b de Ejemplo 5.2.2.	87

Introducción

Las redes dinámicas finitas constituyen una base esencial para modelar sistemas complejos en diversas áreas del conocimiento, como la biología, la informática y la física. Estas redes, representadas mediante funciones de transición sobre espacios finitos, permiten estudiar la evolución de configuraciones discretas a lo largo del tiempo. Su flexibilidad ha favorecido su uso en la modelación de redes de regulación génica, teoría de redes sociales, autómatas celulares y sistemas distribuidos [3, 9, 13, 15, 19].

El estudio de este tipo de sistemas tiene sus raíces en los trabajos pioneros de Kauffman sobre redes genéticas booleanas [12], donde se propuso un modelo para describir la estabilidad y la diversidad de los estados celulares a partir de funciones lógicas sobre variables binarias. Desde entonces, las *redes dinámicas finitas* se han consolidado como un marco teórico fundamental para comprender la dinámica discreta de sistemas complejos.

A lo largo de las últimas décadas, distintos autores han demostrado que la estructura del digrafo de interacción —el digrafo que describe las dependencias entre las variables del sistema— determina propiedades globales de la dinámica, tales como el número de puntos fijos, el

rango de la función global y la existencia de ciclos límite [1, 17]. En este contexto, las redes booleanas disyuntivas y conjuntivas (en las que las funciones locales son de tipo OR o AND, respectivamente) han ocupado un lugar central por su simplicidad estructural y su relevancia biológica [11].

En los últimos años, el estudio del rango y de la influencia del digrafo de interacción ha sido profundizado por Gadouleau [4–6], quien desarrolló una caracterización combinatoria del rango y del rango periódico en función de la estructura del grafo. Sus resultados ampliaron los trabajos previos de Aracena y Richard al demostrar que la topología del digrafo no solo determina la cantidad de puntos fijos, sino también la capacidad de la red para generar configuraciones distintas en su espacio de estados.

De manera particularmente relevante para este trabajo, Gadouleau introdujo la *versión canónica de un digrafo*, una herramienta que permite eliminar redundancias estructurales preservando las relaciones funcionales esenciales. Esta noción se ha mostrado especialmente útil en el análisis de redes disyuntivas, ya que permite establecer correspondencias entre la estructura del grafo y las imágenes alcanzables de la red, evitando el crecimiento exponencial en el espacio de estados. En este trabajo, se emplea dicha herramienta como base para construir cotas y resultados estructurales que describen la cantidad de configuraciones sin preimagen o *Jardines del Edén*.

El concepto de Jardines del Edén fue introducido originalmente en el contexto de autómatas celulares por Moore [14], refiriéndose a configuraciones que no poseen preimagen bajo la dinámica del sistema. Si bien esta noción ha sido ampliamente estudiada en modelos celulares unidimensionales, su análisis en redes dinámicas finitas de estructura arbitraria ha recibido considerablemente menos atención. Algunos trabajos, como el de Tošić [20], abordaron el conteo de Jardines del Edén en sistemas secuenciales sobre grafos bipartitos, pero la relación entre la estructura del digrafo de interacción y la existencia de estas configuraciones permanece abierta y poco caracterizada en el caso general.

La identificación de Jardines del Edén, así como de otras propiedades dinámicas como los puntos fijos o los ciclos límite, presenta desafíos computacionales significativos. En general, determinar si una configuración pertenece a la imagen de una red dinámica puede requerir tiempo

exponencial respecto del tamaño del sistema. Por ello, resulta crucial desarrollar herramientas estructurales que permitan deducir propiedades globales de la red sin analizar explícitamente cada configuración. El digrafo de interacción, en conjunto con su versión canónica, ofrece un marco prometedor para este propósito, al condensar la información de dependencia entre variables y reflejar la influencia combinatoria en la dinámica global.

Cabe destacar que la presente tesis de magíster constituye una continuación y extensión natural de la investigación iniciada en el trabajo de título del autor [10]. A partir de los primeros acercamientos allí expuestos sobre la existencia de Jardines del Edén, el actual documento profundiza significativamente en el marco teórico, algorítmico y combinatorio del problema.

Motivado por estos avances, este trabajo propone un estudio sistemático de los Jardines del Edén en redes dinámicas finitas, centrado en cómo la estructura del digrafo de interacción condiciona su existencia y cantidad. Se formulan cotas teóricas para el número de Jardines del Edén en redes disyuntivas y conjuntivas, y se desarrollan algoritmos polinomiales que permiten determinar parámetros estructurales asociados a dichas configuraciones.

A lo largo de este trabajo, se abordará el análisis teórico de redes dinámicas finitas, con especial énfasis en la relación entre la estructura del digrafo de interacción y la aparición de Jardines del Edén. Asimismo, se presentarán resultados para redes con digrafos no conexos, se estudiarán los casos disyuntivo y conjuntivo, y se explorarán aspectos relacionados con la complejidad temporal y computacional de los problemas asociados.

1.1. Organización de contenidos

El trabajo realizado en esta memoria está organizado en capítulos dispuestos de la siguiente forma:

- **Capítulo 2: Definiciones.**

Se presentan los conceptos básicos necesarios, como grafos, digrafos, redes dinámicas finitas, redes booleanas disyuntivas y conjuntivas, y se formalizan los conceptos de Jardines del Edén, puntos fijos y digrafos de interacción.

- **Capítulo 3: Digrafo de interacción y Jardines del Edén.**

Se estudia cómo la estructura del digrafo de interacción afecta la existencia de Jardines del Edén. Se establecen resultados generales y se analiza especialmente el caso de digrafos no conexos, mostrando cómo se pueden descomponer los problemas en componentes más simples.

- **Capítulo 4: Jardines del Edén en redes disyuntivas y conjuntivas.**

Se analizan las redes disyuntivas y conjuntivas, donde las funciones de activación local son del tipo OR o AND, respectivamente. Se derivan cotas para la cantidad de Jardines del Edén en función del digrafo de interacción y se detallan casos particulares de interés. Adicionalmente, se vincula el problema del rango con el conteo de uniones de conjuntos, lo que permite aprovechar sus propiedades combinatoriales para caracterizar de mejor manera el rango de la red.

- **Capítulo 5: Complejidad temporal.**

Se aborda la complejidad computacional asociada a determinar Jardines del Edén y puntos fijos en redes dinámicas finitas. Se distinguen casos generales y casos particulares para redes disyuntivas y conjuntivas, proponiendo algoritmos y evaluando su rendimiento.

- **Capítulo 6: Conclusiones y trabajo futuro.**

Se resumen los principales resultados obtenidos a lo largo del trabajo, destacando las contribuciones teóricas sobre la relación entre el digrafo de interacción y la aparición de Jardines del Edén en redes dinámicas finitas. Además, se discuten posibles líneas de investigación futura, como la extensión a redes más generales, el estudio de dinámicas no paralelas y el análisis de la complejidad computacional asociada.

Definiciones

2.1. Conceptos básicos

Un **grafo** G es un par ordenado (V, E) , donde $V \neq \emptyset$ es un conjunto finito de vértices y $E \subseteq \{e \in \mathcal{P}(V) : |e| = 2\}$ un conjunto de aristas. Dado un grafo G , $V(G)$ y $E(G)$ denotan su conjunto de vértices y aristas, respectivamente. Una arista $\{u, v\} \in E$ se denota simplemente como uv .

Un grafo dirigido o **digrafo** D es un par ordenado (V, A) , donde $V \neq \emptyset$ es un conjunto finito de vértices y $A \subseteq V \times V$ un conjunto de arcos. Dado un grafo D , los conjuntos $V(D)$ y $A(D)$ denotan el conjunto de vértices y arcos de D , respectivamente. Un arco $(u, v) \in A$ se denota simplemente como uv . Si un grafo $G = (V, E)$ es tal que $|V| = 1$, se dice que es **trivial**. De manera similar, un digrafo $D = (V, A)$ se dice trivial si $|V| = 1$ y $A = \emptyset$.

Dado un grafo $G = (V, E)$ con conjunto de vértices $V = \{1, \dots, n\}$, se define su **matriz de adyacencia** $M_G = (m_{ij}) \in \{0, 1\}^{n \times n}$ como la matriz donde $m_{ij} = 1$ si $ij \in E$, y $m_{ij} = 0$ en caso contrario. De manera análoga, para un digrafo $D = (V, A)$, su matriz de adyacencia M_D

se define haciendo $m_{ij} = 1$ si el arco $ij \in A$, y $m_{ij} = 0$ en el resto de los casos.

Dado un digrafo $D = (V, A)$ y un vértice $v \in V$, se define la **vecindad de salida** $N^+(v)$ y la **vecindad de entrada** $N^-(v)$ de v como sigue:

$$N^+(v) := \{u \in V(D) : vu \in A(D)\} \quad N^-(v) := \{u \in V(D) : uv \in A(D)\}.$$

Se define el **grado de salida** y **grado de entrada** de un vértice $v \in V$ como $d^+(v) := |N^+(v)|$ y $d^-(v) := |N^-(v)|$, respectivamente. Lo anterior permite definir el **grado de salida máximo** de un digrafo D como $\Delta^+(D) := \max_{v \in V(D)} d^+(v)$.

En caso de existir ambigüedades, se utilizará la notación $N_D^+(v)$ para la vecindad de entrada y $N_D^-(v)$ para la vecindad de salida del vértice $v \in V(D)$. De manera similar, $d_D^+(v)$ el grado de entrada y $d_D^-(v)$ el grado de salida del vértice $v \in V(D)$.

Dado un grafo $G = (V, E)$, se dice que una secuencia de vértices v_0, \dots, v_{n-1}, v_n es un **recorrido** si para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $v_i v_{i+1} \in E$. Más aún, se dice **camino** si no hay vértices repetidos (excepto por el caso $v_0 = v_n$). Además, si es un camino y además $v_0 = v_n$, a la secuencia se le denomina **ciclo** de largo n . De manera equivalente, en los digrafos, al reemplazar en la definición de recorrido, la condición $v_i v_{i+1} \in E$ por $v_i v_{i+1} \in A$, se obtiene la definición de **camino dirigido** y **ciclo dirigido** respectivamente. Si en un grafo (o digrafo) G no hay ciclos (o ciclos dirigidos), G se dice **acíclico**.

Sea el grafo $G = (V, E)$, se dice que G es **conexo** si es trivial o para todo par de vértices $u, v \in V$, existe un camino de u a v . De manera similar, se dice que un digrafo $D = (V, A)$ es **fuertemente conexo** si es trivial o para todo par de vértices $u, v \in V$, existe un camino dirigido de u a v .

Sea $G = (V, E)$ un grafo, se dice que $G' = (V', E')$ es **subgrafo** de G , denotado por $G' \subseteq G$, si G' es un grafo tal que $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$. De manera análoga, en el caso de dos digrafos $D = (V, A)$ y $D' = (V', A')$, se dice que D' es **subdigrafo** de D , denotado por $D' \subseteq D$, si $V' \subseteq V$ y $A' \subseteq A$. Notemos que si los vértices u y v forman una arista $uv \in E(G')$, entonces $u, v \in V(G')$, ya que G' es un grafo (de manera similar para los arcos de D').

Dado $G = (V, E)$ y $W \subseteq V$, se define el **subgrafo inducido** de G por W como el grafo

$G[W] = (W, \{uv \in E : u, v \in W\})$. De manera análoga, se define para un digrafo $D = (V, A)$, el **subdigrafo inducido** de D por W como $D[W] = (W, \{uv \in A : u, v \in W\})$.

Dado $G = (V, E)$, se dice que $W \subseteq V$ es una **componente conexa** de G si $G[W]$ es conexo y para cualquier $U \subseteq V$ que contenga estrictamente a W , el subgrafo inducido $G[U]$ no es conexo. De manera similar, dado un digrafo $D = (V, A)$, se dice que $W \subseteq V$ es una **componente fuertemente conexa** de D si el subdigrafo inducido $D[W]$ es fuertemente conexo y para cualquier $U \subseteq V$ que contenga estrictamente a W , el subdigrafo inducido $D[U]$ no es fuertemente conexo.

El **grafo subyacente** de un digrafo $D = (V, A)$ es el grafo $G = (V, E)$, donde $E = \{\{u, v\} : uv \in A \wedge u \neq v\}$.

Un digrafo D se dice **conexo** si su grafo subyacente es conexo.

Dado un digrafo $D = (V, A)$ y un subconjunto de vértices $W \subseteq V$, definimos el digrafo $D \setminus W := D[V \setminus W]$.

Las definiciones 2.1 a 2.3 se obtienen desde [5].

Definición 2.1. Un digrafo $D = (V, A)$ es **dirigido-bipartito** si podemos particionar V en conjuntos F y S tales que D solo tiene arcos de F a S . Al conjunto de vértices en F se les conoce como **fuentes** y a los vértices en S como **sumideros**.

Definición 2.2. Un sumidero $j \in S = \{1, \dots, n\}$ de un digrafo dirigido-bipartito D es **redundante** si satisface una de las siguientes condiciones:

- (I) Es un vértice aislado.
- (II) Existe $i \in S$, con $i < j$ tal que $N^-(i) = N^-(j)$.
- (III) Existe $J \subseteq S \setminus \{j\}$ tal que $|J| \geq 2$ y $N^-(J) = N^-(j)$.

Una fuente $k \in F$ es redundante si es un vértice aislado.

El conjunto de vértices redundantes de D se denota como $R(D)$. Dado un conjunto T de vértices redundantes en un digrafo dirigido-bipartito D , entonces se tiene que $R(D \setminus T) = R(D) \setminus T$ [5]. Lo anterior muestra que los vértices redundantes se pueden encontrar de manera paralela o iterativa.

Un digrafo dirigido-bipartito sin vértices redundantes se dice que es **canónico**. En un digrafo canónico, no hay vértices aislados y, por lo tanto, F y S son únicos.

Definición 2.3. Sea el digrafo $D = (\{1, \dots, n\}, A)$. Se define el **digrafo bipartito** de D como $D' = (V', A')$, donde $V' = V \cup \{v' : v \in V\}$ y $A' = \{u'v : uv \in A\}$. Además, se define la **versión canónica** de D como $\mathbf{C}(D) = D' \setminus R(D')$. Lo anterior incita a particionar V en 3 conjuntos distintos:

- $\mathbf{V}_{\text{ind}}(D) := \{v \in V : v \in V(\mathbf{C}(D))\}$ como el conjunto de vértices de D que no son redundantes en D' .
- $\mathbf{V}_{\text{C}}(D) := \{v \in V : N_D^-(v) = \emptyset\}$ como el conjunto de vértices de D sin arcos de entradas y por lo tanto redundantes en D' .
- $\mathbf{V}_{\text{dep}}(D) := V \setminus (\mathbf{V}_{\text{C}}(D) \cup \mathbf{V}_{\text{ind}}(D))$ como el conjunto de vértices de D con arcos de entradas pero que resultan redundantes en D' .

De esta forma, por simplicidad definimos el conjunto $\mathbf{V}_{\text{R}}(D) := \mathbf{V}_{\text{C}}(D) \cup \mathbf{V}_{\text{dep}}(D)$ como el conjunto de vértices de D redundantes en D' , el conjunto $\mathbf{V}_{\text{P}}(D)$ como el conjunto de los vértices con grado de salida no nula en D y conjunto $\mathbf{V}'_{\text{P}}(D)$ como el conjunto de vértices fuentes de $\mathbf{C}(D)$ y por tanto, las copias de $\mathbf{V}_{\text{P}}(D)$. Notemos que para todo $i \in \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$, la copia de $N_D^-(i)$ en $\mathbf{C}(D)$ es $N_{\mathbf{C}(D)}^-(i)$.

Ejemplo 2.1. Tomemos por ejemplo, el digrafo D de la Figura 2.1.

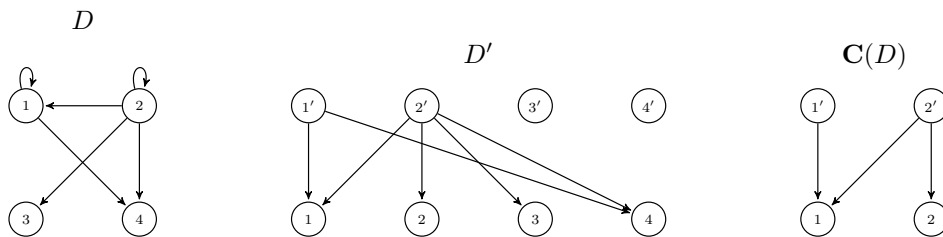


Figura 2.1: Digrafos D , D' y su versión canónica $\mathbf{C}(D)$ de ejemplo 2.1.

Notemos que los vértices $3'$, $4'$ son redundantes ya que son vértices aislados. Los vértices 3 y 4 también son redundantes, en efecto, $2 < 3$ y $N_{D'}^-(3) = N_{D'}^-(2) = \{2'\}$ y en el caso del vértice

4, $1 < 4$ y $N_{D'}^-(4) = N_{D'}^-(1) = \{1', 2'\}$. Para este caso $\mathbf{V}_P(D) = \{1, 2\}$, $\mathbf{V}'_P(D) = \{1', 2'\}$, $\mathbf{V}_{\text{ind}}(D) = \{1, 2\}$, $\mathbf{V}_{\text{dep}}(D) = \{3, 4\}$, $\mathbf{V}_C(D) = \emptyset$ y $\mathbf{V}_R(D) = \mathbf{V}_{\text{dep}}(D)$. Notemos además que $N_D^-(2) = \{2\}$ y $N_{C(D)}^-(2) = \{2'\}$.

2.2. Redes dinámicas finitas

Dado $q \in \mathbb{N}$, se define el conjunto $\llbracket q \rrbracket := \{0, \dots, q-1\}$. Una **red dinámica finita** de n elementos se define como una función

$$f : \llbracket q \rrbracket^n \rightarrow \llbracket q \rrbracket^n$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)),$$

donde x es una **configuración** y las funciones $f_i : \llbracket q \rrbracket^n \rightarrow \llbracket q \rrbracket$ son llamadas **funciones de activación local**. Por simplicidad, una configuración $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ se denotará compactamente por $x_1 x_2 \dots x_n$.

En el caso particular de $q = 2$, se dice que f es una **red booleana**.

Una red booleana $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ se denomina **red conjuntiva** si cada una de sus funciones de activación local $f_i : \{0, 1\}^m \rightarrow \{0, 1\}$ es de tipo AND, es decir,

$$f_i(x) = \text{AND}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) = x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_m} = 0 \Leftrightarrow \exists j : x_{i_j} = 0.$$

De manera análoga, si todas las funciones de activación local f_i son de tipo OR, es decir,

$$f_i(x) = \text{OR}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) = x_{i_1} \vee \dots \vee x_{i_m} = 1 \Leftrightarrow \exists j : x_{i_j} = 1,$$

entonces f se denomina **red disyuntiva**.

Dado un digrafo $D = (\{1, \dots, n\}, A)$, denotaremos por $f[D] : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ a la red

disyuntiva inducida por D , cuyas funciones de activación local están dadas por:

$$f[D]_i(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } d^-(i) = 0, \\ \bigvee_{j \in V: ji \in A} x_j & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $d^-(i)$ denota el grado de entrada del vértice i en D .

Dada una red dinámica finita de n variables $f : \llbracket q \rrbracket^n \rightarrow \llbracket q \rrbracket^n$ y una configuración $y \in \llbracket q \rrbracket^n$, se definen los siguientes conceptos dinámicos:

- y es **imagen** si existe $x \in \llbracket q \rrbracket^n$ tal que $f(x) = y$,
- y es **Jardín del Edén** si *no* existe $x \in \llbracket q \rrbracket^n$ tal que $f(x) = y$,
- y es **punto fijo** si $f(y) = y$,
- y es **punto periódico** si existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $f^p(y) = y$,
- y es **transiente** si *no* existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $f^p(y) = y$.

Notemos que, bajo esta definición, los puntos fijos son puntos periódicos, y los puntos periódicos son imágenes. A su vez, los Jardines del Edén son transientes.

Denotaremos por $\text{Im}(f)$, $\text{Fix}(f)$, $\text{Per}(f)$ y $\text{Eden}(f)$ a los conjuntos de todas las configuraciones que son imágenes, puntos fijos, puntos periódicos y Jardines del Edén, respectivamente. Sus cardinalidades se denotan como el rango ($\text{rank}(f)$), la cantidad de puntos fijos o rango fijo ($\text{fix}(f)$), la cantidad de puntos periódicos o rango periódico ($\text{per}(f)$) y la cantidad de Jardines del Edén ($\text{eden}(f)$). Adicionalmente, se define la **altura** de la red f ($h(f)$), que representa el valor mínimo k tal que para toda configuración x , la iteración $f^k(x)$ es un punto periódico, es decir:

$$h(f) = \text{mín}\{k \in \mathbb{N}_0 : \exists p \in \mathbb{Z}^+, f^{k+p} = f^k\}.$$

Ejemplo 2.2.1. Consideremos la siguiente red booleana $f : \{0, 1\}^4 \rightarrow \{0, 1\}^4$ donde para cada

$x \in \{0, 1\}^4$, sus funciones locales son:

$$f_1(x) = x_1 \wedge \overline{x_2}, \quad f_2(x) = x_1, \quad f_3(x) = f_4(x) = x_3.$$

Se puede comprobar que $y = 1101$ es un Jardín del Edén ya que $y_3 \neq y_4$. Por otro lado, $x = 0011$ es un punto fijo puesto que $f(x) = x$, mientras que $z = 0111$ es un estado transiente, ya que $f(z) = 0011$ (el cual evoluciona hacia un punto fijo).

Definición 2.4. Dada una red dinámica finita $f : \llbracket q \rrbracket^n \rightarrow \llbracket q \rrbracket^n$, se define el **digrafo de iteración** (o **digrafo de la dinámica**) como:

$$D_I(f) := (\llbracket q \rrbracket^n, \{(x, f(x)) : x \in \llbracket q \rrbracket^n\}).$$

Bajo esta representación gráfica, la dinámica del sistema adopta una interpretación topológica muy natural, donde las configuraciones son los vértices de $D_I(f)$ y las transiciones corresponden a arcos dirigidos. Así, un **punto fijo** se visualiza como un bucle (un arco de un vértice hacia sí mismo), un **punto periódico** de periodo p corresponde a un ciclo dirigido de longitud p , y los estados **transientes** forman caminos dirigidos que actúan como ramas que eventualmente desembocan en algún atractor (ciclo o bucle). Por su parte, los **Jardines del Edén** son exactamente las hojas o nodos fuente de estos árboles de transición, es decir, vértices con grado de entrada igual a cero.

Ejemplo 2.2.2. En la Figura 2.2 se presenta el digrafo de iteración de la red booleana definida en el Ejemplo 2.2.1.

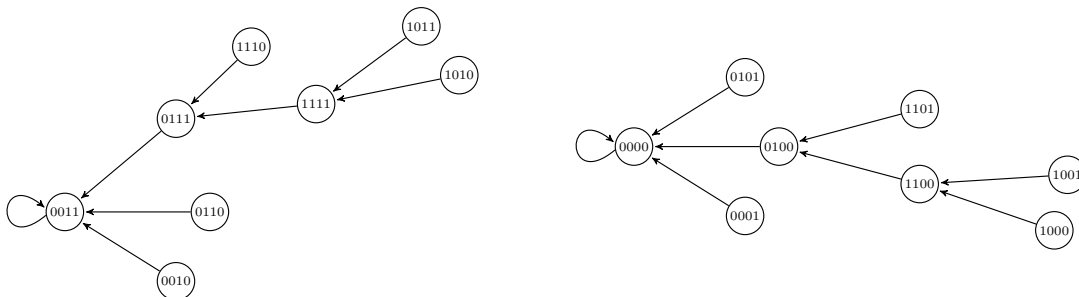


Figura 2.2: $D_I(f)$ del Ejemplo 2.2.1.

Observemos que, a partir de la interpretación anterior, se verifica directamente que para cualquier red dinámica finita f , la cantidad de Jardines del Edén es:

$$\text{eden}(f) = |\{v \in V(D_I(f)) : d^-(v) = 0\}|.$$

Además, se pueden ver de manera más sencilla a que categoría corresponde cada configuración y que el valor de la altura $h(f) = 3$.

Decimos que una función de activación local $f_j : \llbracket q \rrbracket^n \rightarrow \llbracket q \rrbracket$ **depende** de la variable i si existen configuraciones $x, z \in \llbracket q \rrbracket^n$ distintas tales que $x_l = z_l$ para todo $l \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, pero $f_j(x) \neq f_j(z)$.

Definición 2.5. Dada la red dinámica finita $f : \llbracket q \rrbracket^n \rightarrow \llbracket q \rrbracket^n$, se define el **digrafo de interacción** de f como:

$$D(f) := (\{1, \dots, n\}, \{ij : f_j \text{ depende de la variable } i\}).$$

Notemos además que la red disyuntiva inducida por un digrafo D cumple que $D(f[D]) = D$.

Ejemplo 2.2.3. La Figura 2.3 presenta el digrafo de interacción de la función booleana definida en el Ejemplo 2.2.1.

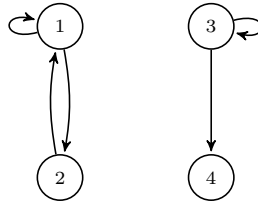


Figura 2.3: $D(f)$ del Ejemplo 2.2.1

Sea la red dinámica finita $f : \llbracket q \rrbracket^n \rightarrow \llbracket q \rrbracket^n$ y $x \in \llbracket q \rrbracket^n$ una configuración. Dado el digrafo de interacción D y un vértice $v \in V(D)$, se denota por x_v al valor del vértice v en la configuración x . Análogamente, para un subconjunto $S = \{s_1, \dots, s_m\} \subseteq V(D)$, se denota por $x|_S := (x_{s_1}, \dots, x_{s_m})$ a la restricción de la configuración x sobre los vértices en S . Adicionalmente, dado $p \in \mathbb{Z}$, se utilizará la notación $x|_S = \vec{p}$ para indicar que $x_i = p$ para todo $i \in S$.

Definición 2.6. Sea la red dinámica finita $f : \llbracket q \rrbracket^n \rightarrow \llbracket q \rrbracket^n$ con digrafo de interacción D y sea $S \subseteq V(D) = \{1, \dots, n\}$. Se define la proyección de las imágenes sobre S , denotada por $\text{Im}(f; S)$, como el conjunto de los vectores $y \in \llbracket q \rrbracket^S$ tales que $f(x)|_S = y$ para algún $x \in \llbracket q \rrbracket^n$. Consecuentemente, se define $\text{rank}(f; S) = |\text{Im}(f; S)|$.

Por el contrario, se define la función $\text{eden}(f; S) = |\{y \in \llbracket q \rrbracket^S : y \notin \text{Im}(f; S)\}|$. Para simplificar la notación, cuando $S = \{v\}$ está compuesto por un único vértice $v \in V(D)$, se escribirá $\text{Im}(f; v)$ en lugar de $\text{Im}(f; \{v\})$, y de manera análoga, los valores $\text{rank}(f; v)$ y $\text{eden}(f; v)$ representarán $\text{rank}(f; \{v\})$ y $\text{eden}(f; \{v\})$, respectivamente.

Notemos que si $S = V(D)$, se recuperan las definiciones globales del sistema, teniéndose que $\text{rank}(f) = \text{rank}(f; S)$ y $\text{eden}(f) = \text{eden}(f; S)$. Además, es directo notar que $\text{rank}(f; S) + \text{eden}(f; S) = q^{|S|}$, ya que este valor corresponde al total de configuraciones posibles para los vértices en S . Por completitud y simplicidad algebraica, se define $\text{rank}(f; \emptyset) = 1$ y $\text{eden}(f; \emptyset) = 0$.

Finalmente, se dice que un vértice $v \in V(D)$ es de **rango completo** en f si $\text{rank}(f; v) = q$.

2.3. Familia acotada

Definición 2.7. Sea $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_n\}$ una familia de conjuntos. Definimos la familia generada por \mathcal{F} como

$$\langle \mathcal{F} \rangle := \left\{ \bigcup_{A \in \mathcal{I}} A : \mathcal{I} \subseteq \mathcal{F} \right\}.$$

Diremos que B es **generado** por \mathcal{F} si $B \in \langle \mathcal{F} \rangle$. Adoptaremos la convención usual donde la unión sobre una subfamilia vacía es el conjunto vacío, por lo que $\emptyset \in \langle \mathcal{F} \rangle$ para toda familia \mathcal{F} .

Lo anterior motiva la definición del siguiente problema computacional:

Problema 1 (#UNION-CLOSURE).

- Dada una colección finita de conjuntos finitos \mathcal{F} , determinar el cardinal de la clausura por unión de \mathcal{F} , es decir, $|\langle \mathcal{F} \rangle|$.

Definición 2.8. Sea $[n] = \{1, \dots, n\}$. Una familia de conjuntos \mathcal{F} se dice ***n-familia*** si

$$\langle \mathcal{F} \rangle \subseteq \mathcal{P}([n]).$$

Es decir, todas las uniones de subfamilias de \mathcal{F} son subconjuntos de $[n]$.

Notemos que a cualquier familia finita sobre un conjunto finito se le puede reetiquetar su universo para que sea un subconjunto de $[n]$.

Definición 2.9. Sea \mathcal{F} una familia de conjuntos. Un conjunto $R \in \mathcal{F}$ se dice ***redundante*** en \mathcal{F} si al eliminarlo de \mathcal{F} , se generan la misma cantidad de conjuntos, esto es:

$$|\langle \mathcal{F} \rangle| = |\langle \mathcal{F} \setminus \{R\} \rangle|.$$

De la misma forma, un elemento $r \in \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$ se dice ***redundante*** si al eliminarlo de todos los conjuntos en \mathcal{F} se generan la misma cantidad de conjuntos bajo uniones, esto es:

$$|\langle \mathcal{F} \rangle| = |\langle \{A \setminus \{r\} : A \in \mathcal{F}\} \rangle|.$$

Definición 2.10. Una n -familia \mathcal{F} se dice ***acotada*** si no contiene conjuntos redundantes y satisface:

$$|\mathcal{F}| \leq n.$$

Notemos que, dados $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \geq n$, si \mathcal{F} es una n -familia acotada, entonces \mathcal{F} es trivialmente una m -familia acotada (pues $\mathcal{P}([n]) \subset \mathcal{P}([m])$).

Notar que dado $k \in \mathbb{N}$ siempre existe un $n \geq k$ tal que \mathcal{F} es una n -familia acotada y $|\langle \mathcal{F} \rangle| = k$, basta considerar $\mathcal{F} = \{\{1, \dots, i-1\} : i = 1, \dots, k\}$. Luego tiene sentido el siguiente concepto.

Definición 2.11. Dado $k \in \mathbb{N}$, definimos:

$$\text{mbf}(k) := \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \text{existe una } n\text{-familia acotada } \mathcal{F} \text{ tal que } |\langle \mathcal{F} \rangle| = k \right\}.$$

Dada una n -familia $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_m\}$, podemos representar su estructura mediante una **matriz de pertenencia** $M(\mathcal{F}) = (m_{ij}) \in \{0, 1\}^{m \times n}$, definida por:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in A_i, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Esta representación matricial permite estudiar la clausura por unión desde la perspectiva del álgebra booleana. Para formalizarlo, dados dos vectores $u, v \in \{0, 1\}^k$, definimos su disyunción lógica $w = u \vee v$ mediante la operación componente a componente $w_i = u_i \vee v_i$. Asimismo, establecemos la relación de orden parcial $u \leq v$ si y solo si $u_i \leq v_i$ para toda componente i .

Utilizando estas operaciones, definimos la **clausura disyuntiva de filas** $\mathcal{V}_R(M)$ de la matriz M como el conjunto de todos los vectores generados mediante la disyunción lógica de subconjuntos de sus filas:

$$\mathcal{V}_R(M) := \left\{ \bigvee_{i \in \mathcal{I}} r_i : \mathcal{I} \subseteq [m] \right\},$$

donde r_i denota la i -ésima fila de M . De manera análoga, se define la **clausura disyuntiva de columnas** $\mathcal{V}_C(M)$ como el conjunto de vectores generados por la disyunción lógica sobre subconjuntos de las columnas c_j de M :

$$\mathcal{V}_C(M) := \left\{ \bigvee_{j \in \mathcal{J}} c_j : \mathcal{J} \subseteq [n] \right\}.$$

Por convención, la disyunción sobre un conjunto vacío de índices ($\mathcal{I} = \emptyset$ o $\mathcal{J} = \emptyset$) produce el **vector nulo** de la dimensión correspondiente. Este vector actúa como elemento neutro de la operación, asegurando la igualdad $|\langle \mathcal{F} \rangle| = |\mathcal{V}_R(M(\mathcal{F}))|$ al incluir el conjunto vacío $\emptyset \in \langle \mathcal{F} \rangle$.

Por simplicidad, definimos el **rango disyuntivo** de una matriz booleana M como:

$$\text{rank}^\vee(M) = |\mathcal{V}_R(M)|.$$

Definición 2.12. *Dada una matriz booleana M , se define su **forma minimal** M^* como la matriz resultante de aplicar el siguiente procedimiento:*

- (I) *Se eliminan filas y columnas repetidas, conservando solo una copia de cada una.*
- (II) *Se eliminan todas las filas expresables como disyunción lógica de otras ($r_i = \bigvee_{j \in J} r_j$).*
- (III) *Se eliminan todas las columnas expresables como disyunción lógica de otras ($c_k = \bigvee_{l \in L} c_l$).*

Dada una familia \mathcal{F} se define su **matriz minimal** $M^*(\mathcal{F})$ como la forma minimal de $M(\mathcal{F})$.

Digrafo de interacción y Jardines del Edén

El digrafo de iteración describe a la perfección la dinámica del sistema, pero su crecimiento exponencial puede volverlo inabordable para el análisis directo.

Para afrontar este problema, se estudia el digrafo de interacción, que captura las relaciones entre variables sin detallar la evolución temporal. Esto permite un análisis más manejable y la extracción de propiedades claves.

3.1. Redes dinámicas finitas con digrafos de interacción no conexos

Cuando el digrafo de interacción no es conexo, el sistema puede dividirse en componentes independientes, lo que simplifica su estudio. Esta estructura facilita la identificación de estados como los Jardines del Edén y su impacto en la dinámica global.

En esta sección, se establecerán cotas para este tipo de digrafos, proporcionando herramien-

tas para caracterizar su comportamiento.

Lema 3.1.1. *Sea una red dinámica finita $f : \llbracket q \rrbracket^n \rightarrow \llbracket q \rrbracket^n$ con digrafo de interacción $D = (V, A)$. Sea $\{V_1, \dots, V_m\}$ una partición de V . Entonces,*

$$\text{rank}(f) \leq \prod_{i=1}^m \text{rank}(f; V_i).$$

Además, si $\{V_1, \dots, V_m\}$ es una partición de los vértices de D por componentes conexas, entonces:

$$\text{rank}(f) = \prod_{i=1}^m \text{rank}(f; V_i).$$

Demostración. Se define la función:

$$F : \text{Im}(f) \rightarrow \text{Im}(f; V_1) \times \dots \times \text{Im}(f; V_m),$$

tal que $F(y) = (y|_{V_1}, \dots, y|_{V_m})$. Notemos que por definición, si $y \in \text{Im}(f)$ entonces, $y|_{V_i} \in \text{Im}(f; V_i)$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, es decir, F está bien definida.

Ahora, demostraremos que F es inyectiva. En efecto, supongamos que $F(y) = F(z)$ para $y, z \in \text{Im}(f)$. Entonces, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, $y|_{V_i} = z|_{V_i}$. De lo anterior y del hecho de que los V_i generan una partición de los vértices de D , se deduce que $y = z$. Por lo tanto, F es inyectiva y por lo tanto:

$$\text{rank}(f) = |\text{Im}(f)| \leq \prod_{i=1}^m |\text{Im}(f; V_i)| = \prod_{i=1}^m \text{rank}(f; V_i).$$

A continuación, probaremos que si $\{V_1, \dots, V_m\}$ es una partición de los vértices de D por componentes conexas, entonces F es sobreyectiva. Sea $z = (y^{(1)}, \dots, y^{(m)}) \in \text{Im}(f; V_1) \times \dots \times \text{Im}(f; V_m)$, entonces por definición, existe un $x^{(i)} \in \llbracket q \rrbracket^n$ tal que $f(x^{(i)})|_{V_i} = y^{(i)}$.

Sea $y \in \llbracket q \rrbracket^n$ tal que $y|_{V_i} = y^{(i)}$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ y sea $x \in \llbracket q \rrbracket^n$ tal que $x|_{V_i} = x^{(i)}|_{V_i}$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$. Probamos que $f(x) = y$.

Para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, el conjunto de vértices en V_i es una componente conexa del digrafo D , es decir, los vértices en V_i solo pueden depender de sí mismos. Además, como $x|_{V_i} = x^{(i)}|_{V_i}$,

se tiene que $f(x)|_{V_i} = f(x^{(i)})|_{V_i} = y^{(i)} = y|_{V_i}$. Lo anterior es válido para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, por lo tanto $f(x) = y$. Por lo anterior, $y \in \text{Im}(f)$ y $F(y) = z$, lo que demuestra que F es sobreyectiva.

Dado que F es inyectiva y sobreyectiva, se concluye que F es una biyección entre los conjuntos $\text{Im}(f)$ e $\text{Im}(f; V_1) \times \dots \times \text{Im}(f; V_m)$. De lo anterior se deduce que:

$$\text{rank}(f) = \prod_{i=1}^m \text{rank}(f; V_i).$$

■

Observación 1. *La función F puede ser biyectiva incluso si $\{V_1, \dots, V_m\}$ no es una partición en componentes conexas, por ejemplo, si $\text{rank}(f) = q^n$ se obtiene que:*

$$q^n = \text{rank}(f) \leq \prod_{i=1}^m \text{rank}(f; V_i) = \prod_{i=1}^m |\text{Im}(f; V_i)| = \prod_{i=1}^m q^{|V_i|} = q^n.$$

Lo cual prueba en este caso la sobreyectividad de F y, por consecuencia, la biyectividad.

El ejemplo anterior no es el único ejemplo de esto. Notemos que la red booleana:

$$g(x_1, x_2) = (x_2, 1)$$

no es biyectiva, el digrafo $D(g)$ es conexo y para la partición $\{\{1\}, \{2\}\}$, F es biyectiva.

Es más, para una red booleana arbitraria $h : \{0, 1\}^4 \rightarrow \{0000, 0011, 1100, 1111\}$, cuyo comportamiento coincida en las configuraciones dadas en Tabla 3.1,

x	$h(x)$
0000	0011
0001	1100
0010	0000
0110	1111
1110	0011

Tabla 3.1: Comportamiento de la red $h(x)$ de Observación 1.

se tiene que: h no es biyectiva, su digrafo de interacción es fuertemente conexo (contiene al

ciclo $C := x_1x_2x_3x_4x_1$) y para la partición $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$, F es biyectiva.

Ejemplo 3.1.1. Dada la red booleana del Ejemplo 2.2.1 y su digrafo de interacción de la Figura 2.3, si consideramos la partición $P_1 = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$, podemos notar que $\text{rank}(f; \{1, 3\}) = 4$ y $\text{rank}(f; \{2, 4\}) = 4$, así $\text{rank}(f) \leq 16$, lo cual es trivial.

Ahora, si consideramos la partición de vértices $P_2 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$, podemos probar que $\text{rank}(f; \{3, 4\}) = 2$ (ya que $y \in \text{Im}(f; \{3, 4\})$ si y solo si $y_3 = y_4$) y dado que $\text{rank}(f; \{1, 2\}) \leq 4$ tenemos que $\text{rank}(f) \leq \text{rank}(f; \{1, 2\}) \cdot \text{rank}(f; \{3, 4\}) = 4 \cdot 2 = 8$, es decir, tenemos una cota menor para $\text{rank}(f)$.

Notemos además que P_2 es una partición de vértices en componentes conexas y por lo tanto, podemos trabajar cada componente conexa por separado. Sabiendo que $\text{rank}(f; \{1, 2\}) = 3$, se tiene por el teorema anterior que $\text{rank}(f) = \text{rank}(f; \{1, 2\}) \cdot \text{rank}(f; \{3, 4\}) = 3 \cdot 2 = 6$, lo que coincide con lo descrito en la Figura 2.2.

Observemos que el teorema anterior nos dice que podemos encontrar cotas para $\text{rank}(f)$ separando su digrafo de interacción en componentes conexas y solo conociendo las relaciones entre algunas de sus funciones de activación local.

Corolario 3.1.2. Sea una red dinámica finita $f : \llbracket q \rrbracket^n \rightarrow \llbracket q \rrbracket^n$ con digrafo de interacción $D = (V, A)$. Sea $\{V_1, \dots, V_m\}$ una partición de V . Entonces,

$$\text{eden}(f) \geq q^n - \prod_{i=1}^m \text{rank}(f; V_i).$$

Demostración. Lema 3.1.1 nos dice que:

$$\text{rank}(f) \leq \prod_{i=1}^m \text{rank}(f; V_i),$$

y usando que $q^n - \text{rank}(f) = \text{eden}(f)$ obtenemos la desigualdad. ■

Corolario 3.1.3. Sea una red dinámica finita $f : \llbracket q \rrbracket^n \rightarrow \llbracket q \rrbracket^n$ con digrafo de interacción $D = (V, A)$. Sea $\{V_1, \dots, V_m\}$ una partición de V por componentes conexas. Entonces,

$$\text{eden}(f) = q^n - \prod_{i=1}^m \text{rank}(f; V_i) = q^n - \prod_{i=1}^m [q^{|V_i|} - \text{eden}(f; V_i)]$$

Demostración. Recordemos que $\text{rank}(f) + \text{eden}(f) = q^n$, así:

$$\text{eden}(f) = q^n - \text{rank}(f).$$

Por Lema 3.1.1, se tiene:

$$\text{eden}(f) = q^n - \prod_{i=1}^m \text{rank}(f; V_i).$$

Recordemos que $\text{rank}(f; V_i) = q^{|V_i|} - \text{eden}(f; V_i)$, demostrando así la igualdad. ■

Corolario 3.1.3 nos indica que estudiar cada componente conexa por separado es equivalente a estudiar el digrafo de manera general. Los enunciados posteriores no exigen conexidad, sin embargo, puede ser conveniente aplicarlos en las componentes conexas por separado.

3.2. Resultados generales

Teorema 3.2.1. *Sea $f : \llbracket q \rrbracket^n \rightarrow \llbracket q \rrbracket^n$ una red dinámica finita con digrafo de interacción $D = (V, A)$. Para cualquier $S \subseteq V$, se cumple que:*

$$\text{eden}(f) \geq \text{eden}(f; S) \cdot q^{n-|S|}.$$

Demostración. Sea $y \in \llbracket q \rrbracket^S$ tal que $y \notin \text{Im}(f; S)$. Consideremos una configuración arbitraria $z \in \llbracket q \rrbracket^n$ tal que $z|_S = y$. Por definición, si $z \in \text{Im}(f)$, entonces $y \in \text{Im}(f; S)$, lo que lleva a una contradicción. Por lo tanto, $z \notin \text{Im}(f)$, lo que implica que z es un Jardín del Edén.

Notemos que, para cada configuración $y \notin \text{Im}(f; S)$, existen $q^{n-|S|}$ configuraciones $z \in \llbracket q \rrbracket^n$ distintas tales que $z|_S = y$. De esto se deduce que, por cada una de las $\text{eden}(f; S)$ configuraciones distintas en los vértices de S , se generan $q^{n-|S|}$ Jardines del Edén. Por lo tanto, se cumple que:

$$\text{eden}(f) \geq \text{eden}(f; S) \cdot q^{n-|S|}.$$

■

El enunciado anterior nos permite escoger redes dinámicas finitas en digrafos, de manera

que éstas puedan tener una gran cantidad de Jardines del Edén.

Ejemplo 3.2.1. Consideremos el digrafo D de la Figura 3.1.

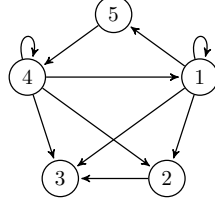


Figura 3.1: Digrafo D de Ejemplo 3.2.1.

Si buscamos una red booleana f tal que $D(f) = D$, entonces basta escoger $f : \{0, 1\}^5 \rightarrow \{0, 1\}^5$ tal que para $x \in \{0, 1\}^5$, $f_1(x) = f_2(x) = x_1 \wedge x_4$. Por lo tanto, $\text{eden}(f; \{1, 2\}) = 2$ y por consecuencia $\text{eden}(f) \geq 2 \cdot 2^{5-2} = 16$ independientemente de cómo sean las funciones de activación local de f de los demás vértices.

Observación 2. Notemos que en el ejemplo Ejemplo 3.2.1 utilizamos vértices con la misma vecindad para generar Jardines del Edén, sin embargo esto solo fue escogido por simplicidad. Más adelante, el Teorema 3.2.7 nos dará una forma para lograr esto utilizando el grado máximo de salida del digrafo de interacción.

El siguiente teorema nos muestra una condición necesaria para que en una red dinámica finita f se puedan encontrar pocos Jardines del Edén, dado su digrafo de interacción.

Teorema 3.2.2. Sea una red dinámica finita $f : \llbracket q \rrbracket^n \rightarrow \llbracket q \rrbracket^n$ con digrafo de interacción D . Si $n \geq 2$ y $1 \leq \text{eden}(f) < q$, entonces D es conexo y $\mathbf{V}_C(D)$ es vacío.

Demostración. Primero debemos demostrar que D es conexo. Por contradicción, supongamos que podemos particionar $V(D)$ en $m \geq 2$ componentes conexas no vacías $\{V_1, \dots, V_m\}$. Como $\text{eden}(f) = q^n - \text{rank}(f)$, usando Lema 3.1.1 se tiene que

$$q^n - \text{eden}(f) = \text{rank}(f) = \prod_{i=1}^m \text{rank}(f; V_i).$$

Si suponemos que $\text{rank}(f; V_i) = q^{|V_i|}$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, entonces $\text{rank}(f) = q^n > q^n - \text{eden}(f)$, lo que es una contradicción. De lo anterior, supongamos sin pérdida de generalidad

que $\text{rank}(f; V_1) \leq q^n - 1$ y considerando que $n - |V_1| \geq 1$, ya que $V_1 \neq V(D)$, se tiene que

$$\begin{aligned} q^n - \text{eden}(f) &= \text{rank}(f) = \prod_{i=1}^m \text{rank}(f; V_i) \\ &\leq (q^{|V_1|} - 1) \prod_{i=2}^m q^{|V_i|} \\ &= q^n - q^{n-|V_1|} \\ &\leq q^n - q. \end{aligned}$$

Lo anterior indica que $\text{eden}(f) \geq q$, lo que es una contradicción, por lo tanto D solo tiene una componente conexa.

Ahora, probaremos que $\mathbf{V}_C(D) = \emptyset$. Por contradicción, supongamos que existe $v \in \mathbf{V}_C(D)$. Como f es constante en v , se tiene que $\text{eden}(f; v) = q - 1$. Teorema 3.2.1 nos indica que

$$\text{eden}(f) \geq \text{eden}(f; v) \cdot q^{n-1} \geq (q - 1)q^{n-1} \geq (q - 1)q \geq q,$$

lo que es una contradicción. ■

Es interesante notar que en el caso $n = 1$ solo podemos asegurar la conexidad. En un digrafo con un vértice solo puede pasar que $D = D_1 = (\{v\}, \emptyset)$ o $D = D_2 = (\{v\}, \{(v, v)\})$. Para $D = D_1$, notemos que f es constante, $\text{eden}(f) = q - 1$ y $\mathbf{V}_C(D) = \{v\}$. Para $D = D_2$, si $q = 2$, se tiene que $\text{eden}(f) = 0$ (solo podemos hacer que $f_v(x) = x_v$ o $f_v(x) = -x_v$, ambas son biyectivas). Sin embargo, si $q > 2$ podemos formar funciones f_v no sobreyectivas para que $1 \leq \text{eden}(f) < q$ (por ejemplo, $f_v(x) = \min\{x_v, 1\}$).

Lo anterior indica que el digrafo D depende del valor de q cuando $n = 1$. Además, si $q = 2$, implica que $\mathbf{V}_C(D) \neq \emptyset$, en contradicción a lo que indica el teorema anterior para $n \geq 2$.

Dado $k \in \mathbb{N}$ arbitrario y un digrafo D , surge la duda de si es posible o no asociarle una red dinámica f tal que $D(f) = D$ y $\text{rank}(f) = k$. El siguiente teorema muestra que no siempre es posible hacer esto.

Teorema 3.2.3. *Sea $f : \llbracket q \rrbracket^n \rightarrow \llbracket q \rrbracket^n$ una red dinámica finita con digrafo de interacción D . Si $\text{rank}(f)$ es un número primo, entonces todas las componentes conexas de D , a excepción de*

una, son vértices aislados.

Demostración. Sea $\{V_1, \dots, V_m\}$ una partición de $V(D)$ por componentes conexas de D .

Por Lema 3.1.1, se tiene la siguiente igualdad:

$$\text{rank}(f) = \prod_{i=1}^m \text{rank}(f; V_i).$$

Dado que $\text{rank}(f)$ es un número primo, la única factorización posible es asumir sin pérdida de generalidad que $\text{rank}(f; V_1) = \text{rank}(f)$ y que $\text{rank}(f; V_i) = 1$ para todo $i \in \{2, \dots, m\}$.

Ahora bien, si $\text{rank}(f; V_i) = 1$ para $i \geq 2$, esto implica que f es constante en los vértices de V_i , lo que significa que no hay aristas de entrada en los vértices de V_i . Como cada V_i es una componente conexa, esto solo es posible si V_i consiste en un único vértice aislado.

Por lo tanto, todas las componentes conexas de D , excepto una, son vértices aislados, como queríamos demostrar. ■

Lo anterior prueba que dado un digrafo D , no siempre es posible encontrar una red dinámica finita con $D(f) = D$ tal que $\text{rank}(f) = k$ para un valor de k arbitrario, es decir, nos muestra una fuerte relación entre $D(f)$ y $\text{rank}(f)$.

Lema 3.2.4. *Sea $f : \llbracket q \rrbracket^n \rightarrow \llbracket q \rrbracket^n$ una red dinámica finita con digrafo de interacción $D = (V, A)$, entonces,*

$$\text{eden}(f) = q^n - q^{n-|\mathbf{V}_C(D)|} + \text{eden}(f; V \setminus \mathbf{V}_C(D)).$$

O más bien como cota inferior:

$$\text{eden}(f) \geq q^n - q^{n-|\mathbf{V}_C(D)|}.$$

Demostración. Sea $O := \mathbf{V}_C(D)$ y la función $I : \text{Im}(f) \rightarrow \text{Im}(f; V \setminus O)$ tal que $I(x) = x|_{V \setminus O}$. Probaremos que la función I es biyectiva.

Primero probaremos que I es sobreyectiva. Sea $y \in \text{Im}(f; V \setminus O)$ cualquiera, entonces por definición, existe $x \in \text{Im}(f)$ tal que $x|_{V \setminus O} = y$. Finalmente, se concluye que para cualquier

$y \in \text{Im}(f; V \setminus O)$, existe un $x \in \text{Im}(f)$ tal que $I(x) = x|_{V \setminus O} = y$. Finalmente concluimos que I es sobreyectiva.

Para la inyectividad de I , sean $x, x' \in \text{Im}(f)$ con $x \neq x'$. Dado que pertenecen a $\text{Im}(f)$, existen $z, z' \in \llbracket q \rrbracket^n$ tal que $f(z) = x$ y $f(z') = x'$. Ahora basta notar que en los vértices O , la función f es constante, entonces $x|_O = f(z)|_O = f(z')|_O = x'|_O$. Como $x \neq x'$, entonces, $x|_{V \setminus O} \neq x'|_{V \setminus O}$ o equivalentemente, $I(x) \neq I(x')$. De esta forma, I también es inyectiva.

De lo anterior, se tiene que I es una biyección entre $\text{Im}(f)$ e $\text{Im}(f; V \setminus O)$, y por lo tanto:

$$\text{rank}(f) = |\text{Im}(f)| = |\text{Im}(f; V \setminus O)| = \text{rank}(f; V \setminus O).$$

Ocupando la igualdad anterior se deduce que:

$$\begin{aligned} \text{eden}(f) &= q^n - \text{rank}(f) \\ &= q^n - \text{rank}(f; V \setminus O) \\ &= q^n - [q^{n-|O|} - \text{eden}(f; V \setminus O)] \\ &= q^n - q^{n-|O|} + \text{eden}(f; V \setminus O). \end{aligned}$$

Para la cota, basta notar que $\text{eden}(f; V \setminus O) \geq 0$. ■

Teorema 3.2.5. *Sea $f : \llbracket q \rrbracket^n \rightarrow \llbracket q \rrbracket^n$ una red dinámica finita con digrafo de interacción $D = (V, A)$. Si $\Delta^+(D) = 1$, entonces:*

$$\text{eden}(f) = q^n - \prod_{v \in V \setminus \mathbf{V}_C(D)} \text{rank}(f; v).$$

Demostración. Sea $O := \mathbf{V}_C(D)$. Si $\Delta^+(D) = 1$, se tiene que $V \setminus O \neq \emptyset$, por lo que procedemos a definirlo como $V \setminus O := \{1, \dots, m\}$.

De Lema 3.2.4, tenemos que

$$\text{eden}(f) = q^n - q^{n-|O|} + \text{eden}(f; V \setminus O) = q^n - \text{rank}(f; V \setminus O).$$

Luego, se define la función $F : \text{Im}(f; V \setminus O) \rightarrow \text{Im}(f; 1) \times \dots \times \text{Im}(f; m)$ tal que $F(y) = (y_1, \dots, y_m)$. Basta demostrar que F es biyectiva.

Primero, demostremos que F es inyectiva. En efecto, dadas dos configuraciones $y, z \in \text{Im}(f; V \setminus O)$ distintas, se tiene que existe $i \in V \setminus O$ tal que $y_i \neq z_i$ y por lo tanto $F(y) \neq F(z)$. Por lo tanto, F es inyectiva.

Para la sobreyectividad, basta mostrar que para $y = (y^{(1)}, \dots, y^{(m)}) \in \text{Im}(f; 1) \times \dots \times \text{Im}(f; m)$ existe $z \in \text{Im}(f; V \setminus O)$ tal que $F(z) = y$. En efecto, como $y^{(i)} \in \text{Im}(f; i)$, existe $x^{(i)}$ tal que $f(x^{(i)})_i = y^{(i)}$.

Dado que $\Delta^+(D) = 1$ se tiene que para todo $i, j \in V$ distintos, $N^-(i) \cap N^-(j) = \emptyset$. Lo anterior nos permite escoger $x \in \llbracket q \rrbracket^n$ tal que para todo $i \in V$, $x|_{N^-(i)} = x^{(i)}|_{N^-(i)}$. De esta forma, escogiendo $z = f(x)|_{V \setminus O}$, se tiene que $z \in \text{Im}(f; V \setminus O)$ y $z_i = f(x)_i = y^{(i)}$ para todo $i \in V \setminus O$. Finalmente, se concluye que existe $z \in \text{Im}(f; V \setminus O)$ tal que $F(z) = y$, lo que prueba que F es sobreyectiva.

Dado lo anterior, se concluye que F es biyectiva y por lo tanto:

$$\text{rank}(f; V \setminus O) = |\text{Im}(f; V \setminus O)| = \prod_{v \in V \setminus O} |\text{Im}(f; v)| = \prod_{v \in V \setminus O} \text{rank}(f; v).$$

■

Observación 3. Si $\Delta^+(D) = 0$ entonces, $\text{eden}(f) = q^n - 1$. En efecto, si $\Delta^+(D) = 0$, se tiene que $A = \emptyset$ y, por lo tanto, f es constante. Lo anterior implica que $\text{rank}(f) = 1$, por lo que $\text{eden}(f) = q^n - 1$.

El teorema y la observación anterior nos indican que para redes dinámicas finitas con digrafo de interacción de grado máximo de salida 1, la cantidad de Jardines del Edén depende exclusivamente de la cantidad de imágenes de las funciones de activación local.

Ejemplo 3.2.2. Dado el digrafo $D = (V, A)$ representado en la Figura 3.2, se define la red dinámica finita $f : \llbracket q \rrbracket^5 \rightarrow \llbracket q \rrbracket^5$ tal que $q \geq 4$ y con funciones de activación local:

$$f_i(x) = \text{mín}\{\{x_j : ji \in A\} \cup \{3\}\}, \quad \forall i \in \{1, \dots, 5\}.$$

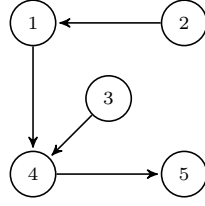


Figura 3.2: Digrafo D con $\Delta^+(D) = 1$.

Se puede notar que $D(f) = D$ y además, si $i \in V \setminus \mathbf{V}_C(D)$, entonces $\text{rank}(f; i) = 4$.

Dado que $\Delta^+(D) = 1$ y $|V \setminus \mathbf{V}_C(D)| = 3$, el teorema anterior nos dice que:

$$\text{eden}(f) = q^5 - \prod_{v \in V \setminus \mathbf{V}_C(D)} \text{rank}(f; v) = q^5 - 4^3 = q^5 - 64.$$

El teorema es de gran utilidad en este tipo de digrafos, ya que permite conocer la cantidad de Jardines del Edén a partir del recorrido de las funciones de activación local. Esta tarea resulta en general más sencilla en comparación con digrafos donde una variable afecta a varias funciones de activación local simultáneamente.

Corolario 3.2.6. Sea $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ una red booleana con digrafo de interacción $D = (V, A)$. Si $\Delta^+(D) \leq 1$, entonces:

$$\text{eden}(f) = 2^n - 2^{n - |\mathbf{V}_C(D)|}.$$

Demostración. Sea $O := \mathbf{V}_C(D)$. Si $|O| = n$, entonces $\Delta^+(D) = 0$ y por lo tanto podemos ocupar Observación 3, lo que nos dice que $\text{eden}(f) = 2^n - 1$.

Para el caso $\Delta^+(D) = 1$, se tiene que $V \setminus O \neq \emptyset$. Luego, dado $v \in V \setminus O$, demostraremos que es de rango completo en f . En efecto, como $v \notin O$, entonces $\text{rank}(f; v) = 2$, de otra forma v sería constante y por lo tanto $v \in O$, lo que es una contradicción.

De lo anterior, todos los vértices en $V \setminus O$ son de rango completo y al aplicar Teorema 3.2.5 directamente, se obtiene la igualdad buscada. ■

Notemos que para el caso de redes booleanas, el corolario muestra que la cantidad de Jardines de Edén está completamente definida por D si es que $\Delta^+(D) \leq 1$.

El Teorema 3.2.2 nos indica que para tener pocos Jardines del Edén es necesario que el digrafo de interacción D sea conexo y $\mathbf{V}_C(D) = \emptyset$. El siguiente teorema muestra que redes dinámicas finitas con digrafos de interacción D conexos y $\mathbf{V}_C(D) = \emptyset$ no necesariamente tendrán pocos Jardines del Edén.

Teorema 3.2.7. *Dado $D = (V, A)$ un digrafo con n vértices tal que $\Delta^+(D) = k \geq 2$. Entonces, existe una red dinámica finita $f : \llbracket q \rrbracket^n \rightarrow \llbracket q \rrbracket^n$ con digrafo de interacción D tal que:*

$$\text{eden}(f) \geq q^n - (2^{k-1} + 1) \cdot 2^{n - |\mathbf{V}_C(D)| - k}.$$

Además, existe $h : \llbracket q \rrbracket^n \rightarrow \llbracket q \rrbracket^n$ con digrafo de interacción D tal que todos los vértices de $V \setminus \mathbf{V}_C(D)$ son de rango completo en h y:

$$\text{eden}(h) \geq q^n - \left(\sum_{l=1}^q l^{k-1} \right) \cdot q^{n - |\mathbf{V}_C(D)| - k}.$$

Demostración. Sea $O := \mathbf{V}_C(D)$. Como $\Delta^+(D) = k$, entonces existe $w \in V$ tal que $d^+(w) = k$. Dado $v \in N^+(w)$, podemos formar una red dinámica finita f tal que para $x \in \llbracket q \rrbracket^n$,

$$f_u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x|_{N^-(u)} = \vec{0}, \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad \forall u \in V \setminus (O \cup \{v\}) \quad \text{y} \quad f_v(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x|_{N^-(v)} = \vec{1}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Notemos que $f(x)|_{N^+(w)} \in \{0, 1\}^k$ para todo $x \in \llbracket q \rrbracket^n$, por lo que $\text{Im}(f; N^+(w)) \subseteq \{0, 1\}^k$. Lo anterior implica que $\text{rank}(f; N^+(w)) = |\text{Im}(f; N^+(w))| \leq |\{0, 1\}^k| = 2^k$.

Demostraremos que para todo $x \in \llbracket q \rrbracket^n$, si $f(x)_v = 1$ entonces para todo $u \in N^+(w)$ $f(x)_u = 1$. En efecto, si $f_v(x) = 1$, entonces ya que $w \in N^-(v)$, $x_w = 1$ y por lo tanto, para todo $u \in N^+(w)$, se tiene que $f_u(x) = 1$ ya que $w \in N^-(u)$. De lo anterior, si $f_v(x) = 0$, tenemos a lo más 2^{k-1} configuraciones distintas de los demás vértices en $N^+(w)$, y si $f_v(x) = 1$, solo tenemos una posible configuración para los vértices en $N^+(w)$ por lo que $\text{rank}(f; N^+(w)) \leq 2^{k-1} + 1$.

Finalmente, escogemos $V_1 = O$, $V_2 = N^+(w)$ y $V_3 = V \setminus (V_1 \cup V_2)$. Tenemos que $\text{rank}(f; V_1) =$

1, $\text{rank}(f; V_2) \leq 2^{k-1} + 1$ y $\text{rank}(f; V_3) \leq 2^{n-|O|-k}$. Usando Corolario 3.1.2 se tiene que

$$\begin{aligned} \text{eden}(f) &\geq q^n - \prod_{i=1}^3 \text{rank}(f; V_i) \\ &\geq q^n - (2^{k-1} + 1)2^{n-|O|-k}. \end{aligned}$$

De manera similar a la anterior, dado $x \in \llbracket q \rrbracket^n$, se define h como:

$$h_u(x) = \max_{s \in N^-(u)} \{x_s\} \quad \forall u \in V \setminus (O \cup \{v\}) \quad \text{y} \quad h_v(x) = \min_{s \in N^-(v)} \{x_s\}.$$

Primero probaremos que todos los vértices son de rango completo sobre h . En efecto, dado un vértice $r \in V \setminus O$, si $h_r(x) = p \in \llbracket q \rrbracket$, entonces basta escoger $x \in \llbracket q \rrbracket^n$ tal que $x|_{N^-(r)} = \vec{p}$, por lo que r es de rango completo sobre h .

Notemos que si $h_v(x) = l \in \llbracket q \rrbracket$, entonces $x_w \geq l$ y, por lo tanto, para todo vértice $u \in N^+(w)$ distinto de v se tiene que $h_u(x) \geq l$. De lo anterior, si $h_v(x) = l$, para los vértices en $N^+(w) \setminus \{v\}$ se tienen a lo más $(q-l)^{k-1}$ configuraciones posibles. De lo anterior, y teniendo en cuenta el caso desde $l = 0$ hasta $l = q-1$ se tiene que:

$$\text{rank}(f; N^+(w)) \leq \sum_{l=0}^{q-1} (q-l)^{k-1} = \sum_{l=1}^q l^{k-1}.$$

Nuevamente, escogemos $U_1 = O$, $U_2 = N^+(w)$ y $U_3 = V \setminus (U_1 \cup U_2)$. Tenemos que $\text{rank}(h; U_1) = 1$ y $\text{rank}(h; U_3) \leq q^{n-|O|-k}$. Usando Corolario 3.1.2 se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{eden}(h) &\geq q^n - \prod_{i=1}^3 \text{rank}(h; U_i) \\ &\geq q^n - \left(\sum_{l=1}^q l^{k-1} \right) \cdot q^{n-|O|-k}. \end{aligned}$$

■

Ejemplo 3.2.3. Dado $V = \{1, \dots, n\}$, se define el digrafo $\overset{\circ}{K}_n := (V, V \times V)$ como el digrafo con todas sus posibles arcos. El digrafo $\overset{\circ}{K}_5$ se presenta en la Figura 3.3.

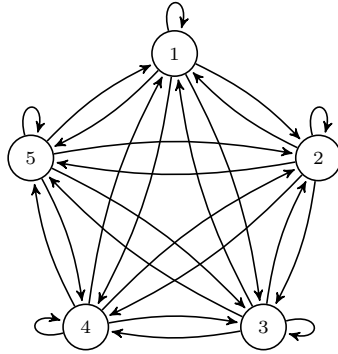


Figura 3.3: Digrafo $\overset{\circ}{K}_5$.

Notemos que para este caso $\Delta^+(\overset{\circ}{K}_n) = n$ y por lo tanto, el teorema anterior nos indica que podemos encontrar una red dinámica finita f tal que $D(f) = \overset{\circ}{K}_n$ y al menos $q^n - 2^{n-1} - 1$ de las configuraciones en $\llbracket q \rrbracket^n$ sean Jardines del Edén, es decir, más de la mitad.

Y además, el teorema nos dice que podemos encontrar una red dinámica finita h tal que todos los vértices de $V \setminus \mathbf{V}_C(D)$ son de rango completo en h con al menos:

$$q^n - \sum_{l=1}^q l^{n-1}$$

Jardines del Edén.

Jardines del Edén en redes disyuntivas y conjuntivas

En el caso de redes disyuntivas o conjuntivas, su digrafo de interacción representa con precisión la estructura de la red, excepto por los vértices con grado de entrada nulo. Esto permite un análisis más eficiente de su dinámica, ya que el comportamiento de la red puede inferirse directamente a partir de su estructura.

En este capítulo, se establecen cotas y propiedades para este tipo de redes. Para ilustrar estos resultados, se considerará en particular el caso de las redes disyuntivas; sin embargo, los resultados también son válidos en redes conjuntivas.

4.1. Cotas dado el digrafo de interacción

Para cualquier red disyuntiva o conjuntiva f con digrafo de interacción D , se puede observar que, para una configuración $x \in \text{Im}(f)$, el valor de los vértices en $\mathbf{V}_{\text{dep}}(D)$ está completamente

determinado por el valor de los vértices en $\mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$. Debido a esto, $\mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$ será nuestro principal conjunto de interés.

Consecuentemente, en este tipo de redes, el valor de $\text{eden}(f; \mathbf{V}_{\text{ind}}(D))$ juega un papel fundamental en el análisis de su dinámica.

El siguiente lema muestra la relación de los conjuntos $\mathbf{V}_{\text{dep}}(D)$ y $\mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$.

Lema 4.1.1. *Sea D un digrafo. Si $u \in \mathbf{V}_{\text{dep}}(D)$, entonces existe un conjunto $S \subseteq \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$ no vacío tal que $N^-(S) = N^-(u)$.*

Demostración. Es fácil observar que S no puede ser vacío ya que en ese caso $N^-(S) = \emptyset$ y por Definición 2.3, $N^-(u) \neq \emptyset$ ya que $u \in \mathbf{V}_{\text{dep}}(D)$.

Primero notemos que $\mathbf{V}_{\text{dep}}(D)$ es un conjunto de vértices redundantes no aislados en D' . Ahora, por contradicción, supongamos que $\forall S \subseteq \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$, $N^-(S) \neq N^-(u)$. Escogemos D' como el digrafo bipartito de D . Si escogemos $T = \mathbf{V}_{\text{dep}}(D) \setminus \{u\}$, dado que $u \in \mathbf{V}_{\text{dep}}(D)$, entonces, $u \in R(D')$, de esta forma, $u \in R(D') \setminus T = R(D' \setminus T)$, es decir, u es redundante en el digrafo bipartito $D' \setminus T$.

Como u no es aislado, entonces $N^-(u) \neq \emptyset$. Notemos que el conjunto de los nodos sumideros de $D' \setminus T$ es igual $\mathbf{V}_{\text{ind}}(D) \cup \{u\}$. Por hipótesis, $\forall S \subseteq \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$, $N^-(S) \neq N^-(u)$, lo que es equivalente a $\forall S \subseteq \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$, $N_{D'}^-(S) \neq N_{D'}^-(u)$, de esta forma, u no es redundante en $D' \setminus T$, lo que es una contradicción. ■

Teorema 4.1.2. *Sea $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ una red disyuntiva (conjuntiva) con digrafo de interacción D . Entonces,*

$$\text{eden}(f) = 2^n - 2^{|\mathbf{V}_{\text{ind}}(D)|} + \text{eden}(f; \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)).$$

O como cota inferior,

$$\text{eden}(f) \geq 2^n - 2^{|\mathbf{V}_{\text{ind}}(D)|}.$$

Demostración. Sea f una red disyuntiva y denotamos $V_I := \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$, $O := \mathbf{V}_C(D)$ y $V_D :=$

$V_{\text{dep}}(D)$. Según Lema 3.2.4, sabemos que:

$$\text{eden}(f) = (2^{|O|} - 1)(2^{n-|O|}) + \text{eden}(f; V_I \cup V_D).$$

Por lo tanto, solo nos falta calcular los valores para $\text{eden}(f; V_I \cup V_D)$.

Para todo $S \subseteq V_I$, definimos los conjuntos $H_S := \{u \in V_D : \exists v \in S, N^-(v) \subseteq N^-(u)\}$ y $I_S := \{y \in \{0, 1\}^{V_I \cup V_D} : y|_S = \vec{1} \text{ y } y|_{V_I \setminus S} = \vec{0}\}$. Demostraremos que si $y \in I_S$ e $y \in \text{Im}(f; V_I \cup V_D)$, entonces se cumple $y|_{H_S} = \vec{1}$ y $y|_{V_D \setminus H_S} = \vec{0}$.

En efecto, sea $y \in I_S$, si $y \in \text{Im}(f; V_I \cup V_D)$, entonces existe $x \in \{0, 1\}^n$ tal que $f(x)|_{V_I \cup V_D} = y$.

Primero, demostremos que $y|_{H_S} = \vec{1}$. Sea $u \in H_S$, es decir, existe $v \in S$ tal que $N^-(v) \subseteq N^-(u)$. Dado que $y \in I_S$ y $v \in S$, se concluye que $y_v = 1$, y por lo tanto debe existir algún $w \in N^-(v)$ tal que $x_w = 1$. Si no existiera tal w , entonces, dado que f es una red disyuntiva, tendríamos $y_v = 0$, lo cual contradice nuestra suposición. Como $w \in N^-(v)$ y $N^-(v) \subseteq N^-(u)$, se deduce que $w \in N^-(u)$. Por lo tanto, $y_u = 1$.

De manera similar, se demuestra que $y|_{V_D \setminus H_S} = \vec{0}$. En efecto, si $u \in V_D \setminus H_S$, Lema 4.1.1 asegura que existe un conjunto $R \subseteq V_I$ tal que $N^-(R) = N^-(u)$, ya que $u \in V_D$. Notemos que para todo $r \in R$, se cumple $N^-(r) \subseteq N^-(u)$. Ahora, si $r \in S$, entonces por definición $u \in H_S$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, para todo $r \in R$, se tiene $r \notin S$. Así, para todo $r \in R$, se cumple que $y_r = 0$, es decir, $y|_R = \vec{0}$.

Como f es una función disyuntiva, la única forma en que esto sea posible es que $x|_{N^-(R)} = \vec{0}$. Finalmente, dado que $N^-(u) = N^-(R)$, concluimos que $y_u = 0$.

Ahora probaremos que, si $y \in I_S$ tal que $y|_{V_I} \in \text{Im}(f; V_I)$ entonces $|\text{Im}(f; V_I \cup V_D) \cap I_S| = 1$.

En efecto, como $y|_{V_I} \in \text{Im}(f; V_I)$, por definición, existe un $x \in \{0, 1\}^n$ tal que $y|_{V_I} = f(x)|_{V_I}$. Si elegimos $y' = f(x)|_{V_I \cup V_D}$, entonces $y' \in \text{Im}(f; V_I \cup V_D)$. Además, dado que $y'|_{V_I} = f(x)|_{V_I} = y|_{V_I}$, se concluye que $y' \in I_S$ y por lo tanto $|\text{Im}(f; V_I \cup V_D) \cap I_S| \geq 1$.

Para probar la igualdad, supongamos por contradicción que $|\text{Im}(f; V_I \cup V_D) \cap I_S| \geq 2$. De lo anterior concluimos que existe un $y'' \in I_S$ tal que $y'' \neq y'$ y $y'' \in \text{Im}(f; V_I \cup V_D)$. Como $y', y'' \in \text{Im}(f; V_I \cup V_D)$, se tiene que $y'|_{H_S} = y''|_{H_S} = \vec{1}$ y $y'|_{V_D \setminus H_S} = y''|_{V_D \setminus H_S} = \vec{0}$, lo que implica

que $y''|_{V_D} = y'|_{V_D}$. Finalmente, dado que $y', y'' \in I_S$, se concluye que $y'|_{V_I} = y''|_{V_I}$, y por lo tanto $y' = y''$.

Notemos que podemos expresar las configuraciones de los vértices de $V_I \cup V_D$ como sigue:

$$\{0, 1\}^{V_I \cup V_D} = \bigcup_{S \subseteq V_I} I_S.$$

Sea $C \subseteq \{0, 1\}^{V_I \cup V_D}$, definimos $\mathcal{J}(C) = |\{x \in C : x \notin \text{Im}(f; V_I \cup V_D)\}|$. De lo anterior, notemos que para cada $y \in I_S$, si $y|_{V_I} \notin \text{Im}(f; V_I)$, entonces $y \notin \text{Im}(f; V_I \cup V_D)$. Es decir, $\mathcal{J}(I_S) = |I_S| = 2^{|V_D|}$. Si $y|_{V_I} \in \text{Im}(f; V_I)$, entonces existe un único $y' \in I_S$ tal que $y' \in \text{Im}(f; V_I \cup V_D)$. Por lo tanto, todas las configuraciones $y \in I_S$ distintas de y' cumplen que $y \notin \text{Im}(f; V_I \cup V_D)$, es decir, $\mathcal{J}(I_S) = |I_S| - 1 = 2^{|V_D|} - 1$.

Finalmente, definimos:

$$\delta_S = \begin{cases} 1 & \text{si } \forall y \in I_S, y|_{V_I} \notin \text{Im}(f; V_I), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se tiene que:

$$\text{eden}(f; V_I \cup V_D) = \mathcal{J}(\{0, 1\}^{V_I \cup V_D}) = \mathcal{J}\left(\bigcup_{S \subseteq V_I} I_S\right) = \sum_{S \subseteq V_I} \mathcal{J}(I_S) = \sum_{S \subseteq V_I} (2^{|V_D|} - 1 + \delta_S).$$

Teniendo en cuenta que $|O| + |V_I| + |V_D| = n$, obtenemos la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \text{eden}(f) &= (2^{|O|} - 1)(2^{n-|O|}) + \text{eden}(f; V_I \cup V_D) \\ &= 2^n - 2^{n-|O|} + \sum_{S \subseteq V_I} (2^{|V_D|} - 1 + \delta_S) \\ &= 2^n - 2^{|V_I|+|V_D|} + \sum_{S \subseteq V_I} (2^{|V_D|} - 1) + \sum_{S \subseteq V_I} \delta_S \\ &= 2^n - 2^{|V_I|+|V_D|} + (2^{|V_D|} - 1)2^{|V_I|} + \text{eden}(f; V_I) \\ &= 2^n - 2^{|V_I|} + \text{eden}(f; V_I). \end{aligned}$$

Para la cota basta notar que $\text{eden}(f; V_I) \geq 0$. ■

Como se aprecia en el digrafo D , de la Figura 2.1, se tiene que, si se le asocia una función disyuntiva $f[D]$, Teorema 4.1.2 nos asegura que $\text{eden}(f[D]) \geq 2^4 - 2^2 = 12$. Experimentalmente obtenemos como digrafo de iteración de $f[D]$ al digrafo de la Figura 4.1.

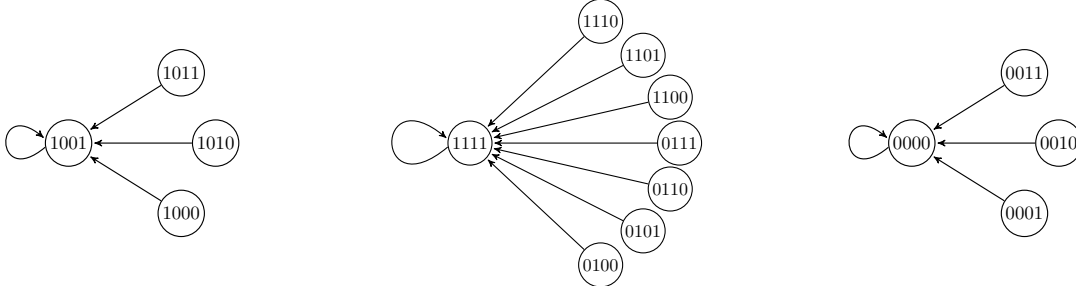


Figura 4.1: Digrafo de iteración para la red disyuntiva $f[D]$.

Podemos notar que $\text{eden}(f[D]) = 13$, por lo que Teorema 4.1.2 nos proporciona una cota bastante acertada.

Surge la pregunta si esta cota puede funcionar con cualquier red dinámica finita; la respuesta es no, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1.1. Sean las funciones $f, g : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}^2$, donde:

$$f(x) = (x_1 \vee x_2, x_1 \vee x_2),$$

$$g(x) = (-x_1 \vee x_2, x_1 \oplus x_2).$$

Con digrafo de interacción $D(f) = D(g)$ presentado en la Figura 4.2.



Figura 4.2: Digrafo de interacción para las funciones f y g .

Se puede probar que $|\mathbf{V}_C(D)| = 0$, $|\mathbf{V}_{\text{ind}}(D)| = 1$ y $|\mathbf{V}_{\text{dep}}(D)| = 1$, así, la cota de Teorema 4.1.2 nos dice que $\text{eden}(f) \geq 2^1(2^1 - 1) = 2$ y se cumple ya que f es una red disyuntiva. El valor de $f(x)$ y $g(x)$ se presentan en Tabla 4.1.

x	$f(x)$	$g(x)$
00	00	10
01	11	11
10	11	01
11	11	10

Tabla 4.1: Valores de $f(x)$ y $g(x)$ en Ejemplo 4.1.1.

Notemos que en efecto, $\text{eden}(f) \geq 2$ y además se cumple con igualdad. Para la función g , $\text{eden}(g) = 1$, es decir, la cota que proporciona Teorema 4.1.2 no es válida.

Además, incluso si un digrafo D surge de una red disyuntiva, si $\mathbf{V}_{\text{ind}}(D) = V(D)$, entonces se tiene que $\text{eden}(f) = \text{eden}(f; \mathbf{V}_{\text{ind}}(D))$, es decir, no nos aporta información adicional.

A continuación veremos ejemplos de digrafos que cumplen esta condición.

Ejemplo 4.1.2. Definamos el digrafo $\overset{\circ}{C}_n$ como el digrafo ciclo de largo n con bucles en todos los vértices y tomemos por ejemplo $\overset{\circ}{C}_3$, cuyo digrafo y digrafo canónico se presentan en la Figura 4.3. Este digrafo cumple que $\mathbf{V}_{\text{ind}}(\overset{\circ}{C}_3) = V(\overset{\circ}{C}_3)$ (en general para cualquier $\overset{\circ}{C}_n$).

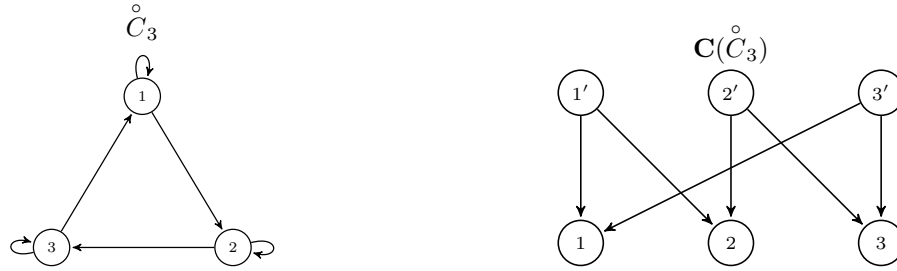


Figura 4.3: Digrafo $\overset{\circ}{C}_3$ y su versión canónica $\mathbf{C}(\overset{\circ}{C}_3)$.

Si tenemos una red disyuntiva $f[\overset{\circ}{C}_3]$, podemos notar Teorema 4.1.2 no aporta información relevante; sin embargo, sí se puede afirmar algo acerca del valor de $\text{eden}(f[\overset{\circ}{C}_3]; \mathbf{V}_{\text{ind}}(\overset{\circ}{C}_3))$. Nos centraremos en encontrar cotas para redes disyuntivas con digrafos de interacción como $\overset{\circ}{C}_3$, donde $\mathbf{V}_{\text{ind}}(D) = V(D)$.

Lema 4.1.3. Sea $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ una red disyuntiva (o conjuntiva) cuyo digrafo de interacción D es fuertemente conexo. Si los vértices de D admiten una partición $\{C_1, \dots, C_m\}$ en $m \geq 2$ ciclos disjuntos, entonces

$$\text{eden}(f) \geq m.$$

Demostración. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, consideremos la configuración $x^{(i)} \in \{0, 1\}^n$ definida por $x^{(i)}|_{C_i} = \vec{1}$ y $x^{(i)}|_{V \setminus C_i} = \vec{0}$.

Como D es fuertemente conexo y $m \geq 2$, debe existir al menos un arco que sale de C_i hacia algún vértice $w \notin C_i$. Dado que la red es disyuntiva, al evaluar $f(x^{(i)})$ los vértices de C_i se mantienen en 1 (pues cada vértice de C_i recibe al menos un arco desde el propio C_i), y además el vértice w toma el valor 1. Esto implica que $x^{(i)} < f(x^{(i)})$.

Notemos que, por la naturaleza de las operaciones disyuntivas, si una configuración está contenida en otra ($x \leq y$ coordenada a coordenada), su imagen preserva esta relación ($f(x) \leq f(y)$). Aplicando esta propiedad de forma iterativa sobre $x^{(i)} \leq f(x^{(i)})$, deducimos que $x^{(i)} \leq f^t(x^{(i)})$ para todo $t \in \mathbb{N}$.

Esta desigualdad estricta inicial garantiza que los vértices apagados que se encendieron no pueden volver a apagarse, por lo que la trayectoria nunca regresa a $x^{(i)}$. En consecuencia, $x^{(i)}$ no pertenece a ningún atractor periódico ni es un punto fijo; es decir, es un estado estrictamente transitorio.

Al ser el espacio de estados finito, todo estado transitorio debe provenir de al menos un estado Jardín del Edén en su trayectoria pasada. Supongamos que existe un estado Jardín del Edén \bar{x} cuya trayectoria en el digrafo de iteración $D_I(f)$ pasa por $x^{(i)}$ y también por $x^{(j)}$ (con $i \neq j$).

Como f es determinista, la trayectoria generada por \bar{x} es un único camino. Esto obligaría a que un estado preceda al otro. Sin pérdida de generalidad, supongamos que la trayectoria pasa primero por $x^{(i)}$. Entonces, existiría un $t > 0$ tal que $f^t(x^{(i)}) = x^{(j)}$. Sin embargo, sabemos que $f^t(x^{(i)})|_{C_i} = \vec{1}$, mientras que $x^{(j)}|_{C_i} = \vec{0}$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, la trayectoria de cada configuración transitoria $x^{(i)}$ debe provenir de un estado Jardín del Edén distinto. Como hay m de estas configuraciones, concluimos que $\text{eden}(f) \geq m$. ■

Ejemplo 4.1.3. Para una red disyuntiva $f[\overset{\circ}{C}_3]$, el lema anterior afirma que $\text{eden}(f[\overset{\circ}{C}_3]) \geq 3$ por los n bucles disjuntos que contiene $\overset{\circ}{C}_n$. Los digrafos de iteración para $f[\overset{\circ}{C}_3]$ y $f[\overset{\circ}{C}_6]$ sin considerar $\vec{0}$ se presentan en la Figura 4.4.

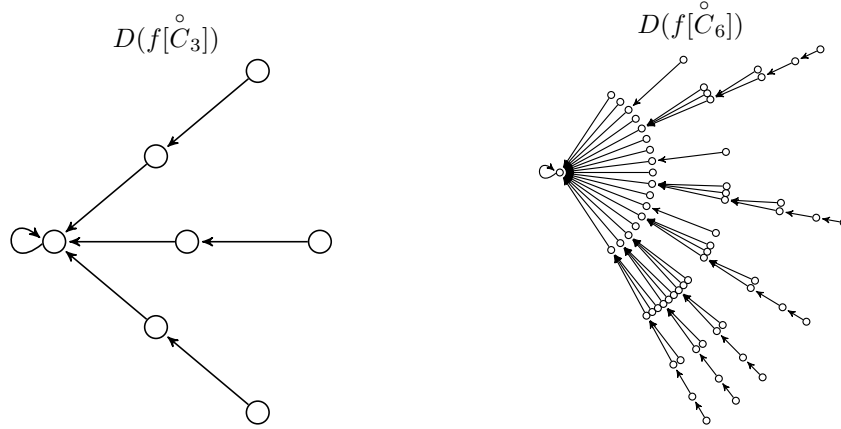


Figura 4.4: Digrafo de iteración para $f[\overset{\circ}{C}_3]$ y $f[\overset{\circ}{C}_6]$.

Notemos que la cota alcanza la igualdad para la red disyuntiva $f[\overset{\circ}{C}_3]$, pero es una cota demasiado pequeña para $f[\overset{\circ}{C}_6]$, ya que este contiene 35 Jardines del Edén.

Notemos que si logramos encontrar una buena cota para $\text{eden}(f; \mathbf{V}_{\text{ind}}(D(f)))$ en Teorema 4.1.2, podríamos mejorar los resultados obtenidos.

Lema 4.1.4. Sea $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ una red disyuntiva (conjuntiva) con digrafo de interacción $D = (V, A)$. Sean $x \in \{0, 1\}^n$ y $S \subseteq \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$ tales que $N^-(S) = \mathbf{V}_P(D)$ y $f(x)|_S = \vec{0}$. Entonces, se tiene que $f(x)|_{\mathbf{V}_{\text{ind}}(D)} = \vec{0}$.

Demostración. Denotemos $V_p := \mathbf{V}_P(D)$ y $V_I := \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$. Supongamos que f es una red disyuntiva. Como $N_D^-(S) = V_p$, entonces $x|_{V_p} = \vec{0}$. Por contradicción, si existe $v \in V_p$ tal que $x_v = 1$ entonces, como $v \in V_p$, existe $u \in S$ tal que $vu \in A$. Como f es red disyuntiva, entonces necesariamente $f(x)_u = 1$ y por lo tanto $f(x)|_S \neq \vec{0}$, lo que es una contradicción.

De lo anterior, $x|_{\mathbf{V}_P(D)} = \vec{0}$ y como f es red disyuntiva, $f(x)|_{V_I} = \vec{0}$. ■

Proposición 4.1.5. Sea $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ una red disyuntiva (conjuntiva) con digrafo de interacción D . Se tienen las siguientes cotas para $\text{eden}(f; \mathbf{V}_{\text{ind}}(D))$:

$$\text{eden}(f; \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)) \geq \left| \left\{ S \subset \mathbf{V}_{\text{ind}}(D) : N^-(S) = \mathbf{V}_P(D) \right\} \right|. \quad (4.1.1)$$

Y si $K \subseteq \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$ tal que $N^-(K) = \mathbf{V}_P(D)$, entonces:

$$\text{eden}(f; \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)) \geq 2^{|\mathbf{V}_{\text{ind}}(D) \setminus K|} - 1. \quad (4.1.2)$$

Demostración. Denotando $V_p := \mathbf{V}_P(D)$ y $V_I := \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$. Escogemos f como red disyuntiva. Para la cota (4.1.1), sea $S \subset V_I$ tal que $N^-(S) = V_p$. Sea $y \in \{0, 1\}^{V_I}$ tal que $y|_S = \vec{0}$ y $y|_{V_I \setminus S} = \vec{1}$. Probaremos que $y \notin \text{Im}(f; V_I)$. Por contradicción, supongamos que existe $x \in \{0, 1\}^n$ tal que $f(x)|_{V_I} = y$. De lo anterior $f(x)|_S = y|_S = \vec{0}$ y por Lema 4.1.4, $f(x)|_{V_I} = \vec{0}$, es decir $y \neq f(x)|_{V_I}$, lo que es contradicción. Por lo tanto, por cada $S \subset V_I$ tal que $N^-(S) = V_p$ se puede encontrar un Jardín del Edén distinto, lo que se calcula como la cota (4.1.1).

Para la cota (4.1.2), sea $K \subseteq V_I$ tal que $N^-(K) = V_p$, notemos que si $y|_K = \vec{0}$ e $y \in \text{Im}(f; V_I)$, entonces necesariamente por Lema 4.1.4, $y|_{V_I} = \vec{0}$. Por lo tanto, cualquier combinación de $y|_{V_I \setminus K} \neq \vec{0}$ logra un Jardín del Edén en los vértices en V_I , es decir, $\text{eden}(f; V_I) \geq 2^{|\mathbf{V}_{\text{ind}}(D) \setminus K|} - 1$. ■

Ejemplo 4.1.4. Siguiendo con el digrafo \mathring{C}_6 , se presenta su digrafo canónico $C := \mathbf{C}(\mathring{C}_6)$ en la Figura 4.5.

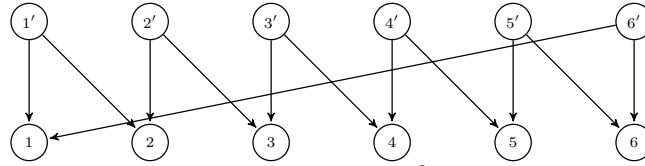


Figura 4.5: $\mathbf{C}(\mathring{C}_6)$

Recordemos que para $S \subseteq \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$, decir que $N_D^-(S) = \mathbf{V}_P(D)$ es equivalente a decir que $N_C^-(S) = \mathbf{V}'_P(D)$. Notemos que para la elección de S tenemos 6 conjuntos de tamaño 5 (basta escoger 5 vértices cualquiera para S), $\binom{6}{4} - 6 = 9$ conjuntos de tamaño 4 (la única forma en que S no cumpla propiedad para sus vecinos es que los 4 vértices sean consecutivos) y 2 conjuntos de tamaño 3. Así, por la cota (4.1.1), $\text{eden}(f; \mathbf{V}_{\text{ind}}(\mathring{C}_6)) \geq 17$. Para la cota (4.1.2), escogiendo el tamaño de K mínimo para maximizar $|\mathbf{V}_{\text{ind}}(\mathring{C}_6) \setminus K|$, en este caso $K = \{1, 3, 5\}$, se tiene $\text{eden}(f, \mathbf{V}_{\text{ind}}(\mathring{C}_6)) \geq 2^3 - 1 = 7$.

Notemos que para este caso particular la Proposición 4.1.5 mejora a la Lema 4.1.3, sin

embargo, ninguna alcanza la igualdad.

Ejemplo 4.1.5. Sea C_n el ciclo no dirigido de longitud n , es decir, el grafo con vértices $V = \{1, \dots, n\}$ y aristas $\{\{i, i+1\} \mid 1 \leq i \leq n\}$, donde el vértice $n+1 \equiv 1$. El ciclo doble dirigido sobre n vértices, denotado por \overleftrightarrow{C}_n , es el digrafo obtenido a partir de C_n reemplazando cada arista $\{i, i+1\}$ por dos arcos dirigidos $(i, i+1)$ y $(i+1, i)$, para $1 \leq i \leq n$.

Notemos que $\mathbf{V}_{\text{ind}}(\overleftrightarrow{C}_n) = V$ y, además, dado $S \subseteq \mathbf{V}_{\text{ind}}(\overleftrightarrow{C}_n)$ se puede probar que:

$$N^-(S) = \mathbf{V}_P(\overleftrightarrow{C}_n) \iff \forall i \in V, \{i-1, i+1\} \cap S \neq \emptyset.$$

Lo anterior permite caracterizar los conjuntos $S \subseteq \mathbf{V}_{\text{ind}}(\overleftrightarrow{C}_n)$, luego, mediante un programa, podemos calcular las cotas (4.1.1) y (4.1.2). Los resultados se muestran en Figura 4.6 en gráfico semi-log.

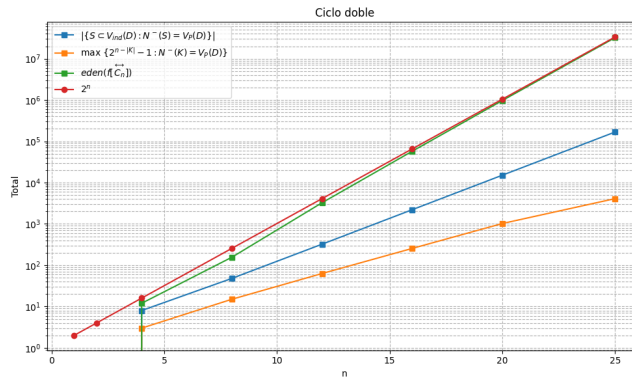


Figura 4.6: Cotas (4.1.1) y (4.1.2) para digrafo ciclo doble.

Lema 4.1.6. Sea $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ una red disyuntiva (conjuntiva) con digrafo de interacción $D = (V, A)$. Entonces,

$$\text{rank}(f; \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)) = |\{N_{C(D)}^+(S') : S' \subseteq \mathbf{V}_P(D)\}|.$$

O de manera equivalente,

$$\text{eden}(f; \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)) = 2^{|\mathbf{V}_{\text{ind}}(D)|} - |\{N_{C(D)}^+(S') : S' \subseteq \mathbf{V}_P(D)\}|.$$

Demostración. Denotando $C := \mathbf{C}(D)$, $V' := \mathbf{V}'_P(D)$ y $V_I := \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$. Notemos que para cada conjunto $N_C^+(S')$, existe $y \in \{0, 1\}^n$ con $y|_{V_I} \in \text{Im}(f; V_I)$ tal que, $y|_{N_C^+(S')} = \vec{1}$, e $y|_{V_I \setminus N_C^+(S')} = \vec{0}$.

En efecto, sea $S' \subseteq V'$, escogiendo $S := \{i \in V : i' \in V'\}$. Podemos escoger una configuración $x \in \{0, 1\}^n$ tal que $x|_S = \vec{1}$ y $x|_{V \setminus S} = \vec{0}$. De esta forma, podemos escoger $y = f(x)$, lo que nos asegura que $y|_{V_I} \in \text{Im}(f; V_I)$. Por otro lado $y|_{N_D^+(S) \cap V_I} = \vec{1}$ ya que para todo vértice $v \in N_D^+(S) \cap V_I$, v tiene como vecino de entrada a un vértice $u \in S$ tal que $x_u = 1$. Por otro lado, $y|_{V_I \setminus N_D^+(S)} = \vec{0}$, notemos primero que v no es aislado ya que pertenece a V_I , pero solo puede depender de vértices en $V \setminus S$, ya que $v \notin N_D^+(S)$. Como $x|_{V \setminus S} = \vec{0}$, se deduce que, $f(x)_v = y_v = 0$.

De esta forma, $y|_{V_I} \in \text{Im}(f; V_I)$, con $y|_{N_D^+(S) \cap V_I} = y|_{N_C^+(S')} = \vec{1}$ y $y|_{V_I \setminus N_D^+(S)} = y|_{V_I \setminus N_C^+(S')} = \vec{0}$. Dicho de otra forma, por cada conjunto distinto $N_C(S')^+$, existe una imagen distinta en $\text{Im}(f; V_I)$. Así, $\text{rank}(f; V_I) \geq |\{N_C^+(S') : S' \subseteq V'\}|$

Por otro lado, sea $V_T \subseteq V_I$ tal que para todo $S' \subseteq V'$, $N_C^+(S') \neq V_T$, entonces no existe $y \in \text{Im}(f; V_I)$ tal que $y|_{V_T} = \vec{1}$ y $y|_{V_I \setminus V_T} = \vec{0}$. En efecto, supongamos que existe $x \in \{0, 1\}^n$ tal que $f(x) = y$. Como $y|_{V_T} = \vec{1}$, entonces por cada vértice $v_k \in V_T$, existe un vértice $u'_k \in V'$ tal que $u'_k \in N_C^-(v_k)$ y $x_{u'_k} = 1$, de esta forma, se define el conjunto U' como el conjunto que contiene a todos los vértices u'_k .

Notemos que $V_T \subseteq N_C^+(U')$, sin embargo, es una inclusión estricta ya que para todo $S' \subseteq V'$, $N_C^+(S') \neq V_T$, es decir, existe un vértice $w \in N_C^+(U') \setminus V_T \subseteq V_I \setminus V_T$. Ya que $w \in V_I \setminus V_T$, se deduce que $y_w = 0$, pero como $w \in N_C^+(U')$ y $x|_U = \vec{1}$, necesariamente $y_w = 1$, lo que es una contradicción.

De esta forma se concluye que, para que $y \in \text{Im}(f; V_I)$, debe existir $S' \subseteq V'$ tal que $N_C^+(S') = V_T$, esto es, $\text{rank}(f; V_I) \leq |\{N_C^+(S') : S' \subseteq V'\}|$, lo que termina por probar la desigualdad restante. ■

Teorema 4.1.7. *Sea $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ una red disyuntiva (conjuntiva) con digrafo de interacción $D = (V, A)$. Entonces,*

$$\text{rank}(f; \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)) = |\{N^+(S) \cap \mathbf{V}_{\text{ind}}(D) : S \subseteq \mathbf{V}_P(D)\}|.$$

O de manera equivalente,

$$\text{eden}(f; \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)) = 2^{|\mathbf{V}_{\text{ind}}(D)|} - |\{N^+(S) \cap \mathbf{V}_{\text{ind}}(D) : S \subseteq \mathbf{V}_{\text{P}}(D)\}|.$$

Demostración. Notemos que para $S' \subseteq \mathbf{V}'_{\text{P}}(D)$ copia de $S \subseteq \mathbf{V}_{\text{P}}(D)$, se tiene que $N_{\mathbf{C}(D)}^+(S') = N^+(s) \cap \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$. Basta utilizar lo anterior para reescribir las igualdades presentadas en Lema 4.1.6. ■

Observación 4. *Es interesante notar que la complejidad de calcular $\text{rank}(f; \mathbf{V}_{\text{ind}}(D))$ es equivalente a responder la pregunta: dada una familia de conjuntos $\{B_k\}_{k=1}^n$, ¿cuántos conjuntos distintos se pueden formar a través de uniones arbitrarias de estos? (incluyendo el conjunto vacío).*

En efecto, para $D = (V, A)$, basta notar que podemos escoger la familia de conjuntos $\{B_v\}_{v \in V}$ donde $B_v := N^+(v) \cap \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$ y, además, tenemos la igualdad:

$$\bigcup_{v \in S \subseteq V} B_v = \bigcup_{v \in S \subseteq V} (N^+(v) \cap \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)) = N^+(S) \cap \mathbf{V}_{\text{ind}}(D).$$

4.2. Máximo y mínimo de Jardines del Edén.

En esta sección, analizamos algunas cotas superior e inferior del número de Jardines del Edén en redes disyuntivas y conjuntivas. Nos enfocamos en determinar condiciones estructurales sobre el digrafo de interacción que permiten minimizar o maximizar este número.

Algunos de los resultados presentados en esta sección ya han sido estudiados de manera equivalente en términos de $\text{rank}(f)$ [5], sin embargo, los resultados presentados se fundamentarán en la estructura del digrafo canónico asociado a la red y en la relación entre los conjuntos $\mathbf{V}'_{\text{P}}(d)$ y $\mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$. A partir de estos, se derivan propiedades clave que permiten la construcción explícita de redes con valores extremos de Jardines del Edén, lo que se ejemplifica en la última parte de la sección.

Lema 4.2.1. *Sea $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ una red disyuntiva (conjuntiva) con digrafo de interacción $D = (V, A)$. Entonces, $\text{eden}(f; \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)) = 0$ si y solo si, para todo $v \in \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$, existe*

$u' \in \mathbf{V}'_P(D)$ tal que $N_{C(D)}^+(u') = \{v\}$.

Demostración. Denotando $C := \mathbf{C}(D)$, $V' := \mathbf{V}'_P(D)$ y $V_I := \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$. Sea $V_I = \{v_1, \dots, v_n\}$ y supongamos que para todo $v \in V_I$, existe $u' \in V_p$ tal que $N_C^+(u') = \{v\}$. Asignamos a cada $v_i \in V_I$ un único vértice $u'_i \in V_p$ arbitrario tal que $N_C^+(u'_i) = \{v_i\}$ y definimos el conjunto $U := \{u_1, \dots, u_n\}$. Notemos que hay una correspondencia uno a uno entre V_I y U . Sea $x, y \in \{0, 1\}^n$ configuraciones con $y|_{V_I} \in \{0, 1\}^{V_I}$ arbitrario, basta escoger $x|_U = y|_{V_I}$ y $x|_{V_p \setminus U} = \vec{0}$, así $f(x)|_{V_I} = y|_{V_I}$, es decir $y|_{V_I} \in \text{Im}(f; V_I)$. Por lo tanto $\text{eden}(f; V_I) = 0$.

Ahora, probaremos la otra implicación usando su contra-recíproca. Supongamos que existe $v \in V_I$ tal que para todo $u' \in V'$, $N_C^+(u') \neq \{v\}$.

Se puede probar que para la configuración $y \in \{0, 1\}^{V_I}$, tal que $y_v = 1$ y $y|_{V_I \setminus \{v\}} = \vec{0}$ no tiene preimagen. Por contradicción, supongamos que existe una configuración $x \in \{0, 1\}^n$ tal que $f(x)|_{V_I} = y$. Como es red disyuntiva, si $y_v = 1$, entonces existe $u' \in N_C^-(v)$ tal que $x_u = 1$. Notemos además que $N_C^+(u') \neq \{v\}$ y distinto de vacío ya que contiene a v , entonces existe un vértice $w \in V_I$ distinto de v tal que $w \in N_C^+(u')$. De esta forma $f(x)|_w = y_w = 1$, pero $w \in V_I \setminus \{v\}$ y $y|_{V_I \setminus \{v\}} = \vec{0}$, es decir, $y_w = 0$, lo que es una contradicción. ■

Corolario 4.2.2. *Sea $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ una red disyuntiva (conjuntiva) con digrafo de interacción $D = (V, A)$. Si $|\mathbf{V}_{\text{ind}}(D)| = k$, entonces $\text{eden}(f) = 2^n - 2^k$ es mínimo con respecto a todas las redes disyuntivas (conjuntivas) \tilde{f} con $|V(D(\tilde{f}))| = n$ y $|\mathbf{V}_{\text{ind}}(D(\tilde{f}))| = k$ si y solo si, para todo $v \in \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$, existe $u' \in \mathbf{V}'_P(D)$ tal que $N_{C(D)}^+(u') = \{v\}$.*

Demostración. Denotando $C := \mathbf{C}(D)$, $V' := \mathbf{V}'_P(D)$ y $V_I := \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$. Por Lema 4.2.1 se tiene que:

$$\text{eden}(f) = 2^n - 2^k + \text{eden}(f; V_I) \geq 2^n - 2^k.$$

Lo anterior se garantiza con igualdad si y solo si $\text{eden}(f; V_I) = 0$. Finalmente, Teorema 4.1.2 nos asegura que $\text{eden}(f; V_I) = 0$ si y solo si, para todo $v \in V_I$, existe $u' \in V'$ tal que $N_C^+(u') = \{v\}$. ■

Ejemplo 4.2.1. *Podemos generar una red disyuntiva asociada a un digrafo D con vértices $V(D) = \{1, \dots, 5\}$ y $\mathbf{V}_{\text{ind}}(D) = \{1, 2, 3\} = V_I$ con un total de $2^5 - 2^3 = 24$ Jardines del*

Edén. Podemos generar un digrafo canónico C con nodos sumideros V_I y nodos fuentes $V' \subseteq \{1', \dots, 5'\}$ que cumpla Corolario 4.2.2. En efecto, basta escoger de manera arbitraria $N_C^+(1') = \{3\}$, $N_C^+(2') = \{2\}$ y $N_C^+(4') = \{1\}$, de esta forma para todo $v \in \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$, existe $u' \in V'$ tal que $N_C^+(u') = \{v\}$. Luego, la vecindad de los vértices $3'$ y $5'$ se escogen de manera arbitraria cuidando que los vértices en V_I no sean redundantes en C . El digrafo C se presenta en la Figura 4.7.

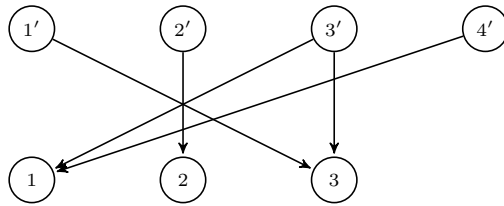


Figura 4.7: Digrafo C de Ejemplo 4.2.1.

Del digrafo canónico C , podemos generar un digrafo D tal que $\mathbf{C}(D) = C$. Para esto, siguiendo la Definición 2.3, si el arco $u'v \in V(C)$, entonces $uv \in D$. El digrafo D se presenta en la Figura 4.8.

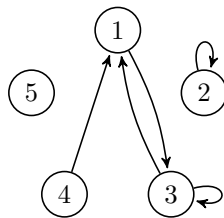


Figura 4.8: Digrafo D de Ejemplo 4.2.1.

De esta forma aseguramos que $\mathbf{C}(D) = C$, ya que los vértices $\{4, 5, 5'\}$ pasarán a ser vértices aislados y, por lo tanto, redundantes al construir el digrafo D' de la Definición 2.3.

No es la única forma de construir D , podemos seleccionar $S_1, S_2 \subseteq \{1, 2, 3\}$ y hacer $N^-(4) = N^-(S_1)$ y $N^-(5) = N^-(S_2)$, de esta forma $\mathbf{C}(D) = C$ ya que los vértices 4 y 5 serían redundantes al construir D' .

Teorema 4.2.3. Sea $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ una red disyuntiva (conjuntiva) con digrafo de interacción $D = (V, A)$ conexo. Entonces, D es un ciclo si y solo si $\text{eden}(f) = 0$.

Demostración. Sea $y \in \{0, 1\}^n$ una configuración arbitraria. Como D es un ciclo, para cada $v \in V$, existe un único vértice $u \in N^-(v)$. De esta forma, escogiendo la configuración $x_u = y|_{N^+(u)}$, se tiene que $f(x) = y$ para cualquier $y \in \{0, 1\}^n$, es decir, $\text{eden}(f) = 0$.

Si $\text{eden}(f) = 0$, entonces por Teorema 4.1.2, se tiene que $2^n = 2^{|V_I|} - \text{eden}(f; V_I)$ y como $2^n \geq 2^{|V_I|}$ y $\text{eden}(f; V_I) \geq 0$, esto ocurre si y solo si $|V_I| = n$ y $\text{eden}(f; V_I) = 0$.

Sea $V' = \mathbf{V}'_P(D)$, como $|V_I| = n$, $\mathbf{V}_R(D) = \emptyset$ y por definición, para $S' \subseteq V'$, $N_{\mathbf{C}(D)}^+(S') = N^+(S) \setminus \mathbf{V}_R(D) = N^+(S)$.

Por Lema 4.2.1, $\text{eden}(f; V_I) = 0$ si y solo si para todo $v \in V_I = V$, existe $u' \in V'$ tal que $N_{\mathbf{C}(D)}^+(u') = \{v\}$. Por lo anterior, a cada $v \in V$ podemos asociar una función $g : V_I \rightarrow V'$ tal que $g(v) = u'$, donde u' es el único vértice que tiene a v como su único vértice en $V(\mathbf{C}(D))$ tal que $N_{\mathbf{C}(D)}^+(u) = \{v\}$. Notemos que para cada par de vértices $v, w \in V$, $g(v) \neq g(w)$, en caso contrario $\{v, w\} \subseteq N_{\mathbf{C}(D)}^+(g(v)) = \{v\}$, lo que es una contradicción. Lo anterior también nos asegura que $d_{\mathbf{C}(D)}^-(v) \geq 1$.

De esta forma g es inyectiva y además $n = |V| = |V_I| \leq |V'| \leq n$, es decir, g también es sobreyectiva y por lo tanto biyectiva. De lo anterior, cada $u' \in V'$, tiene como vecino de salida a un único vértice en V_I . Por definición se tiene que $1 = d_{\mathbf{C}(D)}^+(u') = d^+(u)$. Dado un vértice $v \in V$, notemos que tiene exactamente un vecino de entrada, en efecto, si tenemos $u, w \in V$ distintos tal que $\{u, w\} \subseteq N^-(v)$, entonces, como $d^+(u) = d^+(w) = 1$, entonces $N^+(u) = N^+(w) = \{v\}$. Por definición $N_{\mathbf{C}(D)}^+(u') = N_{\mathbf{C}(D)}^+(w') = \{v\}$, así $g^{-1}(u') = g^{-1}(w') = v$, lo que es una contradicción ya que g es biyectiva. Así, para todo $v \in V$, $d^+(v) = d^-(v) = 1$, y como D es conexo, necesariamente es un ciclo. ■

Lema 4.2.4. *Sea $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ una red disyuntiva(conjuntiva) con digrafo de interacción $D = (V, A)$. Si $|\mathbf{V}_{\text{ind}}(D)| \geq 1$ entonces $\text{rank}(f; \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)) \geq 2$. Además, se cumple que $\text{rank}(f; \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)) = 2$ si y solo si $|\mathbf{V}_{\text{ind}}(D)| = 1$.*

Demostración. Denotando $C := \mathbf{C}(D)$, $V' := \mathbf{V}'_P(D)$ y $V_I := \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$. Si $|V_I| = 1$ entonces, para todo $v' \in V'$, $N_C^+(v') = V_I$. Así $\forall S' \subseteq V'$, $N_C^+(S') = V_I$ o $N_C^+(S') = \emptyset$ si $S = \emptyset$, luego, por Teorema 4.1.7, $\text{rank}(f; V_I) = 2$.

Si $|V_I| \geq 2$, notemos que para $S' = \emptyset$ y $S' = V'$, $N_C^+(V') = V_I$ y $N_C^+(\emptyset) = \emptyset$.

Demostremos que existe $v' \in V'$ tal que $N_C^+(v') \neq V_I$ y $N_C^+(v') \neq \emptyset$. En efecto, por definición de C , para todo $u' \in V'$, $N_C^+(u') \neq \emptyset$, si no $u' \notin V(C)$. Ahora si para todo $u' \in V'$ $N_C^+(u') = V_I$, entonces para todo $w \in V_I$, $N_C^-(w) = V'$, es decir, todos salvo uno son vértices redundantes, lo que es una contradicción ya que por definición, V_I no tiene vértices redundantes.

Finalmente, si $|V_I| \geq 2$, existe $v' \in V'$ tal que $N_C^+(v') \neq V_I$ y $N_C^+(v') \neq \emptyset$, por lo tanto:

$$\text{rank}(f; V_I) = |\{N_C^+(S') : S' \subseteq V'\}| \geq |\{\emptyset, V_I, N_C^+(v')\}| = 3.$$

Es decir, si $|V_I| > 1$, entonces $\text{rank}(f; V_I) \geq 3$. ■

Teorema 4.2.5. *Sea $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ una red disyuntiva(conjuntiva) con digrafo de interacción $D = (V, A)$. Si D tiene al menos un arco, entonces $\text{eden}(f)$ alcanza el valor máximo $2^n - 2$ si y solo si $|\mathbf{V}_{\text{ind}}(D)| = 1$.*

Demostración. Denotando $V_I := \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$. Como el digrafo D tiene al menos un arco, entonces $|V_I| \geq 1$ y por Lema 4.2.4, $\text{rank}(f; V_I) \geq 2$. Notemos que $\text{eden}(f; V_I) = 2^{|V_I|} - \text{rank}(f; V_I)$, así

$$\begin{aligned} \text{eden}(f) &= 2^n - 2^{|V_I|} + \text{eden}(f; V_I) \\ &= 2^n - 2^{|V_I|} + 2^{|V_I|} - \text{rank}(f; V_I) \\ &\leq 2^n - 2. \end{aligned}$$

Notemos que $\text{eden}(f) = 2^n - 2$ si y solo si $\text{rank}(f; V_I) = 2$. Por Lema 4.2.4, $\text{rank}(f; V_I) = 2$ si y solo si $|V_I| = 1$. ■

Observación 5. *Si D no posee arcos, entonces la red f es constante y se tiene que $\text{eden}(f) = 2^n - 1$, lo cual corresponde al valor máximo posible entre todas las redes dinámicas finitas cuyo digrafo de interacción tiene n vértices.*

Corolario 4.2.6. *Sea $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ una red disyuntiva(conjuntiva) con digrafo de interacción $D = (V, A)$. Si D tiene al menos un arco, entonces, $\text{eden}(f) = 2^n - 2$ si y solo si existe un conjunto $S \subseteq V$ tal que, para todo $v \in V$, si $N^-(v) \neq \emptyset$, entonces $N^-(v) = S$.*

Demostración. Notemos que Corolario 4.2.6 nos indica que $\text{eden}(f) = 2^n - 2$ si y solo si $|\mathbf{V}_{\text{ind}}(D)| = 1$. Por otro lado, $|\mathbf{V}_{\text{ind}}(D)| = 1$ si y solo si hay un único vértice $v \in \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$. Notemos que para todo vértice u distinto de v , $u \in \mathbf{V}_{\text{C}}(D) \cup \mathbf{V}_{\text{dep}}(D)$. Si $u \in \mathbf{V}_{\text{C}}(D)$, entonces $N^-(u) = \emptyset$. Por el contrario, si $u \in \mathbf{V}_{\text{dep}}(D)$, por Lema 4.1.1, existe un conjunto no vacío $P \subseteq \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$ tal que $N^-(u) = N^-(P)$. En este caso, la única opción es que $P = \{v\}$, así, escogiendo $S = N^-(v)$, se tiene que $N^-(u) = N^-(P) = N^-(v) = S$. ■

Ejemplo 4.2.2. *Ejemplos de digrafos con al menos un arco que cumplen Corolario 4.2.6.*

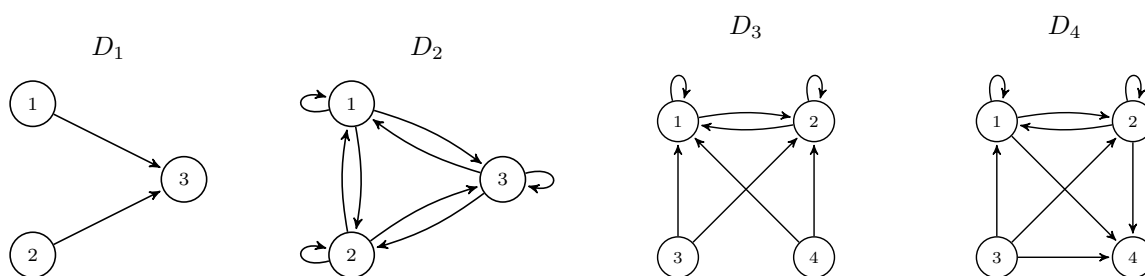


Figura 4.9: Digrafos que cumplen Corolario 4.2.6.

Notemos que los digrafos de la Figura 4.9 cumplen Corolario 4.2.6. En general, los digrafos que cumplen son aquellos con nodos fuentes y sumideros como D_1 , digrafos completos con bucles como D_2 y combinaciones de ambos como D_3 . Notemos que cliques pueden pasar a ser nodos fuentes y sumideros a la vez como D_4 . Al agregar vértices aislados, se sigue cumpliendo Corolario 4.2.6.

4.3. Familias n-acotadas

Los siguientes resultados permitirán relacionar el estudio de n -familias acotadas con redes disyuntivas de n vértices.

Lema 4.3.1. *Sea $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ una red disyuntiva (conjuntiva) con digrafo de interacción $D = (V, A)$. Entonces,*

$$\text{rank}(f) = \left| \left\{ \bigcup_{i \in S} N^+(i) : S \subseteq V \right\} \right|.$$

Demostración. Sea $U = \{\bigcup_{i \in S} N^+(i) : S \subseteq V\}$. Definimos $\phi : U \rightarrow \text{Im}(f)$, donde a cada $A \in U$ le asigna la configuración $\phi(A) \in \{0, 1\}^n$, donde $\phi(A)|_A = \vec{1}$ y $\phi(A)|_{V \setminus A} = \vec{0}$.

Primero, ϕ está bien definida. En efecto, sea $A \in U$, es decir, $A = N^+(S)$ para algún $S \subseteq V$, consideremos x_S con $x|_S = \vec{1}$ y $x|_{V \setminus S} = \vec{0}$. Entonces $f(x_S) = \phi(N^+(S)) = \phi(A)$, por lo que $\phi(A) \in \text{Im}(f)$. La inyectividad de ϕ es inmediata, pues si $A \neq B$ se tiene $\phi(A) \neq \phi(B)$.

Para la sobreyectividad, sea $y \in \text{Im}(f)$. Existe $x \in \{0, 1\}^n$ con $f(x) = y$. Sea $S_1 = \{i \in V : x_i = 1\}$ y $A_1 = \{i \in V : y_i = 1\}$. Como $y = f(x)$, se cumple que $A_1 = N^+(S_1)$. En efecto, si $i \in N^+(S)$ entonces $f_i(x) = 1$, y por ende $i \in A_1$. Ahora, si existe $i \in A_1$ tal que $i \notin \bigcup_{i \in S} N^+(i)$, entonces $f_i(x) = 0$, lo que es una contradicción. Así $A_1 = N^+(S_1) \in U$ y $y = \phi(A_1)$.

Por lo tanto ϕ es una biyección, y se concluye que

$$\text{rank}(f) = |\text{Im}(f)| = \left| \left\{ \bigcup_{i \in S} N^+(i) : S \subseteq V \right\} \right|.$$

■

Lema 4.3.2. *Sea $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ una red disyuntiva (o conjuntiva) con digrafo de interacción $D = (V, A)$. Si definimos la familia $\mathcal{F} = \{N^+(i)\}_{i=1}^n$ y M_D es la matriz de adyacencia de D , entonces:*

$$\text{rank}(f) = |\langle \mathcal{F} \rangle| = \text{rank}^\vee(M_D).$$

Demostración. Por Lema 4.3.1, sabemos que $\text{rank}(f) = |\{\bigcup_{i \in S} N^+(i) : S \subseteq V\}|$, lo cual, por la definición de familia generada, equivale exactamente a $|\langle \mathcal{F} \rangle|$.

Por otro lado, si consideramos a \mathcal{F} como una familia de conjuntos, su matriz de pertenencia $M(\mathcal{F})$ coincide por definición con la matriz de adyacencia M_D , ya que la fila i indica la vecindad de salida del vértice i . Por la definición de la clausura disyuntiva de filas, la cardinalidad del conjunto de vectores generados $|\mathcal{V}_R(M_D)|$ es exactamente $|\langle \mathcal{F} \rangle|$. Por lo tanto, $|\langle \mathcal{F} \rangle| = |\mathcal{V}_R(M_D)| = \text{rank}^\vee(M_D)$, concluyendo la demostración. ■

Teorema 4.3.3. *Para cualquier matriz booleana $M \in \{0, 1\}^{m \times n}$, la cardinalidad de la clausura disyuntiva de filas es igual a la cardinalidad de la clausura disyuntiva de columnas, es decir:*

$$\text{rank}^\vee(M) = |\mathcal{V}_R(M)| = |\mathcal{V}_C(M)|.$$

Demostración. Sea $v \in \mathcal{V}_R(M)$. Definimos el conjunto de índices de ceros de v como $Z(v) = \{j \in \{1, \dots, n\} \mid v_j = 0\}$. Construimos la función $\phi : \mathcal{V}_R(M) \rightarrow \mathcal{V}_C(M)$ definida por:

$$\phi(v) = \bigvee_{j \in Z(v)} c_j.$$

donde c_j es la j -ésima columna de M . Notamos que $\phi(v)$ pertenece a $\mathcal{V}_C(M)$ por construcción.

Probaremos que ϕ es inyectiva por contradicción. Supongamos que existen $u, v \in \mathcal{V}_R(M)$ con $u \neq v$ tales que $\phi(u) = \phi(v)$.

Dado que $u \neq v$, existe al menos un índice k donde difieren. Sin pérdida de generalidad, asumamos $u_k = 1$ y $v_k = 0$.

- Como $v_k = 0$, entonces $k \in Z(v)$. Por definición de ϕ , la columna c_k participa en el OR de $\phi(v)$, lo que implica $c_k \leq \phi(v)$.
- Por la hipótesis $\phi(u) = \phi(v)$, tenemos que $c_k \leq \phi(u)$.

Dado que $u_k = 1$ y u es una unión de filas de M (digamos $u = \bigvee_{i \in I_u} r_i$), existe al menos una fila $i^* \in I_u$ tal que $M_{i^*k} = 1$. La condición $c_k \leq \phi(u)$ implica que la componente i^* de $\phi(u)$ debe ser 1:

$$(\phi(u))_{i^*} = 1. \tag{4.3.1}$$

Por otro lado, evaluemos $(\phi(u))_{i^*}$ usando su definición:

$$(\phi(u))_{i^*} = \left(\bigvee_{j \in Z(u)} c_j \right)_{i^*} = \bigvee_{j \in Z(u)} M_{i^*j}.$$

Observamos que para la fila r_{i^*} , como $r_{i^*} \leq u$, debe cumplirse que $M_{i^*j} \leq u_j$. Para todo $j \in Z(u)$, tenemos $u_j = 0$, lo que fuerza a que $M_{i^*j} = 0$. En consecuencia:

$$\bigvee_{j \in Z(u)} M_{i^*j} = 0 \implies (\phi(u))_{i^*} = 0.$$

Esto contradice eq. (4.3.1). Por lo tanto, el supuesto es falso y ϕ es inyectiva. Esto demuestra

que:

$$|\mathcal{V}_R(M)| \leq |\mathcal{V}_C(M)|.$$

El resultado anterior es válido para cualquier matriz booleana. Consideremos la matriz transpuesta M^T .

$$|\mathcal{V}_R(M^T)| \leq |\mathcal{V}_C(M^T)|.$$

Las filas de M^T son las columnas de M , y las columnas de M^T son las filas de M , por lo que:

$$|\mathcal{V}_C(M)| \leq |\mathcal{V}_R(M)|.$$

Finalmente, se concluye que:

$$\text{rank}^\vee(M) = |\mathcal{V}_R(M)| = |\mathcal{V}_C(M)|.$$

■

Como consecuencia del Teorema 4.3.3, observamos que el rango disyuntivo $\text{rank}^\vee(M)$ es una propiedad estructural intrínseca de la matriz, independiente de si se analiza desde la perspectiva de sus filas o de sus columnas. En particular, esto establece la simetría del rango bajo la transposición, demostrando que $\text{rank}^\vee(M) = \text{rank}^\vee(M^T)$. Lo anterior se resume en Corolario 4.3.4.

Corolario 4.3.4. *Sea $M \in \{0, 1\}^{m \times n}$ una matriz booleana. El rango disyuntivo $\text{rank}^\vee(M)$ es invariante bajo la transposición y bajo cualquier permutación de filas o columnas de M .*

Demostración. La invariancia bajo transposición es consecuencia directa del Teorema 4.3.3, el cual establece que $\text{rank}^\vee(M) = |\mathcal{V}_R(M)| = |\mathcal{V}_C(M)| = \text{rank}^\vee(M^T)$.

Respecto a las permutaciones, reordenar las filas de M únicamente altera el orden en que se presentan las filas, por lo que el conjunto $\mathcal{V}_R(M)$ sigue siendo exactamente el mismo y su cardinalidad no varía.

De manera análoga y directa, reordenar las columnas de M solo cambia el orden de las columnas, dejando intacto el conjunto $\mathcal{V}_C(M)$. Puesto que $\text{rank}^\vee(M) = |\mathcal{V}_C(M)|$, el rango disyuntivo se mantiene invariante, concluyendo la demostración. ■

En Lema 4.3.1 se estableció que $\text{rank}(f)$ puede calcularse a través de la familia de vecindades de salida $\mathcal{F} = \{N^+(i)\}_{i=1}^n$. Es importante notar que la matriz de adyacencia del digrafo D , denotada por M_D , coincide exactamente con la matriz de pertenencia de la familia \mathcal{F} . Dado que las columnas de M_D representan las vecindades de entrada $N^-(i)$, la aplicación de Corolario 4.3.4 concluye que rango disyuntivo es invariante ante la transposición de la matriz de adyacencia, por lo que:

$$\text{rank}(f) = \text{rank}^\vee(M_D^T) = |\langle\{N^-(i)\}_{i=1}^n\rangle|.$$

Este hallazgo nos indica que trabajar con la matriz transpuesta no tiene consecuencias en el rango, lo que se traduce en el siguiente resultado:

Corolario 4.3.5. *Sea f una red disyuntiva con digrafo de interacción D y sea f^T la red disyuntiva asociada al digrafo D^T obtenido al invertir la dirección de todos los arcos de D . Entonces, se cumple que:*

$$\text{rank}(f) = \text{rank}(f^T).$$

Demostración. Sea M_D la matriz de adyacencia de D . Entonces, la matriz de adyacencia de D^T corresponde a su transpuesta M_D^T . Por el Lema 4.3.2, sabemos que $\text{rank}(f) = \text{rank}^\vee(M_D)$ y $\text{rank}(f^T) = \text{rank}^\vee(M_D^T)$.

Finalmente, aplicando el Corolario 4.3.4, concluimos directamente que $\text{rank}(f) = \text{rank}(f^T)$. ■

En términos de complejidad computacional, estos resultados implican que el problema de determinar el rango no está restringido a la configuración de las vecindades de salida, sino que posee una naturaleza simétrica. Así, el problema de calcular $\text{rank}(f)$ puede abordarse indistintamente mediante las vecindades de entrada o salida, lo que permite simplificar el análisis de redes complejas mediante la inversión de sus arcos según sea conveniente.

El Corolario 4.3.5, junto al siguiente resultado conocido presentado en Proposición 4.3.6, cuya demostración puede ser encontrada en Laubenbacher et al., 2010 [11], nos ayuda a demostrar que el rango periódico también se conserva en f^T .

Proposición 4.3.6. *Sea f una red disyuntiva (o conjuntiva), donde la matriz de adyacencia de su digrafo de interacción es M . Entonces, la matriz de adyacencia del digrafo de interacción asociado a la red iterada f^k corresponde a M^k , donde las operaciones se evalúan sobre el semianillo $(\{0, 1\}, \vee, \wedge)$.*

Es importante destacar que, bajo este marco algebraico sobre el semianillo booleano, la transposición de matrices conmuta con la potenciación, lo que garantiza la identidad $(M^T)^k = (M^k)^T$ para cualquier entero $k \geq 1$. Además, esta estructura matricial permite representar la regla de evolución de una red disyuntiva de forma compacta como el producto booleano $f(x) = M^T x$, donde los unos del vector x nos indican qué filas se activan para realizar la unión. El caso conjuntivo es equivalente, sin embargo, en este los ceros se transmiten y, por lo tanto, la dinámica se expresa como $f(x) = \overline{M^T \bar{x}}$.

Conociendo que bajo un k suficientemente grande, el rango de f^k coincide con el rango periódico f , se puede deducir Corolario 4.3.7.

Corolario 4.3.7. *Sea f una red disyuntiva con digrafo de interacción D y sea f^T la red disyuntiva asociada al digrafo transpuesto D^T , obtenido al invertir la dirección de todos los arcos de D . Entonces, el rango periódico de ambas redes son iguales, es decir:*

$$\text{per}(f) = \text{per}(f^T).$$

Demostración. Para un entero k lo suficientemente grande, sabemos que el rango periódico de una red disyuntiva coincide con el rango de su k -ésima iteración, es decir, $\text{per}(f) = \text{rank}(f^k)$.

Sea M_D la matriz de adyacencia de D y, por consecuencia, M_D^T es la matriz de adyacencia de D^T . Según Proposición 4.3.6, la matriz de adyacencia asociada al digrafo de iteración de f^k corresponde a la potencia booleana M_D^k (donde la evaluación se realiza sobre el semianillo booleano, reemplazando la suma y el producto usuales por OR y AND, respectivamente). Por lo tanto, se tiene que:

$$\text{per}(f) = \text{rank}(f^k) = \text{rank}^\vee(M_D^k).$$

Dado que las propiedades de transposición se mantienen bajo estas operaciones booleanas,

se cumple que $(M_D^T)^k = (M_D^k)^T$. En consecuencia, para la red transpuesta obtenemos:

$$\text{per}(f^T) = \text{rank}((f^T)^k) = \text{rank}^\vee((M_D^T)^k) = \text{rank}^\vee((M_D^k)^T).$$

Finalmente, apelando a la invariancia del rango por transposición (ver Corolario 4.3.4 o Corolario 4.3.5), deducimos que $\text{rank}^\vee(M_D^k) = \text{rank}^\vee((M_D^k)^T)$. Uniendo estas igualdades, concluimos la demostración:

$$\text{per}(f) = \text{per}(f^T).$$

■

Podemos ahora preguntarnos qué pasa con el rango fijo de la red, esta duda se resuelve en el siguiente Teorema 4.3.8.

Teorema 4.3.8. *Sea f una red disyuntiva con digrafo de interacción D y sea f^T la red disyuntiva asociada al digrafo D^T obtenido al invertir la dirección de todos los arcos de D . Entonces, la cantidad de puntos fijos de f es exactamente igual a la cantidad de puntos fijos de f^T , es decir:*

$$\text{fix}(f) = \text{fix}(f^T).$$

Demostración. Notemos que cada estado $x \in \{0, 1\}^n$ está biunívocamente determinado por su conjunto de vértices activos $S = \{i \in V \mid x_i = 1\}$.

Bajo la dinámica disyuntiva, la configuración x asociada a S es un punto fijo de f si y solo si $S = N_D^+(S)$. Esta condición implica que la activación de todo vértice en S debe estar sustentada por al menos un camino proveniente de un ciclo contenido en S . A su vez, por la definición de la vecindad de salida, todo vértice alcanzable desde S debe pertenecer a S (el conjunto es cerrado hacia adelante).

Sea $V_C \subseteq V$ el conjunto de todos los vértices que pertenecen a al menos un ciclo en D . Definimos $Desc(A)$ como el conjunto de descendientes de A (vértices alcanzables desde A). Entonces, la configuración x asociada a S es un punto fijo de f si y solo si:

$$S = Desc(S \cap V_C). \tag{4.3.2}$$

Por simetría, la configuración y asociada a un conjunto $T \subseteq V$ es un punto fijo para la red transpuesta f^T si $T = N_{D^T}^+(T)$, lo que en el grafo original D equivale a $T = N_D^-(T)$. Utilizando el operador de ancestros $Anc(A)$ (vértices desde los cuales existe un camino hacia A), la configuración y asociada a T es punto fijo de f^T si y solo si T es cerrado hacia atrás y se sustenta en sus ciclos:

$$T = Anc(T \cap V_C). \quad (4.3.3)$$

Para demostrar que ambas redes tienen la misma cantidad de puntos fijos, basta con construir una biyección Φ entre los conjuntos de vértices activos que generan dichos puntos fijos en f y f^T . Definimos Φ mediante la siguiente operación de conjuntos:

$$\Phi(S) = Anc(V_C \setminus S).$$

Para probar que Φ está bien definida (es decir, que la configuración asociada a $T = \Phi(S)$ efectivamente es un punto fijo de f^T), necesitamos verificar que T satisface la Ecuación (4.3.3). Notemos que, como la configuración asociada a S es un punto fijo de f , se tiene que $S = N_D^+(S)$, por lo que no existe ningún camino dirigido desde un vértice en S hacia un vértice en $V \setminus S$. En particular, no hay caminos desde S hacia $V_C \setminus S$. Esto implica que ningún vértice de S puede ser ancestro de $V_C \setminus S$, es decir:

$$Anc(V_C \setminus S) \cap S = \emptyset \implies T \cap S = \emptyset.$$

Por otro lado, es claro que $(V_C \setminus S) \subseteq Anc(V_C \setminus S) = T$. Por lo tanto, los vértices cíclicos que pertenecen a T son exactamente los que no pertenecen a S :

$$T \cap V_C = V_C \setminus S.$$

Sustituyendo esto en la definición de T , obtenemos:

$$T = Anc(V_C \setminus S) = Anc(T \cap V_C).$$

Lo cual demuestra que la configuración asociada a $T = \Phi(S)$ es un punto fijo de f^T .

Finalmente, definimos la función inversa Ψ como:

$$\Psi(T) = Desc(V_C \setminus T).$$

Para ver que Ψ es la inversa de Φ , evaluamos $\Psi(\Phi(S))$ para cualquier conjunto S asociado a un punto fijo de f :

$$\Psi(\Phi(S)) = \Psi(T) = Desc(V_C \setminus T)$$

Como demostramos anteriormente que $T \cap V_C = V_C \setminus S$, se sigue de forma directa que $V_C \setminus T = S \cap V_C$. Sustituyendo esto:

$$\Psi(\Phi(S)) = Desc(S \cap V_C) = S.$$

Donde la última igualdad se cumple por la Ecuación (4.3.2). Por simetría, el mismo razonamiento prueba que $\Phi(\Psi(T)) = T$.

Dado que Φ posee una inversa bien definida, es una biyección entre los conjuntos de vértices activos asociados a los puntos fijos. Debido a la correspondencia biunívoca entre estos conjuntos y las configuraciones del sistema, concluimos directamente que:

$$\text{fix}(f) = \text{fix}(f^T).$$

■

Como podemos ver, tanto el rango (y por lo tanto, la cantidad de Jardines del Edén), rango periódico y rango fijo se mantienen invariantes. Ahora nos podríamos preguntar que sucede con la estructura de la red, tanto si se mantienen los mismos ciclos en el digrafo de iteración o la altura. Estas preguntas son contestadas en Corolario 4.3.9 y Teorema 4.3.10.

Corolario 4.3.9. *Sea f una red disyuntiva con digrafo de interacción D y sea f^T la red disyuntiva asociada al digrafo transpuesto D^T . Si denotamos por $h(f) = \min\{k \in \mathbb{N}_0 : \exists p \in$*

$\mathbb{Z}^+, f^{k+p} = f^k\}$ a la altura de la red f , entonces se cumple que:

$$h(f) = h(f^T).$$

Demostración. Por la equivalencia entre la dinámica de una red disyuntiva y las potencias de su matriz de adyacencia M_D evaluada sobre el semianillo booleano, la condición $f^{k+p} = f^k$ equivale directamente a la igualdad matricial $M_D^{k+p} = M_D^k$.

Aplicando el operador de transposición a ambos lados y considerando que este conmuta con el producto matricial booleano, obtenemos:

$$(M_D^{k+p})^T = (M_D^k)^T \iff (M_D^T)^{k+p} = (M_D^T)^k.$$

Dado que M_D^T es la matriz de adyacencia asociada a la red transpuesta f^T , esta última expresión es estrictamente equivalente a la condición dinámica $(f^T)^{k+p} = (f^T)^k$.

Al ser una cadena de equivalencias lógicas, el conjunto de índices k y periodos p que satisfacen la relación para la red f es exactamente el mismo que para f^T . Por lo tanto, el mínimo k posible es idéntico en ambos casos, concluyendo que $h(f) = h(f^T)$. ■

Y esta invarianza no se queda solo en la altura.

Teorema 4.3.10. *Sea f una red disyuntiva con digrafo de interacción D y sea f^T la red disyuntiva asociada a D^T . Para cualquier entero $p \geq 1$, la cantidad de ciclos límite de longitud exacta p en f es igual a la cantidad de ciclos límite de longitud exacta p en f^T .*

Demostración. Sea $c_p(f)$ la cantidad de estados pertenecientes a ciclos límite de longitud exacta p en f . Dado que los puntos fijos de la iteración f^k son precisamente los estados en ciclos cuya longitud divide a k , se tiene la relación:

$$\text{fix}(f^k) = \sum_{p|k} c_p(f).$$

Por otro lado, la matriz de adyacencia de $(f^T)^k$ es $(M_D^T)^k = (M_D^k)^T$, lo que implica que la red iterada $(f^T)^k$ es estructuralmente la transpuesta de la red iterada f^k . Aplicando el Teorema 4.3.8

sobre estas redes iteradas, obtenemos para todo $k \geq 1$:

$$\text{fix}(f^k) = \text{fix}((f^T)^k) \implies \sum_{p|k} c_p(f) = \sum_{p|k} c_p(f^T).$$

Por la fórmula de inversión de Möbius (véase [7]), la sucesión $c_p(f)$ queda unívocamente determinada por los valores de $\text{fix}(f^k)$. Al ser estos valores idénticos para f y f^T , se deduce de forma directa que $c_p(f) = c_p(f^T)$ para todo $p \geq 1$.

Finalmente, como cada ciclo de longitud p agrupa exactamente p estados, la cantidad total de dichos ciclos es $\frac{c_p(f)}{p}$. Concluimos así que ambas redes poseen la misma cantidad de ciclos de cada longitud. ■

Finalmente, toda esta información recopilada nos puede hacer pensar que los digrafos de iteración de f y f^T pueden ser isomorfos; sin embargo, esto no siempre es cierto, como se observa en el Ejemplo 4.3.1.

Ejemplo 4.3.1. *Consideremos una red disyuntiva de tres vértices, $V = \{1, 2, 3\}$. Sea D el digrafo de interacción con arcos $1 \rightarrow 2$ y $1 \rightarrow 3$. La regla de actualización de la red f inducida por D es:*

$$f(x_1, x_2, x_3) = (0, x_1, x_1).$$

La imagen de esta función contiene solo dos configuraciones: $\text{Im}(f) = \{000, 011\}$. Al analizar las preimágenes, observamos que la configuración 011 es alcanzada por cualquier estado donde $x_1 = 1$ (4 estados en total), y la configuración 000 es alcanzada por cualquier estado donde $x_1 = 0$ (4 estados en total). Por lo tanto, en el digrafo de iteración $D_I(f)$, el grado de entrada máximo de cualquier vértice es 4.

Por otro lado, consideremos la red transpuesta f^T asociada al digrafo D^T , obtenido al invertir los arcos $2 \rightarrow 1$ y $3 \rightarrow 1$. La regla de actualización para f^T es:

$$f^T(x_1, x_2, x_3) = (x_2 \vee x_3, 0, 0).$$

La imagen de esta función también contiene solo dos configuraciones: $\text{Im}(f^T) = \{000, 100\}$,

lo que reafirma que $\text{rank}(f) = \text{rank}(f^T) = 2$. Sin embargo, la configuración 100 es alcanzada por cualquier estado donde $x_2 = 1$ o $x_3 = 1$, lo cual abarca 6 estados distintos. La configuración 000 solo es alcanzada por los 2 estados restantes (000 y 100). Así, en el digrafo de iteración $D_I(f^T)$, existe un vértice con grado de entrada igual a 6.

Los digrafos de iteración para ambas redes se pueden observar en Figura 4.10.

Dado que las secuencias de grados de entrada de $D_I(f)$ y $D_I(f^T)$ difieren (uno posee un estado con 6 preimágenes y el otro no), es imposible establecer un isomorfismo entre ellos. Esto demuestra que la transposición preserva las propiedades globales de los atractores y la cantidad de Jardines del Edén, pero puede alterar asimétricamente la distribución de las preimágenes y la topología interna de los estados transientes.

Sin embargo, como última alternativa, podríamos conjeturar que los caminos simplemente cambiaron de atractor, es decir, que al quitar los vértices pertenecientes a ciclos en $D_I(f)$ y $D_I(f^T)$, los subdigrafos resultantes serían isomorfos. Esto tampoco es cierto: al quitar el único ciclo de $D_I(f)$, el bosque resultante nos dará una estrella de 4 puntas y 2 vértices aislados. Por otro lado, al quitar el ciclo de $D_I(f^T)$, obtendremos una única estrella de 6 puntas.

Como último intento, tampoco podemos argumentar que las estructuras no se rompen basándonos en que, al juntar la estrella de 4 puntas con los vértices aislados, podríamos formar la estrella de 6 puntas. Al intentar aplicar esta correspondencia desde f^T hacia f , nos veríamos obligados a eliminar arcos de la estrella de 6 puntas para aislar los vértices, rompiendo irreversiblemente la topología del digrafo. Esto confirma, en definitiva, que la transposición induce una reestructuración topológica real y asimétrica en los árboles de nodos transientes.

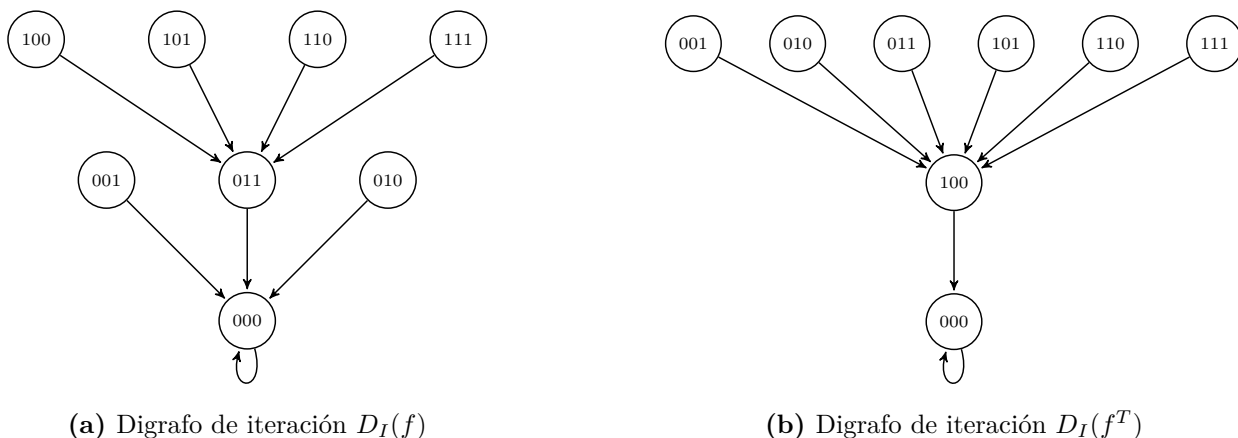


Figura 4.10: Digrafos de iteración $D_I(f)$ y $D_I(f^T)$ de Ejemplo 4.3.1.

Habiendo establecido la invarianza de la red al invertir sus arcos, nos interesa ahora explorar las propiedades de las familias n -acotadas. En este contexto, la Proposición 4.3.11 proporciona un criterio algebraico directo para identificar tanto conjuntos como elementos redundantes a partir de la matriz de pertenencia de una familia F .

Proposición 4.3.11. *Sea $M \in \{0, 1\}^{m \times n}$ una matriz booleana.*

(I) *Si M_{-r_i} es la matriz resultante de eliminar la i -ésima fila r_i , entonces:*

$$\text{rank}^\vee(M) = \text{rank}^\vee(M_{-r_i}) \iff r_i \in \mathcal{V}_R(M_{-r_i}).$$

(II) *Si M_{-c_j} es la matriz resultante de eliminar la j -ésima columna c_j , entonces:*

$$\text{rank}^\vee(M) = \text{rank}^\vee(M_{-c_j}) \iff c_j \in \mathcal{V}_C(M_{-c_j}).$$

Demostración. Notemos que, por definición de la clausura disyuntiva de filas, siempre se cumple la inclusión trivial $\mathcal{V}_R(M_{-r_i}) \subseteq \mathcal{V}_R(M)$.

Para demostrar (I), observamos que si $r_i \in \mathcal{V}_R(M_{-r_i})$, cualquier combinación disyuntiva de filas de M que incluya a r_i puede reescribirse únicamente en términos de las filas de M_{-r_i} , lo que implica $\mathcal{V}_R(M) \subseteq \mathcal{V}_R(M_{-r_i})$ y, por ende, la igualdad de los conjuntos, y por lo tanto la igualdad del rango disyuntivo. Inversamente, si los rangos disyuntivos son iguales, la inclusión

$\mathcal{V}_R(M_{-r_i}) \subseteq \mathcal{V}_R(M)$ fuerza la identidad $\mathcal{V}_R(M_{-r_i}) = \mathcal{V}_R(M)$. Como r_i es una fila de M , trivialmente $r_i \in \mathcal{V}_R(M)$, lo que por la identidad anterior implica $r_i \in \mathcal{V}_R(M_{-r_i})$.

La afirmación (II) se deduce directamente de aplicar el resultado anterior a la matriz transpuesta M^T . Al trasponer la matriz, las filas de M^T corresponden a las columnas de M , por lo que:

$$\text{rank}^\vee(M^T) = \text{rank}^\vee(M_{-c_j}^T) \iff c_j \in \mathcal{V}_R(M_{-c_j}^T),$$

lo cual, por Corolario 4.3.4, es equivalente a

$$\text{rank}^\vee(M) = \text{rank}^\vee(M_{-c_j}) \iff c_j \in \mathcal{V}_C(M_{-c_j}).$$

■

Observación 6. *Dado que las familias de conjuntos pueden representarse mediante matrices de pertenencia, la Proposición 4.3.11 resulta fundamental. Esta nos permite determinar si un conjunto o un elemento es redundante en una familia \mathcal{F} verificando simplemente si su fila (que representa al conjunto) o su columna (que representa al elemento) se genera como unión booleana de otras filas o columnas en la matriz, respectivamente. Esta caracterización es equivalente a la redundancia descrita en el Definición 2.2 para los elementos (columnas); no obstante, este enfoque matricial permite extender el concepto de manera natural a los nodos fuente de un digrafo bipartito, utilizando para ello sus vecindades de salida.*

Observación 7. *El orden en que se eliminan las filas y columnas redundantes no altera la matriz minimal resultante M^* , puesto que la condición de redundancia es invariante durante todo el proceso de reducción:*

- **Preservación de la redundancia:** *Si una fila r_i es redundante ($r_i = \bigvee_{j \in J} r_j$), esta igualdad se cumple componente a componente. Eliminar una columna simplemente suprime una de estas componentes, por lo que la relación de dependencia lineal booleana se mantiene intacta para las componentes restantes.*
- **Preservación de la no redundancia:** *Si r_i no es redundante, es imposible que adquiera esta condición al eliminar una columna redundante c_k . Si c_k fuese la única componente*

que impedía la igualdad $r_i = \bigvee_{j \in J} r_j$, llegaríamos a una contradicción: dado que c_k se genera a partir de un conjunto de columnas L ($c_k = \bigvee_{l \in L} c_l$), cualquier discrepancia presente en la componente k ya debía manifestarse obligatoriamente en alguna de las columnas de L .

Por simetría, el mismo argumento aplica al analizar las columnas respecto a las filas. Esto garantiza que el proceso de reducción es confluyente y que la forma minimal M^* está unívocamente determinada (salvo permutación de filas y columnas).

El Teorema 4.3.12 formaliza la relevancia de esta reducción al garantizar que el rango del sistema se conserve intacto en la matriz minimal.

Teorema 4.3.12. *Sea M una matriz booleana y M^* su forma minimal. Entonces,*

$$\text{rank}^\vee(M) = \text{rank}^\vee(M^*).$$

Además, la forma minimal es estricta: la eliminación de cualquier fila o columna adicional de M^* disminuye estrictamente su rango disyuntivo.

Demostración. Analizamos la conservación de $\text{rank}^\vee(M)$ en cada paso del procedimiento para obtener M^* .

En primer lugar, al eliminar filas (o columnas) idénticas, es necesario conservar exactamente una copia. Si elimináramos todas simultáneamente, perderíamos la garantía de que dicha fila pueda generarse a partir de las restantes. Al conservar una copia, la fila eliminada pertenece trivialmente al espacio generado por la matriz resultante, por lo que la Proposición 4.3.11 asegura que el rango se conserva.

A continuación, eliminamos simultáneamente todas las filas expresables como disyunción de otras. Como la matriz es finita y ya no contiene repetidos, las dependencias lógicas no pueden ser circulares. Así, cualquier fila eliminada se descompone iterativamente hasta expresarse únicamente como unión de filas irreducibles (aquellas que no son disyunción de otras y, por ende, sobreviven al proceso). Dado que toda fila descartada pertenece al espacio generado por estas filas básicas restantes, la Proposición 4.3.11 garantiza la invariancia del rango.

Análogamente para las columnas, el Teorema 4.3.3 establece que $|\mathcal{V}_R(M)| = |\mathcal{V}_C(M)|$. Por simetría, el mismo argumento de descomposición sin circularidad junto con la Proposición 4.3.11 asegura que la eliminación de columnas redundantes preserva el rango, concluyendo que $\text{rank}^\vee(M) = \text{rank}^\vee(M^*)$.

Finalmente, para ver que la forma minimal es estricta, notemos que por construcción en M^* ninguna fila se puede expresar como disyunción de las demás; es decir, $r_k \notin \mathcal{V}_R(M^*_{-r_k})$ para toda fila r_k . Por la Proposición 4.3.11, esto implica que $|\mathcal{V}_R(M^*)| \neq |\mathcal{V}_R(M^*_{-r_k})|$. Por simetría en las columnas, eliminar cualquier fila o columna de M^* disminuye estrictamente su rango disyuntivo. ■

El Teorema 4.3.12 nos permite rescatar la información verdaderamente interesante en una matriz para calcular el rango disyuntivo. Finalmente, las dimensiones de la matriz minimal serán también una cota para el rango disyuntivo como se demuestra en Corolario 4.3.13.

Corolario 4.3.13. *Sea M una matriz booleana y sea $M^* \in \{0, 1\}^{m \times n}$ su forma minimal. Si $l = \min\{m, n\}$, entonces:*

$$\text{rank}^\vee(M) \leq 2^l.$$

Demostración. Por Teorema 4.3.12, sabemos que $\text{rank}^\vee(M) = \text{rank}^\vee(M^*)$. Además, por Teorema 4.3.3, el rango disyuntivo coincide con la cardinalidad de la clausura disyuntiva de filas y de columnas, es decir, $\text{rank}^\vee(M^*) = |\mathcal{V}_R(M^*)| = |\mathcal{V}_C(M^*)|$.

Dado que $\mathcal{V}_R(M^*)$ se genera a partir de disyunciones lógicas de las m filas de M^* , su cardinalidad máxima está acotada por el total de subconjuntos posibles de filas, esto es, $|\mathcal{V}_R(M^*)| \leq 2^m$. De manera análoga, para las n columnas se tiene que $|\mathcal{V}_C(M^*)| \leq 2^n$.

Como el rango disyuntivo debe satisfacer ambas cotas de forma simultánea, se concluye que:

$$\text{rank}^\vee(M) = \text{rank}^\vee(M^*) \leq \min\{2^m, 2^n\} = 2^{\min\{m, n\}} = 2^l.$$

■

En su estudio sobre la dinámica de redes booleanas, Gadouleau [6] plantea una serie de interrogantes abiertas fundamentales sobre la relación entre la dimensión del sistema y el tamaño

de su imagen. Entre estos problemas se encuentran: dado un n , ¿cuál es el mínimo $k \geq 1$ tal que no existe ninguna red disyuntiva de dimensión n y rango k ? Y por otro lado, ¿cuál es la complejidad computacional de decidir si, dados k y n , existe una red disyuntiva de dimensión n con rango k ?

Estos problemas se pueden abordar si logramos conocer cuál es la red de dimensión más pequeña posible que tenga un rango exacto k .

A continuación, vamos a demostrar que encontrar esta red de dimensión mínima para un rango k es equivalente a estudiar la función $\text{mbf}(k)$. Para ello, el Teorema 4.3.14 nos entrega una correspondencia directa entre las familias n -acotadas y las redes disyuntivas de dimensión n .

Teorema 4.3.14. *Dado $n, k \in \mathbb{N}$ con $1 \leq k \leq 2^n$ y un conjunto $V = \{1, \dots, n\}$, entonces existe una red disyuntiva f con digrafo de interacción $D = (V, A)$ tal que $\text{rank}(f) = k$ si y solo si existe una n -familia acotada \mathcal{F} tal que $|\langle \mathcal{F} \rangle| = k$.*

Demostración. Sea D un digrafo con vértices V tal que $\text{rank}(f[D]) = k$, podemos formar una n -familia $\mathcal{F} = \{N^+(1), \dots, N^+(n)\}$. Por el Lema 4.3.1, se tiene que

$$k = \text{rank}(f[D]) = \left| \left\{ \bigcup_{i \in S} N^+(i) : S \subseteq V \right\} \right| = \left| \left\{ \bigcup_{A \in S} A : S \subseteq \mathcal{F} \right\} \right| = |\langle \mathcal{F} \rangle|.$$

Notemos que $|\mathcal{F}| = n$ y al quitar uno a uno conjuntos redundantes en \mathcal{F} (siguiendo Proposición 4.3.11) obtendremos una n -familia acotada \mathcal{F}' tal que $k = |\langle \mathcal{F} \rangle| = |\langle \mathcal{F}' \rangle|$.

Ahora, supongamos que existe una n -familia acotada $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_m\}$ tal que $|\langle \mathcal{F} \rangle| = k$. Si $m < n$, podemos definir los conjuntos A_i con $m < i \leq n$, donde cada uno se escoge arbitrariamente en $\langle \mathcal{F} \rangle$ (equivalente a Proposición 4.3.11).

Finalmente, construimos un dígrafo D' con vértices V asignando a cada $v \in V$ un conjunto de salida distinto $N^+(v) = A_j$. Se tiene finalmente que:

$$k = |\langle \mathcal{F} \rangle| = \left| \left\{ \bigcup_{A \in S} A : S \subseteq \mathcal{F} \right\} \right| = \left| \left\{ \bigcup_{j \in S} A_j : S \subseteq V \right\} \right| = \left| \left\{ \bigcup_{i \in S} N^+(i) : S \subseteq V \right\} \right| = \text{rank}(f[D']).$$



Ejemplo 4.3.2. Notemos que para la 3-familia acotada $F = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$, obtenemos que:

$$\langle F \rangle = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\},$$

es decir, genera 5 conjuntos.

Seguendo la Teorema 4.3.14, podemos construir un digrafo D_1 de 3 vértices tal que: $N^+(1) = \{1, 3\}$, $N^+(2) = \{1\}$ y $N^+(3) = \{1, 2\}$. En este caso, se cumple que $\text{rank}(f[D_1]) = 5$.

De la misma forma podemos formar un digrafo arbitrario D_2 con más de 3 vértices tal que $\text{rank}(f[D_2]) = 5$. Por ejemplo, si $V(D_2) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, podemos escoger arbitrariamente $N^+(1) = \{1, 3\}$, $N^+(2) = \{1\}$, $N^+(3) = \{1, 2\}$, $N^+(4) = \{1, 2, 3\}$ y $N^+(5) = \{1\}$. Se pueden apreciar ambos digrafos en Figura 4.11.

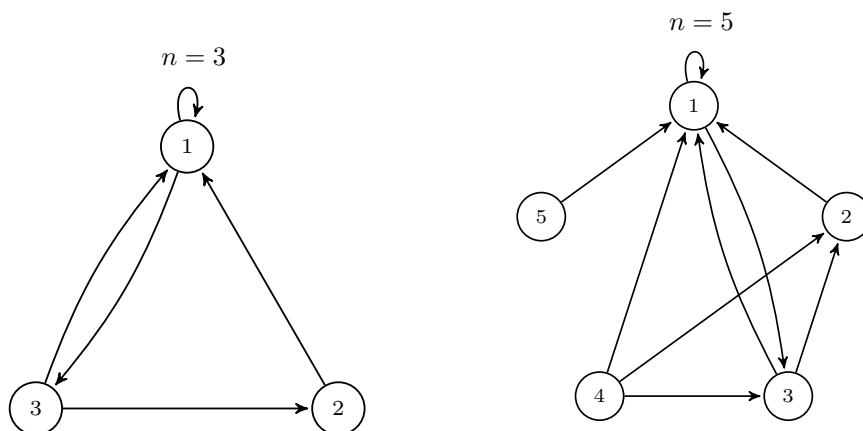


Figura 4.11: Digrafos de Ejemplo 4.3.2.

Teorema 4.3.15. Sean $n, k, l \in \mathbb{Z}$ tales que $0 \leq l \leq k \leq n - 1$, entonces $\text{mbf}(2^k + 2^l) = k + 1$.

Demostración. Definamos

$$A_i = \{i\} \quad (1 \leq i \leq k), \quad A_{k+1} = \{k + 1 - l, \dots, k + 1\},$$

y sea $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_{k+1}\}$. Entonces $|\mathcal{F}| = k + 1$.

Si una subfamilia de \mathcal{F} no contiene a A_{k+1} , su unión es un subconjunto arbitrario de $\{1, \dots, k\}$, de donde se obtienen 2^k conjuntos. En cambio, si la subfamilia incluye a A_{k+1} , los elementos $\{k+1-l, \dots, k+1\}$ ya aparecen forzosamente, y sólo los primeros l índices $\{1, \dots, l\}$ aportan nuevas combinaciones, generando 2^l conjuntos adicionales. Por lo tanto,

$$|\langle \mathcal{F} \rangle| = 2^k + 2^l.$$

Por otro lado, si una n -familia acotada \mathcal{G} es tal que $|\mathcal{G}| \leq k$, entonces $\langle \mathcal{G} \rangle$ genera uniones arbitrarias de k conjuntos, lo cual implica que $|\langle \mathcal{G} \rangle| \leq 2^k$. En consecuencia, $\text{mbf}(2^k + 2^l) \geq k+1$ el cual se alcanza con \mathcal{F} . ■

Ejemplo 4.3.3. Si queremos encontrar una n -familia acotada que genere $12 = 2^3 + 2^2$ conjuntos, del Teorema 4.3.15, podemos notar que $k = 4$ y $l = 3$. Esto nos permite formar la 5-familia acotada $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$.

Lema 4.3.16. Sean $n, m \in \mathbb{N}$, una n -familia acotada \mathcal{F} y una m -familia acotada \mathcal{G} . Entonces existe una $(n+m)$ -familia acotada \mathcal{H} tal que

$$|\langle \mathcal{H} \rangle| = |\langle \mathcal{F} \rangle| \cdot |\langle \mathcal{G} \rangle|.$$

Demostración. Definamos

$$\mathcal{G}' = \{\{n+i : i \in A\} : A \in \mathcal{G}\},$$

de modo que todo conjunto de \mathcal{G}' está contenido en $\{n+1, \dots, n+m\}$ y es disjunto de cada conjunto en \mathcal{F} . Sea ahora

$$\mathcal{H} = \mathcal{F} \cup \mathcal{G}'.$$

Entonces \mathcal{H} es una $(n+m)$ -familia acotada.

Además, como los elementos de $\langle \mathcal{F} \rangle$ y $\langle \mathcal{G}' \rangle$ viven en universos disjuntos, toda unión de subfamilias de \mathcal{H} se escribe de manera única como

$$X \cup Y, \quad X \in \langle \mathcal{F} \rangle, Y \in \langle \mathcal{G}' \rangle.$$

Así, se obtiene una biyección

$$\langle \mathcal{H} \rangle \longleftrightarrow \langle \mathcal{F} \rangle \times \langle \mathcal{G}' \rangle,$$

y como $|\langle \mathcal{G}' \rangle| = |\langle \mathcal{G} \rangle|$, concluimos que

$$|\langle \mathcal{H} \rangle| = |\langle \mathcal{F} \rangle| \cdot |\langle \mathcal{G} \rangle|.$$

■

Dados $k, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tales que $k = k_1 \cdot k_2$, por Lema 4.3.16 es claro que

$$\text{mbf}(k) \leq \text{mbf}(k_1) + \text{mbf}(k_2).$$

Se realizó una búsqueda exhaustiva de todas las n -familias acotadas con $1 \leq n \leq 7$, y de algunas correspondientes a $n = 8$ y $n = 9$. Los resultados se presentan en la Tabla 4.2, donde se marca con “X” si existe una n -familia acotada que genera k conjuntos, con “?” si no hay información disponible, y se deja en blanco cuando no se encontró ninguna.

A partir de estos datos, se observa que $\text{mbf}(55) = 7$, $\text{mbf}(11) = 5$ y $\text{mbf}(5) = 3$, pero

$$\text{mbf}(55) < \text{mbf}(11) + \text{mbf}(5),$$

lo que demuestra que la desigualdad anterior no siempre se alcanza con igualdad.

Teorema 4.3.17. *Sea $k \in \mathbb{N}$. El Algoritmo 1 determina un valor $\mathcal{C}(k)$ tal que*

$$\mathcal{C}(k) \leq 2L(k) - \mathcal{K}(k),$$

donde $L(k) = \lfloor \log_2(k) \rfloor$ y $\mathcal{K}(k) = \max\{m \in \mathbb{N}_0 : 2^m \text{ divide a } k\}$, para el cual existe una $\mathcal{C}(k)$ -familia acotada que genera exactamente k conjuntos.

Demostración. Demostraremos que podemos formar una $\mathcal{C}(k)$ -familia acotada usando Algoritmo 1 tal que $\mathcal{C}(k) \leq 2L(k) - \mathcal{K}(k)$.

Procedemos por inducción sobre k .

El caso $k = 1$ es inmediato: se tiene $L(1) = \mathcal{K}(1) = 0$, Algoritmo 1 retorna $\mathcal{C}(1) = 0$, y la familia vacía genera exactamente un conjunto.

Supongamos ahora válida la afirmación para todo $k' < k$ y consideremos k .

Si k es par, podemos escribir $k = 2^m l$ con $m = \mathcal{K}(k) \geq 1$ y l impar. En este escenario se cumple $L(k) = m + L(l)$, $\mathcal{K}(l) = 0$ y, por hipótesis inductiva, $\mathcal{C}(l) \leq 2L(l)$. El Algoritmo 1 entrega entonces $\mathcal{C}(k) = m + \mathcal{C}(l)$, lo que implica

$$\mathcal{C}(k) \leq m + 2L(l) = 2L(k) - m = 2L(k) - \mathcal{K}(k).$$

Además, una m -familia que genera $2^m = 2^{m-1} + 2^{m-1}$ conjuntos (Teorema 4.3.15) puede combinarse con una $c(l)$ -familia que genera l mediante Lema 4.3.16, obteniendo la familia buscada.

Si en cambio k es impar y divisible por $2^m + 1$, escribimos $k = (2^m + 1)l$ con l impar. En este caso se cumple $\mathcal{K}(k) = 0$ y $L(k) \geq m + L(l)$. La hipótesis inductiva asegura que $\mathcal{C}(l) \leq 2L(l)$, y el algoritmo produce $\mathcal{C}(k) = m + 1 + \mathcal{C}(l) \leq 2L(k) = 2L(k) - \mathcal{K}(k)$. La construcción se obtiene uniendo una familia mínima de tamaño $m + 1$ que genera $2^m + 1$ conjuntos (Teorema 4.3.15) con una familia para l , aplicando nuevamente Lema 4.3.16.

Finalmente, si k es impar y no divisible por ningún $2^m + 1$, Algoritmo 1 retorna $\mathcal{C}(k) = 1 + \mathcal{C}(k-1)$. Como $k-1$ es par, se tiene $\mathcal{K}(k-1) \geq 1$, mientras que $L(k) = L(k-1)$ y $\mathcal{K}(k) = 0$. La hipótesis inductiva aplicada a $k-1$ da

$$\mathcal{C}(k) \leq 1 + 2L(k-1) - \mathcal{K}(k-1) \leq 2L(k) = 2L(k) - \mathcal{K}(k).$$

Sea \mathcal{F} una $\mathcal{C}(k-1)$ -familia que genera $k-1$ conjuntos.

Agregando el conjunto $[\mathcal{C}(k-1) + 1]$ a \mathcal{F} se obtiene una $\mathcal{C}(k)$ -familia que genera exactamente k conjuntos, ya que este nuevo conjunto introduce un único conjunto adicional, ya que los que genera \mathcal{F} son subconjuntos de este.

En todos los escenarios anteriores se concluye tanto la existencia de una $\mathcal{C}(k)$ -familia acotada que genera k conjuntos como la validez de la desigualdad $\mathcal{C}(k) \leq 2L(k) - \mathcal{K}(k)$, completando

la demostración. ■

Corolario 4.3.18. *Para todo $k \in \mathbb{N}$, se cumple la siguiente cadena de desigualdades:*

$$L(k) \leq \text{mbf}(k) \leq \mathcal{C}(k) \leq 2L(k) - \mathcal{K}(k),$$

donde $L(k) = \lfloor \log_2(k) \rfloor$ y $\mathcal{K}(k) = \max\{m \in \mathbb{N}_0 : 2^m \text{ divide a } k\}$.

Demostración. Para la cota inferior, procedemos por contradicción. Supongamos que $\text{mbf}(k) < L(k)$. Dado que $\text{mbf}(k)$ es entero, esto implica $\text{mbf}(k) \leq L(k) - 1$. Por definición, una familia de tamaño $\text{mbf}(k)$ podría generar a lo más $2^{\text{mbf}(k)}$ uniones distintas. Sin embargo:

$$2^{\text{mbf}(k)} \leq 2^{L(k)-1} \leq 2^{\log_2(k)-1} = \frac{k}{2} < k,$$

lo cual contradice el hecho de que la familia genere k conjuntos. Por lo tanto, $L(k) \leq \text{mbf}(k)$.

Por otro lado, la desigualdad $\text{mbf}(k) \leq \mathcal{C}(k)$ es inmediata, pues $\text{mbf}(k)$ se define como el cardinal mínimo, y el Teorema 4.3.17 garantiza la existencia de una familia de tamaño $\mathcal{C}(k)$ que genera k conjuntos. Finalmente, la última desigualdad es consecuencia directa del Teorema 4.3.17. ■

Observación 8. *Las desigualdades anteriores implican que $\mathcal{C}(k)$ es una 2-aproximación polinomial (sección 5.3) de $\text{mbf}(k)$. En efecto, dado que $\text{mbf}(k) \geq L(k)$, se tiene:*

$$\frac{\mathcal{C}(k)}{\text{mbf}(k)} \leq \frac{2L(k) - \mathcal{K}(k)}{L(k)} \leq 2.$$

Además, esto demuestra que el comportamiento asintótico de $\text{mbf}(k)$ es logarítmico respecto a k , es decir, $\text{mbf}(k) \in \Theta(\log k)$.

Algoritmo 1 Algoritmo \mathcal{C}

Entrada: $k \in \mathbb{N}$.**Salida:** $\mathcal{C}(k)$ valor que asegura existencia de $\mathcal{C}(k)$ -familia acotada que genera k conjuntos.

```

1: if  $k = 1$  then
2:   return 0
3: end if
4: if  $k$  es par then
5:    $m \leftarrow \text{máx}\{m \in \mathbb{N} : 2^m \text{ divide a } k\}$ 
6:   return  $m + \mathcal{C}\left(\frac{k}{2^m}\right)$ 
7: else
8:   for  $m = \{1, \dots, \lfloor \log_2 k \rfloor\}$  do
9:     if  $2^m + 1$  divide a  $k$  then
10:      return  $m + 1 + \mathcal{C}\left(\frac{k}{2^m + 1}\right)$ 
11:     end if
12:   end for
13:   return  $1 + \mathcal{C}(k - 1)$ 
14: end if

```

Ejemplo 4.3.4. Supongamos que queremos una n -familia acotada \mathcal{F} que genere 28 conjuntos. El Teorema 4.3.17 nos dice que se puede lograr con $n \leq 2\mathcal{L}(28) - \mathcal{K}(28) = 6$. En efecto, escogiendo $n = \mathcal{C}(28)$ el valor dado por Algoritmo 1 tenemos:

- 28 es par: $\mathcal{C}(28) = 2 + \mathcal{C}(7)$.
- 7 impar y no divisible por ningún $2^m + 1$: $\mathcal{C}(7) = 1 + \mathcal{C}(6)$.
- 6 es par: $\mathcal{C}(6) = 1 + \mathcal{C}(3)$.
- 3 es impar, divisible por $2^1 + 1$: $\mathcal{C}(3) = 1 + 1 + \mathcal{C}(1)$.
- $\mathcal{C}(1) = 0$.

Así, $\mathcal{C}(28) = 6$. Reconstruyendo la familia recursivamente siguiendo los pasos inductivos, obtenemos:

- $\mathcal{F} = \{\}$.
- $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$.
- $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{3\}\}$.

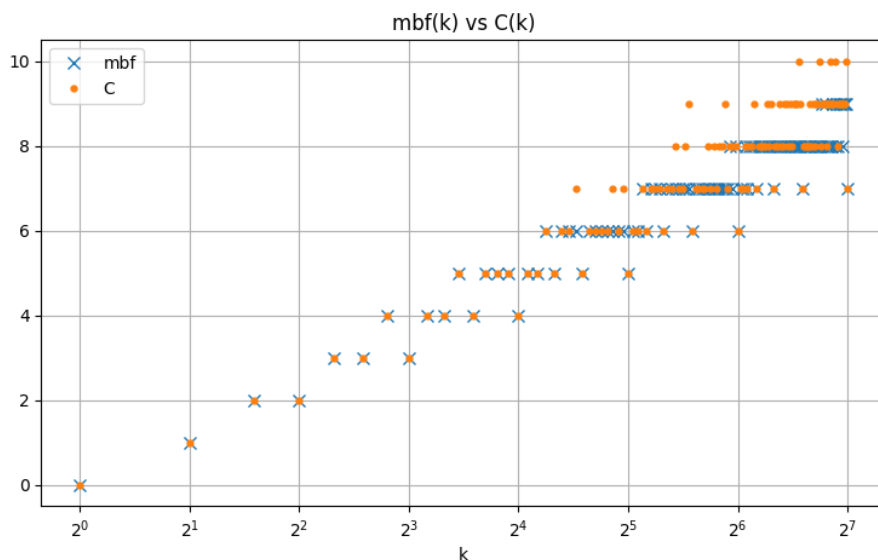


Figura 4.12: Comparación de Algoritmo 1 con $\text{mbf}(k)$.

- $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$.
- $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{5\}, \{6\}\}$.

Donde \mathcal{F} genera exactamente 28 conjuntos.

En Figura 4.12 podemos notar que Algoritmo 1 predice bastante bien el valor de $\mathcal{C}(k)$, al menos para $k \leq 2^7$. Se puede observar el comportamiento hasta $k = 2^{20}$ en Figura 4.13.

Teorema 4.3.19. Sea $D = ([n], A)$ un digrafo y definamos la familia $\mathcal{F} = \{N_D^+(i)\}_{i=1}^n$.

Si existe una matriz $M \in \{0, 1\}^{m' \times n'}$, resultado de alguna permutación de las filas y columnas de $M^*(\mathcal{F})$, tal que $M_{ii} = 1$ para todo $i \in [\text{mín}\{m', n'\}]$, entonces para toda biyección $\phi : [n] \rightarrow [n]$ existe un digrafo \widehat{D} tal que:

$$\text{rank}(f[D]) = \text{rank}(f[\widehat{D}]) \quad \text{y} \quad \phi(i) \in N_{\widehat{D}}^+(i) \quad \forall i \in [n].$$

Demostración. La construcción de \widehat{D} se fundamenta en la extensión de la matriz M hacia una matriz de adyacencia global de tamaño $n \times n$ que preserve el rango original del sistema. Partiendo de $M \in \{0, 1\}^{m' \times n'}$, consideramos primero el caso en que el universo de elementos no está plenamente representado, es decir, $n' < n$. En tal situación, se generan columnas adicionales

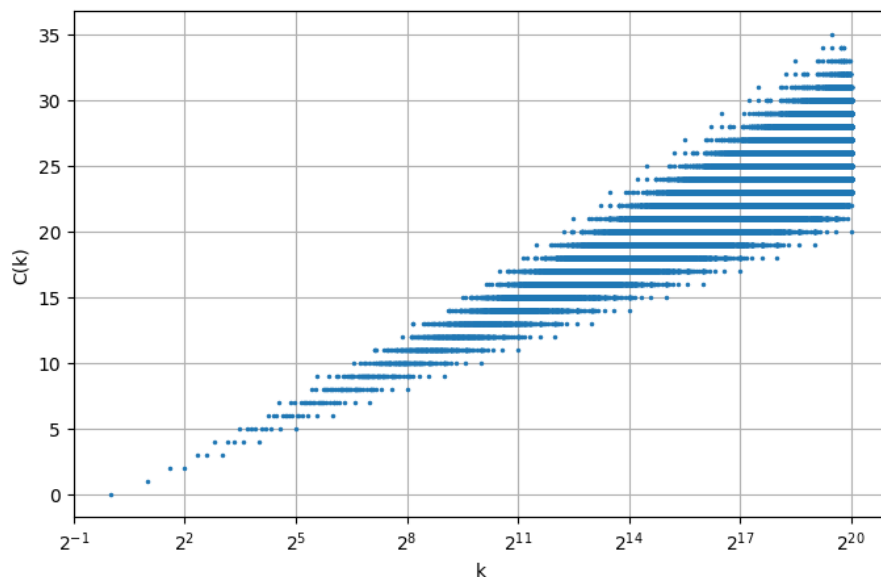


Figura 4.13: $\mathcal{C}(k)$ dado por Algoritmo 1.

$c_{n'+1}, \dots, c_n$ como combinaciones disyuntivas de las columnas originales de M , conformando la matriz M' . Para asegurar la completación de la diagonal principal, si existen índices j tales que $n' < j \leq m'$, la columna c_j se construye asegurando que incluya en su combinación disyuntiva al menos una columna original c_k ($k \leq n'$) que posea un 1 en la fila j . Esto siempre es factible puesto que M carece de filas nulas (estas por definición, son redundantes y por lo tanto no están en $M^*(\mathcal{F})$). Para los índices $j > m'$, es suficiente exigir que las columnas generadas no sean nulas. Por el Proposición 4.3.11, la incorporación de vectores pertenecientes a la clausura disyuntiva $\mathcal{V}_C(M)$ no altera el rango disyuntivo, y por lo tanto $\text{rank}^\vee(M) = \text{rank}^\vee(M')$.

Respecto a la estructura de las filas, si $m' < n$, se generan filas adicionales $r_{m'+1}, \dots, r_n$ como elementos del espacio $\mathcal{V}_R(M')$. La garantía de que todas las columnas del universo son no nulas, establecida en la etapa anterior, asegura que para cada índice i el conjunto $\{x \in \mathcal{V}_R(M') : x_i = 1\}$ es no vacío. Al seleccionar arbitrariamente vectores de estos conjuntos, se conforma una matriz auxiliar $M_{aux} \in \{0, 1\}^{n \times n}$ tal que $(M_{aux})_{ii} = 1$ para todo $i \in [n]$. Dado que las nuevas filas se obtuvieron de $\mathcal{V}_R(M')$, se garantiza por Proposición 4.3.11 que $\text{rank}(f[D]) = \text{rank}^\vee(M) = \text{rank}^\vee(M) = \text{rank}^\vee(M_{aux})$. Esta matriz representa la adyacencia de un digrafo donde cada nodo posee un bucle y donde el rango de su red disyuntiva asociada es idéntico al de $f[D]$.

Finalmente, para satisfacer la biyección arbitraria ϕ , se define la matriz de adyacencia de \widehat{D} , denotada $M_{\widehat{D}}$, mediante la permutación de las columnas de M_{aux} según la asignación inducida por ϕ . Por Corolario 4.3.4, la permutación de columnas no afecta el valor de $\text{rank}^\vee(M_{aux})$, se preserva el cardinal de la clausura por unión:

$$\text{rank}(f[\widehat{D}]) = \text{rank}^\vee(M_{\widehat{D}}) = \text{rank}^\vee(M_{aux}) = |\langle \mathcal{F} \rangle| = \text{rank}(f[D]).$$

Por construcción, la entrada $(i, \phi(i))$ de la matriz final corresponde a un elemento de la diagonal de unos de M_{aux} , garantizando que $\phi(i) \in N_D^+(i)$ para todo $i \in [n]$. ■

Ejemplo 4.3.5. *Para el digrafo D de la Figura 4.14b. Se observa que tiene 9 vértices tales que:*

$$\mathcal{F}_D = \{N_D^+(i)\}_{i=1}^9 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{5\}, \{5, 6, 7\}, \{5, 6, 8\}, \emptyset\}.$$

Supongamos que queremos encontrar un digrafo con ciclo Hamiltoniano \widehat{D} que tenga el mismo rango que el digrafo D .

Podemos darnos cuenta de que no es posible simplemente reasignar las vecindades a los vértices. Esto se debe a que el conjunto de vértices $V_2 = \{5, 6, 7, 8\}$ requiere obligatoriamente 4 aristas de entrada en un ciclo, pero en \mathcal{F}_D solo existen 3 vecindades con intersección no vacía con V_2 . Es imposible cubrir los 4 vértices de destino con solo 3 posibles predecesores.

De esta forma, procedemos a calcular $M^(\mathcal{F}_D)$ para aplicar el Teorema 4.3.19. Para eso, generamos su matriz de pertenencia y eliminamos filas y columnas redundantes (en este caso, columnas 6 y 9) guiándonos de Observación 6 para obtener:*

$$M^*(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La cual al permutar obtenemos:

$$M = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos obtener M_{aux} agregando la columna 8 formada por la unión (OR) de las columnas 2 y 4 (para asegurar que la entrada (8,8) sea 1), la columna 9 formada por la unión de las columnas 5 y 6, y posteriormente agregando la fila 9 formada por las filas 6 y 8 (para asegurar que la entrada (9,9) sea 1). Esta elección dentro de las posibilidades que ofrece el espacio de filas $\mathcal{V}_R(M)$ y el espacio de columnas $\mathcal{V}_C(M)$ permite garantizar la diagonal de unos y satisfacer la construcción del Teorema 4.3.19. Así, obtenemos:

$$M_{aux} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Para formar el ciclo Hamiltoniano buscado, basta con definir la biyección ϕ tal que $\phi(i) = i + 1$ para $i \in [8]$ y $\phi(9) = 1$. Esta permutación, aplicada sobre las columnas de M_{aux} , nos devuelve la matriz de adyacencia de \widehat{D} :

$$M_{\widehat{D}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En esta matriz $M_{\widehat{D}}$, la entrada $(i, \phi(i))$ es igual a 1 para todo $i \in [9]$, garantizando la existencia del ciclo Hamiltoniano $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 1$. Dado que $M_{\widehat{D}}$ se obtiene mediante una permutación de las columnas de M_{aux} , y por las garantías previas de pertenencia a los espacios generados, se cumple que $\text{rank}(f[\widehat{D}]) = \text{rank}(f[D])$.

El digrafo \widehat{D} se muestra en la Figura 4.14b posee el mismo rango que D y contiene el ciclo Hamiltoniano deseado.

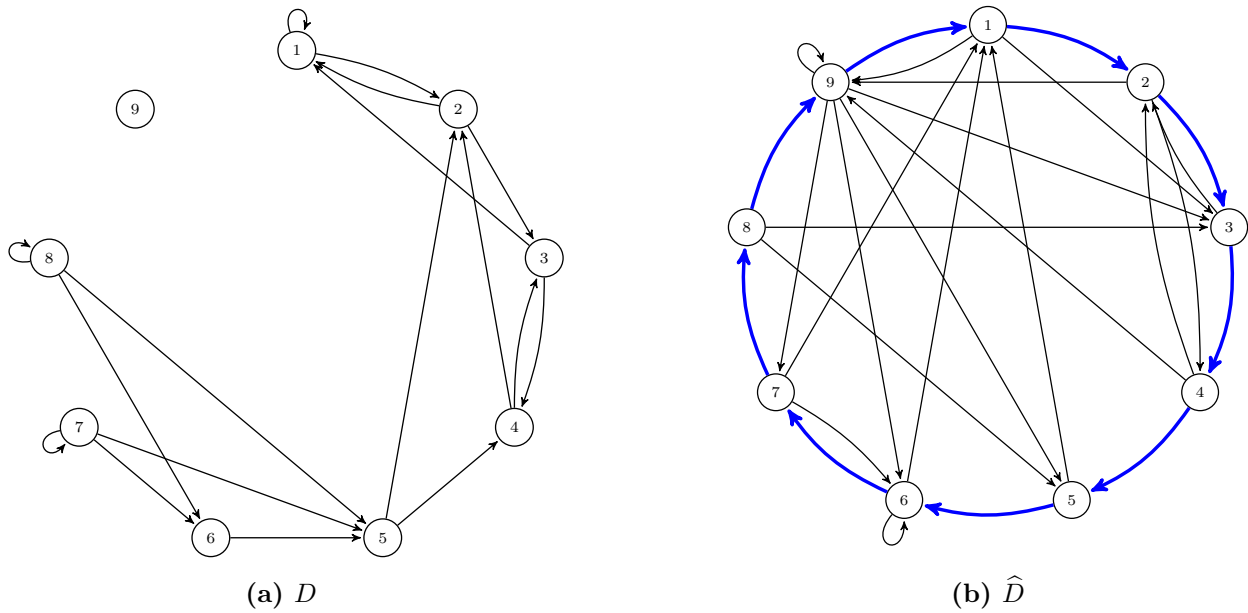


Figura 4.14: Digrafos D y \hat{D} de Ejemplo 4.3.5.

Es importante notar que **no** toda matriz de adyacencia (o de pertenencia) admite una permutación que posicione unos en la totalidad de su diagonal principal. No obstante, determinar si existe tal configuración es un problema de emparejamiento que puede resolverse en tiempo polinomial, como se detalla en la Sección 5.3.

Ejemplo 4.3.6. Consideremos el digrafo D con 10 vértices, cuya estructura y matriz de adyacencia M se presentan en Figura 4.15.

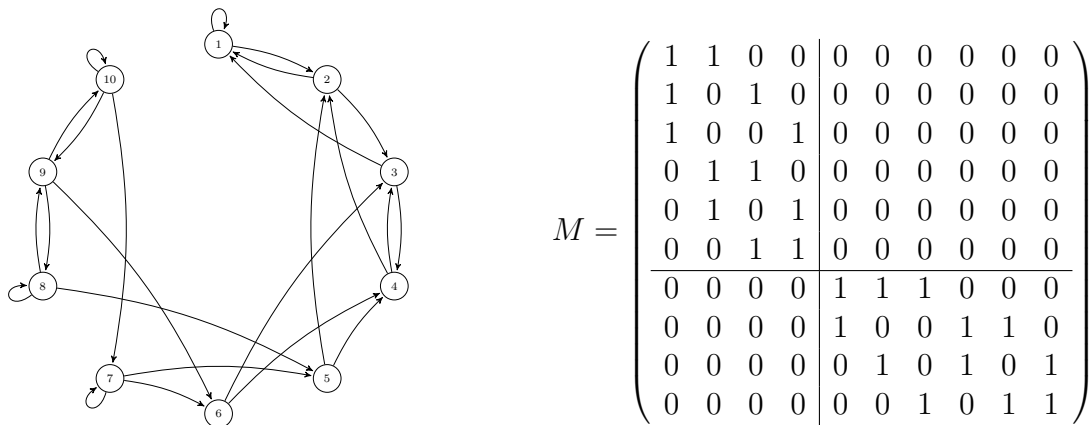


Figura 4.15: Digrafo D de Ejemplo 4.3.6 y estructura de su matriz de adyacencia M .

Para este caso, para la familia de vecindades $\mathcal{F} = \{N_D^+(i)\}_{i=1}^{10}$ se cumple que su matriz de

pertenencia $M(\mathcal{F})$ es igual a $M^*(\mathcal{F})$, es decir, no podemos quitarle ni filas ni columnas. El objetivo sería encontrar una permutación de filas y columnas que resulte en una matriz \widehat{M} con $\widehat{M}_{ii} = 1$ para todo $i \in [10]$.

Sin embargo, esto es estructuralmente imposible. La restricción radica en la conformación del bloque inferior derecho. Para posicionar unos en la diagonal correspondiente a los seis elementos de las columnas 5 a 10, necesitaríamos asignar biyectivamente a cada una de estas columnas una fila distinta que posea un 1 en dicha posición. No obstante, solo existen cuatro filas disponibles (de la 7 a la 10) con elementos no nulos en esas columnas.

Cualquier intento de asignación obligaría, por el Principio del Palomar, a que al menos dos columnas compartan la misma fila, rompiendo la biyectividad requerida.

Teorema 4.3.20. *Sea $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 2$. Existe un dígrafo D con $\mathcal{C}(k)$ vértices, donde $\mathcal{C}(k)$ es el valor entregado por el Algoritmo 1, tal que para toda biyección $\phi : [n] \rightarrow [n]$ existe un dígrafo \widehat{D} tal que:*

$$\text{rank}(f[D]) = \text{rank}(f[\widehat{D}]) \quad \text{y} \quad \phi(i) \in N_D^+(i) \quad \forall i \in [n].$$

Demostración. Sea $n = \mathcal{C}(k)$. Analizando la construcción recursiva del Teorema 4.3.17 y del Algoritmo 1, podemos asegurar la existencia de un dígrafo $D = ([n], A)$ con rango k cuya familia de vecindades $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_n\}$ cumple la propiedad de que $i \in A_i$ para todo $i \in [n]$.

En efecto, para el caso base del Algoritmo 1, como $k = 2$, la familia generada es $\{\{1\}\}$, cumpliéndose trivialmente que $1 \in A_1$. En los pasos inductivos, ya sea mediante la unión disjunta de familias (usando el Lema 4.3.16 con traslación de índices) o la adición de un conjunto integrador que contiene a todos los índices anteriores (caso impar no divisible), se preserva de manera invariante la propiedad de que cada índice i pertenece a su respectivo conjunto asignado A_i .

Esta propiedad estructural ($i \in A_i$) asegura que la matriz de pertenencia original de la familia \mathcal{F} posee una diagonal principal compuesta exclusivamente por unos. Sea $M \in \{0, 1\}^{n' \times m'}$ la matriz resultante de eliminar las filas y columnas redundantes de esta matriz de pertenencia. Dado que los n' conjuntos y m' elementos no redundantes de la base provienen de una estructura que originalmente poseía una diagonal de unos, la eliminación de elementos redundantes no

destruye esta correspondencia. Por lo tanto, existe una permutación M de las filas y columnas de $M^*(\mathcal{F})$ tal que dichos unos se reubiquen en la diagonal principal, cumpliendo que $M_{jj} = 1$ para todo $j \in [\text{mín}\{n', m'\}]$.

Al cumplirse esta condición sobre $M^*(\mathcal{F})$, podemos aplicar directamente el Teorema 4.3.19 sobre el digrafo D . Esto garantiza que, para cualquier biyección arbitraria $\phi : [n] \rightarrow [n]$, existe un digrafo \widehat{D} tal que $\text{rank}(f[\widehat{D}]) = \text{rank}(f[D]) = k$ y $\phi(i) \in N_{\widehat{D}}^+(i)$ para todo $i \in [n]$, lo que concluye la demostración. ■

Teorema 4.3.21. *Dados $k, n \in \mathbb{N}$ tales que existe una n -familia acotada \mathcal{F} que genera $k \geq 2$ conjuntos, entonces, existe una red disyuntiva $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}^{n+1}$ tal que $\text{rank}(f) = k$ y $D(f)$ fuertemente conexo.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_m\}$. Como $k \geq 2$, $m \geq 1$.

Sea el conjunto $B = [n + 1] \setminus \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$.

Sea $\mathcal{F}' = \{A_1 \cup B, \dots, A_m \cup B\}$. Si $m < n$, podemos definir conjuntos no vacíos A_i con $m < i \leq n$, donde cada uno se escoge arbitrariamente en $\langle \mathcal{F} \rangle$.

Finalmente, construimos un dígrafo D' con vértices $V = \{1, \dots, n + 1\}$ asignando a cada $v \in \{1, \dots, n\}$ un vecindario de salida distinto $N^+(v) = A_j \cup B$ y $N^+(n + 1) = V$. Se tiene finalmente que:

$$\begin{aligned} k = |\langle \mathcal{F}' \rangle| &= \left| \left\{ \bigcup_{A \in \mathcal{F}'} A : S \subseteq \mathcal{F}' \right\} \right| = \left| \left\{ \bigcup_{j \in S} A_j \cup B : S \subseteq V \right\} \right| \\ &= \left| \left\{ \bigcup_{j \in S} N^+(j) : S \subseteq V \right\} \right| = \text{rank}(f[D]). \end{aligned}$$

Finalmente, D es fuertemente conexo ya que para todo $v, u \in V$, $n + 1 \in N^+(u)$ y $v \in N^+(n + 1)$, es decir, existe un camino dirigido de u a v . ■

k	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$
128								X	X	X
125-127									?	X
124									X	X
121-123									?	X
120									X	X
119									?	X
118									X	X
117									?	X
112-116									X	X
111									?	X
110									X	X
109									?	X
97-108									X	X
96								X	X	X
81-95									X	X
80								X	X	X
73-79									X	X
72								X	X	X
69-71									X	X
68									X	X
67									X	X
65-66									X	X
64							X		X	X
63									X	X
62									X	X
61									X	X
49-60									X	X
48							X		X	X
41-47									X	X
40							X		X	X
37-39									X	X
36							X		X	X
35									X	X
33-34							X		X	X
32						X	X		X	X
25-31							X		X	X
24						X	X		X	X
21-23							X		X	X
20						X	X		X	X
19							X		X	X
17-18						X	X		X	X
16					X	X	X		X	X
13-15						X	X		X	X
12					X	X	X		X	X
11						X	X		X	X
9-10					X	X	X		X	X
8				X	X	X	X		X	X
7					X	X	X		X	X
5-6				X	X	X	X		X	X
3-4			X	X	X	X	X		X	X
2		X	X	X	X	X	X		X	X
1	X	X	X	X	X	X	X		X	X

Tabla 4.2: Cantidad de conjuntos que puede generar una n -familia acotada.

Complejidad temporal

El análisis de la complejidad temporal de los algoritmos es fundamental para evaluar su eficiencia y aplicabilidad en problemas de gran escala. En este capítulo, se presentan algoritmos relacionados con el estudio de digrafos y sus propiedades estructurales. Se demuestra que determinar si dado $k \in \mathbb{N}$ y una red dinámica finita f cualquiera, el problema de determinar si $\text{eden}(f) \geq k$ es *NP – Hard*.

Además, se hace especial énfasis en la determinación del conjunto $\mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$ y la identificación de Jardines del Edén en redes disyuntivas. Se demuestra que estos algoritmos tienen complejidad polinomial en función del número de vértices del digrafo, lo que garantiza su viabilidad computacional.

5.1. Resultados generales.

En esta sección, se demostrará que el problema de determinar si una red dinámica f tiene al menos k Jardines del Edén, así como el problema de verificar si una configuración arbitraria

x es un Jardín del Edén en la dinámica de f , son en general problemas NP-Hard.

Problema 2. Dada una red dinámica finita f y un valor $k \in \mathbb{Z}^+$ ¿ $\text{jed}(f) \geq k$?

Teorema 5.1.1. El Problema 2 es NP-Hard.

Demostración. Demostraremos que el problema SAT se reduce polinomialmente al Problema 2.

En efecto, sea una fórmula booleana $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ y $l, k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n \geq l \geq \log_2 k - 2$ (en general, podemos escoger $l = n$), le podemos asociar una red dinámica finita $f : \{0, 1\}^{n+l+3} \rightarrow \{0, 1\}^{n+l+3}$ como sigue:

Dado $x \in \{0, 1\}^{n+l+3}$. Se define:

$$\begin{aligned} f_i(x) &= x_i & \forall i \in \{1, \dots, n\}, \\ f_{n+1}(x) &= \Phi(x_1, \dots, x_n) \vee x_{n+2}, \\ f_{n+2}(x) &= x_{n+1}, \\ f_i(x) &= x_{i-1} & \forall i \in \{n+4, \dots, n+l+3\}, \\ f_{n+3}(x) &= x_{n+l+3}. \end{aligned}$$

Para ilustrar lo anterior, se representa el digrafo de interacción $D = D(f)$ en la Figura 5.1. Notemos que el vértice $n+1$ no necesariamente dependerá de todos los vértices de 1 a n , es más, si resulta que $\Phi(x) = 0$ para todo $x \in \{0, 1\}^n$, el vértice $n+1$ solo dependería de $n+2$.

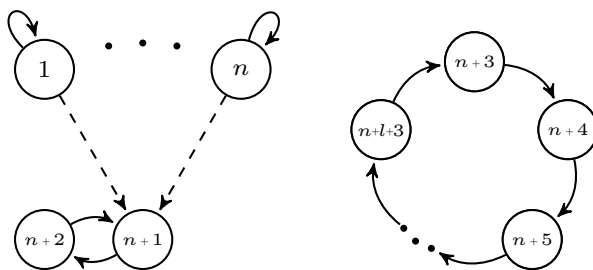


Figura 5.1: Digrafo de interacción de para Teorema 5.1.1.

Notemos que la transformación depende de n y de una constante $l \leq n$, por lo tanto resulta polinomial la asignación de las funciones de activación local.

Demostraremos que $\text{eden}(f) \geq k \iff \exists x \in \{0, 1\}^n$ tal que $\Phi(x_1, \dots, x_n) = 1$.

En efecto, sea $x \in \{0, 1\}^n$ tal que $\Phi(x_1, \dots, x_n) = 1$ y sea el conjunto $S = \{1, \dots, n+1\} \subseteq V(D)$. Sea la configuración $y \in \{0, 1\}^{n+1}$ tal que $(y_1, \dots, y_n, y_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, 0)$, demostraremos que $y \notin \text{Im}(f; S)$. Por contradicción, supongamos que $y \in \text{Im}(f; S)$, es decir, existe $z \in \{0, 1\}^{n+l+3}$ tal que $f(z)|_S = y$. De lo anterior, $x_i = y_i = f(z)_i = z_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Concluimos que $y_{n+1} = f(z)_{n+1} = f_{n+1}(z) = \Phi(z_1, \dots, z_n) \vee z_{n+2} = \Phi(x_1, \dots, x_n) \vee z_{n+2} = 1 \vee z_{n+2} = 1 \neq 0$, lo que es una contradicción. Es decir, la configuración $y \notin \text{Im}(f; S)$ y, por lo tanto, $\text{eden}(f; S) \geq 1$. Dado que $|V(D)| = n + l + 3$, $2^{l+2} \geq k$ y teniendo en cuenta Teorema 3.2.1 se concluye que:

$$\begin{aligned} \text{eden}(f) &\geq \text{eden}(f; S) \cdot 2^{n+l+3-|S|} \\ &= 2^{l+2} \geq k. \end{aligned}$$

Si para todo $x_1, \dots, x_n \in \{0, 1\}$, $\Phi(x_1, \dots, x_n) = 0$, entonces para toda configuración $y \in \{0, 1\}^{n+l+3}$, existe $z \in \{0, 1\}^{n+l+3}$ tal que $f(z) = y$. En efecto, basta escoger:

$$\begin{aligned} z_i &= y_i & \forall i \in \{1, \dots, n\}, \\ z_{n+2} &= y_{n+1}, \\ z_{n+1} &= y_{n+2}, \\ z_i &= y_{i+1} & \forall i \in \{n+3, \dots, n+l+2\}, \\ z_{n+l+3} &= y_{n+3}. \end{aligned}$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} f_i(z) &= z_i = y_i & \forall i \in \{1, \dots, n\}, \\ f_{n+1}(z) &= \Phi(z_1, \dots, z_n) \vee z_{n+2} = 0 \vee z_{n+2} = y_{n+1}, \\ f_{n+2}(z) &= z_{n+1} = y_{n+2}, \\ f_i(z) &= z_{i-1} = y_i & \forall i \in \{n+4, \dots, n+l+3\}, \\ f_{n+3}(z) &= z_{n+l+3} = y_{n+3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye que para todo $y \in \{0, 1\}^{n+l+3}$, existe $z \in \{0, 1\}^{n+l+3}$ tal que $f(z) = y$ y, por lo tanto, $\text{eden}(f) = 0 < k$.

De esta forma se concluye que SAT se reduce polinomialmente a Problema 2, por lo que Problema 2 es NP-Hard. ■

De manera similar, se presenta el siguiente problema.

Problema 3. *Dada una red dinámica finita $f : \llbracket q \rrbracket^n \rightarrow \llbracket q \rrbracket^n$ y una configuración $x \in \llbracket q \rrbracket^n$. ¿Se cumple que $x \notin \text{Im}(f)$?*

Teorema 5.1.2. *El Problema 3 es NP-Hard.*

Demostración. Demostraremos que el problema SAT se reduce polinomialmente al Problema 3.

En efecto, sea una fórmula booleana $\Phi(x_1, \dots, x_n)$, le podemos asociar una red dinámica finita $f : \{0, 1\}^{n+1} \rightarrow \{0, 1\}^{n+1}$ como sigue:

Dado $x \in \{0, 1\}^{n+1}$. Se define:

$$\begin{aligned} f_i(x) &= 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \\ f_{n+1}(x) &= -\Phi(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Para la configuración $z = (1, \dots, 1, 0)$ se tiene que:

$$z \notin \text{Im}(f) \iff \exists x \in \{0, 1\}^n : \Phi(x_1, \dots, x_n) = 1.$$

Por lo tanto, SAT se reduce polinomialmente a Problema 3, por lo que Problema 3 es NP-Hard. ■

5.2. Redes disyuntivas y conjuntivas.

Como se mencionó en la sección anterior, en general, saber si la cantidad de Jardines del Edén de una red dinámica finita f es mayor que cierto valor k es un problema NP-Hard (Problema 2).

Como se presentó en el Capítulo 4, el conjunto $\mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$ juega un rol fundamental en las redes disyuntivas y conjuntivas y conocerlo nos da cotas importantes como la del Teorema 4.1.2.

Teorema 5.2.1. *Sea $D(V, A)$ un digrafo con vértices $V = \{1, \dots, n\}$. El Algoritmo 2 determina el conjunto $\mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$ en tiempo polinomial con respecto a n .*

Algoritmo 2 Algoritmo para determinar $\mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$

Entrada: Digrafo $D(V = \{1, \dots, n\}, A)$

Salida: Conjunto $\mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$ definido en Definición 2.3

```

1:  $V' \leftarrow \{1', \dots, n'\}$ 
2:  $V(D') \leftarrow V \cup V'$ 
3:  $A(D') \leftarrow \emptyset$ 
4: for  $(i, j) \in A$  do
5:    $A(D') \leftarrow A(D') \cup \{(i', j)\}$ 
6: end for
7:  $V_I \leftarrow \emptyset$ 
8: for  $i = \{n, \dots, 1\}$  do
9:    $S \leftarrow \emptyset$ 
10:  if  $N_{D'}^-(i) = \emptyset$  then
11:    break
12:  end if
13:  for  $j = \{1, \dots, n\}$  do
14:    if  $N_{D'}^-(i) = N_{D'}^-(j) \wedge j < i$  then
15:      break
16:    else if  $N_{D'}^-(j) \subseteq N_{D'}^-(i) \wedge j \neq i$  then
17:       $S \leftarrow S \cup \{j\}$ 
18:    end if
19:  end for
20:  if  $N_{D'}^-(S) \neq N_{D'}^-(i)$  then
21:     $V_I \leftarrow V_I \cup \{i\}$ 
22:  end if
23: end for
24: return  $V_I$ 

```

Demostración. Sea V_I el conjunto de salida dado por Algoritmo 2. Notemos que entre las líneas 1 a 6 el algoritmo define el digrafo D' de la Definición 2.3.

Demostraremos que $V_I = \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$. Sea $i \in \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$. Por definición, $i \notin R(D')$, lo que implica que i será agregado al conjunto V_I durante la ejecución del algoritmo. Por lo tanto, se tiene que $\mathbf{V}_{\text{ind}}(D) \subseteq V_I$.

Por otro lado, supongamos que $i \in V_I$. Entonces, $i \notin \mathbf{V}_C(D)$, ya que si $i \in \mathbf{V}_C(D)$, el algoritmo habría continuado con la siguiente iteración en la línea 11 y no habría agregado i a V_I . Además, $i \notin \mathbf{V}_{\text{dep}}(D)$. Si $i \in \mathbf{V}_{\text{dep}}(D)$, ocurriría una de las siguientes situaciones: existe un vértice $j < i$ tal que $N_{D'}^-(j) = N_{D'}^-(i)$, lo cual haría que el algoritmo omita la iteración correspondiente a i en la línea 15; o bien, existe un conjunto $T \subseteq V$ tal que $N_{D'}^-(T) = N_{D'}^-(i)$. En este último caso, para todo $v \in T$ se cumple $N_{D'}^-(v) \subseteq N_{D'}^-(i)$, lo que implica que $T \subseteq S$ y, por lo tanto, $N_{D'}^-(S) = N_{D'}^-(i)$, lo que significa que el vértice i no sería agregado a V_I , lo que es una contradicción.

Dado que $i \notin \mathbf{V}_C(D) \cup \mathbf{V}_{\text{dep}}(D)$, necesariamente $i \in \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$. Esto muestra que $V_I \subseteq \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$. Finalmente, como $\mathbf{V}_{\text{ind}}(D) \subseteq V_I$ y $V_I \subseteq \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$, concluimos que $V_I = \mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$.

Para la complejidad, basta notar que crear el digrafo D' se realizan $n + |A|$ operaciones elementales, esto es $O(n^2)$. Para el for de i y j , cada uno se itera n veces, y en cada iteración se ocupa un total de $O(n^2)$ operaciones elementales al comparar los conjuntos $N_{D'}^-(j)$ y $N_{D'}^-(i)$, ya que cada conjunto tiene a lo más n elementos. Finalmente, el algoritmo devuelve V_I en $O(n^4)$ operaciones elementales, es decir, el algoritmo es polinomial con respecto a n . ■

Observemos que el teorema anterior es fundamental ya que nos dice que podemos encontrar la cota del Teorema 4.1.2 en tiempo polinomial. Además, si conocemos con exactitud la complejidad del problema planteado en Observación 4, podemos saber con exactitud la complejidad del Problema 2 en redes disyuntivas y conjuntivas.

Ejemplo 5.2.1. Como ejemplo, tomemos el digrafo D_a presentado en la Figura 5.2.

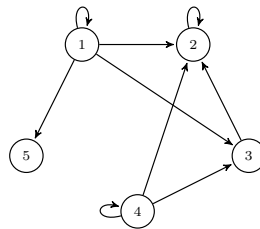


Figura 5.2: Digrafo D_a de Ejemplo 5.2.1.

En la Figura 5.3 se muestra el funcionamiento del algoritmo; son remarcados en azul el vértice $j < i$ tal que $N^+(j) = N^+(i)$ o, en caso de no existir, los vértices en S dados por el

algoritmo. Se representa por el color verde si el vértice fue agregado a V_I según el algoritmo 1 y en rojo en caso de que no.

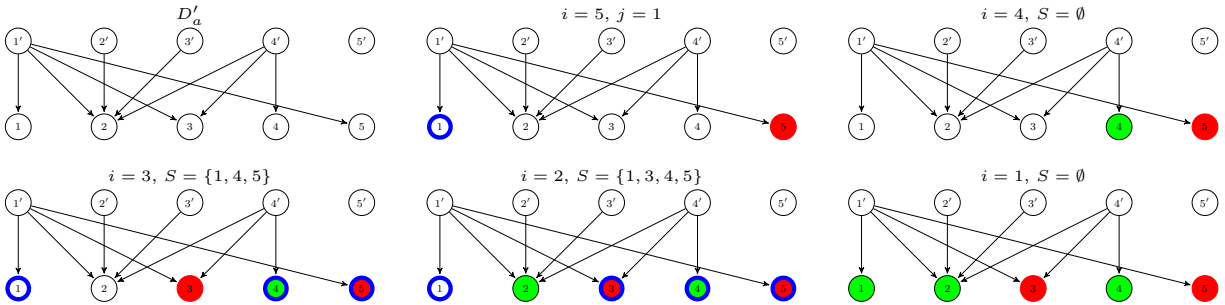


Figura 5.3: Iteraciones del Algoritmo 2 sobre el digrafo de Figura 5.2.

Notemos que $V_{\text{ind}}(V(D_a)) = \{1, 2, 4\}$ y, por lo tanto, el Teorema 4.1.2 nos indica que:

$$\text{eden}(f[D_a]) \geq 2^5 - 2^3 = 24.$$

Como se mencionó en la sección anterior, para una red dinámica finita arbitraria, saber si una configuración es Jardín del Edén es un problema NP-Hard (Problema 3). Ahora se procederá a demostrar que Problema 3 es polinomial en el caso particular de redes conjuntivas y disyuntivas.

Teorema 5.2.2. *Sea $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ una red disyuntiva con digrafo de interacción $D = (V = \{1, \dots, n\}, A)$ y una configuración arbitraria $y \in \{0, 1\}^n$, entonces el Algoritmo 3 determina si $y \notin \text{Im}(f)$ en tiempo polinomial.*

Algoritmo 3 Determinar si $y \notin \text{Im}(f)$ **Entrada:** Digrafo $D(V = \{1, \dots, n\}, A)$, configuración $y \in \{0, 1\}^n$.**Salida:** True si y es Jardín de Edén, False si no

```

1:  $U \leftarrow \emptyset$ 
2: for  $i = \{1, \dots, n\}$  do
3:   if  $N^-(i) = \emptyset$  then
4:     if  $y_i \neq 0$  then
5:       return True
6:     end if
7:   else if  $y_i = 1$  then
8:      $U \leftarrow U \cup \{i\}$ 
9:   end if
10: end for
11:  $S \leftarrow \emptyset$ 
12: for  $j = \{1, \dots, n\}$  do
13:   if  $N^+(j) \subseteq U$  then
14:      $S \leftarrow S \cup \{j\}$ 
15:   end if
16: end for
17: if  $N^+(S) \neq U$  then
18:   return True
19: else
20:   return False
21: end if

```

Demostración. Sea $y \in \{1, \dots, n\}$ una configuración. Definamos $C := \{i : N^-(i) = \emptyset\}$ al conjunto de vértices con función constante, $U := \{i : y_i = 1 \wedge N^-(i) \neq \emptyset\}$ y $S := \{j : N^+(j) \subseteq U\}$. Demostraremos que $y \in \text{Im}(f)$ si y solo si $y|_C = \vec{0}$ y $N^+(S) = U$. En efecto, si $y \in \text{Im}(f)$, entonces existe $x \in \{0, 1\}^n$ tal que $f(x) = y$. Notemos que los vértices en C tienen asociada una función constante, y como f es disyuntiva $y|_C = f(x)|_C = \vec{0}$.

Definiendo $S_x := \{i : x_i = 1\}$, notemos que $N^+(S_x) = U$. En efecto, si $i \in N^+(S_x)$, dado que f es una red disyuntiva se tiene que $f(x)_i = y_i = 1$ y por lo tanto $i \in U$. Si $i \in U$, entonces $y_i = 1 = f(x)_i$ y por lo tanto existe j tal que $j \in N^-(i)$ y $x_j = 1$. Notar que como $j \in S_x$ se tiene que $i \in N^+(S_x)$. De lo anterior $N^+(S_x) = U$. Además, notemos que para todo $i \in S_x$, $N^+(i) \subseteq U$, en otro caso $U \neq N^+(S_x)$, lo que es una contradicción. Se concluye que $S_x \subseteq S$ y así $U = N^+(S_x) \subseteq N^+(S) \subseteq U$. Lo anterior demuestra que $N^+(S) = U$.

Ahora sea $y|_C = \vec{0}$ y $N^+(S) = U$, basta escoger una configuración $x \in \{0, 1\}^n$ tal que

$x|_S = \vec{1}$ y $x|_{V \setminus S} = \vec{0}$, de esta forma $f(x) = y$ y por lo tanto $y \in \text{Im}(f)$.

Notemos que el algoritmo comprueba $y|_C = \vec{0}$ (si existe $i \in C$ tal que $y_i \neq 0$ entonces $y \notin \text{Im}(f)$) y genera nuestro conjunto U en $O(n)$ operaciones elementales. Si $y|_C = \vec{0}$, entonces genera S en $O(n^3)$ operaciones elementales y verifica que $N^+(S) = U$ en $O(n^2)$ operaciones elementales, es decir, el algoritmo es polinomial. ■

Ejemplo 5.2.2. Consideremos para este ejemplo el digrafo D_a de la Figura 5.2.

Notemos que el digrafo D_a no tiene vértices con función constante. Para la configuración $x^{(1)} = 11100$, se colorean con verde y rojo los vértices cuyo valor es 1 y 0 respectivamente. En la Figura 5.4, se marcan con azul los vértices que pertenecen a S según el algoritmo 2.

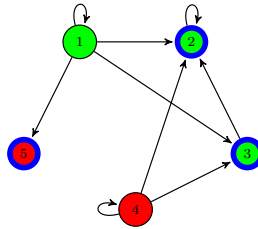


Figura 5.4: Algoritmo 3 sobre digrafo de Figura 5.2.

Por lo tanto el algoritmo retorna True ya que $N^+(S) \neq U$.

Ahora si invertimos el arco $(1, 5)$ del digrafo D_a presentado en Ejemplo 5.2.1, obtenemos el digrafo D_b . Si ingresamos la configuración $x^{(2)} = 1100x_5^{(2)}$ al algoritmo 2 y además agregamos el color amarillo para los vértices con función constante se obtiene la Figura 5.5.

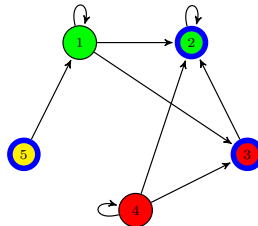


Figura 5.5: Algoritmo 3 sobre digrafo D_b de Ejemplo 5.2.2.

Para este caso, si $x_5^{(2)} = 1$, el algoritmo retorna True. Si $x_5^{(2)} = 0$, el algoritmo retorna False ya que $N^+(S) = U$.

5.3. Familias acotadas

- **Ideal de Orden (Down-set):** Un subconjunto $I \subseteq X$ es un ideal si, para todo $x \in I$ y $y \in X$, la condición $y \leq x$ implica $y \in I$. El conjunto de todos los ideales de P se denota como $\mathcal{O}(P)$.
- **Ideal Principal:** Es el ideal generado por un único elemento x , definido como $\downarrow x = \{y \in X \mid y \leq x\}$.
- **Anticadena:** Un subconjunto $A \subseteq X$ tal que dos elementos distintos cualesquiera son incomparables. El conjunto de todas las anticadenas se denota como $\mathcal{A}(P)$.

Teorema 5.3.1. *El problema **#UNION-CLOSURE1** es **#P-Completo**.*

Demostración. Realizamos una reducción polinomial desde el problema de contar anticadenas en un conjunto parcialmente ordenado (**#ANTICHAIN**), cuya complejidad **#P-Completa** fue establecida por Provan y Ball [16].

Sea $P = (X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Nos basamos en la equivalencia clásica que establece que el número de anticadenas de P , denotado $|\mathcal{A}(P)|$, es igual al número de ideales de orden de P , denotado $|\mathcal{O}(P)|$ [2, 18].

Para la construcción de la instancia, generamos en tiempo polinomial la familia \mathcal{F} compuesta por todos los ideales principales de P , es decir, $\mathcal{F} = \{\downarrow x \mid x \in X\}$. Definimos L como $\langle \mathcal{F} \rangle$. A continuación, demostramos que $L = \mathcal{O}(P)$ mediante doble inclusión.

En primer lugar, dado que \mathcal{F} está formado por ideales principales, cualquier elemento de L es una unión de ideales de orden. Para justificar que este resultado es válido, recurrimos a Davey y Priestley [2, p. 37, Ej. 2.6(3)], quienes establecen explícitamente: “Si $\{\downarrow x_i\}$ es un subconjunto de $\mathcal{O}(P)$, entonces $\bigcup \downarrow x_i$ pertenece a $\mathcal{O}(P)$ ”. Gracias a esta propiedad de cerradura, garantizamos que $L \subseteq \mathcal{O}(P)$.

Recíprocamente, sea $I \in \mathcal{O}(P)$ un ideal cualquiera. En la **Sección 1.28** de la misma obra [2, p. 21], se afirma textualmente: “Cuando P es finito, todo conjunto decreciente no vacío Q de P es expresable en la forma $\bigcup \downarrow x_i$ ”. Esto confirma que todo ideal admite una

descomposición como unión de elementos de nuestra base \mathcal{F} , lo que implica necesariamente que $\mathcal{O}(P) \subseteq L$.

Por consiguiente, $L = \mathcal{O}(P)$, y por tanto $|L| = |\mathcal{O}(P)|$. Sustituyendo la biyección inicial, obtenemos $|L| = |\mathcal{A}(P)|$. Esto concluye que calcular el tamaño de la clausura por unión es equivalente a contar anticadenas, demostrando así que **#UNION-CLOSURE** es **#P-Completo**. ■

Teorema 5.3.2. *El Algoritmo 1 (\mathcal{C}) tiene una complejidad polinomial respecto al tamaño de la entrada.*

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$ la entrada y $n = \lceil \log_2 k \rceil$ su tamaño en bits. Analizamos la complejidad en función del costo por llamada y la profundidad de la recursión.

En cada llamada, el costo computacional está dominado por el caso en que k es impar. El algoritmo itera m desde 1 hasta $\lfloor \log_2 k \rfloor$, realizando en cada paso una verificación de divisibilidad. Asumiendo aritmética clásica, la división de un entero de n bits tiene un costo de $O(n^2)$. Dado que el bucle se ejecuta $O(n)$ veces, el costo por llamada está acotado por $O(n) \cdot O(n^2) = O(n^3)$.

Para la profundidad de la recursión, notamos que si k es par (o impar divisible por $2^m + 1$), el argumento se reduce a $k' \leq k/2$, disminuyendo n en al menos un bit. Si k es impar y no se encuentra divisor, se llama a $\mathcal{C}(k - 1)$. Al ser $k - 1$ par, la subsiguiente llamada recursiva reducirá el argumento a lo sumo a $(k - 1)/2$. Por lo tanto, el tamaño de la entrada se reduce en al menos un bit cada dos llamadas recursivas, acotando la profundidad del árbol por $2n = O(n)$.

La complejidad total $T(n)$ resulta del producto de la profundidad y el costo por llamada:

$$T(n) = O(n) \cdot O(n^3) = O(n^4).$$

Concluimos que el Algoritmo \mathcal{C} es de tipo polinomial. ■

Lema 5.3.3. *Sea $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_m\}$ una familia de conjuntos tal que $\langle \mathcal{F} \rangle \subseteq \mathcal{P}([n])$. El cálculo de $M(\mathcal{F})$ es realizable en tiempo polinomial con respecto a $\max\{m, n\}$.*

Demostración. Sea $M \in \{0, 1\}^{m \times n}$ la matriz de pertenencia de \mathcal{F} . Para obtener $M(\mathcal{F})$ se eliminan iterativamente filas y columnas redundantes. Sea M_{-r_i} la submatriz obtenida al eliminar

la fila r_i de M .

Por Proposición 4.3.11, la fila r_i es redundante si y solo si $r_i \in \mathcal{V}_R(M_{-r_i})$. Algorítmicamente, esto equivale a verificar la identidad booleana $r_i = \bigvee_{j \in J} r_j$, donde el conjunto de índices es $J = \{j \neq i : r_j \leq r_i\}$. Hallar J y efectuar la disyunción requiere a lo sumo m comparaciones de vectores de dimensión n . Aplicar este chequeo iterativamente a lo sumo m veces acota el proceso de las filas en $\mathcal{O}(m^2n)$ operaciones.

De manera análoga, denotando como M_{-c_k} a la submatriz sin la columna c_k , la redundancia $c_k \in \mathcal{V}_C(M_{-c_k})$ se verifica comprobando si $c_k = \bigvee_{l \in L} c_l$, con $L = \{l \neq k : c_l \leq c_k\}$. Ejecutar esto iterativamente sobre las columnas toma un tiempo de $\mathcal{O}(n^2m)$.

Dado que la cantidad total de operaciones vectoriales está estrictamente acotada por polinomios dependientes de m y n , el cálculo de $M(\mathcal{F})$ es resoluble en tiempo polinomial respecto a $\max\{m, n\}$. ■

Teorema 5.3.4. *Sea $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_m\}$ una familia de conjuntos tal que $\langle \mathcal{F} \rangle \subseteq \mathcal{P}([n])$. Verificar si existe una permutación $M \in \{0, 1\}^{m' \times n'}$ de $M(\mathcal{F})$ tal que $M_{ii} = 1$ para todo $i \in [\min\{m', n'\}]$ es verificable en tiempo polinomial con respecto a $\max\{m, n\}$.*

Demostración. Sea $M(\mathcal{F}) \in \{0, 1\}^{m' \times n'}$ la matriz minimal de \mathcal{F} , la cual es calculable en tiempo polinomial segun Lema 5.3.3. Encontrar una permutación de filas y columnas que garantice unos en la diagonal principal hasta el índice $k = \min\{m', n'\}$ es estructuralmente equivalente a encontrar un emparejamiento (matching) bipartito de tamaño k .

Construimos el grafo bipartito $G = (R \cup C, E)$, donde las particiones R y C representan las m' filas y las n' columnas de $M(\mathcal{F})$, respectivamente. Existe una arista $(r, c) \in E$ si y solo si la entrada correspondiente en la matriz es igual a uno, es decir, $M(\mathcal{F})_{rc} = 1$.

Una permutación que ubica k unos en la diagonal principal requiere seleccionar k entradas en la matriz que no compartan ni fila ni columna. En el grafo G , esto corresponde de forma biunívoca a seleccionar un conjunto de k aristas independientes, es decir, un emparejamiento de tamaño k . Por lo tanto, la permutación deseada existe si y solo si el emparejamiento máximo en G tiene cardinalidad k .

La construcción del grafo G requiere recorrer la matriz en tiempo $\mathcal{O}(m'n')$. Posteriormente,

determinar el tamaño del emparejamiento máximo en un grafo bipartito es resoluble en tiempo $\mathcal{O}(|E|\sqrt{|V|})$ mediante el algoritmo de Hopcroft-Karp [8]. Al estar el número de vértices y aristas acotado por las dimensiones del problema, concluimos que la verificación completa se ejecuta en tiempo polinomial. ■

5.4. Conclusiones.

En este trabajo, se ha analizado la relación entre el digrafo de interacción y la cantidad de Jardines del Edén en redes dinámicas finitas. A través de distintos resultados teóricos, se han establecido cotas inferiores y superiores para $\text{eden}(f)$, dependiendo de la estructura del digrafo de interacción. En particular, se han caracterizado configuraciones que minimizan y maximizan la cantidad de Jardines del Edén, lo que permite una mejor comprensión de la dinámica de estas redes.

Se han planteado condiciones necesarias sobre los digrafos de interacción para que la red tenga pocos Jardines del Edén. Así también, se han planteado la construcción de redes dinámicas finitas con una cantidad exponencial de Jardines del Edén para digrafos con ciertas características.

En particular, se demostró que en redes disyuntivas y conjuntivas, la cantidad de Jardines del Edén puede determinarse a partir de la estructura del digrafo de interacción. Esto permitió obtener cotas explícitas y caracterizaciones precisas en función del conjunto de vértices no redundantes ($\mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$), mostrando que en estos casos la dinámica está fuertemente condicionada por la topología de la red.

Asimismo, se han desarrollado algoritmos polinomiales para la determinación de conjuntos clave en la estructura del digrafo de interacción, permitiendo encontrar el conjunto $\mathbf{V}_{\text{ind}}(D)$ y la verificación de si una configuración pertenece a la imagen en redes disyuntivas y conjuntivas.

Además, se ha demostrado que el problema de determinar si una red tiene al menos k Jardines del Edén es NP-Hard, lo que implica que, en general, no se espera un algoritmo eficiente para su resolución en el caso más general. También se determinó que el problema de contar las imágenes en redes disyuntivas y conjuntivas es #P-Completo.

5.5. Trabajo futuro

Durante el desarrollo de este trabajo surgió un gran número de preguntas que aún no han sido resueltas, muchas de las cuales abren caminos naturales para investigaciones futuras. Una primera línea de trabajo consiste en profundizar el análisis de la secuencia de valores que entrega mbf , buscando comprender mejor el trasfondo combinatorial de la unión de conjuntos, y de esta manera aportar con mayor precisión al estudio del rango en redes disyuntivas y conjuntivas.

Por otro lado, se estudió que, bajo ciertas condiciones, es posible transformar una red disyuntiva (o conjuntiva) en otra del mismo tipo cuyo digrafo de interacción posea un ciclo hamiltoniano, o bien, bucles en todos sus vértices, manteniendo su rango invariante. Quedó demostrado que el cumplimiento de esta condición se puede determinar en tiempo polinomial; sin embargo, queda pendiente investigar si esto es posible para cualquier valor del rango.

Otra dirección natural es extender los resultados obtenidos para redes disyuntivas y conjuntivas hacia las redes min-max, las cuales constituyen una generalización directa dentro del mismo marco. Esta extensión permitiría estudiar si las propiedades observadas en el caso booleano se mantienen o cambian al considerar funciones más generales, aportando así una mayor comprensión sobre la influencia de la estructura del digrafo en contextos más amplios.

Finalmente, sería interesante explorar con mayor profundidad la relación entre los Jardines del Edén y otras propiedades estructurales de las redes dinámicas, buscando nuevas formas de caracterizarlos. Además, se propone estudiar redes cuyo esquema de actualización no sea paralelo, como aquellas que se actualizan de manera asincrónica o secuencial. Este cambio en la dinámica podría modificar significativamente la aparición de Jardines del Edén, abriendo nuevas preguntas teóricas y aplicadas.

Bibliografía

- [1] Julio Aracena, *Maximum number of fixed points in regulatory boolean networks*, Bulletin of mathematical biology **70** (2008), 1398–1409.
- [2] B. A. Davey and H. A. Priestley, *Introduction to lattices and order*, 2 ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [3] Seyed Rasoul Etesami and Tamer Başar, *Complexity of equilibrium in competitive diffusion games on social networks*, Automatica **68** (2016), 100–110.
- [4] Maximilien Gadouleau, *On the rank and periodic rank of finite dynamical systems*, The Electronic Journal of Combinatorics (2018), P3–48.
- [5] Maximilien Gadouleau, *On the influence of the interaction graph on a finite dynamical system*, Natural Computing **19** (2020), no. 1, 15–28.
- [6] Maximilien Gadouleau, *Dynamical properties of disjunctive boolean networks*, arXiv preprint arXiv:2104.04403 (2021).
- [7] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, fourth ed., Oxford, 1975.

-
- [8] John E. Hopcroft and Richard M. Karp, *An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matchings in bipartite graphs*, SIAM Journal on Computing **2** (1973), no. 4, 225–231.
- [9] Sui Huang and Stuart A Kauffman, *Complex gene regulatory networks—from structure to biological observables: cell fate determination*, Computational Complexity (2012), 527–560.
- [10] Nikolas Fernando Jara Cádiz, *Jardines del edén en redes dinámicas finitas*, Tesis para optar al título de ingeniero civil matemático, Universidad de Concepción, 2025.
- [11] Abdul Salam Jarrah, Reinhard Laubenbacher, and Alan Veliz-Cuba, *The dynamics of conjunctive and disjunctive boolean network models*, Bulletin of Mathematical Biology **72** (2010), no. 6, 1425–1447.
- [12] Stuart A Kauffman, *Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets*, Journal of theoretical biology **22** (1969), no. 3, 437–467.
- [13] Fabian Kuhn, Nancy Lynch, and Rotem Oshman, *Distributed computation in dynamic networks*, Proceedings of the Forty-Second ACM Symposium on Theory of Computing (New York, NY, USA), STOC '10, Association for Computing Machinery, 2010, p. 513–522.
- [14] Edward F. Moore, *Machine models of self-reproduction*, Proceedings of the Symposium on Mathematical Theory of Automata, 1962, pp. 17–33.
- [15] Henning Mortveit and Christian Reidys, *An introduction to sequential dynamical systems*, Springer Science & Business Media, 2007.
- [16] J Scott Provan and Michael O Ball, *The complexity of counting cuts and of computing the probability that a graph is connected*, SIAM Journal on Computing **12** (1983), no. 4, 777–788.
- [17] Adrien Richard, *Positive circuits and maximal number of fixed points in discrete dynamical systems*, Discrete Applied Mathematics **157** (2009), no. 15, 3281–3288.
- [18] Richard P. Stanley, *Enumerative combinatorics, volume 1*, 2 ed., Cambridge University Press, 2012.

- [19] R Thomas and R D'Ari, *Biological feedback crc press inc*, Boca Raton (1990).
- [20] Predrag T ToŠIĆ, *On the complexity of counting fixed points and gardens of eden in sequential dynamical systems on planar bipartite graphs*, International Journal of Foundations of Computer Science **17** (2006), no. 05, 1179–1203.