

**UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN**  
**FACULTAD DE EDUCACIÓN**  
**PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA Y COMPUTACIÓN**



**PROPUESTA METODOLÓGICA:**  
**EL DESARROLLO DE LA INTELIGENCIA ESPACIAL**  
**MEDIANTE EL USO DEL TANGRAMA EN LA UNIDAD DE**  
**TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS.**

SEMINARIO PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN.

**Profesor Guía:** Mg. Eduardo Mardones F.

**Seminaristas:** Luis Cifuentes Navarrete

Cristian Gavilán Gallardo

Paulo Vásquez Carrillo

Concepción, 2016



**UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN**  
**FACULTAD DE EDUCACIÓN**  
**PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA Y COMPUTACIÓN**



**PROPUESTA METODOLÓGICA:**  
**EL DESARROLLO DE LA INTELIGENCIA ESPACIAL**  
**MEDIANTE EL USO DEL TANGRAMA EN LA UNIDAD DE**  
**TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS.**

SEMINARIO PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN.

**Profesor Guía:** Mg. Eduardo Mardones F.

**Seminaristas:** Luis Cifuentes Navarrete

Cristian Gavilán Gallardo

Paulo Vásquez Carrillo

Concepción, 2016

## **AGRADECIMIENTOS.**

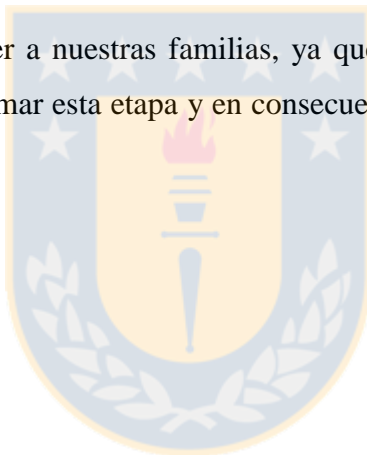
---

Nuestros más sinceros agradecimientos a todos los que han hecho posible este seminario.

En primera instancia, agradecer a Dios por la vida que nos concedió y por brindarnos las fuerzas para continuar ante las adversidades.

En segundo lugar, nos gustaría agradecer a los docentes de nuestra carrera por la formación pedagógica y disciplinaria que nos proporcionaron; muy en especial a nuestro profesor guía de seminario, profesor Eduardo Mardones F., por su esfuerzo y dedicación a lo largo de este proceso; pues sin sus acotaciones, conocimientos y correcciones no habiéramos logrado desarrollar esta propuesta.

Por último, agradecer a nuestras familias, ya que su cariño y apoyo incondicional fue fundamental para consumir esta etapa y en consecuencia nuestra formación personal y futuro profesional.



## RESUMEN.

---

El presente seminario tuvo como objetivo el diseño de una propuesta metodológica y didáctica para abordar la unidad de Transformaciones Isométricas, a fin de desarrollar la Inteligencia Espacial de los estudiantes a través de la utilización de Tangramas.

La característica principal de esta propuesta fue la creación de actividades basadas en la manipulación de dicho material didáctico concreto, para abordar la enseñanza y aprendizaje de la Unidad de Transformaciones Isométricas en Octavo año básico.

Para cumplir con tal propósito, el primer paso fue establecer las teorías a las cuales se adhiere esta propuesta y seleccionar el nivel académico sobre el que sería implementada. De todos los niveles en que se contempla la unidad de Transformaciones Isométricas, se seleccionó el que mejor se adecuara con la metodología de trabajo a emplear y los materiales a utilizar. Después, se definieron los aprendizajes que se buscaban lograr en los alumnos (Aprendizajes Esperados), para el alcance de los cuales se diseñaron y elaboraron las actividades y guías de trabajo que contiene la propuesta. Posteriormente se confeccionó una planificación de trayecto sobre la unidad, donde se estructuraron secuencialmente los aprendizajes esperados, los contenidos, las actividades creadas (con sus respectivas sugerencias y justificaciones), los materiales y la evaluación. Finalmente, se incluye fundamentación de la elección de cada uno de los tangramas y se plantean las orientaciones generales para una correcta ejecución de la propuesta.

De este modo, la propuesta realizada constituye un nuevo instrumento didáctico concreto, que aprovecha el potencial del tangrama como recurso didáctico y le atribuye una revalorización de la unidad de Transformaciones Isométricas. Pese a ello, queda pendiente la aplicación de esta propuesta, por lo cual se entregan algunos lineamientos que servirán de orientación para esto.

## **ABSTRACT.**

---

The current seminar had as objective the design of a methodological and didactical proposal to approach the isometric transformations unit, to develop spatial intelligence of students through the use of Tangrams

The main feature of this proposal was to create activities based on the manipulation of that particular teaching materials to address the teaching and learning of Isometric Transformations unit in basic eighth grade.

To fulfill this purpose, the first step was to establish the theories in which this proposal adheres to and select the academic level on which it would be implemented. Of all levels that the Isometric Transformations unit is contemplated, it was selected that best fits with the work methodology and materials to be used. Then, learning that sought to achieve in students (expected learning outcomes), to the scope of which were designed and developed activities and working guidelines contained in the proposal were defined. Afterwards planning path is constructed on the unit, where it was sequentially structured learning outcomes, contents, activities created (with the respective sugerens and justifications), materials and evaluation. Finally, grounds for the choice of each tangrams is included and the general guidelines for proper implementation of the proposal are set.

In this way, the proposal made constitutes a new concrete teaching tool, that takes advantage of tangram potential as a teaching resource and ascribes a reevaluation of the Isometric Transformations unit. In spite of this, the implementation of this proposal is still pending, so, some guidelines that will give orientation to this will be delivered.

## ÍNDICE.

<b>AGRADECIMIENTOS.</b> .....	3
<b>RESUMEN.</b> .....	4
<b>ABSTRACT.</b> .....	5
<b>INTRODUCCIÓN.</b> .....	9
<b>CAPÍTULO I.</b> .....	13
<b>PRESENTACIÓN DEL SEMINARIO.</b> .....	13
<b>1. Descripción de la Situación Problemática.</b> .....	14
<b>2. Definición del Problema.</b> .....	20
<b>3. Objetivo General.</b> .....	20
<b>4. Objetivos Específicos.</b> .....	20
<b>CAPÍTULO II.</b> .....	21
<b>MARCO TEÓRICO.</b> .....	21
<b>1. Teorías Sobre el Aprendizaje.</b> .....	22
<b>1.1. Teorías Conductistas del Aprendizaje.</b> .....	22
<b>1.1.1. Condicionamiento Clásico.</b> .....	22
<b>1.1.2. El Conexionismo.</b> .....	24
<b>1.1.3. Condicionamiento Operante.</b> .....	25
<b>1.2. Teorías Cognoscitivistas del Aprendizaje.</b> .....	27
<b>1.2.1. Teoría de los Estadios de Desarrollo de Piaget.</b> .....	27
<b>1.2.2. Lev Vygotsky y las Zona de Desarrollo Próximo.</b> .....	29
<b>1.2.3. Constructivismo.</b> .....	31
<b>1.2.3.1. El Concepto de Red de la Estructuración del Conocimiento.</b> .....	32
<b>1.2.3.2. El Conocimiento como Construcción Social.</b> .....	33
<b>1.2.3.3. El Aprendizaje Situado y Tareas Auténticas.</b> .....	33
<b>1.2.3.4. El Andamiaje y Transferencia de la Responsabilidad para el Manejo del Aprendizaje del Profesor al Aprendiz.</b> .....	34
<b>2. Inteligencia Espacial.</b> .....	45
<b>2.1. Teoría de las Inteligencias Múltiples.</b> .....	45
<b>2.1.1. La Inteligencia Espacial.</b> .....	48
<b>2.2. Habilidad de Representación.</b> .....	51
<b>2.3. Relación entre la Habilidad de Representación y la Inteligencia Espacial.</b> .....	53
<b>3. Educación Matemática.</b> .....	55
<b>3.1. Importancia de la Enseñanza de la Geometría.</b> .....	55

3.2.	Enseñanza de la Geometría en Chile.....	58
3.3.	Transformaciones Isométricas (o Isometrías).....	61
4.	Material Didáctico.....	64
4.1.	Material Didáctico Para la Enseñanza. ....	64
4.2.	Material Concreto y Manipulación.....	66
4.2.1.	¿Por qué Recurrir al Material Concreto en la Enseñanza de la Geometría?.....	68
4.3.	El Tangrama Como Material Didáctico.....	69
4.3.1.	Definición de Tangrama.....	69
4.3.2.	Historia del Tangrama.....	70
4.3.3.	Tipos de Tangrama.....	70
4.3.4.	Utilidad y Aplicación del Tangrama en Distintas Disciplinas.....	76
4.3.5.	Beneficios del Carácter Lúdico del Tangrama en la Enseñanza de la Geometría. ....	77
CAPÍTULO III.....		80
DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA.....		80
1.	Presentación de la Propuesta.....	81
2.	Teorías de Aprendizaje a las que se Suscribe la Propuesta.....	83
3.	Identificación del Grupo Objetivo. ....	85
4.	Aprendizajes Esperados. ....	86
5.	Planificación de la Unidad.....	87
6.	Orientaciones Generales.....	109
7.	Tangramas Seleccionados.....	111
CAPÍTULO IV.....		113
CONSIDERACIONES FINALES Y PROYECCIONES DE LA PROPUESTA. ....		113
1.	CONSIDERACIONES FINALES.....	114
2.	PROYECCIONES. ....	117
BIBLIOGRAFÍA.....		118
LINKOGRAFÍA.....		123
ANEXOS.....		125
Anexo 1:	Guía de Trabajo N° 1.....	126
Anexo 2:	Guía de Trabajo N° 2.....	128
Anexo 3:	Guía de Trabajo N° 3.....	129
Anexo 4:	Guía de Trabajo N° 4.....	132
Anexo 5:	Guía de Trabajo N° 5.....	133
Anexo 6:	Guía de Trabajo N° 6.....	136

<b>Anexo 7: <u>Guía de Trabajo N° 7</u>.....</b>	<b>138</b>
<b>Anexo 8: <u>Planilla de Trabajo N° 1</u>.....</b>	<b>140</b>
<b>Anexo 9: <u>Evaluación de la Unidad</u>.....</b>	<b>142</b>
<b>Anexo 10: <u>Pauta de Corrección</u>.....</b>	<b>148</b>



## INTRODUCCIÓN.

---

Dada la relevancia que presenta la educación para el desarrollo general del país es que se debe velar por su calidad y equidad. Pero, ¿qué es la calidad educativa?. A pesar de que este concepto puede ser polisémico y multidimensional, hay autores que han entregado nociones sobre su significado. Braslavky señala que “una educación de calidad es aquella que permite que todos aprendan lo que necesitan aprender, en el momento oportuno de sus vidas y de sus sociedades y en felicidad” (Braslavky, 2006, pág. 86). Por lo tanto, velar por la calidad de la educación es promover que a cada individuo se le entregue una formación escolar que le permita desenvolverse competentemente en esta sociedad y establecer cambios en ella.

La institución encargada de llevar a cabo esta labor, que incluye también el custodiar por el correcto funcionamiento de todo el sistema educativo, es el Ministerio de Educación (MINEDUC). Debido a lo complejo que resulta este trabajo, quedan algunas funciones que no pueden ser desempeñadas cabalmente, lo cual conlleva a que en la educación chilena se evidencien graves falencias, entre ellas la enseñanza de algunos contenidos matemáticos; en particular, en la metodología y material didáctico empleado para la enseñanza de la geometría. Ello se ve reflejado tanto en los resultados de pruebas estandarizadas nacionales (SIMCE y PSU), como también en pruebas internacionales (TIMSS y PISA). Más aún, diversas y recientes investigaciones, entre ellas, la realizada por Aravena & Caamaño (2013) reafirman que la enseñanza de la geometría en Chile tiene mucho que mejorar.

Teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente, cabe formularse la siguiente interrogante: ¿pueden hacer algo los docentes de matemática para dar solución a tal situación?.

En relación a esta pregunta, Cárdenas, Rodríguez y Torres (2000, pág. 32) afirman que “el maestro constituye la piedra angular del sistema educativo, de él depende, en último término, que los cambios se produzcan y que el proceso educativo se realice con calidad y equidad, pero para ello se requiere que esté debidamente preparado”. En consecuencia, el profesor realmente tiene un rol protagónico en la realización de los cambios educativos, por

lo que debe adquirir un compromiso para efectuarlos, de forma tal que con ello se pueda perfeccionar el aprendizaje de la geometría. Es más, en un artículo de la Revista PRELAC se asevera que “la razón de ser de los docentes es facilitar el aprendizaje de sus estudiantes” (UNESCO Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe, 2005, pág. 12).

Ahora bien, ¿qué tipo de cambios o actos pueden efectuar los profesores chilenos para subsanar el aprendizaje de la geometría?

Tal vez uno de los más importantes sea el cambio metodológico y didáctico en la forma de abordar los contenidos correspondientes al eje geométrico, dado que es muy evidente la estrecha relación existente entre la enseñanza y el aprendizaje. Esto implica que, de las muchísimas acciones que pueden hacer los profesores con la finalidad de mejorar la enseñanza de la geometría, una de las más trascendentales es buscar o crear nuevas metodologías de enseñanza, ya que mediante su aplicación se favorece el aprendizaje de los estudiantes.

Para diseñar apropiadamente una novedosa e innovadora metodología didáctica en geometría es imprescindible tener en consideración los aprendizajes y las habilidades que se deben desarrollar en este eje. Según el Programa de estudio de matemática para octavo básico, elaborado por el MINEDUC, en el eje de geometría se pretende que los estudiantes desarrollen habilidades espaciales y de comprensión del espacio y sus formas, en donde la habilidad de representación tiene una participación fundamental (MINEDUC, 2014). Además, se debe tener presente en qué teoría de aprendizaje se va a cimentar la nueva propuesta. Con respecto a ello, la psicología educativa ha generado dos grandes corrientes teóricas, que son el Conductismo y el Cognoscitivismo, las cuales están compuestas por diversos planteamientos teóricos. De estas dos corrientes, la última es la más valorada en la educación actual, ya que la teoría constructivista, que se inserta en el cognoscitivismo, es la que impera en la formación profesional docente en las instituciones formadoras del país.

Otro aspecto muy importante y clave a tener en cuenta es el material didáctico a emplear en el proceso de aprendizaje-enseñanza, el que debe ser concordante con la metodología que se propone. Los materiales didácticos son “todos aquellos medios, objetos, aparatos, instrumentos, recursos y equipos destinados a la enseñanza con la

finalidad de que los estudiantes exploren, manipulen, observen, agrupen, clasifiquen y experimenten para obtener un mejor aprendizaje” (Cueva, 2013, pág. 23). En el proceso de aprendizaje-enseñanza es vital el papel que juega el material didáctico para la adquisición de los conceptos que deben formarse en los alumnos. Además, los materiales didácticos son de suma importancia, debido a que mediante ellos se puede lograr la motivación y atención por parte de los estudiantes.

En relación al tema de la motivación, Woolfolk (2010) , expresa que la mayoría de los educadores coinciden en que la motivación es una labor esencial en el proceso de aprendizaje-enseñanza. Esta misma autora señala además que; en general, la motivación es “un estado interno que activa, dirige y mantiene el comportamiento” (Woolfolk, 2010, pág. 376). Definitivamente, en una propuesta metodológica los materiales didácticos utilizados; por la motivación, atención y adquisición de conceptos que permiten, serán primordiales para determinar su éxito en cuanto a mantener el interés de los alumnos, favorecer los aprendizajes y contribuir al logro del objetivo de ella.

Debido a todos los antecedentes expuestos, el trabajo del presente seminario tiene como propósito la creación de una propuesta metodológica en el eje de geometría, específicamente en la unidad de transformaciones isométricas, a fin de desarrollar la habilidad de representación y por consiguiente la Inteligencia Espacial. Para ello, se hará uso del tangrama como material didáctico concreto, pues este tipo de recurso permite la manipulación directa de los alumnos, lo que promueve su motricidad y kinestesia a través de la estimulación de los sentidos. Con esto se fomenta la exploración y el descubrimiento.

Desde otra perspectiva, la elaboración de dicha propuesta metodológica también estará aportando a la labor docente. Esto se justifica en cuanto permite proponer a los profesores un conjunto de herramientas didácticas para enseñar las Isometrías, donde el material didáctico adopta un rol primordial no sólo para alcanzar el aprendizaje del contenido en cuestión, sino que además para lograr desarrollar la habilidad de Representación, la cual se relaciona estrechamente con la Inteligencia Espacial. Como consecuencia de ello, los profesores fortalecerán su praxis educativa para la enseñanza.

Por lo tanto, con esta innovadora propuesta metodológica orientada al desarrollo de la inteligencia espacial mediante la utilización de diversos modelos de tangramas en la unidad de Transformaciones Isométricas para octavo año básico, se está contribuyendo al mejoramiento de la calidad de la educación matemática; ya que permite no sólo la adquisición de los contenidos por parte de los alumnos, sino que contribuye el alcance de habilidades fundamentales para el desarrollo humano de ellos.





# CAPÍTULO I.

PRESENTACIÓN DEL SEMINARIO.

---

# 1. DESCRIPCIÓN DE LA SITUACIÓN PROBLEMÁTICA.

---

La matemática es, indudablemente, una disciplina muy antigua y de carácter polivalente. Esto es así, porque desde los inicios de las civilizaciones humanas, la matemática ha sido de gran utilidad para desempeñar funciones imprescindibles en el desarrollo socio-cultural de los diferentes pueblos, tales como: contar, medir y calcular. Como consecuencia de lo anterior, el conocimiento matemático fue categorizado, surgiendo así las primeras áreas de la matemática: la aritmética y la geometría.

Esta última, por muchos siglos, tuvo un papel preponderante en el desarrollo del mundo intelectual de las distintas civilizaciones, debido a su carácter eminentemente práctico. Tanto así que, por una parte, los egipcios la utilizaban como una herramienta para dar respuesta o solución a sus problemáticas, como por ejemplo el cómo cobrar impuestos a los terrenos cuando el Nilo borraba los límites de los territorios; mientras que por otra parte, los griegos ahondaron más en sus fundamentos y la dotaron de estructura y formalidad, pues la consideraban una herramienta para poder conocer el universo (Reyes, Dissett, Gormaz, & Colaboradores, 2013).

En la actualidad, la matemática es una de las asignaturas considerada principal, por no decir fundamental, en todo proceso educativo, pues la formación matemática proporciona; por una parte, efectivas herramientas para resolver problemáticas de la vida diaria en diversos contextos; mientras que por otra, entrega importantes explicaciones a diversos fenómenos, patrones o comportamientos (MINEDUC, 2014). De este modo, se hace evidente la necesidad de realizar un seguimiento constante a la eficacia de los procesos de aprendizaje-enseñanza en matemática, lo cual se traduce en la realización de continuas evaluaciones internacionales, tales como TIMSS y PISA. Producto de lo anterior, se le asigna una gran parte del total de horas de clases a su estudio.

Por otro lado, de acuerdo a los planes y programas de estudio elaborados por el Ministerio de Educación de Chile en el subsector de matemática (específicamente el del año 2014) existen ciertas habilidades o destrezas transversales que se desean desarrollar en los alumnos; estas son: el pensamiento matemático, la resolución de problemas, la

representación, el modelamiento matemático y las habilidades comunicativas y argumentativas; cuyas descripciones se encuentran detalladamente en estos programas. Específicamente, la habilidad de “representación”, que según los programas de estudios, consiste en “la capacidad de presentar ideas o conceptos de diferentes maneras, de forma tal que se realice una transición de lo concreto hasta lo abstracto”. Además, para la representación se identifican tres niveles a saber: el concreto, el pictórico y el simbólico. Por lo tanto, cuando los estudiantes logran desarrollar la representación son capaces de establecer relaciones entre los conceptos matemáticos y las situaciones procedentes de la vida cotidiana, lo cual les servirá en gran medida para enlazar las explicaciones de fenómenos con el conocimiento mismo y también para comprender las notaciones que son usadas en la matemática (MINEDUC, 2014).

Ahora bien, al efectuar un análisis exhaustivo de la concepción de representación que se plantea en los programas antes señalados, queda en evidencia una clara relación con lo que el psicólogo e investigador Howard Gardner denominó “inteligencia espacial” y que se define como la capacidad de pensar en tres dimensiones, permitiendo percibir imágenes externas e internas, recrearlas, transformarlas o modificarlas, recorrer el espacio o hacer que los objetos lo recorran y producir o decodificar información gráfica (Gardner, 2001). Tal relación se establece, en particular, entre esta definición y el primer nivel de representación, el concreto. Esto, porque, para que los alumnos hagan propio un nuevo concepto deben primero abordarlo desde un enfoque concreto, el cual se facilita mediante la manipulación de objetos, para luego hacer una imagen mental de estos mismos; después de ello, lograrán realizar transformaciones mentales de tales objetos, facilitándose el paso desde la representación concreta a la pictórica, y de esta a la simbólica; hasta finalmente, construir el concepto.

Al enfocarse en el planes y programa de estudio de matemática para octavo básico (2014), se observa que la enseñanza de ella está subdividida en cuatro ejes temáticos; estos son, números, álgebra y funciones, geometría, y por último probabilidad y estadística. En cada uno de ellos se proponen desarrollar ciertas habilidades, en particular, sobre el eje de geometría “se espera que los estudiantes desarrollen sus capacidades espaciales y la comprensión del espacio y sus formas. Para ello, comparan, miden y estiman magnitudes,

analizan propiedades y características de diferentes figuras geométricas de dos y tres dimensiones. En este eje, la habilidad de representar juega un rol especial. Los estudiantes deben describir posiciones y movimientos, usando coordenadas y vectores, y tienen que obtener conclusiones respecto de las propiedades y las características de lugares geométricos, de polígonos y cuerpos conocidos, por medio de representaciones. Deben transitar desde un ámbito bidimensional a uno tridimensional por medio de caras, bases, secciones, sombras y redes de puntos” (MINEDUC, 2014, pág. 27). De esto se infiere que uno de los logros que se busca alcanzar en los estudiantes de este nivel es el desarrollo de sus capacidades espaciales, y en definitiva, de la inteligencia espacial.

Dentro del eje temático de geometría para octavo básico se sitúa el contenido de las “Transformaciones Isométricas”, el cual por mucho tiempo ha sido enseñado con una metodología teórica, que consiste básicamente en partir por clasificarlas, definir las, identificar propiedades y regularidades, y por último enseñar a construirlas. Sin embargo, al hacerlo de esta forma no se logra potenciar completamente la habilidad principal que hay tras este contenido; es decir, no se desarrolla adecuadamente “la representación” en sus tres niveles (concreto, pictórico y simbólico), y por consiguiente, no se logra potenciar el desarrollo de la inteligencia espacial.

Las razones por las que se emplea dicha metodología se pueden explicar por diferentes causas. Algunas de ellas son: la formación profesional, la temporalidad asignada al contenido, la disponibilidad de material didáctico concreto y los resultados académicos obtenidos.

Respecto a la primera causa cabe señalar que los profesores de matemática que realizaron sus estudios durante las décadas del 60 y 70 tuvieron una formación potentemente influenciada por el movimiento de la “matemática moderna”, en el cual se buscaba hacer una transición desde una matemática más concreta (representada por la geometría) a una más abstracta (representada por la teoría de conjuntos y las estructuras algebraicas). Tal movimiento tuvo su apogeo en la década del 60; sin embargo, a fines de los años 70 ya era un rotundo fracaso, puesto que los estudiantes no eran capaces de comprender los conceptos involucrados ni de dominar las estructuras superiores, las que no tenían relación con la realidad (García Cruz, 1999). Como consecuencia de aquello, dichos

profesores tienen diversas carencias en cuanto al dominio de conceptos, a la didáctica empleada y a la utilización de materiales en geometría; ya que tuvieron una formación exigua en esta disciplina. Esto repercute fuertemente en sus métodos didácticos utilizados hasta la actualidad sobre esta área.

Otra de las causas hace referencia al poco tiempo que los profesores asignan al estudio de los contenidos en geometría, aun cuando este contiene una gran cantidad de los Contenidos Mínimos Obligatorios de matemática. Esto se ve reflejado en el desplazamiento de los contenidos de geometría para el final del año escolar, lo cual provoca que estos sean abordados de manera apresurada, sintetizada o simplemente no sean revisados. Un ejemplo de esta situación es la unidad de Transformaciones Isométricas, la que según los estudios de cobertura curricular, sólo un 32,9% de los docentes encuestados reconocen haberla abordado con sus alumnos, en primero año medio (Educarchile, 2007). De estos resultados se puede inferir que también es escasa la cantidad de profesores que revisan este contenido en el curso de 8° año básico.

En cuanto a la tercera causal, es sabido que cuando los docentes actuales abordan el contenido de Transformaciones Isométricas lo hacen mediante imágenes, de libros o de la web, que son presentadas en papel o con la ayuda de algún dispositivo electrónico. Tales imágenes no pueden ser manipuladas por los estudiantes, por lo que no pueden considerarse como material didáctico concreto. Entonces, surge la siguiente interrogante ¿Por qué los profesores no utilizan material didáctico concreto para el estudio de las Transformaciones Isométricas por parte de sus alumnos?. Una posible respuesta a esta pregunta es la inexistencia de algún material adecuado, al que ellos puedan recurrir para abordar esta unidad, y que permita a sus alumnos experimentar desde una perspectiva concreta el tema de las Transformaciones Isométricas, a fin de que puedan transitar por las distintas etapas de representación, alcanzando así el desarrollo de la inteligencia espacial. Asimismo, la poca disposición y la falta de tiempo de los profesores para crearlos y luego confeccionarlos, de manera tal que estos resulten idóneos para trabajar las Transformaciones Isométricas. Por lo tanto, queda de manifiesto que en la actualidad no se poseen, o de haberlo no se emplean, dichos materiales en la enseñanza de los contenidos de esta unidad. No obstante, la utilización y el uso de estos es fundamental en la didáctica de la matemática, debido a que

su enseñanza debe partir del uso del material concreto, porque este permite que el estudiante experimente un concepto desde la estimulación de sus sentidos, logrando llegar a interiorizar los conceptos que se quieren enseñar a partir de su manipulación. Como bien dice Piaget los niños y niñas necesitan aprender a través de experiencias concretas, en concordancia a su estadio de desarrollo cognitivo. La transición hacia estadios formales del pensamiento resulta de la modificación de estructuras mentales que se generan en las interacciones con el mundo físico y social. Es así como la enseñanza de las matemáticas se inicia con una etapa exploratoria, la que requiere de la manipulación de material concreto y sigue con actividades que facilitan el desarrollo conceptual a partir de las experiencias recogidas por los alumnos durante la exploración. A partir de la experiencia concreta, la cual comienza con la observación y el análisis, se continúa con la conceptualización y luego con la generalización. También cabe destacar que pese a la importancia del material concreto en la didáctica de la matemática este por sí solo no es de gran utilidad si no se complementa con actividades de carácter lúdico y manipulativo coherentes con los objetivos de aprendizaje y las habilidades que se buscan desarrollar en los estudiantes, en el contexto del desarrollo de la inteligencia espacial.

La última de estas causas que hace que la metodología para enseñar las Transformaciones Isométricas no haya sufrido modificaciones tiene relación con los buenos resultados académicos (calificaciones) de los alumnos en esta unidad. A pesar de ello, es claro que los resultados académicos no son sinónimos de buenos aprendizajes; es más, según Javier Bahón, experto en innovación educativa “Debe tenerse en cuenta que las notas, en un altísimo porcentaje de casos, sólo revelan un aprendizaje memorístico y fugaz; falta de comprensión profunda y mucho menos de capacidad de transferencia, es decir, esos datos difícilmente se sabrían aplicar a problemas reales de la vida. Este aprendizaje, muy común en la escuela tradicional, ha servido para el objetivo concreto de aprobar los exámenes” (Nieta, 2014). Las razones por las cuales los estudiantes obtienen buenas calificaciones en Transformaciones Isométricas son la forma de enseñarla y la de evaluarla, que solamente exige que ellos repliquen los procedimientos hechos anteriormente por el profesor en la pizarra, sin siquiera requerir de una mayor comprensión de lo ahí expuesto; pero con el transcurso del tiempo esto no se traduce en un aprendizaje significativo. Como

consecuencia de lo anterior, los profesores optan por repetir este modelo de enseñanza año tras año.

Todo lo antes expuesto conlleva a un proceso de reflexión acerca de ¿Cuáles serían las implicancias que tendría el desarrollo de los niveles de representación, dentro del desarrollo de la inteligencia espacial en los estudiantes? o ¿la metodología utilizada actualmente por los docentes para abordar la unidad de Transformaciones Isométricas demanda un replanteamiento, teniendo como objetivo el desarrollo de la inteligencia espacial a través del uso del material concreto, dentro de esta temática?.



## 2. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA.

---

¿Es posible el desarrollo de la Inteligencia Espacial a través del dominio de la habilidad de representación con el uso del tangrama en la temática de Transformaciones Isométricas?.

## 3. OBJETIVO GENERAL.

---

“Elaborar una propuesta metodológica y didáctica para desarrollar la Inteligencia Espacial a través de la enseñanza de las Transformaciones Isométricas, sustentada en la manipulación de material didáctico en forma concreta, pictórica y simbólica, en particular del Tangrama”.

## 4. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

---

**Objetivo 1:** Describir detalladamente los pasos que tendrá la propuesta metodológica, teniendo claridad en la etapas que comprenderá la misma.

**Objetivo 2:** Establecer y justificar el nivel académico para el cual está pensada la propuesta en cuestión.

**Objetivo 3:** Definir y elaborar los elementos necesarios para el diseño de la planificación:

- Adaptar los contenidos a abordar para el desarrollo adecuado de la unidad.
- Establecer los aprendizajes esperados.
- Seleccionar el o los tipos de tangramas que permitan el logro del objetivo general.
- Confeccionar actividades basadas en la manipulación del o los tangramas escogidos.

**Objetivo 4:** Diseñar la planificación de la unidad en cuestión a partir de la secuencia de aprendizajes esperados definidos para el desarrollo de la propuesta metodológica.

**Objetivo 5:** Fundamentar cada decisión pedagógica tomada en la elaboración de la planificación (específicamente en las actividades) y redactar las sugerencias a considerar para su correcta ejecución.

**Objetivo 6:** Enunciar los indicadores de logro y generar la evaluación a aplicar, procurando el correcto desarrollo de la unidad y su concordancia con los aprendizajes esperados.

# CAPÍTULO II.

MARCO TEÓRICO.

---

# PRESENTACIÓN DEL CAPÍTULO

En este capítulo se exponen distintos aspectos teóricos, los cuales sirven de fundamento para el desarrollo de la presente propuesta didáctica. Tales aspectos abordan las siguientes temáticas: Teorías sobre el aprendizaje, Inteligencia espacial, Educación matemática y Materiales didácticos.

## 1. Teorías Sobre el Aprendizaje.

Dentro de las corrientes psicológicas contemporáneas encargadas de la investigación sobre el aprendizaje del ser humano se encuentran el conductismo y el cognoscitivismo.

El conductismo tuvo gran fuerza durante la primera mitad del siglo XX; donde sus precursores fueron el psicólogo ruso Iván Pavlov, el psicólogo y pedagogo estadounidense Edward Lee Thorndike y el también psicólogo estadounidense Burrhus Frederic Skinner. En este, se definía el aprendizaje como un cambio relativamente permanente en el comportamiento, que estaba expresado por la adquisición de conocimientos o habilidades mediante la experiencia, donde se excluyen los cambios obtenidos por maduración. Dichos cambios en el comportamiento son observables y pueden ser medidos (Papalia & Wendkos, 1987). Por lo tanto, la forma en que aprenden los individuos se basa en la asociación de estímulos. A pesar de la gran influencia del conductismo en la psicología educacional, a partir de los años 70 esta cambió su enfoque, fijando su interés en la estructura y el funcionamiento de la mente. Aquello provocó el nacimiento de una nueva corriente psicológica que desplazó al conductismo; esto es, el surgimiento del cognoscitivismo.

### 1.1. Teorías Conductistas del Aprendizaje.

#### 1.1.1. Condicionamiento Clásico.

Este concepto surge de los experimentos y trabajos realizados por Iván Pavlov, el cual había estado realizando estudios de la presencia de salivación de los perros en presencia de alimento, en donde el alimento corresponde a un estímulo incondicionado, lo que es “un evento que produce de manera natural una respuesta incondicionada debido a

que esta conexión está incorporada en el sistema nervioso del organismo” (Good & Brophy, 2000, pág. 130) y la salivación a un respuesta incondicionada, “que es una respuesta programada de manera biológica ante un estímulo incondicionado y es producida en forma automática” (Good & Brophy, 2000, pág. 130).

Pavlov se percató que los perros presentaban salivación antes de estar en presencia de la comida, como por ejemplo ante la llegada del asistente de laboratorio. Esto lo llevó a realizar una serie de experimentos en donde junto al estímulo incondicionado se agregaba un estímulo neutro, el sonido de una campana, el que no producía ninguna reacción por parte del animal. Con el paso del tiempo y la repetición del experimento el perro producía salivación sólo con escuchar la campana, por lo que el estímulo neutro pasó a ser un estímulo condicionado: “un estímulo que al inicio no produce una respuesta pero que a través de su emparejamiento con un estímulo incondicionado produce una respuesta condicionada. Una respuesta condicionada se origina como una respuesta incondicionada ante un estímulo incondicionado, pero es aprendida por el organismo como una respuesta similar producida por un estímulo condicionado” (Good & Brophy, 2000, pág. 130).

El sonido de la campana se había convertido en un estímulo condicionado que produce una respuesta condicionada. A este tipo de condicionamiento, Pavlov lo llamó condicionamiento clásico, el cual se define como “el proceso a través del cual se logra que un comportamiento (respuesta) que antes ocurría tras un evento determinado (estímulo) ocurra tras otro evento distinto” (Arancibia & colaboradores, 2011, pág. 48).

A partir de los principios formulados en base a las conclusiones de los experimentos realizados por Pavlov, el psicólogo estadounidense John Watson, considerado el padre de la psicología conductual, aplicó estos principios al estudio de ciertas costumbres humanas, consideradas hasta ese entonces como “instintos”.

Watson estudió las conductas de temor en bebés y niños pequeños, llegando a la conclusión de que los bebés casi no tenían temores (por ejemplo a perros, insectos, etc.); pero a medida que crecían, estos aumentaban significativamente. Este autor sugirió que aquello se debía a que los niños aprendían los miedos del ambiente social y no que fueran temores instintivos, como se afirmaba hasta entonces. Para ratificar estas conclusiones,

Watson realizó una serie de experimentos. Uno de ellos consistía en, utilizando técnicas de condicionamientos, hacer que un niño que no presentaba temor a los ratones blancos ahora si les tuviera. En primer lugar, se le mostraba una rata blanca al niño, la que no producía ninguna reacción en él, asociada a un sonido estrepitoso. Luego de algunas repeticiones el niño desarrolló temor por dicho animal, temor que posteriormente se generalizó a otros objetos peludos. De esta forma, “Watson mostró como los niños pueden desarrollar miedos al generalizar una reacción emocional condicionada adquirida en conexión con un solo estímulo, a otros estímulos similares” (Arancibia & colaboradores, 2011, pág. 49). Usando los mismos principios logró suprimir la respuesta condicionada antes desarrollada. “El autor llegó a plantear que era posible, mediante un condicionamiento planeado y adecuado, transformar a un niño “normal” en cualquier tipo de persona que se desee” (Arancibia & colaboradores, 2011, pág. 49).

### **1.1.2. El Conexionismo.**

Esta teoría fue planteada por Edward Thorndike, quien sostiene que la forma más característica de aprendizaje, tanto en animales como en el ser humano, se produce por selección y conexión (ensayo y error). Thorndike llegó a esta conclusión luego de realizar una serie de experimentos con animales, especialmente con gatos. Uno de estos experimentos, consistía en colocar a un gato hambriento en una jaula, desde la cual podía observar su alimento fuera de esta, pero sin poder alcanzarlo. La jaula contaba con un mecanismo oculto, pestillo o palanca, para abrirla. Los primeros aciertos eran accidentales, provocados por los arañazos, mordiscos y movimientos del animal; pero en los siguientes ensayos, el gato descubre que existe una manera de abrir la jaula, por lo cual toma una actitud de búsqueda sistemática. El felino habría aprendido que existe un truco para salir de la jaula, así que se concentra en descubrirlo, volviéndose más eficiente al ejecutarlo. Esto hizo pensar a Thorndike que el gato no entiende la manera de escapar, sino que aprende grabándose respuestas correctas y desechando respuestas incorrectas.

Estos estudios ampliaron los trabajos de Pavlov acerca del condicionamiento clásico, mostrando que las condiciones del medio podían producir respuestas condicionadas completamente nuevas. “los gatos que aprendieron a escapar de sus jaulas no actuaban de manera refleja dando respuestas incondicionadas. En su lugar, descubrían y refinaban

respuestas nuevas adaptadas a situaciones de estímulos nuevos” (Good & Brophy, 2000, pág. 131).

A partir de estos experimentos, Thorndike formuló las siguientes leyes de aprendizaje: ley de asociación, de ejercicio y de efecto; de las cuales las más notables son:

- Ley de ejercicio: “toda conexión es proporcional a la cantidad de tiempo en que tarda en realizarse la conexión y al vigor y duración de estas conexiones, lo cual puede mejorarse mediante la ejercitación” (Arancibia & colaboradores, 2011, pág. 52); es decir, la repetición de una respuesta condicionada fortalece el vínculo estímulo-respuesta.
- Ley del efecto: “la respuesta que se acompaña de satisfacción se transforma en la más firmemente conectada con la situación aprendida y a la inversa, aquella respuesta acompañada de displacer genera conexiones débiles” (Arancibia & colaboradores, 2011, pág. 52); es decir, las respuestas seguidas por una recompensa se fortalecen y las seguidas por un castigo se debilitan.

### **1.1.3. Condicionamiento Operante.**

El condicionamiento operante, descrito por Skinner, es el proceso mediante el cual un comportamiento se fortalece o intensifica cuando es seguido por un resultado favorable (refuerzo), aumentando así las probabilidades que ese comportamiento vuelva a ocurrir. Por ello, el condicionamiento operante afirma que se aprende lo que es reforzado (Arancibia & colaboradores, 2011). Esta postura sostiene que el comportamiento está determinado por el ambiente y que son las condiciones externas (ambiente e historia de vida) las que determinan la conducta.

Skinner utilizó el término condicionamiento operante debido a que estudió conductas operantes. “el condicionamiento operante aplica principios del reforzamiento para condicionar o moldear conductas operantes. Las conductas operantes son respuestas voluntarias, no producidas de manera automática por algún estímulo conocido, que son usadas para operar sobre el ambiente” (Good & Brophy, 2000, pág. 132). Esto distingue al condicionamiento operante del condicionamiento clásico, ya que aunque ambas utilizan los

componentes básicos estímulo–respuesta para explicar el aprendizaje, difieren en su foco de atención.

El condicionamiento clásico se centra en el estímulo que causa la respuesta. Por el contrario, el condicionamiento operante pone su atención en la consecuencia que sigue a una respuesta determinada y el efecto que esta tiene en la recurrencia de la conducta que la originó. En este sentido, el condicionamiento operante es más parecido al conexionismo, sólo que Skinner no se contenta con registrar la conducta de los animales cuando eran puestos en un ambiente particular, sino que asume un papel más activo al manipular el entorno para moldear la conducta de los animales en una determinada dirección (Good & Brophy, 2000)

El mecanismo que utiliza este modelo para reforzar una conducta, es el reforzamiento contingente, el cual consiste en reforzar la ejecución de una conducta administrando reforzamientos sólo cuando la conducta ha sido realizada en conformidad con algún criterio antes establecido.

El condicionamiento operante se lleva a cabo por medio de cuatro mecanismos básicos (Good & Brophy, 2000):

- Reforzamientos positivo o recompensa: Las acciones que son recompensadas tienen más posibilidades de ser repetidas. Por ejemplo, dar décimas para una evaluación por una tarea realizada.
- Reforzamiento negativo: Las acciones que evitan alguna situación indeseada, tienen más probabilidades de ser repetidas. Por ejemplo, no dar un examen final por obtener buenas calificaciones en las evaluaciones parciales.
- Extinción o no reforzamientos: Las acciones que no son reforzadas tienen menor probabilidad de ser repetidas. Ejemplo, no prestar atención a los estudiantes que hablan sin pedir la palabra o levantar la manos, genera que se extinga esa conducta.
- Castigo: Las acciones que tienen consecuencias dolorosas o indeseables serán suprimidas. Por ejemplo, dejar a un alumno sin recreo por no poner atención a la clase.

## **1.2. Teorías Cognoscitivistas del Aprendizaje.**

A diferencia del conductismo, para la corriente cognoscitivista el aprendizaje tiene un significado más profundo que la conducta, pues en esta se considera que el aprendizaje involucra la reorganización de las estructuras mentales que procesan y almacenan la información recibida, por lo cual los cambios no ocurren en el comportamiento sino en las estructuras mentales (Good & Brophy, 2000). De esta manera, el énfasis de la psicología cognoscitivista está en el estudio de una serie de procesos mentales implicados en el manejo de la información por parte de la persona que está aprendiendo. Tales procesos son: la percepción, la memoria, la atención, el lenguaje, el razonamiento y la resolución de problemas (Arancibia & colaboradores, 2011).

Entre las teorías cognoscitivas sobre el aprendizaje destacan los estudios desarrollados por el biólogo y psicólogo sueco Jean Piaget (1896 – 1980), los realizados por el psicólogo soviético Lev Vygotsky (1895 – 1934), los del psicólogo estadounidense Jerome Bruner (1915 – actualidad) y los del psicólogo y pedagogo estadounidense David Ausubel (1918 – 2008); los cuales plantean diferentes teorías de cómo se adquiere el conocimiento y en consecuencia cómo se logra el aprendizaje, especialmente en los niños.

### **1.2.1. Teoría de los Estadios de Desarrollo de Piaget.**

Junto con Freud y Skinner, Piaget es considerado como uno de los psicólogos más influyentes de todos los tiempos. Esto se debe a la gran cantidad de libros y artículos que produjo en torno a su teoría, los cuales sirvieron de fundamento para muchos académicos de la educación y de la psicología (Good & Brophy, 2000).

En el marco de su teoría, Piaget asegura que los humanos nacen como entes procesadores de información activos y exploratorios, por lo que el conocimiento ya no es algo que debe ser traspasado, sino que se trata de una construcción; en otras palabras, el conocimiento debe ser construido por medio de la interacción entre las estructuras mentales y el entorno. Traslado lo anterior a la escuela, el alumno debe tomar una participación activa en su proceso de aprendizaje, puesto que es él quien efectúa modificaciones, ampliaciones y diversificaciones en sus esquemas de conocimiento y le da sentido a la información recibida (Good & Brophy, 2000). Como consecuencia de su ardua labor,

Piaget logró direccionar su teoría hacia las operaciones cognoscitivas implicadas en el pensamiento, lo cual le permitió identificar las siguientes: los esquemas, la adaptación y la equilibración.

Para Piaget, los esquemas eran “los marcos de referencia cognoscitivo, verbal y conductual que se desarrollan para organizar el aprendizaje y guiar la conducta” (Good & Brophy, 2000, pág. 30).

La adaptación era definida por él como “el proceso continuo de interactuar con el ambiente y aprender a predecirlo y a controlarlo” (Good & Brophy, 2000, pág. 31). Para la adaptación hay dos mecanismos que tienen implicancia en toda acción: la acomodación y la asimilación. El primero corresponde al “cambio en la respuesta ante el reconocimiento de que los esquemas existentes no son adecuados para lograr los propósitos actuales” (Good & Brophy, 2000, pág. 31); mientras que el segundo es “el proceso de responder a una situación estímulo usando los esquemas establecidos” (Good & Brophy, 2000, pág. 31)

En cuanto a la equilibración, en su teoría era entendida como “la fuerza motivadora detrás de todo aprendizaje” (Good & Brophy, 2000, pág. 31). Esta genera el principio de la equilibración, el que consiste en “la suposición de que las personas luchan por mantener un balance entre la asimilación y la acomodación conforme imponen orden y significado en sus experiencias” (Good & Brophy, 2000, pág. 31).

Desde otra perspectiva, las nociones que entregaron las indagaciones de Piaget convergen en la relación existente entre el desarrollo cognitivo de un individuo, que depende de su nivel evolutivo (edad), y la adaptación, que según (Good & Brophy, 2000, pág. 31) se define como un “proceso continuo de interactuar con el ambiente y aprender a predecirlo y controlarlo”. Esto condujo al planteamiento de las 4 etapas (o estadios) de desarrollo, cuyas descripciones figuran en la siguiente tabla:

ESTADIO	EDAD APROXIMADA	CARACTERÍSTICAS
SENSORIOMOTOR	De 0 a 2 años	Estadio prelingüístico en el que la inteligencia se apoya fundamentalmente en las acciones, los movimientos y las acciones carecen de un referente operacional simbólico. Se registra una evolución que va desde los reflejos simples, hasta conductas más complejas, que abarcan la coordinación de la percepción.
PREOPERACIONAL	De 2 a 7 años	Se inicia la utilización de símbolos y el desarrollo de la habilidad para advertir los nombres de las cosas que no están presentes. Aunque el niño desarrolla juegos imaginativos, el pensamiento es egocéntrico, así como el lenguaje, y éstos se limitan a situaciones concretas y al momento que vive, con ausencia de operaciones reversibles.
DE LAS OPERACIONES CONCRETAS	De 7 a 12 años	El niño realiza operaciones lógicas. Es capaz de colocar cosas y sucesos en un orden determinado y advierte claramente la relación parte - todo y comprende la noción de conservación de sustancia, peso, volumen, distancia, etc. No obstante, todo su pensamiento se circunscribe a los aspectos y característica concretas del mundo que lo rodea.
DE LAS OPERACIONES FORMALES	De 12 a 14 años	Las ideas abstractas y el pensamiento simbólico se incluyen en los procesos de razonamiento del individuo. Sus pensamientos no se limitan ya exclusivamente a la situación presente. Accede al raciocinio hipotético-deductivo.

Fuente: (Meece, 1997, pág. 103)

Pese a la inflexibilidad que muestra el esquema de la teoría de Piaget con respecto a la relación entre el nivel evolutivo y la manera de pensar de las personas, tal relación debe ser considerada como referencial, puesto que el tiempo de permanencia en cada estadio varía según las particularidades de cada individuo.

### 1.2.2. Lev Vygotsky y las Zona de Desarrollo Próximo.

Vygotsky a principios del siglo XX propuso una teoría completamente diferente frente a la relación existente entre aprendizaje y desarrollo, criticando la posición hasta ese entonces aceptada, la cual se sustentaba esencialmente en los trabajos de Piaget, según los cuales el aprendizaje debía equipararse al nivel evolutivo del niño para ser efectivo (Arancibia & colaboradores, 2011). Vygotsky no consideraba que el aprendizaje de los

niños estuviera limitado por su nivel evolutivo; debido a ello, quería descubrir cuál era la relación real entre desarrollo y aprendizaje.

Vygotsky creía que el pensamiento (cognición) y el lenguaje (habla) de los niños empezaban como funciones separadas, pero que se conectan de manera íntima en los años preescolares, cuando los niños aprenden a usar el lenguaje como un mecanismo para aprender (Good & Brophy, 2000). El aprendizaje de los niños, cada vez más, es generado e influenciado por la interacción social de la que los niños participaban. Esta interacción se produce (en primera instancia) con los padres y profesores del menor. Luego, el conocimiento generado por esta interacción es relacionado con otros conocimientos por medio del habla interna, lo que produce la internalización del mismo.

Lo planteado anteriormente deja en evidencia la importancia que Vygotsky le asignaba a la interacción social en la adquisición de conocimientos y en consecuencia, en el aprendizaje.

Para Vygotsky, el nivel evolutivo y la interacción social se relacionan de tal manera que ambas se influyen mutuamente, lo que tiene claros efectos en la formación de conocimiento y en el aprendizaje. La interrelación entre estos dos componentes lo llevó a plantear su teoría de la zona de desarrollo próximo, en la cual se postula la existencia de dos niveles evolutivos, el primero de ellos lo denomina “nivel evolutivo real, es decir, el nivel de desarrollo de las funciones mentales de un niño, que resulta de ciclos evolutivos cumplidos a cabalidad” (Arancibia & colaboradores, 2011, pág. 91), es el nivel de desarrollo de las funciones mentales de un niño, establecidos como resultado de ciertos ciclos evolutivos, lo cual se refleja en aquellas actividades que el niño puede realizar por sí solo sin ninguna ayuda. El segundo nivel es el de desarrollo próximo, el cual se refiere a la “existencia de conocimientos y habilidades que los estudiantes todavía no están listos para aprender por su cuenta pero que podrían aprender con la ayuda de los profesores” (Good & Brophy, 2000, pág. 167). En resumen, la zona de desarrollo próximo es la que se encuentra entre lo real (lo que el niño ya sabe) y lo potencial (lo que es capaz de aprender), la que se compone por las acciones y actividades que el niño no puede realizar completamente por su cuenta, pero que está en condición de resolver con la ayuda de alguien con mayor dominio sobre ellas.

### 1.2.3. Constructivismo.

El constructivismo es un modelo de aprendizaje epistemológico que se enmarca dentro de la corriente cognoscitivista, que tiene como objetivo general desarrollar los conocimientos nuevos por intermedio de procesos de construcción activa que lo relacionan con el conocimiento previo. Se encuentra basado principalmente en los trabajos que desarrollaron Piaget, Vygotsky y Bruner durante la segunda mitad del siglo XX. En las palabras de Mario Carretero (Doctor en psicología, catedrático de la Universidad Autónoma de Madrid) el constructivismo mantiene que “el individuo, tanto en los aspectos cognitivos y sociales del comportamiento como en los afectivos, no es un mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia que se va produciendo día con día como resultado de la interacción entre esos dos factores. En consecuencia, según la posesión del constructivismo, el conocimiento no es una copia fiel de la realidad, sino una construcción del ser humano. ¿Con qué instrumentos realiza la persona dicha construcción?, fundamentalmente con los esquemas que ya posee, es decir, con la que ya construyó en su relación con el medio que lo rodea”. (Carretero, 1997, pág. 21).

De esta manera, la teoría constructivista se caracteriza básicamente por destacar que en el proceso de aprendizaje la persona que aprende debe adoptar un rol activo; debido a que es él quien construye, modifica, amplía y diversifica sus esquemas de conocimiento del mundo, para luego concederle significado y sentido. En el caso de la educación escolar, el estudiante debe adoptar un rol interactivo, ya que “El alumno que aprende no es meramente pasivo ante el enseñante o el entorno. El conocimiento no es un mero producto del ambiente, ni un simple resultado de las actividades internas del aprendiz, sino una construcción por interacción, que se va produciendo y enriqueciendo cada día como resultado entre el aprendiz y los estímulos externos” (Toledo, pág. 3). Por su parte, el rol del docente consiste en “realizar una labor de mediación entre el conocimiento y el aprendizaje de sus alumnos, al compartir experiencias y saberes en un proceso de negociación o construcción conjunta del conocimiento y presta una ayuda pedagógica ajustada a la diversidad de necesidades, intereses y situaciones en que se involucran sus alumnos” (Toledo, pág. 3).

Otras de las contribuciones importantes que entrega el constructivismo tienen que ver con el punto de vista del aprendizaje, en donde brotan ideas que están relacionadas con el concepto de red de la estructuración del conocimiento; con el conocimiento como construcción social; con el aprendizaje situado y tareas auténticas; y por último, con el andamiaje y transferencia de la responsabilidad para el manejo del aprendizaje del profesor al aprendiz.

### **1.2.3.1. El Concepto de Red de la Estructuración del Conocimiento.**

Algunos teóricos han clasificado los aprendizajes según las habilidades que estos involucran, lo cual se traduce en la organización del conocimiento de acuerdo a objetivos cognoscitivos. A este tipo de jerarquización se le conoce como taxonomía. Una de las taxonomías más conocidas es la publicada por Benjamín Bloom, la cual según Good y Brophy (2000, pág. 166) ha sido usada “para guiar el desarrollo del currículum escolar implementando la idea de que los hilos de instrucción son jerarquías de conocimiento por las que los aprendices deben avanzar en secuencia”. Esto implica que se debe comenzar por el primer nivel taxonómico (en este caso el de conocimiento), para que luego de dominado este se avance al segundo (el de comprensión) y así sucesivamente hasta llegar al nivel máximo (evaluación).

Con respecto a esta forma de emplear la taxonomía de Bloom, la teoría constructivista y las investigaciones que la apoyan proponen que es innecesario imponer una jerarquía lineal tan rígida en el proceso de aprendizaje-enseñanza. La explicación de tal afirmación se encuentra en investigaciones como la de Marzano y sus colaboradores (1988), la cual señala que el conocimiento no debe ser visto como algo compuesto por jerarquías lineales, sino que por redes estructuradas en torno a una idea clave. Tales redes incluyen hechos, conceptos, generalizaciones, etc., por lo que cuando se enseña un conocimiento este puede ser abordado desde cualquier red, no sólo de un extremo inferior. Por lo tanto, desde el enfoque constructivista el aprendizaje puede partir de la aplicación o de otro nivel superior, y no solamente a partir del conocimiento.

### **1.2.3.2. El Conocimiento como Construcción Social.**

Dentro de la corriente constructivista existen dos visiones acerca del aprendizaje. Una de ellas (influenciadas por las investigaciones de Piaget) sostiene que el aprendizaje es una empresa eminentemente individual, en donde cada sujeto desarrolla conocimiento por medio de la exploración, el descubrimiento y la reflexión. Ahora bien, existe otra visión (la que es mayoritariamente aceptada) que considera al conocimiento como una construcción social, por lo que se denomina constructivismo social. En esta visión se propone que el conocimiento se desarrolla mejor en ambientes en los que dos o más individuos llevan a cabo una discusión sostenida acerca de un tema, en donde la exposición a nuevos conocimientos (proveniente de los otros interlocutores) lleva a expandir sus estructuras cognoscitivas. Por consiguiente, la necesidad de expresar sus ideas los obliga a estructurarlas mejor, lo cual agudiza sus concepciones (Good & Brophy, 2000).

### **1.2.3.3. El Aprendizaje Situado y Tareas Auténticas.**

Los constructivistas sociales plantean que la enseñanza en la escuela es un ambiente ideal para aplicar el constructivismo social, ya que en esta es muy notoria la interrelación entre sus diferentes miembros, lo que constituye el paradigma de sociedad. Pese a ello, en la educación escolar se evidencia una gran problemática. Esta consiste en que el conocimiento es enseñado muchas veces de una forma aislada, sin direccionarlo hacia los problemas o situaciones que le dieron origen.

Las personas que han realizado investigaciones sobre el aprendizaje en contextos laborales y hogareños, tales como Brown, Collins, Duguid, Rogoff, Lave y Wenger; aseguran que el aprendizaje es situado. Esto quiere decir que si se desea que los alumnos aprendan y retengan un conocimiento, este debe ser enseñado desde su origen y en base a problemas que lo generaron, ya que así los alumnos reconocerán la relevancia que tiene cada uno de los conocimientos que les son presentados.

Por otra parte, estos mismos investigadores afirman que las tareas propuestas a los estudiantes deben ser auténticas, en el sentido que el conocimiento enseñado debe ser aplicable a situaciones reales en donde se pueda utilizar para dar solución a problemas del entorno del aprendiz, ya sea de forma real o idealizada. El hacerlo de esta manera permitirá

que los alumnos no se cuestionen la utilidad de cada conocimiento y por ende, considerarán cada uno de ellos como una herramienta efectiva para enfrentar situaciones problemáticas cotidianas, que a futuro se le presentarán y necesitarán resolver.

#### **1.2.3.4. El Andamiaje y Transferencia de la Responsabilidad para el Manejo del Aprendizaje del Profesor al Aprendiz.**

El andamiaje de la instrucción se entiende como “la asistencia en la tarea o estrategias de simplificación que podrían usar los profesores para salvar la brecha entre lo que los estudiantes son capaces de hacer por su cuenta y lo que son capaces de hacer con ayuda” (Good & Brophy, 2000, pág. 169). Es evidente la relación entre esta definición y lo Vygotsky denominó Zona de Desarrollo Próximo, debido a que el andamiaje son todas las acciones hechas por el profesor con el objetivo de que los alumnos traspasen la brecha entre lo que saben y lo que deberían saber de acuerdo a los objetivos propuestos. Algunos ejemplos de dichas acciones son el modelamiento cognoscitivo, los avisos, las indicaciones, etc. Además, es preciso destacar que estos andamiajes o ayudas no son permanentes, sino que van en concordancia con el desarrollo de los alumnos y con el logro de las metas.

Asociada a la idea de andamiaje se encuentra la noción de transferencia gradual de la responsabilidad para el manejo del aprendizaje. Esta consiste básicamente en que en una etapa inicial el profesor asume la total responsabilidad que involucra el proceso de aprendizaje-enseñanza, ya sea por medio del manejo de las actividades de aprendizaje como también mediante la entrega de una gran cantidad de información, las cuales corresponden generalmente a explicaciones y modelamientos. Sin embargo, a medida que el estudiante va progresando en el desarrollo de diferentes habilidades, la responsabilidad del aprendizaje se va trasladando gradualmente desde el profesor hacia los alumnos, por lo que ellos asumen la mayor parte de la responsabilidad. A pesar de aquello, el proceso de aprendizaje-enseñanza sigue siendo guiado por el profesor, ya que este todavía le entrega algunos andamiajes a los alumnos, pero sólo en las tareas que ellos aún no son capaces de realizar de manera autónoma.

#### **1.2.4. Aprendizaje Significativo.**

En el año 1963 Ausubel elabora la teoría de Aprendizaje significativo. Esta teoría se sustenta en la concepción de aprendizaje que tenía este psicólogo, ya que para él el aprendizaje consistía en “una organización e integración del conocimiento de información en la nueva estructura cognoscitiva del individuo” (Arancibia & colaboradores, 2011, pág. 102). Otro aspecto relevante en que se basa esta teoría es el supuesto de que existe una estructura cognoscitiva que está encargada de procesar la información recibida durante la enseñanza. Cuando se hace mención a la estructura cognoscitiva se está haciendo referencia a la forma en que la persona tiene organizado el conocimiento previo a la instrucción (Arancibia & colaboradores, 2011).

El postulado fundamental de tal teoría es que el aprendizaje significativo consiste en la adquisición de ideas, conceptos y principios al relacionar la información nueva con los conocimientos previos que se encuentran en la memoria (Ausubel, 1977). En consecuencia, este se logra cuando el aprendiz relaciona una nueva información con aspectos relevantes de su estructura cognoscitiva de forma no arbitraria y sustantiva (Rodríguez, 2004). Al proceso mediante el cual se une la información nueva con los conceptos presentes en la estructura cognoscitiva se le denomina “asimilación” (Arancibia & colaboradores, 2011). Entonces, para que los nuevos conocimientos sean cabalmente adquiridos y, por tanto, se logre aprendizaje significativo, es imprescindible que se lleve a cabo la asimilación de la información nueva con las ideas previas de la estructura cognoscitiva, para luego dar lugar a la inclusión de ellas formando un nuevo concepto, que estará en constante modificación (Arancibia & colaboradores, 2011).

Además, en esta teoría Ausubel postula que, en función al objeto que se aprende, existen tres tipos de aprendizaje significativos, los cuales son: el aprendizaje representacional, el aprendizaje de conceptos y el aprendizaje proposicional (Arancibia & colaboradores, 2011).

El aprendizaje representacional es el más elemental y de él dependen los demás. Este ocurre cuando se igualan en significado símbolos arbitrarios con sus referentes (objetos, eventos o conceptos) y significan para el alumno cualquier significado al que sus referentes aludan (Ausubel, 1983). Por ejemplo, cuando un niño identifica el símbolo de la

pelota con el objeto mismo, por lo cual para él el símbolo significa lo mismo que el referente (objeto).

El aprendizaje de objetos constituye, de cierta manera, un aprendizaje representacional, puesto que los conceptos se definen como "objetos, eventos, situaciones o propiedades que posee atributos de criterios comunes y que se designan mediante algún símbolo o signos" (Ausubel, 1983, pág. 61).

Por último, el aprendizaje proposicional es aquel que, al contrario del representacional, no se basa en "aprender significativamente lo que representan las palabras aisladas o combinadas, sino aprender lo que significan las ideas expresadas en una proposición; las cuales, a su vez, constituyen un concepto" (Arancibia & colaboradores, 2011, pág. 103).

Así, de todo lo anterior se desprende que para Ausubel el almacenamiento de información en el cerebro corresponde a un proceso que está muy bien organizado, donde la estructura cognoscitiva está ordenada jerárquicamente. De acuerdo a lo anterior, el aprendizaje significativo se puede clasificar en: Subordinado, Supraordinado y Combinatorio (Arancibia & colaboradores, 2011).

- Subordinado: es el proceso cuando la nueva información es vinculada con los conocimientos pertinentes de la estructura cognoscitiva previa del alumno, es decir, cuando existe una relación de subordinación entre el nuevo material y la estructura cognitiva existente (Arancibia & colaboradores, 2011).
- Supraordinado: se da cuando la nueva información adquirida se relaciona con más de una idea subordinada específica ya establecidas en la estructura cognoscitiva (Arancibia & colaboradores, 2011).
- Combinatorio: es el proceso que ocurre cuando la nueva información se relaciona de manera general con aspectos relevantes de la estructura cognoscitiva (Arancibia & colaboradores, 2011).

En oposición al aprendizaje significativo, Ausubel define el aprendizaje mecánico como aquel en el cual no existe un proceso de asimilación entre la información nueva y las ideas previas de la estructura cognoscitiva (Arancibia & colaboradores, 2011).

En síntesis, para generar un aprendizaje significativo en los estudiantes es importante que los docentes organicen la secuencia del conocimiento de forma tal que, en el caso de no existir conceptos previos en la estructura cognoscitiva, ellos puedan construirlos, a fin de lograr enlaces para que dichos conceptos y la información nueva se relacionen entre sí de manera adecuada (Arancibia & colaboradores, 2011). Aquello permitirá que los alumnos modifiquen sus estructuras cognoscitivas; adquiriendo, expandiendo y reteniendo de forma duradera la información presentada en la memoria (Schunk, 1997).

#### **1.2.5. Aprendizaje por Receptación.**

Siguiendo la línea de su teoría de aprendizaje significativo, Ausubel asegura que es posible lograr un aprendizaje significativo por receptación, ya que para él “La adquisición de conocimiento temático es ante todo una manifestación de aprendizaje por receptación; es decir, el contenido principal de lo que hay que aprender por lo común se presenta al estudiante en su forma más o menos final. En esas circunstancias, apenas se le pide que lo comprenda y lo incorpore en su estructura cognoscitiva de modo que disponga de él para su reproducción, para el aprendizaje relacionado y para solucionar problemas en alguna fecha futura” (Ausubel, 1968, pág. 83).

Por ello, Ausubel propone la teoría de aprendizaje significativo por receptación, la cual consiste básicamente en el empleo de enseñanza expositiva y en la representación en forma organizada y significativa. Esto permitirá que los aprendices enlacen la enseñanza con sus ideas previas y se produzca un aprendizaje significativo (Schunk, 1997).

La inclusión e importancia que Ausubel le brinda a la instrucción de manera expositiva contrasta con los pensamientos expresados por los teóricos de la educación de ese tiempo, debido a que para ellos este método de enseñar era desacreditado, y por ende se rechazaba. Otro aspecto opuesto con las ideas de la época que manifiesta esta teoría es la estrategia deductiva para enseñar los contenidos que rodean las ideas generales expuestas al inicio de la instrucción, puesto que en ese entonces se patrocinaba el razonamiento inductivo (Schunk, 1997).

El modelo de enseñanza de Ausubel también se caracteriza porque se necesita de una constante interacción entre el maestro y los alumnos durante la enseñanza. Esto se debe a que es el docente quien inicialmente expone el nuevo conocimiento, pero reiteradamente solicita respuestas de los estudiantes antes de continuar abordando el tema.

Adentrándose más en esta teoría aparecen los “organizadores temáticos o de avance”, los cuales adquieren un rol esencial para generar un aprendizaje significativo en los estudiantes, debido a que son ellos los que permiten que ellos relacionen el nuevo conocimiento con lo que han aprendido (Schunk, 1997). Estos organizadores consisten en “enunciados generales que se presentan al comienzo de las lecciones, dirigen la atención a los conceptos importantes por aprender, subrayan las relaciones entre las ideas presentadas y vinculan el material nuevo con lo que los estudiantes saben” (Schunk, 1997, pág. 197). Por lo tanto, lo que Ausubel plantea con la inclusión de estos organizadores en su teoría es que la organización del contenido de manera lógica proporciona una gran ayuda a los alumnos para que puedan establecer conexiones entre el conocimiento nuevo con los conocimientos previos (Good & Brophy, 2000).

En cuanto a los organizadores temáticos pueden ser de dos tipos: expositivos y comparativos. Los organizadores expositivos son aquellos que proporcionan información relevante para que los alumnos logren comprender la enseñanza de la clase; o sea, se trata de las definiciones de los conceptos involucrados en ella y de las generalizaciones de las ideas claves de la lección. Por una parte, “las definiciones de conceptos exponen el concepto, sus características y el que le sigue en orden superior” (Schunk, 1997, pág. 197). Por otra parte, “las generalizaciones son afirmaciones amplias de los principios generales de los que se extraen las hipótesis o ideas particulares” (Schunk, 1997, pág. 197). De este modo, los organizadores expositivos permiten describir el propósito de lo que se está enseñando y presentar ideas claves para clarificar la exposición del nuevo contenido (Good & Brophy, 2000).

Los otros tipos de organizadores temáticos (o avanzados), los comparativos, son aquellos que presentan el nuevo contenido a los estudiantes por intermedio de analogías que buscan relaciones lógicas entre este y los temas conocidos por ellos, por lo que se destacan los aspectos comunes del nuevo conocimiento con lo que ya es sabido por ellos

(Schunk, 1997). Por ejemplo, para introducir el concepto de factorización de expresiones algebraicas se hace mención a la descomposición en factores primos, ya que estos dos temas tienen en común la presentación de una cantidad como producto de cantidades pequeñas. No obstante, al utilizar los organizadores comparativos se debe cerciorar que el tema previo al que se sustenta la analogía esté comprendido por los estudiantes, ya que si este no es entendido por ellos, la analogía tampoco lo será, lo cual provocará que el nuevo tema no sea aprendido. Pese a ello, las analogías deben ser consideradas en la enseñanza de diversos contenidos, debido a que permiten establecer una vinculación de lo nuevo con lo que es conocido, lo cual admite, en algunos casos, desarrollar una referencia en concreto para lo que es abstracto (Good & Brophy, 2000).

El psicólogo Richard Mayer realizó indagaciones sobre la teoría de aprendizaje significativo por recepción de Ausubel y gracias a ellas logró descubrir importantes consideraciones que complementaron esta teoría, ampliando así las ideas de Ausubel. Como resultado de su trabajo, Mayer planteó el desarrollo de técnicas de señalamiento para direccionar la atención de los alumnos hacia las características estructurales de la lección, debido a que estas resaltan la estructura conceptual y la organización de un determinado contenido. Entre dichas técnicas, distingue cuatro tipos, que son: 1) las especificaciones de la estructura de las relaciones, 2) presentaciones prematuras de información clave que vendrá después, 3) declaraciones en resumen y 4) palabras puntualizadoras (Mayer, 1984). Como ejemplos del primer tipo de técnicas de señalamiento se encuentran las palabras “primero”, “segundo” o “el problema es... y la solución es...”. En el segundo tipo se encuentran señales como “las ideas importantes que se discutirán son...”. En cuanto a las declaraciones de resumen, estas son similares a las presentaciones prematuras, con la diferencia de que estas se dan al final del discurso. Ejemplos de palabras puntualizadoras son frases como “de manera más importante” o “por desgracia”. Así, cada una de ellas contribuye a que los aprendices aclaren la información que se les entrega y proporcionan una referencia para identificar aspectos claves del discurso del maestro.

Por último, a pesar de que la idea de implementar una instrucción de forma expositiva era descartada y criticada, Ausubel logró demostrar que esta percepción era errónea y que si es posible lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes mediante

este metodología. Sin embargo, para que aquello sea posible se requiere que el docente tome ciertas consideraciones, tales como el constante diálogo con los alumnos a través de la formulación de interrogantes, el uso de técnicas de señalamiento para enfocar la atención de los estudiantes hacia lo primordial y el empleo de organizadores avanzados para generar un proceso asimilación entre la nociones conocidas y la información nueva. Entonces, el modelo de aprendizaje significativo por receptación planteado por Ausubel es, principalmente, “aprendizaje en el que el conocimiento es presentado en su forma final, de manera típica por medio de instrucción expositiva que expone la información y luego la explica y proporciona ejemplos” (Good & Brophy, 2000, pág. 111). Sobre esto, Rodríguez (2004, pág. 5) menciona que “para Ausubel, la exposición verbal es en realidad la manera más eficiente de enseñar la materia de estudio y produce conocimientos más sólidos y menos triviales que cuando los alumnos son sus propios pedagogos”.

#### **1.2.6. Aprendizaje por Descubrimiento.**

La teoría del aprendizaje por descubrimiento fue propuesta por el psicólogo Jerome Bruner en la década del 60, quien se dedicó al estudio del desarrollo intelectual de los niños, cuyo trabajo se enfatizó “en la importancia de hacer que los aprendices se percaten de la estructura del contenido y de las relaciones entre sus elementos de modo que puedan ser retenidos como un cuerpo de conocimiento organizado” (Good & Brophy, 2000, pág. 161).

Bruner comparte los postulados con Ausubel de que cada persona procesa de forma activa la información, proceso que se da de manera diferente en cada individuo (Arancibia & colaboradores, 2011) al igual que la importancia de que se percaten de la estructura del contenido que se les presenta, pero difieren en la forma de adquirir el conocimientos. Para Bruner, el verdadero aprendizaje se da por medio del descubrimiento y no por la exposición a los contenidos (Good & Brophy, 2000). En este sentido, se considera a la exploración activa y a la solución de problemas como una forma de aprendizaje natural y preferible.

A diferencia de otros autores que plantean teorías sobre el aprendizaje, las ideas de Bruner están formuladas pensando en el aprendizaje que se da en los sistemas escolares formales (escuelas, universidades, etc.). En particular, enfatiza el aprendizaje de las disciplinas académicas, “ya que introducen a los niños a formas de pensar potentes que

contribuyen habilidades para aprender a aprender (observación cuidadosa, hacer comparaciones, analizar semejanzas y diferencias, etc.)” (Good & Brophy, 2000).

Aprender por medio del descubrimiento quiere decir obtener uno mismo los conocimientos (Schunk, 1997). Bruner plantea que “este tipo de aprendizaje es más significativo ya que ocurre durante la exploración motivada por la curiosidad” (Good & Brophy, 2000, pág. 163). Esto conlleva a que el aprendizaje en esta teoría este definido como “el proceso de reordenar o transformar los datos de modo que permitan ir más allá de ellos, hacia una comprensión o *insight* nuevos” (Arancibia & colaboradores, 2011, pág. 101), lo que implica un cambio en la estructura cognitiva del aprendiz.

Víctor Encarnación (2006) explica que el aprendizaje por descubrimiento es la transformación de hechos o experiencias, de manera que se pueda llegar más allá de la información. En otras palabras, reestructurar o transformar hechos evidentes, de manera que puedan surgir nuevas ideas para la solución de los problemas.

En este tipo de aprendizajes, el estudiante debe formular y probar hipótesis antes que simplemente leer o escribir la lección del maestro. “descubrir es un forma de razonamiento inductivo, porque los estudiantes pasan de estudiar ejemplos a formular reglas, conceptos y principios generales” (Schunk, 1997, pág. 194). De este modo, se está fomentando el aprendizaje significativo. Además, Bruner desea que los estudiantes aprendan el patrón de relaciones entre los elementos que conforman un determinado conocimiento o disciplina, que los conectan como un cuerpo de conocimientos organizados.

Descubrir no es sólo dejar que los estudiantes hagan lo que quieran; se maneja mejor como una actividad guiada: “los maestros disponen quehaceres en los que los estudiantes busquen, manipulen, exploren e investiguen” (Schunk, 1997, pág. 194). Con ello los alumnos adquieren nuevos conocimientos en relación con la disciplina que se está enseñando y con las habilidades generales de resolución de problemas, como formular reglas, probar hipótesis y reunir información.

Los métodos de descubrimiento guiado implican la entrega de oportunidades a los aprendices para manipular objetos en forma activa y transformarlos por medio de la acción directa, así como también actividades que los animen a buscar, explorar, analizar o procesar

de alguna otra manera la información que reciben en vez de solo responder a ella. Esto no solo incrementa el conocimiento disciplinar de los alumnos, sino que estimula su curiosidad y los ayuda a desarrollar estrategias generales para aprender a aprender, las que pueden ser usadas en otras situaciones.

En este sentido los descubrimientos hechos por los alumnos no ocurren por casualidad, ya que el profesor crea las condiciones para que estos se den. Los estudiantes necesitan estar preparados (la mente bien preparada requiere conocimientos declarativos, de procedimientos y condicionales). Según Schunk (1997), el hecho de que los alumnos posean la información preliminar y la estructuración cuidadosa del material a utilizar permite que estos descubran principios importantes. Por ello, no es necesario utilizar el aprendizaje por descubrimiento en cada ocasión, su utilización parece más apropiada si el proceso de aprendizaje es importante. El descubrimiento es especialmente ventajoso en las actividades de solución de problemas, que motivan a los estudiantes a aprender y adquirir las destrezas necesarias.

Arancibia (2011) plantea una serie de principios que rigen el aprendizaje por descubrimientos, entre los cuales tenemos:

1. Todo el conocimiento real es aprendido por uno mismo.
2. El significado es exclusivo del descubrimiento creativo y no verbal.
3. El conocimiento verbal es la clave de la transferencia.
4. El método del descubrimiento es el principal para transmitir el conocimiento.
5. La capacidad para resolver problemas es la meta principal de la educación.
6. El entrenamiento en la heurística del descubrimiento es más importante que la enseñanza de la materia de estudio.
7. Cada niño es un pensador creativo y crítico.
8. La enseñanza expositiva es autoritaria.
9. El descubrimiento organiza de manera eficaz lo aprendido para utilizarlo posteriormente.
10. El descubrimiento es el generador único de motivación y confianza en sí mismo.
11. El descubrimiento es una fuente primaria de motivación intrínseca.
12. El descubrimiento asegura la conservación del recuerdo.

En base a estos principios, Bruner propone una teoría de la instrucción, que considera 4 aspectos fundamentales: 1) predisposición a aprender, 2) estructura y forma del conocimiento, 3) secuencia de presentación y 4) forma y frecuencia del refuerzo. Esta teoría puede considerarse como una teoría prescriptiva, pues a diferencia de las otras teorías del aprendizaje o del desarrollo no busca describir lo que ocurre cuando el sujeto aprende, sino que se preocupa de establecer los medio ideales para que el aprendizaje se produzca de manera positiva (Arancibia & colaboradores, 2011).

- 1) Para lograr una *predisposición a aprender*, se debe activar la conducta de exploración por parte de los alumnos, la que se consigue presentando un grado adecuado de incertidumbre frente a un contenido, lo que aumenta su interés y curiosidad por la materia a estudiar. El grado de incertidumbre debe ser tal que no genere ansiedad o confusión en el caso de una incertidumbre excesiva, o una escasa motivación por ser algo rutinario (Arancibia & colaboradores, 2011).

Por otra parte, se debe mantener la conducta de exploración por medio de la trasmisión a los alumnos de que la búsqueda de alternativas a la incertidumbre plantee mayores beneficios que riesgos, es decir, que la exploración de alternativas erróneas no sea amenazante (Arancibia & colaboradores, 2011). Para Bruner, la exploración de alternativas erróneas son parte natural del aprendizaje por descubrimiento, además de ser fuente de motivación dado que estimulan la comprobación de las hipótesis que explora el estudiante (Good & Brophy, 2000).

Bruner destaca que la exploración debe tener un grado de dirección determinado, conociendo de antemano los objetivos de la tarea, sin que con esto se merme la creatividad del estudiante.

- 2) En *relación a la estructura y forma del conocimiento*, existen tres modos de presentación de cualquier dominio de conocimiento: enactivo (representa la acción a realizar), icónica (imágenes, gráficos, etc.) y simbólica (representaciones lógicas). Dichas formas de representación deben adecuarse a la persona (en especial a su edad o desarrollo particular) y la materia que se desea enseñar. Cabe señalar que el desarrollo intelectual progresa de lo enactivo a lo icónico y de este a lo simbólico

(Arancibia & colaboradores, 2011). Bruner indica que la buena instrucción se conecta con las representaciones previas de los estudiantes respecto al tema a tratar. A medida que progresan en su aprendizaje, desarrolla mejores relaciones entre los distintos modos de representación de su experiencia y extiende su conocimiento a otros campos de aplicación (Good & Brophy, 2000).

- 3) La *secuencia de presentación* del contenido consiste en ofrecer a los estudiantes una guía secuenciada en forma de afirmaciones acerca de un problema o dominio de contenidos de tal forma que el estudiante alcance el objetivo esperado, potenciando su capacidad para comprender, transformar y transferir lo que está aprendiendo.

La forma de presentar el contenido y la secuencia que se le da al mismo no es igual para todos los alumnos, ya que esto depende de múltiples variables que afectan a la efectividad con la cual será aprendido. Entre estas tenemos: aprendizajes previos del estudiante, etapas de desarrollo intelectual, velocidad de aprendizaje, resistencia al olvido, capacidad de transferencia de los contenidos y las características de la materia a enseñar (Arancibia & colaboradores, 2011).

Bruner propone que el estudiante debe estar expuesto a los mismos temas generales en forma periódica, pero instándolos a abordar los nuevos contenidos con una profundidad mayor y con una forma y secuencia acorde al desarrollo del niño (que varía de año en año). Estos postulados se resumen al proponer que la planificación de los contenidos de la educación formal conforme un currículum en espiral (Good & Brophy, 2000).

- 4) El refuerzo para Bruner es considerado como una retroalimentación, la cual se relaciona estrechamente con la cercanía en que se encuentra el estudiante del contenido que debe aprender y que tiene como objetivo el orientar al alumno en su exploración.

El aprendizaje depende en gran medida de que el alumno constata sus resultados en algún momento, para así poder corregir su desempeño. Es por esto que la efectividad del refuerzo en relación con su forma y frecuencia depende de tres aspectos básicos: el momento en que es entregado (su utilidad aumenta si se entrega

durante el proceso de exploración, cuando el estudiante está comparando sus resultados intermedios con los criterios que desea lograr, de tal forma que pueda enmarcarlos dentro del proceso mayor que está llevando a cabo), de las condiciones del alumno (para que el refuerzo sea efectivo, se debe resguardar que el nivel de ansiedad sea moderado, así como de que exista una flexibilidad en las ideas) y la forma en que se entrega (concordante con el modo de presentación, que permita corregir errores, pero que no sature de información) (Arancibia & colaboradores, 2011).

En definitiva, el aprendizaje por descubrimiento es una estrategia pedagógica de gran utilidad, que puede ser usada por los profesores para lograr en los alumnos un aprendizaje significativo. Como se mencionó anteriormente, una metodología de enseñanza basada en el aprendizaje por descubrimiento no implica que todos los contenidos sean enseñados de este método, sino más bien que se debe utilizar de un modo complementario a otros, como por ejemplo al aprendizaje por recepción. Por lo tanto, es tarea de los profesores identificar cuando utilizar esta metodología, en relación con el contenido que se está enseñando, los conocimientos de los alumnos, etc. A fin de que de esta forma se pueda potenciar su efectividad, influyendo de manera positiva en el aprendizaje de los alumnos.

## **2. Inteligencia Espacial.**

### **2.1. Teoría de las Inteligencias Múltiples.**

En 1979 la fundación Bernard Van Leer de la Haya le encargó a un pequeño grupo de investigadores de la Escuela Superior de educación de Harvard la realización de un estudio sobre un tema de gran trascendencia: la naturaleza del potencial humano y su realización. Entre los miembros de este grupo de investigación, formado mayoritariamente por psicólogos evolutivos, se encontraba Howard Gardner.

El estudio culminó en 1983 con la publicación de *“Frames of Mind”*. De los principales puntos que trata esta investigación, Gardner elaboró su teoría de las “inteligencias múltiples”.

Antes de abordar lo que trata esta teoría es imprescindible establecer primero qué es lo que se entiende por inteligencia. Para abordar esta temática se creó un simposio (organizado en 1921 por *The Journal of Educational Psychology*) sobre el significado de la inteligencia y del cual surgieron numerosas definiciones:

- "la capacidad de aprender", según Buckingham.
- "La aptitud para dar respuestas correctas desde el punto de vista de la verdad o los hechos", según Thorndike.
- "La capacidad para realizar pensamientos abstractos", según Terman.
- "La capacidad del individuo para adaptarse adecuadamente a situaciones relativamente nuevas de la vida", según Pintner.
- Algo "que comprende dos factores: la capacidad de conocimiento y el conocimiento poseído" según Hemmon.
- "La capacidad de adquirir capacidades", según Woodrow.

De las definiciones expuestas, se puede concluir que a pesar de las diferencias entre ellas todas ven a la inteligencia desde una óptica unidimensional; es decir, describen la existencia de un solo tipo de inteligencia, de tal forma que las personas que responden a los parámetros que ella mide son las que se consideran como personas inteligentes. Esta idea se vio reforzada con el éxito que tuvieron (y tienen aún) los test de inteligencia, los cuales fueron elaborados originalmente por el Psicólogo Alfred Binet a comienzos del siglo XX. Desde su introducción, la inteligencia pasó a ser cuantificable y su nivel de logro a ser expresado mediante el coeficiente intelectual (C.I.), ...“Podía medirse la altura real o potencial de una persona, y a partir de ese momento, por lo visto, también se podía medir su inteligencia real o potencial” (Gardner, 1998, pág. 23); en otras palabras, se dispone de una herramienta que permite medir la capacidad intelectual de cada individuo, de tal forma que es posible clasificar a todo el mundo. Está claro que este método funciona bien para algunas personas, como lo atestigua lo que sucede en las escuelas de Harvard; puesto que este método es claramente meritocrático, lo que implica que tiene argumentos para ser reconocible.

Por el contrario, Gardner plantea una visión diferente de la inteligencia humana, una visión pluralista de la mente, en donde es posible reconocer diferentes facetas de la

cognición teniendo en cuenta que las personas tienen diferentes potenciales cognitivos. Esto conlleva a la existencia de diversos estilos cognitivos (Gardner, 1998). Por esta razón, él plantea la abolición de los test de inteligencia y la búsqueda de fuentes de información más naturales acerca de cómo la gente de todo el mundo desarrolla capacidades que son importantes para su modo de vida; debido a que las habilidades, destrezas, capacidades y conocimientos que un grupo de personas considera valiosos son las que determinarán si las personas que los poseen son consideradas inteligentes. Las características que definen a una persona como inteligente varían de acuerdo a los diferentes grupos humanos.

Es por lo anterior que Gardner define a la inteligencia como: “la capacidad para resolver problemas, o para elaborar productos para un determinado contexto comunitario o cultural” (Gardner, 1998, pág. 25).

Los estudios de Gardner lo llevaron a plantear la existencia de siete tipos de inteligencia, las cuales son:

- **Inteligencia lingüística:** Es la capacidad para usar el lenguaje de manera efectiva, sea en forma oral o de manera escrita. Esta inteligencia incluye la capacidad para modificar la sintaxis, semántica o significados del lenguaje
- **Inteligencia lógica-matemática:** Como su nombre lo dice es la capacidad lógica y matemática, así como Científica.
- **Inteligencia espacial:** Es la capacidad para formar un modelo mental de un mundo espacial y para maniobrar y operar usando este modelo.
- **La inteligencia corporal y cinética:** Es la capacidad para resolver problemas o para elaborar productos empleando el cuerpo, o parte del mismo.
- **La inteligencia musical:** Es la que permite crear sonidos, melodías y ritmos. Es la requerida para expresar emociones e ideas a través de la música.
- **La inteligencia interpersonal:** Es la capacidad para entender a otras personas.
- **Inteligencia intrapersonal:** Es la capacidad de formarse un modelo ajustado y verídico de uno mismo, y de ser capaz de usar este modelo para desenvolverse eficazmente en la vida.

Cabe destacar que el orden en que estas inteligencias son plateadas no refleja una importancia mayor de unas sobre otras, ya que todas tienen el mismo grado de importancia.

De acuerdo con este planteamiento, el logro académico de una persona dependerá mucho de la medida en que disponga de las diferentes inteligencias, por lo que es importante prestar atención a cada una de ellas, las cuales se desarrollan de acuerdo a las oportunidades de aprendizaje que se tengan; sabiendo que no todos aprenden lo mismo, de la misma forma, ni al mismo ritmo (Gardner, 1995). Asimismo, se afirma que todas las personas poseen los siete tipos de inteligencia, pero unas más desarrolladas que otras, resaltando la influencia que tiene la herencia, la educación y el ambiente para el desarrollo de cada una de ellas (Gardner, 1983).

Es por ello que el objetivo de la educación escolar debería ser desarrollar las diferentes inteligencias y ayudar a las personas a alcanzar los fines vocacionales y aficiones que se adecuen a su particular espectro de inteligencias, ya que no todo el mundo tiene los mismos intereses y capacidades. Esto hace que sea de máxima relevancia el reconocer y alimentar toda la variedad de inteligencias humanas y todas sus combinaciones, dado que es aquello lo que hace a los seres humanos únicos e invaluables.

### **2.1.1. La Inteligencia Espacial.**

Como ya se mencionó anteriormente, Gardner define a la inteligencia espacial como: “la capacidad para formar un modelo mental de un mundo espacial y para maniobrar y operar usando este modelo” (Gardner, 1998, pág. 29).

Esta tipo de inteligencia la presentan las personas que son capaces de hacer un modelo mental en tres dimensiones del mundo o que son capaces de extraer un fragmento del él, lo que es fundamental en el desarrollo de diversas profesiones u oficios, como lo son: la ingeniería, la arquitectura, la marina, la fotografía, el diseño, la escultura, etc.

Para poder llegar a clasificar a la “capacidad” espacial como un tipo de inteligencia, primero se debe clarificar su importancia como medio para crear algún producto o dar solución a ciertos problemas que son de importancia para alguna sociedad, como por ejemplo, el navegar por los mares del sur (del mundo) utilizando la posición de las estrellas como punto de referencia y las islas circundantes, a partir de lo cual el capitán debe calcular

las distancias que lo llevaran de un punto a otro, a pesar de no poder ver su lugar de destino (Gardner, 1983). Asimismo, debe ser susceptible de codificarla en un sistema simbólico (aunque no es excluyente) y debe poseer una operación nuclear identificable o un conjunto de ellas.

En relación con el último punto, diversos investigadores han identificado diferentes competencias o habilidades espaciales. Algunas de las teorías más aceptadas son el trabajo de Lohman (1985) y el meta-análisis de Linn & Peterson (1985), los que distinguen tres categorías o componentes que forman la habilidad espacial:

- *Percepción espacial*: Se refiere a la capacidad de ubicar, orientarse y hallar la referencia a la línea horizontal (por ejemplo, en las pruebas con recipientes que contienen líquido, anticipar la línea de éste cuando se incline el recipiente). En general, las tareas de percepción espacial requieren usar el punto de gravedad, la vertical y en este caso, las estrategias más exitosas son las que recurren a indicadores gravitacionales y kinestésicos, más que a índices simplemente visuales.
- *Rotación mental*: Alude a la capacidad de girar mentalmente objetos bidimensionales o tridimensionales en bloque. Shepard & Metzler (1997) sugieren que esta habilidad se halla gobernada por un proceso semejante a una gestalt, un proceso cognitivo que se corresponde con la rotación física.
- *Visualización*: Es uno de los constructos mejor definidos en la literatura sobre el tema. Lohman (1985) lo caracteriza como la habilidad para generar una imagen mental, efectuar transformaciones mentales sobre ésta y retener los cambios producidos. Lo esencial de esta habilidad es el control mental que se ejerce sobre la imagen. Las transformaciones son procesos complejos que pueden darse por síntesis (como en el armado de rompecabezas), por movimiento o por desarrollo de superficies, lo cual requiere imaginar plegamientos en dos o tres dimensiones, a partir de un estímulo visual. En este tipo de tareas se requieren varios pasos de manipulación mental, que pueden incluir la rotación de partes, pero también plegado, reconocimiento de figuras o partes ocultas, diseños de bloque, etc. La visualización no debe confundirse con la memoria visual, que es una forma estática o reproductiva de visualización mientras que el factor llamado *manipulación visual*,

o simplemente *visualización*, es dinámico y requerido para la resolución de tareas que exigen mover, rotar o invertir mentalmente uno o más objetos.

Los autores Halpern & LaMay (2000) añaden otros dos tipos o categorías: *habilidad espacio-temporal* y *memoria de imagen espacial*. La primera se refiere a la capacidad de identificar cambios producidos por aspectos dinámicos en los que actúa el tiempo con referente al espacio, lo que implica que en un momento determinado el objeto tiene una forma, orientación y color; mientras que en otro momento estas características cambian, de manera tal que se puede identificar como la capacidad de respuesta al movimiento visual. El segundo hace referencia a generar en la mente una imagen y utilizarla para realizar una determinada tarea cognitiva; por ejemplo, generar una imagen como la forma de una letra del alfabeto y a continuación utilizar la información en la imagen para realizar una determinada tarea.

Otros investigadores como Pellegrino, Alderton, & Shute (1984) y Olkun (2003) simplifican ésta clasificación a dos categorías:

- Relaciones espaciales, se define como la habilidad para imaginar rotaciones en 2D y 3D. (Según los autores, esta capacidad incluye las categorías “rotaciones mentales” y “percepción espacial”).
- Visualización espacial, es la habilidad de reconocer objetos tridimensionales mediante el plegado y desplegado de sus caras.

Tomando otro enfoque Maier (1998) propone cinco componentes principales en las habilidades espaciales y los define de la siguiente forma:

- Relaciones espaciales, se refiere a la percepción de la posición de un objeto en relación a una posición anterior, considerando tamaño, distancias, volumen o cualquier otro signo distintivo.
- Percepción espacial, es la capacidad para determinar las relaciones espaciales entre objetos, a pesar de la existencia de información que no es significativa.
- Visualización espacial, es la capacidad de manipular mentalmente las imágenes visuales. Esto puede implicar imaginar las rotaciones de objetos en el espacio.

- Rotación mental, se refiere a la capacidad de rotar mentalmente imágenes visuales. Estas imágenes pueden ser bidimensionales o tridimensionales.
- Orientación espacial, es la capacidad de orientarse física o mentalmente en el espacio. La posición espacial de una persona es esencial para esta tarea.

De las habilidades espaciales que aquí se exponen (y de otras), las cuales conforman las operaciones nucleares en las que se descompone la inteligencia espacial, se puede inferir que al menos dos factores coinciden de manera constante: “relaciones espaciales”, que se identifica con la rotación mental, y “visualización”, que incluye todas las tareas espaciales realizadas mentalmente.

## **2.2. Habilidad de Representación.**

El currículum de matemática propone el desarrollo de ciertas habilidades por parte de los alumnos, las que serán fundamentales para alcanzar un manejo pleno dentro de la disciplina. Entre ellas tenemos: resolver problemas, representar, modelar y comunicar y argumentar. Tales habilidades se interrelacionan y juegan un papel fundamental en la adquisición de nuevas destrezas, conceptos y en la aplicación de conocimientos en contextos diversos.

En cuanto a la habilidad de Representación, si esta es desarrollada, permitirá que los “estudiantes sean capaces de transitar entre los distintos niveles de representación (concreto, pictórico y simbólico), traduciendo situaciones de la vida cotidiana a lenguaje formal o utilizando símbolos matemáticos para resolver problemas o explicar situaciones concretas.” (MINEDUC, 2014, pág. 22).

Los niveles de representación que se mencionan anteriormente, se pueden relacionar con la “teoría de representación del conocimiento”, que fue propuesta por Bruner. En esta, se afirma la existencia tres maneras de representar el conocimiento; estas son: la representación en acto o enactiva, la representación icónica y la representación simbólica (Bruner, 1964).

La representación en acto consiste en representar un concepto en base a las acciones que se pueden realizar con él (Schunk, 1997). Por su parte, la icónica es aquella en que el

conocimiento es representado a través de un conjunto de imágenes o gráficos que explican un concepto, sin necesidad de definirlo en forma precisa (Arancibia & colaboradores, 2011). Por último, la representación simbólica consiste en utilizar símbolos para codificar la información, como por ejemplo, en matemática cuando se usa una notación para indicar un concepto abstracto (Schunk, 1997).

De las tres maneras de representar el conocimiento que fueron planteadas por Bruner, la representación en acto es la primera en desarrollarse, luego la icónica y finalmente la simbólica. Por esta razón, cuando se pretende instruir un nuevo conocimiento se debe comenzar por trabajarlo de manera concreta, para avanzar luego a un estudio en base a imágenes, para por último trabajar con el concepto en forma pura (abstracta). Por ejemplo, para que los alumnos comprendan el concepto de número primero se les hace contar objetos tangibles, donde cada objeto representa un valor real (una silla es una silla, dos mesas son dos mesas, etc.); luego se les enseña a representar objetos con algún símbolo, como por ejemplo círculos o rayas (dos mesas se pueden representar con dos rayas); para finalmente, indicar que las dos rayas se representan a través del símbolo “2”.

Para trabajar la matemática en cualquier nivel de manera precisa se requiere conocer un lenguaje simbólico (abstracto). Para poder alcanzarlo se hace necesario que los alumnos desarrollen una comprensión concreta y pictórica de los conceptos que están detrás de este lenguaje, logrando así transitar fluidamente desde la representación concreta hacia la pictórica, para avanzar progresivamente hacia la simbólica. Las metáforas, las representaciones y las analogías juegan un rol clave en este proceso y permiten que los estudiantes construyan sus propios conceptos matemáticos.

“Representar tiene grandes ventajas para el aprendizaje; entre ellas, permite relacionar el conocimiento intuitivo con una explicación formal de las situaciones; potencia la comprensión, memorización y explicación de las operaciones, relaciones y conceptos matemáticos y brinda un significado cercano a las expresiones matemáticas” (MINEDUC, 2014, pág. 24). De esta manera, la matemática se vuelve accesible para todos al ser cercana a la experiencia de vida de cada uno, ampliándose así el número de estudiantes que se interesen por aprenderla.

“Los estudiante adquieren conocimientos por medio del “aprender haciendo” en situaciones concretas, traduciéndolas a un nivel gráfico y utilizando símbolos matemáticos; de esa manera, logra un aprendizaje significativo y desarrolla su capacidad de pensar matemáticamente” (MINEDUC, 2014, pág. 24).

Los estudiantes deben de ser capaces de extraer información desde el entorno, representándola de diversas maneras (tablas, gráficos, diagramas, metáforas, símbolos matemáticos, etc.) según las necesidades de la actividad o la situación; deben ser capaces de interpretar y utilizar representaciones concretas, pictóricas y/ o simbólicas para resolver problemas, e identificar la validez y limitaciones de esas representaciones según el contexto.

### **2.3. Relación entre la Habilidad de Representación y la Inteligencia Espacial.**

La inteligencia espacial al igual que los demás tipos de inteligencia es innata en el ser humano, forma parte de la herencia genética de la especie, por lo que se manifiesta universalmente, como mínimo en su nivel básico, independiente de la educación y del apoyo cultural (Gardner, 1998). Pese a ello, su adecuada evolución dependerá en gran medida de la orientación que tengan las acciones pedagógicas en pos de su desarrollo.

La habilidad en bruto de la inteligencia espacial (innata), es la capacidad para distinguir coloraciones, formas y distancias en objetos tridimensionales. Por lo mismo, se debe tomar como punto de partida para su desarrollo, independiente del área y el contenido a tratar, actividades que involucren los objetos del entorno a través de un trabajo de exploración y descubrimiento de sus cualidades, lo que se ve facilitado al darles a los estudiantes la oportunidad de manipular objetos, para que así puedan percibir sus cualidades y características por medio de los sentidos. Con esto ellos podrán describir lo que ven, tocan y sienten. Por lo tanto, es conveniente que en primera instancia se aborde el conocimiento desde un nivel de representación concreto, en donde se les permita a los alumnos la manipulación de objetos tangibles, lo cual constituye el primer paso para el desarrollo de la inteligencia espacial y de todas las habilidades que esta encierra. De este

modo, para que los estudiantes sean capaces de rotar mentalmente los objetos y percibir las relaciones entre ellos, primeramente deben apreciarlas y generarlas sobre objetos reales.

Una vez que los estudiantes se familiaricen con la representación concreta del conocimiento, será necesario avanzar paulatinamente hacia la representación pictórica, la cual se caracteriza por presentar el conocimiento por medio de imágenes, gráficos, esquemas, etc. Esta forma de representar el conocimiento facilita la adquisición de una de las habilidades estructurales de la inteligencia espacial, que es la visualización. No obstante, la presentación de imágenes es sólo el primer paso para el desarrollo de la visualización, pues los estudiantes deben ser capaces, además de reproducir mentalmente las imágenes, de realizar manipulaciones sobre ellas (girarlas, reflejarlas, trasladarlas, plegarlas, etc.) (Reyes, Dissett, Gomarz, & Colaboradores, 2013).

Los estudiantes que presentan mayor maestría en el dominio de la inteligencia espacial consideran que las herramientas visuales como las imágenes, los dibujos, los videos, las tablas, y las pizarras interactivas les ayudan a recuperar información importante (Arnold & Fonseca, 2004). Por ello, se les debe brindar la oportunidad de dibujar, pintar, manipular, y crear representaciones visuales.

Finalmente, el nivel de representación simbólico se relaciona con la inteligencia espacial mediante el sistema simbólico de codificación de este tipo de inteligencia. Es sabido que este tipo de sistema debe existir para que una determinada cualidad sea considerada como una inteligencia (bajo los parámetros que Gardner plantea). La adquisición de un lenguaje simbólico ocurre luego de la interiorización de los conceptos que este encierra, es decir, primero se debe lograr una abstracción de las ideas planteadas, para luego ser capaz de expresarlas por medio de un lenguaje disciplinario.

La inteligencia espacial se construye por intermedio de la exploración activa y la modelación del espacio, la cual se entiende como un proceso cognitivo de interacciones, que avanza desde un etapa sensorio-motora a una etapa conceptual o abstracta, relacionado con la capacidad de representar internamente el espacio, reflexionando y razonando sobre sus propiedades (Shannon, 2013). Por lo tanto, las materias nuevas debieran, en general, enseñarse primero a través de la acción, para luego transitar por el nivel pictórico (cada uno

en el momento adecuado de desarrollo de los alumnos), alcanzando finalmente el nivel simbólico. En el fondo, conviene pasar un período de conocimiento “no-verbal”; es decir, primero descubrir y captar el concepto y después darle el nombre.

### **3. Educación Matemática.**

#### **3.1. Importancia de la Enseñanza de la Geometría.**

Desde épocas antiguas grandes civilizaciones tales como los egipcios, los babilónicos, los sumerios, entre otras, le han dado relevancia al estudio de conceptos, propiedades y nociones geométricas. Esto se debe a que tal conocimiento permite resolver problemáticas cotidianas tan indispensables como la medida del tamaño de los campos o el trazado de ángulos rectos para las esquinas de los edificios (Fénix, 2014), lo cual es esencial en el desarrollo arquitectónico y territorial de cualquier pueblo.

Posteriormente, los griegos se encargaron de sistematizar la geometría, dándole a aquella una estructura formal, en donde se tomaba como base un conjunto de conceptos primitivos, axiomas y postulados desde los cuales se desarrollaban definiciones y posteriormente se enunciaban teoremas, los que eran demostrados mediante deducciones lógicas. De esta manera, la geometría, que hasta ese entonces era sólo un conocimiento concreto y práctico, pasó a ser una disciplina formal (ordenada) y con algo de abstracción, pues objetos reales como un pozo o una pared cuadrada eran representados por una circunferencia o un cuadrado (Tortosa & Vicent, 2012). La razón principal a la que se le atribuye la importancia que adquirió la geometría en la cultura griega es que para ellos la geometría permitía conocer y comprender la armonía y perfección del universo, al igual que para preparar el espíritu para unirlo con la divinidad (Reyes, Dissett, Gormaz, & Colaboradores, 2013), por lo cual la instrucción en la geometría tenía una perspectiva religiosa. Esto queda de manifiesto en el diálogo de Sócrates y Glaucón, que se expone en la obra “LA REPÚBLICA” de Platón.

Debido a la visión divina que le atribuían los griegos a la matemática (y en particular a la geometría), ellos le quitaron interés a su utilidad práctica y se concentraron en la resolución de problemas que constituían acertijos y juegos matemáticos, pero que

carecían de utilidad práctica pues para ellos el placer no se encuentra en buscar la aplicación de este, sino que está en resolverlo. Algunos ejemplos de dichos problemas son: la duplicación del cubo (que consiste en construir un cubo cuyo volumen sea el doble del de un determinado cubo), la cuadratura del círculo (el cual consiste en construir un cuadrado que tenga igual área que un determinado círculo) y la trisección de un ángulo (que consiste en dividir un ángulo en tres partes iguales) (Mataix, 1986).

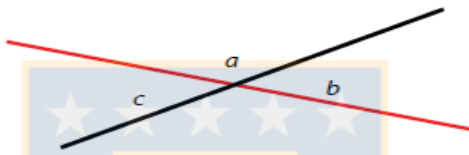
Avanzando más adelante en la historia, con el surgimiento de la ciencia moderna, donde se destacan los estudios de personas como Galileo Galilei e Isaac Newton; se recupera el carácter práctico que había tenido la geometría en un principio y se le adhieren aplicaciones en el campo de la física (Reyes, Dissett, Gormaz, & Colaboradores, 2013). A esto se le agrega el nacimiento de nuevas aristas de la geometría, tales como la geometría analítica, la geometría proyectiva y la geometría topológica; las cuales abordan aspectos de la geometría que no eran considerados anteriormente.

Hoy en día, también se considera importante enseñar geometría, lo que se refleja al ser esta uno de los cuatro ejes en los que se divide la formación matemática en los planes y programas de estudio de matemática del MINEDUC; enfocándose en el de octavo básico, el cual expresa, de manera resumida, que la geometría sirve para que “los estudiantes desarrollen sus capacidades espaciales y la comprensión del espacio y sus formas” (MINEDUC, 2014). Sin embargo, al realizar un análisis reflexivo sobre todas las razones existentes que explican por qué se enseña la geometría se encuentran más de una.

La primera justificación de por qué enseñar la geometría es el hecho de que el espacio físico está rodeado por figuras, conceptos y relaciones geométricas (García & López, 2008), por lo cual la geometría modela el entorno; es decir, la geometría es la matemática del espacio (Bressan, Bogisic, & Crego, 2000). Para ejemplificar aquello, basta considerar una habitación que es muy probable que tenga forma de prisma rectangular con sus caras, aristas y vértices; por ende, las paredes y el techo de la pieza tienen forma rectangular, este último es paralelo al piso y perpendicular a cada pared; si hay alguna ventana esta posiblemente tendrá una forma cuadrada o rectangular, con lados que son segmentos de recta; al abrir o cerrar la puerta de la habitación se forman distintos ángulos; el piso puede que esté cubierto de mosaicos que tienen forma de una o varias figuras

geométricas que cubren el plano sin dejar huecos y en él se pueden observar diversas transformaciones geométricas: rotaciones, traslaciones y simetrías (García & López, 2008).

También cabe señalar la oportunidad que entrega la geometría para ejercitar la argumentación, la deducción lógica y la resolución de problemas; ya que esta tiene una estructura sustentada por el razonamiento lógico, donde cada resultado es consecuencia de generalizar o aplicar las verdades ya demostradas. Un ejemplo de ello es la siguiente situación: Los alumnos podrían medir los ángulos de la siguiente figura y encontrar que la medida del ángulo **a** más la medida del ángulo **b** suman  $180^\circ$  y también, midiendo, pueden encontrar que el ángulo **b** mide lo mismo que el ángulo **c**.



En un nivel de razonamiento deductivo, sin necesidad de medir, los estudiantes pueden deducir que los ángulos **a** y **b** suman  $180^\circ$  y argumentar: porque los lados rojos de estos ángulos forman una línea recta y esto hace que ambos formen un ángulo de  $180^\circ$ . También pueden deducir que los ángulos **b** y **c** miden lo mismo, con el siguiente razonamiento: el ángulo **a** más el ángulo **b** suman  $180^\circ$  y el ángulo **a** más el ángulo **c** suman  $180^\circ$ , entonces el ángulo **b** y el ángulo **c** miden lo mismo”. (García & López, 2008). Además, sobre este aspecto, Bressan, Bogisic & Crego mencionan que “La geometría ayuda a estimular habilidades de pensamiento y estrategias de resolución de problemas. Da oportunidades para observar, comparar medir, conjeturar, imaginar, crear, generalizar y deducir. Tales oportunidades pueden ayudar al alumno a cómo descubrir relaciones por ellos mismos” (Bressan, Bogisic, & Crego, 2000, pág. 15). Es por todo esto que Plantón asegura que “la aritmética y la geometría son una propedéutica de la dialéctica” (González).

También es importante destacar a la geometría como medio de percepción espacial y visualización. Para todos los seres humanos es imprescindible tener la habilidad de visualizar objetos en el espacio y comprender como estos se relacionan. Lo mismo ocurre

con la capacidad de leer representaciones en dos dimensiones de objetos del espacio tridimensional. Una clara manera de ejemplificar aquello es cuando se debe armar un mueble siguiendo las instrucciones de armado en un plano e imaginar cómo quedará una vez armado (Bressan, Bogisic, & Crego, 2000). De todos los contenidos de geometría, el que tiene un rol fundamental para el desarrollo de las habilidades espaciales es el de transformaciones isométricas (o isometrías). En relación a este aspecto Bressan, Bogisic, & Crego (2000) indican que “investigar los movimientos rígidos por desplazamientos, rotaciones y simetrías provee de excelentes oportunidades para desarrollar y refinar las habilidades espaciales como también para estudiar en sí mismos los distintos tipos de movimientos y sus propiedades” (Bressan, Bogisic, & Crego, 2000, pág. 14).

En resumen, el estudio de la geometría ha sido relevante a lo largo de toda la historia humana, a pesar que su centro de interés ha ido variando a lo largo del tiempo. En un comienzo su importancia radicaba en su carácter netamente práctico, pero con el paso del tiempo su importancia se desplazó hacia lo racional-espiritual debido a su utilidad para desarrollar la argumentación y para comprender la estructura del universo. Posteriormente, se diversificaron sus campos de estudio e interés. En la actualidad, su importancia se le atribuye a diversas razones. Algunas de ellas son: que el entorno está lleno de formas geométricas, que el conocimiento geométrico permite resolver problemas cotidianos, que la geometría ayuda a potenciar las habilidades de orientación, visualización y percepción espacial. Por dichas razones, en los Principios y Estándares para la Educación Matemática (2000) del National Council of Teachers of Mathematics se afirma que “la geometría ofrece medios para describir, analizar y comprender el mundo y ver la belleza en sus estructuras”.

### **3.2. Enseñanza de la Geometría en Chile.**

Para enfocarse en la enseñanza de la Geometría en Chile es necesario considerar el libro “Enseñanza de la geometría”, escrito por Silvia García y Olga López, en donde se indica que es posible evidenciar que muchos de los profesores limitan la geometría a cuestiones métricas, de área, volumen y ángulos; mientras que para otros la geometría se relaciona con el conocer figuras o relaciones geométricas con dibujos, reconociendo a esto como un glosario geométrico ilustrado (García & López, 2008). Tal situación genera que los estudiantes manifiesten un inadecuado aprendizaje y los profesores, en su mayoría, no

tienen las herramientas y estrategias para lograr revertir ésta situación. En consecuencia, la enseñanza de la geometría se ha convertido en un círculo de repetición de experiencias que no ayudan, ni llevan a una mejoría sino que solo a desvalorar por parte de los estudiantes la enseñanza de ella. Esto se debe en especial al problema de que algunos profesores no saben exactamente el cómo contextualizar las actividades al entorno real de los estudiantes, o que en otras ocasiones, no conocen la utilidad del contenido específico, lo que hace que los estudiantes no le den importancia al no sentir cercano ni útil el contenido que está siendo aprendido.

Sobre este tema, Sergio Venegas (2015), Magíster en Didáctica de las Matemáticas, afirma que el gran problema que existe en la educación chilena respecto de la geometría son los propios docentes, quienes evitan enseñar geometría, pues muchos de ellos desconocen o conocen superficialmente los contenidos, “esta situación es preocupante y se debe componer desde las bases, para eso es necesario que los futuros docentes comprendan su papel en este escenario” (Venegas, 2015), donde para él este problema está siendo transversal, es decir, todos los niveles de educación se ven afectados: básica, media y en la enseñanza superior, a pesar de la relevancia que esta materia reviste en el Currículum de matemática. De tales problemas (que actualmente tiene la enseñanza de la geometría en Chile) nace la necesidad básica, que el profesor tenga las herramientas para formular diversas maneras de enseñanza, pensando en los distintos estilos de aprendizaje de sus estudiantes.

Roberto Araya quiso ir más lejos, analizó 720 videos de profesores realizando clases en aulas chilenas, lo cual le permitió recopilar información detallada acerca de cómo se realizan las respectivas clases de matemáticas (Araya, 2008). De este informe se pueden sacar muchas conclusiones, de las cuales son dos las que más llaman la atención con respecto a la geometría:

- Existen sólo dos tipos de trabajo en aula: uno consiste en explicaciones y preguntas del profesor desde el pizarrón; en cambio, en el otro los estudiantes trabajan una guía y el docente se pasea por los puestos entregando explicaciones individuales.

- Los profesores que trabajaron el eje de geometría dedicaron gran parte del tiempo a mostrar, dibujar, recortar y pegar figuras geométricas, pero poco tiempo al análisis de situaciones.

Estas conclusiones no aseguran la inexistencia de otras prácticas pedagógicas en clases de geometría que se realizan en las aulas chilenas, pero sí muestran una clara tendencia por parte de los profesores de matemática. Por todo aquello es necesario que el proceso de aprendizaje-enseñanza de la geometría sea continuo; es decir, que este proceso sea activo y permanente, en el cual los estudiantes participen de su propio aprendizaje y el profesor se adecue a las características de sus alumnos y evite utilizar métodos memorísticos, ya que esto no arroja ningún aprendizaje. De este modo, se vuelve imprescindible que los profesores demuestren a los estudiantes que la matemática y sobre todo geometría no son monótonas y un mero formalismo, sino que son entretenidas y de gran utilidad para enfrentar problemáticas del diario vivir.

Para reforzar y respaldar todo lo ya expuesto, es necesario darle un vistazo a los resultados de la prueba SIMCE. En esta prueba se han detectado dificultades en matemática, específicamente, en el área de la geometría. Por ejemplo, en el informe de resultados del SIMCE 2014 para 8° básico, realizado por el Ministerio de Educación Unidad de Currículum y Evaluación (UCE) y el Sistema de Medición de la Calidad de la Educación (SIMCE), se aprecia que el 39,9% de los estudiantes tiene un nivel de aprendizaje insuficiente. Más aún, según MINEDUC, los estudiantes que quedan clasificados en este nivel no logran demostrar consistentemente que han adquirido los conocimientos y las habilidades más elementales estipuladas en el currículo para el período evaluado; mientras que solo el 17,9% de los estudiantes desarrollan un aprendizaje adecuado (Agencia de Calidad de la Educación, 2015).

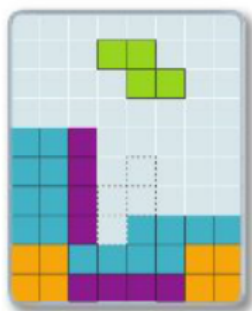
Entonces, basta formularse la siguiente interrogante ¿Se está enseñando a los estudiantes la geometría de manera adecuada? Esta y muchas otras pueden ser las preguntas a formular sobre la enseñanza de la geometría, pues no existe una única metodología formal de enseñanza avalada por todos los expertos de la educación que presente la forma correcta de realizar esta labor. No obstante, esto brinda una gran oportunidad para que cada docente aplique el método de enseñanza que él estime conveniente, el cual dependerá de la realidad

de los estudiantes y de su entorno. En consecuencia, la metodología más adecuada será aquella que logre un aprendizaje significativo en los estudiantes y que no sólo se traduzca en buenos resultados, sino también en el desarrollo de las habilidades y destrezas que se deben desarrollar con el fin de solucionar problemas prácticos de la vida cotidiana.

### **3.3. Transformaciones Isométricas (o Isometrías).**

En el sistema educacional chileno la unidad de transformaciones isométricas, correspondiente al eje de geometría, se encuentra inserta tanto en los programas de estudio de octavo básico como de primero medio. Desde hace un largo tiempo esta unidad ha venido siendo enseñada en base a una metodología que se caracteriza principalmente por abordar el contenido desde lo pictórico (en base a imágenes) y por entregar las definiciones de las diferentes transformaciones isométricas sin inducir las. La metodología que se utiliza para afrontar esta unidad se ve reforzada con el planteamiento que hacen los textos de estudio sobre dicho tema, pues en ellos se aprecia claramente esta forma de abordar el contenido, que se expone de la siguiente manera: en primer lugar, se parte con una situación que viene acompañado por una imagen que sirve para contextualizar el concepto de transformación isométrica. A continuación se explica brevemente el origen de la palabra isometría, para luego dar una definición de la misma. Posteriormente se muestran ejemplos de algunas de ellas. En particular, en el libro “Puentes del saber” de matemática para 8° año básico (publicado por la editorial Santillana en el año 2014) se introduce la unidad de transformaciones isométricas de la siguiente manera:

## Transformaciones isométricas



La imagen muestra un juego de video en el que se aplican repetidas veces distintos movimientos a diferentes figuras para hacerlas encajar.

- Considerando la jugada que aparece en la imagen, marca con un ✓ el movimiento que debes aplicar a la figura de color verde para hacerla encajar correctamente en la posición marcada con línea de puntos.



Cuando se aplica una transformación a una figura u objeto, la que modifica su posición sin alterar su tamaño ni su forma, se habla de **transformación isométrica**. Con esto se obtiene otra figura, denominada **imagen** de la figura inicial.

A medida que avanzan las clases se enfatiza en cada uno de los tres tipos de transformaciones isométricas (traslación, simetría y rotación), dando ejemplos de estos y realizando ejercicios cuyo énfasis es distinguir cada transformación isométrica. Otra de las actividades que se trabajan con los alumnos es la construcción de las transformaciones. A pesar de ello su importancia de ver disminuida en pos de las actividades de reconocimiento y representación gráfica. Para ejemplificar esto, cabe presentar las actividades que se proponen en el texto escolar del MINEDUC para 8° año básico del 2014 (publicado por la Editorial Galileo); estas son:

### 3-1 Transformaciones isométricas

Indica si en cada caso hay traslación, rotación o reflexión.

1.

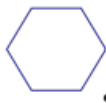


2.

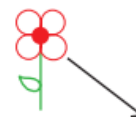


Dibuja cada transformación.

3. Dibuja una rotación de  $180^\circ$  en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del punto.



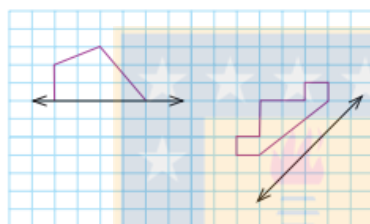
4. Dibuja una traslación.



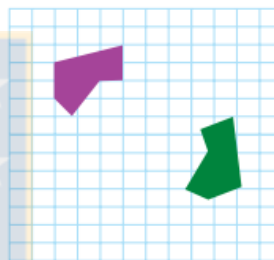
### 3-2 Traslaciones, reflexiones y rotaciones

Representa gráficamente cada transformación.

5. Refleja las figuras con respecto al eje dado.



6. Encuentra el eje de simetría, de modo que una de las figuras sea la imagen reflejada de la otra.



El avance tecnológico de los últimos años ha permitido la creación de diversos softwares aplicables a diferentes áreas. En el caso de la Educación matemática, específicamente en la didáctica de la geometría, la incorporación de procesadores geométricos ha sido de gran impacto.

En la investigación contenida en la tesis doctoral “La enseñanza y aprendizaje de la Geometría en enseñanza media. Un procesador Geométrico como medio didáctico” que trata sobre la implementación de softwares geométricos en la enseñanza de la disciplina, se ha concluido que su uso es “adaptable a la ingeniería didáctica del docente y a la vez adaptable a la proactividad e inquietud de los alumnos” (Galaz, 2015, pág. 66). Por lo mismo, se sugiere el empleo de este tipo de herramientas para reforzar la didáctica de la geometría.

En el caso de la unidad de Transformaciones isométricas, el uso de procesadores geométricos ya está incorporado en el diseño e implementación de este tema. Tanto es así,

que se han redactado aprendizajes esperados en base al empleo de dichos programas, lo que se traduce en que los textos escolares incorporen actividades basadas en el trabajo con este tipo de herramientas. De este modo, la utilización de procesadores geométricos en la enseñanza de Transformaciones isométricas es loable, debido a que estos tienen ventajas: favorece la manipulación sobre objetos geométricos y permite desarrollar construcciones con gran precisión.

Si bien es cierto que los procesadores geométricos tales como Cabri y Geogebra posibilitan la exploración en los alumnos, lo que se enmarca en el enfoque constructivista de la enseñanza (Galaz, 2015), la realización de las clases con estos no está exenta de desventajas; las que pueden ser técnicas (cortes de electricidad, contar con pocos computadores o computadores en mal estado) y disciplinares (que los estudiantes se pueden salir del programa y ejecutar otras aplicaciones o las dificultades para controlar a todo el curso dentro del laboratorio). A esto se le añade que, a pesar de facilitar la construcción de isometrías y el movimiento de las figuras, aquellas acciones se efectúan sobre una imagen y no sobre un cuerpo tangible. Por lo tanto, es necesario implementar una metodología para enseñar transformaciones isométricas que aborde este tema desde una perspectiva concreta, que se caracterice por partir por un descubrimiento del conocimiento a través de la manipulación de material didáctico concreto, a fin de luego llevar a cabo la dichas acciones sobre imágenes y finalmente representar tales acciones mediante un lenguaje simbólico. Con ello se estará logrando realizar una correcta representación del conocimiento en sus tres niveles (concreto, pictórico y simbólico).

## **4. Material Didáctico.**

### **4.1. Material Didáctico Para la Enseñanza.**

En la didáctica escolar, el material didáctico es una herramienta de gran utilidad que contribuye fuertemente en el aprendizaje de los estudiantes. Existen diversos y variados tipos de materiales didácticos, los que se pueden clasificar de muchas formas; según su importancia, su función, su utilidad, etc. Además, estos ayudan al docente a impartir su clase, ya sea mejorándola o simplemente sirviendo de apoyo en su labor.

Según el MINEDUC, el término material didáctico hace referencia a “aquellos medios y recursos que facilitan la enseñanza y el aprendizaje, dentro de un contexto educativo, estimulando la función de los sentidos para acceder de manera fácil a la adquisición de conceptos, habilidades, actitudes o destrezas” (MINEDUC, 1999). De esta manera, la importancia que tiene la utilización de material didáctico se relaciona estrechamente con el diseño de actividades que promueven el desarrollo integral y el aprendizaje significativo en los estudiantes. Tanto es así que es el mismo MINEDUC quien afirma que “los estudiantes aprenden mejor cuando interactúan y se involucran en los procesos de manera activa”; mencionando que los materiales didácticos son recursos metodológicos que posibilitan que este proceso se dé adecuadamente, pues ofrecen una gama amplia de posibilidades de interacción, exploración, creación y lo que es más importante, de integración de las experiencias y conocimientos previos de los niños en las situaciones de aprendizajes para generar nuevos conocimientos. Por otra parte, el material didáctico enriquece el ambiente educativo, pues da la posibilidad de que el educador ofrezca situaciones de aprendizaje entretenidas y significativas para los niños, estimulando la interacción entre pares y por tanto desarrollando habilidades sociales (respetar turnos, cooperar, compartir, entre otras), permitiendo así, que los niños resuelvan problemas, se planteen interrogantes, se anticipen a situaciones y efectúen nuevas exploraciones y abstracciones.

Desde otro punto de vista, según T. Sánchez Iniesta, miembro del Forum Europeo de Administración de la Educación, el lograr un aprendizaje significativo en los alumnos requiere de docentes altamente capacitados que no sólo impartan clases, sino que también contribuyan a la creación de nuevas metodologías, materiales y técnicas, que hagan más sencillo a los alumnos el proceso de adquisición de conocimientos y habilidades que les sean útiles y aplicables en su vida personal, académica y profesional. Así, debe generarse un modelo escolar donde los alumnos sean protagonistas de su propio proceso de aprendizaje y en donde los docentes atiendan a la diversidad del grupo-curso. Para lograr aquello, se hace imprescindible emplear una abundante y variada gama de materiales didácticos (Sánchez, 1995). De esto se deriva la importancia de los materiales didácticos, cuyos objetivos principales serán el de facilitar y potenciar el desarrollo de la enseñanza que se quiere entregar. Otra razón por la cual los materiales didácticos son importantes es

porque sirven como medio para motivar y reforzar los aprendizajes, como material de trabajo en el proceso de una actividad, como instrumento de consulta y como medio para difundir temas de actualidad.

Dada sus características, que varían de acuerdo a sus utilidades, los materiales y recursos didácticos constituyen un apoyo valioso en el desarrollo de las actividades de aprendizaje significativo. Ahora bien, “Para que el aprendizaje sea lo más significativo posible se requiere que los contenidos tengan sentido y que se cumpla una serie de condiciones desde el punto de vista de la persona que tiene que aprender: que puede establecer una conexión entre los nuevos contenidos y los aprendizajes previos, que los nuevos contenidos sean adecuados a las capacidades de quien aprende, que éste se implique mentalmente en el proceso de aprendizaje, que se creen conflictos cognitivos, que se dé una predisposición o motivación para aprender, etc. Los materiales (y de manera muy especial el uso que se haga de ellos) hacen que generen procesos coherentes con dicha condición” (Parcerisa, 1996, pág. 51). Por este motivo, al elegir un material didáctico se debe tener en cuenta la coherencia que debe tener con el plan de aprendizaje y metodológico que se quiere desarrollar. Siguiendo con ello, los materiales didácticos deben ser coherentes con el modelo de aprendizaje que se quiere desarrollar, sencillos con su manejo, y con la suficiente variedad; de tal manera que puedan garantizar su utilidad en las diversos contextos que puedan surgir en el tratamiento de los contenidos, adaptándose a su vez a las habilidades y destrezas previas de los estudiantes.

## **4.2. Material Concreto y Manipulación.**

Un tipo de material didáctico es el material didáctico concreto, que según Rojas E., “es cualquier objeto usado en los centros educativos que sirve como medio de enseñanza o aprendizaje. Se refiere a todo instrumento, objeto o elemento que el maestro facilita en el aula de clases, con el fin de transmitir contenidos educativos desde la manipulación y experiencia que los estudiantes tengan con estos” (Rojas, 2003). De acuerdo al autor, es indispensable que al utilizar el material concreto los estudiantes experimenten y descubran el concepto desde la estimulación de sus sentidos, logrando llegar a interiorizar los conceptos que se quieren aprender. Esto está en concordancia con lo asegurado por Piaget, pues “De acuerdo con la teoría de Piaget, la acción, el manipular con y sobre los objetos, es

de fundamental importancia ya que por medio de esa acción el niño incorpora a su pensamiento, los esquemas que servirán de base a las nociones que se pretende que alcance” (Lydia P. de Bosh, 1974, pág. 93). Es más, Piaget junto a Inhelder aseguran también que el niño aprende a partir de la acción sobre los objetos, dado que la manipulación permite hacer representaciones mentales que favorecen la construcción y la interiorización de conceptos (Piaget & Inhelder, 1975). Junto a estos académicos son numerosos los expertos que han investigado este campo; psicólogos, pedagogos matemáticos y educadores; entre estos se destacan:

María Montessori, pionera en el uso de materiales manipulativos, sostiene que “el niño tiene la inteligencia en la mano”, considera que los niños aprenden conceptos a partir de la manipulación y experimentación de los objetos; el material llama al niño, lo estimula y guía (Montessori, 1914).

Decroly parte de la observación de la naturaleza y de la manipulación para despertar el interés y la intuición de los aprendices (Decroly, 1965).

Freinet considera que las personas aprendemos a partir de las propias experiencias (Freinet, 1968).

Spencer cree que lo que el aprendiz descubre por medio de la observación y la manipulación queda mejor aprendido que todo lo que se le pueda explicar (Spencer, 1989).

Y al igual que estos autores existen muchos que a lo largo de la historia han expresado la importancia del material concreto y manipulable, pero en sí, todos llegan a conclusiones similares, que la manipulación con material didáctico concreto es un paso necesario e indispensable para la adquisición de competencias matemáticas. Pero no es la manipulación en sí lo importante para el aprendizaje matemático, es la acción mental que se estimula cuando los estudiantes tienen la posibilidad de tener en sus manos un material concreto. Según Zoltán Dienes, popular por sus avances en matemática y en educación a partir de juegos, la acción con los materiales debe ir acompañada de la expresión oral, a fin de lograr realizar juegos y deducciones sin el material, para lo cual también es fundamental tener en cuenta la representación gráfica e incluso simbólica (Dienes, 1970).

#### 4.2.1. ¿Por qué Recurrir al Material Concreto en la Enseñanza de la Geometría?.

De acuerdo a recientes investigaciones, se ha comprobado que el grado de retención que logra una persona, se describe de la siguiente manera: “retenemos el 10% de lo que leemos, el 20% de lo que oímos, el 30% de lo que vemos, el 50% de lo que vemos y oímos, el 70% de lo que decimos y discutimos y el 90% de lo que decimos e inmediatamente realizamos” (Villaruel, 1995, pág. 199).

En esto recae la dificultad de someterse a un proceso de aprendizaje–enseñanza carente de materiales concretos, puesto que toda la evidencia científica afirma como éste genera experiencias, desarrollando en los estudiantes aprendizajes significativos y duraderos.

De este modo, el dibujo bidimensional se puede considerar como inspirador de intuiciones geométricas, pero es insuficiente para la enseñanza de la geometría dadas las siguientes conclusiones:

- El dibujo no permite tratar completamente los problemas, ya que ofrece un número limitado de opciones al abordarlo y compromete así la libertad del pensamiento del estudiante.
- No conduce a la observación, por lo tanto, no puede llevar a la intuición de la verdad, por el hecho de ser estático.
- No puede suministrar una imagen real de una situación espacial.

Es así como se concluye que, el dibujo bidimensional es insuficiente en la enseñanza de la geometría. En cambio, el material concreto favorece el desarrollo de capacidades sintéticas y analíticas del estudiante.

Tomando en consideración esto, se hace evidente la importancia que tiene el utilizar material didáctico concreto para abordar los contenidos de los diferentes subsectores, ya que los diferentes materiales didácticos constituyen un medio imprescindible en el proceso de aprendizaje-enseñanza de los estudiantes. Asimismo, ayuda al estudiante a desarrollar su pensamiento, destrezas y habilidades, favoreciendo así la comprensión de los contenidos y conceptos que se desean enseñar, y la estimulación de las necesidades intelectuales de los

estudiantes. De este modo, el material didáctico permite que ellos se motiven, experimenten, descubran y, en definitiva, aprendan.

También cabe señalar que el uso de un tipo particular de material didáctico en específico responde a los objetivos que se desean lograr con el estudio de un determinado contenido o unidad; es decir, la idoneidad de un material u otro depende tanto del contenidos como de los objetivos. Por lo mismo, cuando el objetivo de una unidad es el desarrollar alguna habilidad como la representación o habilidades espaciales la correcta elección del material didáctico será clave en el éxito o fracaso en el logro de dicho objetivo. Llevando esto a la matemática, el material didáctico concreto viene a permitir la manipulación y a complementar las acotadas opciones que tienen los estudiantes para solucionar los problemas que se presentan mediante imágenes. Esto es consecuente con las implicancias que se desprenden de la teoría de Piaget, dado que, según lo planteado por él, se aprende de lo que se manipula.

### **4.3. El Tangrama Como Material Didáctico.**

#### **4.3.1. Definición de Tangrama.**

El tangrama es un juego muy antiguo, se constituye probablemente como el juego de rompecabezas más antiguo que se conoce, pero a pesar de su antigüedad, sigue aún en vigencia.

El primer tipo de tangrama, llamado también tangrama tradicional, tangrama chino, pinyin, juego de los siete elementos, tabla de la sabiduría, siete tableros de astucia (todos estos haciendo referencia a las cualidades que el juego requiere) consiste en formar siluetas, ya sean de personas, animales u objetos, usando la totalidad de sus piezas, sin que ellas se superpongan unas a otras (Educarchile, 2016).

Miller, Heeren, & Hornsby (2006) definen al tangrama como un juego de entretenimiento, que accede a la creación de innumerables cuerpos geométricos con una forma determinada, además de estimular la imaginación, la creatividad, desarrolla destrezas motrices como exactitud y precisión manual beneficiando las experiencias sensoriales, también, promueve habilidades mentales como la concentración, análisis, comparación,

relación y el sentido de orientación. Beneficioso en la educación de la matemática para generar conocimientos de geometría plana y promover el desarrollo de capacidades psicomotrices e intelectuales en los estudiantes, pues permite ligar de manera lúdica la manipulación concreta de materiales con la formación de ideas abstractas.

#### **4.3.2. Historia del Tangrama.**

No se sabe con certeza quién inventó el juego, ni cuando lo hizo, la más antigua de las referencias conocidas es un libro publicado en China en 1803 (Gardner M. , 1988), otra versión sostiene que el juego tiene su origen en la época en la que reinó en China la dinastía Tang, de donde se derivaría su nombre (Rodríguez, 2004).

Las primeras publicaciones en las que aparecen son del siglo XIX en Nueva York y en ese entonces, el juego ya era muy conocido en varios países de Europa como Inglaterra, Italia, Francia y Austria. Pese a ello, hay una leyenda muy popular sobre el origen de este juego. Esta leyenda cuenta que el tangrama se originó hace muchos años en China donde “un sirviente chino fue enviado por su amo a que le trajese desde otra ciudad un plato muy hermoso y decorado. En el camino, se tropieza y cae, quebrando el plato en varios pedazos. Al llegar, asustado, se le ocurrió ofrecer a su amo un juego que consistía en armar un rompecabezas con los pedazos del plato siguiendo los dibujos de éste, con el argumento que ese era el último juego de ingenio que circulaba. Tanta fue la pasión que puso en este juego, que su amo no reparó mayormente en el destrozo y se dedicó por mucho tiempo a armar su rompecabezas y a crear otras figuras a partir de esto”. Debido a ello, el tangrama fue llamado "el rompecabezas chino" y se volvió tan popular que lo jugaban niños y adultos, personas comunes como personalidades del mundo de las ciencias y las artes. Así, el tangrama se pasó a convertirse en una diversión universal.

#### **4.3.3. Tipos de Tangrama.**

Al comienzo, solo existía el Tangrama Chino, sin embargo, con el pasar del tiempo el tangrama ha creado distintas variaciones interesantes, de manera que existen muchos tipos (Chik-Bekada, 2006), los cuales permiten trabajar siluetas y figuras distintas; tales como:

- **Tangrama Chino o Tradicional:** Consta de 7 piezas, que se generan de seccionar una región cuadrada en cinco triángulos isósceles rectangulares de 3 tamaños diferentes (un par de triángulos isósceles que corresponden a la cuarta parte de la superficie cuadrada, un triángulo isósceles mediano que corresponde a la octava parte de la región y un par de triángulos isósceles pequeños que corresponden a la decimosexta parte de la región cuadrada), un cuadrado que corresponde a la octava parte de la región y un paralelogramo que corresponde a la octava parte de la región.



**Imagen 1**

- **Tangrama de Fletcher:** David Erik Fletcher fue un profesor de inglés, lleva este nombre en su honor al formular interesantes propuestas de trabajo a partir de este recurso (Fletcher & Ibbotson, 1965).

El tangrama de Fletcher es un rompecabezas de 7 piezas al igual que el tangrama tradicional, pero se diferencia en sus piezas que lo conforman, pues tiene dos triángulos rectángulos isósceles que corresponden a la decimosexta parte de la región, dos triángulos rectángulos isósceles que corresponden a la octava parte de la región, un cuadrado que corresponde a la octava parte de la región, un cuadrado que corresponde a la cuarta parte de la región y un paralelogramo que corresponde a la cuarta parte de la región.

A pesar de tener el mismo número de piezas, las figuras que se pueden formar con todas las piezas son muchas menos.



**Imagen 2**

- **Cardiotangrama:** Este tangrama se conforma por 9 piezas. Un trapecio rectángulo, un paralelogramo, un triángulo rectángulo, un cuadrado, 3 piezas congruentes que corresponden a la cuarta parte de una círculo, 2 piezas congruentes que corresponden a la octava parte de un círculo. Estas 9 piezas permiten formar la superficie con forma de corazón lo cual da origen a su nombre.

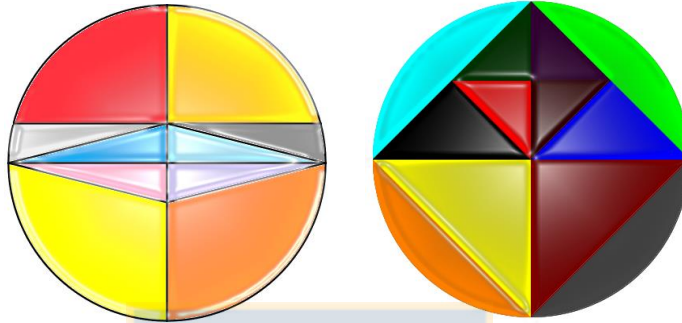


**Imagen 3**

- **El Tangrama Circular:** Existen 10 variaciones para el tangrama circular. Los dos más conocidos son:
  - Tangrama circular de 10 piezas: Se compone de 10 piezas, seis de las cuales tienen un lado curvo, siendo 3 pares de piezas distintas entre ellas; las otras cuatro piezas corresponden a 4 triángulos rectángulos congruentes.
  - Tangrama circular de 12 piezas: Se compone de 12 piezas. Su característica principal es que forman un cuadrado inscrito en una circunferencia; donde el cuadrado se divide en 2 triángulos isósceles rectángulos que corresponden cada uno a la cuarta parte del cuadrado, 2 triángulos isósceles rectángulos

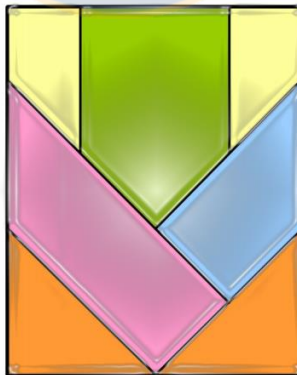
que corresponde cada uno a la octava parte del cuadrado, 4 triángulos isósceles rectángulo que corresponden a la octava parte del cuadrado y cuatro piezas que tienen un lado curvo que son congruentes entre ellas.

En general, las 10 variaciones que tiene este tipo de tangrama tienen como característica principal que sus piezas forman un círculo perfecto.



**Imagen 4**

- **Tangrama Pitagórico:** Se compone de 7 piezas. Dos trapezios rectángulos congruentes, dos trapezios rectángulos de tamaños diferentes, dos triángulos isósceles rectángulos congruentes y un pentágono con tres ángulos rectos que se obtienen seccionando una región rectangular.



**Imagen 5**

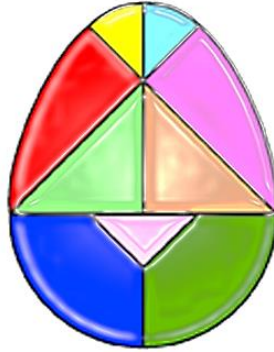
- **Tangrama Triangular:** Existen dos grandes variaciones de este tangrama, que tienen como característica principal que sus piezas forman una superficie triangular.
  - Tangrama Triángular de 7 piezas: Se compone de 7 piezas. Dos triángulos equiláteros congruentes que corresponde cada una a la cuarta parte de la región triangular, tres triángulos equiláteros congruentes que cada una corresponde a la novena parte de la región y dos trapecios congruentes que corresponden a la doceava parte de la superficie triangular.
  - Tangrama triangular de 8 piezas: Se compone de 8 piezas. Un triángulo isósceles que corresponde a la trigésima sexta parte de la región triangular, un hexágono que corresponde a la sexta parte de la región triangular, un trapecio que corresponde a la doceava parte de la región triangular, un trapecio que corresponde a las  $\frac{5}{36}$  partes de la región triangular, un trapecio que corresponde a las  $\frac{7}{36}$  partes de la región triangular, un paralelogramo que corresponde a la decimoctava parte de la región triangular, un rombo que corresponde a las  $\frac{4}{5}$  partes de la región triangular.



**Imagen 6**

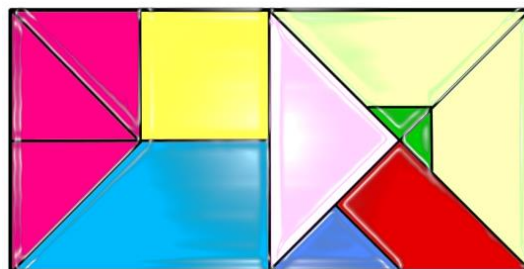
- **El Tangrama de Huevo u Ovalado:** Compuesta por 9 piezas que al igual que el Cardiotangrama y el Tangrama circular tienen seis de sus piezas con un lado curvo. La historia cuenta que los hermanos e ingenieros, Otto y Gustav Lilienthal, inventaron una forma de reproducir unos bloques de manera manual, llamados piedras de Anker, a partir de arena de cuarzo, yeso y aceite de linaza. La patente de estos bloques fue adquirida posteriormente por Friedrich A. Richter, quien a partir de 1890 lanzó una línea de puzzles hechos con piedras Anker que podían combinarse

para formar figuras nuevas. Uno de ellos fue el tangrama de huevo, que vio la luz en 1893, y en el cual se proponían la formación de 95 figuras diferentes con las nueve piezas componentes. (Mendoza Bautista, 2014)



**Imagen 7**

- **Tangrama Ruso:** Forma una región rectangular compuesto por 12 piezas. Tres triángulos rectángulos isósceles congruentes que corresponden cada una a la decimasexta parte de la región rectangular, un cuadrado que corresponde a la octava parte de la región rectangular, un trapecio rectángulo que corresponde a las  $\frac{3}{16}$  partes de región rectangular, un triángulo rectángulo isósceles que corresponde a la octava parte de la región rectangular, un triángulo rectángulo isósceles que corresponde a la trigésima segunda parte de la región rectangular, un trapecio rectángulo que corresponde las  $\frac{3}{32}$  partes de la región, dos trapecios isósceles que corresponde cada una a las  $\frac{15}{128}$  partes de la región rectangular y dos triángulos rectángulos isósceles que corresponden a las  $\frac{1}{128}$  partes de la región rectangular.



**Imagen 8**

Además, se pueden mencionar el Tangrama de 4 y 5 piezas, el Tangrama de 9 piezas, el Tangrama de Brugner, el Armonigrama y el Hexagrama, entre otros; lo que demuestra la versatilidad de los tangramas en cuanto a forma y cantidad de piezas que los constituyen.

#### **4.3.4. Utilidad y Aplicación del Tangrama en Distintas Disciplinas.**

Desde que se conoce el Tangrama, época donde la tecnología estaba en proceso de evolución, el juego era una de las fuentes de inspiración para fantasear y llegar a las más sofisticadas creaciones de siluetas, en este caso, el Tangrama es la fuente de inspiración para la introducción a los conceptos de la matemática y con ello el avance de las distintas habilidades que puede llegar a desarrollar, lo que conlleva a que se plantee como una nueva estrategia de aprendizaje; la utilización del tangrama como recurso didáctico.

Navarro (2008) afirma que el Tangrama en los últimos años se ha convertido en una herramienta vital para las diferentes disciplinas que lo utilizan, pues es primordial para mejorar la creatividad y útil para el desarrollo de habilidades psicomotrices.

Entre las distintas disciplinas que pueden utilizar el tangrama como material de apoyo o didáctico y de entretenimiento están:

- **Psicología y filosofía:** Donde los Tangramas son utilizados como técnicas para evaluar la creatividad (Domino, 1980), la amplitud de la memoria y el desarrollo de inteligencias múltiples (Piraquive, López, & Llamas, 2015).
- **Diseño y diseño arquitectónico:** Donde los Tangramas son utilizados en geometría dinámica para arquitectos en la realización de distintos proyectos (Bamba Vicente, 2012)
- **Enseñanza a nivel escolar de disciplinas como:**
  - **Física:** Donde Nibha Jain confirma la eficacia que tiene el tangrama, tanto en temas de aplicación y versatilidad para enseñar física (2010) como por ejemplo en la unidad de Las fuerzas en el movimiento circular uniforme en el contenido de Nociones básicas de vectores.

- **Artes visuales y Tecnología:** Utilizados en la confección de los tangramas, a partir de diferentes materiales ya sean materiales como madera, acrílico, materiales reciclables, etc. (Cuba Silva, 2016)
- **Historia y Lenguaje:** Donde los tangramas son utilizados para proporcionar a los niños historias hechas con siluetas de un tangrama para luego copiarlas a su cuaderno. Una vez que los estudiantes se familiarizan con la fabricación, le permite pasar el tiempo haciendo su propia historia y ilustrarlos con piezas del tangrama. (Lee, Lee, & Collins, 2012).
- **Matemáticas:** En las matemáticas es donde más se aplica el Tangrama, especialmente en conceptos geométricos en los que se destacan según Navarro (2008) los siguientes:
  - Cálculo de áreas en cuadrados, triángulos, rectángulos, trapecios, paralelogramos; entre otras figuras.
  - Cálculo de perímetros en polígonos y siluetas.
  - Reconocimiento y clasificación de figuras geométricas.
  - Resolución de triángulos rectángulos por medio de la comprensión y aplicación del teorema de Pitágoras.
  - Identificación y clasificación de ángulos en las diferentes figuras geométricas que forman el tangrama.
  - Desarrollo del sentido espacial en el contenido de Transformaciones isométricas.

#### **4.3.5. Beneficios del Carácter Lúdico del Tangrama en la Enseñanza de la Geometría.**

Según Batllori (2001), la mayoría de los profesores ven como una pérdida de tiempo el uso de juegos en la enseñanza, cuando en realidad es una forma de aprendizaje magnífica. Aluden que el alumno aprende más en una hora de clase que en una hora de juego, ignoran que lo aprendido en el aula tradicional, lo pueden olvidar rápidamente (y de hecho lo olvidan, para desesperación de sus profesores), mientras que las experiencias vividas a través de actividades lúdicas quizás nunca se olviden, pues todos los estudiantes que encuentran interés en su trabajo y que son motivados para encontrar respuesta por sí

mismo, no solo adquieren una firme comprensión de los conceptos y experiencias, sino que también desarrollan motivación intrínseca y confianza en sí mismos que es esencial para comprender las matemáticas.

Este carácter lúdico del juego ofrece beneficios educacionales importantes, pues el manipular las piezas en diversas formas permite que se pueda avivar la creatividad e imaginación de los niños, ellos logran formar un sin número de figuras como animales, personas, objetos y al mismo tiempo interactuar e intercambiar ideas.

Así es como el Tangrama constituye una herramienta potente, ya que permite a los estudiantes apreciar la geometría, promoviendo actitudes positivas hacia las matemáticas y desterrando las ideas negativas que puedan tener. De esta manera se logra que los estudiantes inicialmente desinteresados opinen y aporten a los trabajos de los otros promoviendo el desarrollo de la perseverancia en ellos, puesto que, a través del juego, no se dan por vencidos y persisten en la búsqueda de soluciones.

Según Bohning & Althouse (1997), importantes investigadores dedicados a la enseñanza de la geometría con el uso del tangrama, experiencias como estas ayudan a los estudiantes a desarrollar sus habilidades en:

- Léxico geométrico.
- Atención y concentración.
- Formas de identificación.
- Razonamiento lógico.
- Orientación y sentido espacial.

Tales experiencias son especialmente importantes para los estudiantes, permitiéndoles reconocer, relacionar y apreciar la geometría en su mundo natural. Esto permite mejorar su sentido espacial. Sobre este tema, Juanita Copley (2000) señala que la habilidad que mayor desarrollo provee el tangrama, como recurso didáctico de carácter lúdico en la enseñanza de la geometría, es el sentido espacial.

Se observa finalmente que, el Tangrama bien explotado puede ser un elemento auxiliar de gran eficacia para trabajar conceptos geométricos, además de ayudar a favorecer

el desarrollo de un gran número de habilidades y conceptos relacionados con las matemáticas, ya sea desde el nivel preescolar hasta la enseñanza media e incluso la educación superior. Por consiguiente, el uso de este juego en la enseñanza es una forma poderosa de aprendizaje.



# CAPÍTULO III.

DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA.

---

# 1. PRESENTACIÓN DE LA PROPUESTA.

---

La presente propuesta metodológica tiene como propósito desarrollar la inteligencia espacial a través del desarrollo progresivo de la habilidad de representación en estudiantes de octavo año básico.

Para el logro de esta propuesta, se ha planteado una metodología didáctica innovadora, la cual está enfocada en la manipulación de material didáctico concreto, en este caso el tangrama, para el estudio de las Transformaciones Isométricas, unidad que pertenece al eje de Geometría de los Planes y Programas de estudio de Matemática de octavo año básico y primer año medio.

Por consiguiente, para llevar a cabo la propuesta en cuestión y así alcanzar su propósito, se definen las siguientes etapas:

## **Etapas 1.**

**Establecer las teorías de aprendizaje a la que se suscribe la propuesta:** en este contexto, luego de revisar las teorías sobre el aprendizaje del ser humano, se determinará en cuales de ellas se inserta el trabajo a realizar en esta propuesta y se argumentará tal correspondencia.

## **Etapas 2.**

**Identificación del grupo objetivo:** en esta etapa se enunciarán y justificarán las razones que conllevan a la elección del nivel académico al que estará destinado el desarrollo de la propuesta en cuestión.

## **Etapas 3.**

**Definir los aprendizajes esperados:** en esta etapa, se deben establecer aquellas metas o propósitos que los alumnos deben alcanzar mediante el proceso de aprendizaje-enseñanza. Para ello, se realizará una adaptación de los objetivos de aprendizaje que el Programa de Estudio de octavo básico propone, modificándolos en concordancia al propósito de la propuesta didáctica y secuenciándolos de forma inclusiva.

#### **Etapa 4.**

**Seleccionar el material didáctico:** aquí se efectuará una selección de tangramas, teniendo en cuenta sus características y en correspondencia con el trabajo de la unidad.

#### **Etapa 5.**

##### **Planificar la intervención:**

- 5.1) Diseñar las actividades:** este paso consiste en crear las actividades y guías de trabajo que se espera que los alumnos ejecuten y desarrollen, manteniendo una coherencia con los aprendizajes definidos y el material utilizado. Tales actividades se basarán en la manipulación de las piezas que conforman los tangramas ya seleccionados, los que serán entregados en forma tangible (de ser necesario, los tangramas pueden ser contruidos o confeccionados por los estudiantes, a fin de reforzar otros contenidos).
- 5.2) Diseño de los indicadores de logro:** en este paso se enunciarán aquellas acciones de los estudiantes que verifican el alcance de los aprendizajes esperados. Aquello entregará directrices para realizar los ítems involucrados en la correspondiente evaluación de la unidad.
- 5.3) Confeccionar la evaluación:** aquí se elaborará la evaluación que se aplicará al finalizar la unidad, la cual incluye tanto el procedimiento a implementar, como el instrumento usado en su corrección. Se debe procurar que estos tengan relación con el propósito de la propuesta y los aprendizajes esperados definidos.
- 5.4) Establecer la duración de la unidad:** se determinará el tiempo estimado para implementar completamente unidad. La fijación de la duración de la unidad tendrá en consideración las horas pedagógicas y semanales aproximadas.
- 5.5) Enunciar las sugerencias pedagógicas:** en este paso se redactarán todas las orientaciones pertinentes posibles para la correcta ejecución de la propuesta.

## **2. TEORÍAS DE APRENDIZAJE A LAS QUE SE SUSCRIBE LA PROPUESTA.**

---

Como toda propuesta didáctica, la actual no está exenta de sustentarse en una de las dos grandes corrientes psicológicas acerca del aprendizaje, que son el conductismo y el cognoscitivismo. Por esta razón, la propuesta a elaborar se apoya en una de ellas; en este caso, se optó por el cognoscitivismo, debido a que este mantiene mayor concordancia con el objetivo que se pretende lograr, el cual consiste en desarrollar la Inteligencia Espacial que se desglosa en una serie de habilidades operacionales.

Sobre las habilidades, el MINEDUC asevera que “son fundamentales para desarrollar un pensamiento flexible, adaptativo y crítico (...) ya que el aprendizaje involucra no sólo el saber, sino también el saber hacer y la capacidad de integrar, transferir y complementar los diversos aprendizajes en nuevos contextos” (MINEDUC, 2014, pág. 5). Si se analiza con cuidado lo antes expresado, se descubre que el desarrollo de habilidades, cualesquiera sean estas, requiere un cambio en las estructuras mentales de los alumnos, lo que está en correspondencia con la definición de aprendizaje que la teoría cognoscitiva sostiene.

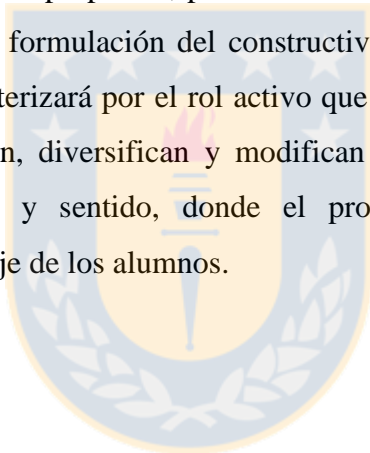
En el marco de la corriente cognoscitiva existen una gama de teorías sobre el aprendizaje; sin embargo, para desarrollar la propuesta en cuestión solamente se escogerán algunas de ellas. De estas, la más relevante, por la mayor injerencia que tendrá, es la Teoría de Aprendizaje por Descubrimiento, puesto que el método que se priorizará en la propuesta (para abordar los contenidos de la unidad) es el que plantea esta teoría. Tal método consiste (básicamente) en lograr aprendizaje significativo a través de una constante exploración y búsqueda de soluciones por medio un proceso inductivo; su finalidad es extraer patrones, propiedades y principios generales, formando así nuevos conocimientos.

Otra teoría que se contempla en el diseño de la propuesta (en menor medida) es el Aprendizaje por Receptación. En esta se postula un método de enseñanza de manera expositiva, en donde los contenidos son presentados de un modo muy ordenado y claro por medio de una constante interacción y el uso de organizadores temáticos y técnicas de señalamiento, lo que genera un aprendizaje significativo en los estudiantes. Dicho método,

aunque no será el primordial para trabajar la propuesta, estará considerado en algunas actividades.

Además de utilizar los métodos señalados anteriormente, en la propuesta se considerará también la realización de trabajo colaborativo y en equipo, ya que la interacción que se logra entre los participantes al hacerlo de esta forma permite generar nuevos conocimientos. Esto se ve respaldado por los postulados de Vygotsky acerca del trabajo en equipo y la Zona de Desarrollo Próximo, dado que los alumnos con mayor capacidad y más conocimientos pueden apoyar al resto para transitar desde lo que saben hasta lo que deben saber.

Ahora bien, por todo lo mencionado anteriormente queda en evidencia el enfoque constructivista que adopta esta propuesta, pues las teorías que la sustentan son las mismas que sirvieron de base en la formulación del constructivismo. En consecuencia, el trabajo con los estudiantes se caracterizará por el rol activo que deberán adoptar, ya que son ellos los que construyen, amplían, diversifican y modifican sus esquemas de conocimientos, concediéndoles significado y sentido, donde el profesor es un mediador entre el conocimiento y el aprendizaje de los alumnos.



### **3. IDENTIFICACIÓN DEL GRUPO OBJETIVO.**

---

La presente propuesta está diseñada para ser implementada en el nivel de octavo año básico de los establecimientos educacionales chilenos. La elección de este nivel educativo responde a dos causas; estas son:

En primer lugar, la unidad a tratar. La unidad seleccionada para el desarrollo de la propuesta es la de Transformaciones Isométricas, correspondiente al eje de geometría de los Planes y Programas de octavo año básico y primer año medio, establecidos por el MINEDUC. Para este caso se trabajará con el menor de ellos, puesto que de los objetivos de aprendizaje que se proponen para este nivel, que están orientados al trabajo en el plano euclidiano, se adecuan de mejor manera con los objetivos de la propuesta, al tipo de material a utilizar y las actividades que se dispondrán.

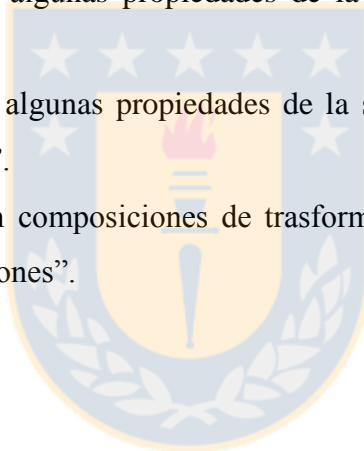
En segundo lugar, se encuentra el estadio de desarrollo cognitivo. El trabajo con estudiantes de octavo básico está fundamentado por el estadio de desarrollo cognitivo en que los estudiantes de este curso se encuentran, ya que según Piaget, los alumnos de este nivel educativo están en una etapa de transición entre los estadios de operaciones concretas (entre 7 y 12 años) y de operaciones formales (entre 12 y 14 años). Por lo mismo, sus pensamientos empiezan a dejar de ser exclusivamente concretos, para adentrarse en las ideas más abstractas. Esta etapa de transición provoca que existan dos grupos dentro del curso con etapas distintas, las cuales deben ser consideradas para implementar las unidades en este nivel. Es por ello que se consideró a este curso como idóneo para abordar los contenidos de la unidad, debido a que se empleará material concreto como punto de partida para el estudio de sus contenidos, siendo este aún novedoso y motivador para los estudiantes de este curso.

## 4. APRENDIZAJES ESPERADOS.

---

Luego de realizar un análisis del programa de estudio de Octavo año básico (2011), elaborado por el MINEDUC; se ha realizado una modificación de los Aprendizajes Esperados allí propuestos, con tal de poder abordar de manera completa cada una de las Isometrías (propiedades y construcción) antes de avanzar a la siguiente. De este modo, se definen los siguientes Aprendizajes Esperados:

- **A.E.1.** “Caracterizar las Transformaciones Isométricas de figuras planas y reconocerlas en diversas situaciones y contextos.”
- **A.E.2.** “Reconocer algunas propiedades de la traslación para luego ser capaz de construirla”.
- **A.E.3.** “Reconocer algunas propiedades de la rotación para luego ser capaz de construirla”.
- **A.E.4.** “Reconocer algunas propiedades de la simetría (reflexión) para luego ser capaz de construirla”.
- **A.E.5.** “Construyen composiciones de transformaciones isométricas y las utilizan para realizar teselaciones”.



## 5. PLANIFICACIÓN DE LA UNIDAD.


**Observación:** En la siguiente planificación se exponen las actividades con sugerencias, justificaciones teóricas y pedagógicas sobre algunas decisiones pedagógicas tomadas en el desarrollo de ellas.

<b>Institución Educativa:</b>	
<b>Curso:</b> Octavo año básico.	
<b>Unidad Temática:</b> Transformaciones Isométricas.	
<b>Objetivo General:</b> Comprender las Transformaciones isométricas en sus diferentes niveles de representación.	
<b>Tiempo Estimado:</b> 24 horas pedagógicas (3 semanas).	
<b>Conceptos Previos:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Circunferencia.</li> <li>• Polígonos.</li> <li>• Ángulos en polígonos.</li> <li>• Distancia entre punto y recta.</li> <li>• Área en regiones planas.</li> </ul>
<b>Conductas Previas:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Utilizan correctamente regla, compás y transportador.</li> <li>• Construyen ángulos y polígonos.</li> <li>• Reconocen características de los polígonos.</li> <li>• Reconocen ejes de simetría de un polígono.</li> <li>• Calculan áreas y miden longitudes y ángulos.</li> </ul>
<b>Objetivos Fundamentales Transversales:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Demostrar curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades, incluso cuando no se consigue un resultado inmediato.</li> <li>• Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor en la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales.</li> <li>• Fomentar la cooperación y respeto para trabajar de equipo.</li> </ul>

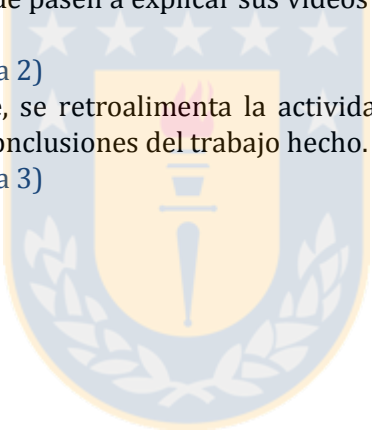
Aprendizajes Esperados	Contenidos	Actividades	Sugerencias Pedagógicas	Materiales
<p><b>A.E.1.</b> Caracterizar las transformaciones isométricas de figuras planas y reconocerlas en diversas situaciones y contextos.</p>	<p>Concepto de Transformaciones Isométricas.</p>	<p><b>Actividad 1.</b></p> <p>Los alumnos desarrollan la guía de trabajo N° 1, para lo cual deben utilizar las piezas del tangrama chino previamente entregado. A continuación responden las siguientes preguntas, contenidas en la guía:</p> <p>(Sugerencia 1) ¿Qué representa la silueta diseñada? ¿Qué movimientos tuvo que realizar a cada una de las piezas?</p> <p>(Sugerencia 2) ¿Cómo es el área del tangrama original en relación con la silueta creada?</p> <p>(Justificación 1) ¿Hubo alguna modificación en la forma de las piezas? ¿En qué se diferencian las piezas del tangrama original del de las imágenes?</p> <p>(Justificación 2) Finalmente, todo lo anterior lleva a que se establezca el concepto de transformación Isométrica como: “Aquella transformación que no altera ni la forma ni el tamaño de la figura en cuestión y que solo involucra un cambio de posición de ella (en la orientación o en el sentido)”.</p>	<p><b>Sugerencia 1.</b> Para facilitar la revisión de la actividad, el profesor selecciona a algunos alumnos, para que pasen a replicar su silueta a la pizarra. Dependiendo de la disponibilidad de recursos dicha acción, puede ser realizada con la ayuda de algún procesador geométrico o programa especializado, así como con una pizarra digital. Independiente del recurso escogido, las piezas ya deben estar confeccionadas de tal forma que el alumno solo debe replicar los movimientos.</p> <p><b>Sugerencia 2.</b> Como muy probablemente los estudiantes designaron denominaciones diferentes a los diversos movimientos realizados para la construcción de la silueta, por ejemplo: mover, correr, voltear, girar, etc. El profesor propone una clasificación de estos según el tipo de movimiento. Para designar los nombres de dicha clasificación puede ayudarse de conceptos conocidos de otras áreas, por</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Guía de trabajo N° 1 (Ver Anexo 1).</li> <li>• Tangrama Chino.</li> <li>• Proyector multimedia.</li> </ul>


			ejemplo: el movimientos de los planetas para la rotación, el reflejo de un espejo para la reflexión o simetría y la necesidad de desplazarse de un lugar a otro dentro de una ciudad para la traslación.		
		<b>Justificaciones Pedagógicas</b>		<b>Justificaciones Teóricas</b>	
		<p><b>Justificación 1.</b> La inclusión de esta pregunta (a pesar de no estar relacionada con la unidad a tratar), tiene como objetivo que los alumnos rememoren el contenido de área de figuras planas, en particular la propiedad que señala que el área de una figura es igual a la adición del área de sus partes, debido a lo evidente que resulta esto en el trabajo con tangramas.</p> <p><b>Justificación 2.</b> Con estas preguntas se espera que los estudiantes lleguen a la conclusión de que las piezas cambian sólo en su posición y orientación, pero no se alteran en su forma y tamaño.</p>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Teoría de la educación dialógica de Paulo Freire: Debido a que el tipo de preguntas que se plantean invitan al alumno a pensar, no simplemente a recordar lo que el profesor expone.</li> <li>• Aprendizaje por Descubrimiento de Jerome Bruner: ya que el material utilizado permite, por medio de la exploración y manipulación, generar e inducir nuevos conceptos.</li> </ul>	
		<p><b>Actividades 2.</b>  Los alumnos se ordenan en grupos de trabajo para la realización de la Guía de Trabajo N° 2. (Sugerencia 1) (Justificación 1) Una vez realizada la primera parte de la guía, que consiste en observar e identificar las Transformaciones Isométricas, se</p>		<p><b>Sugerencia 1.</b> La cantidad de miembros de cada grupo dependerá del número de alumnos del curso. Por otra parte, el mecanismo que se utiliza para conformar los grupos queda a criterio del profesor.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Guía de trabajo N° 2 (Ver Anexo 2).</li> <li>• Modelo de tangrama circular.</li> </ul>	

		<p>selecciona algunos alumnos al azar (tomados de distintos grupos) y les pregunta por el movimiento de algunas en particular.</p> <p>Posteriormente, se les facilita un modelo sólido del mismo tangrama a fin de que desarrollen la segunda parte de la guía, o sea, verificar si las observaciones eran correctas.</p> <p>Finalmente, el profesor formula interrogantes de reflexión sobre la actividad, tales como: ¿Qué grupo acertó en todas sus observaciones? ¿Qué piezas provocaron mayor dificultades para reconocer sus movimientos? O ¿Cuáles piezas se pueden generar con distintas Transformaciones Isométricas?</p>		
		<b>Justificaciones Pedagógicas</b>	<b>Justificaciones Teóricas</b>	
		<p><b>Justificación 1.</b></p> <p>La utilización de grupos de trabajo, responde a que es una actividad nueva en donde se están poniendo en práctica conceptos recién aprendidos, por lo que la interacción entre sus miembros afianza estas nuevas ideas al permitir que los alumnos más aventajados en este tema guíen y ayuden a sus compañeros.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Constructivismo social: En esta teoría se propone que el conocimiento se desarrolla mejor en ambientes en los que dos o más individuos llevan a cabo una discusión sostenida acerca de un tema, en donde la exposición a nuevos conocimientos lleva a expandir sus esquemas cognitivos.</li> <li>• Teoría de la educación dialógica de Paulo Freire: Debido a que el tipo de preguntas que se plantean invitan al alumno a pensar, no simplemente a recordar lo que el profesor expone.</li> <li>• Aprendizaje por Descubrimiento de Jerome Bruner: ya que el material utilizado permite,</li> </ul>	

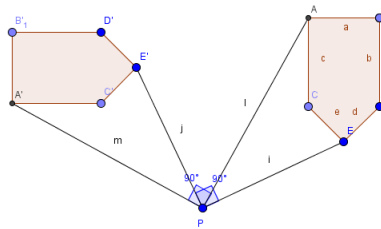
			por medio de la exploración y manipulación, generar e inducir nuevos conceptos.
<p><b>A.E.2.</b> Reconocer algunas propiedades de la traslación para luego ser capaz de construirla.</p>	<p>Traslación.</p>	<p><b>Actividad 3.</b></p> <p>Se les hace entrega a los alumnos de un modelo del tangrama. Cuasi-pitagórico, con el cual deberán realizar las actividades de la Guía de trabajo N°3.</p> <p><b>(Justificación 1)</b> (Sugerencia 1) (Sugerencia 2)</p> <p>Una vez completada la guía, se hace una revisión de las actividades propuestas y de las preguntas planteadas. Luego de esto, se consulta a los alumnos sobre los elementos que indican donde ubicar una figura trasladada, es decir, cuanto desplazarse y hacia dónde. Se establece que el elemento que me permite saber dónde ubicar una traslación y por ende el que la dirige se conoce como vector, el cual se representa como:</p> <p style="text-align: center;"></p> <p>y que se denota por <math>\vec{V}</math>. Ahora, en el caso del papel milimetrado, ¿Cómo se cuánto debo desplazarme y hacia dónde? Lo anterior lleva a plantearse que la cantidad de cuadraditos es la clave para poder realizar el movimiento, pero que</p>	<p><b>Sugerencia 1.</b> Las piezas congruentes, se deben considerar como imágenes entre sí.</p> <p><b>Sugerencia 2.</b> Para verificar si dos traslaciones son iguales, las piezas trasladadas deben ubicarse en el mismo lugar, siempre y cuando partan de la misma posición.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Guía de Trabajo N° 3 (Ver Anexo 3).</li> <li>• Tangrama Cuasi pitagórico.</li> <li>• Hoja de papel milimetrado.</li> </ul>

		<p>además debo saber hacia dónde hacerlo (arriba o abajo e izquierda o derecha). ¿Cómo puedo sintetizar esa información en una sola notación? ¿Cuántos elementos debe indicar?</p> <p>Los estudiantes reconocen que debe incluir el sentido y dirección del desplazamiento, además de la magnitud (dada por la cantidad de cuadraditos).</p> <p>Por lo tanto, la notación queda como: <math>\vec{V}(\pm a, \pm b)</math>, en donde:</p> <p>a = señala la cantidad de cuadraditos de desplazamiento hacia la izquierda o derecha, dependiendo si es positivo en negativo (positivo = derecha, negativo = izquierda)</p> <p>b = señala la cantidad de cuadraditos de desplazamiento hacia arriba o abajo, dependiendo si es negativo o positivo (positivo = arriba, negativo = abajo).</p>		
		<b>Justificaciones Pedagógicas</b>	<b>Justificaciones Teóricas</b>	
		<p><b>Justificación 1.</b> Se busca que los alumnos perciban los cambios de posición de una pieza con respecto a otra fija.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Aprendizaje por Descubrimiento de Jerome Bruner: ya que el material utilizado permite, por medio de la exploración y manipulación, generar e inducir nuevos conceptos.</li> </ul>	
		<p><b>Actividad 4.</b></p> <p>En primer lugar, se agrupa en curso en parejas. <b>(Justificación 1)</b> <b>(Sugerencia 1)</b> Se les hace entrega a pareja de estudiantes</p>	<p><b>Sugerencia 1.</b> Para acelerar la conformación de parejas, se recomienda que los alumnos trabajen con sus compañeros de puesto, siempre y cuando las mesas estén diseñadas para dos personas. En caso</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Guía de trabajo N° 4 (Ver Anexo 4).</li> <li>• Tangrama Chino.</li> <li>• Equipo de filmación.</li> <li>• Proyector multimedia.</li> </ul>

		<p>del tangrama Chino, con el cual deben realizar las actividades planteadas en la guía de trabajo N°4, las que consisten básicamente en:</p> <p>Construir una silueta con traslaciones, registrar los movimientos y ambientar la silueta creada. Todo aquello debe quedar plasmado en un video.</p> <p>Realizada la guía, se les pide a algunos alumnos que pasen a explicar sus videos a la pizarra.</p> <p>(Sugerencia 2)</p> <p>Finalmente, se retroalimenta la actividad y se sacan conclusiones del trabajo hecho.</p> <p>(Sugerencia 3)</p> 	<p>contrario (mesas individuales), la mejor elección es trabajar con el compañero más cercano.</p> <p><b>Sugerencia 2.</b></p> <p>Para la filmación de la actividad se consideran los celulares de los estudiantes, pero de no ser así, el profesor debe disponer de aparatos de grabación, a fin de que se pueda desarrollar correctamente la actividad.</p> <p>En cuanto a la proyección de los videos se requiere (para su corrección) contar con conexión a internet para el envío de este al correo del docente, o en su defecto, de los elementos que permitan la conexión de los dispositivos con el proyector.</p> <p><b>Sugerencia 3.</b></p> <p>Remarcar los elementos que permiten realizar una traslación (figura y vector), especialmente los componentes del vector y como ellos nos facilitan la construcción de traslaciones. También, deben indicar que la utilización de vectores como par ordenado <math>(\pm a, \pm b)</math> sólo es posible si tenemos un sistema de referencia (hoja de papel milimetrado). En caso de trabajar</p>	
--	--	--	--	--

			sobre el plano euclidiano (sin sistema de referencia) el vector sólo se puede representar como una flecha, que indica la magnitud, el sentido y la dirección del movimiento.	
		<b>Justificaciones Pedagógicas</b>		<b>Justificaciones Teóricas</b>
		<p><b>Justificación 1.</b> El hecho de trabajar en parejas permite el intercambio de ideas entre sus miembros y facilita las acciones que se piden en la guía de trabajo N° 4, en especial, el registro en video.</p> 		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Constructivismo social: En esta teoría se propone que el conocimiento se desarrolla mejor en ambientes en los que dos o más individuos llevan a cabo una discusión sostenida acerca de un tema, en donde la exposición a nuevos conocimientos lleva a expandir sus esquemas cognitivos.</li> <li>• Aprendizaje por descubrimiento de Jerome Bruner: ya que el material utilizado permite, por medio de la exploración y manipulación, generar e inducir nuevos conceptos.</li> <li>• Teoría de la comunicación: en particular, referida a la retroalimentación que se da finalizada la lección, lo que permite darse cuenta al alumno de su grado de progreso hacia el logro de los objetivos.</li> </ul>
<b>A.E.3.</b> Reconocer algunas propiedades de la rotación para luego ser capaz de construirla.	Rotación.	<p><b>Actividad 5.</b> Con las piezas del tangrama Cuasi pitagórico, los alumnos realizan las actividades propuestas en la guía de trabajo N°5, las que están diseñadas para ser realizadas en parejas. Luego de realizadas las actividades ahí propuestas, deben responder las siguientes</p>	<p><b>Sugerencia 1.</b> En este punto el profesor señala que los ángulos pueden ser tanto positivos como negativos. Los ángulos positivos van en sentido contrario a las manecillas del reloj (anti horario) y los negativos van en el mismo sentido que las manecillas del</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Guía de trabajo N°5 (Ver Anexo 5).</li> <li>• Tangrama Cuasi pitagórico.</li> <li>• Alfiler.</li> <li>• Mina de lápiz.</li> <li>• Pegamento o cinta adhesiva.</li> <li>• Procesador</li> </ul>

		<p>preguntas contenidas en la guía:  ¿Qué figura se forma al realizar el giro?  De esta, ¿Qué elementos se observan?  Ahora, ¿si el giro no es completo que se obtiene? Dibújelo  ¿Qué elementos lo conforman?  ¿Cómo se consiguieron estos elementos?  <b>(Justificación 1)</b>  ¿Una rotación se logra siempre con el mismo ángulo de giro? De algún ejemplo.  (Sugerencia 1)  Por lo tanto, ¿qué elementos debemos conocer para hacer una rotación?  (Sugerencia 2)  Se establece una notación que incorpora los elementos necesarios para realizar una rotación señalados por los estudiantes. Por lo tanto, esta queda como:  R (centro de giro, ángulo de giro), por ejemplo: R (P, -55°).  Finalmente, se proyecta una imagen de una rotación en la que el centro de giro se ubica fuera de la figura, en la se observan todos los elementos que la conforman (figura e imagen, centro de giro y ángulo).</p>	<p>reloj (horario).  <b>Sugerencia 2.</b>  Se debe aclarar que la medida del radio es irrelevante, no así el radio como segmento. Lo que se desea formar es una circunferencia, independiente de la medida del radio de la misma.  <b>Sugerencia 3.</b>  La imagen de la rotación con el centro fuera de la figura, puede ser una imagen proyectada, una construcción con un procesador geométrico, un dibujo en la pizarra, etc. Independiente del tipo de imagen, lo importante es que se vean claramente los elementos que la conforman.</p>	<p>geométrico.  • Proyector multimedia.</p>
--	--	--	---	---



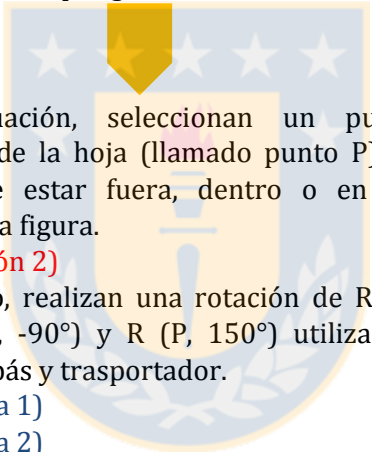
Concluyendo que independiente de la ubicación del centro de giro, los elementos de la rotación son los mismos.  
(Sugerencia 3)

**Justificaciones Pedagógicas**

**Justificación 1.**  
Estas preguntas buscan que los alumnos identifiquen que el movimiento de rotación describe una parte de una circunferencia, la cual posee un centro y radio. Además, al hacer que vean y dibujen una parte del giro se puede observar que también posee un ángulo.

**Justificaciones Teóricas**

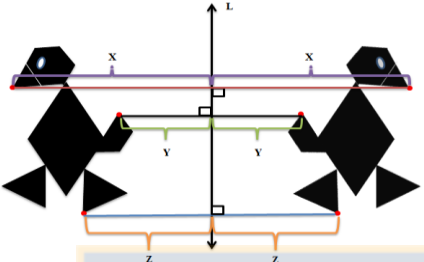
- Constructivismo social: En esta teoría se propone que el conocimiento se desarrolla mejor en ambientes en los que dos o más individuos llevan a cabo una discusión sostenida acerca de un tema, en donde la exposición a nuevos conocimientos lleva a expandir sus esquemas cognitivos.
- Aprendizaje por Descubrimiento de Jerome Bruner: ya que el material utilizado permite, por medio de la exploración y manipulación, generar e inducir nuevos conceptos.
- Teoría de la educación dialógica de Paulo Freire: Debido a que el tipo de preguntas que se plantean invitan al alumno a pensar, no simplemente a recordar lo que el profesor expone.
- Teoría de Aprendizaje por Receptación de David Ausubel: Pues se entrega información relevante de forma expositiva con sus

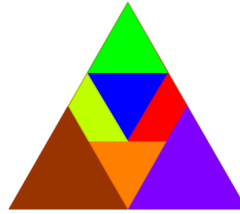
			<p>respectivos organizadores temáticos, de tal manera que los alumnos unen esta información con sus ideas preexistentes.</p>
		<p><b>Actividad 6.</b></p> <p><b>(Justificación 1)</b> Los alumnos remarcan sobre una hoja tamaño carta la siguiente pieza del tangrama Cuasi pitagórico.</p>  <p>A continuación, seleccionan un punto arbitrario de la hoja (llamado punto P), el que puede estar fuera, dentro o en un vértice de la figura.</p> <p><b>(Justificación 2)</b> Hecho esto, realizan una rotación de <math>R(P, 50^\circ)</math>, <math>R(P, -90^\circ)</math> y <math>R(P, 150^\circ)</math> utilizando regla, compás y transportador.</p> <p><b>(Sugerencia 1)</b> <b>(Sugerencia 2)</b> Una vez realizadas las respectivas rotaciones, se seleccionan a algunos alumnos para que pasen a la pizarra a explicar cómo desarrollaron su correspondiente rotación.</p> <p><b>(Sugerencia 3)</b> Para finalizar esta actividad se sacan una conclusión genérica sobre la construcción de la rotación de figuras planas.</p>	<p><b>Sugerencia 1.</b> El profesor debe resguardar que dentro del curso existan las tres alternativas de centro de giro (interior, exterior y en un vértice de la figura). También, para facilitar el trabajo, se puede dividir al curso para que cada grupo realice una sola rotación. Una alternativa de trabajo sería pedir a cada fila que realice una determinada rotación y que ubique el centro de giro en un lugar específico.</p> <p><b>Sugerencia 2.</b> La actividad también puede ser desarrollada con la ayuda de un procesador geométrico, en donde las instrucciones sería prácticamente las mismas, sólo que en vez de utilizar regla, compás y transportador, se utilizarían las herramientas que el programa dispone.</p> <p><b>Sugerencia 3.</b> Se debe disponer de las herramientas necesarias para que los alumnos construyan sus respectivas rotaciones en la</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Pieza del tangrama Cuasi pitagórico.</li> <li>• Regla.</li> <li>• Compás.</li> <li>• Transportador.</li> </ul>

			pizarra; es decir, regla, compás y transportador de gran tamaño.	
		<b>Justificaciones Pedagógicas</b>		<b>Justificaciones Teóricas</b>
		<p><b>Justificación 1.</b> Los alumnos no saben aún a ciencia cierta cómo construir una rotación, solamente conocen los elementos a tener en cuenta para hacerlo y han observado diferentes rotaciones durante el desarrollo de la guía de trabajo N°5. Por ello, la presente actividad busca que exploren de forma activa la construcción de rotaciones, sacando sus propias conclusiones y diseñando un procedimiento propio.</p> <p><b>Justificación 2.</b> La arbitrariedad del punto seleccionado (que hará el papel de centro de giro) responde a que se busca que los alumnos descubran cómo construir una rotación, independiente de donde este su centro.</p>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Aprendizaje por Descubrimiento de Jerome Bruner: ya que el material utilizado permite, por medio de la exploración y manipulación, generar e inducir nuevos conceptos.</li> </ul>
<b>A.E.4.</b> Reconocer algunas propiedades de la simetría (reflexión) axial y central para luego ser capaz de construirla.	Simetría axial.  Simetría central.	<p><b>Actividad 7.</b> Los alumnos desarrollan la guía de trabajo N°6 sobre las propiedades de la simetría. Para ello, utilizan las piezas de un modelo de tangrama triangular.</p> <p><b>(Justificación 1)</b> Terminada la guía se sacan algunas conclusiones de la actividad y se establecen formalmente las propiedades de la simetría: 1. Un punto y su reflejo están a la misma distancia del eje de simetría. 2. El segmento que une un punto con su</p>	<p><b>Sugerencia 1.</b> Es conveniente que los alumnos utilicen regla y compás para verificar las propiedades de la simetría axial.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Guía de trabajo N°6 (Ver Anexo 6).</li> <li>• Un modelo de tangrama triangular.</li> <li>• Regla.</li> <li>• Compás.</li> </ul>

		<p>reflejo es perpendicular al eje de simetría. (Sugerencia 1)</p> <p>Finalmente, se indica que existe otro tipo de simetría o reflexión (que será estudiada más adelante), por lo que es necesario ponerle un nombre particular a las estudiadas esta clase.</p> <p>¿Qué tenemos que conocer para realizar este tipo de simetría?</p> <p>Como esta simetría es realizada con respecto a un eje se propone llamarla simetría de eje.</p> <p>¿Habrá una forma más breve de llamarla, manteniendo el mismo significado?</p> <p>Entonces, queda como tarea el investigar alguna palabra o denominación que exprese el mismo significado o alguno similar.</p>		
		<p style="text-align: center;"><b>Justificaciones Pedagógicas</b></p> <p><b>Justificación 1.</b></p> <p>Las preguntas incluidas en esta guía buscar que los alumnos recuerde el concepto de eje de simetría, además de identificar algunas propiedades entre las figuras, su imagen correspondiente y el eje de simetría</p>	<p style="text-align: center;"><b>Justificaciones Teóricas</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Teoría de la educación dialógica de Paulo Freire: Debido a que el tipo de preguntas que se plantean invitan al alumno a pensar, no simplemente a recordar lo que el profesor expone.</li> <li>• Aprendizaje por Descubrimiento de Jerome Bruner: ya que el material utilizado permite, por medio de la exploración y manipulación, generar e inducir nuevos conceptos.</li> </ul>	

		<p><b>Actividad 8.</b></p> <p>Los alumnos señalan las diferentes denominaciones que investigaron para llamar al tipo de simetría estudiada la clase anterior.</p> <p>Se escoge la palabra axial, ya que esta significa “del eje o relacionado con él”. Por esta razón, a este tipo de simetría se le llamará simetría axial.</p> <p>Se desarrolla la guía de trabajo N° 7, acerca de la construcción de simetrías axiales, utilizando las piezas del tangrama triangular.</p> <p><b>(Justificación 1)</b></p> <p>Finalizada la guía, se pide a algunos alumnos que pasen a mostrar y explicar sus construcciones a la pizarra, señalando específicamente cómo la llevaron a cabo.</p> <p><b>(Sugerencia 1).</b></p>	<p><b>Sugerencia 1.</b></p> <p>Los alumnos pueden construir sus reflexiones en la pizarra, en un programa computacional o pueden tomar una fotografía de su construcción y proyectarla, previo envío al correo del docente. Este último método es el más recomendable, pues acelera y facilita el trabajo, permitiendo ver en detalle el resultado final de la construcción del alumno.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Guía de trabajo N° 7 (Ver Anexo 7).</li> <li>• Regla.</li> <li>• Transportador.</li> </ul>
<b>Justificaciones Pedagógicas</b>		<b>Justificaciones Teóricas</b>		
<p><b>Justificación 1.</b></p> <p>La ubicación del eje de simetría queda a elección del alumno, ya que es él el que debe construir la imagen de tal forma que tenga sentido, por lo cual el eje será ubicado según su conveniencia respecto a la imagen que desea formar.</p> <p><b>Justificación 2.</b></p> <p>La utilización de instrumentos de medición de ángulos y distancias es imprescindible para la construcción de simetrías axiales.</p>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Aprendizaje por Descubrimiento de Jerome Bruner: ya que el material utilizado permite, por medio de la exploración y manipulación, generar e inducir nuevos conceptos.</li> </ul>		
<p><b>Actividad 9.</b></p>		<p><b>Sugerencia 1.</b></p> <p>Probablemente los alumnos</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modelo de tangrama</li> </ul>	

		<p>Se les presenta a los alumnos una imagen de una simetría axial.</p>  <p>En la cual pueden identificar claramente las propiedades de la misma, es decir:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Un punto y su reflejo están a la misma distancia del eje de simetría.</li> <li>2. El segmento que une un punto con su reflejo es perpendicular al eje de simetría.</li> </ol> <p>A continuación, se les plantean las siguientes preguntas:</p> <p>¿Qué se necesita para realizar una simetría axial?</p> <p>¿Respecto a qué otro elemento geométrico se podrá efectuar una simetría?</p> <p>(Sugerencia 1)</p> <p>(Sugerencia 2)</p> <p>Como la nueva simetría será realizada en relación a un punto ubicado entre la figura y su imagen, la llamaremos simetría central. Los alumnos copian una pieza del modelo de tangrama (triangular)</p>	<p>señalen que es necesario un eje de simetría, por lo que hay que ahondar un poco más en este tema a fin de aclarar que el eje de simetría corresponde a una recta, por ejemplo: ¿Qué es un eje de simetría? ¿Un segmento, en qué esta contenido?</p> <p>Sugerencia 2.</p> <p>Los elementos básicos (primitivos) de la geometría son el punto y la recta, por lo que de forma intuitiva al estar descartado uno (la recta) se indica el otro (puntos). De no ser así el profesor debe ir guiando esta conclusión, tal vez relacionándola con la rotación, la que es efectuada en relación a un punto.</p> <p>Sugerencia 3.</p> <p>Se recomienda utilizar una animación que vaya mostrando las propiedades de la simetría central mientras los alumnos las nombran, haciendo así más dinámica actividad.</p>	<p>triangular.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Proyector multimedia.</li> </ul>
--	--	---	--	--

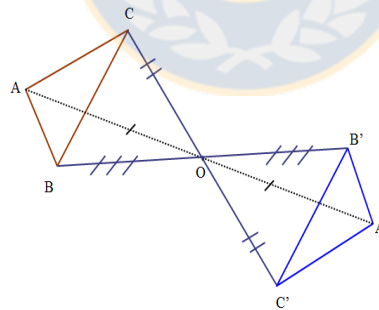


Sobre una hoja de cuaderno y realizan una simetría central de la misma, con respecto a un punto seleccionado arbitrariamente.

**(Justificación 1)**

Hecho esto, se consulta en forma general por el método utilizado para construir una simetría central y como transformaron las propiedades de la simetría axial (con respecto a una recta) a la central (con respecto a un punto).

Se proyecta una imagen de una simetría central y se enuncian sus propiedades.




**(Sugerencia 3)**

1. Un punto, el centro de simetría y la imagen del punto pertenecen a la misma recta.

		<p>2. La distancia ente un punto y el centro de simetría es igual a la distancian entre el centro de simetría y la imagen del punto. Finalmente, se plantean las siguientes interrogantes:          ¿Se puede lograr la misma figura imagen con otra transformación isométrica?          Si es una rotación, ¿Cuál es el ángulo de giro y el centro de rotación?          Por lo tanto, ¿Cuál es la relación entre la simetría central y la rotación?  <b>(Justificación 2)</b>          Para concluir, se deja planteada lo siguiente:          Si la simetría axial se efectúa en relación a una recta, y la central a un punto, es decir, se pasó de la recta al punto, entonces ¿Cuál es la relación entre el punto y la recta? (como elementos geométricos).  <b>(Justificación 3)</b></p>		
		<p style="text-align: center;"><b>Justificaciones Pedagógicas</b></p> <p><b>Justificación 1.</b>          Los alumnos no conocen las propiedades de la simetría central, por lo que deben utilizar las de la simetría axial, pero esta vez en relación a un punto, lo que favorece la interpretación y el análisis.  <b>Justificación 2.</b>          Se busca que los alumnos concluyan que la simetría puntual corresponde a una rotación de <math>180^\circ</math> (horaria o anti horaria), cuyo centro de giro, es el mismo centro de simetría.  <b>Justificación 3.</b>          Los alumnos relacionan los contenidos de la</p>	<p style="text-align: center;"><b>Justificaciones Teóricas</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Teoría de la educación dialógica de Paulo Freire: Debido a que el tipo de preguntas que se plantean invitan al alumno a pensar, no simplemente a recordar lo que el profesor expone.</li> <li>• Teoría de Aprendizaje por Receptación de David Ausubel: Pues se entrega información relevante de forma expositiva con sus respectivos organizadores temáticos, de tal manera que los alumnos unen esta información con sus ideas preexistentes.</li> </ul>	

		<p>unidad de transformaciones isométricas con los elementos primigenios de la geometría. Rememorando uno de los contenidos vistos en cursos anteriores o en su defecto, investigando sobre dicho tema.</p>		
<p><b>A.E.5.</b> Construyen composiciones de transformaciones isométricas y las utilizan para realizar teselaciones.</p>	<p>Composición de transformaciones isométricas.  Teselaciones.</p>	<p><b>Actividad 10.</b></p> <p>Se realiza un resumen de las diferentes transformaciones isométricas: sus principales características y su método de construcción. A cada alumno se le hace entrega de un modelo de tangrama chino y de la Planilla de trabajo N° 1, la que contiene un dibujo del tangrama chino (con sus piezas claramente enumeradas) y una serie de puntos y rectas destacados en ella.</p> <p>A continuación, los alumnos deben aplicar los siguientes movimientos a cada una de las piezas: (Sugerencia 1)</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Pieza 3: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Traslación <math>\vec{V}</math> (140, -110)</li> <li>• Rotación R (P, -135°)</li> </ul> </li> <li>2. Pieza 5: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Traslación <math>\vec{V}</math> (23, -104)</li> <li>• Simetría Central con respecto al punto C.</li> </ul> </li> <li>3. Pieza 6: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Rotación R (Q, 90°)</li> <li>• Traslación <math>\vec{V}</math> (162, -19)</li> </ul> </li> <li>4. Pieza 4: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Reflexión Axial con Respecto a la</li> </ul> </li> </ol>	<p><b>Sugerencia 1.</b> Se debe aclarar que los valores de los movimientos que se solicitan están expresados en milímetros.</p> <p><b>Sugerencia 2.</b> Se les debe pedir que no borren las construcciones auxiliares utilizadas (segmentos, circunferencias, etc.), pues así se mantiene un registro del trabajo realizado.</p> <p><b>Sugerencia 3.</b> Si la actividad ha sido realizada correctamente, se debe formar la imagen de un número siete.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Planilla de trabajo N°1 (Ver Anexo 8).</li> <li>• Regla.</li> <li>• Compás.</li> <li>• Transportador.</li> </ul>

		<p>Recta L.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Traslación <math>\vec{V}</math> (-43, -104)</li> </ul> <p>5. Piezas 7 y 1:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Traslación <math>\vec{V}</math> (222, -90)</li> </ul> <p>6. Pieza 2:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Rotación R (S, -90°)</li> <li>• Traslación <math>\vec{V}</math> (112, -40)</li> </ul> <p>En primera instancia, los alumnos realizan los movimientos con las piezas del modelo de tangrama entregado, ubicándolo sobre el dibujo.</p> <p>(Justificación 1)</p> <p>Posteriormente, construyen la imagen de cada pieza según la o las transformaciones indicadas, utilizando regla, compás y transportador.</p> <p>(Sugerencia 2)</p> <p>Finalmente, se consulta por la imagen resultante y se revisan las construcciones.</p> <p>(Sugerencia 3)</p> <p>(Justificación 2)</p>		
		<b>Justificaciones Pedagógicas</b>	<b>Justificaciones Teóricas</b>	
		<p><b>Justificación 1.</b></p> <p>De esta forma pueden tener una idea más clara de la posición final de cada una de las piezas, lo que ayuda al posterior trabajo de construcción.</p> <p><b>Justificación 2.</b></p> <p>Esta forma de trabajo (en que el resultado final representa una imagen) permite que el profesor solamente con ver la imagen resultante y las construcciones auxiliares pueda saber si el trabajo ha sido realizado con éxito, facilitando así su</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Teoría de la comunicación: en particular, referida a la retroalimentación que se da como resumen de las lecciones anteriores, lo que permite darse cuenta al alumno de su grado de progreso hacia el logro de los objetivos.</li> <li>• Aprendizaje por Descubrimiento de Jerome Bruner: ya que el material utilizado permite, por medio de la exploración y manipulación, anticiparse a posibles resultados.</li> </ul>	

	<p>revisión.</p> <p><b>Actividad 11.</b></p> <p>Los alumnos se organizan en grupos de 4 personas. A cada grupo se le hace entrega de una pieza del tangrama de ocho piezas</p>  <p>Sobre una hoja tamaño carta copian la pieza entregada y se les plantea la siguiente pregunta: ¿Será posible cubrir la hoja únicamente con réplicas de esta pieza? Para comprobarlo, cada grupo intenta cubrir la hoja con la pieza entregada, aplicando únicamente transformaciones isométricas a la pieza original (con regla, compás y transportador) y manteniendo un registro de las transformaciones empleadas y de su estrategia de construcción. Hecho aquello, se pregunta a cada grupo por el resultado de su trabajo. (Sugerencia 1) ¿Se podrá realizar la misma acción con cualquier figura plana? Se le entrega a cada grupo una figura diferente, con la cual deben realizar la</p>	<p><b>Sugerencia 1.</b> Se les debe aclarar a los alumnos que el hecho de que los bordes de la hoja sean o no cubiertos es irrelevante, ya que los que se busca es que vean si sus piezas son capaces de cubrir el plano, el cual es infinito y por tanto sin bordes, por lo cual el profesor puede aclarar este punto analizando la infinidad del espacio. También, se debe indicar que el criterio para saber si una pieza cubre el espacio o no, es que sus copias calcen perfectamente entre sí, sin dejar espacios.</p> <p><b>Sugerencia 2.</b> Se debe guiar el análisis hacia la relación que existe entre los ángulos de las piezas que permiten cubrir el plano, contrastando las observaciones con los ángulos de las piezas que no tienen esa propiedad. De esta forma, los alumnos concluyen que para que una figura sea susceptible de cubrir el plano, la suma de sus ángulos interiores debe ser un divisor o múltiplo de <math>360^\circ</math>.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tangrama de Ocho Piezas.</li> <li>• Regla.</li> <li>• Compás.</li> <li>• Transportador.</li> <li>• Proyector multimedia.</li> </ul>
--	---	--	--

		<p>misma acción. Entre las figuras entregadas se encuentran triángulos isósceles y escalenos, pentágonos regulares, octágonos regulares y polígonos irregulares.</p> <p><b>(Justificación 1)</b></p> <p>Luego de analizar los diferentes resultados, se formula la siguiente interrogante: ¿Qué características debe tener una figura plana para poder cubrir el plano?</p> <p><b>(Sugerencia 2)</b></p> <p>Se señala que esta acción de cubrir el plano con figuras planas y sus copias, sin dejar espacios ni superponerlas, es lo que se conoce como teselación, las que se clasifican en:</p> <p><u>Teselación regular:</u> Es la formada únicamente por un polígono regular y sus copias (sólo el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono forman teselaciones regulares).</p> <p><u>Teselación semirregular:</u> es la formada combinando diferentes polígonos regulares. Finalmente, se les pide a los alumnos que coloreen las planillas de las teselaciones construidas por ellos de la manera más artística posible.</p> <p>Mientras realizan esta acción, se proyectan algunas de las obras de arte diseñadas por Escher en las que se utilizan teselaciones.</p>		
		<b>Justificaciones Pedagógicas</b>	<b>Justificaciones Teóricas</b>	
		<p><b>Justificación 1.</b></p> <p>La elección de este tipo de figuras se debe a que</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Constructivismo social: En esta teoría se propone que el conocimiento se desarrolla</li> </ul>	

		<p>entre ellas se encuentran piezas con las que se puede y no se puede cubrir el plano, lo cual se requiere para un análisis posterior.</p>	<p>mejor en ambientes en los que dos o más individuos llevan a cabo una discusión sostenida acerca de un tema, en donde la exposición a nuevos conocimientos lleva a expandir sus esquemas cognitivos.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Teoría de la educación dialógica de Paulo Freire: Debido a que el tipo de preguntas que se plantean invitan al alumno a pensar, no simplemente a recordar lo que el profesor expone.</li> </ul>
--	--	---	---

Evaluación		
Indicadores	Procedimiento	Instrumento
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifican cada tipo de transformación isométrica en diversas situaciones.</li> <li>• Rotan figuras en el plano, utilizando regla, compás y transportador.</li> <li>• Trasladan figuras en el plano, utilizando regla.</li> <li>• Aplican reflexiones a figuras, utilizando escuadra y compás.</li> <li>• Realizan composiciones de transformaciones isométricas.</li> <li>• Identifican los polígonos que permiten la construcción de teselaciones regulares.</li> <li>• Reconocen la teselación como una aplicación de las transformaciones isométricas.</li> </ul>	<p>Prueba escrita (Ver Anexo 9).</p>	<p>Pauta de corrección (Ver Anexo 10).</p>

## 6. ORIENTACIONES GENERALES.

---

Para aplicar esta planificación se requiere tener en cuenta las siguientes recomendaciones:

- Para facilitar la realización de las actividades, las piezas de los tangramas deben encontrarse pintadas de diferentes colores o claramente enumeradas.
- Como muchas de las actividades requieren de la utilización de herramientas de construcción (regla, compas y transportador) para llevarlas a cabo, es indispensable que los alumnos tengan a mano estos elementos. Es por esto que se les debe solicitar el transporte de dichos elementos de forma permanentemente al comienzo del estudio de la unidad de transformaciones isométricas.
- Los tangramas deben estar contruidos con materiales resistentes (acrílico, madera, etc.), debido a que estas permiten una manipulación más fácil y cómoda de sus piezas; en contraposición de lo que sucede con materiales como el papel, ya que estos se doblan y estropean fácilmente.
- Las actividades 4, 6, 8 y 10 están confeccionadas de tal forma que si el profesor los dispone pueden ser utilizadas como evaluaciones de proceso, con el fin de corroborar si la adquisición de los nuevos contenidos ha sido exitosa o si requieren un refuerzo de sus ideas.
- Aunque en una de las actividades se utilizó un tangrama circular, en general, estos presentan problemas para construir las isometrías, debido a los bordes curvos de algunas de sus piezas. Es por ello que en las actividades en que se requería que los alumnos construyesen transformaciones isométricas a partir de las piezas de un tangrama, se optó por utilizar tangramas que poseyeran únicamente piezas poligonales. Por ejemplo, para aplicarle una traslación o rotación si la pieza tiene forma poligonal sólo basta con efectuárselos a los vértices y luego unirlos mediante segmentos; por el contrario, si la pieza es curva no es posible hacerlo de este modo.
- El lector puede preguntarse el porqué de la utilización de tantos modelos diferentes de tangramas, siendo que algunos tienen características muy similares (por ejemplo el Cuasi-pitagórico y el modelo de tangrama triangular). Esta variedad en el material tiene como objetivo mantener al aprendiz constantemente motivado e

interesado por las actividades que se proponen, además de ser un estímulo permanente a su creatividad e imaginación.

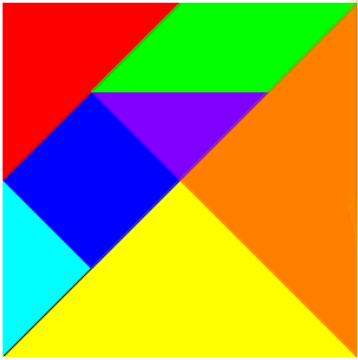
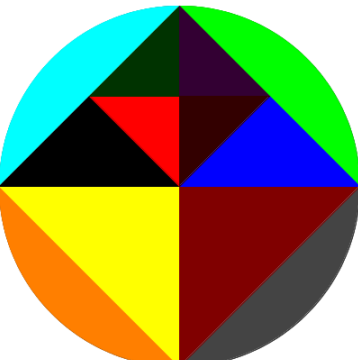
- Siendo conscientes de la realidad de diversos colegios en cuanto a las dificultades para adquirir nuevos materiales didácticos, es que se propone la utilización de únicamente 2 modelos de tangramas para la realización de las actividades aquí presentadas (aunque esta observación mantenga una discrepancia con la anteriormente enunciada). Estos son: el tangrama cuasi-pitagórico y el modelo de tangrama circular. Por una parte, el tangrama cuasi-pitagórico es ideal para las actividades en que fue seleccionado (3, 5 y 6), además de cumplir con todos los requerimientos para las actividades de simetría (7, 8 y 9). En cuanto a las actividades de construcción de siluetas (1 y 4), a pesar de no ser tan versátil como el tangrama chino, igualmente pueden ser desarrolladas con éxito, lo mismo sucede con la actividad 11 de teselación. En todas las actividades antes indicadas la utilización del tangrama cuasi-pitagórico requiere una modificación mínima en las actividades propuestas, la mayor dificultad se presenta en la actividad 10 para la que requiere una reestructuración completa de la planilla de trabajo sobre la que es realizada y de las instrucciones de movimientos, aunque esto no interfiere con el sentido y objetivo de la actividad. Por otra parte, el modelo de tangrama circular sigue siendo el más idóneo para el desarrollo de la actividad 2.

## 7. TANGRAMAS SELECCIONADOS.

En las actividades propuestas se emplearon, como material didáctico concreto, los siguientes tangramas:

El Chino en las actividades 1, 4 y 10 (A. E. 1, 2 y 5 respectivamente); un modelo circular para la actividad 2 (A. E. 1); el “Cuasi pitagórico” para las actividades 3, 5 y 6 (A. E. 2 y 3); un modelo triangular para las actividades 7 y 8 (A. E. 4); y el de Ocho Piezas para la actividad 11 (A. E. 5). Cabe indicar que en ciertas actividades sólo se trabajó con algunas piezas de ellos.

A continuación se detallan las razones que justificaron la elección de cada uno de estos tangramas.

Tangrama	Justificación
 <p style="text-align: center;">Chino</p>	<p>Este tangrama fue escogido por la multiplicidad de siluetas que se pueden formar con él, lo cual era esencial para desarrollar las actividades donde se incluyó. A esto se le adiciona la variedad de formas poligonales que presentan sus piezas, lo que permite un trabajo mucho más versátil en dichas actividades. Por último, este es el tangrama más conocido y más accesible, puesto que se puede obtener en la mayor parte de las tiendas de juguetes.</p>
 <p style="text-align: center;">Circular</p>	<p>La elección de este modelo de tangrama circular para la actividad 2 se debe a que esta requería un tangrama en el cual se pudieran notar todos los tipos de transformaciones isométricas. Es claro que este tangrama cumple con esa condición, pues si se considera una pieza arbitraria de él, se observa que aquella puede generarse por la aplicación de una o más isometrías de otra pieza. Por ejemplo, la pieza azul se obtiene al realizarle una traslación a la pieza negra, pero también se puede obtener aplicándole una reflexión a la misma.</p>

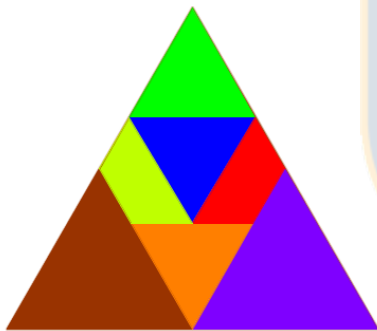


“Cuasi pitagórico”

Antes de exponer las razones de su elección es indispensable mencionar el origen de su denominación. Este tangrama se llamó “Cuasi pitagórico” por corresponder a una variante del Tangrama Pitagórico, cuya representación corresponde a:

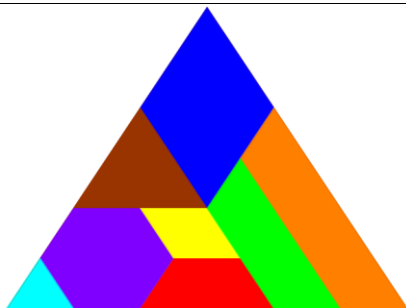


Se incluyó el Tangrama “Cuasi pitagórico” en la elaboración de algunas actividades por tener pares de piezas congruentes, lo cual era necesario para efectuar las acciones que contemplaba el desarrollo de dichas actividades.



Triangular

Las causas que explican la inclinación hacia este tangrama son: en primer lugar, debido a que muchas de sus piezas son congruentes, lo que facilitó en gran medida el desarrollo de las actividades que estaban relacionadas con la simetría axial. En segundo lugar, este tangrama se escogió porque no se había utilizado en las otras actividades, lo cual entrega variedad y evita así restringirse sólo al uso de tres o cuatro tangramas.



De Ocho Piezas

Las características de este tangrama que tuvieron injerencia en su elección fueron: por una parte, la diversidad de sus piezas en cuanto a tamaño y forma; mientras que por otra parte, tiene formas poligonales con las cuales se puede teselar, lo que entrega una aproximación hacia el trabajo que plantea la actividad 11.

# **CAPÍTULO IV.**

## **CONSIDERACIONES FINALES Y PROYECCIONES DE LA PROPUESTA.**

---

## 1. CONSIDERACIONES FINALES.

---

La gran mayoría de seminarios realizados en educación buscan dar respuesta o explicación a algún fenómeno o dificultad observada en esta área. Pese a la importancia que tienen los resultados de estos, a menudo quedan como aporte a la bibliografía de su temática de estudio, pero no tienen mayor injerencia en la práctica de los docentes, ni tratan de corregir las dificultades observadas. Por lo mismo, el presente seminario pretende entregar una herramienta concreta a la que los docentes puedan recurrir con el propósito de mejorar su metodología para abordar las isometrías.

Como ya se ha expresado, el presente seminario tuvo como propósito la elaboración de una propuesta metodológica con la finalidad de desarrollar la Inteligencia Espacial en los alumnos, para lo cual se seleccionó el curso, unidad y material didáctico más adecuado para dicho propósito.

Inicialmente, se tenía contemplada la aplicación de la propuesta elaborada en algunos de los establecimientos municipales del Gran Concepción. Por ello, se hizo una búsqueda de docentes que trabajaran en este tipo de instituciones educativas dispuestos a desarrollar dicha propuesta, lo que finalmente no tuvo éxito. Esto se explica, porque de acuerdo al periodo de trabajo contemplado para esta propuesta, la presunta aplicación debía ser alrededor de noviembre o diciembre del año 2015, lo cual se vio imposibilitado dado que los colegios municipales del país venían normalizando recientemente su situación académica, luego del paro que los profesores había realizado en rechazo del “Proyecto de Carrera Docente”.

Por lo tanto, el desarrollo del seminario solamente abordó el proceso de preparación y construcción de la propuesta metodológica en cuestión. Esto implica que el análisis reflexivo se realizará en función de las dificultades en su elaboración y lo provechoso de la propuesta para la enseñanza.

En cuanto a las dificultades en su creación, las más destacables fueron:

1. Al revisar las referencias bibliográficas (en español) que fundamentan el desarrollo de la propuesta, se evidenciaron problemas en los tópicos de

tangramas y de modelos de enseñanza de la matemática utilizados en Chile. Esto se debe a la escasez de documentación existente y a que la mayor parte de información sobre ello provenían de sitios web que no contaban con un respaldo bibliográfico apropiado de lo que exponían. Para afrontar tal problemática, se tuvo que indagar archivos y textos en otros idiomas, los cuales permitieron complementar la exigua información que se manejaba sobre el tema.

2. Si bien es cierto que el tangrama como material didáctico concreto presenta una gran variedad de tipos y formas, lo que llama la atención del estudiante y permite ir variando en cuanto a las actividades, su uso exclusivo como material didáctico limita de gran medida el tipo de actividades que se pueden desarrollar con respecto al tema de las isometrías, lo que en cierto punto del desarrollo de la presente propuesta origino un cuestionamiento con relación a haber elegido un exclusivo material didáctico, el que fue superado con creatividad y visión.
3. A los problemas ya descritos se le añade que en los planes y programas de estudio del MINEDUC no se habla de los tipos de inteligencia y por ende de la Inteligencia Espacial. Debido a esto, todo el trabajo estuvo orientado en desarrollar la habilidad de Representación, ya que se espera que desarrollando esta, también se desarrolle la Inteligencia Espacial.

A pesar de todas las dificultades emergentes en el transcurso del proceso de elaboración de la propuesta, en general esta fue muy beneficiosa. Esto es así, debido a las siguientes causas:

1. Por medio del desarrollo de esta propuesta se le dio un nuevo uso al tangrama en la enseñanza de la geometría, puesto que este ya venía siendo usado para abordar otros contenidos de aquel eje; tales como cálculo de área y perímetro, reconocimiento y clasificación de figuras geométricas, teorema de Pitágoras, entre otros. Así, con la propuesta efectuada en este seminario se le añade el uso en la unidad de Isometrías.
2. La propuesta concretizada en sí constituye una herramienta didáctica al servicio de los docentes, en la cual el material didáctico fortalece la enseñanza de la

unidad de Transformaciones Isométricas en pos del desarrollo de la Inteligencia Espacial.

3. La revalorización que se le da a la unidad de Isometrías, que es muchas veces despreciada y dejada para el final del año académico, como bien lo revelan los estudios de cobertura escolar presentados anteriormente. En consecuencia, la unidad de Isometría se posiciona en un lugar de preponderancia para el desarrollo de habilidades trascendentales en los estudiantes y más aún, en algo tan significativo como la Inteligencia Espacial.

Otro aspecto importante en esta propuesta metodológica fue la inclusión de justificaciones teóricas para respaldar las decisiones pedagógicas tomadas en la elaboración de la misma; en particular, en lo referente a la elección del grupo objetivo, de la unidad y de las actividades contenidas en la planificación. Al no aplicarse la propuesta, se vuelve indispensable dejar muy claras las sugerencias y justificaciones a tener presentes en una futura implementación, a fin de que quienes pretendan hacerlo no tengan problemas en ello.

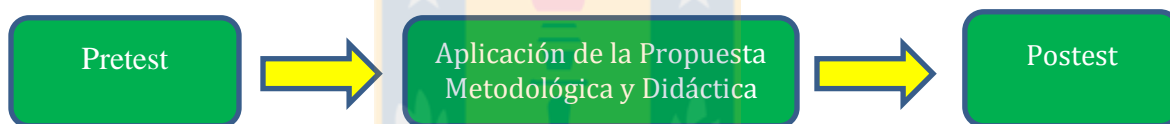
Finalmente, la inclusión de sugerencias, justificaciones pedagógicas y teóricas a las actividades de la planificación, plantea un nuevo modelo a considerar en la elaboración de planificaciones de unidades curriculares, donde es esencial fundamentar las acciones según la teoría existente.

## 2. PROYECCIONES.

---

En correspondencia con la intención original de aplicar la propuesta diseñada en el seminario, se propone continuar una segunda etapa de implementación. Para ello, se entregan algunos lineamientos que servirán de proyección para que el(los) futuro(s) investigador(es) pueda(n) efectuar dicha labor.

Dado que esta propuesta está diseñada para conseguir desarrollar en los alumnos la Inteligencia Espacial, es fundamental corroborar que esto si se cumple. Para realizar aquello, se recomienda llevar a cabo una investigación del tipo empírico-analítica sobre dos o más grupos cursos (del mismo o diferente establecimiento educacional) bajo el diseño pretest-postest. Como ya es sabido, el objetivo último de la propuesta es desarrollar la inteligencia espacial, por lo que los test a utilizar pueden ser alguno de los múltiples existentes para medir el desarrollo de las habilidades que esta encierra. De esta manera, para cada grupo objetivo se debería emplear el siguiente procedimiento:



Una vez recolectados los datos se debiera hacer todos los análisis estadísticos pertinentes para verificar si la implementación de la propuesta logra desarrollar la Inteligencia Espacial en los estudiantes a los que se les aplicó.

Finalmente, si se constata que la propuesta tiene un impacto positivo, es decir, logra su objetivo; es fundamental gestionar la difusión de los resultados de la investigación y la propuesta, con tal de hacerlos llegar a los docentes en ejercicio (ponerla a su disposición). Así, ellos podrán utilizarla contribuyendo de esa manera al desarrollo de la Inteligencia Espacial de los alumnos que estudian en las instituciones educativas nacionales.

## BIBLIOGRAFÍA.

---

- Arancibia, V., & colaboradores. (2011). *Manual de Psicología Educacional*. Santiago: Pontificia Universidad Católica de Chile.
- Aravena, M., & Caamaño, C. (2013). Niveles de Razonamiento Geométrico en Estudiantes de Establecimientos Municipalizados de la Región del Maule. Talca, Chile. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 139-178.
- Araya, R. (2008). *Saber Pedagógico y Conocimiento de la Disciplina Matemática en Profesores de Educación General Básica*. Santiago: Fondo de Investigación y Desarrollo de la Educación (FONIDE).
- Arnold, J., & Fonseca, M. C. (2004). Multiple intelligence theory and foreign language learning: A brain-based perspective. *IJES, International Journal of English Studies*, 119-136.
- Ausubel, D. (1968). *Educational Psychology: A cognitive view*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Ausubel, D. (1977). The facilitation of meaningful verbal learning in the classroom. *Educational Psychologist*, 162-178.
- Ausubel, D. (1983). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*. México: Editorial Trillas.
- Bamba Vicente, J. C. (2012). Programa Tangram. En A. M. Regojo, *Estrategias de Proyectos: Experimentos, Laboratorio de Teoría y Crítica Arquitectónica* (pág. 206). Madrid.
- Batllori, J. (2001). *Juegos para entrenar el cerebro*. Madrid: Narcea.
- Bohning, G., & Althouse, J. (1997). *Using tangrams to teach geometry to young children*. Early childhood education journal.
- Braslavky, C. (2006). Diez factores para una educación de calidad para todos en el siglo XXI. *Revista REICE, IV(2)*, 86-97.
- Bressan, A., Bogisic, B., & Crego, K. (2000). *Razones para enseñar Geometría en la Educación Básica. Mirar, construir, decir y pensar*. Buenos Aires, Argentina: Novedades Educativas.
- Bruner. (1964). The course of cognitive growth. *American Psicologi*, 1-15.
- Cárdenas, A., Rodríguez, A., & Torres, R. (2000). El maestro como protagonista del cambio educativo. *Convenio Andrés Bello, Corporación Tercer Milenio, Aula Abierta*. Bogotá: Editorial Magisterio.

- Carretero, M. (1997). Constructivismo y educación. En M. Carretero, *Constructivismo y educación* (pág. 21). México, México: Editorial Progreso.
- Chik-Bekada, S. (2006). *Apprendre en jouant grâce au tangram*. París: IUFM.
- Copley, J. V. (2000). *The young child and mathematics*. Washington DC: National Association for the Education of Young Children.
- Cueva, M. (2013). *El Material Didáctico y su Incidencia en el Desarrollo Cognitivo en el área de las Ciencias Naturales en los Estudiantes de Cuarto, Quinto, Sexto y Séptimo Grado de Educación General Básica*. Ambato: Universidad Técnica de Ambato.
- Decroly, O. (1965). *Iniciación general al método Decroly y ensayo de aplicación a la escuela primaria*. Buenos Aires: Losada.
- Dienes, Z. (1970). *La construcción de las matemáticas*. Barcelona: Vicens-Vives.
- Domino, G. (1980). *Chinese Tangrams as a Technique to Assess Creativity*. Tucson, Arizona: The University of Arizona.
- Fénix, G. (2014). *Matemática 8: Un enfoque con base en la resolución de problemas* (Primera ed.). Alajuela, Costa Rica: Editorial Grupo Fénix.
- Fletcher, & Ibbotson. (1965). *Geometrie mit einem Legespiel. Arbeitsbuch zu Mathematik in der Grundschule 3/4*. Stuttgart.
- Freinet, C. (1968). *Essai de psychologie sensible appliquée à l'éducation*. Neuchâtel: Delachaux et Niestle.
- Galaz, M. (2015). *La enseñanza y aprendizaje de la Geometría en enseñanza media. Un procesador geométrico como recurso didáctico*. Santiago: Universidad de Chile.
- Gardner, H. (1983). *Estructura de la mente: la teoría de las múltiples inteligencias*. México: Fondo de cultura de España.
- Gardner, H. (1995). *Mentes creativas: una anatomía de la creatividad vista a través de las vidas de S. Freud, A. Einstein, P. Picasso, I. Stravinsky, T.S. Elliot, M. Graham, M. Gandhi*. Barcelona: Paidós.
- Gardner, H. (1998). *Inteligencias Múltiples*. Buenos Aires: Paidós.
- Gardner, H. (2001). *Estructuras de la Mente*. Santafé de Bogotá: Fondo de Cultura Económica.
- Gardner, M. (1988). *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*. Barcelona: Labor.

- Good, T., & Brophy, J. (2000). Psicología Educativa Contemporánea. En G. Thomas, & B. Jere, *Psicología Educativa Contemporánea* (Quinta ed.). México: McGraw - Hill.
- Halpern, & LaMay. (2000). The smarter sex: A critical review of sex differences in intelligence. *Educational Psychology Review*(12), 229-246.
- Jain, N. (2010). *EXPLORING INTERACTIVE TANGRAMS FOR TEACHING BASIC SCHOOL PHYSICS*. Atlanta: Georgia Institute of Technology.
- Lee, J., Lee, i. J., & Collins, D. (2012). Enhancing Children's Spatial Sense Using Tangrams. *Childhood Education*, 93.
- Lohman. (1985). Las dimensiones de las diferencias individuales en las habilidades espaciales. Reporte técnico. Papel para la OTAN. *Reporte técnico. Papel para la OTAN, Instituto de Estudios Avanzados en Cognición y Motivación*. Atenas.
- Lydia P. de Bosh, L. F. (1974). La iniciación matemática de acuerdo con la psicología de Jean Piaget. En L. D. Bosh, & L. D. Menegazzo, *La iniciación matemática de acuerdo con la psicología de Jean Piaget* (pág. 93). Buenos Aires: Latina S.C.A.
- Maier, P. (1998). Spatial Geometry and Spatial Ability: How to Make Solid Geometry Solid? *Selected papers from the Annual Conference of Didactics of Mathematics*, (págs. 63–75). Osnabrück.
- Marzano, R., Brandt, R., Hughes, C., Jones, B., Presseisen, B., Rankin, S., & Suhor, C. (1988). *Dimensions of thinking: A framework for curriculum and instruction*. Alexandria: VA: Association for Supervision and curriculum Development.
- Mataix, M. (1986). *Historias de matemáticos y algunos problemas*. Barcelona, España: Boixareu Ediciones.
- Mayer, R. (1984). Aids to text comprehension. *Educational Psychologist*(19), 30-42.
- Meece, J. (1997). Desarrollo del niño y del adolescente. En J. Meece, *Desarrollo del niño y del adolescente* (pág. 103). México: McGraw-Hill.
- Miller, C., Heeren, V., & Hornsby, J. (2006). *Matemática: Razonamiento y aplicaciones*. México D.F.: S.A. de C.V. Pearson Educación.
- MINEDUC. (1999). Guía de apoyo para el uso de material didáctico. Chile: Unión Druckeri.
- MINEDUC. (2014). Programa de estudio de Matemática-8° básico. Santiago, Región metropolitana, Chile.
- MINEDUC. (2011). Programa de estudio de Matemática-8° básico. Santiago, Región metropolitana, Chile.

- Montessori, M. (1914). *El método de la pedagogía científica, aplicado a la educación de la infancia en las Case dei Bambini*. (J. P. Vera, Trad.) Barcelona: Araluce.
- Navarro, J. (2008). *Forma y representación: Un análisis geométrico*. Madrid: Akal bellas Artes S.A.
- Papalia, & Wendkos. (1987). *Psicología*. México: McGraw Hill.
- Parcerisa, A. (1996). *Materiales curriculares: Cómo elaborarlos, seleccionarlos y usarlos*. Barcelona, España: Grao.
- Pellegrino, Alderton, & Shute. (1984). Understanding Spatial 239-253. *Educational Psychologist*(19), 239-253.
- Piaget, & Inhelder. (1975). *Psicología del niño*. Madrid: Ediciones Morata. Obtenido de Piaget, J. y Inhelder, B. (1975) *Psicología del niño*. Madrid: Ediciones Morata.
- Piraquive, C. J., López, V., & Llamas, F. (2015). *El uso del Tangram como estrategia de aprendizaje para el desarrollo de la creatividad y las inteligencias múltiples* (Vols. 4, artículo 11). Soacha: Reidocrea.
- Reyes, C., Dissett, L., Gormaz, R., & Colaboradores. (2013). *Geometría para futuros profesores de educación básica* (Primera ed.). Santiago: Ediciones SM Chile S.A.
- Rodriguez, P. (2004). Juegos y matemática: tangram. *Correo del Maestro*, N° 99 [versión web], 1.
- Rojas, E. (2003). *Los materiales educativos en el nuevo enfoque pedagógico*. Lima, Perú: Universidad San Marcos.
- Sánchez, T. (1995). *La construcción del aprendizaje en el aula*. Buenos Aires, Argentina: Magisterio Del Rio De La Plata.
- Schunk, D. (1997). *Teorías de Aprendizaje* (segunda ed.). (J. D. Martínez, Trad.) Ciudad de México, México: Pearson Educación.
- Shannon, A. (2013). *La teoría de las inteligencias múltiples en la enseñanza del español*. Universidad de Salamanca.
- Shepard, & Metzler. (1997). Mental rotation of three-dimensional objects. *Science*(171), 701-703.
- Spencer, H. (1989). *Educación intelectual moral y física*. Madrid: P. Sempere y Compañía.
- Tortosa, L., & Vicent, J. (2012). *Geometría moderna para ingeniería*. España: Editorial Club Universitario.
- UNESCO Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe. (2005). *Protagonismo docente en el cambio educativo*. *Revista PRELAC*, 183-193.

Villarroel, J. (1995). Didáctica general. En *Módulo de auto-aprendizaje* (pág. 199). Ibarra, Ecuador: Universidad Técnica del Norte.

Woolfolk, A. (2010). *Psicología Educativa (traducción autorizada al español de Educacional Psychology)* (Decimoprimera ed.). (L. Pineda, Trad.) México: Pearson Educación.



## LINKOGRAFÍA.

---

- Agencia de Calidad de la Educación. (2015). *Síntesis de resultados de aprendizaje, SINCE 2014, 8° Educación básica*. Recuperado el 30 de Noviembre de 2015, de sitio web de Agencia de la Calidad de la Educación: [http://archivos.agenciaeducacion.cl/resultados-2014/Sintesis\\_Resultados\\_8B\\_2014.pdf](http://archivos.agenciaeducacion.cl/resultados-2014/Sintesis_Resultados_8B_2014.pdf)
- Cuba Silva, J. C. (s.f.). *Docentes innovadores*. (Productora de contenidos educativos para la transformación social) Recuperado el 17 de Febrero de 2016, de PROYECTO DE INNOVACIÓN "LUDOTECA MATEMATICA" ACTIVIDADES CON TANGRAM: <http://www.docentesinnovadores.net/Contenidos/Ver/5125>
- Educarchile. (25 de Enero de 2016). *Educar Chile*. Obtenido de Educar Chile: <http://www.educarchile.cl/ech/pro/app/detalle?id=97296>
- Educarchile. (Marzo de 2007). *Información consolidada sobre cobertura curricular en segundo ciclo básico y medio*. Recuperado el 15 de Septiembre de 2015, de sitio web de Educarchile: <http://www.educarchile.cl/ech/pro/app/detalle?id=132830>
- Encarnación, V. (Noviembre de 2006). *Aprendizaje Significativo y Por Descubrimiento*. Recuperado el 16 de Noviembre de 2015, de Educando: Portal de Educación Dominicana: <http://www.educando.edu.do/articulos/docente/aprendizaje-significativo-y-por-descubrimiento/>
- García Cruz, J. (1999). *Didáctica de las matemáticas: una visión general*. Recuperado el 15 de Septiembre de 2015, de sitio web de gobierno de canarias: [www.gobiernodecanarias.org/educacion/rtee/didmat.html](http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/rtee/didmat.html)
- García, S., & López, O. (2008). *La enseñanza de la geometría* (Primera ed.). México D. F., México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. Recuperado el 30 de Noviembre de 2015, de <http://www.oei.es/pdf2/ensenanza-geometria-mexico.pdf>
- González, P. (s.f.). *La matemática como propedéutica de la filosofía*. Recuperado el 1 de Diciembre de 2015, de sitio web de Divulgamat Centro de divulgación de la matemática: [http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com\\_content&view=article&id=3363%3Aplat427-347-ac&catid=37%3AAbiograf-de-matemcos-ilustres&directory=67&limitstart=2](http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=3363%3Aplat427-347-ac&catid=37%3AAbiograf-de-matemcos-ilustres&directory=67&limitstart=2)
- Mendoza Bautista, J. G. (Octubre de 2014). *Pliactom*. Recuperado el 9 de febrero de 2016, de <http://www.pliactom.com/2014/10/tangram-ovalado-tangram-tipo-huevo.html>
- Nieta, G. S. (27 de Marzo de 2014). *Las notas sólo reflejan un aprendizaje memorístico y fugaz*. Recuperado el 16 de Septiembre de 2015, de sitio web de Unir Revista: <http://revista.unir.net/3307-las-notas-solo-reflejan-un-aprendizaje-memoristico-y-fugaz>
- Olkun, S. (April de 2003). *Making Connections: Improving Spatial Abilities with Engineering Drawing Activities*. Recuperado el 1 de Diciembre de 2015, de <http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/sinanolkun.pdf>

- Rodríguez, M. (2004). *La teoría del aprendizaje significativo*. Recuperado el 11 de Diciembre de 2015, de sitio web Institute for Human & Machine Cognition:  
<http://cmc.ihmc.us/papers/cmc2004-290.pdf>
- Toledo, A. R. (s.f.). *El Constructivismo Pedagógico*. Recuperado el 23 de Octubre de 2015, de sitio web Educarchile:  
<http://ww2.educarchile.cl/UserFiles/P0001/File/EI%20Constructivismo%20Pedag%C3%B3gico.pdf>
- Venegas, S. (Mayo de 2015). *La enseñanza de la Geometría, un punto negro en la Educación Chilena*. Recuperado el 2 de Diciembre de 2015, de sitio web de la Universidad Autónoma:  
<http://www.uautonoma.cl/la-ensenanza-de-la-geometria-un-punto-negro-en-la-educacion-chilena/>



# ANEXOS.

---



## Anexo 1:

### Guía de Trabajo N° 1.

---

#### Propósito:

La siguiente actividad tiene como finalidad introducir a los estudiantes al tema de las transformaciones isométricas, permitiéndoles identificar sus principales características y conocer su clasificación, además de desarrollar su creatividad, imaginación y visualización mental.

#### Instrucciones:

Con las piezas del tangrama chino que les han sido entregadas



Confeccione una silueta, a elección, siguiendo las siguientes reglas:

1. Se debe ocupar la totalidad de las piezas.
2. Las piezas NO pueden superponerse.

A continuación, responda las siguientes preguntas:

- ¿Qué representa la silueta diseñada?
- ¿Qué movimientos tuvo que realizarle a cada una de las piezas?
  - Pieza roja:
  - Pieza amarilla:
  - Pieza celeste:
  - Pieza negra:
  - Pieza morada:
  - Pieza verde:

- Pieza naranja:
- ¿Cómo es el área del tangrama original en relación con la silueta creada? Justifique.
- ¿Hubo alguna modificación en la forma de las piezas?
- ¿En qué se diferencian las piezas del tangrama original de la de las imágenes?



## Anexo 2:

### Guía de Trabajo N° 2.

---

#### Propósito:

La siguiente actividad tiene como objetivo que los alumnos identifiquen las diferentes transformaciones isométricas, que anticipen su movimiento y verifiquen sus conjeturas.

#### Instrucciones:

En base a la imagen del siguiente modelo de tangrama circular



Elaboren un listado de las diferentes transformaciones isométricas que relacionan una pieza con otra. Por ejemplo, la pieza celeste es una simetría de la pieza naranja y viceversa.

#### Sugerencia:

*Se debe aclarar que una pieza puede ser generada por una o más piezas diferentes, dependiendo del tipo de Transformación Isométrica elegida o inclusive por la misma transformación.*

Realizado lo anterior, con la ayuda del modelo de tangrama entregado, verifiquen si sus conjeturas son acertadas. En caso contrario, rectifiquen sus observaciones.

## Anexo 3:

### Guía de Trabajo N° 3.

---

#### Propósito:

Conocer las propiedades de la traslación y los elementos necesarios para componerla exitosamente. Asimismo, hacer un primer acercamiento a la idea de vector.

#### Instrucciones:

Identifique las piezas congruentes en el tangrama entregado



Elija un par de ellas y superpóngalas, de tal forma que calcen perfectamente. Disponga las piezas sobre la mesa y desplace la pieza superior, resguardando que se mantenga con la misma orientación, mientras la otra pieza queda fija.

#### Justificación:

*La idea detrás de trabajar con dos piezas diferentes (aunque congruentes) es que los alumnos vean los cambios de posición de una con respecto a la otra, pueden observar el movimientos y la pieza final sin perder de vista la original.*

#### Sugerencia:

*Se les debe aclarar a los alumnos que las piezas del tangrama representan la misma cuerpo y que la pieza trasladada es una imagen de la pieza inmóvil (son la misma pieza ubicada en lugares distintos en momentos distintos).*

- ¿A qué transformación isométrica corresponde el movimiento realizado?
- ¿Cómo llegaron a esa conclusión?

A continuación, vuelva a poner la pieza desplazada sobre la que estaba fija e intente repetir el mismo movimiento.

Sugerencia:

*Se les debe señalar que para verificar si el nuevo movimiento coincide con el anterior, las dos piezas desplazadas deben ubicarse en la misma posición.*

- ¿La nueva traslación, es igual a la anterior?
- ¿Se puede asegurar que la pieza trasladada quedo en la misma posición?
- ¿Qué se requiere para replicarla exitosamente?

Justificación:

*Estas preguntas estas formuladas con el objetivo de hacer reflexionar a los alumnos acerca de la necesidad de conocer alguna herramienta que le indique donde se debe ubicar la pieza trasladada (imágenes) a partir de la original.*

Luego, sobre una hoja de papel milimetrado ubique las piezas (superpuestas) de tal forma que los vértices de estas coincidan con los puntos de intersección de los segmentos del papel que marcan los centímetros.

Sugerencia:

*Para facilitar el trabajo, se debe procurar que las piezas del tangrama tengan las longitudes de sus lados en centímetros exactos).*

Posteriormente, repita las mismas acciones anteriores, es decir, realice una traslación y luego intente replicarla.

- ¿Se puede repetir el movimiento con exactitud?
- ¿Qué tienen que conocer para hacerlo?

Justificación:

*Con estas preguntas se espera que los alumnos reconozcan que se debe conocer la cantidad de cuadraditos de desplazamiento y hacia donde se realiza este.*

Con la siguiente pieza  realice una traslación de 4 cuadraditos a la derecha y 6 hacia abajo, para lo cual debe enfocarse en uno de los vértices.

- ¿Qué pasa con los otros vértices?
- ¿En cuánto se desplazan?



## Anexo 4:

### Guía de Trabajo N° 4.

---

#### Propósito:

Poner en práctica la construcción de traslaciones de figuras, manteniendo un registro de los movimientos realizados con su respectiva notación. Además, desarrollar la creatividad, imaginación y visualización mental.

#### Instrucciones:

Coloque el tangrama chino en una de las esquinas de una hoja de papel milimetrado.



Construya una silueta con las piezas de dicho tangrama, utilizando únicamente traslaciones. Para hacerlo, puede darle al tangrama la orientación que facilite, en mayor medida, la construcción a realizar. Además, debe dejar un registro de todos los vectores utilizados para cada pieza. Finalmente, indique que representa la silueta creada y dele una ambientación adecuada.

Para corroborar que sólo se usó traslación, se debe realizar un video mostrando y relatando como se desarrolló este trabajo, el cual debe ser envía al correo electrónico del profesor.

## Anexo 5:

### Guía de Trabajo N° 5.

---

#### Propósito:

Explorar la rotación de figuras planas a partir de los diferentes lugares en que puede estar ubicado su centro de giro. Asimismo, identificar los elementos necesarios para generar una rotación.

#### Instrucciones:

La presente actividad debe ser realizada en parejas.

#### Justificación:

*La idea de trabajar en parejas es que se pueda estudiar simultáneamente lo que sucede con la rotación cuando el centro de giro se ubica en el interior y en un vértice de una figura, teniendo en consideración que las conclusiones a las que se llega, independiente de la ubicación del centro de giro, son las mismas.*

*La rotación con el centro de giro en el exterior de la figura no está incluida, ya que a pesar de que sus propiedades y elementos que la conforman son los mismos, estos no son fáciles de ver siguiendo el estilo de la actividad. Por ejemplo, como las piezas no están unidas, no se puede asegurar que la distancia entre un vértice y el centro de giro se mantiene constante, a menos que se les indique, lo que coartaría la idea exploratoria detrás de la actividad.*

Identifiquen las piezas congruentes del tangrama Cuasi pitagórico.



Seleccionen un par de ellas y superpóngalas haciendo calzar ambas piezas perfectamente (cada miembro de la pareja selecciona un par diferente).

Alumno 1:

Introduzca un alfiler por medio de ambas piezas (superpuestas), de tal manera que se forme un objeto similar a las manillas de un reloj. Enseguida, perfora la pieza inferior en uno de sus vértices e introduzca un fragmento de mina de lápiz, fijándola con cinta adhesiva o pegamento.

Alumno 2:

Introduzca un alfiler por uno de los vértices de ambas piezas (superpuestas). A continuación, perfora la pieza inferior en otro de sus vértices e introduzca un fragmento de mina de lápiz, fijándola con cinta adhesiva o pegamento.

Sugerencias:

- 1) *Se debe señalar que realmente el alfiler no quedara en el vértice, sino en un punto muy cercano al mismo; pero se debe suponer que si lo está, pues así es posible sacar conclusiones.*
- 2) *El profesor puede recurrir a otros materiales para mantener unidas las piezas del tangrama (superpuestas), como por ejemplo chinchas, tachuelas, tornillos, etc. Dependiendo de la disciplina del grupo y su comportamiento con objetos punzantes, además de tener en cuenta el material con el que está confeccionado el tangrama para su elección. Por otro lado, la utilización de minas de lápiz puede ser sustituida con algún otro objeto, siempre y cuando, este también tenga la propiedad de dejar marcas sobre la superficie que toca.*
- 3) *Otra alternativa, es que el profesor entregue a los alumnos las piezas ya armadas, evitando así la manipulación (por parte de los alumnos) de objetos potencialmente peligrosos.*

Posicionen sus piezas sobre la mesa y manteniendo la pieza superior fija, realicen una rotación de la pieza inferior, procurando que la mina de lápiz deje una marca del movimiento sobre la mesa.

Hecha esta acción, respondan:

- ¿Qué figura se forma al realizar el giro?
- De esta, ¿Qué elementos se observan?
- Ahora, ¿si el giro no es completo que se obtiene? Dibújelo
- ¿Qué elementos lo conforman?
- ¿Cómo se consiguieron estos elementos?
- ¿Una rotación se logra siempre con el mismo ángulo de giro? De algún ejemplo.
- Por lo tanto, ¿qué elementos debemos conocer para hacer una rotación?



## Anexo 6:

### Guía de Trabajo N° 6.

---

#### Propósito:

Recordar el concepto de eje de simetría (como elemento de algunas figuras) y utilizarlo con el objetivo de construir simetrías o reflexiones, además de identificar las propiedades de las mismas mediante un proceso de observación y exploración.

#### Instrucciones:

Identifique los pares de piezas congruentes del tangrama triangular.



Seleccione un par de ellas y únalas por medio de uno de sus lados correspondientes, formando así una nueva figura compuesta por las dos piezas congruentes.

Hecho esto, responda las siguientes preguntas:

- En la figura resultante ¿A qué corresponde el segmento que unió las piezas originales?
- ¿Cómo lo identificó?
- Si consideramos dos vértices que al doblar la figura calcen perfectamente, ¿qué relación se puede observar entre ellos y el eje de simetría? ¿Pasa lo mismo con el resto de los puntos? (puede utilizar una regla).
- ¿Qué relación existe entre el segmento que une los puntos correspondientes y el eje de simetría? (se puede ayudar con el transportador).

Justificación:

*Estas preguntas están orientadas a que los alumnos recuerden lo que es un eje de simetría, concepto que conocen como el segmento que divide a una figura en dos partes congruentes. Además, de identificar algunas propiedades entre los puntos de una figura, el eje de simetría y el punto imagen, en particular la perpendicularidad entre el segmento que une un punto y su imagen con el eje de simetría y la equidistancia entre un punto, el eje y el punto imagen.*

Doble una hoja de cuaderno por la mitad y marque una de las piezas del tangrama en uno de los lados de la hoja, luego remarque los vértices de la imagen. Por último, extienda la hoja y una los puntos marcados en la otra mitad.

Sugerencia:

*Se debe pedir a los alumnos que la pieza remarcada esté a distancia del doblez de la hoja.*

Realizado lo anterior, responda:

- El doblez ¿a qué corresponde?
- ¿Se siguen manteniendo las mismas propiedades enunciadas anteriormente?
- Por lo tanto, ¿Qué propiedades tiene la simetría o reflexión?

Sugerencia:

*Los alumnos deben concluir que independiente de donde esté ubicado el eje de simetría (dentro o fuera de la figura), las propiedades de estas son siempre las mismas, es decir, que un punto y su reflejo están siempre a la misma distancia del eje de simetría y que el segmento que los contiene es perpendicular a él. Para facilitar la observación de estas propiedades, se recomienda la utilización de regla y transportador, con el objetivo de que los alumnos puedan medir ángulos y distancias, por otro lado también es posible llegar a estas conclusiones únicamente con el plegado de las piezas, por lo cual queda a criterio del profesor la estrategia a utilizar.*

## Anexo 7:

### Guía de Trabajo N° 7.

---

#### Propósito:

Ejercitar la construcción de simetrías axiales, reforzando así el aprendizaje de sus propiedades. Junto con esto, desarrollar la creatividad, imaginación y visualización mental de los estudiantes.

#### Instrucciones:

Con las piezas del presente modelo de tangrama triangular



Construya una silueta que representa la mitad de una imagen o una silueta completa que al ser duplicada genere una imagen mayor.

Copie la silueta en una hoja tamaño carta. Enseguida, sobre la misma hoja, dibuje un eje de simetría a elección.

#### Justificación:

*La ubicación del eje de simetría queda a elección del alumno, ya que es él el que debe construir la imagen de tal forma que tenga sentido, por lo cual el eje será ubicado según su conveniencia respecto a la imagen que desea formar. Por otra parte, sirve para sacar la idea de que la imagen original casi siempre está a la izquierda y el reflejo a la derecha (con el eje de simetría de por medio).*

Utilizando regla y transportador, construya la imagen simétrica de la silueta creada con respecto al eje seleccionado.

Justificación:

*Como el trabajo de construcción es realizado sobre una hoja blanca, y teniendo presentes las propiedades de la simetría axial, es imprescindible contar con un instrumento que mida distancias (regla) y otro que mida ángulos (transportador), aunque en el caso de los ángulos, al tener que ser estos rectos, también se puede utilizar escuadra.*

Sugerencia:

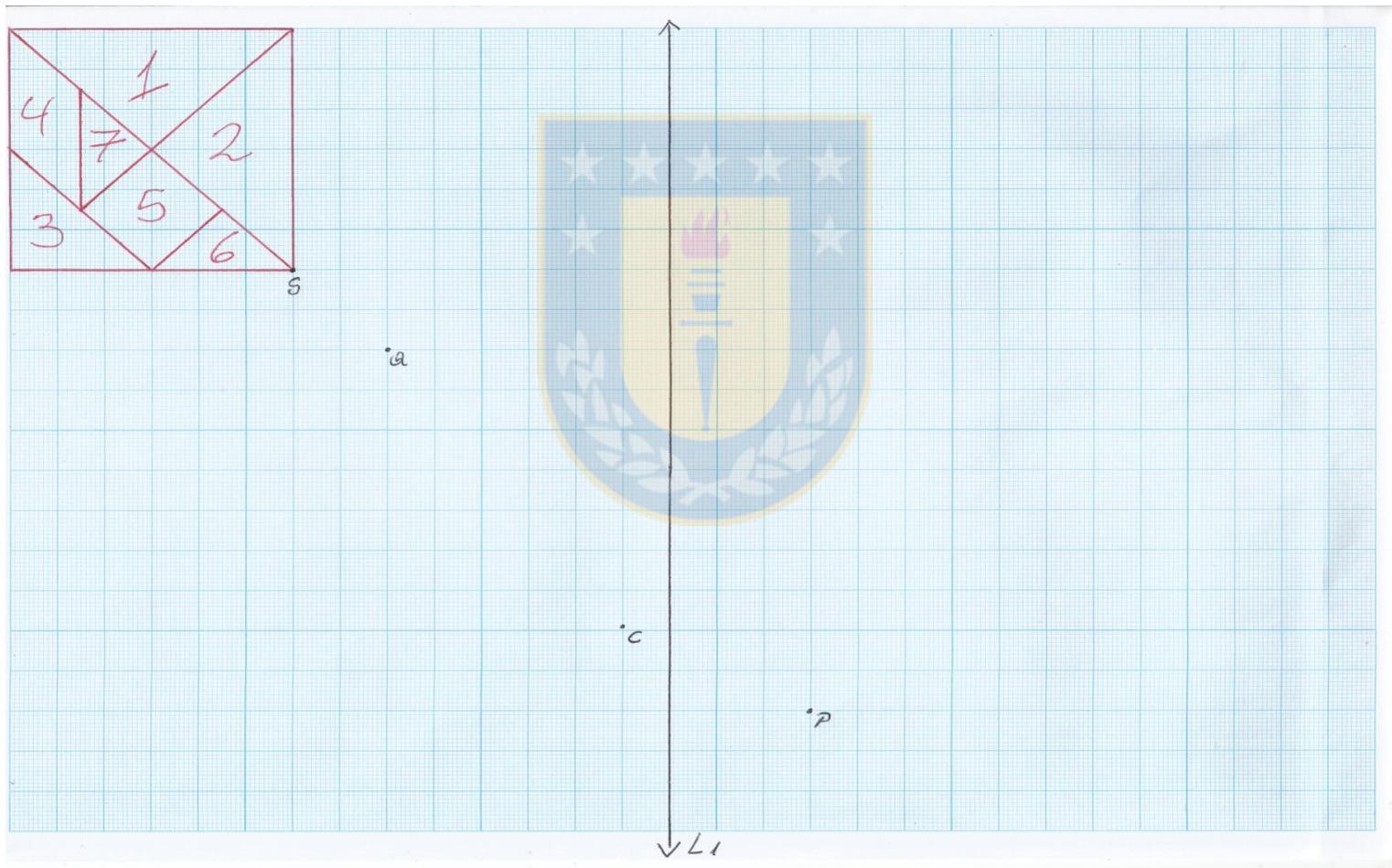
*La misma actividad puede ser realizada en un procesador geométrico, en donde en vez de marcar las piezas la construcción puede hacerse manipulando las piezas del tangrama previamente construido, además la utilización de regla y transportador para medir distancias y ángulos queda sustituida por las herramientas que el procesador posee.*

Finalmente, decore y pinte la imagen final (formada por la silueta y su reflejo) de tal forma que esta tenga sentido, además de darle una ambientación coherente con ella.



Anexo 8:

Planilla de Trabajo N° 1.



## Instrucciones.

Realice la(s) transformación(es) pedida(s) a cada una de las piezas:

1. Pieza 3:

- Traslación  $\vec{V}$  (140, -110)
- Rotación R (P, -135°)

2. Pieza 5:

- Traslación  $\vec{V}$  (23, -104)
- Simetría Central con respecto al punto C.

3. Pieza 6:

- Rotación R (Q, 90°)
- Traslación  $\vec{V}$  (162, -19)

4. Pieza 4:

- Reflexión Axial con Respecto a la Recta L.
- Traslación  $\vec{V}$  (-43, -104)

5. Piezas 7 y 1:

- Traslación  $\vec{V}$  (222, -90)

6. Pieza 2:

- Rotación R (S, -90°)
- Traslación  $\vec{V}$  (112, -40)



## Anexo 9:

### Evaluación de la Unidad.

---

Nombre: ..... Fecha: .....

Curso: ..... Puntaje: ..... Calificación: .....

I. *Encierre en un círculo la alternativa correcta, desarrollando o justificando en el espacio disponible según corresponda.*

1) Si se le aplica una transformación isométrica a un triángulo equilátero resulta:

- a) Un triángulo rectángulo
- b) Un triángulo equilátero
- c) Un triángulo isósceles
- d) Depende de la transformación isométrica

2) Una teselación se puede obtener de:

- I. La rotación de una figura.
- II. La traslación de una figura.
- III. La reflexión de una figura.

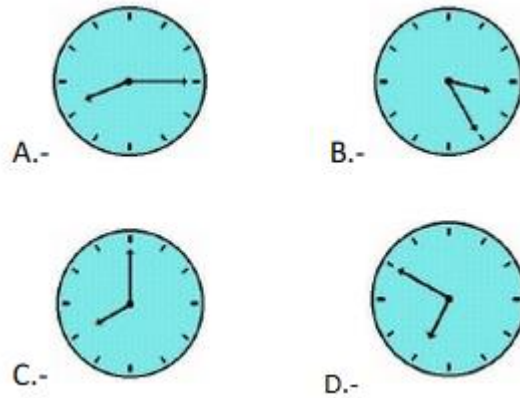
- a) Sólo I y II
- b) Sólo I y III
- c) Sólo II y III
- d) I, II y III

3) Es incorrecto afirmar que:

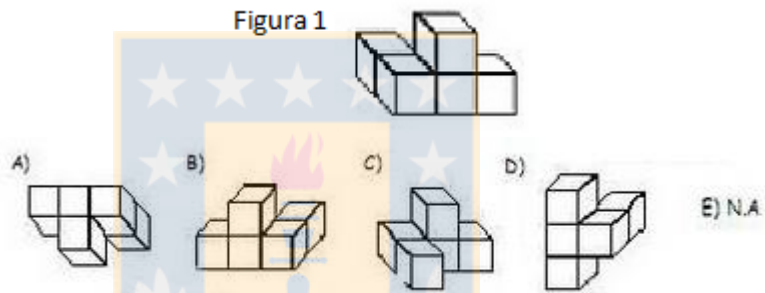
- I. Una traslación mueve todos los puntos de una figura inicial de forma paralela y a una misma distancia.
- II. Las teselaciones regulares se construyen sólo de cuadrados y triángulos equiláteros.
- III. Una rotación mueve circularmente todos los puntos de una figura alrededor de un punto fijo.

- a) Sólo I
- b) Sólo II
- c) Sólo I y II
- d) Sólo I y III

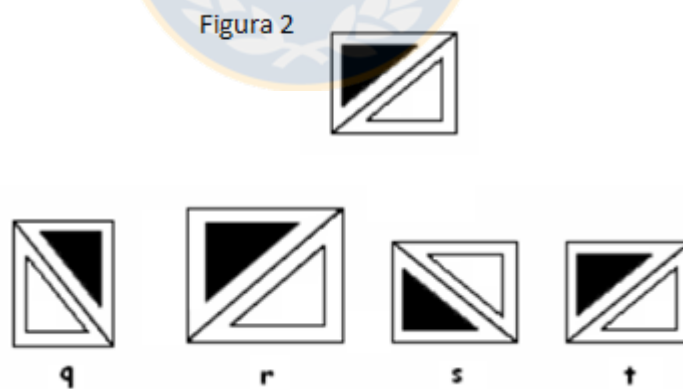
4) ¿Cuál de las siguientes opciones corresponde **AL REFLEJO** de un reloj que marca las 4?



5) ¿Cuál de las siguientes alternativas representa una rotación de la figura 1?

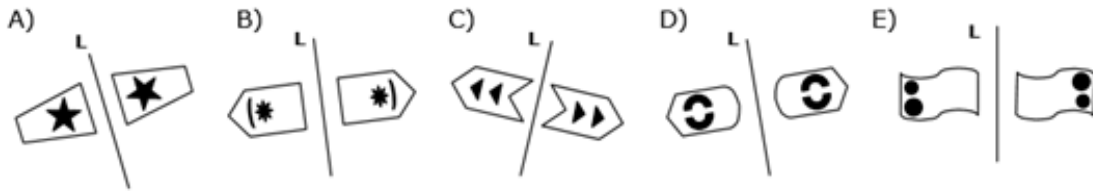


6) Si aplicamos una traslación a la figura 2, se obtiene:

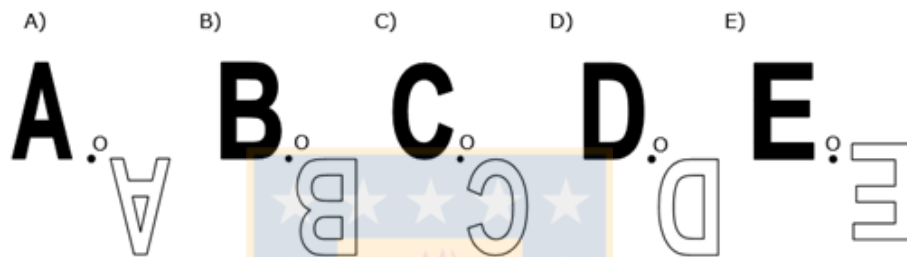


- a) La figura q
- b) La figura r
- c) La figura s
- d) La figura t

7) ¿En cuál de las siguientes figuras **NO** se muestra una simetría con respecto a la recta L?



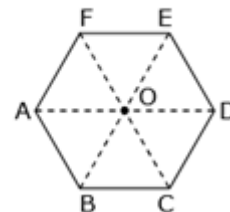
8) Mediante una simetría central con respecto a O, la figura sombreada se reflejó en la figura no sombreada. Esto **NO** es cierto en:



9) ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s) con respecto al hexágono regular de la figura 3?

- I. Al aplicar una rotación  $R(O, -240^\circ)$ , el vértice A coincide con la posición que ocupa el vértice C.
- II. Al aplicar una rotación  $R(O, 180^\circ)$ , el vértice B coincide con la posición que ocupa el vértice E.
- III. Al aplicar una rotación  $R(O, 240^\circ)$  y a continuación  $R(O, 120^\circ)$ , los vértices coinciden con sus posiciones originales.

Figura 3

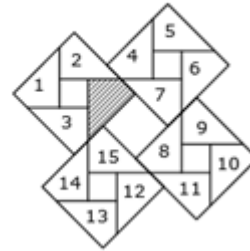


- a) Sólo I
- b) Sólo III
- c) Sólo I y II
- d) Sólo II y III
- e) I, II y III

10) En la figura 4, ¿Cuáles de los cuadriláteros numerados son una traslación del cuadrilátero achurado?

- a) 4, 14 y 10
- b) 6, 14 y 12
- c) 6, 10 y 12
- d) 10, 12 y 14
- e) 1, 6 y 14

Figura 4



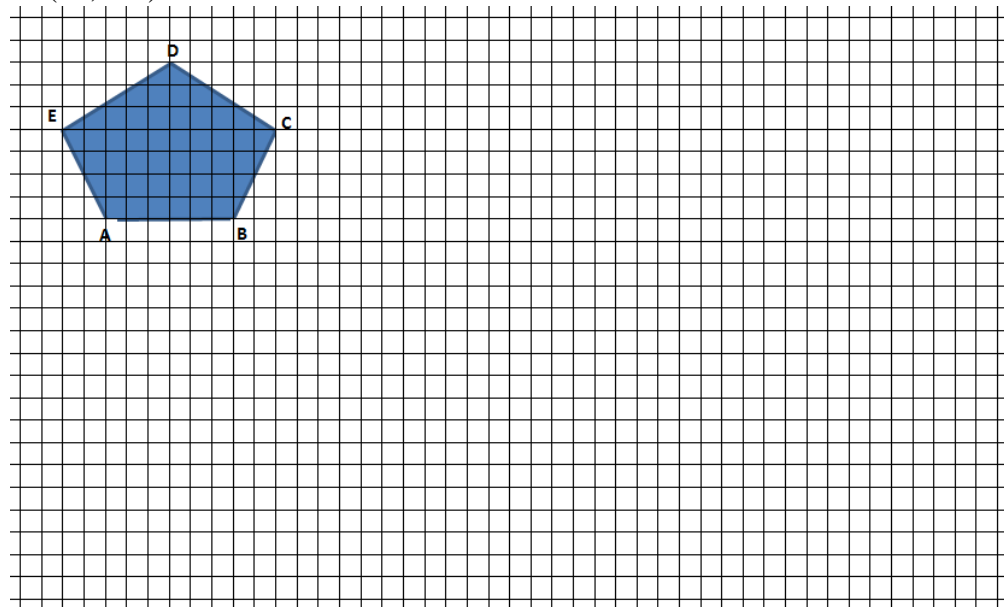
11) Viajando en un automóvil miro por el espejo retrovisor y con dificultad leo la patente del vehículo tras mí; CE 37 45. ¿Qué símbolos son los que veo por el espejo?

- A) 24 73 EC
- B) 37 45 EC
- C) 54 73 EC
- D) 42 37 45
- E) 24 73 EC

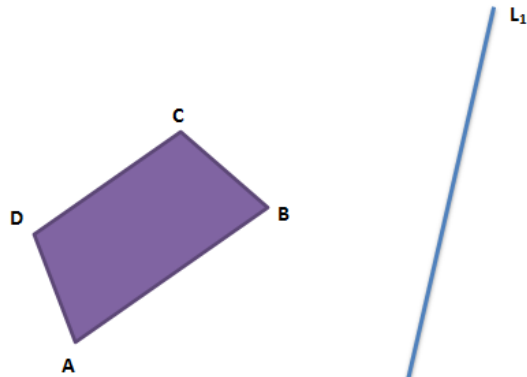


II. Realice la traslación del siguiente polígono según el vector indicado:

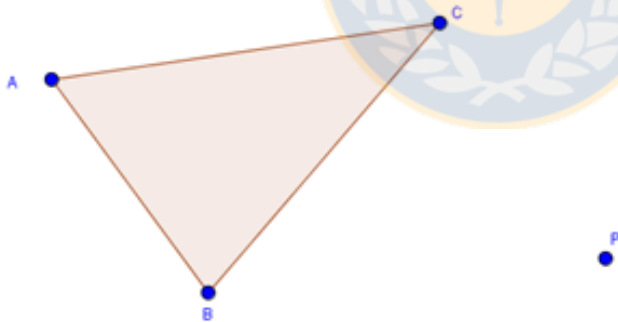
$$\vec{V} (28, -15)$$



**III.** Realice una reflexión axial de la siguiente figura respecto a la recta  $L_1$ .

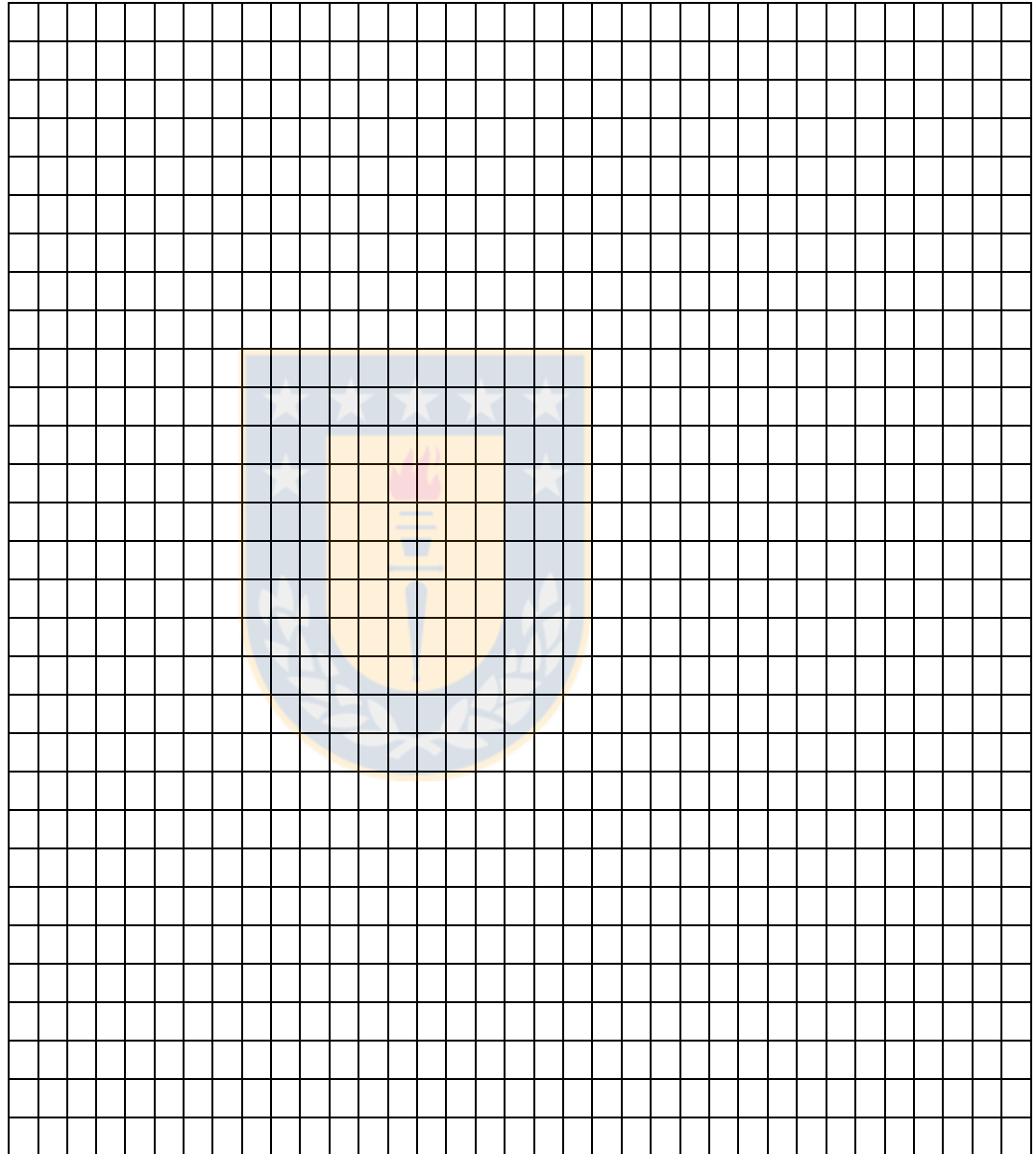


**IV.** Construya una rotación del triángulo ABC en torno al punto P con un ángulo de giro de  $-150^\circ$ .  $R(P, -150^\circ)$



V. *Sobre la planilla que se presenta a continuación, marque el contorno de la pieza entregada (figura 1). Enseguida vuelva a marcar la pieza en otro lugar de la planilla (figura 2).*

*Indique y dibuje una traslación, reflexión (axial) y rotación que compuestas permitan ir de la figura 1 a la figura 2. Señale los puntos, ángulos y rectas utilizados para tal propósito.*



✓ Traslación:


✓ Rotación:

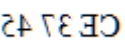
✓ Reflexión:

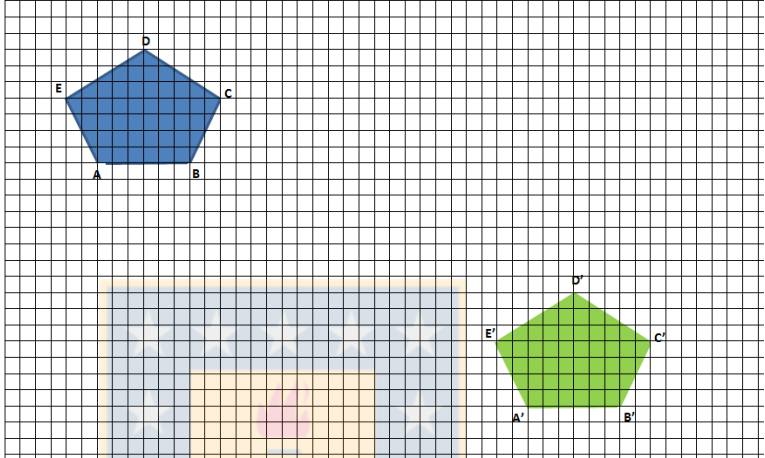
## Anexo 10:

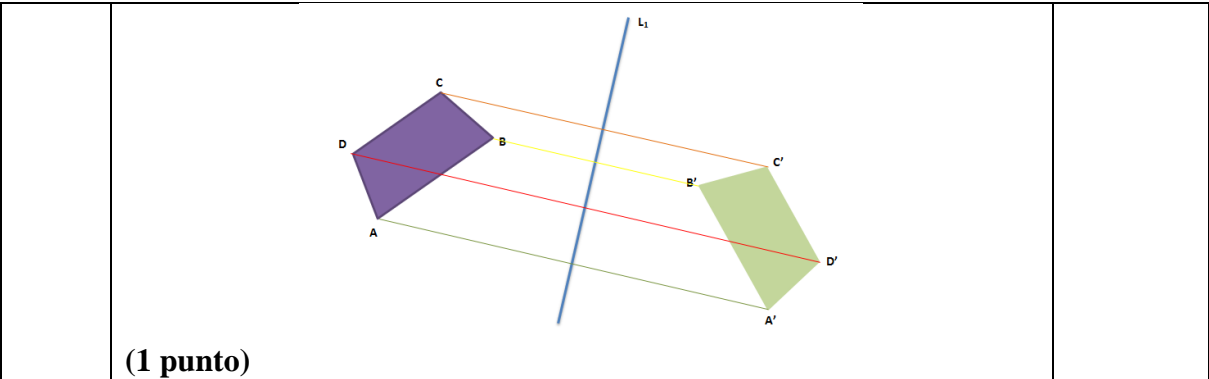
### Pauta de Corrección.

Ítems	Desarrollo o Justificación a las Preguntas de la Evaluación	Puntaje
I.	<p>1) El alumno recuerda y escribe la definición de transformación isométrica como aquella transformación que no altera la forma ni el tamaño de una figura, por ende tampoco sufren alteración en la medida de sus ángulos <b>(1 punto.)</b></p> <p>Argumenta que un triángulo equilátero seguirá siendo un triángulo equilátero independiente del tipo de isometría aplicada. <b>(0,5 pts.)</b></p> <p>Encierra la alternativa B. <b>(0,5 pts.)</b></p>	<b>2 Puntos</b>
	<p>2) El estudiante justifica que el teselacion consiste en cubrir el plano con réplicas de una figura dada. Por lo que estas pueden estar ubicadas en distintas posiciones, giradas o reflejadas, lo que implica la utilización de una o más transformaciones isométricas <b>(1,5 pts.)</b></p> <p>Encierra la alternativa D. <b>(0,5 pts.)</b></p>	<b>2 Puntos</b>
	<p>3) El alumno señala que la traslación es el movimiento lineal de todos los puntos de una figura a una nueva posición. <b>(0,5 pts.)</b></p> <p>Justifica que los polígonos regulares capaces de generar teselaciones regulares son los triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos. <b>(0,5 pts.)</b></p> <p>Indica que la rotación mueve todos los puntos de una figura en torno a un punto dado. <b>(0,5 pts.)</b></p> <p>Marca la alternativa B. <b>(0,5 pts.)</b></p>	<b>2 Puntos</b>
	<p>4) El alumno visualiza y dibuja un reloj analógico que marca las 4, con</p>	

	<p>sus respectivos minutero y horario. Similar al siguiente:</p>  <p><b>(0,5 pts.)</b></p> <p>Identifica que si se aplica una reflexión con respecto al segmento que une las horas 12 y 6, el minutero permanecerá inmóvil y horario marcará las 8 horas. <b>(1 punto.)</b></p> <p>Marca la alternativa C <b>(0,5 pts.)</b></p>	<p><b>2 Puntos</b></p>
	<p><b>5)</b> El estudiante describe la forma de la figura 1, de manera similar a la siguiente: La pieza central está constituida por dos cubos acoplados verticalmente. A la izquierda de estos se ubican dos cubos ordenados de forma horizontal (hacia atrás). Por último, a la derecha de las piezas centrales tenemos un solo cubo. <b>(0,5 pts.)</b></p> <p>Realiza una rotación mental de la figura, poniendo especial atención en el orden de sus piezas antes descritas. <b>(1 punto)</b></p> <p>Selecciona la alternativa A. <b>(0,5 pts.)</b></p>	<p><b>2 Puntos</b></p>
	<p><b>6)</b> El alumno indica que una traslación no altera la forma, el tamaño, orientación ni dirección de una figura. Solo genera un cambio en su posición.</p> <p>Identifica la alternativa que cumple con tal definición <b>(1,5 puntos)</b></p> <p>Selecciona la alternativa D. <b>(0,5 pts.)</b></p>	<p><b>2 Puntos</b></p>
	<p><b>7)</b> El estudiante enuncia las propiedades de la simetría axial:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• La distancia entre un punto y el eje de simetría es igual a la distancia entre el eje de simetría y la imagen del punto.</li> <li>• El segmento que une un punto con su imagen es perpendicular al eje de simetría.</li> </ul> <p>Identifica la alternativa que cumple con tales propiedades. <b>(1,5 puntos)</b></p> <p>Encierra la alternativa E. <b>(0,5 pts.)</b></p>	<p><b>2 Puntos</b></p>

	<p><b>8)</b> El alumno menciona la propiedad de la simetría central que dice que un punto, el centro de simetría y la imagen del punto son colineales</p> <p>Identifica la alternativa que no cumple esta propiedad. <b>(1,5 puntos)</b>          Marca la alternativa E. <b>(0,5 pts.)</b></p>	<b>2 Puntos</b>
	<p><b>9)</b> El estudiante reconoce que todos los triángulos formados por el punto O y los vértices consecutivos del hexágono (figura 3) forman triángulos equiláteros, por lo que cada rotación de <math>60^\circ</math> con respecto al punto O desplaza un vértice a la posición del vértice siguiente.</p> <p>Indica que una rotación de (O, -240) desplaza los vértices cuatro puestos en sentido horario. <b>(0,5 pts.)</b></p> <p>Indica que una rotación de (O, 180) desplaza los vértices dos puestos en sentido anti-horario. <b>(0,5 pts.)</b></p> <p>Indica que una rotación de (O, 240) seguida de una rotación de (O, 120) corresponde a una de (O, 360). Lo que deja los vértices en su ubicación original. <b>(0,5 pts.)</b></p> <p>Selecciona la alternativa E. <b>(0,5 pts.)</b></p>	<b>2 Puntos</b>
	<p><b>10)</b> El alumno argumenta que una traslación mueve una figura manteniendo su forma, orientación y tamaño, por lo que selecciona todas las piezas que cumplen con esa propiedad a partir de la pieza achurada. <b>(1,5 puntos)</b></p> <p>Encierra la alternativa C. <b>(0,5 pts.)</b></p>	<b>2 Puntos</b>
	<p><b>11)</b> El estudiante reconoce e indica que el efecto de un espejo sobre una imagen es similar a lo que sucede con una reflexión axial de la misma. <b>(0,5 pts.)</b></p> <p>Por lo que realiza una reflexión de la imagen de la patente CE 37 45 con respecto a un eje ubicado a la derecha o izquierda de ella, obteniendo lo siguiente:  <b>(1,5 puntos)</b></p> <p>Marca la alternativa A. <b>(0,5 pts.)</b></p>	<b>2 Puntos</b>

<p><b>II.</b></p>	<p>El alumno interpreta la notación <math>\vec{V}</math> (28, -15), como el vector que indica que cada vértice de la figura será desplazado 28 cuadraditos a la derecha y 15 hacia abajo. <b>(1 punto)</b></p> <p>Traslada cada vértice del polígono según el vector indicado. <b>(2 pts.)</b></p> <p>Une los nuevos vértices, formando así la imagen de la figura original, obteniendo una imagen como la siguiente:</p>  <p><b>(1 punto)</b></p>	<p><b>4 Puntos</b></p>
<p><b>III.</b></p>	<p>El estudiante traza las rectas que van de cada uno de los vértices de la figura inicial y que son perpendiculares al eje de simetría (recta <math>L_1</math>). <b>(1 punto)</b></p> <p>Enseguida, calcula la distancia que va desde cada uno de los vértices al eje de simetría o en su defecto, determinan la dimensión de los segmentos que unen estos dos elementos (vértices con el eje). <b>(2 puntos)</b></p> <p>Finalmente ubican los puntos imagen y los unen, formando así la figura reflejada.</p> <p>Obteniendo una imagen similar a la siguiente:</p>	<p><b>4 Puntos</b></p>



**(1 punto)**

**IV.**

El alumno interpreta la notación  $R(P, -150^\circ)$  como un movimiento circular en sentido horario en torno al punto P (fijo).

Utiliza el segmento que va desde un vértice al centro de rotación como radio de una circunferencia que tendrá como centro el punto P.

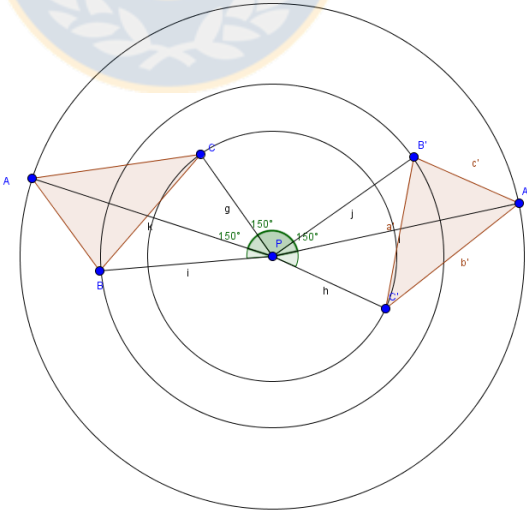
**(1 punto)**

Mide el ángulo indicado ( $-150^\circ$ ) desde el vértice al centro de rotación, determinando así la ubicación del punto imagen del vértice.

**(1 punto)**

Repita dicha acción para cada vértice de la figura, los que al unirlos formaran la imagen rotada. **(2 punto)**

Obteniendo la siguiente imagen:



**4 Puntos**

**V.**

El estudiante señala y dibuja clara y correctamente las diferentes transformaciones isométricas que le permiten ir de la imagen 1 a la imagen 2.

	<p>Traslación, con su respectivo vector <b>(2 punto)</b></p> <p>Rotación, con su correspondiente centro de rotación y ángulo de giro. <b>(2 punto)</b></p> <p>Reflexión axial, señalando su eje de simetría <b>(2 punto)</b></p>	<b>6 Puntos</b>
--	--	-----------------



