

**UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA**



Profesor Patrocinante:

**Dr. Daniel Sbárbaro H.**

Informe de Memoria de Título  
para optar al título de:

**Ingeniero Civil Electrónico**

**Análisis de trayectoria guiada por GPS utilizando  
métodos de estimación**

Concepción, Octubre de 2014

Francesco Giuseppe Crovo Cassinelli

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN  
Facultad de Ingeniería  
Departamento de Ingeniería Eléctrica

Profesor Patrocinante:  
Dr. Daniel Sbárbaro H.

# Análisis de trayectoria guiada por GPS utilizando métodos de estimación

Francesco Giuseppe Crovo Cassinelli

Informe de Memoria de Título  
para optar al Título de

Ingeniero Civil Electrónico

Octubre 2014

## Resumen

El principal inconveniente del Sistema de Posicionamiento Global es su relativa imprecisión. Para contrarrestar esto, se utilizan métodos de estimación que son capaces de mejorar la precisión del mismo. En este documento se realiza un análisis sobre el seguimiento de trayectorias utilizando GPS. Esto se realiza con el objetivo de solucionar problemas de precisión que pudieran presentar empresas que requieran seguimiento de vehículos.

Con esta finalidad se realizó una investigación sobre el sistema de posicionamiento global NAVSTAR, por ser el más utilizado, y sobre métodos de estimación adecuados, tales como el filtro de Kalman y sus variantes.

Se analizó el desempeño de cada algoritmo tanto con datos simulados como reales. Los datos reales se obtuvieron utilizando una tablet Samsung Galaxy Tab 3 mediante la aplicación GPSTracker y se generó una base de datos con diversas trayectorias consistentes en tramos conocidos.

Se llegó a la conclusión de que el algoritmo más adecuado para resolver el problema corresponde al Filtro de Kalman Suavizado (basado en el Filtro de Kalman discreto y extendido). Dicho algoritmo logró en promedio disminuir las varianzas de los ruidos de las trayectorias grabadas entre un 80% y un 90%. En cambio el filtro de Kalman Extendido sólo logró una reducción de entre un 60% y un 70%.



A mis padres.

## Agradecimientos

A mi profesor tutor, gracias por apoyarme y estar siempre disponible para encontrarle solución a los diversos problemas que ocurrieron durante el transcurso de este semestre. También agradecer a los profesores de la comisión, al DIE y a la Universidad de Concepción.



# Tabla de Contenidos

|                                                                   |             |
|-------------------------------------------------------------------|-------------|
| <b>LISTA DE TABLAS .....</b>                                      | <b>VIII</b> |
| <b>LISTA DE FIGURAS .....</b>                                     | <b>IX</b>   |
| <b>NOMENCLATURA .....</b>                                         | <b>X</b>    |
| <b>CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN .....</b>                             | <b>1</b>    |
| 1.1. INTRODUCCIÓN GENERAL .....                                   | 1           |
| 1.2. TRABAJOS PREVIOS .....                                       | 1           |
| 1.2.1 Sistema de posicionamiento global (GPS) .....               | 2           |
| 1.2.2 Teoría de probabilidades y señales aleatorias .....         | 3           |
| 1.2.3 Filtro de Kalman .....                                      | 4           |
| 1.2.4 Determinación de los parámetros del ruido .....             | 4           |
| 1.2.5 Aplicaciones del filtro de Kalman en GPS .....              | 5           |
| 1.2.6 Discusión .....                                             | 6           |
| 1.3. HIPÓTESIS DE TRABAJO .....                                   | 7           |
| 1.4. OBJETIVOS .....                                              | 7           |
| 1.4.1 Objetivo General .....                                      | 7           |
| 1.4.2 Objetivos Específicos .....                                 | 8           |
| 1.5. ALCANCES Y LIMITACIONES .....                                | 8           |
| 1.6. TEMARIO Y METODOLOGÍA .....                                  | 9           |
| <b>CAPÍTULO 2. SISTEMA DE POSICIONAMIENTO GLOBAL .....</b>        | <b>10</b>   |
| 2.1. INTRODUCCIÓN .....                                           | 10          |
| 2.2. DESCRIPCIÓN GENERAL .....                                    | 10          |
| 2.3. HISTORIA .....                                               | 11          |
| 2.4. CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS .....                               | 11          |
| 2.4.1 Segmento espacial .....                                     | 12          |
| 2.4.2 Segmento de control .....                                   | 12          |
| 2.4.3 Segmento del usuario .....                                  | 13          |
| 2.5. EVOLUCIÓN .....                                              | 14          |
| 2.6. FUNCIONAMIENTO .....                                         | 15          |
| 2.6.1 Principio de triangulación .....                            | 15          |
| 2.6.2 Medición del tiempo de viaje de la señal .....              | 15          |
| 2.6.3 Efectos relativistas .....                                  | 16          |
| 2.7. FUENTES DE ERROR .....                                       | 17          |
| 2.8. GPS DIFERENCIAL .....                                        | 18          |
| 2.9. APLICACIONES .....                                           | 19          |
| <b>CAPÍTULO 3. PROBABILIDADES Y SEÑALES ALEATORIAS .....</b>      | <b>20</b>   |
| 3.1. INTRODUCCIÓN .....                                           | 20          |
| 3.2. SEÑALES ALEATORIAS .....                                     | 20          |
| 3.3. PROBABILIDAD .....                                           | 20          |
| 3.4. VARIABLES ALEATORIAS .....                                   | 21          |
| 3.5. DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD Y FUNCIONES DE DENSIDAD ..... | 22          |
| 3.6. PROMEDIO, ESPERANZA Y VARIANZA .....                         | 23          |
| 3.7. CORRELACIÓN, COVARIANZA Y ORTOGONALIDAD .....                | 24          |
| 3.8. DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA Y DISTRIBUCIÓN DE RAYLEIGH .....      | 26          |
| 3.8.1 Distribución gaussiana .....                                | 26          |
| 3.8.2 Distribución de Rayleigh .....                              | 27          |
| <b>CAPÍTULO 4. FILTRO DE KALMAN .....</b>                         | <b>29</b>   |
| 4.1. INTRODUCCIÓN .....                                           | 29          |
| 4.2. FILTRO DE KALMAN DISCRETO .....                              | 30          |

|                                                     |                                                   |           |
|-----------------------------------------------------|---------------------------------------------------|-----------|
| 4.3.                                                | FILTRO DE KALMAN EXTENDIDO .....                  | 33        |
| 4.4.                                                | FILTRO DE KALMAN SUAVIZADO .....                  | 35        |
| <b>CAPÍTULO 5. SIMULACIÓN.....</b>                  |                                                   | <b>36</b> |
| 5.1.                                                | INTRODUCCIÓN .....                                | 36        |
| 5.2.                                                | MODELO .....                                      | 36        |
| 5.3.                                                | SIMULACIÓN .....                                  | 38        |
| 5.3.1                                               | <i>Filtro de Kalman extendido</i> .....           | 38        |
| 5.3.2                                               | <i>Filtro de Kalman suavizado</i> .....           | 39        |
| 5.3.3                                               | <i>Regiones de confianza</i> .....                | 42        |
| <b>CAPÍTULO 6. APLICACIÓN Y RESULTADOS .....</b>    |                                                   | <b>43</b> |
| 6.1.                                                | INTRODUCCIÓN .....                                | 43        |
| 6.2.                                                | RECEPTOR GPS Y LECTURA DE DATOS .....             | 43        |
| 6.3.                                                | TRAYECTORIAS GRABADAS .....                       | 43        |
| 6.4.                                                | DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL FILTRO .....  | 44        |
| 6.4.1                                               | <i>Determinación de R</i> .....                   | 44        |
| 6.4.2                                               | <i>Determinación de Q</i> .....                   | 44        |
| 6.5.                                                | RESULTADOS .....                                  | 46        |
| 6.5.1                                               | <i>Trayectoria dentro de la universidad</i> ..... | 46        |
| 6.5.2                                               | <i>Trayectoria en sector Las monjas</i> .....     | 49        |
| <b>CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES.....</b>                |                                                   | <b>52</b> |
| 7.1.                                                | SUMARIO .....                                     | 52        |
| 7.2.                                                | CONCLUSIONES .....                                | 52        |
| 7.3.                                                | TRABAJO FUTURO .....                              | 53        |
| <b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>                           |                                                   | <b>54</b> |
| <b>ANEXO A. DEDUCCIÓN DEL FILTRO DE KALMAN.....</b> |                                                   | <b>56</b> |
| A.1.                                                | PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....                  | 56        |
| A.2.                                                | DEDUCCIÓN DE $f_1$ , GANANCIA DE KALMAN .....     | 57        |
| A.3.                                                | DEDUCCIÓN DE $f_2$ , $f_3$ Y $f_4$ .....          | 59        |
| <b>ANEXO B. CÓDIGOS MATLAB .....</b>                |                                                   | <b>61</b> |
| B.1.                                                | SIMULACIÓN FILTRO DE KALMAN .....                 | 61        |
| B.2.                                                | DETERMINACIÓN DE Q.....                           | 63        |
| B.3.                                                | FILTRADO DE DATOS REALES .....                    | 65        |

Lista de Tablas

TABLA 2.1 Fuentes de error con sus respectivos valores .....17

TABLA 5.1 Parámetros de simulación filtro de Kalman extendido ..... 39

TABLA 5.2 RMSE filtros de Kalman extendido y suavizado ..... 41

TABLA 6.1 Parámetros filtro de Kalman extendido, trayectoria dentro de la universidad ..... 46

TABLA 6.2 Parámetros filtro de Kalman extendido, trayectoria sector las monjas ..... 49



# Lista de Figuras

|                                                                                                     |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Fig. 1.1 Problemas de precisión de Modular Mining Systems .....                                     | 8  |
| Fig. 2.1 Mapa de estaciones terrestres de control GPS .....                                         | 12 |
| Fig. 2.2 Corrección de tiempo en la triangulación .....                                             | 16 |
| Fig. 3.2 Función de densidad de la distribución gaussiana.....                                      | 26 |
| Fig. 3.2 Función de densidad de la distribución de Rayleigh .....                                   | 27 |
| Fig. 4.3 Esquema algoritmo filtro de Kalman.....                                                    | 32 |
| Fig. 5.1 Simulación filtro de Kalman .....                                                          | 38 |
| Fig. 5.2 Simulación filtro de Kalman extendido y suavizado .....                                    | 40 |
| Fig. 5.3 Comparación traza de matriz de covarianzas del error.....                                  | 40 |
| Fig. 5.4 Simulación regiones de confianza .....                                                     | 42 |
| Fig. 6.1 Determinación de $q$ por medio de $J_1$ y $J_2$ .....                                      | 45 |
| Fig. 6.2 Filtro de Kalman extendido, trayectoria dentro de la universidad .....                     | 47 |
| Fig. 6.3 Filtro de Kalman suavizado con zonas de confianza, trayectoria dentro de la universidad .. | 47 |
| Fig. 6.4 Mapa de trayectoria dentro de la universidad .....                                         | 48 |
| Fig. 6.5 Filtro de Kalman extendido, trayectoria sector las monjas.....                             | 49 |
| Fig. 6.6 Filtro de Kalman suavizado con zonas de confianza, sector las monjas .....                 | 50 |
| Fig. 6.7 Mapa de trayectoria sector las monjas.....                                                 | 50 |
| Fig. 7.1. Ejemplo de aumento del error en la medición, sector las monjas .....                      | 53 |



# Nomenclatura

## Matrices

$\mathbf{X}^T$  : transpuesto de la matriz  $\mathbf{X}$

$J_{\mathbf{X}}|_{\mathbf{x}_0}$  : jacobiano de la matriz  $\mathbf{X}$ , evaluado en  $\mathbf{x}_0$

$\text{diag}([x_1 \ x_2 \dots])$  : matriz diagonal compuesta por los valores  $x_1, x_2, \dots$

## Vectores

$\mathbf{x}$  : vector de  $n$  variables de estados,  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$

$\hat{\mathbf{x}}$  : vector de  $n$  variables de estados,  $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{x}_1 \ \hat{x}_2 \ \dots \ \hat{x}_n]^T$  (estimación de  $\mathbf{x}$ ).

$\mathbf{x}_0$  : condición inicial del vector de estados,  $\mathbf{x}_0 = [x_{10} \ x_{20} \ \dots \ x_{n0}]^T$

## Escalares

$x_k$  :  $k$ -ésima variable de estado.



# Capítulo 1. Introducción

---

## 1.1. Introducción General

El sistema de Posicionamiento Global (o GPS por sus siglas en inglés) es un sistema de navegación por satélite desarrollado por Estados Unidos que fue declarado totalmente operativo en 1995 [3]. Debido a que su cobertura es mundial, este sistema es de gran beneficio para todas las naciones del mundo. El GPS es sin duda el proyecto de navegación más ambicioso que se haya emprendido y su aplicación permite llevar a cabo procedimientos que antes habría sido impensable realizar. Entre sus aplicaciones más importantes se encuentran el posicionamiento de aviones y barcos, seguimiento de vehículos terrestres y navegación espacial cercana a la tierra [8]. El problema central de un receptor GPS es la precisión en la estimación de la posición y velocidad en función de señales satelitales que son ruidosas. A medida que las aplicaciones se van haciendo más sofisticadas, las empresas que utilizan el GPS necesitan cada vez más precisión en sus mediciones. En este trabajo se desarrolla un método para mejorar la precisión en las mediciones de un receptor GPS, el cual se aplica luego a datos reales para comprobar su utilidad.

En el presente trabajo se abordará primero el tema del GPS y el método para resolver el problema de la imprecisión mencionado en el párrafo anterior, junto con los fundamentos matemáticos necesarios para entenderlo. Luego se mostrarán los resultados de la aplicación de dicho método a un set de datos reales, y finalmente se mostrarán las conclusiones a las cuales se ha llegado y las investigaciones futuras que puedan realizarse para mejorar el método planteado.

## 1.2. Trabajos Previos

Existe mucha literatura relacionada con el GPS y métodos de mejoramiento de su precisión. Se agruparán los trabajos previos en 5 ítems para una mejor comprensión de las referencias. Para comenzar, antes de entrar a la teoría, se debe tener cierto grado de conocimiento sobre el GPS. En el primer ítem se entregan antecedentes que explican en detalle el funcionamiento de este Sistema de Posicionamiento Global.

El método que se ha escogido para mejorar la precisión del GPS corresponde al filtro de Kalman. Este método es un algoritmo recursivo que utiliza los conceptos de probabilidades y señales aleatorias para caracterizar el sistema y tratarlo como un modelo espacio-tiempo con

componentes aleatorias, cuyos parámetros (tales como la media y la varianza) se suponen conocidos. De esta forma se logra encontrar en cada iteración una estimación óptima desde el punto de vista estadístico. Dado lo anterior, se presentan en el segundo ítem referencias a los conceptos matemáticos necesarios para comprender el funcionamiento del filtro de Kalman, y luego en el tercero se listan las referencias en las cuales se explica y desarrolla este algoritmo.

La mayor desventaja del filtro de Kalman es que los parámetros del ruido que se asumen conocidos son en la práctica muy difíciles de determinar, sobre todo el ruido asociado al proceso. Varios intentos se han hecho para encontrar una forma de estimar estos parámetros indirectamente con la ayuda de los demás parámetros del filtro o con información adicional, sin embargo no se ha publicado aún algún método definitivo y general que solucione el problema. En el cuarto ítem se describen algunas referencias que permiten abordar este tema y logran estimar los parámetros deseados si se cumplen ciertas condiciones.

Por último, en el quinto ítem se listan algunas publicaciones en las que se aplica exitosamente el filtro de Kalman al GPS con el objetivo de disminuir el error en las mediciones.

### 1.2.1 Sistema de posicionamiento global (GPS)

- ♣ "Global Positioning System" vols. I, II y III, Washington, D.C.: The Institute of Navigation, 1980-1986.

Colección de trabajos de investigación seleccionados sobre sistemas de navegación que abarca prácticamente todo lo referente al GPS y su funcionamiento. Ésta es la referencia base para los trabajos relacionados con este tema. Sin embargo, este texto es antiguo y fue publicado incluso antes de que el sistema fuera totalmente operativo, por lo que carece de información más actual respecto a los avances que se han hecho sobre este tema.

- ♣ B. W. Parkinson and S. W. Gilbert. "NAVSTAR: Global Positioning System-Ten Years Later," in *Proceedings of the IEEE*. vol. 71, no. 10, pp. 1177-1186, Oct. 1983.

Este trabajo de investigación trata de la historia del GPS desde su concepción hasta 10 años después, identificando las tecnologías que hicieron posible su realización, en donde se describen los satélites, sus redes de control asociadas y otros equipamientos relacionados.

- ♣ *"Understanding GPS: Principles and Applications"* Elliott D. Kaplan. Boston: Artech House Publishers, 1996.

En este libro se puede encontrar un tratamiento actualizado y completo sobre el GPS. Abarca los últimos avances en tecnología y aplicaciones hasta ese entonces. Incluye además aspectos más avanzados, como guías para el desarrollo de nuevas aplicaciones o guías para construir receptores GPS e integrarlos a equipos de navegación o de comunicaciones. Es un buen complemento para las referencias anteriores pues ofrece un enfoque más práctico y actualizado.

### 1.2.2 Teoría de probabilidades y señales aleatorias

- ♣ *"Probability, Random Variables and Stochastic Processes"* A. Papoulis and S Unnikrishna Pillai. McGraw-Hill, 2002.

Libro que sirve como base teórica sobre probabilidades y variables aleatorias. La teoría es ilustrada mediante aplicaciones básicas de la ingeniería. Incluye todos los fundamentos matemáticos necesarios para poder entender el funcionamiento del filtro de Kalman.

- ♣ *"Introduction to Random Signals and Noise"* Wim C. Van Etten. John Wiley & Sons, 2005.

Este libro permite ver la aleatoriedad desde el punto de vista de la teoría de sistemas, que se utiliza frecuentemente en ingeniería. Para el filtro de Kalman es importante entender el ruido como una señal dentro de un sistema "espacio-tiempo" o "espacio de estados", de ahí la importancia de este libro para el presente trabajo.

- ♣ *"Hand-book on statistical distributions for experimentalists"* Christian Walck. University of Stockholm: Particle Physics Group, 2007.

Este libro es más práctico que teórico y se enfoca en los diferentes tipos de distribuciones estadísticas que existen. La importancia de esta referencia radica en que describe con cierto detalle la distribución de Rayleigh. Esta distribución es bivariable y se utiliza más adelante en este trabajo para determinar regiones de confianza.

### 1.2.3 Filtro de Kalman

- ♣ R. E. Kalman. "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems" in *Transactions of the ASME—Journal of Basic Engineering*. vol 82, pp. 35-45, Mar. 1960.

Éste es el trabajo original publicado por R. E. Kalman, el creador del filtro de Kalman. En este trabajo está el núcleo del procedimiento que permitió mejorar la estimación de las variables de estado en un sinnúmero de aplicaciones, incluyendo control, comunicaciones y, por supuesto, sistemas de navegación. Sin embargo, a lo largo de los años, otros investigadores han hecho muchos aportes valiosos a este algoritmo, como el filtro de Kalman extendido para sistemas no lineales, o el filtro de Kalman suavizado para post procesamiento de datos, por mencionar algunos.

- ♣ "Introduction to random signals and applied Kalman filtering" R. G. Brown and P. Y.C. Hwang. John Wiley & Sons, 1992.

Este libro es muy importante para este trabajo debido a su forma más amena y didáctica de explicar y su especial enfoque en aplicaciones en GPS. Es un libro completo que incluye además una introducción a las señales aleatorias, por lo que no hace falta leer algún texto adicional para entender el filtro de Kalman. Además de esto se incluyen varias versiones mejoradas del mencionado filtro, algunas de ellas muy importantes para este trabajo, como lo es el filtro de Kalman extendido, aunque no son tratadas en profundidad.

- ♣ "Kalman Filtering with Real-Time Applications" C. K. Chui and G. Chen. Springer, 2009.

Otro libro dedicado al filtro de Kalman y sus aplicaciones. El aporte de este libro al presente trabajo corresponde a la mayor cantidad de versiones mejoradas del filtro de Kalman y la mayor profundidad en el tratamiento de éstas.

### 1.2.4 Determinación de los parámetros del ruido

- ♣ R. K. Mehra. "On the Identification of Variances and Adaptive Kalman Filtering" in *IEEE Transactions on Automatic Control*. vol. 15, no. 2, Apr. 1970.

Uno de los primeros trabajos de investigación que presenta un método efectivo para determinar los parámetros del ruido en el proceso y en la medición. Durante un periodo fue

considerado como un clásico en la determinación de los parámetros del ruido. Se basa en la función de auto-correlación del proceso de innovación. Su principal desventaja consiste en que se deben cumplir muchas restricciones y supuestos para poder utilizar el método propuesto. Por ejemplo, que el número de elementos desconocidos de la matriz de covarianzas del ruido del proceso debe ser menor a la dimensión del vector de estados multiplicado por la dimensión del vector de mediciones, o que el proceso debe ser lineal.

- ♣ B. J. Odelson, A. Lutz and J. B. Rawlings. "A new autocovariance least-squares method for estimating noise covariances" in *IEEE Transactions on Control Systems*. vol. 14, no. 3, May 2006.

Esta publicación se basa en el mismo principio que la anterior, sin embargo propone un procedimiento que, aunque es más complejo, permite determinar los parámetros del ruido sin tener que considerar muchas de los supuestos y restricciones del trabajo anterior, aunque el proceso sigue teniendo que ser lineal para poder realizar el procedimiento propuesto.

- ♣ M. Saha, B. Goswami and R. Ghosh. "Two novel costs for determining the tuning parameters of the Kalman Filter" in *Conf. Proceedings of Advances in Control and Optimization of Dynamic Systems*, Bangalore, India, Feb. 2013.

Este trabajo toma un camino totalmente diferente a los anteriores. Se basa en el cálculo de dos índices, los cuales permiten formar un criterio para estimar indirectamente los parámetros del ruido del proceso. Aunque el método es mucho más aproximado que los anteriores, tiene la ventaja de poder usarse también para la versión extendida del filtro de Kalman, y por tanto para sistemas no lineales. Su importancia reside en que no se encuentra en la literatura algún otro método general para determinar los parámetros del ruido para sistemas no lineales.

### 1.2.5 Aplicaciones del filtro de Kalman en GPS

- ♣ J. Gomez, R. Ruiz, S. Alonso, F. Gomez. "A Kalman Filter Implementation for Precision Improvement in Low-Cost GPS Positioning of Tractors" in *Sensors*, vol. 13, no. 11, Nov. 2013.

Esta publicación realiza algo muy similar a lo que se pretende lograr con el presente trabajo. En ella se describe la implementación del filtro de Kalman para mejorar la precisión en el seguimiento de tractores para aplicaciones agropecuarias. Dicha publicación entrega información muy importante para este trabajo al indicar los pasos a seguir y al explicar directamente cómo se utiliza el filtro de Kalman en esta aplicación específica y como se modela el sistema. Su principal desventaja es que su implementación se limita a seguimiento de trayectorias rectas, lo cual puede ser suficiente para una aplicación agropecuaria, sin embargo no lo es para el seguimiento de vehículos mineros.

- ♣ O. Maklouf, A. Ghila, A. Abdulla and A. Yousef. "Low Cost IMU \ GPS Integration Using Kalman Filtering for Land Vehicle Navigation Application" in *International Journal of Electrical, Robotics, Electronics and Communications Engineering*, vol. 7, no. 2, Sep. 2013.

Este trabajo de investigación tiene un objetivo similar al anterior pero se extiende para cualquier vehículo terrestre y para cualquier aplicación de seguimiento en general. Una diferencia importante es que este trabajo considera el apoyo de una unidad de medición inercial, la cual está compuesta por acelerómetros y giroscopios y proporciona datos complementarios que permiten estimar la posición y velocidad con mayor precisión y en intervalos de tiempo más cortos.

- ♣ H. Qi and J. B. Moore. "Direct Kalman Filtering of GPS/INS for Aerospace Applications" in *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 38, no. 2, Apr. 2002.

Otra aplicación del filtro de Kalman en sistemas de posicionamiento; esta vez para vehículos aéreos. Notar que el problema se complejiza al tomar importancia la componente de altitud que podía ser ignorada en el caso de los vehículos terrestres. Análogamente al caso anterior, los datos del GPS son complementados con los datos de un Sistema Inercial de Navegación mejorando la estimación de la posición y velocidad del avión.

### 1.2.6 Discusión

Como puede observarse en la literatura expuesta en los ítems anteriores, el GPS y el filtro de Kalman son una combinación muy conveniente y efectiva. Por un lado, el mayor problema del GPS es la imprecisión de los receptores [8], y la mayor ventaja del filtro de Kalman es que logra una

estimación estadísticamente óptima en forma recursiva y se adapta perfectamente a la representación del espacio de estados, lo cual permite utilizarlo en combinación con el GPS en tiempo real y con poca carga computacional. Debido a la popularidad de este método, se han desarrollado muchas valiosas versiones mejoradas del filtro, las que se pueden revisar en [8] y [9]. Además muchos intentos se han hecho para aminorar el gran problema de determinación de parámetros del ruido que presenta el filtro de Kalman al llevarlo a la práctica [10-12], aunque no se ha podido llegar hasta el momento a una solución definitiva y general.

Respecto a las aplicaciones que se han realizado, la literatura comprueba que han sido exitosas y útiles para seguimiento de todo tipo de vehículos [13-15], siendo la más similar a lo que se realiza en el presente trabajo la publicación [13]. Sin embargo, se han hecho en ella algunos supuestos que no pueden hacerse para este trabajo, por lo que el problema a resolver en este caso es más complejo.

### **1.3. Hipótesis de Trabajo**

Se plantea que es posible lograr una mejora significativa en la precisión del Sistema de Posicionamiento Global para una aplicación real, siempre que se logre estimar los parámetros del ruido correctamente.

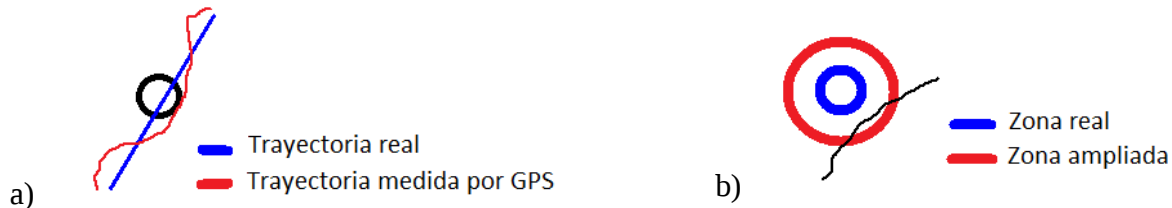


### **1.4. Objetivos**

#### **1.4.1 Objetivo General**

El objetivo principal de esta tesis es analizar trayectorias grabadas por medio de un receptor GPS y caracterizarlas, para poder luego encontrar una forma de mejorar la precisión de los datos de posición corrigiendo los datos originales. La motivación para este objetivo es el hecho de que existen empresas que requieren el seguimiento de vehículos, a las cuales les beneficiaría una mejora en la precisión de sus datos o presentan problemas debido a la alta imprecisión de éstos. Un ejemplo ilustrativo es el problema que presenta la empresa Modular Mining Systems, del grupo Komatsu, la cual se dedica a determinar rutas óptimas para vehículos mineros. El problema consiste en que no se puede determinar con suficiente certeza si un vehículo cuya trayectoria está siendo seguida con GPS efectivamente pasó por zonas dadas, que son críticas para la determinación de rutas óptimas. Estas zonas corresponden a un sector circular, cuyo radio es configurable. Cuando los datos de posición son imprecisos, al querer elegir un radio pequeño para la zona, se corre el riesgo de no

detectar un vehículo que efectivamente pasó por la zona, como se ve en la figura 1.1 (a). Por el contrario, si el radio se elige muy grande, se corre el riesgo de entender como detectado a un vehículo que en realidad no pasó por la zona, sino que por un lugar cercano, como se puede ver en la figura 1.1 (b).



**Fig. 1.2 Problemas de precisión de Modular Mining Systems.**  
(a) Radio pequeño, (b) Radio grande.

Al mejorar la precisión de los datos se podría aumentar la certeza de que un vehículo pasó por la zona, y al tener caracterizado el sistema se podría escoger el radio óptimo que debiera tener tal zona.

#### 1.4.2 Objetivos Específicos

- Entender con mayor profundidad el funcionamiento del GPS.
- Encontrar el método más adecuado para mejorar la precisión de los datos recibidos del GPS.
- Encontrar el modelo que mejor represente el problema que se intenta resolver.
- Encontrar la mejor manera posible de estimar los parámetros del ruido del sistema.

#### 1.5. Alcances y Limitaciones

El receptor GPS del cual se dispone sólo puede entregar datos periódicamente cada 7 segundos como mínimo. Esta limitación implica además que los datos deberán ser obtenidos de un recorrido a pie, pues la velocidad de un vehículo requiere un menor tiempo entre la entrega de un valor y otro, sin embargo los métodos propuestos son generales y se pueden usar indistintamente tanto para trayectorias a pie como para trayectorias de vehículos. Los datos analizados se limitan a los obtenidos mediante el receptor GPS del cual se dispone. La solución se basa en un post análisis de datos, por lo que no se pretende implementar el filtro en tiempo real.

## 1.6. Temario y Metodología

En el segundo capítulo de este trabajo se explicará en más detalle el funcionamiento del GPS, luego, en el tercero, se introducirán los conceptos matemáticos que son la base para entender el método de mejoramiento de la precisión en un receptor GPS, el cual consiste en el filtro de Kalman. Luego, en el cuarto capítulo, se desarrollará y explicará dicho método. En el quinto capítulo se explicará el modelo a utilizar y se realizarán simulaciones preliminares para probar los métodos expuestos en el capítulo anterior. Finalmente se muestran en el sexto capítulo los resultados de la aplicación de lo anterior a datos reales obtenidos por un receptor GPS.

Todos los cálculos y simulaciones fueron realizados utilizando el software Matlab. Las trayectorias fueron grabadas mediante la aplicación GPSTLogger. Estas trayectorias fueron puestas en Google Maps a través de la aplicación Mis Mapas.



## Capítulo 2. Sistema de Posicionamiento Global

---

### 2.1. Introducción

En este capítulo se entrega toda la información concerniente sobre GPS que se cree pertinente y necesaria para entender los capítulos siguientes. Se dará una descripción en detalle sobre este sistema, su historia y su evolución a lo largo del tiempo, pues esta tecnología está aún en desarrollo. Se explicará su funcionamiento haciendo hincapié en las razones por las cuales se deteriora la precisión de los datos de posición entregados por el receptor GPS final, después de haber pasado por una serie de procesamientos y distorsiones.

### 2.2. Descripción general

El Sistema de Posicionamiento Global o GPS, aunque su nombre correcto es NAVSTAR-GPS1, es un sistema global de navegación por satélite que permite determinar en todo el mundo la posición de un objeto, una persona, un vehículo o una nave. Aunque su invención se atribuye a los gobiernos de Francia y Bélgica, el sistema fue desarrollado e instalado por el Departamento de Defensa de los Estados Unidos.

El GPS funciona mediante una red de 27 satélites (24 operativos y 3 de respaldo) en órbita a 20.200 km sobre el globo terráqueo, con trayectorias sincronizadas para cubrir toda la superficie de la Tierra. Cuando se desea determinar una posición, el receptor que se utiliza para ello localiza automáticamente como mínimo tres satélites de la red, de los que recibe unas señales indicando la posición y el reloj de cada uno de ellos. Con base en estas señales, el aparato sincroniza el reloj del Sistema de Posicionamiento y calcula el retraso de las señales; es decir, la distancia al satélite. Por "triangulación" los tres satélites calculan la posición en que el GPS se encuentra. La triangulación en el caso del Sistema de Posicionamiento Global se basa en determinar la distancia de cada satélite respecto al punto de medición. Conocidas las distancias, se determina fácilmente la propia posición relativa respecto a los tres satélites. Conociendo además las coordenadas o posición de cada uno de ellos por la señal que emiten, se obtiene la posición absoluta o coordenadas reales del punto de medición. También se consigue una exactitud extrema en el reloj del GPS, similar a la de los relojes atómicos que llevan a bordo cada uno de los satélites.

La antigua Unión Soviética tenía un sistema similar llamado GLONASS, ahora gestionado por la Federación Rusa, el cual actualmente está siendo utilizado como complemento del GPS ayudando así a lograr una ubicación más rápida. Actualmente la Unión Europea y China están desarrollando su propio sistema de posicionamiento por satélite, denominados respectivamente Galileo y BDS.

### **2.3. Historia**

En 1957 la Unión Soviética lanzó al espacio el satélite Sputnik I. Este satélite era monitorizado gracias al efecto Doppler de la señal que transmitía. Debido a este hecho, se comenzó a pensar que, de igual modo, la posición de un observador podría ser establecida mediante el estudio de la frecuencia Doppler de una señal transmitida por un satélite cuya órbita estuviera determinada con precisión.

La armada estadounidense rápidamente aplicó esta tecnología para proveer posiciones actualizadas y precisas a los sistemas de navegación de sus flotas. Así surgió el sistema TRANSIT, que quedó operativo en 1964, lo que se podría considerar los inicios del GPS, y hacia 1967 estuvo disponible, además, para uso comercial. Las actualizaciones de posición, en ese entonces se encontraban disponibles cada 40 minutos y el observador debía permanecer casi estático para poder obtener información adecuada. Posteriormente, en esa misma década y gracias al desarrollo de los relojes atómicos, se diseñó una constelación de satélites, portando cada uno de ellos un reloj, y estando todos sincronizados con base a una referencia de tiempo determinada.

En 1973 se combinaron los programas de la Armada y el de la Fuerza Aérea de los Estados Unidos. Este último consistía en una técnica de transmisión codificada que provee datos precisos usando una señal modulada con un código de ruido pseudo-aleatorio (PRN), en lo que se conoció como Navigation Technology Program, posteriormente renombrado como NAVSTAR GPS.

Entre 1978 y 1985 se desarrollaron y lanzaron once satélites prototipo experimentales (Block I, Block II, Block IIA, Block IIR y Block IIF), después siguieron otras generaciones, hasta completar la constelación actual, a la que se declaró con «capacidad operacional inicial» en diciembre de 1993 y con «capacidad operacional total» en abril de 1995.

### **2.4. Características técnicas**

El Sistema Global de Navegación por Satélite se compone de 3 segmentos, los cuales se describen a continuación.

### 2.4.1 Segmento espacial

En el segmento espacial se encuentran 24 satélites con trayectorias sincronizadas para cubrir toda la superficie del globo terráqueo. Más concretamente, repartidos en 6 planos orbitales de 4 satélites cada uno. La energía eléctrica que requieren para su funcionamiento la adquieren a partir de dos paneles compuestos de celdas solares adosados a sus costados. Se encuentran a una altitud de 20.200 km respecto al globo terrestre, el periodo de tiempo de los satélites en orbitar es de 11 h 56 min (12 horas sidéreas), la inclinación de estos respecto al ecuador terrestre es de  $55^\circ$  y su vida útil es de 7,5 años.

### 2.4.2 Segmento de control

El sistema global de navegación por satélite compuesto por el segmento de control se refiere a una serie de estaciones terrestres. Éstas envían información de control a los satélites para controlar las órbitas y realizar el mantenimiento de toda la constelación. Se podría decir que son estaciones de rastreo automáticas distribuidas globalmente y que monitorean las órbitas junto con las señales de cada satélite enviando correcciones. Activan y desactivan los satélites según las necesidades de mantenimiento. Hay una estación principal, 4 antenas de tierra y 5 estaciones monitoras de seguimiento. En la figura 2.1 se puede ver cómo estas estaciones están distribuidas alrededor del mundo.



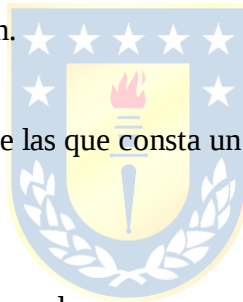
Fig. 2.4 Mapa de estaciones terrestres de control GPS

### 2.4.3 Segmento del usuario

Este segmento se refiere al instrumento en sí. Los Sistemas de Posicionamiento indican la posición en la que se encuentran. Conocidas también como Unidades GPS, son las que podemos adquirir en las tiendas especializadas. El GPS es el conjunto de elementos (Software y Hardware) que permiten determinar la posición, velocidad y tiempo de un usuario, además de los parámetros necesarios adicionales que requiera. Más específicamente, las funciones que cumple un GPS son las siguientes:

- a) Identificación y seguimiento de los códigos asociados a cada satélite.
- b) Determinación de la distancia.
- c) Decodificación de las señales de datos de navegación.
- d) Aplicar las correcciones (del reloj, ionosféricas, etc...).
- e) Determinación de la posición y velocidad.
- f) Validación de los resultados obtenidos y almacenamiento en memoria.
- g) Presentación de la información.

A continuación se enumeran las partes de las que consta un GPS:



- a) Antena con preamplificador.
- b) Sección de radio frecuencia o canal.
- c) Micro procesador para reducción, almacenamiento y procesamiento de datos.
- d) Oscilador de precisión para la generación de los códigos pseudo aleatorios utilizados en la medición del tiempo de viaje de la señal.
- e) Fuente de energía eléctrica.
- f) Interfaces del usuario (pantalla, teclado de comandos).
- g) Memoria de almacenamiento.

## 2.5. Evolución

El GPS está evolucionando hacia un sistema más sólido, el GPS III, con una mayor disponibilidad y que reduzca la complejidad de las aumentaciones GPS. Algunas de las mejoras previstas comprenden:

- a) Incorporación de una nueva señal en L2 para uso civil.
- b) Adición de una tercera señal civil (L5): 1176,45 MHz.
- c) Protección y disponibilidad de una de las dos nuevas señales para servicios de Seguridad Para la Vida (SOL).
- d) Mejora en la estructura de señales.
- e) Incremento en la potencia de señal (L5 tendrá un nivel de potencia de - 154 dB).
- f) Mejora en la precisión (1 – 5 m).
- g) Aumento en el número de estaciones monitorizadas: 12 (el doble).
- h) Permitir mejor interoperabilidad con la frecuencia L1 de Galileo.

El programa GPS III persigue el objetivo de garantizar que el GPS satisfaga requisitos militares y civiles previstos para los próximos 30 años. Este programa se está desarrollando para utilizar un enfoque en 3 etapas, una de las etapas de transición es el GPS II. El programa es muy flexible, permite cambios futuros y reduce riesgos. El desarrollo de satélites GPS II comenzó en 2005, con el objetivo de lograr la transición completa de GPS III en los próximos años. Los desafíos son los siguientes:

- a) Representar los requisitos de usuarios, tanto civiles como militares, en cuanto a GPS.
- b) Limitar los requisitos GPS III dentro de los objetivos operacionales.
- c) Proporcionar flexibilidad que permita cambios futuros para satisfacer requisitos de los usuarios hasta 2030.
- d) Proporcionar solidez para la creciente dependencia en la determinación de posición y de hora precisa como servicio internacional.

## 2.6. Funcionamiento

Ahora que se conoce en qué consiste el GPS en términos generales, se explica a continuación su funcionamiento en mayor detalle. El proceso de transmisión y recepción consiste en que el satélite GPS manda una señal codificada con su tiempo de emisión y localización y el observador la recibirá un intervalo de tiempo después. Para calcular una posición del receptor GPS en la tierra se hace uso del principio de triangulación, el cual se explica a continuación.

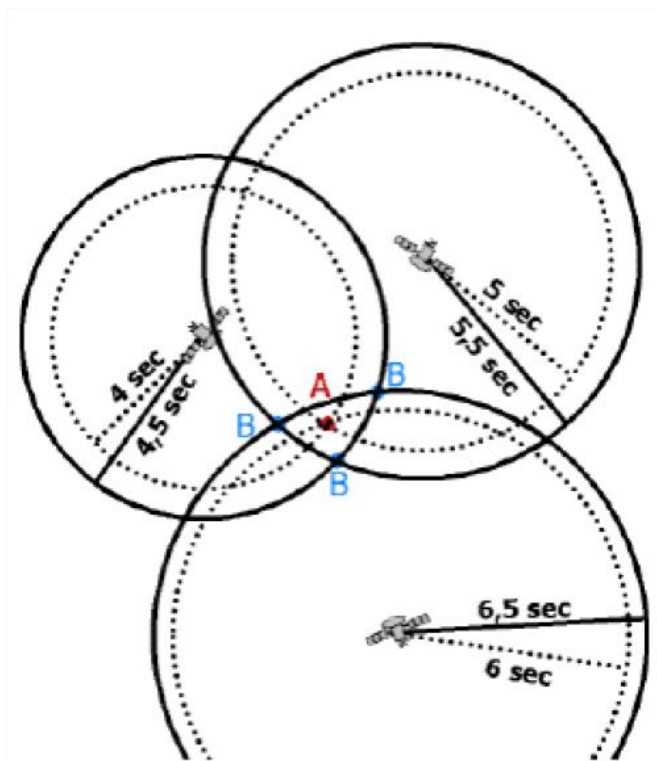
### 2.6.1 Principio de triangulación

Este principio consiste en el conocimiento de la posición del instrumento respecto a tres satélites diferentes. El receptor calcula el tiempo que le ha tardado en llegar la señal emitida por el satélite, y conociendo la velocidad de propagación de la señal, éste determina una esfera dentro de la cual está su posición necesariamente. Para ello simplemente se hace uso de la fórmula que indica que la distancia es igual a la velocidad por el tiempo empleado. Si se calcula la ecuación de una esfera alrededor de cada satélite, la intersección de todas ellas determina la posición real del receptor.

Para lograr un cálculo preciso de la posición, es fundamental tener una medición muy precisa del tiempo de viaje de la señal. A continuación se explica en más detalle cómo se puede lograr esto.

### 2.6.2 Medición del tiempo de viaje de la señal

La medición del tiempo de viaje es una actividad difícil de realizar. Debido a la gran velocidad de las señales de radio y a las distancias, relativamente cortas, a la cual se encuentran los satélites de la Tierra. El tiempo promedio que una señal tarda en viajar de un satélite orbitando a 20.200 km de la Tierra es de 0.067 segundos. Esto hace necesaria la utilización de relojes muy precisos. Los satélites portan relojes atómicos con precisiones de un nanosegundo, pero colocar este tipo de relojes en los receptores sería muy costoso. Para solucionar este problema los receptores corrigen los errores en la medición del tiempo mediante una medición a un cuarto satélite. Para que el reloj del receptor se sincronice con el reloj atómico de los satélites, se varía el tiempo medido por el primero hasta que las tres circunferencias se corten en un sólo punto, como se puede ver más claramente en la figura 2.2.



**Fig. 2.2 Corrección de tiempo en la triangulación**

Un último aspecto a considerar para lograr una mayor precisión en las mediciones es el efecto relativista que afecta a los satélites en órbita. Este efecto se detalla a continuación.

### 2.6.3 Efectos relativistas

Según la teoría de la relatividad, el tiempo va más despacio durante movimientos más rápidos. Esto va a afectar a los satélites en órbita, ya que su velocidad alrededor de la Tierra es de 3.874 m/s, por lo tanto los relojes que llevan se atrasan respecto a los que están en la superficie del planeta. La dilatación del tiempo relativista provoca una inexactitud en el tiempo de aproximadamente 7'2 microsegundos al día. La teoría de la relatividad indica también que el tiempo corre más despacio cuanto mayor es el campo gravitatorio, por lo tanto para un observador en la Tierra el reloj del satélite irá más deprisa que el suyo, ya que estos se encuentran a una altitud de 20.000 km y el potencial gravitatorio es entonces más débil. Tener en cuenta que este efecto es seis veces mayor que el anterior descrito.

Estos dos efectos implican que los relojes de los satélites parecen ir algo más deprisa y es necesario corregirlo. Para ello se colocan los relojes de los satélites a una frecuencia de

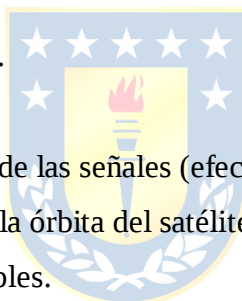
10.229999995453 Mhz y se operan con 10.23 Mhz . Con este "truco" se logra compensar errores provocados en el cálculo de la distancia de 10 km por día y tiempos de 38 milisegundos.

Otro efecto relativista es el llamado Efecto Sagnac, causado por el movimiento del observador en la superficie de la Tierra, que también se mueve a una velocidad de 500 m/s (en el Ecuador) debido a la rotación del planeta. Su influencia en el funcionamiento del GPS es muy pequeña y complicada de calcular, por tanto solo es considerada en ocasiones especiales. Si no se tuvieran en cuenta los efectos gravitacionales y los efectos relativistas de la dilatación del tiempo, el sistema fallaría tras sólo una fracción de hora.

## 2.7. Fuentes de error

Un receptor GPS requiere el instante actual, posición del satélite y retraso respecto a la emisión de la señal para el cálculo de su posición. Para que el cálculo sea preciso se deben tener en cuenta las diferentes fuentes de error que pueden afectar a la señal durante recorrido desde satélite hasta receptor. Las fuentes de error más importantes son:

- a) Errores debidos a la atmósfera.
- b) Errores en el reloj GPS.
- c) Interferencias por la reflexión de las señales (efecto "multibandas").
- d) Errores orbitales: los datos de la órbita del satélite no son completamente precisos.
- e) Geometría de los satélites visibles.



En la siguiente tabla se muestran valores numéricos de referencia de errores debido a diversas fuentes:

**TABLA 2.1 Fuentes de error con sus respectivos valores**

| <b>Fuente</b>                         | <b>Error</b> |
|---------------------------------------|--------------|
| Ionósfera                             | $\pm 5$ m    |
| Información enviada por los satélites | $\pm 2,5$ m  |
| Reloj satelital                       | $\pm 2$ m    |
| Distorsión multibandas                | $\pm 1$ m    |
| Tropósfera                            | $\pm 0,5$ m  |
| Errores numéricos                     | $\pm 1$ m    |

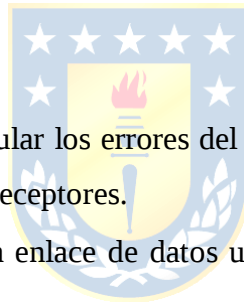
## 2.8. GPS Diferencial

El DGPS o GPS diferencial, es un sistema que proporciona a los receptores de GPS correcciones de los datos recibidos de los satélites GPS, con el fin de entregar una mayor precisión en la posición calculada. Su fundamento radica en el hecho de que los errores producidos por el sistema GPS afectan por igual (o de forma muy similar) a los receptores situados próximos entre sí. Los errores están fuertemente correlacionados en los receptores próximos. Un receptor GPS fijo en tierra (referencia) que conoce exactamente su posición basándose en otras técnicas, recibe la posición dada por el sistema GPS, y puede calcular los errores producidos por el sistema GPS, comparándola con la suya, conocida de antemano. Este receptor transmite la corrección de errores a los receptores próximos a él, y así estos pueden, a su vez, corregir también los errores producidos por el sistema dentro del área de cobertura de transmisión de señales del equipo GPS de referencia.

La estructura DGPS quedaría de la siguiente manera:

a) Estación monitorizada (referencia), que conoce su posición con una precisión muy alta. Esta estación está compuesta por:

- Un receptor GPS.
- Un microprocesador, para calcular los errores del sistema GPS y para generar la estructura del mensaje que se envía a los receptores.
- Transmisor, para establecer un enlace de datos unidireccional hacia los receptores de los usuarios finales.



b) Equipo de usuario, compuesto por un receptor DGPS (GPS + receptor del enlace de datos desde la estación monitorizada).

Existen varias formas de obtener las correcciones DGPS. Las más usadas son:

- Recibidas por radio, a través de algún canal preparado para ello, como el RDS en una emisora de FM.
- Descargadas de Internet, o con una conexión inalámbrica.
- Proporcionadas por algún sistema de satélites diseñado para tal efecto.

El DGPS es capaz de prácticamente anular los errores en los datos orbitales y de posición enviados por los satélites y puede disminuir considerablemente los errores debido a la atmósfera, pero no disminuye los errores debidos al efecto multibanda. Como se observa, éste método puede lograr mejoras importantes en la precisión, pero requiere una alta inversión en tecnología.

## 2.9. Aplicaciones

Las aplicaciones del GPS se pueden dividir en tres grupos:

- a) **Transporte:** transporte marítimo, aviación, autopistas y ferrocarril. Este es el más conocido por todos, sobre todo por la incorporación más reciente del GPS en los automóviles y teléfonos.
- b) **Medio ambiente:** engloba tanto aplicaciones en la meteorología como en la minería o construcción.
- c) **Otros:** también existen algunas aplicaciones en telecomunicaciones, Fuerzas de Seguridad y arte.



## Capítulo 3. Probabilidades y señales aleatorias

---

### 3.1. Introducción

En este capítulo se introducen los conceptos matemáticos relacionados con probabilidades y señales aleatorias que es necesario comprender para la posterior comprensión del filtro de Kalman, método que permite mejorar la precisión del GPS. El capítulo no pretende ser exhaustivo y se explicarán solamente los conceptos estrictamente necesarios. Si se quiere entrar en más profundidad respecto a esta materia, se puede revisar en la bibliografía de [4] a [6].

### 3.2. Señales aleatorias

Las señales aleatorias son algo de lo que todos tienen cierta noción pues conviven con ellas en la vida diaria. Un ejemplo es el ruido de estática que se escucha cuando una estación de radio está mal sintonizada. Si este ruido se graficara, los números parecerían variar de un valor a otro sin ningún orden aparente. Señales como estas no pueden ser descritas de una forma matemática explícita. Su descripción debe hacerse en términos probabilísticos. La primera descripción probabilística rigurosa de una señal aleatoria fue formulada en la década de los 40 por Wiener y Rice.

El ruido generalmente es indeseado: la estática en la señal de radio molesta al querer escuchar música y dificulta el entendimiento de las palabras, así como el ruido electrónico en un sistema de navegación induce errores de posición que pueden ser desastrosos en situaciones críticas. Incluso aunque un diseñador haya hecho su mejor esfuerzo para eliminar los mecanismos que producen ruido, siempre habrá un ruido más sutil que sólo podrá eliminarse con medios más sofisticados, tales como el filtrado. Para poder hacer esto, se debe entender el ruido en términos cuantitativos, y el elemento clave para lograr este objetivo es la noción de probabilidad.

### 3.3. Probabilidad

Una primera noción intuitiva de probabilidad es considerar que la probabilidad  $P$  de que un evento  $A$  ocurra, corresponde a la división entre el número de situaciones posibles que favorecen al evento  $A$  dividido por el número total de situaciones posibles. En términos matemáticos:

$$P(A) = \frac{\text{n}^\circ \text{ situaciones que favorecen al evento } A}{\text{n}^\circ \text{ total de situaciones}} \quad (3.3.1)$$

Sin embargo el concepto representado en la ecuación (3.3.1) a pesar de ayudar a resolver muchos problemas prácticos, no es completamente preciso. Este concepto se puede expandir para considerar el punto de vista de la "frecuencia relativa de ocurrencia". Este concepto consiste en considerar un gran número de pruebas al azar en un experimento y luego definir la probabilidad como la frecuencia relativa de ocurrencia de algún evento en particular respecto a los otros. A continuación se procede a formalizar matemáticamente la explicación anterior:

Considerar un experimento en el cual se hacen pruebas al azar. El set de todos los resultados posibles de este experimento se llamará espacio muestral y se denotará  $S$ . Cada uno de los resultados posibles del experimento se llamarán elementos o muestras y se denotarán como  $s_1, s_2, s_3$ , etc... Estos elementos pueden ser tanto un número como el lado de una moneda o una carta. Todos los elementos del espacio muestral deben ser mutuamente exclusivos, es decir, la ocurrencia de uno excluye la ocurrencia de los demás. Los axiomas que indican el comportamiento de las probabilidades se pueden resumir de la siguiente forma:

- La probabilidad de un elemento no puede ser negativa.
- La probabilidad de la unión de todos los elementos del espacio muestral siempre es 1.
- La probabilidad de la unión de todos los elementos es la misma que la suma de las probabilidades de cada elemento por separado.

Para terminar se ilustra este concepto con un breve ejemplo: considerar que el experimento a realizar es lanzar una moneda. Los elementos de este experimento son 2: que la moneda quede de cara ( $s_1$ ) o que quede de cruz ( $s_2$ ). El espacio muestral  $S$  es entonces  $\{s_1, s_2\}$ . Si se analiza el experimento, se concluye que la frecuencia de ocurrencia para cada elemento es la misma. Para que la suma de las probabilidades de cada elemento sea 1, se debe asignar entonces a cada evento una probabilidad de  $\frac{1}{2}$ .

### 3.4. Variables aleatorias

En el ámbito del estudio de las señales de ruido, los eventos no están relacionados con "cosas", como el lado en que quedó la moneda, o qué carta se sacó, sino que con números, los cuales

corresponden a la amplitud de la señal. Se hablará entonces de la probabilidad de que la amplitud de la señal en un momento dado sea de tantos Hertz, o tantos metros, etc... Una variable aleatoria no es más que una representación numérica de los eventos, de manera que a cada evento se le asigna un número de forma arbitraria. En consecuencia, para un número discreto de eventos, solo una cantidad discreta de números serán permitidos para una variable aleatoria. En el caso de las señales de ruido, al transformarse a una variable aleatoria, se suele asignar a cada amplitud un número igual al valor de la amplitud de la señal. Puesto que la cantidad de amplitudes posibles es infinita, todos los valores reales para su correspondiente variable aleatoria son permitidos.

### 3.5. Distribuciones de probabilidad y funciones de densidad

La distribución de probabilidad entrega la forma en que se distribuyen las frecuencias relativas de ocurrencia de cada valor permitido de una variable aleatoria. La función  $f$  de densidad de probabilidad relaciona de forma explícita cada valor  $x$  permitido de la variable aleatoria  $X$ , con su probabilidad  $P$  asociada. En términos matemáticos:

$$f(x) = P \quad (3.5.1)$$

Tal como se mostró con los axiomas anteriores, la suma de estas probabilidades debe ser 1 en el caso de una variable aleatoria discreta, y en el caso de una variable aleatoria continua la integral de la función de densidad desde  $-\infty$  a  $\infty$  debe ser 1. Existen varias funciones de densidad de probabilidad, pero se explicarán solamente las dos que se van a utilizar más adelante, y se describirán en el último ítem de este capítulo.

Otra función importante para el análisis de variables aleatorias es la función de distribución acumulada. Esta función corresponde a la integral de la función de densidad y su objetivo es, dado un valor  $x$ , entregar el valor de probabilidad de que un evento sea igual o menor a  $x$ . En términos matemáticos:

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (3.5.2)$$

Como consecuencia de ser la integral de  $f$ , debe cumplirse que  $F(x)$  tiende a 0 cuando  $x$  tiende a  $-\infty$ , y que  $F(x)$  tiende a 1 cuando  $x$  tiende a  $\infty$ .

### 3.6. Promedio, esperanza y varianza

El promedio es un indicador ampliamente utilizado, el cual corresponde a un valor que caracteriza a un conjunto de datos o muestras. Más específicamente, para una cantidad finita de muestras, se utiliza el nombre de media muestral, y su fórmula matemática es la siguiente:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (3.6.1)$$

donde,

$\bar{x}$  : Media muestral del espacio muestral X,

N : Número de muestras.

Si bien la media muestral es suficientemente conocida, se recuerda su fórmula para poder extenderla ahora a una fórmula para una cantidad infinita de muestras, cuyo nombre es la esperanza, o valor esperado de x: primero se considera el concepto de frecuencia relativa. Considerar una cantidad de muestras  $x_1, x_2, x_3, \dots$  y la probabilidad de cada una de ellas es  $p_1, p_2, p_3, \dots$ . Si se tienen N experimentos en el que se escoge una muestra, con un N muy alto, es de esperarse que al terminar los experimentos se tenga aproximadamente  $p_1 N$  muestras de  $x_1$ ,  $p_2 N$  muestras de  $x_2$ , etc... de esto se deduce que la fórmula de la esperanza discreta E (para un número discreto de N valores permitidos) es la siguiente:

$$E(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N N p_i x_i = \sum_{i=1}^N p_i x_i \quad (3.6.2)$$

De forma análoga, para una variable aleatoria continua X, se tiene lo siguiente:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (3.6.3)$$

donde,

$f$  : Función de distribución de probabilidad de X.

Otro valor muy importante en el ámbito de las probabilidades, y especialmente para este trabajo, es la varianza. En un sentido cualitativo, la varianza es una medida de la dispersión de X

respecto a su esperanza. Es muy útil para caracterizar el comportamiento de una señal de ruido, como se verá más adelante. Su fórmula para una variable aleatoria continua  $X$  es la siguiente:

$$\sigma_x^2 = E[(X - E(X))^2] \quad (3.6.4)$$

Se puede obtener una expresión más práctica de la varianza desarrollando los paréntesis cuadrados, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= E[(X^2 - 2X * E(X) + (E(X))^2)] \\ &= E(X^2) - 2(E(X))^2 + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2 \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

Es importante notar que si la esperanza de  $X$  es nula, entonces la varianza de  $X$  es simplemente  $E(X^2)$ . Como último comentario, la raíz cuadrada de la varianza también es un valor de interés y se denomina desviación estándar.

### 3.7. Correlación, covarianza y ortogonalidad

La covarianza es un valor que ayuda a describir la relación entre una variable aleatoria y otra. Su definición matemática es la siguiente:

$$Cov(X, Y) = E[(X - \bar{x})(Y - \bar{y})] \quad (3.7.1)$$

Si estas dos variables son independientes entre sí (la ocurrencia de una no implica la ocurrencia de la otra, y viceversa), la ecuación se puede simplificar a:

$$Cov(X, Y) = E[(X - \bar{x})]E[(Y - \bar{y})] \quad (3.7.2)$$

Notar que si  $X=Y$  y su media es nula, entonces la ecuación 3.7.2 es equivalente a la definición de la varianza de una variable de media 0.

Habiendo definido la covarianza, se presenta el coeficiente de correlación  $\rho$ , el cual corresponde a una medida normalizada del grado de correlación entre dos variables aleatorias. Se

calcula de tal manera que siempre está dentro del rango  $-1 \leq p \leq 1$ . Su definición matemática es la siguiente:

$$p = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{\sigma_x^2} \sqrt{\sigma_y^2}} \quad (3.7.3)$$

Si  $p$  es cercano a 1, las variables están correlacionadas, si  $p$  es cercano a 0, las variables no están correlacionadas, y si  $p$  es cercano a -1, las variables están inversamente correlacionadas.

Si dos variables no están correlacionadas, se dice que son ortogonales. Esto implica matemáticamente que:

$$E[XY] = 0 \quad (3.7.4)$$

Por último se introduce el concepto de matriz de covarianzas, el cual es especialmente importante en este trabajo. Para un vector  $\mathbf{u}$  de variables aleatorias, se define la matriz de covarianzas como:

$$\mathbf{P} = E(\mathbf{u}\mathbf{u}^T) \quad (3.7.5)$$

Desarrollando la multiplicación de vectores y realizando equivalencias con las ecuaciones presentadas anteriormente, no es difícil llegar a la siguiente expresión para la matriz de correlaciones:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sigma_{u_1}^2 & cov(u_1, u_2) & cov(u_1, u_i) & \dots \\ cov(u_2, u_1) & \sigma_{u_2}^2 & cov(u_2, u_i) & \dots \\ cov(u_i, u_1) & cov(u_i, u_2) & \sigma_{u_i}^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \sigma_{u_n}^2 \end{bmatrix} \quad (3.7.6)$$

donde,

$\mathbf{u}$  : vector de variables aleatorias  $u_i$  con  $i=1,2,\dots,n$

### 3.8. Distribución gaussiana y distribución de Rayleigh

La distribución normal o gaussiana es la más utilizada en la teoría de probabilidades y es univariable, mientras que la distribución de Rayleigh es más específica y es bivariable. Se presentan a continuación las características más importantes de cada una.

#### 3.8.1 Distribución gaussiana

La función de densidad de la distribución gaussiana queda completamente caracterizada por la media de la variable y su varianza. Su definición matemática es la siguiente:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\bar{x})^2} \quad (3.8.1)$$

Como se ve en la figura 3.1, la ecuación tiene la forma de una campana, en la cual su punto más alto de probabilidad corresponde naturalmente a la media, y mientras mayor sea la varianza, menos achatada se verá la campana.

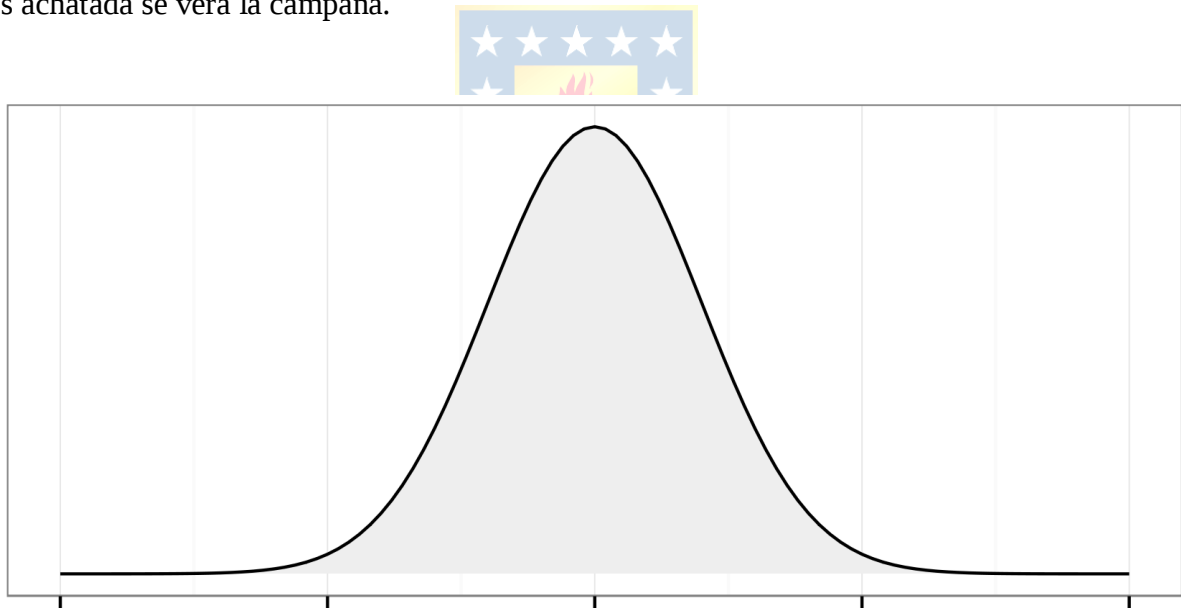


Fig. 3.5 Función de densidad de la distribución gaussiana

La función de distribución acumulada gaussiana es, por supuesto, la integral de la ecuación 3.8.1, sin embargo no existe una expresión explícita para esta integral, por lo que deben usarse datos tabulados como referencia.

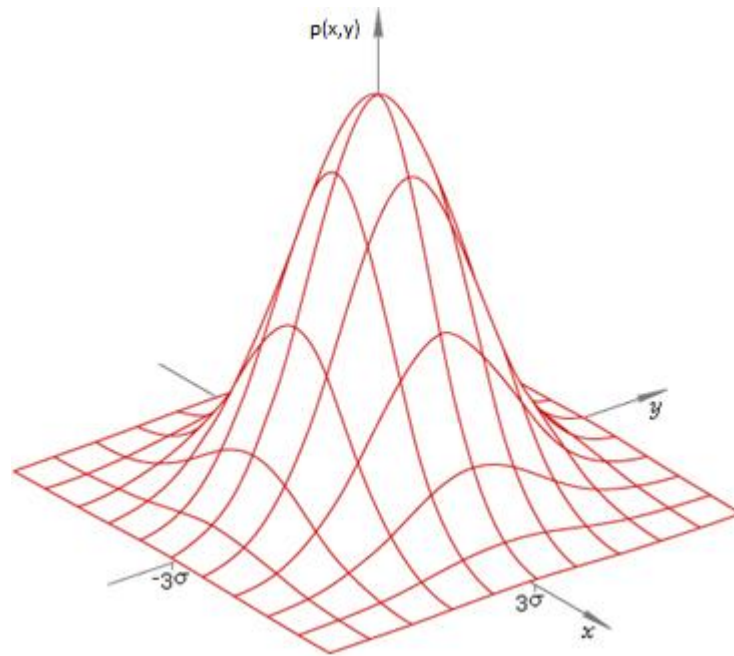
### 3.8.2 Distribución de Rayleigh

La distribución de Rayleigh, o también llamada distribución gaussiana bidimensional, corresponde a la distribución conjunta de dos variables gaussianas independientes, definidas por sus medias  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  y sus varianzas  $\sigma_x^2$ ,  $\sigma_y^2$ . Su función de densidad corresponde a la ecuación 3.8.2. La forma que adopta esta función se puede observar en la figura 3.2.

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(z-\bar{z})(\Sigma)^{-1}(z-\bar{z})^T} \quad (3.8.2)$$

donde,

- $z$  : punto  $(x, y)$ ,
- $\bar{z}$  : punto  $(\bar{x}, \bar{y})$ ,
- $\Sigma$  :matriz de covarianzas de  $x, y$ .



**Fig. 3.2 Función de densidad de la distribución de Rayleigh**

Observar que para un valor dado de probabilidad, se observa que se obtiene un conjunto de puntos  $(x,y)$  equiprobables con forma de elipse.

Para obtener la ecuación de distribución acumulada, se realiza primero la siguiente parametrización:

$$r^2 = (z - \bar{z})(\Sigma)^{-1}(z - \bar{z})^T \quad (3.8.3)$$

Para un punto  $z$  dado, se calcula  $r^2$ . Este valor  $r$  también suele llamarse distancia de Mahanalobis. En función de  $r$  se puede demostrar que la función de distribución acumulada sí tiene una fórmula explícita y además invertible, la que corresponde a lo siguiente:

$$F(r) = 1 - e^{-\frac{r^2}{2}} \quad (3.8.4)$$

Y su fórmula inversa es la siguiente:

$$r = \sqrt{-2\ln(1 - F(r))} \quad (3.8.5)$$

Ahora bien,  $F(r)$  puede interpretarse como la probabilidad de encontrar una muestra dentro de la elipse definida por  $p=F(r)$ . En función de ella puede calcularse  $r$  explícitamente utilizando la ecuación 3.8.5. En función de este valor se puede encontrar finalmente la ecuación parametrizada de la elipse mencionada al inicio de esta deducción, en coordenadas polares:

$$x = r\sigma_x \cos(\theta) + \bar{x} \quad (3.8.6)$$

$$y = r\sigma_y(\rho \cos(\theta) + \sqrt{1 - \rho^2} \sin(\theta)) + \bar{y} \quad (3.8.7)$$

donde,

$\rho$  :coeficiente de correlación entre  $x$  e  $y$ .

Por último, cabe mencionar que los vectores ortogonales que entregan la orientación de la elipse corresponden a los vectores propios de  $\Sigma$ , mientras que los largos del vector mayor y menor corresponden a  $r\sqrt{\text{máx}(\lambda)}$ , y  $r\sqrt{\text{mín}(\lambda)}$ , respectivamente, siendo  $\lambda$  un valor propio de  $\Sigma$ .

## Capítulo 4. Filtro de Kalman

---

### 4.1. Introducción

En 1960, R. E. Kalman publicó un trabajo en el cual resolvía el problema de estimación óptima del estado de un proceso lineal que posee ruido blanco a partir de las mediciones que se realizan de dicho proceso, las cuales igualmente se consideran con ruido. Existían anteriormente publicaciones similares, sin embargo el método de Kalman poseía dos cualidades que lo hacían especialmente útil para aplicaciones reales. Éstas son:

- La modelación vectorial de los procesos aleatorios en consideración, lo cual permite realizar modelos de espacio de estados, pudiendo utilizarse toda la teoría de sistemas disponible para tratar estos procesos.
- El procesamiento recursivo de los datos de medición, lo cual permite realizar aplicaciones en tiempo real gracias a la poca carga computacional del algoritmo al no tener que acumular en memoria datos previos.

Estas cualidades, junto con el fortuito gran avance en la tecnología de la computación digital, atrajeron la atención casi inmediatamente de muchos ingenieros que vieron en el filtro de Kalman un potencial complemento para todo tipo de aplicaciones, especialmente las relacionadas con navegación.

El filtro de Kalman se basa en la técnica de los mínimos cuadrados para encontrar una estimación óptima desde el punto de vista estadístico. La propuesta de Kalman para actualizar la estimación en cada paso es sumar el error entre las mediciones reales y las estimadas, ponderado por una ganancia llamada ganancia de Kalman. A continuación se explica y desarrolla este algoritmo en su forma discreta, luego se explica el filtro de Kalman extendido, el cual corresponde a una generalización del filtro de Kalman para procesos no lineales, y finalmente se explica el filtro de Kalman suavizado, el cual toma en consideración todas las muestras de la trayectoria para obtener un resultado aún más preciso.

## 4.2. Filtro de Kalman discreto

Para empezar, se asume que el proceso con componente aleatoria a ser estimado se puede modelar de la siguiente manera:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad (4.2.1)$$

donde,

$\mathbf{x}_k$  : (n x 1) vector de las variables de estado del proceso al tiempo  $t_k$ ,

$\Phi_k$  : (n x n) matriz de transición del proceso sin ruido al tiempo  $t_k$ , y

$\mathbf{w}_k$  : (n x 1) vector correspondiente a una secuencia de ruido blanco con media nula y matriz de covarianzas conocida al tiempo  $t_k$ .

Es importante mencionar que en la práctica difícilmente se encontrarán señales de ruido de media nula, sin embargo, dependiendo de la aplicación, la media del ruido u off-set puede no ser relevante. Se asume que la observación o medición del proceso ocurre en tiempos discretos y se puede modelar de la siguiente manera:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (4.2.2)$$

donde,

$\mathbf{z}_k$  : (m x 1) vector de mediciones al tiempo  $t_k$ ,

$\mathbf{H}_k$  : (m x n) matriz que entrega la conexión sin ruido entre la medición y las variables de estado al tiempo  $t_k$ , y

$\mathbf{v}_k$  : (m x 1) vector correspondiente a una secuencia de ruido blanco con media nula y matriz de covarianzas conocida al tiempo  $t_k$ . Su correlación con  $\mathbf{w}_k$  es nula.

La matriz de covarianzas de un vector  $\mathbf{u}$  cualquiera de media 0 puede expresarse como  $E(\mathbf{u}\mathbf{u}^T)$ . Se asume que el ruido correspondiente a cada variable de estado no está correlacionado con ninguno de los demás ruidos, por lo tanto, las matrices de covarianzas para  $\mathbf{w}_k$  y  $\mathbf{v}_k$  quedan de la siguiente forma:

$$E(\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T) = \mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} \sigma_{w_1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{w_2}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{w_n}^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.3)$$

donde,

$\sigma_{w_i}^2$  : varianza del elemento del vector de ruido  $\mathbf{w}_k$  asociado a la variable de estado  $x_i$ . Se asume constante para todo tiempo  $t_k$ .

$$E(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) = \mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} \sigma_{v_1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{v_2}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{v_m}^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.4)$$

donde,

$\sigma_{v_i}^2$  : varianza del elemento del vector de ruido  $\mathbf{v}_k$  asociado a la medición  $z_i$ . Se asume constante para todo tiempo  $t_k$ .

Para iniciar el algoritmo se necesita los valores iniciales del error a priori de estimación de las variables de estado  $\mathbf{e}_k^-$  y de la matriz de covarianzas asociada a dicho error  $\mathbf{P}_k^-$ . Se definirá entonces  $\mathbf{e}_k^-$ , y en consecuencia  $\mathbf{P}_k^-$ , de la siguiente forma:

$$\mathbf{e}_k^- = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^- \quad (4.2.5)$$

$$\mathbf{P}_k^- = E(\mathbf{e}_k^- \mathbf{e}_k^{-T}) \quad (4.2.6)$$

donde,

$\hat{\mathbf{x}}_k^-$  : valor estimado de  $\mathbf{x}_k$  a priori, es decir, antes de disponer de la medición  $\mathbf{z}_k$ .

Ya que han sido definidos todos los elementos necesarios, se presenta a continuación el algoritmo del filtro de Kalman, el cual se puede dividir en 4 pasos que se van repitiendo infinitamente:

### 1) Calcular la ganancia de Kalman

$$K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} \quad (4.2.7)$$

2) Mejorar la estimación por medio de la medición  $z_k$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - H_k \hat{x}_k^-) \quad (4.2.8)$$

3) Calcular la matriz de covarianzas asociada a la estimación mejorada

$$P_k = (I - K_k H_k) P_k^- \quad (4.2.9)$$

4) Proyectar un paso hacia adelante los valores de  $\hat{x}_k^-$  y  $P_k^-$

$$\hat{x}_{k+1}^- = \Phi_k \hat{x}_k \quad (4.2.10)$$

$$P_{k+1}^- = \Phi_k P_k \Phi_k^T + Q_k \quad (4.2.11)$$

En la figura 4.1 se encuentra un esquema que resume el algoritmo del filtro de Kalman para su mejor entendimiento. La deducción de este algoritmo se encuentra en el anexo A del presente informe.

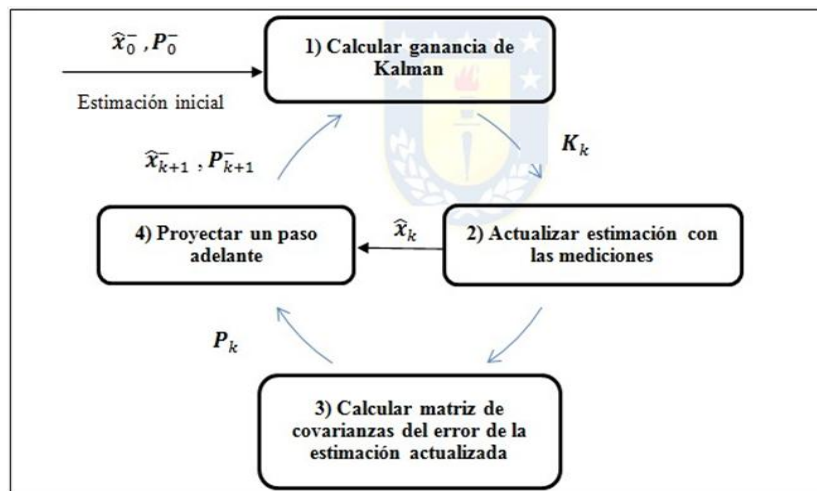


Fig. 4.6 Esquema algoritmo filtro de Kalman

### 4.3. Filtro de Kalman extendido

Como se había mencionado en la introducción de este capítulo, el filtro de Kalman extendido es una generalización del filtro de Kalman para sistemas no lineales. Su estructura es muy similar a la del filtro de Kalman discreto y las definiciones son las mismas, pero se agregan algunas más. Al considerar un proceso no lineal y una relación no lineal entre las mediciones y el proceso, se deben reemplazar las matrices de transición por una función no lineal, de manera que las ecuaciones (4.2.1) y (4.2.2) quedan de la siguiente forma:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k \quad (4.3.1)$$

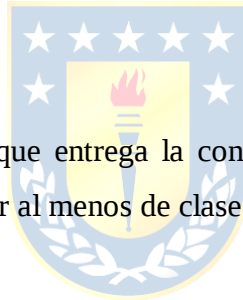
donde,

$\mathbf{f}$  : (n x 1) función vector de las variables de estado del proceso al tiempo  $t_k$ . Debe ser al menos de clase  $C_1$ .

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \quad (4.3.2)$$

donde,

$\mathbf{h}$  : (m x 1) función vector que entrega la conexión sin ruido entre la medición y las variables de estado al tiempo  $t_k$ . Debe ser al menos de clase  $C_1$ .



Este filtro linealiza en cada iteración las funciones  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{h}$  en torno a una trayectoria que se va actualizando constantemente en función de las estimaciones del filtro. Para lograr esta linealización se introducen  $\mathbf{J}_f$  y  $\mathbf{J}_h$ , que corresponden al jacobiano de las funciones  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{h}$  respectivamente. El jacobiano de una función vector cualquiera  $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_m]$  dado un vector de estados cualquiera  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$  se define de la siguiente manera:

$$\mathbf{J}_y = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (4.3.3)$$

Dado lo anterior, se entrega a continuación el algoritmo del filtro de Kalman extendido:

**1) Calcular la ganancia de Kalman**

$$K_k = P_k^- J_h^T |_{\hat{x}_k^-} (J_h |_{\hat{x}_k^-} P_k^- J_h^T |_{\hat{x}_k^-} + R_k)^{-1} \quad (4.3.4)$$

**2) Mejorar la estimación por medio de la medición  $z_k$**

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - h(\hat{x}_k^-)) \quad (4.3.5)$$

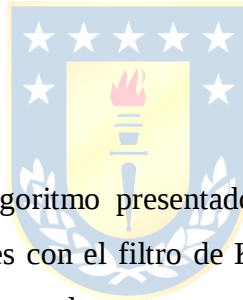
**3) Calcular la matriz de covarianzas asociada a la estimación mejorada**

$$P_k = (I - K_k J_h |_{\hat{x}_k^-}) P_k^- \quad (4.3.6)$$

**4) Proyectar un paso hacia adelante los valores de  $\hat{x}_k^-$  y  $P_k^-$**

$$\hat{x}_{k+1}^- = f(\hat{x}_k) \quad (4.3.7)$$

$$P_{k+1}^- = J_f |_{\hat{x}_k} P_k J_f^T |_{\hat{x}_k} + Q_k \quad (4.3.8)$$



Como se puede observar, el algoritmo presentado es muy similar al anterior y permite manejar problemas que son inabordables con el filtro de Kalman discreto, sin embargo, el cálculo del jacobiano para ecuaciones complejas suele ser una carga pesada a nivel computacional, por lo que su utilización en aplicaciones en tiempo real es más restringida.

#### 4.4. Filtro de Kalman suavizado

Esta variante asume que se tienen todos los datos de una trayectoria a filtrar, y los utiliza en conjunto para lograr un filtrado más preciso. Se le llama así porque la trayectoria resultante presenta curvas más suaves. Al tomar en consideración todos los datos de la trayectoria, su uso se restringe a aplicaciones que no sean en tiempo real, además la carga computacional de este algoritmo es mucho mayor. En la literatura existen varios tipos de algoritmos de suavizado, pero en este trabajo se presenta el algoritmo de suavizado para el filtro de Kalman extendido que se propone en [16], por ser el que se utiliza finalmente para resolver el problema planteado.

El algoritmo consiste en dos partes: primero se realiza el filtrado extendido, tal como se describió anteriormente, y luego se realiza un procesamiento con un conteo inverso, partiendo desde  $N - 1$ , siendo  $N$  el número total de muestras, y terminando en la primera muestra. Los valores iniciales para empezar el algoritmo son los valores finales del proceso de filtrado  $\hat{\mathbf{x}}_N^-$  y  $\mathbf{P}_N^-$ . Las variables de estado suavizadas y su matriz de covarianzas asociado se denotarán como  $\hat{\mathbf{x}}\mathbf{s}_k$  y  $\mathbf{P}\mathbf{s}_k$  respectivamente. A continuación se presentan las ecuaciones de esta segunda parte del algoritmo:

##### 1) Calcular la variable auxiliar $\mathbf{U}_k$

$$\mathbf{U}_k = \mathbf{P}_k \mathbf{J}_f^T |_{\hat{\mathbf{x}}_k} (\mathbf{P}_{k+1}^-)^{-1} \quad (4.4.1)$$

##### 2) Calcular matriz de covarianzas suavizada

$$\mathbf{P}\mathbf{s}_k = \mathbf{P}_k + \mathbf{U}_k (\mathbf{P}\mathbf{s}_{k+1} - \mathbf{P}_{k+1}^-) \mathbf{U}_k^T \quad (4.4.2)$$

##### 3) Calcular variables de estado suavizadas

$$\hat{\mathbf{x}}\mathbf{s}_k = \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{U}_k (\hat{\mathbf{x}}\mathbf{s}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-) \quad (4.4.3)$$

## Capítulo 5. Simulación

---

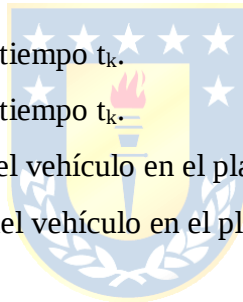
### 5.1. Introducción

Ya vistos los capítulos anteriores, llega el momento de utilizar el filtro de Kalman para una aplicación real de GPS. Se muestra a continuación el modelo escogido para representar el problema, luego se muestra una simulación del problema con parámetros ficticios, y finalmente se explica cómo se determinan los parámetros reales y se muestran los resultados de la aplicación del filtro con datos de un receptor GPS real.

### 5.2. Modelo

El modelo escogido ignora el eje  $z$  (altura) y considera al vehículo como una partícula que se desplaza a lo largo del plano  $xy$  con cierta velocidad  $v$ . Dado lo anterior, el modelo considerará, en un intervalo discreto de tiempo, los siguientes valores:

- $x_k$ : Posición en el eje  $x$  en el tiempo  $t_k$ .
- $y_k$ : Posición en el eje  $y$  en el tiempo  $t_k$ .
- $\theta_k$ : Ángulo de la velocidad del vehículo en el plano  $xy$  en el tiempo  $t_k$ .
- $|v_k|$ : Módulo de la velocidad del vehículo en el plano  $xy$  en el tiempo  $t_k$ .



Estas 4 variables conforman el vector de estados  $\mathbf{x}$  y serán denominadas como  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$  respectivamente. El modelo continuo que rige el movimiento del vehículo corresponde a lo siguiente:

$$\dot{x} = |v|\cos(\theta) \quad (5.2.1)$$

$$\dot{y} = |v|\sin(\theta) \quad (5.2.2)$$

Se observa que el modelo es no lineal, por lo que será necesario utilizar el filtro de Kalman extendido. La versión discretizada del modelo anterior corresponde a lo siguiente:

$$x_{k+1} = x_k + \Delta T |v_k| \cos(\theta_k) \quad (5.2.3)$$

$$y_{k+1} = y_k + \Delta T |v_k| \sin(\theta_k) \quad (5.2.4)$$

$$\theta_{k+1} = \theta_k \quad (5.2.5)$$

$$|v_{k+1}| = |v_k| \quad (5.2.6)$$

donde,

$\Delta T$  : intervalo discreto de tiempo.

Por consiguiente, la función vector  $\mathbf{f}$  mencionada en la sección del filtro de Kalman extendido, corresponde a:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_4 \cos(x_3) \\ x_4 \sin(x_3) \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \text{ discretizando } \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} x_{1k} + \Delta T x_{4k} \cos(x_{3k}) \\ x_{2k} + \Delta T x_{4k} \sin(x_{3k}) \\ x_{3k} \\ x_{4k} \end{bmatrix} \quad (5.2.7)$$

Se asume que el receptor GPS es capaz de entregar la posición del vehículo de forma explícita, es decir,  $x_k$  e  $y_k$ . Luego, la función vector  $\mathbf{h}$  queda simplemente de la siguiente forma:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \end{bmatrix} \quad (5.2.8)$$

En consecuencia, derivando respecto a las funciones continuas y luego discretizando:

$$J_f = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -x_4 \sin(x_3) & \cos(x_3) \\ 0 & 0 & x_4 \cos(x_3) & \sin(x_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{discretizando } \Rightarrow J_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Delta T x_{4k} \sin(x_{3k}) & \Delta T \cos(x_{3k}) \\ 0 & 1 & \Delta T x_{4k} \cos(x_{3k}) & \Delta T \sin(x_{3k}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2.9)$$

$$J_h = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.2.10)$$

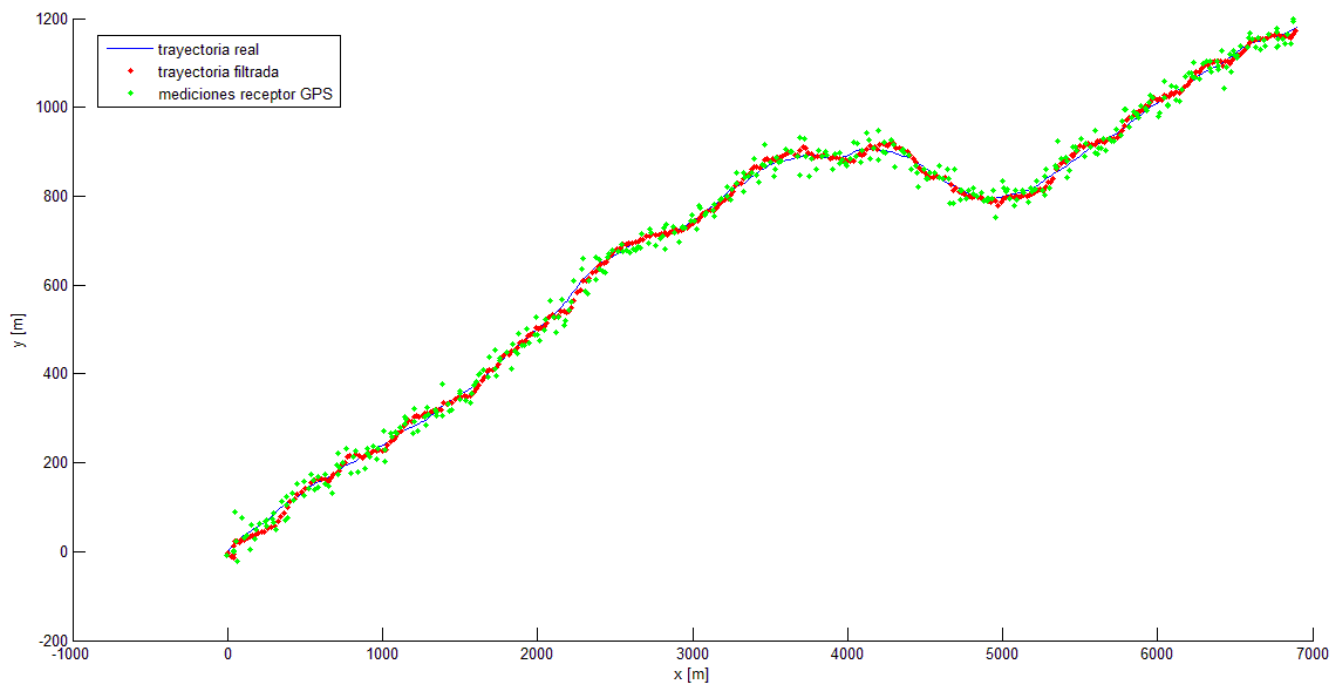
Con esto queda definido el modelo para el seguimiento de la trayectoria de un vehículo. Para poder implementarlo en la práctica se necesita determinar el parámetro  $\mathbf{Q}$ , que corresponde en este

caso a la caracterización matemática del movimiento errático de la conducción del vehículo, y el parámetro  $\mathbf{R}$ , correspondiente al error asociado a la medición que entrega el receptor GPS. Se asume que los ruidos de las variables de estado no están correlacionados entre ellos, por lo que ambas matrices serán matrices diagonales, las cuales corresponden a las varianzas de cada señal de ruido.

## 5.3. Simulación

### 5.3.1 Filtro de Kalman extendido

A continuación se muestra una simulación del algoritmo del filtro de Kalman extendido para el modelo propuesto en el ítem anterior, con el objetivo de ejemplificar su funcionamiento. El gráfico de esta simulación puede observarse en la figura 5.1. Se muestran 400 mediciones de una trayectoria a velocidad fija con un módulo de 60 Km/h. Los parámetros utilizados para la simulación se muestran en la tabla 5.1.



**Fig. 5.1 Simulación filtro de Kalman extendido**

TABLA 5.1 Parámetros de simulación filtro de Kalman extendido.

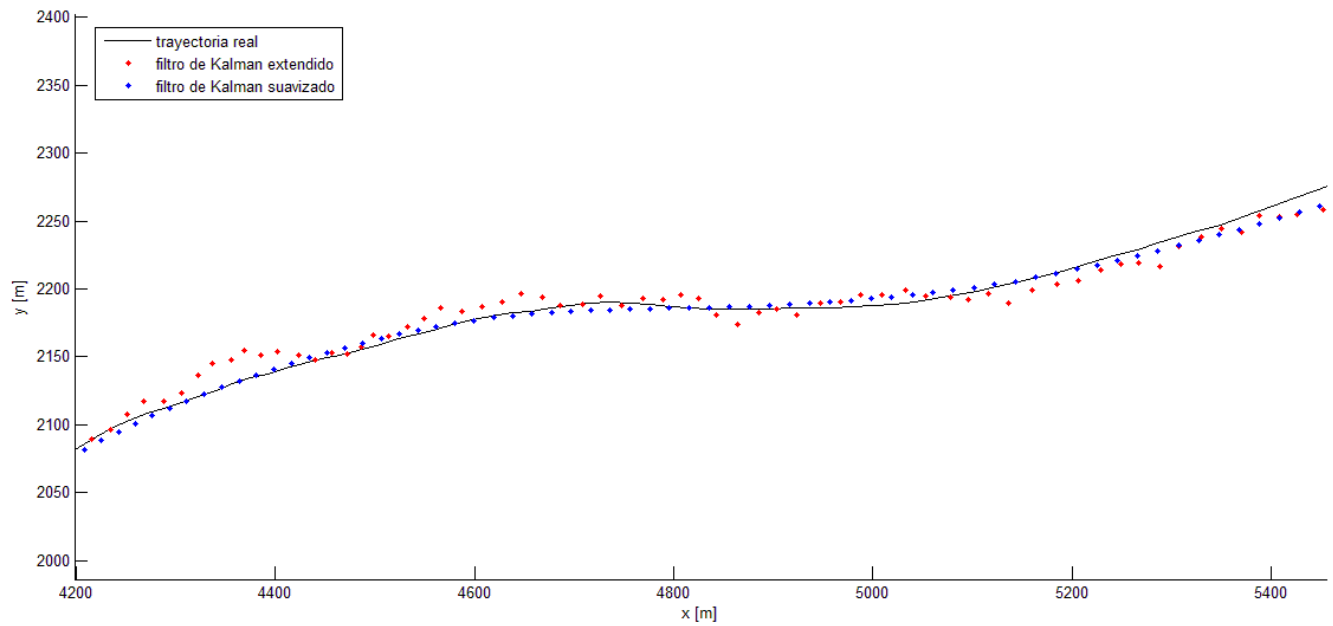
| Parámetro     | Valor                                                                          |
|---------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| $\hat{x}_0^-$ | $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\pi}{8} & 60 \frac{1000}{3600} \end{bmatrix}^T$ |
| $P_0^-$       | $250 \text{diag}([1 \ 1 \ 1 \ 1])$                                             |
| $Q$           | $\text{diag}([0.01 \ 0.02 \ 0.001 \ 0.03])$                                    |
| $R$           | $\text{diag}([200 \ 400])$                                                     |

Como se observa en el gráfico, las mediciones están dispersas azarosamente en torno a la trayectoria real, mientras que la trayectoria estimada adapta más la forma de una trayectoria continua y se asemeja bastante a la real.

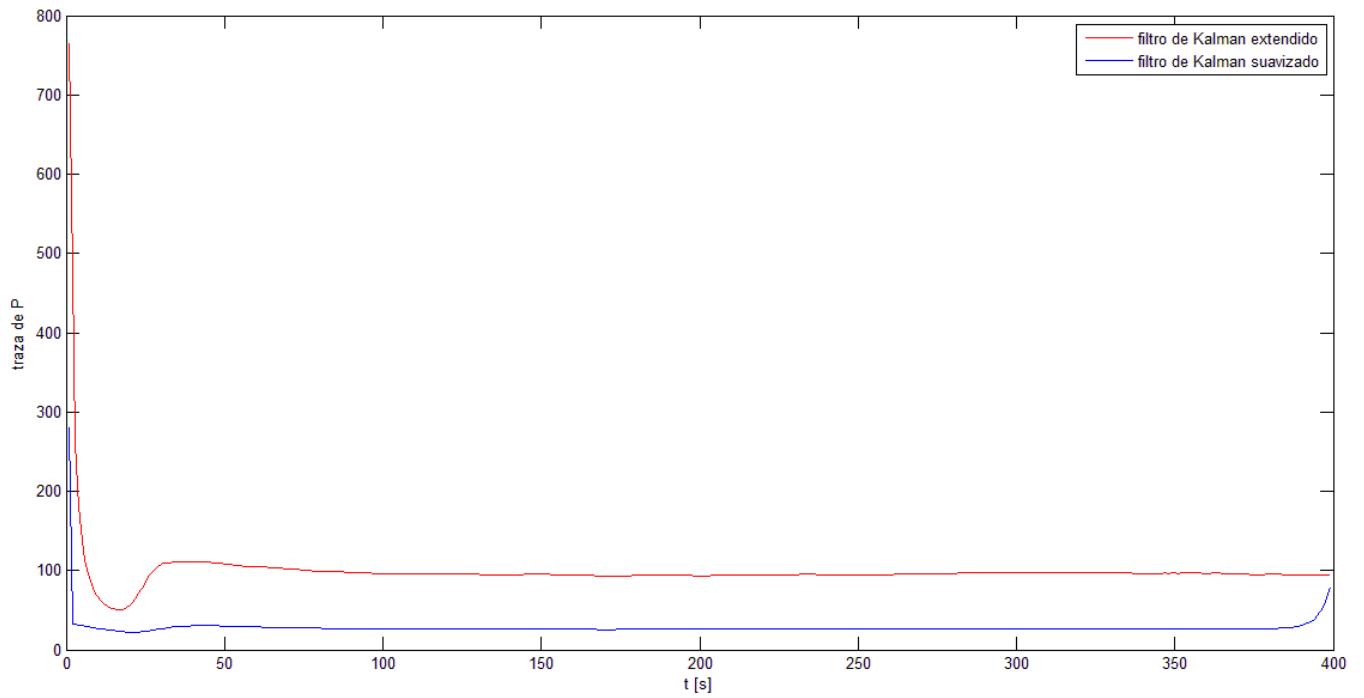
### 5.3.2 Filtro de Kalman suavizado

Para mostrar el funcionamiento del filtro de Kalman suavizado, se utiliza el algoritmo explicado en la sección . En la figura 5.2 se muestra una nueva simulación del mismo proceso con los mismos parámetros, en la cual se compara la eficacia del filtro de Kalman extendido y su versión suavizada. Se amplió una sección del gráfico para que se pueda observar mejor la diferencia entre los dos métodos. Para determinar de manera matemática qué método disminuyó más el error, se puede utilizar la traza de la matriz de covarianzas del error  $\mathbf{P}$ , pues este valor indica la suma de las varianzas de todos los errores involucrados en el proceso. La gráfica de la traza de  $\mathbf{P}$  a lo largo del tiempo puede observarse en la figura 5.3.

Respecto al gráfico 5.2, como era de esperarse, se observa que el filtrado suavizado se parece más aún a la trayectoria real que el filtrado extendido, y como su nombre lo indica, presenta curvas más suaves. Consecuentemente con el gráfico anterior, se observa en el gráfico 5.3 que la traza del filtro suavizado parte de un valor mucho más bajo y se mantiene por debajo que la del filtro extendido, para luego subir hasta un valor cercano al del filtro extendido al final. Esto se traduce a que el error del filtro de Kalman suavizado se mantendrá siempre por debajo del error del filtro de Kalman extendido.



**Fig. 5.2 Simulación filtro de Kalman extendido y suavizado**



**Fig. 5.3 Comparación traza de matriz de covarianzas del error**

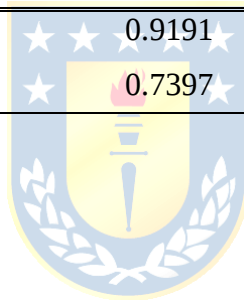
Otra manera de comparar la eficacia de ambos métodos es utilizando la raíz de la media de los errores cuadráticos, o RMSE, cuya expresión matemática es la siguiente:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{I=1}^N (\hat{x}_I - x_I)^2} \quad (5.3.1)$$

Aplicando esta fórmula se calculan los RMSE para las coordenadas x e y de cada método. Los resultados se pueden ver en la tabla 5.2. Como era de esperarse, el filtro suavizado tiene un menor RMSE que el filtro extendido, siendo la diferencia más notoria en la coordenada x.

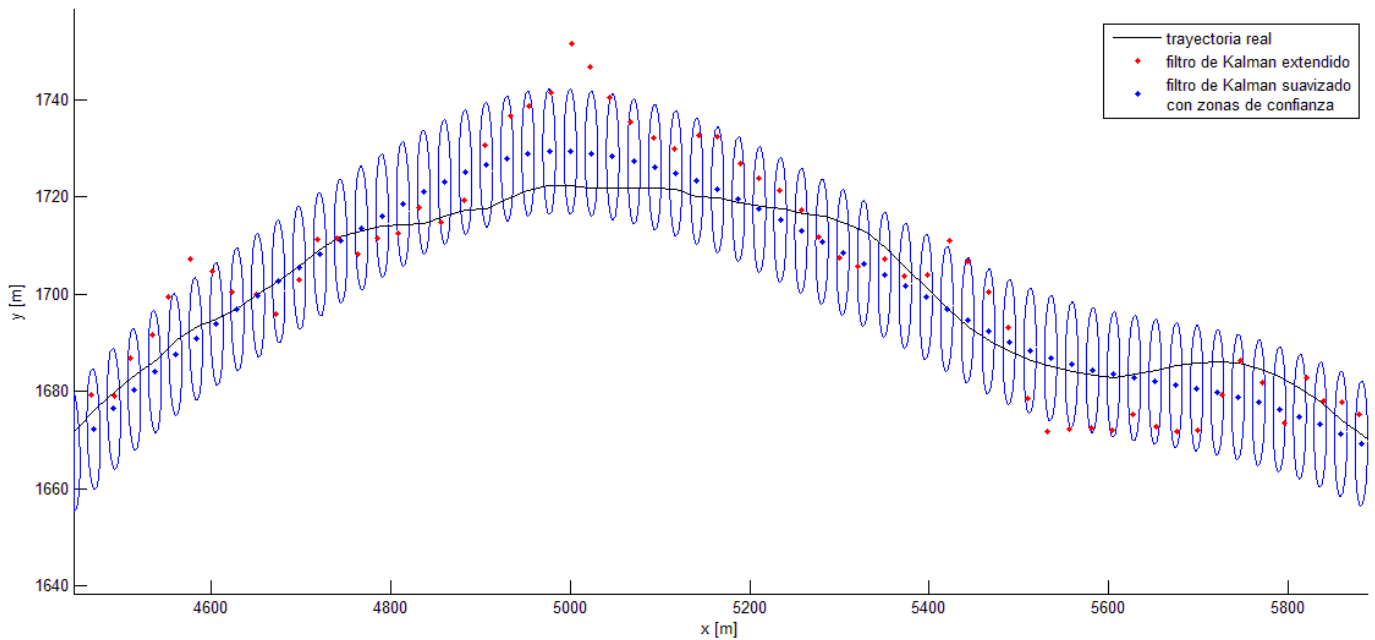
**TABLA 5.2 RMSE filtros de Kalman extendido y suavizado**

| <b>Coordenada</b> | <b>Filtro de Kalman extendido</b> | <b>Filtro de Kalman suavizado</b> |
|-------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| <i>x</i>          | 0.9191                            | 0.4075                            |
| <i>y</i>          | 0.7397                            | 0.4604                            |



### 5.3.3 Regiones de confianza

Tal como se vio en el capítulo 3, en la sección de la Distribución de Rayleigh, es posible definir en torno a cada estimación, una región de confianza elíptica dentro de la cual se asegura con un cierto porcentaje de probabilidad que se encuentra la posición real. Las dos variables aleatorias que se utilizan son el error de posición en  $x$  y el error de posición en  $y$ , tomando como base la matriz de covarianzas del error de estimación  $\mathbf{P}$  en cada medición. En la figura 5.4 se muestra el gráfico de las regiones elípticas mencionadas con un porcentaje de probabilidad de 99%, utilizando los mismo parámetros de la tabla 5.1. Se amplió una sección del gráfico para que se puedan observar mejor las regiones de confianza. Notar que la trayectoria real nunca queda fuera de las elipses graficadas en torno a las estimaciones.



**Fig. 5.4 Simulación regiones de confianza**

## Capítulo 6. Aplicación y resultados

---

### 6.1. Introducción

En este capítulo se muestra la forma en que fueron grabadas y procesadas las trayectorias y cómo se determinaron en la práctica los parámetros del filtro. Luego se entregan los resultados de la aplicación de los filtros a dichas trayectorias.

### 6.2. Receptor GPS y lectura de datos

El receptor GPS utilizado para grabar datos de posición consiste en una tablet Samsung Galaxy Tab 3, equipada con un sensor A-GPS (con soporte GLONASS). Se eligió este dispositivo por su versatilidad y porque es fácil transmitir sus datos a un computador, a diferencia de un GPS industrial. La aplicación GPSLogger (disponible en PlayStore) almacena los datos de posición generados por el sensor GPS y los guarda en un archivo de extensión KML, los cuales se leen luego utilizando MATLAB para su posterior procesamiento. Los datos están inicialmente en coordenadas geográficas (latitud/longitud/altura), las cuales deben ser convertidas a coordenadas cartesianas, pues su unidad de medida no es la distancia. Se comprueba empíricamente que la aplicación es capaz de entregar datos estrictamente periódicos cada 7 segundos como mínimo, por lo que el intervalo de muestreo para las mediciones realizadas es de 7 segundos.

### 6.3. Trayectorias grabadas

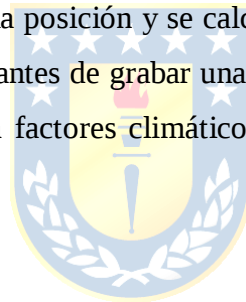
Se grabaron varias trayectorias, de las cuales se seleccionaron las dos más representativas para su análisis en este trabajo. La primera es una trayectoria recta partiendo desde el arco de la Universidad de Concepción hasta la biblioteca. La trayectoria se hizo recta para así poder comprobar si las mediciones corresponden a la trayectoria real o no. Para poder hacer un análisis más exhaustivo del ruido asociado al sistema, se grabó esta misma trayectoria 5 veces más. Además de esto se grabó otra trayectoria con secciones curvas en el sector Las Monjas de lomas de San Andrés en Concepción, con el objetivo de observar el comportamiento del filtro durante las curvas. Estas grabaciones se realizaron durante días nublados para acrecentar la imprecisión en las mediciones y así poder observar mejor la acción correctora del filtro.

## 6.4. Determinación de los parámetros del filtro

Tal como se comentó en el capítulo 4, el algoritmo del filtro de Kalman necesita algunos parámetros iniciales, los cuales son 4: el vector inicial de variables de estado estimadas  $\hat{\mathbf{x}}_0^-$ , la matriz de covarianzas del error inicial  $\mathbf{P}_0^-$ , la matriz de covarianzas del ruido del sistema  $\mathbf{Q}$  y la matriz de covarianzas del ruido en la medición  $\mathbf{R}$ . El valor de los primeros dos parámetros es poco relevante debido a que el algoritmo los hace converger rápidamente a un valor adecuado. Por lo general basta con elegir  $\hat{\mathbf{x}}_0^- = \mathbf{z}_0$  y  $|\mathbf{P}_0^-| \gg 0$  para obtener buenos resultados. Por otro lado,  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  son más difíciles de determinar, especialmente  $\mathbf{Q}$  por corresponder a las varianzas de un ruido que es inherente al sistema. A continuación se explica como se determinaron dichos parámetros.

### 6.4.1 Determinación de $\mathbf{R}$

Para poder determinar la varianzas del error en las mediciones de forma precisa, se debe tener el instrumento disponible para poder realizar el siguiente experimento: dejar el receptor GPS en un lugar fijo y grabar tantas mediciones como se pueda. Luego estas mediciones se procesan, se asume que la media es el valor real de la posición y se calcula la varianza en torno a esa media. Lo ideal es que este proceso se haga poco antes de grabar una trayectoria, pues el error en la medición puede variar de un día a otro debido a factores climáticos o disponibilidad de los satélites, entre otros factores.



### 6.4.2 Determinación de $\mathbf{Q}$

Como se explicó en la revisión bibliográfica, la determinación de este parámetro es la tarea más difícil de todas cuando se quiere sintonizar un filtro de Kalman. En este trabajo se utiliza el método descrito en [12]. Este método consiste en realizar el filtrado de un set de datos con varios valores diferentes de  $\mathbf{Q}$ , el cual se hace variar de menor a mayor en torno a un  $\mathbf{Q}$  nominal, y luego calcular en función de los resultados, dos parámetros auxiliares llamados J1 y J2. Estos parámetros tienen un comportamiento característico: para valores bajos de la traza de  $\mathbf{Q}$ , J1 parte desde un valor igual o menor al número total de variables de estado medibles, luego en un punto dado baja abruptamente y termina estabilizándose en 0. Por el contrario, J2 parte desde 0 para valores bajos de la traza de  $\mathbf{Q}$ , luego en cierto punto cercano al punto en que J1 desciende, J2 asciende y se cruza con J1, estabilizándose en un valor igual o menor al número de variables de estado medibles. Para mayor información sobre como se calculan J1 y J2 referirse a [12]. Dicho paper indica que la zona en la cual se minimiza el error corresponde al valor de  $\mathbf{Q}$  en el cual J1 empieza a bajar y J2 empieza a

subir. Para clarificar el método expuesto, se muestra a continuación cómo se realizó la elección de  $Q$  para el trayecto realizado dentro de la Universidad:

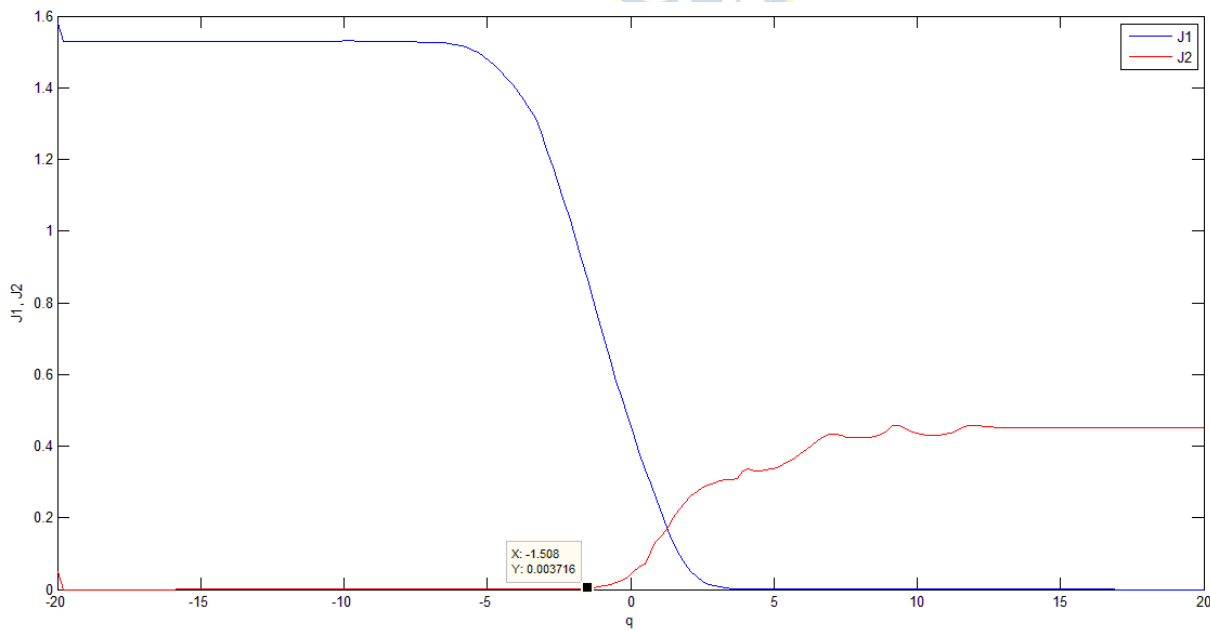
El valor de  $Q$  nominal escogido es el encontrado en la publicación [13]. A pesar de que las condiciones no son las mismas, el valor relativo de la varianza de cada variable de estado respecto de otra debería ser similar, y eso es lo más importante. Este  $Q$  nominal se hizo variar multiplicándolo por  $10^q$ , con  $q$  variando de -20 a 20. Por lo tanto el valor de  $Q$  utilizado para cada experimento queda definido de la siguiente manera:

$$Q_{nom} = diag([0.23 \ 0.26 \ 0.01 \ 1.05]) \quad (6.4.1)$$

$$Q = 10^q Q_{nom} \quad , \quad -20 \leq q \leq 20 \quad (6.4.2)$$

El gráfico de  $J1$  y  $J2$  en función de  $q$ , con su correspondiente elección se puede observar en la figura 6.1. Tal como muestra la figura, se elige un  $q$  de -1.5 aunque cabe mencionar que la elección del valor óptimo no es exacta, pues en [12] se dice que sólo se puede asegurar que el óptimo está dentro de la zona de cruce entre  $J1$  y  $J2$ . Finalmente, teniendo  $Q_{nom}$  y  $q$ , se puede calcular el valor de  $Q$  que será utilizado para filtrar los datos de la trayectoria dentro de la universidad:

$$Q = 10^q Q_{nom} = diag([0.0071 \ 0.0081 \ 0.0003 \ 0.0326]) \quad (6.4.3)$$



**Fig. 6.1 Determinación de  $q$  por medio de  $J1$  y  $J2$**

## 6.5. Resultados

A continuación se presentan los resultados de la aplicación de los filtros desarrollados en este trabajo a las 2 trayectorias mencionadas, con sus respectivos comentarios.

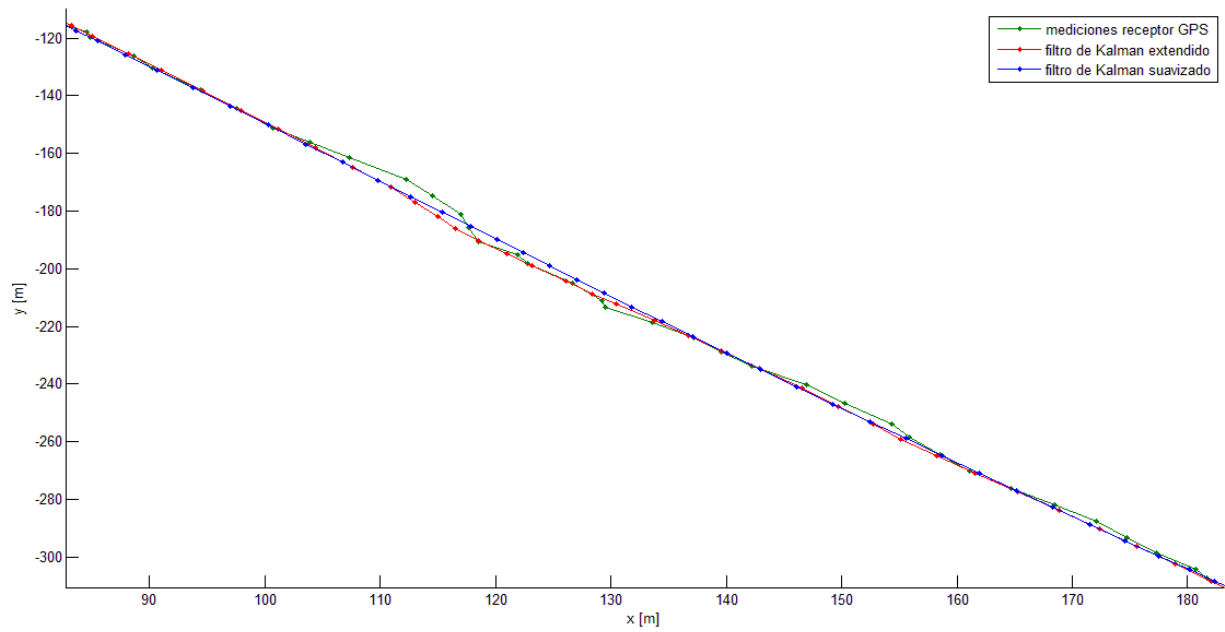
### 6.5.1 Trayectoria dentro de la universidad

Los parámetros determinados para la aplicación del filtro se pueden observar en la tabla 6.1. La comparación de las mediciones con el filtrado de Kalman extendido y el suavizado se pueden ver en la figura 6.2. Se ha ampliado una sección representativa y se ha centrado el primer dato en las coordenadas (0,0) para tener una mejor noción de las distancias en el gráfico. La figura 6.3 muestra nuevamente el filtro de Kalman suavizado, pero incluyendo además sus respectivas zonas de confianza para una probabilidad de un 95%.

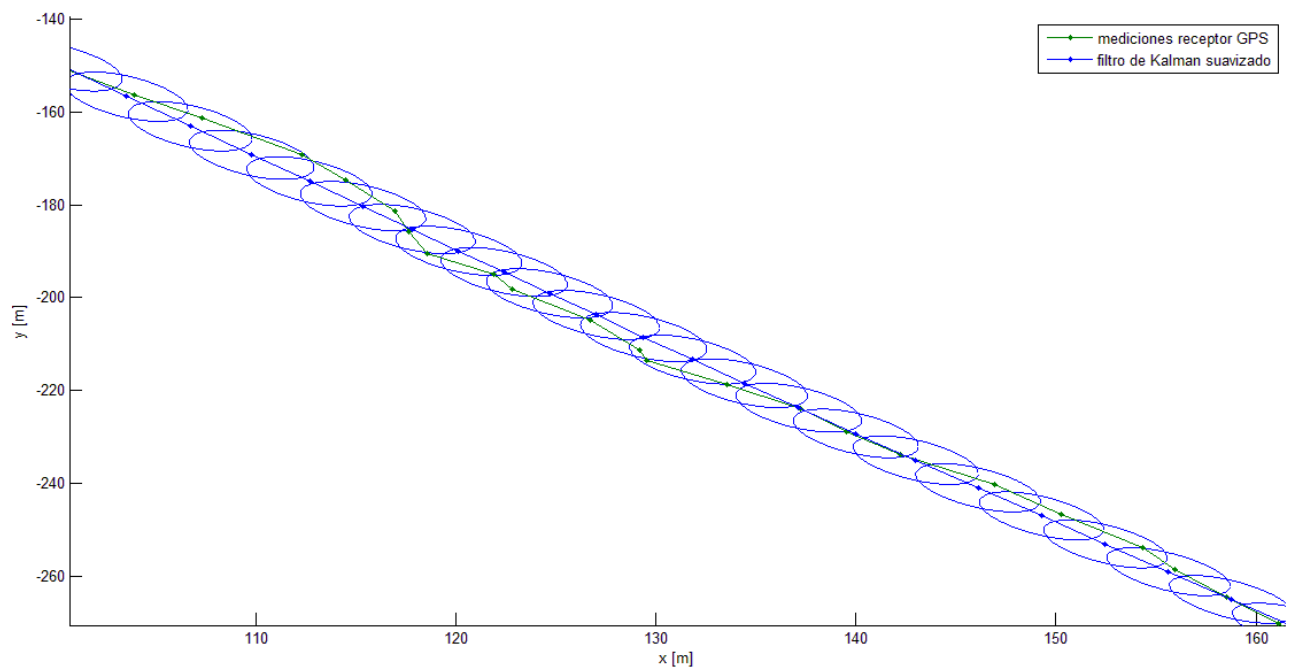
Para poder comprobar que estos datos están correctamente posicionados, se hace necesario ubicarlos en un mapa real. Por medio de Google Maps es posible importar un archivo de extensión KML y ubicarlo en el mapa. Esto puede observarse en la figura 6.4.

**TABLA 6.1 Parámetros filtro de Kalman extendido, trayectoria dentro de la universidad.**

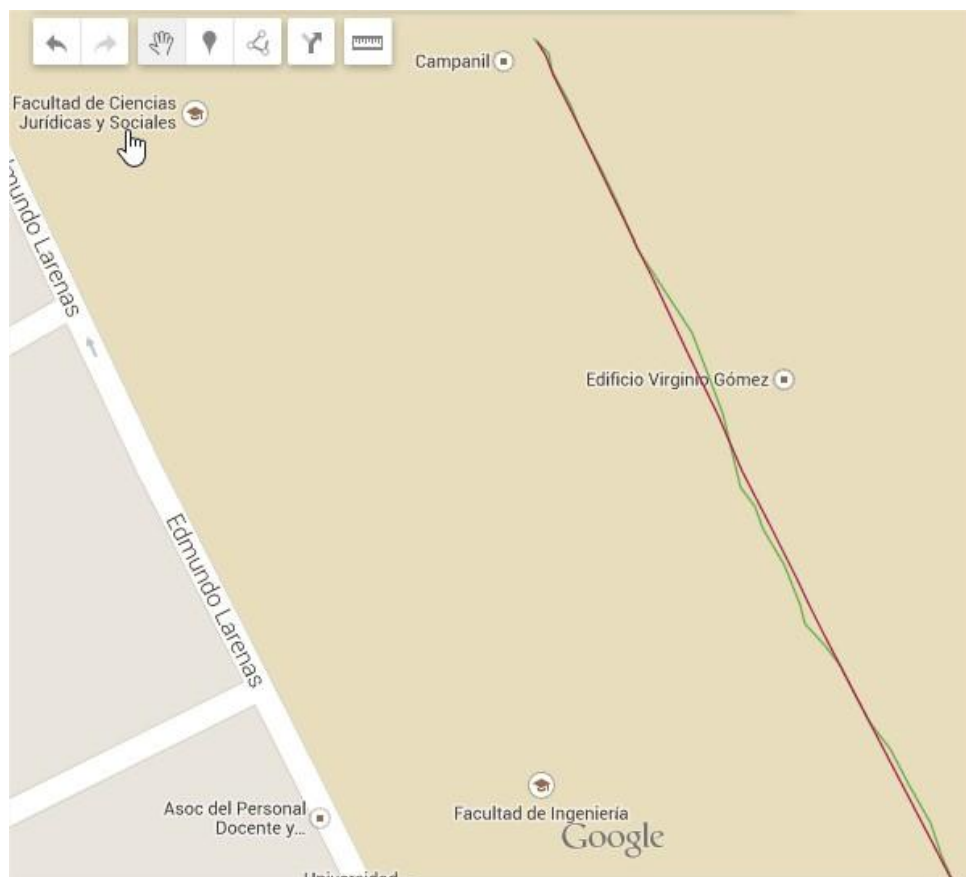
| Parámetro     | Valor                                                        |
|---------------|--------------------------------------------------------------|
| $\hat{x}_0^-$ | $[1.494 * 10^6 \quad -1.119 * 10^6 \quad 1.65\pi \quad 0]^T$ |
| $P_0^-$       | $250diag([1 \ 1 \ 1 \ 1])$                                   |
| $Q$           | $diag([0.0071 \ 0.0081 \ 0.0003 \ 0.0326])$                  |
| $R$           | $diag([16 \ 36])$                                            |



**Fig. 6.2 Filtro de Kalman extendido, trayectoria dentro de la universidad**



**Fig. 6.3 Filtro de Kalman suavizado con zonas de confianza, trayectoria dentro de la universidad.**



**Fig. 6.4 Mapa de trayectoria dentro de la universidad. En verde: mediciones del receptor GPS. En rojo: trayectoria corregida con filtro de Kalman suavizado.**

Respecto a la figura 6.2, se observa que el filtro logró mejorar la precisión en la posición, pues muestra una trayectoria similar a una línea recta. Se observa claramente que el filtro de Kalman suavizado logra una mejor precisión que el filtro de Kalman extendido. Comparando las varianzas de la matriz de covarianzas del error con las varianzas del ruido en las mediciones, se puede concluir que la precisión en términos de las varianzas aumento en un 93% en el eje x, y un 86% en el eje y.

Respecto a la figura 6.3, se observa que las regiones de confianza están dispuestas correctamente a lo largo de la trayectoria. Notar que las mediciones del receptor GPS se encuentran siempre dentro de las regiones de confianza, lo que no debería ser necesariamente cierto pues no corresponden a la trayectoria real. Esto, junto con el porcentaje elevado de mejora de la precisión, hacen pensar que el ruido en las mediciones no es más en realidad bajo de lo que se había calculado. Una explicación a esto puede ser el hecho de que el ruido es mayor cuando el receptor está detenido

a cuando está en movimiento, instancia en la cual se puede apoyar con algún otro recurso, como el giroscopio.

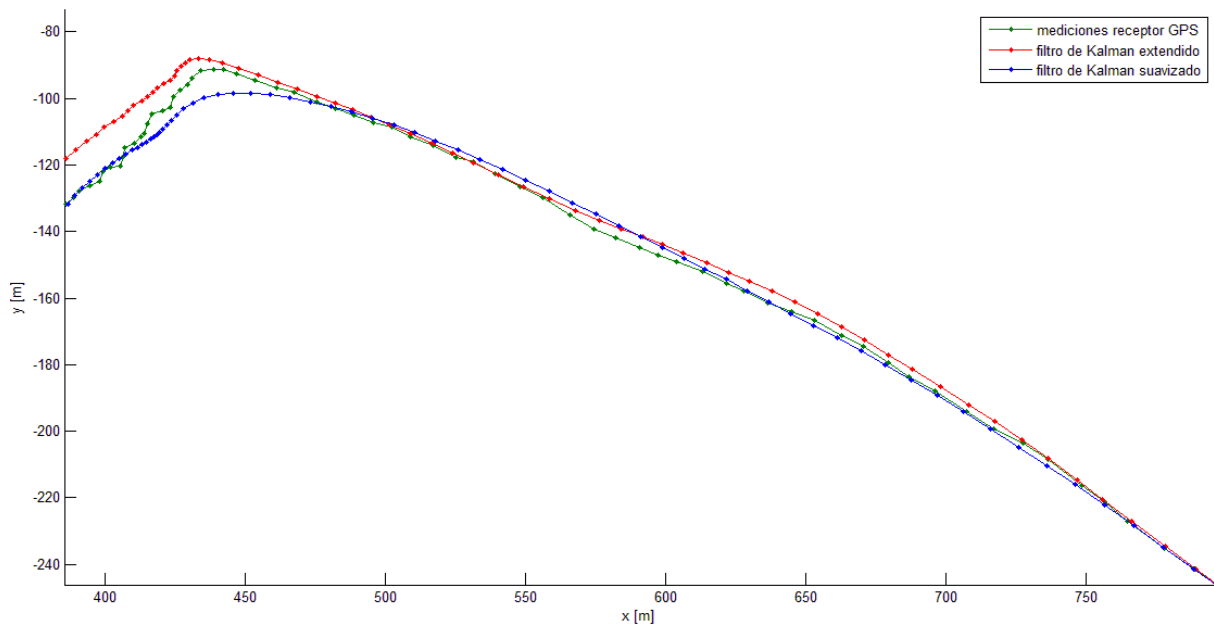
Respecto a la figura 6.4, se ve claramente que los datos están bien posicionados y que la corrección del filtro es claramente perceptible.

### 6.5.2 Trayectoria en sector Las monjas

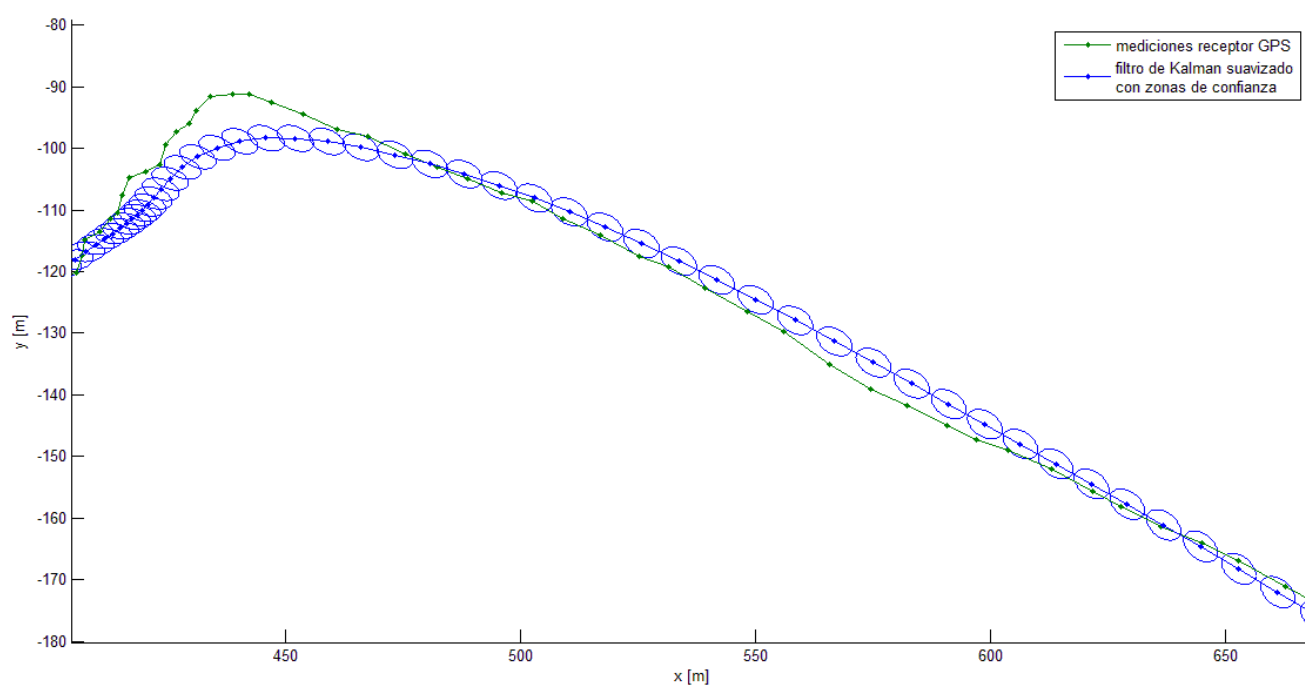
Se presentan los datos de forma totalmente análoga a la trayectoria anterior, sin embargo se enfocan los comentarios a cómo se adaptan los filtros a la curva.

**TABLA 6.2 Parámetros filtro de Kalman extendido, trayectoria sector las monjas.**

| Parámetro     | Valor                                                  |
|---------------|--------------------------------------------------------|
| $\hat{x}_0^-$ | $[1.4930 * 10^6 \quad -1.1165 \quad 0.3\pi \quad 0]^T$ |
| $P_0^-$       | $250 \text{diag}([1 \ 1 \ 1 \ 1])$                     |
| $Q$           | $\text{diag}([0.0028 \ 0.0032 \ 0.0001 \ 0.0129])$     |
| $R$           | $\text{diag}([17 \ 11])$                               |



**Fig. 6.5 Filtro de Kalman extendido, trayectoria sector las monjas.**



**Fig. 6.6 Filtro de Kalman suavizado con zonas de confianza, sector las monjas.**



**Fig. 6.7 Mapa de trayectoria sector las monjas. En verde: mediciones del receptor GPS. En rojo: trayectoria corregida con filtro de Kalman suavizado.**

Respecto a la figura 6.5, se observa que el filtro de Kalman suavizado logra adaptarse a la curva, mientras que el filtro de Kalman extendido se desvía demasiado. Esto, junto con las simulaciones, indican que el filtro suavizado podrá adaptarse moderadamente bien a las curvas mientras éstas no sean demasiado cerradas, pues en tal caso tiende a desviarse de la curva durante el transcurso de ésta. Comparando las varianzas de la matriz de covarianzas del error con las varianzas del ruido en las mediciones, se puede concluir que la precisión en términos de las varianzas aumentó en un 87% en el eje x, y un 89% en el eje y.

Respecto a la figura 6.6, se observa que esta vez las mediciones del receptor GPS se salen a momentos de la zona de confianza. Esto indica que las varianzas del ruido calculadas en este caso fueron más acertadas.

Respecto a la figura 6.7, se observa que los datos están correctamente situados en el mapa. Es posible afirmar que se ha realizado una corrección pues la trayectoria en la realidad fue hecha por el borde de la calle, y se observa que las mediciones a momentos entran a la calle o se alejan demasiado de ésta, mientras que la trayectoria corregida se mantiene siempre cerca del borde de la calle.



## Capítulo 7. Conclusiones

---

### 7.1. Sumario

Se ha realizado una investigación respecto al funcionamiento del GPS y respecto al filtro de Kalman, junto con sus versiones mejoradas. Luego se ha simulado su funcionamiento con un modelo del problema real, utilizando parámetros ficticios. Finalmente, se han grabado trayectorias mediante un receptor GPS y se ha aplicado el filtro de Kalman junto con sus versiones mejoradas a dichas trayectorias, y se han expuesto los resultados con sus respectivos comentarios.

### 7.2. Conclusiones

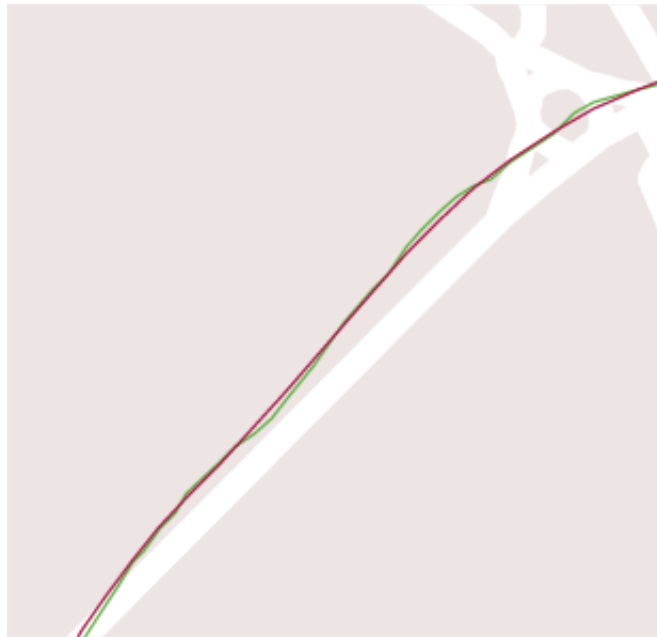
Se concluye que el mejor método para resolver el problema presentado en esta tesis es el filtro de Kalman suavizado. Tanto las simulaciones como la aplicación a trayectorias reales muestran que se logra disminuir considerablemente el error respecto a la trayectoria real, aproximadamente entre un 80% y un 90% para cada eje en términos de la disminución de la varianza. Dada la literatura investigada, se concluye que es posible determinar con suficiente grado de certeza los parámetros del ruido del sistema, lo cual era el mayor inconveniente de este filtro.

Respecto a las aplicaciones prácticas que pueda tener este filtro, cabe mencionar que desde que el filtro de Kalman se dio a conocer, las tecnologías de navegación satelital han avanzado mucho, por lo que la mayoría de las aplicaciones actualmente no necesitan filtrar los datos de posición pues son suficientemente precisos. Sin embargo, la utilización del filtro de Kalman aún se justifica debido principalmente a tres razones:

- Siempre será mucho más económico para empresas que tengan tecnologías antiguas de navegación satelital, utilizar un filtro para mejorar la precisión, que migrar a una tecnología más actual, lo que implicaría hacer un recambio de la mayoría del equipo.
- Existen aplicaciones en condiciones climáticas o geográficas adversas que degradan la precisión del GPS sin importar lo precisa que sea la tecnología.
- Siempre irán apareciendo aplicaciones más complejas que requieran niveles más altos de precisión para trayectorias, y el filtro de Kalman tiene siempre el potencial de mejorar la precisión sin importar lo buena que sea.

### 7.3. Trabajo Futuro

En el presente trabajo se ha asumido que la varianza del ruido en las mediciones y el sistema se mantiene constante. En la práctica esto no es siempre cierto: como se mencionó antes, se debió calcular la varianza del ruido cada vez que se grababa una trayectoria, pues ésta cambiaba de un día a otro debido a diversos factores. Además de esto, por algún motivo y de vez en cuando, el error en la medición de la trayectoria aumentaba drásticamente y la trayectoria perdía sentido. El filtro propuesto en este trabajo no es capaz de reaccionar a estos cambios en la varianza y sigue asumiendo que no ha cambiado, desviándose también de la trayectoria real. Un ejemplo de esto se puede ver en la figura 7.1, en la cual la trayectoria real nunca se apartó del borde de la calle, mientras que las mediciones se alejaron considerablemente de la realidad, junto con la trayectoria filtrada.



**Fig. 7.1. Ejemplo de aumento del error en la medición, en las monjas. En verde: mediciones del receptor GPS. En rojo: trayectoria corregida con filtro de Kalman suavizado.**

En un trabajo futuro se puede dar un paso más, quitando esta asunción y generalizar este algoritmo para que sea capaz de determinar automáticamente las varianzas de los ruidos, es decir  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$ , en cada paso. Un algoritmo de estas características es llamado filtro de Kalman adaptativo. Existen publicaciones que proponen modelos de filtros adaptativos, pero son complejos, implican mucha carga computacional y sólo funcionan bajo condiciones específicas.

## Bibliografía

- [1] "Global Positioning System" vols. I,II y III, Washington, D.C.: The Institute of Navigation, 1980-1986.
- [2] B. W. Parkinson and S. W. Gilbert. "NAVSTAR: Global Positioning System-Ten Years Later," in *Proceedings of the IEEE*. vol. 71, no. 10, pp. 1177-1186, Oct. 1983.
- [3] "Understanding GPS: Principles and Applications" Elliott D. Kaplan. Boston: Artech House Publishers, 1996.
- [4] "Probability, Random Variables and Stochastic Processes" A. Papoulis and S Unnikrishna Pillai. McGraw-Hill, 2002.
- [5] "Introduction to Random Signals and Noise" Wim C. Van Etten. John Wiley & Sons, 2005.
- [6] "Hand-book on statistical distributions for experimentalists" Christian Walck. University of Stockholm: Particle Physics Group, 2007.
- [7] R. E. Kalman. "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems" in *Transactions of the ASME–Journal of Basic Engineering*. vol 82, pp. 35-45, Mar. 1960.
- [8] "Introduction to random signals and applied Kalman filtering" R. G. Brown and P. Y.C. Hwang. John Wiley & Sons, 1992.
- [9] "Kalman Filtering with Real-Time Applications" C. K. Chui and G. Chen. Springer, 2009.
- [10] R. K. Mehra. "On the Identification of Variances and Adaptive Kalman Filtering" in *IEEE Transactions on Automatic Control*. vol. 15, no. 2, Apr. 1970.
- [11] B. J. Odelson, A. Lutz and J. B. Rawlings. "A new autocovariance least-squares method for estimating noise covariances" in *IEEE Transactions on Control Systems*. vol. 14, no. 3, May 2006.
- [12] M. Saha, B. Goswami and R. Ghosh. "Two novel costs for determining the tuning parameters of the Kalman Filter" in *Conf. Proceedings of Advances in Control and Optimization of Dynamic Systems*, Bangalore, India, Feb. 2013.

- [13] J. Gomez, R. Ruiz, S. Alonso, F. Gomez. "A Kalman Filter Implementation for Precision Improvement in Low-Cost GPS Positioning of Tractors" in *Sensors*, vol. 13, no. 11, Nov. 2013.
- [14] O. Maklouf, A. Ghila, A. Abdulla and A. Yousef. "Low Cost IMU \ GPS Integration Using Kalman Filtering for Land Vehicle Navigation Application" in *International Journal of Electrical, Robotics, Electronics and Communications Engineering*, vol. 7, no. 2, Sep. 2013.
- [15] H. Qi and J. B. Moore. "Direct Kalman Filtering of GPS/INS for Aerospace Applications" in *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 38, no. 2, Apr. 2002.
- [16] Z. Ghahramani and G.E. Hinton. "Parameter estimation for linear dynamical systems" Technical Report CRG-TR-96-2, University of Toronto, 1996.



## Anexo A. Deducción del Filtro de Kalman

---

Se procede a realizar una deducción del filtro de Kalman con el fin de esclarecer y explicar cómo se dedujo el algoritmo presentado en el capítulo 4 de este trabajo. Se considera pertinente su explicación, pues este algoritmo es el elemento fundamental de este trabajo.

### A.1. Planteamiento del problema

El objetivo del algoritmo del filtro de Kalman es minimizar el error entre las variables de estado estimadas y las reales, teniendo como datos iniciales  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  y  $\mathbf{P}_k^-$ . La propuesta de Kalman para actualizar la estimación en cada paso es sumar el error entre las mediciones reales y las estimadas, ponderado por una ganancia  $\mathbf{K}_k$  llamada ganancia de Kalman, la cual debe ser estadísticamente óptima. Se recuerdan las ecuaciones que modelan las variables de estado y las mediciones para tenerlas presentes durante la deducción:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad (A.1.1)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (A.1.2)$$

Teniendo en cuenta esto, el algoritmo debería tener la siguiente estructura:

#### 1) Calcular la ganancia de Kalman

$$\mathbf{K}_k = f_1(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{P}_k^-) \quad (A.1.3)$$

#### 2) Mejorar la estimación por medio de la medición $\mathbf{z}_k$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k) = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (A.1.4)$$

#### 3) Calcular la matriz de covarianzas asociada a la estimación mejorada

$$\mathbf{P}_k = f_2(\mathbf{P}_k^-, \mathbf{K}_k) \quad (A.1.5)$$

#### 4) Proyectar un paso hacia adelante los valores de $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ y $\mathbf{P}_k^-$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \mathbf{f}_3(\hat{\mathbf{x}}_k) \quad (\text{A.1.6})$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = \mathbf{f}_4(\mathbf{P}_k) \quad (\text{A.1.7})$$

### A.2. Deducción de $\mathbf{f}_1$ , ganancia de Kalman

Para encontrar la ecuación  $\mathbf{f}_1$  que exprese un  $\mathbf{K}_k$  óptimo se utiliza la estrategia de los mínimos cuadrados. Con el fin de expresar  $\mathbf{P}_k$  en función de  $\mathbf{P}_k^-$  se expresa primero la matriz de covarianzas del error de estimación de la siguiente manera:

$$\mathbf{P}_k = E(\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T) = E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T] \quad (\text{A.2.1})$$

Es importante recordar que  $\mathbf{P}_k$  también puede expresarse como:

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} \sigma_{e_1}^2 & cov(e_1, e_2) & cov(e_1, e_i) & \dots \\ cov(e_2, e_1) & \sigma_{e_2}^2 & cov(e_2, e_i) & \dots \\ cov(e_i, e_1) & cov(e_i, e_2) & \sigma_{e_i}^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.2})$$

Puesto que:  $cov(e_i, e_j) = cov(e_j, e_i) \quad ; j, i = 1, 2, \dots, n$

se puede afirmar que  $\mathbf{P}_k$  es simétrica, y debido a su estructura, también es definida positiva.

Continuando con el desarrollo, se sustituye (A.1.2) en (A.1.4), luego se substituye la expresión resultante en (A.2.1), dando como resultado:

$$\mathbf{P}_k = E\{[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) - \mathbf{K}_k(\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-)][(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) - \mathbf{K}_k(\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-)]^T\} \quad (\text{A.2.3})$$

Factorizando esta expresión, notando que  $(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) = \mathbf{e}_k^-$  y luego desarrollando, se tiene lo siguiente:

$$\mathbf{P}_k = E\{[\mathbf{e}_k^- - \mathbf{K}_k(\mathbf{H}_k(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) + \mathbf{v}_k)][\mathbf{e}_k^- - \mathbf{K}_k(\mathbf{H}_k(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) + \mathbf{v}_k)]^T\} =$$

$$\begin{aligned}
E\{[e_k^- - K_k H_k e_k^- + K_k v_k][e_k^- - K_k H_k e_k^- + K_k v_k]^T\} = \\
E\{[(I - K_k H_k)e_k^- + K_k v_k][e_k^{-T}(I - K_k H_k)^T + v_k^T K_k^T]\} = \\
E\{(I - K_k H_k)e_k^- e_k^{-T}(I - K_k H_k)^T + (I - K_k H_k)e_k^- v_k^T K_k^T + K_k v_k e_k^{-T}(I - K_k H_k)^T + K_k v_k v_k^T K_k^T\}
\end{aligned}$$

Ahora, desarrollando las esperanzas de cada término, y notando que las esperanzas del segundo y tercer término son nulas debido a que  $e_k^-$  y  $v_k$  son ortogonales al no estar correlacionadas, se obtiene la siguiente expresión:

$$P_k = (I - K_k H_k)P_k^-(I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T \quad (A.2.4)$$

Volviendo al problema de optimización, se busca cierto  $K_k$  que minimice los valores de la diagonal de  $P_k$ , pues estos términos representan las varianzas de la estimación del error. Para lograr esto se procede a derivar la traza de  $P_k$  con respecto a  $K_k$  y luego igualarla a 0 para despejar  $K_k$ . Al encontrar la traza mínima se está minimizando la suma de las varianzas de los errores, lo que es equivalente a minimizar cada varianza por separado. Conforme a lo anterior, se reordena la ecuación (A.2.4) de la siguiente forma:

$$P_k = P_k^- - K_k H_k P_k^- - P_k^- H_k^T K_k^T + K_k (H_k P_k^- H_k^T + R) K_k^T \quad (A.2.5)$$

Luego se realiza la derivación mencionada:

$$\frac{d(\text{traza}(P))}{dK} = -2(H_k P_k^-)^T + 2K_k (H_k P_k^- H_k^T + R) \quad (A.2.6)$$

Luego, igualando a 0 y despejando  $K_k$  se obtiene finalmente la ganancia óptima:

$$K_k \text{ Óptimo} = f_1(P_k^-) = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} \quad (A.2.7)$$

### A.3. Deducción de $f_2$ , $f_3$ y $f_4$

Para encontrar la expresión  $f_2$  que relaciona la matriz de covarianzas actualizada con la antigua y la ganancia de Kalman, se reemplaza la ganancia arbitraria de la ecuación (A.2.4) por la expresión de ganancia óptima encontrada en (A.2.7), resultando lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T = \\ &= \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- - \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T \mathbf{K}_k^T + \mathbf{K}_k (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k) \mathbf{K}_k^T \end{aligned} \quad (\text{A.3.1})$$

Realizando varias factorizaciones y sustituciones convenientes se llega a la expresión más simplificada para  $\mathbf{P}_k$ , como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k &= \mathbf{P}_k^- - \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k) \mathbf{K}_k^T \Rightarrow \\ \mathbf{P}_k &= f_2(\mathbf{P}_k^-, \mathbf{K}_k) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- \end{aligned} \quad (\text{A.3.2})$$

Finalmente, se necesita una forma de proyectar la estimación de los estados y la matriz de covarianzas al siguiente paso. Para estimar el próximo estado, simplemente se utiliza la ecuación (A.1.1) reemplazando los estados reales por los estimados e ignorando  $\mathbf{w}_k$  debido a que tiene media 0. Por lo tanto se tiene lo siguiente:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = f_3(\hat{\mathbf{x}}_k) = \Phi_k \hat{\mathbf{x}}_k^- \quad (\text{A.3.3})$$

Para encontrar la matriz de covarianzas asociada a  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-$  se expresa primero el error de estimación  $\mathbf{e}_{k+1}^-$  de la siguiente forma:

$$\mathbf{e}_{k+1}^- = \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = (\Phi_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k) - \Phi_k \hat{\mathbf{x}}_k^- = \Phi_k \mathbf{e}_k + \mathbf{w}_k \quad (\text{A.3.4})$$

Luego se calcula  $\mathbf{P}_{k+1}^-$  en función de (A.3.4) como se ve a continuación:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1}^- &= E(\mathbf{e}_{k+1}^- \mathbf{e}_{k+1}^{-T}) = E[(\Phi_k \mathbf{e}_k + \mathbf{w}_k)(\Phi_k \mathbf{e}_k + \mathbf{w}_k)^T] = \\ &= E(\Phi_k \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T \Phi_k^T + \Phi_k \mathbf{e}_k \mathbf{w}_k^T + \mathbf{w}_k \mathbf{e}_k^T \Phi_k^T + \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T) \end{aligned} \quad (\text{A.3.5})$$

Ahora, desarrollando las esperanzas de cada término, y notando que las esperanzas del segundo y tercer término son nulas debido a que  $\mathbf{e}_k^-$  y  $\mathbf{w}_k$  son ortogonales al no estar correlacionadas, se obtiene finalmente la siguiente expresión:

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = f_4(\mathbf{P}_k) = \mathbf{\Phi}_k \mathbf{P}_k \mathbf{\Phi}_k^T + \mathbf{Q}_k \quad (\text{A.3.6})$$

Con esto la deducción del algoritmo está completa y éste puede iterar con las ecuaciones expuestas infinitamente.



## Anexo B. Códigos MATLAB

---

En este anexo se presentan los códigos utilizados a lo largo del trabajo. Se dividen en tres archivos diferentes: el primero corresponde a la simulación del filtro de Kalman con señales de ruido y parámetros ficticios, el segundo corresponde a la determinación de la matriz de covarianzas del ruido del sistema  $\mathbf{Q}$ , y el tercero corresponde al procesamiento de datos reales desde un archivo de extensión KML, su posterior filtrado y su reconversión a un nuevo archivo KML corregido.

### B.1. Simulación filtro de Kalman

```
%clear all
hold on
figure(1)
%% PARAMETROS GENERALES
largo=400;
k=1:largo;
deltaT=1;
%% RUIDOS
% w
var_w=0.01*[1 2 0.1 3];
ruido_w=randn(4,largo);
w=zeros(4,largo);
for j=1:4
w(j,:)=sqrt(var_w(j))*ruido_w(j,:);
end
Q=diag([var(w(1,:)) var(w(2,:)) var(w(3,:)) var(w(4,:))]);
% v
var_v=[200 400];
ruido_v=randn(2,largo);
v=zeros(2,largo);
for j=1:2
v(j,:)=sqrt(var_v(j))*ruido_v(j,:);
end
R=diag([200 400]); %5.6e-10 y 3.9e-10
%% PARAMETROS MODELO
X=zeros(4,largo);
Z=zeros(2,largo);
X_pri=zeros(4,largo);
X_pos=zeros(4,largo);
X_lin=zeros(4,largo);
traza=zeros(1,largo);
P_pri=zeros(4,4,largo);
P_pos=zeros(4,4,largo);
P_sm=zeros(4,4,largo);
H=eye(2,4);
%% PARAMETROS AREA CONFIANZA
ang=0:0.01:2*pi;
prob=0.95;
r=sqrt(-2*log(1-prob));
%% CONDICIONES INICIALES
km_h=60;
```

```

km_h_pos=60;
X(:,1)=[0; 0; pi/8; km_h*(1000/3600)];
X_pri(:,1)=[0; 0; 0; 0];
X_lin(:,1)=[0; 0; pi/8; km_h*(1000/3600)];
dir_pri=X(3,1);
F(:,:,1)=[0 0 -deltaT*X_lin(4,1)*sin(X_lin(3,1)) deltaT*cos(X_lin(3,1))
           0 0 deltaT*X_lin(4,1)*cos(X_lin(3,1)) deltaT*sin(X_lin(3,1))
           0 0 0 0
           0 0 0 0];
P_pri(:,:,1)=eye(4)*0.25e+3;
K=10*ones(4);
Q_est=Q;
traza=zeros(largo);
traza_sm=zeros(largo);
%% ALGORITMO FILTRO
for i=1:largo
    %proceso
    X_lin(:,i+1)=[X_lin(1,i)+X_lin(4,i)*cos(X_lin(3,i))*(deltaT) ;
                  X_lin(2,i)+X_lin(4,i)*sin(X_lin(3,i))*(deltaT) ; X_lin(3,i) ;
                  X_lin(4,i)]+w(:,i);
    Z(:,i)=X_lin(1:2,i)+v(:,i);
    %correccion
    K=(P_pri(:,:,i)*H')/(H*P_pri(:,:,i)*H'+R);
    X_pos(:,i)=X_pri(:,i)+K*(Z(:,i)-H*X_pri(:,i));
    P_pos(:,:,i)=(eye(4)-K*H)*P_pri(:,:,i);
    traza(i)=trace(P_pos(:,:,i));
    %actualizacion
    X_pri(:,i+1)=[X_pos(1,i)+X_pos(4,i)*cos(X_pos(3,i))*(deltaT) ;
                  X_pos(2,i)+X_pos(4,i)*sin(X_pos(3,i))*(deltaT) ; X_pos(3,i) ; X_pos(4,i)];
    F(:,:,i+1)=[1 0 -deltaT*X_pos(4,i)*sin(X_pos(3,i)) deltaT*cos(X_pos(3,i))
                0 1 deltaT*X_pos(4,i)*cos(X_pos(3,i)) -deltaT*sin(X_pos(3,i))
                0 0 1 0
                0 0 0 1];
    P_pri(:,:,i+1)=F(:,:,i)*P_pos(:,:,i)*F(:,:,i)'+Q_est;
    %AREA CONFIANZA EKF
    var_err=[P_pos(1,1,i) P_pos(2,2,i)];
    p=P_pos(1,2,i)/sqrt(var_err(1)*var_err(2));
    x=r*sqrt(var_err(1)).*cos(ang)+X_pos(1,i);
    y=r*sqrt(var_err(2)).*(p*cos(ang)+sqrt(1-p^2)*sin(ang))+X_pos(2,i);
    %plot(x,y,'r')
end
%% SUAVIZADO
X_sm(:,largo)=X_pos(:,largo);
P_sm(:,:,largo)=P_pos(:,:,largo);
for i=(largo-1):-1:1
    J=(P_pos(:,:,i)*F(:,:,i))/(P_pri(:,:,i+1));
    P_sm(:,:,i)=P_pos(:,:,i)+J*(P_sm(:,:,i+1)-P_pri(:,:,i+1))*J';
    X_sm(:,i)=X_pos(:,i)+J*(X_sm(:,i+1)-X_pri(:,i+1));
    traza_sm(i)=trace(P_sm(:,:,i));
    % AREA CONFIANZA SUAVIZADO
    var_err=[P_sm(1,1,i) P_sm(2,2,i)];
    p=P_sm(1,2,i)/sqrt(var_err(1)*var_err(2));
    x=r*sqrt(var_err(1)).*cos(ang)+X_sm(1,i);
    y=r*sqrt(var_err(2)).*(p*cos(ang)+sqrt(1-p^2)*sin(ang))+X_sm(2,i);
    plot(x,y,'blue')
end
%% GRAFICOS
X_sm(1,1)=0;

```

```

X_sm(2,1)=0;
p1=plot(X_lin(1,:),X_lin(2,:), 'black')
p2=plot(X_pos(1,:),X_pos(2,:), 'r.', X_sm(1,:),X_sm(2,:), 'blue.')
legend([p1;p2], 'trayectoria real', 'filtro Kalman ext.', 'filtro Kalman suav.')
figure(2)
p3=plot(k(1:399),traza(1:399), 'red', k(1:399),traza_sm(1:399), 'blue')
legend(p3, 'filtro de Kalman extendido', 'filtro de Kalman suavizado');
X_lin=X_lin(:,1:largo);
Z=Z(:,1:largo);
err_opt_x=sqrt(sum((X_pos(1,:)-X_lin(1,:)).^2)/largo)
err_opt_y=sqrt(sum((X_pos(2,:)-X_lin(2,:)).^2)/largo)
err_opt_x_sm=sqrt(sum((X_sm(1,:)-X_lin(1,:)).^2)/largo)
err_opt_y_sm=sqrt(sum((X_sm(2,:)-X_lin(2,:)).^2)/largo)

```

## B.2. Determinación de Q

```

%% LEER KML
clear all
clc
text_in=fileread('C:\Users\Francesco\UdeC\Memoria_de_Titulo\Datos_my_tracks\camino_rectoX6_udec.kml');
text_backup=text_in;
pos=strfind(text_in, '<gx:coord>');
pos_end=zeros(1,length(pos));
lat_text=char(zeros(length(pos),18));
lon_text=char(zeros(length(pos),18));
height=char(zeros(length(pos),18));
fin=0;
i=0;
k1=1;
k2=1;
k3=1;
for n=1:length(pos)
    while(fin<3)
        if((text_in(pos(n)+10+i)==' ') || (text_in(pos(n)+10+i)=='<'))
            fin=fin+1;
        else
            if(fin==0)
                lat_text(n,k1)=text_in(pos(n)+10+i);
                k1=k1+1;
            elseif(fin==1)
                lon_text(n,k2)=text_in(pos(n)+10+i);
                k2=k2+1;
            elseif(fin==2)
                pos_end(n)=pos(n)+10+i;
                height(n,k3)=text_in(pos(n)+10+i);
                k3=k3+1;
            end
        end
        i=i+1;
    end
    k1=1;
    k2=1;
    k3=1;
    i=0;
    fin=0;
end
end

```



```

lat=zeros(length(pos),1);
lon=zeros(length(pos),1);
hei=zeros(length(pos),1);
for i=1:length(pos)
    lat(i)=str2num(lat_text(i,:));
    lon(i)=str2num(lon_text(i,:));
    hei(i)=str2num(height(i,:));
end
%% TRANSFORMAR A CARTESIANAS
lat=lat*pi/180;
lon=lon*pi/180;
a=6378137;
f=1/298.257223563;
e2=2*f-f^2;
v_trans=a./sqrt(1-e2*(sin(lat)).^2);
x_cart=v_trans.*cos(lat).*cos(lon);
y_cart=v_trans.*cos(lat).*sin(lon);
%RECORTE DE DATOS
ini_d=250;
end_d=length(x_cart);
x_cart=x_cart(ini_d:end_d);
y_cart=y_cart(ini_d:end_d);
%% PARAMETROS GENERALES
largo=length(x_cart);
k=1:largo;
deltaT=7;
%% RUIDOS
% v
R=diag([16 36]);
%% PARAMETROS MODELO
Z=zeros(2,largo);
Z(1,:)=x_cart;
Z(2,:)=y_cart;
X_pri=zeros(4,largo);
X_pos=zeros(4,largo);
j1=zeros(1,largo);
j2=zeros(1,largo);
traza=zeros(1,largo);
P_pri=eye(4);
P_pos=zeros(4);
H=eye(2,4);
%% CONDICIONES INICIALES
km_h=160;
km_h_pos=393;
X_pri(:,1)=[Z(1,1); Z(1,2); 0; 0];
P_pri(:, :, 1)=eye(4)*0.25e+3;
K=10*ones(4);
F=[0 0 -deltaT*X_pri(4,1)*sin(X_pri(3,1)) deltaT*cos(X_pri(3,1))
    0 0 deltaT*X_pri(4,1)*cos(X_pri(3,1)) deltaT*sin(X_pri(3,1))
    0 0 0 0
    0 0 0 0];
traza(1)=trace(P_pos);
%% PRUEBA PARA VARIOS Q_est
Q_nom=diag([0.23 0.26 0.01 1.05]);
n_pruebas=200;
J1=zeros(1,n_pruebas);
J2=zeros(1,n_pruebas);
NQ=zeros(1,n_pruebas);

```



```

aux=linspace(-20,20,n_pruebas);
for k=1:n_pruebas
Q_est=10^(aux(k))*Q_nom;
B=H*Q_est*H';
P_pos=eye(4)*1e+4;
A=H*F*P_pos*F'*H';
j1(1)=trace((A+B+R)\R);
j2(1)=trace((A+B)\B);
nq=log10(trace(B));
%% ALGORITMO FILTRO
for i=2:largo
%actualizacion
A=H*F*P_pos*F'*H';
X_pri(:,i)=[X_pos(1,i-1)+X_pos(4,i-1)*cos(X_pos(3,i-1))*(deltaT) ; X_pos(2,i-1)+X_pos(4,i-1)*sin(X_pos(3,i-1))*(deltaT) ; X_pos(3,i-1) ; X_pos(4,i-1)];
F=[1 0 -deltaT*X_pos(4,i-1)*sin(X_pos(3,i-1)) deltaT*cos(X_pos(3,i-1))
    0 1 deltaT*X_pos(4,i-1)*cos(X_pos(3,i-1)) deltaT*sin(X_pos(3,i-1))
    0 0 1 0
    0 0 0 1];
P_pri=F*P_pos*F'+Q_est;
%correccion
K=(P_pri*H')/(H*P_pri*H'+R);
X_pos(:,i)=X_pri(:,i)+K*(Z(:,i)-H*X_pri(:,i));
P_pos=(eye(4)-K*H)*P_pri;
traza(i)=trace(P_pos);
%Parametros estimacion Q
B=H*Q_est*H';
j1(i)=trace((A+B+R)\R);
j2(i)=trace((A+B)\B);
nq=nq+log10(trace(B));
end
%Parametros totales estimacion Q
J1(k)=sum(j1)/largo;
J2(k)=sum(j2)/largo;
NQ(k)=nq/largo;
end
kk=1:n_pruebas;
plot(aux,J1,'b',aux,J2,'r')

```



### B.3. Filtrado de datos reales

```

%% LEER KML
clear all
text_in=fileread('C:\Users\Francesco\UdeC\Memoria_de_Titulo\Datos_my_tracks\cami
no_rectoX6_udec.kml');
text_backup=text_in;
pos=strfind(text_in,'<gx:coord>');
pos_end=zeros(1,length(pos));
lat_text=char(zeros(length(pos),18));
lon_text=char(zeros(length(pos),18));
height=char(zeros(length(pos),18));
fin=0;
i=0;
k1=1;

```

```

k2=1;
k3=1;
for n=1:length(pos)
    while(fin<3)
        if((text_in(pos(n)+10+i)==' ') || (text_in(pos(n)+10+i)=='<'))
            fin=fin+1;
        else
            if(fin==0)
                lat_text(n,k1)=text_in(pos(n)+10+i);
                k1=k1+1;
            elseif(fin==1)
                lon_text(n,k2)=text_in(pos(n)+10+i);
                k2=k2+1;
            elseif(fin==2)
                pos_end(n)=pos(n)+10+i;
                height(n,k3)=text_in(pos(n)+10+i);
                k3=k3+1;
            end
        end
        i=i+1;
    end
    k1=1;
    k2=1;
    k3=1;
    i=0;
    fin=0;
end
lat=zeros(length(pos),1);
lon=zeros(length(pos),1);
hei=zeros(length(pos),1);
for i=1:length(pos)
    lat(i)=str2num(lat_text(i,:));
    lon(i)=str2num(lon_text(i,:));
    hei(i)=str2num(height(i,:));
end
%% TRANSFORMAR A CARTESIANAS
coords=lla2ecef([lat lon hei]);
x_cart=coords(:,1);
y_cart=coords(:,2);
%% PROCESAR
%% PARAMETROS GENERALES
largo=length(x_cart);
k=1:largo;
deltaT=7;
%% RUIDOS
% w
Q=(10^-1.5)*diag([0.23 0.26 0.01 1.05]);
% v
R=diag([16 36]);
%% PARAMETROS MODELO
Z=zeros(2,largo);
Z(1,:)=x_cart;
Z(2,:)=y_cart;
X_pri=zeros(4,largo);
X_pos=zeros(4,largo);
traza=zeros(1,largo);
P_pri=zeros(4,4,largo);
P_pos=zeros(4,4,largo);

```



```

P_sm=zeros(4,4,largo);
H=eye(2,4);
%% PARAMETROS AREA CONFIANZA
ang=0:0.01:2*pi;
prob=0.95;
r=sqrt(-2*log(1-prob));
%% CONDICIONES INICIALES
km_h=0;
X_pri(:,1)=[Z(1,1); Z(1,2); 1.65*pi; km_h*(1000/3600)];
P_pri(:,1)=eye(4)*0.25e+3;
Q_est=Q;
traza=zeros(largo);
traza_sm=zeros(largo);
%% ALGORITMO FILTRO
for i=1:largo
%correccion
K=(P_pri(:, :, i)*H')/(H*P_pri(:, :, i)*H'+R);
X_pos(:,i)=X_pri(:,i)+K*(Z(:,i)-H*X_pri(:,i));
P_pos(:, :, i)=(eye(4)-K*H)*P_pri(:, :, i);
traza(i)=trace(P_pos(:, :, i));
%actualizacion
X_pri(:,i+1)=[X_pos(1,i)+X_pos(4,i)*cos(X_pos(3,i))*(deltaT) ;
X_pos(2,i)+X_pos(4,i)*sin(X_pos(3,i))*(deltaT) ; X_pos(3,i) ; X_pos(4,i)];
F(:, :, i+1)=[1 0 -deltaT*X_pos(4,i)*sin(X_pos(3,i)) deltaT*cos(X_pos(3,i))
0 1 deltaT*X_pos(4,i)*cos(X_pos(3,i)) deltaT*sin(X_pos(3,i))
0 0 1 0
0 0 0 1];
P_pri(:, :, i+1)=F(:, :, i)*P_pos(:, :, i)*F(:, :, i)' + Q_est;
%%AREA CONFIANZA EKF
var_err=[P_pos(1,1,i) P_pos(2,2,i)];
p=P_pos(1,2,i)/sqrt(var_err(1)*var_err(2));
x=r*sqrt(var_err(1)).*cos(ang)+X_pos(1,i);
y=r*sqrt(var_err(2)).*(p*cos(ang)+sqrt(1-p^2)*sin(ang))+X_pos(2,i);
%plot(x,y,'r')
end
%% SUAVIZADO
hold on
figure(1)
%Para centrar primer punto en (0,0)
bias_x=-Z(1,1);
bias_y=-Z(2,1);
%TRAMO 1: 160 - 200
%TRAMO 2: 200 - 238
%TRAMO 3: 238 - 276
%TRAMO 4: 276 - 317
%TRAMO 5: 317 - 355
%TRAMO 6: 355 - 393
ini_p=200;
end_p=238;
X_sm(:,largo)=X_pos(:,largo);
P_sm(:, :, largo)=P_pos(:, :, largo);
for i=(largo-1):-1:1
J=(P_pos(:, :, i)*F(:, :, i)')/(P_pri(:, :, i+1));
P_sm(:, :, i)=P_pos(:, :, i)+J*(P_sm(:, :, i+1)-P_pri(:, :, i+1))*J';
X_sm(:,i)=X_pos(:,i)+J*(X_sm(:,i+1)-X_pri(:,i+1));
traza_sm(i)=trace(P_sm(:, :, i));
%% AREA CONFIANZA SUAVIZADO

```

```

var_err=[P_sm(1,1,i) P_sm(2,2,i)];
p=P_sm(1,2,i)/sqrt(var_err(1)*var_err(2));
x=r*sqrt(var_err(1)).*cos(ang)+X_sm(1,i);
y=r*sqrt(var_err(2)).*(p*cos(ang)+sqrt(1-p^2)*sin(ang))+X_sm(2,i);
x=x+bias_x;
y=y+bias_y;
if (i>=ini_p)&&(i<=end_p)
plot(x,y,'blue')
end
end
%% GRAFICOS
%CENTRAR TODAS LAS SEÑALES EN (0,0)
X_pos(1,:)=X_pos(1,:)+bias_x;
X_pos(2,:)=X_pos(2,:)+bias_y;
X_sm(1,:)=X_sm(1,:)+bias_x;
X_sm(2,:)=X_sm(2,:)+bias_y;
Z(1,:)=Z(1,:)+bias_x;
Z(2,:)=Z(2,:)+bias_y;
%graficar
p1=plot(Z(1,ini_p:end_p),Z(2,ini_p:end_p),'.-','Color',[0 .5 0])
p2=plot(X_pos(1,ini_p:end_p),X_pos(2,ini_p:end_p),'r.-'
',X_sm(1,ini_p:end_p),X_sm(2,ini_p:end_p),'b.-')
legend([p1;p2],'mediciones receptor GPS','filtro de Kalman extendido','filtro de
Kalman suavizado')
xlabel('x [m]')
ylabel('y [m]')
%% RECONVERTIR A COORDENADAS GEOGRAFICAS
new_geo_coords=ecef2lla([X_sm(1:2,:)' coords(:,3)]);
%% GENERAR KLM CORREGIDO
for n=1:length(pos)
    for j=(pos(n)+10):pos_end(n)
        text_in(j)='*';
    end
end
text_in(regexp(text_in,'[*]'))=[];
pos2=1;
aux=0;
dataC=1;
while 1
    pos2=strfind(text_in((aux+1):end),'<gx:coord>');
    if ~isempty(pos2)
        data_str=[num2str(new_geo_coords(dataC,1),18) ' '
num2str(new_geo_coords(dataC,2),18) ' ' num2str(new_geo_coords(dataC,3),18)];
text_in=strcat(text_in(1:(aux+pos2(1)+9)),data_str,text_in((pos2(1)+aux+10):end)
);
        aux=aux+pos2(1)+10;
        dataC=dataC+1;
    else
        break;
    end
end
%% RECORTAR ARCHIVO
text_file=text_backup;
for i=1:(ini_p-1)
    pos3_ini=strfind(text_file,'<when>');
    pos3_end=strfind(text_file,'</gx:coord>');
    text_file(pos3_ini(1):(pos3_end(1)+10))=[];
end

```



```

pos3_ini=0;
while ~isempty(pos3_ini)
    pos3_ini=strfind(text_file, '<when>');
    pos3_end=strfind(text_file, '</gx:coord>');
    if (end_p-ini_p+1)>length(pos3_ini)
        break;
    else
        text_file(pos3_ini(end_p-ini_p+1):(pos3_end(end_p-ini_p+1)+10))=[];
    end
end
text_backup=text_file;
text_file=text_in;
for i=1:(ini_p-1)
    pos3_ini=strfind(text_file, '<when>');
    pos3_end=strfind(text_file, '</gx:coord>');
    text_file(pos3_ini(1):(pos3_end(1)+10))=[];
end
while ~isempty(pos3_ini)
    pos3_ini=strfind(text_file, '<when>');
    pos3_end=strfind(text_file, '</gx:coord>');
    if (end_p-ini_p+1)>length(pos3_ini)
        break;
    else
        text_file(pos3_ini(end_p-ini_p+1):(pos3_end(end_p-ini_p+1)+10))=[];
    end
end
text_in=text_file;
%% GENERAR ARCHIVOS FINALES
new_file=fopen('C:\Users\Francesco\UdeC\Memoria_de_Titulo\Datos_my_tracks\new_kl
m_file_backup.kml','wt');
fprintf(new_file,text_backup);
ST=fclose(new_file);
new_file=fopen('C:\Users\Francesco\UdeC\Memoria_de_Titulo\Datos_my_tracks\new_kl
m_file_corrected.kml','wt');
fprintf(new_file,text_in);
ST=fclose(new_file);

```

