Universidad de Concepción

Escuela de Educación

Diseño de actividades de resolución de problemas utilizando un problema clásico de la Teoría de Números

Trabajo de Titulación presentado a la Escuela de Educación de la Universidad de Concepción para optar al grado de Licenciado en Educación y al título profesional de Profesor de Matemáticas

por

Diego Morales

Alexandra Ruz

Profesor guía

Dra. Marianela Castillo

12 de marzo de 2024

Los Ángeles, Chile

Comisión:

Dr. Cristian Pérez

Dr. Sergio Morales

Deseamos expresar nuestro más sincero agradecimiento a nuestras familias por su inquebrantable paciencia y apoyo, constituyendo una fuente constante de inspiración y aliento a lo largo de este proceso.

En particular, extendemos nuestro agradecimiento a nuestra profesora guía, Marianela Castillo, cuya orientación y dedicación desempeñaron un papel fundamental en el éxito de este trabajo de titulación.

Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

Resumen y Palabras Claves

En este trabajo de titulación se presenta una propuesta didáctica para la enseñanza de las matemáticas, con el propósito de mejorar y facilitar el desarrollo de la habilidad de resolución de problemas que tienen los estudiantes.

Dicha propuesta consiste en trabajar con un problema clásico de la Teoría de Números, específicamente la Ecuación de Pell, considerando para su creación el trabajo con Heurismos realizado por Bruder y Collet (2011), por su importancia en el desarrollo de la habilidad de resolución de problemas en el aula.

La propuesta didáctica consiste en cuatro guías de trabajo dirigidas a estudiantes de los últimos dos años de enseñanza media, que tengan suficientes conocimientos en álgebra y geometría analítica.

Dado que este trabajo consiste en una propuesta didáctica, se espera que las guías puedan ser utilizadas por parte de la comunidad educativa del área de la matemática.

Palabras clave: Heurismos, Resolución de problemas, Ecuación de Pell.

Abstract and Keywords

In this graduation thesis, a didactic proposal is presented for the teaching of mathematics, with the purpose of improving and facilitating the development of students' problem-solving skills.

This proposal involves working with a classic problem from Number Theory, specifically the Pell's Equation, taking into consideration the Heuristics work conducted by Bruder y Collet (2011), due to its significance in developing problem-solving skills in the classroom.

The didactic proposal consists of four work guides designed for students in the last two years of high school, who possess sufficient knowledge in algebra and analytical geometry.

As this work constitutes a didactic proposal, it is anticipated that the guides can be utilized by the educational community in the field of mathematics.

Keywords: Heurisms, problem solving, Pell's Equation.

Introducción

El presente Trabajo de Titulación surge a partir de la inquietud de llevar a cabo un problema matemático complejo al aula de matemática escolar. En este trabajo utilizaremos la definición de problema de Fuchs (2006) y Schoenfeld (1989), que debido a su practicidad nos ofrecen una distinción entre problema y ejercicio, y aborda la cuestión desde una perspectiva que considera el desarrollo cognitivo. Schoenfeld (1989) describe un problema simplemente como algo difícil de resolver para un individuo; cuando la persona que trata de resolver ya tiene un esquema de solución disponible, deja de ser un problema y pasa a ser un ejercicio. Fuchs (2006) dice que un problema se caracteriza por tres componentes: un estado inicial indeseable, una barrera específica de la persona y un estado objetivo deseado.

El propósito de la investigación es desarrollar guías de aprendizaje basadas en un problema clásico de la Teoría de Números, en donde se encuentran actividades que sean adecuadas para trabajar con estudiantes de enseñanza media en la asignatura de matemática.

El problema abordado en las guías es la resolución de una ecuación diofántica, en particular la Ecuación de Pell. Esta ecuación diofántica se expresa como $x^2 - Dy^2 = 1$, donde D es un número entero libre de cuadrado. Es conocida como la Ecuación de Pell porque Euler atribuyó erróneamente una solución de esta a John Pell, un matemático inglés del siglo XVII (debería haber sido atribuida a Brouncker) (Stillwell, 2010).

En el libro de "Elementos" de Euclides (libro original del año 300 a. C.) se presenta una solución formal para el caso $D = 2$, con un algoritmo que permite encontrar nuevas soluciones a partir de una conocida. Las soluciones presentadas en esos años tienen una demostración geométrica, dada la forma en que se trabajaba la matemática en ese tiempo, y no se demostró que las soluciones encontradas fueran las únicas.

Otros avances en la línea de encontrar todas las soluciones para el caso general se vieron en el siglo 628 d. C. por Brahmagupta para el caso de $x^2 - Dy^2 = 1$, y 1150 d. C. por Bhaskara (Stillwell, 2010). Destacando que estos descubrimientos fueron completamente desconocidos por Occidente, siendo desarrollada independientemente por Fermat, Wallis, Brouncker y Lagrange en el siglo XVIII (Jacobson y Williams, 2009). Con todo lo anterior, se puede ver que la resolución de la forma general de la Ecuación de Pell tomó muchos años y participaron en ella matemáticos de renombre en cada época.

La elección de trabajar con la resolución de la Ecuación de Pell en estudiantes de enseñanza media surge del interés por llevar la matemática de los matemáticos[1] al aula escolar. Este proceso implica realizar una transposición didáctica, adaptando un problema complejo al nivel de comprensión y habilidades de los estudiantes.

Las guías de trabajo resultantes de esta transposición didáctica se construyen considerando diversos heurismos descritos por Bruder y Collet (2011). El enfoque principal

[1] Entendiendo esto como aquella en donde los matemáticos investigan y desarrollan teorías, resuelven problemas fundamentales y aplican métodos abstractos para modelar fenómenos del mundo real. Centrándose además en establecer verdades separadas de las cualidades sensoriales, buscando patrones y formulando conjeturas, contribuyendo a avances científicos.

de este trabajo es la creación de las guías, no su aplicación directa con estudiantes de enseñanza media, dejando esta posibilidad como un tema de investigación futuro.

En conclusión, este estudio demuestra que la teoría de números puede ser abordada en la enseñanza media, aunque se destaca que es necesario contar con estudiantes altamente motivados e interesados en el tema.

La estructura del trabajo consta de cinco capítulos. En el primer capítulo se presenta el planteamiento del problema, las preguntas de investigación, los objetivos y la justificación. El segundo capítulo aborda el marco teórico referencial, explorando los siguientes temas: la resolución de problemas (definición, métodos de resolución y heurística, los objetivos asociados a esta en el currículum nacional, el estado de la resolución de problemas en Chile, y el proyecto ARPA), didáctica de la resolución de problemas, breve introducción a la Teoría de Números, su historia, usos, introducción a la Ecuación de Pell, secuencia didáctica, transposición didáctica y planteamiento o formulación de problemas. El tercer capítulo se centra en el marco metodológico, detallando el diseño de la propuesta didáctica, el tipo de investigación utilizada, y el juicio de expertos. El cuarto capítulo presenta los resultados obtenidos del diseño de las guías y actividades, así como la discusión de los resultados obtenidos. Finalmente, el quinto capítulo contiene las conclusiones, proyecciones y limitaciones del trabajo.

Capítulo 1

Planteamiento del Problema

1.1 Problema

La resolución de problemas tiene diversas acepciones, ligeramente diferentes, dependendiendo de la disciplina. En el caso de la matemática:

- La resolución de problemas puede considerarse como el eje central de la enseñanza en matemática (Ballestero y Mayela, 2008).
- Según Felmer y Perdomo-Díaz (2017), un problema es una actividad matemática para la cual la persona que la enfrenta no conoce un procedimiento que le conduzca a la solución, esta tiene interés en resolverlo, le supone un desafío y siente que lo puede resolver.
- Finalmente, Ministerio de Educación, 2015, "habla de resolver problemas [en lugar de ejercicios] cuando el estudiante logra solucionar una situación problemática dada, contextualizada o no, sin que se le haya indicado un procedimiento determinado. Para ello las y los estudiantes necesitan usar estrategias, comprobar

y comunicar: experimentar, escoger, inventar y aplicar diferentes estrategias".

Por otro lado, la Teoría de Números en un comienzo se entiende como el estudio de las propiedades de los números naturales, lo cual es la noción compartida por varios matemáticos,

- la rama de la matemática que se ocupa de los números enteros, $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ también llamados números de conteo o números enteros positivos (Apostol, 1976).
- La Teoría de los Números se ocupa de las propiedades de los números naturales $1, 2, 3, 4, \ldots$, también llamados números enteros positivos. Estos números, junto con los enteros negativos y el cero, forman el conjunto de los enteros (Niven et al., 1991).
- Como primera aproximación, la Teoría de los Números puede definirse como el estudio de los números naturales $1, 2, 3, 4, \ldots$. Kronecker comentó una vez [hablando de matemáticas en general] que Dios hizo los números naturales y todo lo demás, es obra del hombre. Aunque los números naturales constituyen, en cierto sentido, el sistema matemático más elemental, el estudio de sus propiedades ha proporcionado a generaciones de matemáticos problemas de incesante fascinación (Ireland y Rosen, 1982).

Pero bajo ese supuesto rápidamente debemos considerar otros conjuntos como los enteros, enteros módulo p, racionales, entre otros. Teniendo esto en consideración, y los métodos con los que se suelen usar, surgen las siguientes subdivisiones:

- Teoría Clásica o Elemental de Números, es aquella relacionada con problemas de divisibilidad, congruencias, ecuaciones diofánticas, etc. en el conjunto de los naturales, enteros y racionales usando métodos conocidos alrededor del siglo

XVIII.

- Teoría Analítica de Números, como aquella que usa análisis complejo y armónico para resolver los problemas antes mencionados.

- Teoría Algebraica de Números, usa conocimientos algebraicos, en lugar de analíticos, para resolver ese tipo de problemas.

Es debido a estas últimas subdivisiones que uno se ve obligado a considerar otros conjuntos numéricos, como los números irracionales y con ellos los trascendentales, reales, complejos, entre otros, pues son el resultado del trabajo usando esas herramientas.

Ahora, enfocándonos en la enseñanza de la matemática en Chile, desde el currículum nacional chileno se tiene que

> la asignatura de Matemática tiene propósitos formativos que progresan a lo largo de la trayectoria educativa. Desde 1ro a 6to Básico, la asignatura espera enriquecer la comprensión de la realidad, facilitar la selección de estrategias para resolver problemas y contribuir al desarrollo del pensamiento crítico y autónomo en las y los estudiantes. Luego, desde 7mo Básico a 2do Medio, se enfatiza la comprensión y aplicación de conceptos y procedimientos en la resolución de problemas reales en contextos profesionales, personales, laborales, sociales y científicos. Finalmente, en 3ro y 4to Medio, se tiene como finalidad el desarrollar la capacidad de análisis, estudio y resolución para favorecer el tránsito al mundo laboral y profesional, y promover su contribución a la comunidad local, nacional y global (Ministerio de Educación, 2023)

Por otro lado, dentro de los estándares disciplinarios para la Formación Inicial Docente (FID) de la carrera de Pedagogía en Matemática (Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas, 2021), se tiene que la resolución de problemas se encuentra dentro de las habilidades para el siglo XXI, donde se muestra esta como uno de los pilares para el desarrollo de habilidades matemáticas. Es por ello que se presenta una breve definición y estrategias de implementación, entre otros, para luego introducir cada uno de los conocimientos que un docente de la disciplina debiese tener, donde en cada uno de los Estándares FID la resolución de problemas está presente tanto dentro del Conocimiento Disciplinar como de la Didáctica Disciplinar.

Luego, enfocándonos en la enseñanza media y sus unidades, esta se basa en tres pilares fundamentales: las habilidades, los contenidos y las actitudes. Dentro de estas habilidades se encuentran cuatro: resolución de problemas, argumentar y comunicar, representar, y modelar (Ministerio de Educación, 2015). Siendo el papel de la enseñanza de las matemáticas propuesto por el Ministerio de Educación, el desarrollar las habilidades que generan el pensamiento matemático, sus conceptos y procedimientos básicos, con el fin de comprender y producir información representada en términos matemáticos. Definiendo el pensamiento matemático como una capacidad que nos permite comprender las relaciones que se dan en el entorno, cuantificarlas, razonar sobre ellas, representarlas y comunicarlas (Ministerio de Educación, 2015).

De estas cuatro habilidades se tiene que, la resolución de problemas, en mayor o menor medida, fomenta el desarrollo de las otras tres. Ciertamente, "para resolver problemas es necesario representar y modelar. La resolución de problemas provee de excelentes oportunidades para la comunicación y el razonamiento matemático ya que, tanto en el trabajo en grupos pequeños como en el grupo curso, los estudiantes exponen y discuten sobre las diferentes estrategias, comunican las soluciones obtenidas, razonan sobre los procedimientos y discuten sobre los errores que pueden haber cometido durante la búsqueda de una solución" (Felmer y Perdomo-Díaz, 2017). Siguiendo esta misma línea, Cruz (2017) señala que "[l]as interpretaciones y las soluciones de problemas cuando se comunica[n] se viene[n] a convertir en el lenguaje, para reconocer conexiones entre conceptos relacionados y aplicar los ejercicios matemáticos a problemas reales mediante la modelización y con la utilización de las tecnologías informáticas y comunicaciones en el desarrollo de las matemáticas".

Luego, aunque no son mencionadas por el Ministerio de Educación, a partir del análisis de Valdiviezo y Flores Herrera (2009), tenemos que las habilidades de observar, describir, clasificar, identificar, interpretar, analizar, generalizar, abstraer, relacionar, formular, sintetizar, explicar, evaluar, argumentar, demostrar y aplicar también conforman el conjunto de habilidades intelectuales, las mismas que son necesarias para resolver problemas.

Por otro lado, el Ministerio de Educación (2015), organiza en cuatro ejes temáticos los contenidos de enseñanza media: Números, Álgebra y funciones, Geometría, y Probabilidad y estadística, donde "dentro de cada uno de estos ejes se puede desarrollar cada una de las cuatro habilidades descritas".

Como el enfoque de nuestra investigación relaciona problemas de la Teoría de Números con el currículum nacional de la matemática de enseñanza media, de su definición presentada anteriormente, esta se encuentra en cada uno de los ejes temáticos indicados por el Ministerio de Educación. Pues el Ministerio de Educación (2015), señala que:

- El eje de Números es aquel en donde los estudiantes trabajan la comprensión de nuevos números y las operaciones entre ellos, siguiendo la progresión de números enteros hasta los números reales. Así, se espera que los estudiantes comprendan cómo los distintos tipos de números permiten modelar situaciones cotidianas más amplias que las ya vistas en el primer ciclo; para ello su trabajo está orientado a que representan los distintos conjuntos numéricos, los relacionen y utilicen para resolver problemas y para manejarse en su día a día. Por tanto, el objetivo final del ciclo es que los estudiantes puedan transitar por las diferentes formas de representación de un número (concreta, pictórica y simbólica).

- El eje de Álgebra y funciones busca que los estudiantes comprendan la importancia del lenguaje algebraico para expresarse en matemática y las posibilidades que este lenguaje les ofrece. Estando los aprendizajes de este eje fuertemente relacionados con el eje de Números, específicamente, relacionados con el desarrollo de la habilidad de resolución problemas, donde se espera que los estudiantes apliquen sus conocimientos para resolver problemas tales como el transformar expresiones algebraicas en otras equivalentes, expresar igualdades y desigualdades mediante ecuaciones e inecuaciones, comprender las funciones lineales y cuadráticas junto sus respectivas representaciones, entre otros.
- Para el eje de Geometría se espera que los alumnos desarrollen sus capacidades espaciales y que entiendan que ellas les permiten comprender el espacio y sus formas; siendo usada principalmente la habilidad de representar, para lograr transitar de mejor manera desde un ámbito bidimensional a uno tridimensional usando diversas herramientas. Pero, la habilidad de resolución de problemas también se encuentra presente en este eje, para resolver problemas técnicos y cotidianos como el cálculo de perímetros, áreas, volúmenes, razones trigonométricas, etc.
- Finalmente, el eje de Probabilidad y estadística es introducido para cumplir la necesidad de que todos los estudiantes aprendan a realizar análisis, inferencias y obtengan información a partir de datos estadísticos. Específicamente, en el área de probabilidad se pretende que ellos estimen de manera intuitiva y que

calculen de manera precisa la probabilidad de ocurrencia de eventos, entrando allí la combinatoria. Por otra parte, en el área de estadística se espera que diseñen experimentos de muestreo aleatorio para inferir sobre características de poblaciones; utilicen medidas de tendencia central, de posición y de dispersión para resolver problemas, entre otros.

En consecuencia, la Resolución de Problemas y la Teoría de Números se encuentran presentes en cada uno de los ejes como piezas fundamentales para lograr el objetivo de los mismos.

En relación a la Resolución de Problemas y su enseñanza, de manera general, destacamos:

- Según Ruiz y García (2003, p. 325), “El constructivismo concibe la resolución de problemas como generadora de un proceso a través del cual quien aprende combina elementos del conocimiento, reglas, técnicas, destrezas y conceptos previamente adquiridos para dar solución a una situación nueva”.
- Según Fernández Bravo (2006),

  > cada vez más, la resolución de problemas matemáticos como actividad escolar, depende de planteamientos metodológicos adecuados que permitan generar ideas desde la observación, la imaginación, la intuición y el razonamiento lógico. A este afán de comprensión hay que añadir la necesidad de extensión, de los conceptos adquiridos, al entorno inmediato en el que el alumno se desenvuelve, con el claro objetivo de aplicar correctamente las relaciones descubiertas, y descubrir otras nuevas que aporten al conocimiento amplitud intelectual.

- Según Polya (1965),

> Si [un profesor] dedica su tiempo a ejercitar a los alumnos en operaciones rutinarias, matará en ellos el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad [de aprendizaje]. Pero si, por el contrario, pone a prueba la curiosidad de sus alumnos planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos, y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello.

- Según Ballestero y Mayela (2008)

> es necesario evitar la enseñanza de métodos mecánicos para resolver un problema, por lo general los docentes acuden a un único procedimiento para resolverlos y no dejan libertad de pensamiento a sus estudiantes, quienes deben utilizar la misma estrategia de solución que le fue enseñada. Por el contrario, se debe impulsar a cada estudiante a hallar la solución del problema por sí mismo, debe ser capaz de reconocer que existe más de una forma para darle solución y no limitarse a una única manera de hacerlo.

Por último, en la actualidad se tiene que los resultados de la educación o alfabetización matemática pueden ser comparados Internacionalmente mediante dos evaluaciones, el *Programme for International Student Assessment* (PISA) y *Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS), donde la competencia matemática se define como la capacidad de los alumnos para formular, utilizar e interpretar las matemáticas en una variedad de contextos. Incluye el razonamiento matemático y el uso de conceptos, procedimientos, hechos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Donde además de medir las capacidades de los estudiantes en matemáticas y ciencias, ambas evaluaciones incluyen un enfoque especial en la resolución de problemas (Mullis et al., 2020; OECD, 2019).

A partir de los resultados de ambas evaluaciones se puede aseverar que Chile presenta problemas en el desarrollo de la matemática a nivel escolar. Esto se debe a que en los últimos años Chile se ha estancado según la evaluación PISA (OECD, 2019) e incluso decaído según TIMMS (Mullis et al., 2020).

Enfocándonos en la labor del docente al aplicar la resolución de problemas en sus clases se encuentra que, en el año 2005, Villarreal Farah realiza un estudio sobre la resolución de problemas en matemática y el uso de las TIC, en este estudio se entrevista a un grupo de 31 profesores de matemática que imparten clases a cursos de enseñanza secundaria en Chile, dentro de sus resultados se destaca lo siguiente:

> Si bien en la literatura existe un consenso generalizado en señalar que un ejercicio no es considerado como un problema, hay un 32 % de los profesores que piensa que un ejercicio s[í] es un problema. Alguno[s] de los elementos que incide[n] en esto pueden ser que un 23 % de los profesores señala haber conocido esta metodología de trabajo solo en forma autodidacta, otro factor puede ser que el 23 % de los profesores encuestados no tiene formación en educación, y como se sabe, resolución de problemas corresponde a una estrategia metodológica más que a un conocimiento puramente matemático.

Esta última declaración se ve corroborada con el estudio realizado en Chile de Preiss et al., 2011. Dicha investigación, generada del análisis de una muestra de 77 videos de clases de profesores participantes en el Sistema de Evaluación Nacional Docente del Gobierno de Chile, revela que el pensamiento matemático docente en Chile está focalizado en la presentación mecánica de información y la resolución mecánica de problemas. Cuyo objeto principal fue estudiar el discurso público en la enseñanza de matemáticas, con el fin de explorar el tipo de pensamiento público matemático. Por lo que los profesores tienen poco acceso a un pensamiento público dedicado a resolver problemas y pocas oportunidades para pensar acerca de las operaciones que realizan y su naturaleza conceptual.

Bajo esta evidencia es que surge el proyecto Activando la Resolución de Problemas en el Aula (ARPA), una iniciativa de investigación y desarrollo profesional de la Universidad de Chile orientada a formar docentes, de todos los niveles educativos, en la metodología de resolución de problemas (Espinoza et al., 2016). Donde crean materiales y realizan talleres en tres áreas (matemáticas, escritura y ciencias) orientados a ella, pero estos problemas no están adaptados a las bases curriculares chilenas.

Por todo lo anterior, surge la inquietud de investigar sobre las formas en que se puede llevar la resolución de problemas al aula de matemáticas en enseñanza media utilizando un problema clásico de la Teoría de Números.

1.2 Preguntas de investigación

- ¿Cuál sería la estructura y diseño efectivos para desarrollar guías de trabajo centrada en un problema clásico de la Teoría de Números, con actividades que fomenten la habilidad de resolución de problemas y se alineen con los objetivos de Matemáticas para estudiantes de educación media?

1.3 Objetivos

Con respecto a lo señalado anteriormente en las preguntas de investigación y en el planteamiento del problema, es qué surgen los siguientes objetivos con el fin de resolver la problemática dada.

1.3.1 Objetivo general

Diseñar cuatro guías de trabajo a partir de un problema clásico de la Teoría de Números para la asignatura de Matemática en Enseñanza Media.

1.3.2 Objetivos específicos

- Recopilar información sobre el uso de heurismos en la resolución de problemas y su uso en la enseñanza de la matemática, y problemas asociados a un problema clásico de la Teoría de Números.
- Adaptar la resolución de un problema clásico de la Teoría de Números mediante guías de trabajo adecuadas para estudiantes de enseñanza media, alineadas con las Bases Curriculares y centrada en el desarrollo de la habilidad de Resolución de Problemas mediante heurismos.

1.4 Justificación

1.4.1 Sobre la Resolución de Problemas

Actualmente la enseñanza de la matemática en Chile presenta algunos desafíos, uno de ellos, el cual puede ser reflejado en pruebas estandarizadas internacionales, es la resolución de problemas. Donde,

> La resolución de problemas provee de excelentes oportunidades para la comunicación y el razonamiento matemático ya que, tanto en el trabajo en grupos pequeños como en el grupo curso, los estudiantes exponen y discuten sobre las diferentes estrategias, comunican las soluciones obtenidas, razonan sobre los procedimientos y discuten sobre los errores que pueden haber cometido durante la búsqueda de una solución (Felmer y Perdomo-Díaz, 2015).

Por su parte, Felmer y Perdomo-Díaz (2017) en su artículo sobre un programa de desarrollo profesional docente para un currículo de matemática centrado en las habilidades de resolución de problemas (como eje articulador), señalan que

> las habilidades matemáticas también son recogidas en las pruebas internacionales. En el caso de la prueba TIMSS, se distingue entre un dominio de contenido y un dominio cognitivo. Este segundo dominio toma en cuenta, entre otros, la aplicación y el razonamiento, que requiere habilidades de representación, resolución de problemas y justificación (TIMSS, 2012). En el caso de la prueba PISA, se consideran tres dimensiones a evaluar: procesos, contenidos y contextos. En la descripción de los procesos, la resolución de problemas y las habilidades de representación y razonamiento matemático tienen una incidencia gravitante (PISA, 2014).(Agencia de Calidad de la Educación, 2014)

En cuanto a la formación continua se recomienda que se privilegien y promuevan cursos y programas que centren sus esfuerzos en dar oportunidades a los profesores para que observen, discutan y pongan en práctica estrategias pedagógicas que promuevan el desarrollo de las habilidades matemáticas, en particular la resolución de problemas (Felmer Aichele, 2014).

Según Recalde (2016),

> En definitiva, aprender a resolver problemas, y aceptar que con frecuencia hay más de una respuesta a una pregunta y más de una forma de tratarla, constituye una parte fundamental tanto en la educación como en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Las ventajas del enfoque basado en la resolución de problemas en cuanto al proceso de enseñanza y aprendizaje son significativas por diversas razones:
>
> 1. Los alumnos tienen la posibilidad de pensar las cuestiones con detenimiento, hacer pruebas, equivocarse, "perder el tiempo" investigando...
> 2. Existe una mayor participación y un mayor grado de comprensión por parte del alumnado.
> 3. Es un tipo de conocimiento basado en la experiencia (es decir, el conocimiento obtenido mediante la experiencia de hacer algo), siendo más duradero y significativo para el alumno que el conocimiento transmitido por el profesor o el libro.
> 4. Los alumnos se ven inmersos en la construcción de sus propios sistemas individuales de aprendizaje y de comprensión[.]

1.4.2 Historia, personajes y aplicaciones de la Teoría de Números

Específicamente tenemos que la teoría de números es una de las ramas más antiguas de las matemáticas, que se remonta a los albores de la historia. Sus orígenes se encuentran registrados por primera vez en las antiguas civilizaciones de Egipto y

Babilonia, donde eruditos comenzaron a estudiar las aplicaciones de los números, la divisibilidad, los números primos, entre otros.

Sin embargo, el desarrollo formal de la teoría de números como una disciplina matemática, junto a muchas otras, comenzó en el siglo III a. C. con el trabajo de los antiguos matemáticos griegos Euclides, Diofanto y los Pitagóricos. Siendo el libro "Elementos" de Euclides y su trabajo sobre los números primos los que sentaron las bases de muchos conceptos de la teoría de números que hasta el día de hoy se estudian (Lemmermeyer, 2023).

Luego, a lo largo de la historia, varios matemáticos, como Aryabhata, Al-Khwarizmi y Fibonacci, hicieron contribuciones significativas a la teoría de números. En el siglo XVII, Pierre de Fermat y Blaise Pascal lograron notables avances en este campo. Luego, en los siglos XVIII y XIX, el estudio de la Teoría de Números experimentó un progreso notable con el trabajo de matemáticos como Euler, Gauss y Dirichlet (Lemmermeyer, 2023).

Hoy en día, la Teoría de Números sigue siendo un área de investigación activa y vibrante, con aplicaciones en Criptografía, Teoría de Codificación y otros campos. Su rica historia y perdurable relevancia la convierten en una rama fundamental y fascinante de las matemáticas (Bringmann et al., 2015; Křížek et al., 2021; Yan, 2019).

1.4.3 Autores actuales de la Teoría de Números y la resolución de problemas

Por otro lado, tenemos que la resolución de problemas es innata al ser humano, señala Davidson y Sternberg (2003)

> Casi todo en la vida es un problema. Incluso cuando vamos de vacaciones para escapar de nuestros problemas, rápidamente descubrimos que las vacaciones simplemente traen problemas que difieren en tipo o magnitud de los problemas de la vida diaria. Además, a menudo encontramos que la solución a un problema se convierte en la base del siguiente. Por ejemplo, cerrar la compra de una casa resuelve el problema de comprarla, pero generalmente significa el inicio de un conjunto completamente nuevo de problemas relacionados con la propiedad del hogar.

Comenzando desde el siglo XX, Duncker (1974)[1] fue uno de los primeros en estudiar la resolución de problemas y dar una definición a esto en su libro "Sobre la psicología del pensamiento productivo[2]", desde un punto de visto de la psicología. Destacando a los autores Jean Piaget, psicólogo del desarrollo conocido por sus etapas del desarrollo cognitivo y el estudio de las habilidades de resolución de problemas en los niños; John Dewey, filósofo y reformador educativo estadounidense, que enfatizó la importancia del pensamiento crítico y la resolución reflexiva de problemas en la educación, cuyo trabajo sentó las bases para el aprendizaje basado en la indagación y los enfoques de aprendizaje basado en problemas; entre otros (Trilla et al., 2001).

Pues no es solo en el campo de las matemáticas donde se le da un estudio especial a la resolución de problemas, sino también en la psicología y en diversas disciplinas como física, por ejemplo, con Richard Feynman conocido por sus habilidades para resolver problemas y sus contribuciones en diversas áreas de la física; donde algunos de sus heurismos para resolver problemas pueden encontrarse en su libro "Surely You're Joking, Mr. Feynman!" (Feynman y Leighton, 1997).

[1] Publicado originalmente el año 1930.
[2] Zur Psychologie des produktiven Denkens.

Específicamente en Teoría de Números y resolución de problemas tenemos al ya legendario George Pólya, matemático húngaro, conocido por su trabajo sobre estrategias de resolución de problemas y heurística matemática. Que escribió el influyente libro "Cómo resolverlo", que explora varios heurismos para resolver problemas de manera efectiva, junto al método que hoy lleva su nombre para poder abordarlos. También Paul Erdős, matemático húngaro conocido por sus prolíficas contribuciones a varias áreas de las matemáticas, con más de 1500 trabajos de investigación a su nombre, a menudo colaborando con muchos otros matemáticos; que desempeñó un papel vital en el desarrollo del campo al plantear numerosos problemas abiertos y conjeturas; siendo además conocido por sus habilidades para resolver problemas y su talento para detectar preguntas matemáticas interesantes y desafiantes.

Finalmente, y en el siglo XXI, se tiene a Terence Tao conocido por su trabajo en teoría de números y análisis armónico, quien ha logrado avances significativos en una variedad de problemas matemáticos, demostrando una excepcional habilidad para resolver problemas, que puede ser estudiada en su libro "Solving Mathematical Problems 2006" mediante el método, estrategias y problemas que plantea.

Ahora, es esencial tener en cuenta que, si bien hay matemáticos que han establecido conexiones entre la teoría de números y las metodologías de resolución de problemas, la "Resolución de Problemas" en sí misma es más un enfoque general que abarca varias disciplinas matemáticas. Como resultado, la distinción entre "Teoría de Números" y "resolución de problemas" como disciplinas separadas puede ser menos clara, y es posible que las contribuciones en esta área no se atribuyan explícitamente a autores específicos.

1.4.4 ¿Por qué desarrollar la habilidad de resolución de problemas en matemáticas?

La resolución de problemas es de suma importancia por varias razones y juega un papel importante en el desarrollo personal, académico, profesional y social de toda persona. Por nombrar algunas de las razones:

- *Mejora el aprendizaje*, pues fomenta el pensamiento crítico y la comprensión profunda de los conceptos. Desafía a las personas a aplicar sus conocimientos y habilidades en situaciones prácticas, lo que lleva a experiencias de aprendizaje significativas.
- *Desarrolla habilidades críticas*, pues fomenta habilidades como el pensamiento analítico, la creatividad, el razonamiento lógico y la toma de decisiones. Estas habilidades son valiosas en varios dominios, desde lo académico hasta la vida diaria y el lugar de trabajo.
- *Fomenta la innovación estimulando la creatividad*, pues requiere pensar fuera de la caja y explorar soluciones innovadoras.
- *Aumenta la confianza*, pues superar los desafíos refuerza la creencia en las propias capacidades y empodera a las personas para abordar problemas más complejos.
- *Facilita la adaptabilidad*, dado que equipa a las personas con la capacidad de adaptarse a las circunstancias cambiantes y manejar situaciones inesperadas de manera efectiva.
- *Impulsa el progreso y los avances en varias disciplinas*, incluida la tecnología, la ciencia, la medicina y la ingeniería, por nombrar unos pocos.

- *Apoya la toma de decisiones*, puesto que permite la toma de decisiones informadas, lo que reduce la incertidumbre y minimiza los riesgos potenciales.

- *Promueve colaboración y comunicación entre personas con diversas perspectivas y conocimientos*, dado que en muchos problemas se requiere para encontrar soluciones integrales.

- *Promueve resiliencia*, porque enfrentar desafíos y contratiempos en la resolución de problemas genera resiliencia y la capacidad de perseverar frente a las dificultades.

- *Aborda problemas sociales*, pues es vital para abordar los desafíos sociales, como la pobreza, la desigualdad, los problemas ambientales y las crisis de salud pública, etc.

En general, la resolución de problemas es una habilidad esencial que empodera a las personas para superar obstáculos, innovar y progresar en diversas áreas. Siendo un aspecto fundamental del desarrollo humano y un futuro mejor para las personas y las comunidades en todo el mundo.

1.4.5 ¿Por qué trabajar la resolución problemas con la Teoría de Números?

Para finalizar, el uso de la Teoría de Números como herramienta para la enseñanza de la resolución de problemas ofrece numerosos beneficios y ventajas. Siendo algunas de las razones por las que la Teoría de Números es un enfoque valioso y efectivo para desarrollar dicha habilidad son:

- *Posee problemas concretos y accesibles*, pues a menudo trata con números naturales y enteros, lo que hace que los problemas sean tangibles y accesibles para los estudiantes. Dado que trabajar con entidades familiares puede involucrar a los estudiantes y fomentar una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos que se buscan enseñar (Miele, 2014).

- *Desarrolla estrategias o heurismos de resolución de problemas*, porque proporciona una amplia gama de problemas que requieren diversas estrategias de resolución de problema. Creando oportunidades para que los estudiantes aprenden y apliquen estas estrategias para abordar diferentes tipos de problemas de manera efectiva (Toh et al., 2014). Toh et al, además señalan, "la naturaleza de los problemas de Teoría de Números es tal que si los estudiantes no intentan utilizar heurismos adecuados para la resolución de problemas, no podrán progresar en la demostración de los teoremas, lo que significa que es poco probable que les vaya bien en el curso [de Teoría de Números]".

- *Fomenta la exploración matemática*, dado que la teoría de números abre las puertas a fenómenos matemáticos hermosos e intrigantes, como los números primos, la divisibilidad y las congruencias, por nombrar algunos. Los cuales pueden despertar la curiosidad e inspirar a los estudiantes a explorar las matemáticas más allá del aula.

- *Prepara para matemáticas más avanzadas*, al sentar las bases para muchos conceptos y teorías matemáticas, como álgebra abstracta, análisis complejo y matemáticas discretas.

- *Aplicaciones en criptografía e informática*, lo cual puede despertar el interés en la tecnología y la resolución de problemas del mundo real.

Cómo último punto, aunque de una naturaleza diferente a los anteriores, tanto la teoría de números como la habilidad de resolución de problemas se encuentran en el currículum nacional y por las razones anteriores no aprovechar la oportunidad para trabajar ambas es dejar de lado una valiosa instancia para ayudar al desarrollo de los estudiantes en la asignatura de matemática (Zazkis y Campbell, 2006)[3].

[3]Cada una de las razones se trabaja en detalle en el libro de Zazkis y Campbell, se buscó resumir en cada punto y en los que fue posible, agregar otro autor.

Capítulo 2

Marco Teórico Referencial

2.1 Resolución de Problemas

2.1.1 ¿Qué es un problema?

2.1.1.1 Varias definiciones

El currículum escolar chileno se centra en el desarrollo de cuatro habilidades, representar, modelar, argumentar y comunicar y resolver problemas, las cuales "se interrelacionan y juegan un papel fundamental en la adquisición de nuevas destrezas y conceptos y en la aplicación de conocimientos en contextos diversos" (Decreto 614, 2013).

De estas cuatro habilidades, nos centraremos principalmente en la habilidad de resolución de problemas.

El Decreto 614 (2013) no nos entrega una definición de la habilidad de resolución de problemas formal, pero si nos entrega una idea del objetivo de esta en relación a la asignatura de Matemática, donde “[esta] se focaliza en la resolución de problemas. Resolver un problema implica no solo poner en juego un amplio conjunto de habilidades, sino también la creatividad para buscar y probar diversas soluciones”.

Volviéndo al Currículum, nuevamente no es posible encontrar una definición propia, sumado a lo dicho por el Decreto 614, el Currículum (Ministerio de Educación, 2015) agrega:

> Aprender a resolver problemas es tanto un medio como un fin en la adquisición de una buena educación matemática. Se habla de resolver problemas (en lugar de ejercicios) cuando la o el estudiante logra solucionar una situación problemática dada, contextualizada o no, sin que se le haya indicado un procedimiento a seguir. Para ello, necesita usar estrategias, comprobar y comunicar: los alumnos y las alumnas experimentan, escogen o inventan y aplican diferentes estrategias (ensayo y error, usar metáforas o algún tipo de representación, modelar, simulación, transferencia desde problemas similares ya resueltos, por descomposición, etc.), comparan diferentes vías de solución y evalúan las respuestas obtenidas y su pertinencia.

Incluso hace la distinción para mejorar su enseñanza entre *problemas rutinarios* como

> Problemas familiares para los estudiantes, que están diseñados normalmente como ejercicios para practicar determinados conceptos y procedimientos. Su resolución implica seleccionar y aplicar conceptos y procedimientos aprendidos.

y *problemas no rutinarios* como

> Problemas poco o nada familiares para los estudiantes. Aun cuando su

> resolución requiere aplicar conceptos y procedimientos aprendidos, estos problemas hacen demandas cognitivas superiores a las que se necesitan para resolver problemas de rutina. Esto puede obedecer a la novedad y la complejidad de la situación, a que pueden tener más de una solución o a que cualquier solución puede involucrar varios pasos y que, además, pueden involucrar diferentes áreas de la matemática.

Dicho esto, es necesario señalar dos puntos: en primer lugar, es necesaria una definición para el desarrollo del siguiente trabajo de titulación que el texto clave para su uso no posee; en segundo lugar, aunque el Currículo no la tenga, este si entrega los lineamientos que nos puede ayudar a definir lo que es problema y la resolución de estos.

Ahora, corroborando a lo expuesto anteriormente, la definición de un problema y su comprensión como una situación que requiere una solución no se limita a una autoridad o individuo específico. Esto se debe a que el concepto de problema y su significado es ampliamente reconocido y aceptado en varios campos y disciplinas como filosofía, psicología, matemática, ingeniería, informática, entre otros. Siendo académicos, investigadores y profesionales de estas disciplinas los que han contribuido a la comprensión y el estudio de los problemas a lo largo de la historia.

Por un lado, de diversos diccionarios es posible encontrar que un problema está definido como:

- cuestión que se trata de aclarar (Diccionario de la Real Academia Española (RAE)).
- conjunto de hechos o circunstancias que dificultan la consecución de algún fin (Diccionario de la RAE).

- tarea difícil [sin resolver], pregunta difícil de responder, pregunta complicada (Diccionario Duden)
- una situación, persona o cosa que necesita atención y necesita ser tratada o resuelta (Diccionario Cambridge)
- una pregunta en matemáticas que necesita una respuesta (Diccionario Cambridge)
- cuestión que debe resolverse mediante métodos racionales o científicos (Diccionario Trésor de la Langue Française (TLF))
- MATH[1] pregunta que se puede resolver a partir de los elementos dados en el enunciado (Diccionario TLF)

Lo cual se asocia en cierta medida con lo expuesto por el Ministerio de Educación anteriormente. Por otro lado, en relación a autores que han escrito sobre la definición de problema y la resolución de problemas, Kipman (2018) en su libro Problemlösen[2], realiza un extensivo análisis histórico de este tema. La siguiente lista son citas de su trabajo obtenidos del segundo capítulo de su libro, de entre estas es importante destacar,

- "las primeras definiciones científicas del término problema se pueden encontrar en trabajos de la década de 1930".
- Un problema surge cuando un ser vivo tiene una meta y no sabe cómo lograr esa meta. Dondequiera que el estado dado no pueda transformarse en el estado deseado por la mera acción (realizando operaciones obvias), el pensamiento entra en acción (Duncker, 1974)[3].

[1]Mathématiques.
[2]Resolución de problemas
[3]Notar que el libro es del año 1935, pero el libro usado es una reimpresión del años 1974 sin

- Klix (1971, p. 640) habla de un problema cuando hay un estado inicial, un estado objetivo y la "transferencia del estado inicial al estado objetivo que no se logra inmediatamente".

- Newell y Simon (1972) hablan de una barrera entre un estado inicial insatisfactorio y un estado objetivo deseado. Afirman que en tales situaciones es necesario un nuevo tipo de transferencia de conocimiento, definiendo de esta manera el problema.

- Schoenfeld (1989) describe un problema simplemente como algo difícil de resolver para un individuo. Continúa diciendo que cuando la persona que trata de resolver ya tiene un esquema de solución disponible, deja de ser un problema. En este caso, es un ejercicio (Aufgabe[4]) y ya no un problema (Problem). Al hacerlo, sigue a Dörner (1976), quien explicó por primera vez la distinción.

- Fuchs (2006) habla de la relación estado actual–objetivo (Ist-Soll-Relation[5]) y dice que un problema se caracteriza por tres componentes: un estado inicial indeseable, una barrera específica de la persona y un estado objetivo deseado. Además, se refiere a la diferencia entre un problema y una tarea: Según Fuchs, uno debe prestar especial atención a las estructuras cognitivas de este individuo para poder determinar si se puede hablar de un problema.

Notamos que estas definiciones son bastantes similares entre sí y con la de los diccionarios mencionadas anteriores. De estas, destacamos que, pese a que la definición de Newell y Simon es general y es posible usarse interdisciplinarmente, usaremos la de Schoenfeld y la de Fuchs debido a su practicidad, nos ofrecen una distinción

alterar del mismo.

[4] Otra traducción que es correcta en la mayoría de los casos es tarea, pero en este contexto la palabra ejercicio es también aceptable, y más familiar en Chile.

[5] Relación es–debe.

Ejercicio (Routineaufgabe)	Problema (Problemaufgabe)
Esto puede entenderse como una tarea ya conocida de cierto tipo.	Una “barrera” entre la pregunta y el estado de destino impide la “decodificación” de la tarea.
Es posible llamar a un procedimiento de solución disponible, el camino de la solución parece claro.	Es necesario encontrar una solución. [Por lo que] se requieren ideas especiales y combinaciones novedosas de los conocimientos existentes.
Es posible un procesamiento similar a una receta de un procedimiento conocido. La tarea también se puede resolver con éxito sin una comprensión más profunda.	Para construir una solución, es fundamental pensar en el contenido. Sin comprender el contenido, no es posible el éxito.
La tarea parece completa, lo que significa que, por lo general, no desencadena ningún proceso de pensamiento adicional.	La tarea generalmente parece abierta, por lo general provoca mayor reflexión y variación.

Tabla 2.1: Comparación entre ejercicio y problema según BIFIE (Hrsg.) (2013).

entre problema y ejercicio, y por incluir el desarrollo cognitivo aquel que aborda el problema.

En relación a la distinción entre problema y ejercicio, que Kipman entra en más detalle en su texto, queda resumida en la Tabla 2.1 de Bildungsstandards für höchste Qualität an Österreichs Schulen[6] (BIFIE (Hrsg.), 2013).

2.1.1.2 Definición de resolución de problemas

Dentro del marco de la tesis de investigación, la definición de resolución de problemas emerge como un tema recurrente en distintas perspectivas académicas. En este estudio, nos enfocaremos detalladamente en las siguientes definiciones para una comprensión más completa del fenómeno.

[6]Estándares educativos para la más alta calidad en las escuelas de Austria.

- Según BIFIE (Hrsg.) (2013), “se deben establecer conexiones entre los conocimientos existentes y se requieren ideas específicas. Para encontrar estos caminos de solución, se necesita pensamiento sustantivo; de lo contrario, no se puede lograr el éxito”.

- Según Bruder y Collet (2011), “el conocimiento y la aplicación de métodos y técnicas para resolver tareas individualmente difíciles y agrupan tales métodos y técnicas bajo el término “heurística[7]”. Dividen los heurismos[8] (importantes para la enseñanza de matemáticas) en instrumentos heurísticos, estrategias heurísticas y principios heurísticos, que constituyen el núcleo de su enfoque de enseñanza para la resolución de problemas matemáticos”.

- Según el Ministerio de Educación (2015), “se habla de resolver problemas (en lugar de ejercicios) cuando la o el estudiante logra solucionar una situación problemática dada, contextualizada o no, sin que se le haya indicado un procedimiento a seguir.”

2.1.1.3 Competencia de resolución de problemas

En base al análisis bibliográfico realizado por Kipman (2018),

> En resumen, se puede decir que la competencia para resolver problemas implica que los solucionadores de problemas buscan una ruta de solución y se comprometen con el proceso de resolución. Deben activar y organizar lo que ya han aprendido. En este contexto, se hace evidente que, en la construcción sistemática de la competencia para resolver problemas, el aprendizaje y la aplicación de reglas heurísticas y el ‘aprendizaje autóno-

[7] Heuristik.
[8] Heurismen.

> mo' están en primer plano. La competencia para resolver problemas es necesaria para niños, adolescentes y adultos siempre que las soluciones no sean evidentes o estén cerca y, por lo tanto, se requiera un enfoque estratégico para encontrar soluciones. La competencia para resolver problemas se manifiesta en la capacidad de contar con estrategias adecuadas para encontrar enfoques y caminos de solución matemáticos, y reflexionar sobre estas estrategias.

Dicho, esto OECD (2014) en relación a la prueba PISA señala que

> El marco PISA para evaluar la competencia en resolución de problemas guió el desarrollo de la evaluación y establece los parámetros para informar los resultados. El marco identifica tres aspectos distintos: la naturaleza de la situación problemática, los procesos de resolución de problemas involucrados en cada tarea y el contexto del problema.

lo cual es resumido en la Figura 2.1:

2.1.1.4 Tipos de problemas

Finalmente, destacamos las siguientes clasificaciones recopiladas (textualmente) por Kipman (2018),

- McCarthy (1956)[9] distingue entre "problemas bien definidos" (ejemplo: ¡Quita todas las tazas de la mesa!) y "problemas mal definidos" (ejemplo: ¡Ordena la cocina!).

[9] En la búsqueda del artículo citado con fecha de 1972 por Kipman (2018), se identificó un (posible) error por parte del autor, ya que no se pudo hallar ninguna referencia correspondiente a dicho año. No obstante, durante la investigación, se logró localizar el artículo original, el cual fue publicado en 1956. Por lo tanto, se considera relevante y necesario corregir la información citada, remitiéndonos ahora al año de publicación correcto, 1956.

Main features of the PISA problem-solving framework

NATURE OF THE PROBLEM SITUATION Is all the information needed to solve the problem disclosed at the outset?	▪ ***Interactive:*** not all information is disclosed; some information has to be uncovered by exploring the problem situation.	
	▪ ***Static:*** all relevant information for solving the problem is disclosed at the outset.	
PROBLEM-SOLVING PROCESS What are the main cognitive processes involved in the particular task?	▪ ***Exploring and understanding*** the information provided with the problem.	
	▪ ***Representing and formulating:*** constructing graphical, tabular, symbolic or verbal representations of the problem situation and formulating hypotheses about the relevant factors and relationships between them.	
	▪ ***Planning and executing:*** devising a plan by setting goals and sub-goals, and executing the sequential steps identified in the plan.	
	▪ ***Monitoring and reflecting:*** monitoring progress, reacting to feedback, and reflecting on the solution, the information provided with the problem, or the strategy adopted.	
PROBLEM CONTEXT In what everyday scenario is the problem embedded?	▪ ***Setting:*** does the scenario involve a technological device?	– *Technology* (involves a technological device)
		– *Non-technology*
	▪ ***Focus:*** what environment does the problem relate to?	– *Personal* (the student, family or close peers)
		– *Social* (the community or society in general)

Figura 2.1: Características principales del marco de resolución de problemas de PISA

- Dörner (1976) realiza una distinción entre tipos de problemas, ya que ciertas estrategias [heurísticas] son más propensas a llevar al logro del objetivo dependiendo del tipo de problema que sea. Él distingue entre problemas analíticos (el estado actual y el estado objetivo están claramente definidos, y la solución es alcanzable mediante una serie de operaciones conocidas), problemas sintéticos (el estado actual y el estado objetivo están claramente definidos, pero las operaciones no son conocidas) y problemas dialécticos (la definición del problema es abierta: el estado actual o el estado objetivo está mal o incompletamente definido, y las operaciones son conocidas o desconocidas).

- También la OECD (2014) ha formulado una definición de tipos de problemas, sobre la cual se [basan,] en el área de "resolución de problemas". La OECD hace una distinción entre problemas interactivos y estáticos (la información relevante para resolver el problema se encuentra en la tarea, no toda la información está incluida [respectivamente]). [Ver Figura 2.1.]

En el contexto de esta tesis de investigación, se considera apropiado adoptar la clasificación propuesta por Dorner debido a su pertinencia y aplicabilidad a los objetivos específicos de nuestro estudio. Es por ello que a continuación y para comprender mejor dicha clasificación es que se muestran los siguientes ejemplos representativos y obtenidos por Kipman (2018):

- problemas analíticos: "Alfred tiene 24 años. Él tiene el doble de la edad que Bruno tenía cuando Alfredo tenía la misma edad que Bruno tiene ahora. ¿Cuántos años tiene Bruno?".

- problemas sintéticos: "Cuatro investigadores son perseguidos por un caníbal y, para escapar, deben cruzar un puente en la oscuridad en un plazo de 60 minutos. El puente solo puede soportar a dos personas a la vez, y el equipo de investigadores tiene solo una linterna. Un investigador tarda 25 minutos en cruzar, otro 20 minutos, otro 10 minutos y el investigador más rápido tarda 5 minutos en recorrer el camino".

- problemas dialécticos: "En una superficie recta, hay cinco sillas colocadas una detrás de otra. La Señora Cinco se sienta en la silla más alejada, la Señora Cuatro delante de ella, luego la Señora Tres, la Señora Dos y la Señora Uno. Otto dice: "Tengo aquí ocho gorros, cuatro son rojos, dos verdes y dos blancos. A cada dama se le coloca un gorro, y los tres gorros restantes se esconden". Ninguna de las damas ve el color de su propio gorro. ¿En qué condiciones puede cada mujer nombrar correctamente el color de su gorro?".

Los autores de este trabajo de titulación destacan que si bien Decreto 614 (2013) y Ministerio de Educación (2015) señalan los tipos (clasificación) problemas en rutinarios y no rutinarios, estos no están definidos, a diferencia de los textos que cita Kipman (2018).

2.1.2 Métodos de resolución de problemas y heurística

En palabras de Terence Tao, "existen varias estrategias y perspectivas generales para resolver correctamente un problema; [Polya] es una referencia clásica para muchos de estos (Tao, 2006). Ahora, esto se debe a la dificultad que tiene poder resolver problemas, es por ello que se han realizado diversos estudios con relación estos; entre los métodos y estrategias más conocidos nos encontramos con los siguientes.

2.1.2.1 Método de Polya

Este método es uno de los más conocidos, que es mencionado por Polya, 1965 en su libro, donde nos entrega un marco de resolución de problemas, en cuatro pasos, que proporciona un enfoque estructurado para abordar problemas en varios dominios, particularmente en matemáticas. De esta manera, tenemos que

1. **Comprender el problema**: Este paso consta de comprender el problema, en donde se entienda el problema, para así poder desarrollar el problema. Para poder comprender el problema, nos podemos formular preguntas como las siguientes: ¿Cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos?, ¿cuál es la condición?, ¿es la condición suficiente para determinar la incógnita?, ¿es insuficiente? ¿redundante? ¿contradictoria?, entre otras.

2. **Concebir un plan**: Una vez que se ha comprendido el problema, recién podemos pasar al siguiente paso donde exploramos diferentes estrategias y técnicas de resolución de problemas que podrían emplearse. Además, aprovechamos conocimientos previos, problemas similares y conceptos relevantes para generar posibles enfoques. En esta fase nos plantearemos preguntas como: ¿se ha encontrado con un problema semejante? ¿o ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente? ¿conoce un problema relacionado con éste? ¿conoce algún teorema, que le pueda ser útil?, entre otras.

3. **Ejecución del plan**: Implementar el plan o estrategia elegido, tomando acciones paso a paso (según sea necesario) para trabajar hacia una solución. Donde uno se puede formular preguntas como ¿puedo ver claramente que el paso es correcto? o ¿puedo usted demostrarlo?

4. **Visión retrospectiva**: En este último paso es necesario evaluar la solución

obtenida para determinar su precisión y adecuación, comprobar si hay errores o aspectos pasados por alto del problema, y verificar si la solución satisface las condiciones dadas y logra el resultado deseado. En este paso preguntas nos planteamos preguntas como: ¿puedo verificar el resultado?, ¿puede verificar el razonamiento?, ¿puede obtener el resultado en forma diferente?, ¿puedo verlo de golpe?, ¿puedo emplear el resultado o el método en algún otro problema?

Es importante destacar, lo mencionado por Tjoe (2019):

> Pólya dedicó mucho tiempo a ilustrar su modelo de resolución de problemas con ejemplos concretos. Como resultado, el modelo ganó muchos entusiastas de un amplio público. Convenció a sus lectores de que los procesos de resolución de problemas que analizó no solo eran accesibles para los matemáticos de investigación, sino que también podían ser utilizados por audiencias más amplias.

2.1.2.2 Método de Terence Tao

En su libro *Solving Mathematical Problems: A Personal Perspective*, Tao (2006) señala los siguientes pasos a seguir:

1. Entender el problema:

   ¿Qué tipo de problema es? Hay tres tipos principales de problemas:

   - Preguntas del tipo “Demostrar que …” o “Evaluar …”, en las cuales se debe demostrar la veracidad de cierta afirmación o calcular una expresión específica.
   - Preguntas del tipo “Encontrar un …” o “Encontrar todos los dots”, que requieren encontrar algo (o todo) que cumpla con

ciertos requisitos.

- Preguntas del tipo "¿Existe un ...?", que ya sea requieren que demuestres una afirmación o proporciones un contraejemplo (y, por lo tanto, es uno de los dos tipos anteriores de problemas).

  El tipo de problema es importante porque determina el método básico de enfoque.

2. Comprender los datos:

   ¿Qué se proporciona en el problema? Por lo general, una pregunta habla sobre varios objetos que cumplen con algunos requisitos especiales. Para entender los datos, es necesario ver cómo reaccionan los objetos y los requisitos entre sí. Esto es importante para centrar la atención en las técnicas y la notación adecuadas para abordar el problema.

3. Comprender el objetivo:

   ¿Qué queremos? Puede ser necesario encontrar un objeto, demostrar una afirmación, determinar la existencia de un objeto con propiedades especiales, o cualquier cosa. Al igual que el lado opuesto de esta estrategia, "comprender los datos", conocer el objetivo ayuda a centrar la atención en las mejores herramientas a utilizar. Conocer el objetivo también ayuda a crear metas tácticas que sabemos nos acercarán a resolver la pregunta.

4. Seleccione una buena notación: "Ahora que tenemos nuestros datos y objetivo, debemos representarlos de manera eficiente, de modo que tanto los datos como

el objetivo se representen de la manera más simple posible".

5. Escriba lo que sabe en la notación seleccionada; dibujar un diagrama:

    Poner todo por escrito ayuda de tres maneras:

    - tienes una referencia fácil más tarde;
    - el papel es algo bueno en lo que mirar cuando te quedas atascado;
    - el acto físico de escribir lo que sabes puede desencadenar nuevas inspiraciones y conexiones.

6. Modifica ligeramente el problema:

    Esto es útil cuando ni siquiera puedes empezar con un problema, porque resolver un problema relacionado más simple a veces revela el camino a seguir en el problema principal. De manera similar, considerar casos extremos y resolver el problema con suposiciones adicionales también puede arrojar luz sobre la solución general. Pero ten en cuenta que los casos especiales, por su naturaleza, son especiales, y alguna técnica elegante podría aplicarse a ellos y, sin embargo, no tener absolutamente ninguna utilidad para resolver el caso general. Esto tiende a suceder cuando el caso especial es demasiado particular. Comienza con suposiciones modestas primero, porque así te estás adhiriendo lo más posible al espíritu del problema.

7. Modificar significativamente el problema:

    En este tipo de estrategia más agresiva, realizamos modificaciones importantes en un problema, como eliminar datos, intercambiar los datos con el objetivo o negar el objetivo (por ejemplo, intentar refutar una afirmación en lugar de demostrarla). Básicamente, intentamos llevar el problema al límite y luego tratamos de identificar dónde se produjo la ruptura; esto identifica cuáles son los componentes clave de los datos, así como dónde estará la principal dificultad. Estos ejercicios también pueden ayudar a obtener una sensación instintiva de qué estrategias es probable que funcionen y cuáles es probable que fallen.

8. Probar resultados sobre nuestra pregunta.

   Los datos están ahí para ser utilizados, así que se debe recoger los datos y jugar con ellos. ¿Pueden producir datos más significativos? Además, demostrar resultados pequeños podría ser beneficioso más adelante, al intentar demostrar el resultado principal o encontrar la respuesta. No importa cuán pequeño sea el resultado, no lo olvides, podría tener relevancia más adelante. Además, te da algo que hacer si te quedas atascado.

9. Simplifique, explote los datos y alcance objetivos tácticos: "Ahora que hemos establecido la notación y tenemos algunas ecuaciones, debemos examinar seriamente la posibilidad de alcanzar nuestros objetivos tácticos que hemos establecido".

Es importante notar que, aunque son poco más que el doble de los famosos cuatros pasos de Pólya, este último crea subdivisiones para estos, por lo que son más similares de lo que aparentan.

2.1.2.3 Heurismos

Ambos métodos mencionados anteriormente hablan de “estrategias” que deben usarse para aplicarse adecuadamente, por lo que naturalmente surge la pregunta ¿cuáles son? Antes de responder a esto hacemos notar un conflicto, (Polya, 1965) menciona en el capítulo “Breve diccionario de Heurística” donde da a entender como trabajarlos mediante un ejemplo acompañado de breves comentarios, alguno de ellos,

1. Adivina y comprueba
2. Buscar un patrón
3. Hacer una lista ordenada
4. Hacer un dibujo
5. Eliminar posibilidades
6. Resolver un problema más simple
7. Usar simetría
8. Usa un modelo
9. Considere casos especiales
10. Trabajar al revés
11. Usar el razonamiento directo
12. Usar una fórmula
13. Resolver una ecuación
14. Ser ingenioso

El problema de su presentación es la falta de precisión en sus definiciones y usos, por otro lado, Tao solamente trabaja problemas usando su método. Ahora, ambos textos resuelven ingeniosamente problemas, es por lo que salvo por sus métodos y ser una fuente de inspiración a la hora de resolver problemas, no es posible aplicarlos directamente con estudiantes en el aula.

Varios autores notaron este problema y ofrecieron diversas soluciones para un determinado público. Entre estos destacamos los trabajos de Posamentier y Krulik (2008), en su libro *Problem-Solving Strategies for Efficient and Elegant Solutions* enfocado a heurismos para estudiantes de 6to a 12do grado en el sistema de EEUU[10] que pudiese usar el profesor.

Las “estrategias” (heurismos) usados en el libro son,

1. Trabajar al revés
2. Encontrar un patrón
3. Adoptando un punto de vista diferente
4. Resolver un problema análogo más simple
5. Considerando casos extremos
6. Hacer un dibujo (representación visual)
7. Adivinación inteligente y prueba (incluyendo) aproximación
8. Teniendo en cuenta todas las posibilidades
9. Organizar datos
10. Razonamiento lógico

[10] Equivalente a 6to básico y 4to medio en el sistema educativo chileno.

que, en palabras de los autores, “se utilizan ampliamente en la resolución de problemas tanto en matemáticas como en situaciones de la vida real”. Para lograr enseñarlas adecuadamente, a lo largo del libro muestran como “ocurre cada una de estas estrategias y cómo deben usarse conscientemente en la vida real”, presentado primero el uso en la vida cotidiana, luego el símil en matemáticas, y finalmente los aplican a problemas matemáticos. Es importante notar que los autores, en su prefacio, señalan que aunque el libro esté enfocado en profesores los estudiantes también pueden usarlo[11].

Otro autor, bajo esta misma línea es Engel (1998) en su libro *Problem-Solving strategies*, enfocado en futuros participantes de la Olimpíada Internacional de Matemática (OIM), organizado en los siguientes capítulos, que llevan el nombre de los heurimos en los que se enfocan el capítulo o una temática en general para trabajar varios dentro del mismo,

1. Principio de invarianza
2. Demostraciones de color
3. Principio de palomar
4. Combinatoria enumerativa
5. Teoría de números
6. Desigualdades
7. Principio de inducción
8. Polinomios

[11] Los autores advierten que la dificultad de esto es el tono que se le da al discurso dentro del texto.

9. Ecuaciones funcionales
10. Geometría
11. Juegos (como el de Nim)
12. Más estrategias, relacionadas a Teoría de Grafos, descenso infinito, trabajar al revés, conjugar números, iteraciones y funciones que involucran números enteros.

Ahora, y diferencia de los autores anteriores, Bruder y Collet (2011) se ocupan detalladamente del tema del aprendizaje de la resolución de problemas en el contexto educativo, siendo "objetivo no es solo cumplir con las demandas de los estándares educativos establecidos por la KMK (La Conferencia Permanente de los Ministros de Educación y Asuntos Culturales de los Estados en la República Federal de Alemania[12].), sino también mostrar a los estudiantes cómo pueden comprender, abordar y finalmente resolver con éxito contenidos complejos, esbozando así el 'principio activo' de la educación heurística" (Stiller et al., 2021).

Kipman (2018) resume dichos heurismos:

Herramientas heurísticas "Las herramientas heurísticas ayudan a preparar una tarea de tal manera que pueda resolverse más fácilmente. Ayudan a comprender, estructurar y eventualmente también visualizar el problema. Se pueden utilizar para todas las tareas independientemente de la situación específica, pero depende mucho de la tarea específica qué herramientas son más apropiadas" (BIFIE (Hrsg.), 2013). De esta manera, se tienen

[12] Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland.

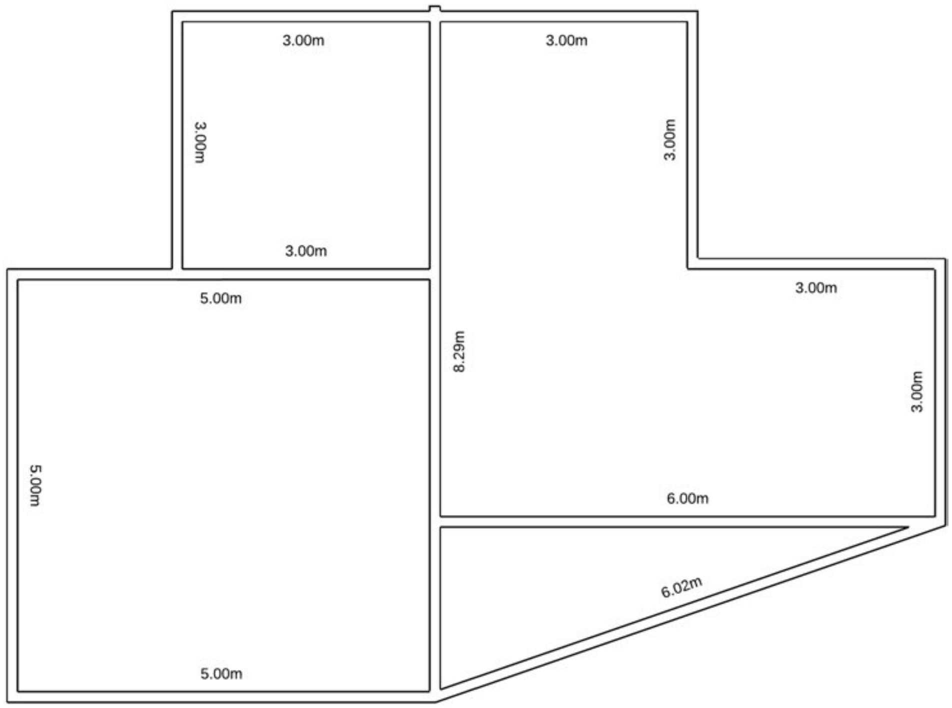


Figura 2.2: Primer ejemplo de figura informativa (Kipman, 2018).

- *Figuras informativas*[13], también conocido como boceto[14], buscan "presentar tanta información y las relaciones asociadas en una figura como sea posible. Los solucionadores de problemas intuitivos a menudo no pueden poner su solución en palabras. Para ellos, la figura informativa es una buena manera de explicar y documentar su solución posteriormente". Ver Figuras 2.2 y 2.3.

- *Tablas*[15], las cuales pueden utilizarse para estructurar, reducir y enfocar la información que en el proceso de resolución de problemas. También pueden ayudar sobre todo a encontrar un plan de solución y luego a documentarlo. Además, una tabla es particularmente adecuada como soporte para pruebas sistemáticas. Al igual que con la figura informativa, se puede utilizar para

[13]Informative Figuren.
[14]Skizze.
[15]Tabellen.

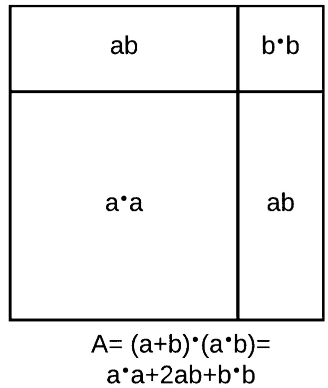


Figura 2.3: Segundo ejemplo de figura informativa (Kipman, 2018).

	Bergstraße	Sonnenweg
Autos	IIII	II
LKW	I	III
Fahrräder	IIII	IIII
Mopeds	II	I
Fußgänger	IIIII	IIIIII
Traktoren	II	I
Busse	I	I
Andere	II	III

Figura 2.4: Ejemplo de tabla (Kipman, 2018).

registrar las cantidades dadas y buscadas de una tarea, reconocer relaciones dadas y descubrir y comprobar relaciones entre números y cantidades. Ver Figura 2.4

- *Almacén de conocimientos*[16][17], son las referencias que uno puede utilizar para resolver (rápidamente un problema), como cuadernos, libros de fórmulas, heurismos con preguntas específicas, entre otros. Es importante notar que "los almacenes de conocimiento no solo aparecen en una tabla, sino que también se pueden mostrar en forma de mapa mental". Ver Figura 2.5.

[16] Wissensspeicher, donde Speicher puede ser almacén, bodega o depósito, pero Wissensspeicher también es traducido como repositorio de conocimientos o campo de conocimientos.

[17] Kipman en su libro no entrega una definición del mismo, sino una descripción de algunas de sus características y usos.

Art	Reihenfolge egal?	Stichprobe und Grundgesamtheit	Beispiele
Variation	nein	n ≠ k	Autos parken
Kombination	ja	n ≠ k	Eis kaufen
Permutation	x	n = k	Tiere in der Reihe

Figura 2.5: Ejemplo de almacén de conocimientos (Kipman, 2018).

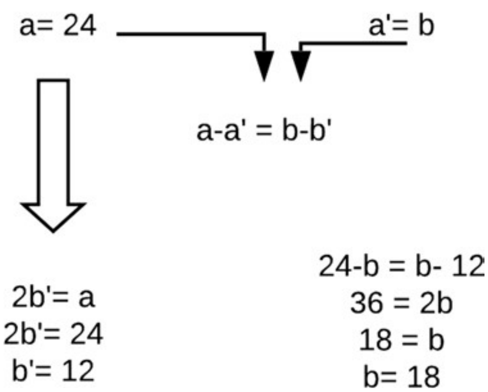


Figura 2.6: Ejemplo de gráficos de solución (Kipman, 2018).

- *Gráficos de solución*[18] se utilizan principalmente cuando las tareas requieren varios pasos de solución. Esta herramienta proporciona una muy buena visión general. Por lo tanto, un gráfico de solución es útil si la solución de una tarea tiene varios pasos, de esta manera, con su ayuda es posible comparar las estructuras de un camino de solución y derivar nuevos heurismos a partir de ellos. Ver Figura 2.6.

- *Ecuaciones*[19], son las herramientas heurísticas más exigentes pues requieren un nivel muy alto de poder de abstracción. La ecuación ayuda a reducir y resumir la información en un texto a lo esencial. Una ecuación se utiliza para relaciones muy complejas y cuando se deben tener en cuenta muchas condiciones. La

[18]Lösungsgraphen.
[19]Gleichungen.

$$\frac{x}{2} \leq x + 17$$

Figura 2.7: Ejemplo de ecuación (Kipman, 2018).

aplicación de esta herramienta heurística requiere mucha más experiencia y conocimiento estratégico que las otras. Sin embargo, con una ecuación puedes hacer que la solución a un problema sea muy corta. Ver Figura 2.7.

Principios heurísticas Describen tales procedimientos que corresponden a las cualidades de movilidad del pensamiento, cambiando aspectos y prestando atención a los aspectos. Están mucho más ligados al contenido técnico que a las estrategias, pero también revelan una variedad de referencias a la resolución de problemas en la vida cotidiana.

- *El principio de analogía*[20], se utiliza cuando se buscan similitudes entre la actual situación de resolución-de-problemas a resolver y una situación anterior de resolución-de-problemas que ya se ha resuelto. Así, al pensar por analogía, los estudiantes buscan similitudes entre dos problemas y las utilizan para encontrar una solución a la nueva tarea.

- *El principio de retorno*[21], es aquel donde las tareas más complejas se pueden rastrear hasta tareas estructuradas más simples. El principio de retroalimentación está íntimamente ligado al principio de analogía. Para resolver la situación problema, aquí se utilizan tareas análogas, pero a un nivel más bajo de exigencia y abstracción. Con los principios de retorno y analogía se trabaja con la estrategia de retorno de lo desconocido a lo conocido y con conclusiones de analogía. De esta manera, el principio de retorno es básicamente una continua-

[20] Das Analogieprinzip.
[21] Das Rückführungsprinzip.

ción del principio de analogía, donde los problemas complejos se simplifican y estructuran; y las tareas análogas se llevan a un nivel inferior para comprender mejor la tarea problema.

- *El principio de transformación*[22], en forma de modelado matemático interno, un cambio de aspecto debe sustentarse con este principio. Esto significa que los solucionadores de problemas deben describir lo que se les da y lo que buscan de manera diferente, considerarlo en diferentes contextos, desarmarlo, complementarlo y vincularlo con algo nuevo. Así, el problema se traduce a una teoría o lenguaje matemático abstracto. Ejemplos de esto son imágenes, nombres con letras y flechas simples para ilustrar mejor los pasos de la solución.

- *El principio de invariancia*[23], trata de reconocer, buscar o construir constantes, valores de referencia o similitudes en la información de la tarea. Al aplicar este principio, debe haber al menos una cosa o relación que no cambie. Así, uno busca lo que no cambia (el llamado invariante) o lo que todos los objetos tienen en común. Una vez que encontrado un invariante, uno puede usar las herramientas heurísticas para encontrar la solución. Las áreas típicas de aplicación se pueden encontrar en lecciones de matemáticas al calcular porcentajes, calcular áreas y sólidos usando cuadrados unitarios y en problemas de mezcla.

- *El principio de simetría*[24], trata sobre la búsqueda de simetrías y su restauración o sobre la destrucción o disolución de estas simetrías. De esta manera, se buscan o restauran las simetrías que existen entre elementos de la información.

- *El principio extremal*[25], trata de encontrar una solución con la ayuda de casos

[22] Das Transformationsprinzip.
[23] Das Invarianzprinzip.
[24] Das Symmetrieprinzip.
[25] Das Extremalprinzip.

extremos. Este principio se aplica muy a menudo en la vida cotidiana porque el comportamiento y las decisiones muy a menudo se optimizan.

- *El principio de descomposición*[26], es aquel usado si uno tiene problemas muy complejos, y trata de subdividirlo en subproblemas para poder resolverlo. De tal manera que uno se orienta a elementos conocidos en la información de la tarea y los desglosa.

- *El distinción de casos*[27], es un caso especial del principio de descomposición, puesto que se trata de la descomposición completa. Este principio ocurre en geometría, por ejemplo, en la formación de los conceptos de recta tangente, exterior y secante. También es usado en aritmética y combinatotia con el diagrama de árbol.

- *El principio del palomar*[28], el cual se entiende generalmente como "si se distribuyen $kn + 1$ perlas en n cajones, al menos un cajón contiene más de k perlas".

Estrategias heurísticas "En contraste con un algoritmo, las estrategias heurísticas no garantizan una solución para el problema dado. [Estas] siempre solo dan impulsos importantes para profundizar la reflexión[[29]]" (BIFIE (Hrsg.), 2013). De esta manera, tenemos que algunas ellas, nombradas por Kipman (2018) son

1. *Pruebas sistemáticas*[30], usada a menudo si uno no conoce un procedimiento y no sabe qué más hacer, el ensayo y error es el curso de acción típico. Cuando los

[26] Das Zerlegungsprinzip.
[27] Die Fallunterscheidung.
[28] Das Schubfachprinzip o Principio de cajón, pues Schubfach significa cajón; pero en español existe el nombre para tal principio el cual tiene relación con su origen histórico.
[29] Weiterdenken.
[30] Systematisches Probieren.

niños, adolescentes o adultos leen o escuchan una tarea problemática, la mayoría comienza muy rápidamente a probarla para llegar a las primeras soluciones. Empiezan a conectar números de forma espontánea o a dibujar algo relacionado con la tarea. En muchos casos, la prueba asistemática es seguida por la prueba sistemática, en la que se desarrolla un sistema que contiene todos los "casos posibles" para luego llegar a la solución correcta. A diferencia de las pruebas aleatorias anteriores, las pruebas sistemáticas son una estrategia heurística útil en la que el solucionador de problemas establece y prueba diferentes relaciones y contextos en un orden determinado. Las estructuras del problema se vuelven claras y en muchos casos los niños obtienen indicaciones claras de una solución general.

2. *Trabajo hacia adelante y hacia atrás*[31],

    (a) Cuando trabaja hacia adelante, el solucionador de problemas trata de sacar conclusiones y hacer conexiones a partir de lo dado para lograr lo que se busca. Al trabajar con la información dada, uno quiere pasar de una determinada situación inicial a una determinada meta. En la mayoría de los casos, se logran ciertos objetivos secundarios, con la ayuda de los cuales se llega al objetivo combinándolo nuevamente con los datos originales. Trabajar hacia adelante es una muy buena estrategia en la que los estudiantes pueden expresar y desarrollar su creatividad, ya que tienen que combinar muchas perspectivas diferentes sobre un tema.

    (b) Por otro lado, trabajar hacia atrás es lo opuesto. Esto significa que se trabaja "hacia adelante" desde lo que uno está buscando hasta lo que es dado. Es decir, cuando se trabaja hacia atrás, se conoce el resultado de

[31]Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten.

la tarea y se debe considerar qué vínculos llevaron a este resultado o a la meta. Trabajar hacia atrás requiere más abstracción en general, ya que el uso de espacios en blanco es necesario para encontrar el resultado.

(c) Finalmente, es ventajoso usar una estrategia combinada los solucionadores de problemas generalmente trabajan hacia adelante desde el estado inicial hasta que no hay más camino. Luego trabajan hacia atrás desde el estado final y vinculan las dos estrategias

3. *Devolviendo lo desconocido a lo conocido*[32]. Con esta estrategia, los problemas se reestructuran, amplían o reducen la información para que la tarea del problema en su nueva forma se pueda asignar más fácilmente a las tareas que ya se han procesado. Esta estrategia se utiliza para casi todas las preguntas, ya que uno siempre quiere construir sobre lo que ya ha entendido.

4. *Formación de analogías*[33], su usa cuando uno verifica si ya ha resuelto una tarea similar a un problema. Si este es el caso, se intenta recurrir a un procedimiento conocido para encontrar la solución. Las similitudes pueden relacionarse con diferentes aspectos de una tarea, por ejemplo, la estructura de la solución, procedimientos similares o la forma en que se presenta la tarea. Dado que a menudo ocurren ejemplos análogos en clase cuando se practica un tema, es muy difícil aprender esta estrategia y transferirla a otras áreas temáticas.

5. *Reestructurar un problema*[34], es mirar el problema desde un punto de vista diferente. Se trata de analizar la estructura de la tarea y convertir la situación inicial en una solución con una perspectiva diferente a través de un arreglo más

[32] Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes
[33] Analogiebildung
[34] Umstrukturieren eines Problems.

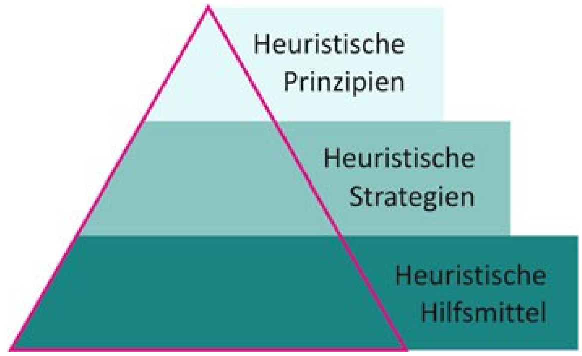


Figura 2.8: Estructura jerárquica de las heurísticas según Bruder y Collet (2011).

adecuado.

En la Figura 2.8, presentada por Bruder y Collet (2011), se observa una estructura jerárquica que organiza los heurismos. Esta representación gráfica ofrece una visión esquemática y ordenada de cómo estos heurismos se relacionan entre sí, proporcionando así una guía visual para comprender la jerarquía subyacente en su clasificación.

2.1.3 En enseñanza básica y media

2.1.3.1 Habilidad

En el currículo nacional chileno notamos que, desde Primer Año Básico, hasta Cuarto Año Medio, incluyendo los electivos matemáticos (Límites, derivadas e integrales; Probabilidades y estadística descriptiva e inferencial; Pensamiento computacional y programación; Geometría 3D) es posible detectar la enseñanza de la resolución de problemas, como una de las cuatro habilidades interrelacionadas para el desarrollo del pensamiento matemático del estudiantado.

En cada uno de estos planes, se logra evidenciar la importancia del desarrollo de estas habilidades, así,

- De 1ro a 6to básico, “En la educación básica se busca desarrollar el pensamiento matemático. En este desarrollo, están involucradas cuatro habilidades interrelacionadas: resolver problemas, representar, modelar y argumentar y comunicar. Todas ellas tienen un rol importante en la adquisición de nuevas destrezas y conceptos y en la aplicación de conocimientos para resolver los problemas propios de la matemática (rutinarios y no rutinarios) y de otros ámbitos” (Ministerio de Educación, 2018).

- De 7mo básico a 2do medio, “En este ciclo, se desarrollan cuatro habilidades (Resolver problemas, Representar, Modelar y Argumentar y comunicar) que se interrelacionan y juegan un papel fundamental en la adquisición de nuevas destrezas y conceptos y en la aplicación de conocimientos en contextos diversos” (Ministerio de Educación, 2015).

- De 3ro a 4to medio, incluyendo los electivos, señalan que “las Bases Curriculares de las asignaturas de profundización de Matemática presentan Objetivos de Aprendizaje de dos naturalezas: unos de habilidades [Resolver problemas, Argumentar y Comunicar, Modelar y Representar], comunes a todas las asignaturas científicas del nivel, y otros enfocados en el conocimiento y la comprensión. Ambos tipos de objetivo se entrelazan en el proceso de enseñanza-aprendizaje, junto con las actitudes propuestas desde el marco de Habilidades para el siglo XXI” (Ministerio de Educación, 2021a, 2021b, 2021c, 2021d, 2021e, 2021f).

Dicho esto, es evidente que la Resolución de Problemas está presente en cada una de las bases curriculares de la asignatura. Esto último se puede encontrar en las habilidades que se espera que el estudiante sea capaz al finalizar el nivel, de esta manera, de 1ro a 6to Básico, (Ministerio de Educación, 2018):

- 1ro Básico:
  1. Emplear diversas estrategias para resolver problemas.
  2. Comprobar enunciados, usando material concreto y gráfico.
  3. Expresar un problema con sus propias palabras.
- 2do Básico:
  1. Emplear diversas estrategias para resolver problemas:
     - por medio de ensayo y error
     - aplicando conocimientos adquiridos
  2. Comprobar enunciados, usando material concreto y gráfico.
- 3ro a 4to Básico:
  1. Resolver problemas dados o creados.
  2. Emplear diversas estrategias para resolver problemas y alcanzar respuestas adecuadas, como la estrategia de los 4 pasos: entender, planificar, hacer y comprobar.
  3. Transferir los procedimientos utilizados en situaciones ya resueltas a problemas similares.
- 5to a 6to Básico:
  1. Reconocer e identificar los datos esenciales de un problema matemático.
  2. Resolver problemas, aplicando una variedad de estrategias, como:
     - la estrategia de los 4 pasos: entender, planificar, hacer y comprobar.

  - Comprender y evaluar estrategias de resolución de problemas de otros.

De 7mo Básico a 2do Medio (Ministerio de Educación, 2015),

- 7mo a 8vo Básico:
  1. Resolver problemas utilizando estrategias tales como:
     - Destacar la información dada.
     - Usar un proceso de ensayo y error sistemático.
     - Aplicar procesos reversibles.
     - Descartar información irrelevante.
     - Usar problemas similares.
  2. Evaluar procedimientos y comprobar resultados propios y de otros de un problema matemático.
  3. Utilizar sus propias palabras, gráficos y símbolos matemáticos para presentar sus ideas o soluciones.
- 1ro a 2do Medio:
  1. Resolver problemas utilizando estrategias como las siguientes:
     - Simplificar el problema y estimar el resultado.
     - Descomponer el problema en subproblemas más sencillos.
     - Buscar patrones.
     - Usar herramientas computacionales.
  2. Comprobar enunciados, usando material concreto y gráfico.

Finalmente, tanto en 3ro y 4to Medio (Ministerio de Educación, 2021c, 2021d), como en los electivos (Ministerio de Educación, 2021a, 2021b, 2021e, 2021f, se espera que los estudiantes sean capaces de

1. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.
2. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

2.1.3.2 Objetivos de Aprendizaje

En Ley Orgánica Constitucional de Enseñanza (LOCE) se "establece una nueva fórmula de prescripción curricular, reemplazando las categorías anteriores de Objetivos Fundamentales (OF) y Contenidos Mínimos Obligatorios (CMO), por un concepto acorde con la necesidad de vincular más estrechamente la formulación del aprendizaje con su seguimiento y evaluación. Esta fórmula, llamada en la ley "Objetivos de Aprendizaje", define los propósitos y los logros del proceso y establece cuáles serán los desempeños del alumno que permitirán verificar el logro del aprendizaje" (Ministerio de Educación, 2015, 2018). Donde, estos Objetivos de Aprendizaje (OA) "deben ser relevantes, actuales y coherentes con los Objetivos Generales". De esta manera, aunque la habilidad esté presente a lo largo del Currículo Nacional, no es raro encontrar OA que no estén asociados a la resolución de problemas en un determinado eje.

A modo de resumen, pues no es el enfoque de nuestra investigación, durante la Enseñanza Básica (Ministerio de Educación, 2018) la resolución de problemas se encuentra presente explícitamente en tres áreas:

- El área de Números y Operaciones se desarrolla gradualmente desde la comprensión de la adición y sustracción hasta operaciones más avanzadas como la multiplicación y la división, abordando también fracciones y decimales. La resolución de problemas cotidianos es fundamental en este proceso.

- En cuanto a Medición, se inicia con conceptos básicos como leer la hora y determinar longitudes, avanzando hacia conversiones de unidades y mediciones más precisas.

- En Patrones y Álgebra, se introduce la identificación de patrones, ecuaciones simples y aplicaciones prácticas de conceptos algebraicos en la resolución de problemas.

Durante la Enseñanza Media, específicamente de 7mo Básico a 2do Medio (Ministerio de Educación, 2015),

Cuatro ejes en 7mo Básico,

1. Números,

OA1 Mostrar que comprenden la adición y la sustracción de números enteros:

- Representando los números enteros en la recta numérica.
- Representándolas de manera concreta, pictórica y simbólica.
- Dándole significado a los símbolos + y según el contexto (por ejemplo: un movimiento en una dirección seguido de un movimiento equivalente en la posición opuesta no representa ningún cambio de posición).
- Resolviendo problemas en contextos cotidianos.

OA3 Resolver problemas que involucren la multiplicación y la división de fracciones y de decimales positivos de manera concreta, pictórica y simbólica (de forma manual y/o con software educativo).

OA5 Utilizar potencias de base 10 con exponente natural:

- Usando los términos potencia, base, exponente, elevado.
- Definiendo y usando el exponente 0 en el sistema decimal.
- Expresando números naturales en notación científica (sistema decimal).
- Resolviendo problemas, usando la notación científica.

2. Álgebra y funciones

OA8 Mostrar que comprenden las proporciones directas e inversas:

- Realizando tablas de valores para relaciones proporcionales.
- Graficando los valores de la tabla.
- Explicando las características de la gráfica.
- Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.

OA9 Modelar y resolver problemas diversos de la vida diaria y de otras asignaturas que involucran ecuaciones e inecuaciones lineales de la forma:

- $ax = b$; $x/a = b$ con $a, b, c \in \mathbb{Z}$; $a \neq 0$
- $ax < b$; $ax > b$, $x/a < b$, $x/a > b$ con $a, b, c \in \mathbb{N}$; $a \neq 0$

3. Geometría

OA11 Mostrar que comprenden el círculo:

- Describiendo las relaciones entre el radio, el diámetro y el perímetro del círculo.

- Estimando de manera intuitiva el perímetro y el área de un círculo.
- Aplicando las aproximaciones del perímetro y del área en la resolución de problemas geométricos de otras asignaturas y de la vida diaria.
- Identificándolo como lugar geométrico.

4. Probabilidad y estadística

OA17 Mostrar que comprenden las medidas de tendencia central y el rango:

- Determinando las medidas de tendencia central para realizar inferencias sobre la población.
- Determinando la medida de tendencia central adecuada para responder un problema planteado.
- Utilizándolos para comparar dos poblaciones.
- Determinando el efecto de un dato que es muy diferente a los otros.

Tres ejes en 8vo Básico,

1. Números,

OA1 Mostrar que comprenden la multiplicación y la división de números enteros:

- Representándolas de manera concreta, pictórica y simbólica.
- Aplicando procedimientos usados en la multiplicación y la división de números naturales.
- Aplicando la regla de los signos de la operación.
- Resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios

OA2 Utilizar las operaciones de multiplicación y división con los números racionales en el contexto de la resolución de problemas:

- Representándolos en la recta numérica.
- Involucrando diferentes conjuntos numéricos (fracciones, decimales y números enteros).

OA5 Resolver problemas que involucran variaciones porcentuales en contextos diversos, usando representaciones pictóricas y registrando el proceso de manera simbólica; por ejemplo: el interés anual del ahorro.

2. Álgebra y funciones

OA9 Resolver inecuaciones lineales con coeficientes racionales en el contexto de la resolución de problemas, por medio de representaciones gráficas, simbólicas, de manera manual y/o con software educativo.

OA10 Mostrar que comprenden la función afín:

- Generalizándola como la suma de una constante con una función lineal.
- Trasladando funciones lineales en el plano cartesiano.
- Determinando el cambio constante de un intervalo a otro, de manera gráfica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo.
- Relacionándola con el interés simple.
- Usándola para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.

3. Geometría

OA11 Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de superficies y el volumen de prismas rectos con diferentes bases y cilindros:

- Estimando de manera intuitiva área de superficie y volumen.
- Desplegando la red de prismas rectos para encontrar la fórmula del área de superficie.
- Transfiriendo la fórmula del volumen de un cubo (base por altura) en prismas diversos y cilindros.
- Aplicando las fórmulas a la resolución de problemas geométricos y de la vida diaria.

OA12 Explicar, de manera concreta, pictórica y simbólica, la validez del teorema de Pitágoras y aplicar a la resolución de problemas geométricos y de la vida cotidiana, de manera manual y/o con software educativo.

OA14 Componer rotaciones, traslaciones y reflexiones en el plano cartesiano y en el espacio, de manera manual y/o con software educativo, y aplicar a la simetría de polígonos y poliedros y a la resolución de problemas geométricos relacionados con el arte.

Cuatro ejes en 1mo Medio,

1. Números,

OA2 Mostrar que comprenden las potencias de base racional y exponente entero:

- Transfiriendo propiedades de la multiplicación y división de potencias a los ámbitos numéricos correspondientes.
- Relacionándolas con el crecimiento y decrecimiento de cantidades.

- Resolviendo problemas de la vida diaria y otras asignaturas.

2. Álgebra y funciones

OA4 Resolver sistemas de ecuaciones lineales (2×2) relacionados con problemas de lavida diaria y de otras asignaturas, mediante representaciones gráficas y simbólicas,de manera manual y/o con software educativo.

3. Geometría

OA7 Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de la superficie y el volumendel cono:

- Desplegando la red del cono para la fórmula del área de superficie.
- Experimentando de manera concreta para encontrar la relación entre el volumen del cilindro y el cono.
- Aplicando las fórmulas a la resolución de problemas geométricos y de la vida diaria.

OA8 Mostrar que comprenden el concepto de homotecia:

- Relacionándola con la perspectiva, el funcionamiento de instrumentos ópticos y el ojo humano.
- Midiendo segmentos adecuados para determinar las propiedades de la homotecia.
- Aplicando propiedades de la homotecia en la construcción de objetos, de manera manual y/o con software educativo.
- Resolviendo problemas de la vida cotidiana y de otras asignaturas.

OA9 Desarrollar el teorema de Tales mediante las propiedades de la homotecia, para aplicarlo en la resolución de problemas.

4. Probabilidad y estadística

OA14 Desarrollar las reglas de las probabilidades , la regla aditiva , la regla multiplicativa y la combinación de ambas, de manera concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo, en el contexto de la resolución de problemas.

OA15 Mostrar que comprenden el concepto de azar:

- Experimentando con la tabla de galton y con paseos aleatorios sencillos de manera manual y/o con software educativo.
- Realizando análisis estadísticos, empezando por frecuencias relativas.
- Utilizando probabilidades para describir el comportamiento azaroso.
- Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.

Tres ejes en 2do Medio,

1. Números,

OA1 Realizar cálculos y estimaciones que involucren operaciones con números reales:

- Utilizando la descomposición de raíces y las propiedades de las raíces.
- Combinando raíces con números racionales.
- Resolviendo problemas que involucren estas operaciones en contextos diversos.

OA2 Mostrar que comprenden las relaciones entre potencias, raíces enésimas y logaritmos:

- Comparando representaciones de potencias de exponente racional con raíces enésimas en la recta numérica.
- Convirtiendo raíces enésimas a potencias de exponente racional y viceversa.
- Describiendo la relación entre potencias y logaritmos.
- Resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios que involucren potencias, logaritmos y raíces enésimas.

2. Álgebra y funciones

OA6 Explicar el cambio porcentual constante en intervalos de tiempo:

- Por medio de situaciones de la vida real y de otras asignaturas.
- Identificándolo con el interés compuesto.
- Representándolo de manera concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo.
- Expresándolo en forma recursiva $f(t+1) - f(t) = a \cdot f(t)$.
- Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.

3. Geometría

OA7 Desarrollar las fórmulas del área de la superficie y del volumen de la esfera:

- Conjeturando la fórmula.

- Representando de manera concreta y simbólica, de manera manual y/o con software educativo.
- Resolviendo problemas de la vida diaria y de geometría.

OA8 Mostrar que comprenden las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos:

- Relacionándolas con las propiedades de la semejanza y los ángulos.
- Explicándolas de manera pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo.
- Aplicándolas para determinar ángulos o medidas de lados.
- Resolviendo problemas geométricos y de otras asignaturas.

4. Probabilidad y estadística

OA11 Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.

En 3ro medio (Ministerio de Educación, 2021c),

OA1 Resolver problemas de adición, sustracción, multiplicación y división de números complejos $\mathbb{C}$, en forma pictórica, simbólica y con uso de herramientas tecnológicas.

OA4 Resolver problemas de geometría euclidiana que involucran relaciones métricas entre ángulos, arcos, cuerdas y secantes en la circunferencia, de forma manuscrita y con uso de herramientas tecnológicas.

En 4to medio (Ministerio de Educación, 2021d), OA4 Resolver problemas acerca de rectas y circunferencias en el plano, mediante su representación analítica, de forma manuscrita y con uso de herramientas tecnológicas.

El electivo de Límites, Derivadas e Integrales (Ministerio de Educación, 2021b),

OA4 Resolver problemas que involucren crecimiento o decrecimiento, concavidad, puntos máximos, mínimos o de inflexión de una función, a partir del cálculo de la primera y segunda derivada, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.

El electivo de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial (Ministerio de Educación, 2021f),

1. Resolver problemas que involucren los conceptos de media muestral, desviación estándarvarianza, coeficiente de variación y correlación muestral entre dos variables, tanto de formmanuscrita como haciendo uso de herramientas tecnológicas digitales.

El electivo de Geometría 3D (Ministerio de Educación, 2021a),

1. Resolver problemas que involucren puntos, rectas y planos en el espacio 3D, haciendo uso de vectores e incluyendo representaciones digitales.

2. Resolver problemas que involucren relaciones entre figuras 3D y 2D en las que intervengan vistas, cortes, proyecciones en el plano o la inscripción de figuras 3D en otras figuras tridimensionales.

3. Diseñar propuestas y resolver problemas relacionados con perspectiva, proyección paralela y central, puntos de fuga y elevaciones, tanto en arte como en arquitectura, diseño o construcción, aplicando conceptos y procedimientos de

la geometría 3D.

Finalmente, no hay ninguno en el electivo de Pensamiento Computacional y Programación (Ministerio de Educación, 2021e).

Es importante destacar que el Currículo: (Ministerio de Educación, 2018) define los *problemas rutinarios* como

> Problemas familiares para los estudiantes, que están diseñados normalmente como ejercicios para practicar determinados conceptos y procedimientos. Su resolución implica seleccionar y aplicar conceptos y procedimientos aprendidos.

mientras que los *problemas no rutinarios* como

> Problemas poco o nada familiares para los estudiantes. Aun cuando su resolución requiere aplicar conceptos y procedimientos aprendidos, estos problemas hacen demandas cognitivas superiores a las que se necesitan para resolver problemas de rutina. Esto puede obedecer a la novedad y la complejidad de la situación, a que pueden tener más de una solución o a que cualquier solución puede involucrar varios pasos y que, además, pueden involucrar diferentes áreas de la matemática.

2.1.4 Desarrollo de la habilidad de resolución de problemas en Chile

Como bien se mencionó anteriormente, la resolución de problemas es una habilidad presente en el currículum nacional chileno, además la resolución de problemas es medida y evaluada en diferentes tipos de pruebas nacionales como internacionales, en las qué encontramos las pruebas del SIMCE, TIMSS y PISA.

Ahora enfocándonos en la prueba PISA, y los resultados qué Chile ha tenido durante los últimos años, tenemos qué Agencia de Calidad de la Educación (2019) define la competencia matemática como “la capacidad de un individuo para formular, emplear e interpretar la Matemática en una variedad de contextos”.

También describe la capacidad de los individuos de razonar matemáticamente y utilizar conceptos matemáticos, así como procedimientos, datos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos. Esta competencia ayuda a las personas a reconocer el papel que juega la Matemática en el mundo, plantear juicios bien fundamentados y a tomar decisiones necesarias como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos.

Destacando las siguientes citas textuales de Agencia de Calidad de la Educación (2014):

- La prueba PISA 2012 de resolución de problemas entrega una señal sobre qué se espera de los jóvenes para su inserción exitosa en la sociedad, en particular para enfrentar futuros desafíos laborales que demandan la capacidad de reaccionar adecuadamente cuando se presentan situaciones novedosas. En general, se exige ser capaz de reconocer una situación problemática e identificar la estrategia que permitirá sortearla, supervisando su efectividad en el progreso de la actividad, lo cual requiere un factor personal de perseverancia. Esta prueba fue aplicada en computador tomando como supuesto el manejo básico de esta herramienta. Los resultados de los estudiantes chilenos en la resolución de problemas son similares a las otras áreas evaluadas por PISA, con una alta concentración de estudiantes que no alcanzan el nivel de desempeño que describe competencias básicas. Esto plantea un escenario muy desafiante para las políticas educativas

- En el marco de PISA 2012, se entiende que la competencia de resolución de problemas es una capacidad del individuo para emprender procesos cognitivos con el fin de comprender y resolver situaciones problemáticas en las que la estrategia de solución no resulta obvia de forma inmediata. Incluye la disposición para implicarse en dichas situaciones con el objetivo de alcanzar el propio potencial como ciudadano constructivo y reflexivo.

- Las declaraciones de los estudiantes respecto a prácticas de su profesor de Matemática indicarían la frecuente ocurrencia de situaciones que estimulan procesos cognitivos requeridos para la resolución de problemas de PISA 2012. En particular, los estudiantes señalan que siempre o casi siempre su profesor los ayuda a aprender de sus propios errores y a explicar cómo han resuelto un problema. También destaca positivamente, la frecuencia con que los profesores presentan los problemas en diferentes contextos, con el propósito de que los estudiantes sepan si han comprendido los conceptos. Según los estudiantes, los puntos de relativamente menor ocurrencia son la presentación de problemas para los cuales no hay un método de solución inmediatamente obvio y la invitación del profesor a que los propios estudiantes decidan los procedimientos para resolver problemas complejos.

Ahora, con respecto a Agencia de Calidad de la Educación (2019) nos menciona los siguientes datos:

- Chile obtuvo un promedio de 417 puntos en Matemática, resultado por debajo del promedio de la OCDE (489) y equivalente al resultado de Kazajstán, Moldavia, Bakú (Azerbaiyán), Tailandia, Uruguay y Catar. Este resultado es mayor al de 18 países participantes y menor al de otros 53.

- El puntaje de Chile es significativamente mayor que el promedio de países latinoamericanos participantes (387). Más de la mitad de los estudiantes de 15 años en Chile (51,9 %) no han desarrollado competencias matemáticas mínimas (Nivel 2). Matemática es el área más débil para Chile entre las que evalúa PISA.
- La proporción de estudiantes bajo el Nivel 2 es mucho mayor al promedio de la OCDE.
- Chile obtiene resultados estables respecto de PISA 2015, y no ha mostrado variaciones significativas en el largo plazo.
- Los resultados obtenidos por los estudiantes de Chile en Matemática son significativamente más bajos que el promedio de la OCDE, aunque superiores a los del promedio de Latinoamérica en las últimas mediciones (y por sobre la mayoría de los países participantes de la región, compartiendo el liderazgo con Uruguay).

Ahora analizando los resultados del Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencia (TIMSS) que se encarga de obtener información de calidad sobre los logros y el contexto de aprendizaje de estudiantes de 4to y 8vo básico en las áreas de Matemática y Ciencias. en donde en (Agencia de Calidad de la Educación, 2020) nos menciona que participaron más de 580 000 estudiantes de 64 países de los cinco continentes.

Ademas (Agencia de Calidad de la Educación, 2020) nos menciona que esta prueba se aplicó durante los meses de octubre y noviembre del año 2018, en donde participaron aprox. 250 establecimientos y 8.300 estudiantes del país y su aplicación fue en computador, en donde se obtuvieron los siguientes resultados en matemáticas:

- El rendimiento de los estudiantes de Chile se encuentra bajo el centro de escala de TIMSS en ambos grados, para Matemática y Ciencias.
- Mejora significativa en el rendimiento de estudiantes de 8°básico en Matemática y Ciencias entre TIMSS 2015 y TIMSS 2019.
- Disminución significativa en el rendimiento de estudiantes de 4º básico en Matemática y Ciencias entre TIMSS 2015 y TIMSS 2019
- Alza sostenida en la trayectoria de los últimos 20 años en el rendimiento de los estudiantes de 8° básico, tanto en Matemática como en Ciencias.
- Entre el 18 % y el 30 % de los estudiantes en Chile demuestra no poseer conocimientos básicos en las áreas evaluadas. Si bien es un porcentaje alto respecto de lo observado en los demás países, el porcentaje de estudiantes en Chile es menor que en el ciclo anterior del estudio.
- En promedio, solo el 1 % de los estudiantes en Chile alcanza el nivel avanzado.
- No se observa brecha de género en el rendimiento de Matemática en estudiantes de 8°básico.
- Éxito en aplicación en computador.
- Existe un porcentaje de estudiantes cuyo rendimiento es considerado muy bajo para ser estimado. Un 30 % de los estudiantes en Chile no demuestra poseer conocimientos matemáticos básicos en 4°básico, mientras que la mediana internacional es de 8 %.
- Un 30 % de los estudiantes en Chile no demuestra poseer conocimientos matemáticos básicos en 8°básico, mientras que la mediana internacional es de 13 %.

- En 4° basico al comparar la distribución de estudiantes por niveles de desempeño respecto de TIMSS 2015, se observa un aumento del porcentaje de estudiantes que no alcanza el nivel bajo.
- El rendimiento promedio de los estudiantes de Chile en 2019 presenta una disminución significativa.
- El dominio cognitivo más débil en el rendimiento de los estudiantes de Chile es el Conocimiento, siendo significativamente más bajo que el rendimiento general en Matemática. Al contrario, Aplicación y Razonamiento presentan un rendimiento significativamente más alto que el rendimiento general en Matemática.

Ahora enfocándonos en el sistema de Medición de la Calidad de la Educación (SIMCE) y analizando los resultados educativos del año 2022 tenemos qué (Agencia de Calidad de la Educación, 2023) nos entrega los siguientes resultados:

- En 4° básico se observa una baja significativa de 10 puntos en el promedio nacional.
- En 4° básico la proporción de estudiantes en el nivel Insuficiente aumenta en 8 puntos porcentuales.
- En 2° medio el puntaje promedio entre 2018 y 2022, desciende en 12 puntos.
- En 2° medio el año 2022 aumenta en 8 puntos el porcentaje de estudiantes en el Nivel de Aprendizaje Insuficiente.
- En Matemática se observa la mayor baja de los resultados para ambos niveles (matemática y lenguaje).
- Los resultados de esta evaluación son consistentes con evaluaciones internacionales como el NAEP, donde la mayor baja se observa en Matemática.

Luego tenemos los resultados de estudios dentro de chile, como el qué nos menciona (Díaz V., 2013) qué tuvo como objetivo diseñar una evaluación en el campo del desarrollo valórico considerando la resolución de problemas en matemática, aplicada a 285 estudiantes de segundo año de 23 establecimientos científico-humanista municipales de la Región de Los Ríos y de la Región de Los Lagos de Chile. La metodología usada para su desarrollo fue cualitativa y cuantitativa, e incluyó entrevistas y aplicación de una prueba de situaciones problemas de matemática asociados a valores, en donde los resultados encontrados evidenciaron la falta de integración de la enseñanza de valores en la formación disciplinaria, además del limitado grado de habilidad de los estudiantes en la resolución de problemas.

Es así como podemos decir qué chile en general tiene muy bajos resultados en sus pruebas, ya sea tanto nacionales como internacionales, y aquí se ve reflejado qué algo debe estar pasando en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ya sea tanto en el área en general, como también lo es en su habilidad principal qué es la de resolver problemas.

2.1.5 Resolución de problemas en el aula (ARPA)

“La Resolución de Problemas se ha ido instalando en el currículo nacional de matemática desde la Reforma Curricular de 1998, luego en el Ajuste Curricular de 2009 y con mayor fuerza en las Bases Curriculares actualmente vigentes para enseñanza básica y media. Chile se alinea así a una tendencia internacional que considera la resolución de problemas como un elemento curricular importante, que se manifiesta, por ejemplo, en los Common Core State Standards for Mathematics de Estados Unidos en los currículos de Singapur y Finlandia.”(Felmer P., Perdomo-Díaz J., Quiroz C., Turkieltaub A., & Ruiz B., 2019).

En Chile como se mencionó anteriormente, la resolución de problemas se encuentra presente en el Curriculum como una habilidad principal, en donde esta se puede implementar en las aulas de clases, además de utilizarla como estrategias de aprendizaje, en donde los estudiantes aprendan a diferenciar entre resolver un ejercicio y resolver un problema, siendo esta última de importancia para activar sus pensamientos, conocimientos y procesos de aprendizaje.

Además "Debemos establecer la diferencia entre los conceptos de "ejercicio" y "problema". Hacer un ejercicio consiste en la aplicación, en forma mecánica, de algoritmos y de conocimientos adquiridos; el tiempo es previsible y no hay demasiada carga afectiva en la persona que lo resuelve. Resolver un problema significa enfrentarse a una situación nueva, requiere de una profundización de los conocimientos, acompañados de ingenio, intuición, perseverancia y elaboración de estrategias que permitan llegar a una solución; requiere de un tiempo que a veces es imposible de determinar y durante su solución se pueden experimentar sentimientos de frustración, ansiedad, confianza, alegría, entre otros"(Arreaza, T., & Valencia, I., 2015).

Es así como nos encontramos con una definición un poco errada a lo que comúnmente se conoce como resolver problemas, ya que usualmente al "resolver problemas" nos encontramos con ejercicios que se presentan como se resuelven y luego realizar más ejercicios similares, así, "como ya mencionamos, la resolución de problemas está en el currículo nacional hace tiempo, pero de alguna manera no lo hemos comprendido bien, no se ha incorporado de manera adecuada en la formación inicial de docentes y tampoco se han generado buenas formas de desarrollo profesional docente que permitan a los docentes en ejercicio hacerlo"(Felmer P., Perdomo-Díaz J., Quiroz C., Turkieltaub A., & Ruiz B., 2019).

Dado esto, "la implementación de actividades de resolución de problemas en la sala de clases, con el fin de responder a las exigencias del currículo nacional, pone un enorme desafío a todo el sistema educacional, tanto a los formadores de docentes, a los estudiantes de pedagogía, a los profesores y profesoras en ejercicio”(Universidad de Chile, s.f.)

Así es que surge “la iniciativa Activando la Resolución de Problemas en las Aulas (ARPA) que busca capacitar a profesores en la Resolución de Problemas (RP) mediante talleres de Desarrollo Profesional (DP) efectivos, los cuales provean a los docentes las habilidades matemáticas del currículo, centradas en la RP, que signifiquen un cambio en su percepción de la matemática y de su aprendizaje, y que produzcan un cambio consecuente en su acción en el aula”(Espinoza et al., 2016).

“La Iniciativa ARPA nace en 2014, al alero del Centro de Investigación Avanzada en Educación (CIAE) y el Centro de Modelamiento Matemático (CMM), ambos de la Universidad de Chile. Busca implementar estrategias de desarrollo profesional docente que promuevan la resolución de problemas en las salas de clases” (Universidad de Chile, s.f.)

Ahora bien, si se quiere lograr verdaderos cambios en la resolución de problemas, “Estos cambios hay que iniciarlos desde las primeras experiencias de ARPA, pero no serán dominados de inmediato. Para realizar con éxito un ARPA es importante minimizar la improvisación, realizando una buena planificación que permita prever situaciones que pueden ocurrir y preparar formas de reaccionar ante estas situaciones. La planificación de un ARPA debe conducir a que la actividad esté centrada principalmente en los estudiantes, que se centre en ideas matemáticas y que el docente quede en un segundo plano en todo momento” (Felmer P., Perdomo-Díaz J., Quiroz C., Turkieltaub A., & Ruiz B., 2019).

Propuestas Formativas

Ahora, hablando de los talleres mencionados anteriormente, "que tienen como propósito fortalecer las capacidades de los docentes para que promuevan en sus estudiantes el desarrollo de las habilidades transversales y disciplinares" (Universidad de Chile, s.f.) es así como también Universidad de Chile, s.f. nos menciona que las estrategias formativas de la Iniciativa ARPA se encuentran en constante renovación y adaptación a los contextos y circunstancias donde se realizan, pero sin embargo existe un conjunto básico de propuestas sobre las cuales iniciar la construcción de un programa adecuado para cada institución, en donde se presentan las siguientes propuestas básicas con sus respectivas descripciones:

1. Taller RPAcción: Este taller está concebido como puerta de entrada a los desafíos que propone la Resolución de Problemas y se puede implementar en las disciplinas de Matemática, Lenguaje y Comunicación (Escritura), Ciencias Naturales y Ciencias Sociales o en una versión mixta.

   Se trata de una actividad de desarrollo profesional diseñada para dar a los docentes la oportunidad de tener una experiencia personal en resolución de problemas. un reencuentro con su capacidad para resolver problemas, posibilitando la reflexión colectiva sobre las estrategias, emociones, rol del monitor, la posibilidad de implementar una actividad similar en aula proponiendo una manera distinta de ver la disciplina.

2. Taller de Prácticas Pedagógicas a Distancia: La situación de educación a distancia ha levantado desafíos importantes para los docentes en lo referente a la gestión de actividades para el aula a distancia. Este Taller se ha creado a propósito de la emergencia sanitaria del Covid-19 y ofrece a los y las docentes la

oportunidad de conocer los fundamentos del modelo de Actividad de Resolución de Problemas en el Aula a Distancia (ARPA-D) experimentando sus alcances e implicancias.

En esta propuesta de metodología activa, los docentes participan de una actividad de resolución de problemas a distancia, en una experiencia modelada y luego plantifican un ARPA-D para sus estudiantes. Esta planificación considera sus conocimientos previos, las herramientas tecnológicas disponibles y aspectos pedagógicos y de conectividad relevantes para que sus estudiantes puedan desarrollar sus habilidades de resolución de problemas y de colaboración, a la vez que poner en juego sus ideas, su creatividad y los conocimientos aprendidos, mejorando sus actitudes hacia la Matemática, la Escritura. Las Ciencias Naturales y Sociales.

En un espacio de formación colaborativa, los docentes compartirán hallazgos y experiencias con los otros participantes del taller, creando un espacio de reflexión entre pares sobre la experiencia ARPA-D, las dificultades y las potencialidades de estas actividades en el aprendizaje a distancia.

3. Taller RPContenido (Cursos de verano/invierno): Esta es una estrategia con foco en el docente y en sus habilidades y su conocimiento disciplinario de Matemática, Lenguaje y Comunicación (Escritura), Ciencias Naturales o Ciencias Sociales.

   El taller crea oportunidades para que los y las docentes desarrollen sus habilidades tomando como base la resolución de problemas y profundicen sus conocimientos sobre un contenido específico, considerando elementos del conocimiento pedagógico del contenido. Los contenidos disciplinares que se tratan en cada taller se eligen en función de lo que la literatura y la experiencia revelan como contenidos centrales, considerando aquellos que los docentes declaran como difíciles, y de acuerdo a las necesidades específicas de los docentes interesados

4. Taller RPAula: Es la estrategia central y original de la Iniciativa ARPA, que busca la paulatina y efectiva incorporación de la Resolución de Problemas (RP) en las aulas escolares.

   Su foco es el aula escolar, y el cambio de la forma de enseñar y aprender Matemática, Lenguaje y Comunicación (Escritura), Ciencias Naturales o Ciencias Sociales. En este taller disciplinar los docentes resuelven problemas, planifican actividades de resolución de problemas y las implementan en aula. En el proceso docentes y estudiantes avanzan en esta nueva manera de aprender, más activa e interesante.

   El taller RPAula se provecta con una duración de un año, con la posibilidad de extenderse a un segundo año, en que se profundiza la relación entre RP y el contenido disciplinario del currículo.

5. Programa RPAula 3 años: Este programa disciplinario propone la continuidad del Taller RPAula, destinando una primera etapa de dos años a la formación y práctica para la incorporación de la Resolución de Problemas (RP) a la cultura escolar, y un tercer año para la creación e incorporación sistemática de problemas para su implementación a lo largo del año.

   Para esto, ARPA ofrece una adaptación curricular, proceso en el que se desarrolla una secuencia de problemas para cada uno de los niveles escolares considerados, de acuerdo al currículo escolar vigente y a la planificación anual del establecimiento.

   Durante el tercer año los docentes participantes, acompañados por el equipo

ARPA, realizan su docencia considerando la propuesta de problemas incorporados a la planificación anual, logrando niveles crecientes de autonomía y la efectiva incorporación de la resolución de problemas a las actividades regulares del aula escolar.

En este proceso formativo, y dependiendo del contexto en el que se implementa, se posibilita el desarrollo y acompañamiento a comunidades de aprendizaje local o redes disciplinares.

6. Programa ARPA Escuela: La propuesta ARPA Escuela nace como alternativa de desarrollo profesional integral, enfocada en el desarrollo de habilidades, que involucra a toda escuela. Propone a docentes y directivos, todos participantes activos en el diseño y desarrollo de la propuesta, tener una mirada compartida de la clase, independiente de la asignatura, lo que supone un cambio en las prácticas docentes y la instalación de nuevas estrategias en la cultura escolar.

   Este enfoque transversal da a los estudiantes la oportunidad para desarrollar sus habilidades. La comunicación y el trabajo colaborativo entre pares será una realidad tanto en Matemáticas como en Historia, Geografía y Ciencias Sociales; el razonamiento y la argumentación serán parte cotidiana de Ciencias Naturales y Lenguaje y Comunicación.

7. Programas para Educación Superior: Como iniciativa, estamos convencidos de que, así como trasciende a las distintas disciplinas, el desarrollo de habilidades también es transversal a distintos niveles educativos. Por esta razón hemos trabajado en adaptar nuestras propuestas disciplinares al espacio de la Educación Superior, desarrollando talleres y programas de mediano y largo plazo dirigidos a docentes y a instituciones tales como Centros de Formación Técnica,

Institutos Profesionales y Universidades.

Al igual que nuestro trabajo en Educación Escolar, las aproximaciones en educación superior también contemplan adecuar y diseñar las propuestas, en colaboración con la comunidad académica, buscando satisfacer las necesidades de cada institución. En todos los casos, nuestras propuestas son pertinentes principalmente para docentes que se desempeñan en los primeros años de las carreras que se ofrezcan por estas instituciones.

En el marco de los programas en Educación Superior, durante 2020 hemos desarrollado el Diplomado en Aprendizaje Y Resolución de Problemas en Matemática en Educación Superior, que se instala entre los postítulos que imparte el Instituto de Estudios Avanzados en Educación de la Universidad de Chile.

Propuestas de Vinculación

1. Taller Renata y los Problemas: Este taller está diseñado para el trabajo con estudiantes, docentes, apoderados y la comunidad escolar en general. Está dirigido a niveles del primer ciclo básico y se basa en la conocida serie Renata y los Problemas La implementación de esta propuesta permite distintos formatos y usualmente cuenta con una sección de resolución colaborativa de problemas matemáticos con la participación de los personajes Renata y Piti, seguida de una sección de desafíos matemáticos. Esperamos incluir pronto las otras disciplinas.

   Tiene una duración de entre una y dos horas y tal como todas nuestras acciones, se planifica de forma flexible, considerando los requerimientos y contexto de la comunidad educativa.

2. Taller Los números de Mozart: Este taller está dirigido a estudiantes de segundo ciclo básico y de enseñanza media

   Es una propuesta de trabajo interdisciplinar que pone en escena a la matemática y la música en forma genuina e interesante para los estudiantes. Se desarrolla en dos etapas: la primera consiste en una sección de resolución de problemas matemáticos asociados a la música y la segunda cuenta con la participación de una orquesta escolar.

   Este taller tiene una duración de entre dos y tres horas. Se planifica de forma flexible. considerando los requerimientos y contexto de la comunidad educativa.

Además ARPA ofrece diferentes diplomados, como los que se mencionan a continuación

1. Diploma de Postítulo en Aprendizaje y Resolución de Problemas en Matemática en Educación Superior

2. Diploma de Postítulo en Aprendizaje y Resolución de Problemas en Matemática en Educación Escolar

3. Diploma de Postítulo en Aprendizaje y Resolución de Problemas en Escritura en Educación Escolar

4. Diploma de Postítulo en Aprendizaje y Resolución de Problemas en Ciencias Naturales en Educación Escolar

5. Diploma de Postítulo Aprendizaje y Resolución de Problemas en Ciencias Sociales en Educación Escolar

6. Diploma de Postítulo en Aprendizaje y Resolución de Problemas Multidiscipli-

nario en primer ciclo básico

2.2 Cómo los estudiantes abordan un problema

Según Abrate et al. (2006):

> Es frecuente que encontramos en las aulas un importante número de estudiantes que hacen esfuerzos esporádicos porque se creen negados hacia la disciplina, otros que sencillamente no trabajan porque no quieren trabajar, y aquellos, que, si bien trabajan, perciben a la Matemática como una ciencia fría y austera que le da poco espacio al juicio crítico y a la creatividad. Asimismo, también es habitual hallar alumnos que rechazan todo tipo de trabajo en Matemática argumentando que no les gusta, que no entienden o que no saben para qué sirve lo que están haciendo. Expresiones tales como "esto no es para mí", "es muy difícil", "yo nunca voy a entender estas cosas", y un sinnúmero más de ellas, son conocidas por casi todos los Profesores de Matemática. Tales afirmaciones pueden ser consecuencia de la falta de confianza en el propio desempeño, la cual lleva al alumno a paralizarse y a dejar caer los brazos antes de empezar. [Pero] si estamos interesados en el proceso de aprendizaje de la Matemática, el error puede ser visto como instrumento de identificación de los problemas del currículo o de la metodología de enseñanza, y al analizarlos, podrán ser eliminados y superados.

De igual manera, el modo en que el alumno percibe su habilidad para las matemáticas tiene fuertes efectos, tanto directos como indirectos, sobre las creencias relacionadas con su futura eficacia y con las percepciones acerca del valor de las matemáticas.

Esto quiere decir que la percepción, por parte del alumno, de cuáles son sus propias habilidades para las matemáticas, afecta al valor que le otorga a esta materia, así como a sus expectativas respecto del éxito que en ella pueda obtener. Así, la percepción de la propia habilidad (autoeficacia) puede ser considerado como un predictor de la ansiedad a las matemáticas y de las consecuencias de ésta sobre el futuro rendimiento de los adolescentes en tal materia (Nuria Gil Ignacio, 2005).

Enfocándonos en algunas dificultades que pueden tener los estudiantes al momento de resolver problemas, no encontramos con Orrantia (2006) que en su estudio sobre las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. nos menciona lo siguiente sobre este tema:

- Hablar del desarrollo de la aritmética en particular o del desarrollo del pensamiento matemático en general supone mencionar, aunque sea brevemente, los planteamientos piagetianos sobre esta cuestión.

  Para Piaget el conocimiento matemático se desarrolla como consecuencia de la evolución de estructuras más generales, de tal manera que la construcción del número es correlativa al desarrollo del pensamiento lógico.

- En términos globales, la resolución de un problema comienza con un texto lingüístico y termina con una operación que da lugar a una solución numérica. En este proceso podemos distinguir diferentes componentes, Así, el texto verbal se traslada a una representación interna abstracta en la que se recogen las distintas proposiciones, sus relaciones, así como la situación cualitativa descrita en el enunciado. Sobre la base de esta representación se selecciona una operación aritmética o una estrategia de conteo informal para encontrar el elemento desconocido de la representación, ejecutándose posteriormente la acción u operación seleccionada.

- En definitiva, para resolver un problema hay que desencadenar una serie de estrategias que permitan crear una representación del mismo en este proceso interactúan distintos tipos de conocimientos como lingüísticos, del mundo y matemáticos.

  Una vez hecho esto se puede reactivar la representación inicial del problema, sustituyendo el elemento no conocido por el resultado de la acción ejecutada. A partir de aquí se llevan a cabo una serie de acciones de verificación para comprobar la exactitud de la solución encontrada.

- Los niños tienden a percibir la aritmética formal desconectada de sus conocimientos informales. Esto es, tienen dificultades para conectar los símbolos y reglas que aprenden de manera más o menos memorística con su conocimiento matemático, Muchos niños ven las matemáticas como algo arbitrario, como un juego con símbolos separados de la vida real y como un sistema rígido de reglas dictadas externamente y gobernadas por estándares de velocidad y exactitud. Y esto es más acuciante a medida que avanzan en niveles educativos, lo que hace que la visión de las matemáticas que tienen los alumnos cambie gradualmente desde el entusiasmo a la aprehensión, desde la confianza al miedo.

  No cabe duda de que este puede ser uno de los factores determinantes de las dificultades que presentan muchos alumnos en el aprendizaje de las matemáticas.

- Cuando un alumno se enfrenta a la resolución de un problema, las dificultades pueden surgir por dos factores; bien puede no comprender la situación problemática, o bien puede no contar con el conocimiento conceptual necesario para resolverla, aunque esta falta de conocimiento también puede llevar a un fracaso en la comprensión

2.2.1 Errores y cómo los estudiantes se equivocan

2.2.1.1 Definición y uso en la enseñanza de la matemática

Al igual que con la Resolución de problemas, es posible notar que ni en el Decreto 614 (2013), ni en el Currículum (Ministerio de Educación, 2015), es posible encontrar una definición de lo que se entiende por error, sin mencionar error en la enseñanza de la matemática.

Es por ello, que en primer lugar tenemos que:

- Concepto equivocado o juicio falso (RAE).
- Diferencia entre el valor medido o calculado y el real (RAE).
- Algo equivocado (Falsch), que se desvía de lo correcto; inexactitud (DUDEN)
- Una situación, persona o cosa que necesita atención y necesita ser tratada o resuelta (Cambridge)
- Lo que no se ajusta a lo verdadero, lo real o a un estándar definido (Académie Française).
- Acto de engañarse a uno mismo, de desviarse de la verdad (Académie Française).
- Acción, tras una falla (fait de se tromper), de tomar por verdadero lo que es falso y viceversa (Académie Française).

De esta manera y a primera vista, entendemos el error como el resultado de una acción cuyo valor de verdad es falso y que uno, sin darse cuenta, considera verdadero.

Por otra parte, como bien señala el Reiss y Hammer (2013, p. 111) en su libro

Fundamentos de la Didáctica de la Matemática[35], "la enseñanza debe verse esencialmente como un apoyo al aprendizaje. Pero debido a que el aprendizaje es algo muy individual, la evaluación correcta de los procesos de aprendizaje juega un papel importante, independientemente de si conducen a buenos o (al menos inicialmente) menos buenos resultados". Siguiendo esta misma línea, los procesos de aprendizaje no siempre están libres de problemas, sino que se caracterizan por "dificultades de aprendizaje, errores (Fehler) y equivocaciones (Irrtümer)".

De esta manera, el error o cultura del error, es un proceso clave para la comprensión de los contenidos propios de la asignatura de matemática, sino también aporta significativamente en el éxito escolar. Es por ello que uno de los desafíos del profesor es desarrollar sistemáticamente las ideas de los estudiantes sin cuestionar su confianza y autoconcepto o incluso avergonzarlos.

Así, tenemos que para el entendimiento de los errores y como aplicarlos en el quehacer del docente, es necesario trabajar con una tipología de errores.

2.2.1.2 Tipología de errores

Es común encontrar diversas tipologías de errores en la enseñanza de la matemática, como en otras disciplinas, pues existe una diversidad de definiciones y formas de clasificarlas, siendo autores como Radatz (1979), Astolfi (2003), sus principales exponentes en el área de la matemática.

Abancin Ospina y Castillo Marrero De entre ellos dastacamos el trabajo de Abancin Ospina y Castillo Marrero (2022), que en su investigación bajo un enfoque cualitativo y con propósito descriptivo, usando una muestra de 141 exámenes parciales

[35] Grundlangen der Mathematikdidaktik.

presentados por un grupo de estudiantes de matemáticas I del Ciclo Básico de la Universidad Simón Bolívar, identificaron diez categorías que recogen la diversidad de errores en las producciones escritas de los estudiantes, obteniendo una tipificación en errores de tipo: simbólico, notación, aplicación de fórmulas, operaciones, manipulación, cálculos, redacción y escritura, graficación y problemas prácticos. Así, tenemos que los errores pueden ser

1. Errores tipo símbolos
2. Errores tipo notación
3. Errores tipo Uso de aspectos fundamentales
4. Errores tipo aplicación de fórmulas
5. Errores tipo operaciones
6. Errores tipo manipulación algebraica
7. Errores tipo cálculos
8. Errores tipo graficación
9. Errores tipo problemas prácticos

donde además los autores agregan un nivel más de abstracción en el proceso de análisis de datos, los cuales son Lenguaje matemático, Herramienta matemática y Aplicabilidad de las matemáticas; que engloban las categorías anteriores. Sin embargo, no las definen en su estudio.

Ahora, esta última clasificación no es una sin bases, pues es posible encontrarla en diversos trabajos, por ejemplo; Brown et al. (2016) señala hay tres tipos de errores,

1. Errores fáctios, son errores debido a la falta de información fáctica (p. ej.:

vocabulario, identificación de dígitos, identificación de valor posicional).

2. Errores procedimentales son errores debido a la realización incorrecta de pasos en un proceso matemático (por ejemplo, reagrupación, colocación de decimales)

3. Errores conceptuales son errores debido a conceptos erróneos o una comprensión defectuosa de los principios e ideas subyacentes relacionados con el problema matemático (p. ej.: relación entre números, características y propiedades de las formas)

También señalan un cuarto, el Error por Descuido, que definen como aquel que el estudiante comete al no lograr resolver correctamente un determinado problema matemático a pesar de tener las habilidades o conocimientos necesarios. Lo cual puede ocurrir por que el estudiante esté cansado o distraído.

Saucedo Por otro lado, Saucedo (2007, p. 35) en su reporte de tesis[36] cuyo objetivo es la categorización de errores algebraicos en alumnos ingresantes a la universidad, adapta la clasificación de Movshovitz-Hadar, Inbar y Zalavsky, donde define las categorías:

1. Datos mal utilizados, como los casos en que se añaden datos extraños; se olvida algún dato necesario para la solución; se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado; se utilizan los valores numéricos de una variable para otra distinta; se hace una lectura incorrecta del enunciado.

2. Interpretación incorrecta del lenguaje, como los errores debido a una traducción

[36]Notar que el trabajo de Saucedo (2007) citado es un reporte publicado en la revista Itinerarios Educativos. Cuando él hace mención a la tesis menciona "Se enmarca dentro de la carrera de postgrado Maestría en Didácticas específicas con mención en Matemática que se dicta en la Facultad de Humanidades y Ciencias de la UNL. La misma fue dirigida por las doctoras Bibiana Iaffei y Sara Scaglia."

errónea de conceptos o símbolos matemáticos, dados en lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto (Designar un concepto por un símbolo que designa a otro concepto y operar con el mismo en su uso convencional). A veces se produce, también una interpretación incorrecta de símbolos gráficos como términos matemáticos y viceversa. Desconexión entre lo analítico y gráfico.

3. Empleo incorrecto de propiedades y definiciones, como los errores que se cometen por deformación de un principio, regla o definición determinada: aplicar la propiedad distributiva a una operación o función no lineal; cita o escritura errónea de una definición, teorema o fórmula identificable.

4. Errores al operar algebraicamente, como son los errores encontrados al sumar, restar, multiplicar, etc. expresiones algebraicas y al transponer términos.

5. No verificación de resultados parciales o totales, donde se incluyen los errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada; si el alumno hubiese contrastado la solución con el enunciado tal vez el error habría podido evitarse.

6. Errores lógicos, en este grupo se incluyen los errores que se cometen por falacias de razonamiento. Justificaciones inadecuadas. Explicaciones ilógicas.

7. Errores técnicos, donde se consideran los errores de cálculo, errores al transcribir datos del temario.

Errores frecuentes En base a la clasificación de Saucedo (2007), Cerda et al. (2015) examinó la resolución escrita de un problema lógico-matemático de muestra de 263 estudiantes chilenos destacados de 3 niveles escolares distintos (6to básico, 8vo

Tipo de Error	Total	Porcentaje
Datos mal utilizados	13	5.5
Interpretación Incorrecta del Lenguaje matemático	2	0.8
Empleo incorrecto de resultados y/o definiciones	7	3.0
Errores al operar algebraicamente	11	4.6
No verificación de resultados	11	4.6
Errores lógicos	71	30.0
Errores Técnicos	92	38.8
Dos o más tipos de errores	30	12.7
Total	237	100

Tabla 2.2: Distribución de frecuencia y tipos de errores cometidos por los estudiantes al resolver los tres tipos de problemas.

básico y 4to año medio). A partir de esto obtuvo los siguientes resultados resumidos en la Tabla 2.2.

2.3 Teoría de Números

No es una tarea sencilla definir la Teoría de Números, pues en varios de los libros clásicos de esta rama de la matemática suele ser un *término primitivo*, que pese a evolucionar a lo largo del texto no se vuelve a mencionar. Así, tenemos las siguientes "definiciones" extraida de varios libros comunmente citados en cursos de Teoría de Números o recomendados al iniciar el estudio de esta rama:

- la rama de la matemática que se ocupa de los números enteros, $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ también llamados números de conteo o números enteros positivos (Apostol, 1976).
- La Teoría de los Números se ocupa de las propiedades de los números naturales $1, 2, 3, 4, \ldots$, también llamados números enteros positivos. Estos números, junto con los enteros negativos y el cero, forman el conjunto de los enteros (Niven

et al., 1991).

- Como primera aproximación, la Teoría de los Números puede definirse como el estudio de los números naturales $1, 2, 3, 4, \ldots$, Kronecker comentó una vez [hablando de matemáticas en general] que Dios hizo los números naturales y todo lo demás. es obra del hombre. Aunque los números naturales constituyen, en cierto sentido, el sistema matemático más elemental, el estudio de sus propiedades ha proporcionado a generaciones de matemáticos problemas de incesante fascinación (Ireland y Rosen, 1982).

- En nuestro estudio de la teoría de números nos preocuparemos principalmente del conjunto I de los enteros y de las operaciones binarias suma $+$ y multiplicación $\times$ definidas en este conjunto Pettofrezzo et al. (1972).

- El estudio de las propiedades de los números enteros positivos es el objetivo central de la Teoría de Números: Teoría Elemental, Teoría Analítica y Teoría Algebraica (Santos, 1998).

También es importante notar que hay libros que tampoco entregan una definición como Andrews (1971), Stroth y Waldecker (2019) y Weissman (2017), entre otros.

Ahora, Gowers (2008) en su enciclopedia *The Princeton Companion to Mathematics* examina las ramas más activas de las matemáticas puras, a diferencia de los textos señala una definición más completa que las anteriores pero en la misma línea, así tenemos que:

> La teoría de números se ocupa en gran medida de las propiedades del conjunto de números enteros positivos y, como tal, tiene una superposición considerable con el álgebra. Pero un ejemplo sencillo que ilustra la diferencia entre una pregunta típica en álgebra y una pregunta típica en

teoría de números lo proporciona la ecuación $13x - 7y = 1$. Un algebraista simplemente observaría que existe una familia de soluciones de un solo parámetro: si $y = \lambda$ entonces $x = (1 + 7\lambda)/13$, así la solución general es $(x, y) = \big((1 + 7\lambda)/13, \lambda\big)$. Un teórico de números estaría interesado en soluciones enteras y, por lo tanto, averiguaría para qué enteros λ el número $1 + 7\lambda$ es múltiplo de 13. (La respuesta es que $1 + 7\lambda$ es múltiplo de 13 si y sólo si λ tiene la forma $13m + 11$ para algún número entero m.)

Sin embargo, esta descripción no hace plena justicia a la teoría de números moderna, que se ha convertido en un tema muy sofisticado. La mayoría de los teóricos de números no intentan directamente resolver ecuaciones en números enteros; en cambio, están tratando de comprender estructuras que se desarrollaron originalmente para estudiar tales ecuaciones pero que luego cobraron vida propia y se convirtieron en objetos de estudio por derecho propio. En algunos casos, este proceso ha ocurrido varias veces, por lo que la frase “teoría de números” da una imagen muy engañosa de lo que hacen algunos teóricos de números. Sin embargo, incluso las partes más abstractas del tema pueden tener aplicaciones prácticas: un ejemplo notable es la famosa demostración de Andrew Wiles del último teorema de Fermat.

Curiosamente, en vista de la discusión anterior, la teoría de números tiene dos subramas bastante distintas, conocidas como teoría algebraica de números y teoría analítica de números. Como regla general, el estudio de ecuaciones en números enteros conduce a la teoría algebraica de números, mientras que la teoría analítica de números tiene sus raíces en el estudio de los números primos, pero el verdadero panorama es, por supuesto, más

> complicado.

En base a esto, y luego en el cuarto apartado del libro,

> Ahora que hemos analizado lo que distingue a la teoría de números del resto de las matemáticas, estamos listos para hacer una distinción adicional: entre teoría de números algebraica y analítica. La principal diferencia es que en la teoría algebraica de números (que es el tema principal de los números algebraicos) normalmente se consideran preguntas con respuestas dadas por fórmulas exactas, mientras que en la teoría analítica de números, el tema de este artículo, se buscan buenas aproximaciones. Para el tipo de cantidad que se estima en la teoría analítica de números, no se espera que exista una fórmula exacta, excepto quizás una de tipo bastante artificial y poco esclarecedora. Uno de los mejores ejemplos de tal cantidad es uno que analizaremos en detalle: el número de primos menores o iguales a x.

Por último, habla[37] de un área que hasta ahora no ha sido tocada,

> Una vez que se comienza el proceso de determinar qué números enteros son primos y cuáles no, pronto resulta evidente que hay muchos primos. Sin embargo, a medida que uno avanza más y más, los números primos parecen consistir en una proporción cada vez menor de números enteros positivos. También parecen seguir un patrón algo irregular, lo que plantea la cuestión de si existe alguna fórmula que los describa a todos. En su

[37] Anterior al siguiente párrafo se trabaja el siguiente ejemplo: Para ver qué distingue la teoría de números del resto de las matemáticas, observemos la ecuación $x^2 + y^2 = 15\,925$ y consideremos si tiene alguna solución. Una respuesta es que ciertamente sí: de hecho, el conjunto solución forma un círculo de radio $\sqrt{15\,925}$ en el plano. Sin embargo, un teórico de números está interesado en soluciones enteras y ahora es mucho menos obvio si existen tales soluciones.

defecto, ¿podríamos quizás describir una gran clase de ellos? También podemos preguntarnos si hay infinitos números primos. Si los hay, ¿podemos determinar rápidamente cuántos hay hasta un punto determinado? ¿O al menos dar una buena estimación de este número? Finalmente, cuando uno ha pasado suficiente tiempo buscando números primos, no puede evitar preguntarse si existe una manera rápida de reconocerlos. Esta última cuestión se analiza en [teoría computacional de números].

De esta manera, para efectos prácticos es que se considerará como definición de Teoría de Números a la rama de las matemáticas que estudia las propiedades del conjunto de los números naturales y aquellos que se pueden obtener a partir de él. Esta se subdivide

- Teoría Clásica o Elemental de Números, es aquella relacionada a problemas de divisibilidad, congruencias, ecuaciones diofánticas, etc. en el conjunto de los naturales, enteros y racionales usando métodos conocidos alrededor del siglo xviii.

- Teoría Analítica de Números, como aquella que usa análisis complejo y armónico para resolver los problemas antes mencionados.

- Teoría Algebraica de Números, usa conocimientos algebraicos, en lugar de analíticos, para resolver ese tipo de problemas.

- Teoría Computacional de Números, centrada en algoritmos y computación para abordar problemas numéricos

2.4 Historia de la Teoría de Números

Por razones prácticas y estéticas, se prescindirá del uso de cuadros de texto centrados en la página, como recomienda la *American Psychological Association* (APA), ya que cada uno es textual. Por esta razón, cada párrafo subsiguiente se cita únicamente al final, sin alteraciones. Además, en caso de que un párrafo carezca de cita[38] y para evitar repeticiones, la cita de un párrafo se reproduce en los siguientes hasta que aparezca una nueva referencia.

2.4.1 Introducción

La Teoría de Números ha sido importante en las matemáticas al menos durante tanto tiempo como la Geometría, y desde un punto de vista fundamental puede ser más importante. A pesar de ello, la teoría de los números nunca se ha sometido a un tratamiento sistemático como el que sufre la geometría elemental en los Elementos de Euclides. En todas las etapas de su desarrollo, la teoría de números ha tenido lagunas evidentes debido a la intratabilidad de los problemas elementales. La mayoría de los problemas matemáticos realmente antiguos sin resolver, de hecho, son preguntas simples sobre los números naturales 1, 2, 3, … (Stillwell, 2010).

Como consecuencia, el papel de la teoría de números en la historia de las matemáticas ha sido muy diferente al de la geometría. La geometría ha desempeñado un papel estabilizador y unificador, hasta el punto de retrasar a veces un mayor desarrollo y crear la impresión popular de que las matemáticas son una materia estática. Para aquellos capaces de entenderla, la teoría de los números ha sido un acicate para el progreso y el cambio. Antes de 1800, solo un puñado de matemáticos contribuyó a los avances en la teoría de números, pero entre ellos se encuentran algunos de los grandes:

[38] No es que no la posea, si no es que es la misma que la del párrafo anterior.

Diofanto, Fermat, Euler, Lagrange y Gauss. Este libro destaca aquellos avances en la teoría de números que surgieron de sus profundas conexiones con otras partes de las matemáticas, en particular la geometría, ya que fueron las más significativas para las matemáticas en su conjunto. Sin embargo, hay temas en la teoría de números que son demasiado interesantes para ignorarlos, aunque parezcan (actualmente) estar fuera de la corriente principal. Discutimos algunos de ellos en la siguiente sección (Stillwell, 2010).

2.4.2 Prehistoria

El artefacto de importancia matemática más antiguo que existe es el mango de una herramienta de hueso, con muescas dispuestas en patrones numéricos definidos, con una pieza de cuarzo encajada en una cavidad estrecha en la cabeza del mango. Conocido como el hueso de Ishango, fue encontrado en 1962 por Jean de Heinzelin en el sitio de pesca de Ishango, a orillas del lago Edward en la República Democrática del Congo, y data del período comprendido entre el 9000 y el 6500 a.C. El significado de las muescas de conteo solo se puede conjeturar, y existe una diferencia de opinión entre los expertos examinadores (Eves, 1983).

Es muy probable que el primer gran momento de las matemáticas se produjera cuando, hace muchos miles de años, el hombre primitivo empezó a llevar la cuenta de ciertas colecciones haciendo arañazos en la tierra o en una piedra. La sociedad había evolucionado hasta el punto en que el simple conteo se volvió imperativo. Una tribu, un clan o una familia tenía que repartir los alimentos entre sus miembros, o tenía que llevar la cuenta del tamaño de un rebaño o una manada. El proceso era simplemente un método de conteo que empleaba el principio de correspondencia uno a uno y probablemente fue el comienzo de la ciencia de la escritura.

Es muy probable que el primer gran momento de las matemáticas se produjera cuando, hace muchos miles de años, el hombre primitivo empezó a llevar la cuenta de ciertas colecciones haciendo arañazos en la tierra o en una piedra. La sociedad había evolucionado hasta el punto en que el simple conteo se volvió imperativo. Una tribu, un clan o una familia tenía que repartir los alimentos entre sus miembros, o tenía que llevar la cuenta del tamaño de un rebaño o una manada. El proceso era simplemente un método de conteo que empleaba el principio de correspondencia uno a uno y probablemente fue el comienzo de la ciencia de la escritura.

Parece justo suponer que, al llevar la cuenta de una pequeña colección, un dedo fue levantado o bajado por cada miembro de la colección. Los recuentos de cuentas para colecciones más grandes podrían [...] hacerse juntando guijarros o palos haciendo rayas en la tierra o en una piedra, cortando muescas en un hueso o en un trozo de madera, o haciendo nudos en una cuerda. Quizás más tarde se desarrolló una variedad de gruñidos como un recuento vocal contra la cantidad de objetos en pequeñas colecciones. Aun así, más tarde se desarrolló una variedad de símbolos escritos (números) para representar estos números.

Aunque este desarrollo del conteo primitivo es en gran parte conjetura, está respaldado por informes de antropólogos en sus estudios de los pueblos primitivos actuales y por ciertos artefactos desenterrados en varias partes del mundo. Es la forma en que los niños pequeños de hoy comienzan a llevar la cuenta.

2.4.3 Egipto y Mesopotamia

La fuente teórica de números más antigua conocida [es] la tabla babilónica Plimpton 322 (ca. 1800 a. C.) [...] de números triples pitagóricos (Brückler, 2017).

2.4.4 Griegos

Las ternas pitagóricas recibieron su nombre de los primeros teóricos de números de la historia, los pitagóricos. [L]os pitagóricos desarrollaron lo que se conoce como aritmética teórica. Descubrieron las propiedades de los números pares e impares y estudiaron los números calculados. También estaban interesados en los números perfectos, es decir, los números naturales que son iguales a la suma de todos sus divisores (positivos) excepto ellos mismos. Los primeros cuatro números perfectos son 6, 28, 496 y 8128 y se conocen desde la antigüedad, pero no hay fuentes de su descubrimiento (Brückler, 2017).

En general, se acepta que Pitágoras y sus seguidores dieron los primeros pasos estimulantes en el desarrollo de la teoría de los números, en conjunción con la filosofía de la Hermandad pitagórica de que los números enteros controlan el universo. Gran parte de este trabajo se convirtió en la base del futuro misticismo numérico (Eves, 1983).

2.4.4.1 Euclides

De los Elementos de Euclides, los libros VII, VIII y IX están dedicados a la teoría de números. Se asume que estos resultados son principalmente pitagóricos (Brückler, 2017).

En el Libro VII uno encuentra diversas definiciones y teoremas sobre el tema de la divisibilidad en el conjunto de los números naturales. Los números primos se definen en la definición 11ra como los números (naturales) que solo pueden ser medidos por uno, es decir, cuyo único divisor real es 1, en la definición 12da, Euclides llama a dos números relativamente primos si uno es la única medida común (es decir, el único divisor común), y en la 13ra definición, los números compuestos se definen como aquellos números que se pueden medir (dividir) por un número. El uno, como era común en la época, no se cuenta entre los números, se considera el origen de todos los números. EEVII2 es especialmente interesante: encontrar el máximo común divisor de dos números no primos. La prueba es el algoritmo de Euclides para dos números, y como corolario Euclides concluye: si un número divide (mide) dos números, entonces también divide a su máximo común divisor. En la Proposición EEVII34, Euclides describe cómo determinar el mínimo común múltiplo de dos números.

El libro VIII contiene varios resultados sobre los temas de números cuadráticos y cúbicos, así como secuencias geométricas. Por ejemplo, EEVIII7 dice: Si un número divide al último número en una progresión geométrica finita, también divide al segundo número. Aquí los números, típicamente griegos antiguos, solo significan números naturales.

En el Libro IX de los Elementos también encontramos el famoso teorema sobre el infinito del conjunto de los números primos. En general se puede decir que en el IX se incluyen los teoremas del Libro de los Elementos sobre secuencias geométricas, así como la doctrina pitagórica de los números pares e impares. Como última proposición también se encuentra el resultado pitagórico más probable sobre los números perfectos pares. En el lenguaje moderno, esta es el siguiente teorema “hay más primos que cualquier número dado de números primos“.

2.4.4.2 Eratóstenes

En el período helenístico de las matemáticas griegas antiguas, Eratóstenes de Cirene (siglo III a. C.) desarrolló lo que sigue siendo el algoritmo más famoso para determinar números primos, la Criba de Eratóstenes. El algoritmo es simple: enumera todos los números naturales desde 2 hasta un número máximo M. En cada paso, el menor de los números sin marcar es un número primo. En el primer paso, es 2 y se marca como un número primo. Cada paso consiste en marcar todos los múltiplos de este número más pequeño sin marcar. Así que el primer paso es marcar todos los números pares. En el segundo paso, 3 es el número sin marcar más pequeño, es decir, un número primo, y todos los múltiplos de 3 sin marcar son marcados. Se continúa el procedimiento hasta llegar al final de la lista (en la práctica basta marcar sólo los múltiplos no mayores de $\sqrt{M}$) [...].

2.4.4.3 Diofanto

Ahora bien, en la historia de las matemáticas hay un hombre que se destaca como probablemente el primer genio verdadero en el campo de la teoría de números, y uno de cuyos trabajos influyó tan profundamente en los teóricos de números europeos posteriores que la producción de este trabajo bien puede calificarse de gran éxito. momento en matemáticas. El hombre es Diofanto de Alejandría, y la obra a la que se alude es su famosa Aritmética. Aunque hay alguna evidencia tenue que ubica a Diofanto en el primer siglo de nuestra era, la mayoría de los historiadores tienden a ubicarlo en el siglo tercero. Más allá del hecho de que floreció en Alejandría, no se sabe nada cierto sobre su vida personal.

Diofanto escribió tres obras matemáticas: Aritmética, de la que se conservan seis de los trece libros originales; Sobre números poligonales, de la cual sólo existen fragmentos; y Porismos, que está perdido.

La *Arithmetica* es una gran y muy original obra. Es un tratamiento analítico de la teoría algebraica de números que marca al autor como un virtuoso astuto en este campo. La obra ha tenido muchos comentaristas, pero fue Regiomontanus [Königsberg] quien, en 1463, pidió una traducción al latín del texto griego existente.

La porción existente de *Arithmetica* está dedicada a la solución de unos 130 problemas, de considerable variedad, que conducen a ecuaciones de primer y segundo grado; se resuelve una ecuación cúbica muy especial. El primer libro se ocupa de ecuaciones determinadas en una incógnita, y los otros libros de ecuaciones indeterminadas en una incógnita, y los otros libros de ecuaciones indeterminadas de segundo grado en dos y tres incógnitas. Llama la atención la falta de métodos generales, sino más bien la invención de ingeniosos dispositivos matemáticos diseñados para la necesidad de cada problema individual. Diofanto reconoció solo respuestas racionales positivas y, en la mayoría de los casos, estaba satisfecho cuando encontraba una respuesta a un problema, aunque podían existir muchas respuestas diferentes.

2.4.5 Periodo intermedio

2.4.5.1 India

En el período clásico de las matemáticas indias antiguas, varios matemáticos indios se ocuparon de las ecuaciones diofánticas, incluidos Brahmagupta, Mahavıra, Bhaskara II y Narayana. En particular, la Ecuación de Pell debe mencionarse aquí. Aunque lleva el nombre del matemático inglés John Pell (siglo XVII), fue estudiado 1000 años antes por Brahmagupta (siglo VII). Sin embargo, los problemas de teoría de números relacionados con la Ecuación de Pell ya surgieron en la antigua Grecia.

La contribución más importante de Brahmagupta al tema es el descubrimiento de la identidad de Brahmagupta, que en la notación simbólica moderna toma la forma

$$(a^2 + nb^2)(c^2 + nd^2) = (ac \mp nbd)^2 + n(ad \pm bc)^2$$

Los resultados de Brahmagupta fueron desarrollados aún más por Bhaskara II en el siglo XII. Su método, es decir, un algoritmo para calcular la solución de una Ecuación de Pell, se conoce como el "método cíclico". Entre los ejemplos que da en su obra Siddhanta-siromani, el más conocido es el cálculo de la solución $(x, y) = (226, 153, 980, 1, 766, 319, 049)$ de la ecuación usando su método cíclico.

2.4.5.2 China

La contribución china antigua más famosa a la teoría de números es el teorema del resto chino.

La historia de este teorema se remonta al autor chino Sunzi Suanjing. Parece que el interés por los problemas de congruencia ha surgido en el contexto astronómico. No es seguro cuándo vivió Sunzi, pero su tratado matemático fue escrito entre 280 y 473. El tratado contiene varios problemas, algunos de los cuales son de naturaleza de la teoría de números. Uno de los problemas sobre el número de cosas que se cuentan hasta 3, hasta 5 y hasta 7 se puede formular en notación moderna como el sistema de congruencia (CONG). Esta es la ocurrencia más antigua conocida de este tipo de problema. Sunzi también describe la solución. Aunque el método de resolución se refiere a los números concretos dados, es básicamente el método moderno; incluso los describe para residuos arbitrarios (pero solo para los módulos dados). Más tarde, en el siglo XIII, Qiu Jiushao describe el teorema general chino del resto justo al comienzo de su famosa obra Neun Bücher über Mathematik (1247).

En la antigua China se habían tratado otros problemas de teoría de números incluso antes de Sunzi. En los Neun Kapiteln se encuentra el famoso "Problema de los 100 Pájaros"[39]. También se pueden encontrar problemas similares en textos medievales

[39] Si un gallo cuesta 5 monedas, una gallina 3 y tres pollitos juntos 1 moneda, ¿cuántos gallos, gallinas y pollitos se pueden comprar con 100 monedas, dado un total de 100 pájaros a comprar?

indios, musulmanes y europeos.

2.4.5.3 Árabes

Los matemáticos de la llamada época árabe, es decir, la Edad Media en los países del Islam, también se ocuparon de la teoría de los números, entre otras cosas. Se han descrito y comentado resultados griegos e indios más antiguos. Por ejemplo, el famoso científico Avicena (Ibn Sına) (980-1037) trata problemas del tipo "Demuestra que si al dividir un número por 9 queda el resto a o b, entonces al dividir el cuadrado de este número se obtiene el resto x". Pero también hubo algunos resultados nuevos en el campo. Los dos más conocidos son el teorema de Tabit sobre los números amigos y el uso del teorema de Wilson por parte de Al-Haytam.

2.4.5.4 Fermat y el comienzo de la Teoría de Números moderna

Después del trabajo de Diofanto, la teoría de números en Europa languideció durante unos 1000 años. En Asia hubo avances significativos en temas como la Ecuación de Pell. Los primeros signos de despertar en Europa se produjeron en el siglo XIV, cuando Levi ben Gershon encontró fórmulas para el número de permutaciones y combinaciones, utilizando pruebas de inducción rudimentarias (Stillwell, 2010).

Algunos resultados importantes de la teoría de números se descubrieron en la Edad Media, aunque no se arraigaron hasta que se redescubrieron en el siglo XVII o más tarde. Entre estos se encuentran el descubrimiento del triángulo de Pascal y el "teorema del resto chino" por matemáticos chinos, y fórmulas para permutaciones y combinaciones de Levi ben Gershon (1321). El triángulo de Pascal, por otro lado, comenzó a florecer en el siglo XVII después de un largo período de inactividad, por lo que es interesante ver qué se sabía de él en la época medieval y qué hizo Pascal para revivirlo.

El interés por la teoría de los números se aceleró con el redescubrimiento de Diofanto por Bombelli y la publicación de una nueva edición por Bachet de Meziriac (1621). Fue este libro el que inspiró a Fermat y lanzó la teoría de números como una disciplina matemática moderna (Brückler, 2017).

Fermat Pierre de Fermat (1601-1665) fue abogado y matemático aficionado. En su carrera jurídica trabajó como abogado y juez en el Parlamento de Toulouse. Además de ser el padre de la teoría de números moderna, se le considera el fundador de la teoría de la probabilidad con Pascal y cofundador de la geometría analítica junto con Descartes. También hizo importantes aportes como antecesor del cálculo infinitesimal. También es famoso el principio de Fermat en óptica. Fermat no publicó sus resultados durante toda su vida, pero los escribió en cartas a amigos (incluidos Mersenne y Huygens) y como notas marginales en libros.

Fermat dominó y amplió las técnicas de Diofanto, como el método de la cuerda y la tangente para encontrar puntos racionales en curvas cúbicas. También cambió el énfasis de las soluciones racionales a las soluciones enteras. Demostró el "pequeño teorema de Fermat" que $n^p - n$ es divisible por p para cualquier p primo, y afirmó el "último teorema de Fermat" que $x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones enteras positivas cuando $n > 2$.

Sabemos que Fermat tenía una demostración de su "último teorema" para $n = 4$, pero parece haberse equivocado al pensar que podía demostrarlo para n arbitrarios. La prueba ahora conocida utiliza ideas muy sofisticadas, inconcebibles en el siglo XVII. Sin embargo, es extrañamente apropiado que la demostración moderna reduzca el último teorema de Fermat a un problema sobre curvas cúbicas.

Mersenne Fermat era miembro del círculo científico de Mersenne, un grupo de científicos que se reunían en torno al sacerdote y científico Marin Mersenne (1588-1648) y mantenían correspondencia con él (tras la muerte de Mersenne se encontró correspondencia con 78 personas, entre ellas Fermat, Huygens, Pell, Galileo y Torricelli). Mersenne intentó descubrir una fórmula general para los números primos y trabajó con números primos de la forma $2^p - 1$ (con p primo). Incluso antes de Mersenne, se conocían algunos números primos de la forma (para $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19$) y también que $2^{11} - 1 = 23 \cdot 89$ no es un número primo. Los números primos de la forma $2^p - 1$ ahora se conocen como primos de Mersenne. Aún no se ha demostrado si hay un número finito o infinito de números primos de Mersenne. Al momento de escribir este texto, se conocen 49[40] números primos de Mersenne, el más grande (obtenido por $p = 74\,207\,281$) tiene $22\,338\,618$ dígitos.

Legendre El matemático francés Adrien-Marie Legendre (1752-1833) provenía de una familia adinerada y tenía una buena formación en física y matemáticas. Sus intereses matemáticos estaban relacionados con las aplicaciones de las matemáticas en física y astronomía, funciones elípticas y teoría de números. Durante la Revolución Francesa fue miembro de la Comisión de Reorganización de Pesos y Medidas, pero también perdió sus bienes e incluso tuvo que esconderse durante un tiempo durante el Terror. Después de la revolución se casó, pudo volver a trabajar y publicó su obra más famosa, Eléments de géométrie, en 1794. Murió empobrecido después de que le recortaran su pensión en 1824 por negarse a votar por un candidato propuesto por el gobierno para el Instituto Nacional.

[40] Actualmente, son 51 los números de Mersenne

Gauss Quizás el matemático más famoso de todos los tiempos fue Johann Karl Friedrich Gauss (1777-1855). Hizo contribuciones a casi todas las ramas de las matemáticas, tanto teóricas como prácticas, que existían en su época. También se conocen muchas anécdotas sobre Gauss, como por ejemplo, cuando tenía nueve años, su maestra le dio la tarea de sumar los números del 1 al 100. Se dice que Gauss resolvió la tarea inesperadamente rápido formando 50 pares con la misma suma $(1+100, 2+99, \ldots, 50+51)$ y llegando así al resultado 5050. Cuando tenía 19 años, logró construir el góndola regular de 17 usando un compás y una regla. De sus muchas contribuciones, que por la brevedad de estos dos libros no encontrarán cabida en ellos, definitivamente queremos mencionar aquí su famoso Teorema egregrium de geometría diferencial, que demostró en 1828. Trabajó en Göttingen la mayor parte de su vida y permaneció científicamente activo hasta su muerte.

Las Disquisitiones Arithmeticae (1801) de Gauss se consideran ahora generalmente como el comienzo de la teoría de números moderna. En este trabajo, Gauss también introduce el símbolo $\equiv$ para la congruencia, mediante el cual muchos enunciados de la teoría de números pueden formularse de manera más compacta y clara. Este trabajo también contiene la primera formulación clara y prueba del teorema fundamental de la aritmética.

Dirichlet El matemático alemán Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) hizo importantes contribuciones a la teoría de números y análisis. Ya a los 12 años se apasionaba por las matemáticas y compraba libros de matemáticas con su dinero de bolsillo. Estudió matemáticas en París, donde conoció a numerosos matemáticos excelentes (Biot, Fourier, Laplace, Legendre, Poisson, ...). Posteriormente enseñó en la Universidad Friedrich-Wilhelms de Berlín y en Göttingen. Dirichlet estaba casado con

Rebecka Henriette Mendelssohn, hermana del famoso compositor Felix Mendelssohn Bartholdy. Durante una conferencia en Montreaux en 1858 sufrió un infarto del que nunca se recuperó. Regresó enfermo a Göttingen y murió poco después de que su esposa muriera de un derrame cerebral.

2.4.6 Teoría algebraica de números

Otro concepto de álgebra abstracta que surgió de la antigua álgebra de ecuaciones fue el de anillo, que surgió de los intentos de encontrar soluciones enteras de ecuaciones. Los primeros pasos hacia el concepto de anillo los dio Euler (1770), quien descubrió ecuaciones cuyas soluciones enteras se encuentran más fácilmente con la ayuda de números irracionales o imaginarios.

Gauss se dio cuenta de que estos números auxiliares funcionan porque se comportan como números enteros. En particular, admiten un concepto de "primo" para el cual se cumple la factorización prima única.

En las décadas de 1840 y 1850, varios matemáticos impulsaron la idea de los "enteros algebraicos", y alcanzó su madurez cuando Dedekind (1871) definió el concepto de entero algebraico en un campo numérico de grado finito. Para entonces, se había adquirido considerable experiencia con campos numéricos y Kummer había observado que tales campos no siempre admiten factorización prima única.

Kummer encontró una manera de solucionar esta dificultad introduciendo nuevos objetos a los que llamó números ideales (en analogía con los objetos "ideales" en geometría, como los puntos en el infinito). Dedekind reemplazó los "números ideales" indefinidos de Kummer por conjuntos concretos de números que llamó ideales. Luego pudo restaurar la factorización prima única demostrando que es válida para los ideales.

La teoría de los anillos tal como la conocemos hoy es en gran medida el resultado de la construcción de un marco general para la teoría de los ideales de Dedekind. Debe su existencia a Emmy Noether, quien solía decir que "ya está en Dedekind".

2.4.7 Resumen

A modo de resumen, Brückler (2017), presenta la siguiente Tabla 2.3.

2.5 Aplicaciones de la Teoría de Números

Como bien ya se ha explicitado en las secciones anteriores, la Teoría de Números es la rama las matemáticas que se ocupa de las propiedades y relaciones de los números, ha sido un campo de estudio fundamental y cautivador durante siglos. Originalmente esta ha sido considerada una disciplina pura y abstracta, sin embargo en los últimos años la Teoría de Números ha encontrado sorprendentes y diversas aplicaciones en diversos campos.

Antes de los usos contemporáneos desarrollados a lo largo del XX hasta hoy, la concepción de la Teoría de Números se asemejaba a la descrita en el ensayo "A Mathematician's Apology" por Hardy (2012):

> Probablemente ya estará claro a qué conclusiones llego [(en relación al objetivo de su apología)]; así que las expondré dogmáticamente y luego las desarrollaré un poco. Es innegable que una buena parte de las matemáticas elementales – y uso la palabra "elemental" en el sentido en que la usan los matemáticos profesionales, en el que incluye, por ejemplo, un buen conocimiento práctico del cálculo diferencial e integral – ha tenido consecuencias de considerable utilidad práctica. Estas partes de las

¿Qué?	¿Dónde? ¿quién?	¿Cuándo?
Ternas pitagóricas	Egipto, Babilonia	2do milenio a. C.
	India	1er milenio a. C.
	Pitagóricos	VI a. C.
	Euclides	alrededor del III a. C.
Números pares e impares	Pitagóricos	VI a. C.
Números primos y compuestos	Euclides	alrededor del III a. C.
Números amigos	Tabit ibn Qurra	IX d. C.
Ecuaciones diofánticas	Arquímides	III a. C.
	China	alrededor del mismo tiempo
	Diofante	III d. C.
	Brahmagupta	VII d. C.
Congruencias y sus sistemas; ley de reciprocidad cudrática	China	IV d. C.
	Fermat	XVII d. C.
	Euler	XVIII d. C.
	Legendre, Gauss	XVIII/XIX d. C.
El gran teorema de Fermat	Fermat	XVII d. C.
	Euler	XVIII d. C.
	Dirichlet	XIX d. C.
	Wiles	XX d. C.
Resultados modernos sobre números primos teoremas de números primos, conjetura de Riemann	Mersenne, Fermat	XVII d. C.
	Legendre	XVIII/XIX d. C.
	Gauss	XVIII/XIX d. C.
	Riemann	XIX d. C.

Tabla 2.3: Historia de la Teoría de Números: Resumen (Brückler, 2017).

matemáticas son, en general, mas bien aburridas; son solo las piezas que tienen menor valor estético. Las matemáticas “reales” de los matemáticos “reales”, las matemáticas de Fermat, Euler, Gauss, Abel y Riemann, son casi totalmente “inútiles” (y esto es tan cierto para las matemáticas “aplicadas” como para las “puras”). No es posible justificar la vida de ningún matemático profesional genuino basándose en la “utilidad” de su trabajo.

Pero aquí debo abordar una idea errónea. A veces se sugiere que los matemáticos puros se jactan de la inutilidad de su [trabajo], y alardean de que no tiene aplicaciones prácticas. La imputación suele basarse en un dicho imprudente atribuido a Gauss, según el cual, si las matemáticas son la reina de las ciencias, la teoría de los números es, por su suprema inutilidad, la reina de las matemáticas – nunca he podido encontrar una cita exacta. Estoy seguro de que el dicho de Gauss (si es que es realmente el suyo) ha sido malinterpretado de manera bastante cruda. Si la teoría de los números pudiera emplearse para algún propósito práctico y obviamente honorable, si pudiera utilizarse directamente para promover la felicidad humana o aliviar el sufrimiento humano, como pueden hacerlo la fisiología e incluso la química, entonces seguramente ni Gauss ni ningún otro matemático habría sido tan tonto como para condenar o lamentar dichas aplicaciones. Pero la ciencia trabaja tanto para el mal como para el bien (y particularmente, por supuesto, en tiempos de guerra); y tanto Gauss como los matemáticos menores pueden estar justificados para regocijarse de que, en cualquier caso, exista una ciencia, y de que la suya propia, cuya misma lejanía de las actividades humanas ordinarias debería

> mantenerla amable y limpia.

La cita de Hardy subraya cómo las matemáticas puras, a diferencia de las aplicadas, no buscan directamente promover la utilidad práctica o aliviar el sufrimiento humano. Sin embargo, esto no disminuye su importancia, ya que Hardy defiende que la mera existencia de una disciplina científica como las matemáticas puras es una causa para regocijarse. Además, destaca la necesidad de mantener las matemáticas puras como un campo limpio y apartado de las actividades humanas ordinarias, preservando su integridad y valor estético.

Sin embargo,

> con la gran y profunda transformación científica y tecnológica provocada por el surgimiento y desarrollo de la computadora, la teoría de números se ha utilizado ampliamente y ya no es solo una matemática pura, sino una disciplina matemática con valor de aplicación práctica. En la actualidad, la teoría de números se aplica amplia y plenamente en muchos campos, como la informática, la criptografía, la física, la química, la biología, la acústica, la electrónica, la comunicación, la gráfica e incluso la musicología (Yan, 2019).

De manera similar a la investigación de Yan (2019), en su artículo que estudia “principalmente el desarrollo y las aplicaciones de la teoría de números, con el objetivo de revisar la historia de esta disciplina, y explorar su influencia en la producción y nuestra vida y sus aplicaciones”, Křížek et al. (2021) explican que:

> La teoría de números tiene muchas aplicaciones en diversas áreas de nuestras vidas, por ejemplo, en la detección de errores y códigos de corrección de errores, en la codificación y decodificación de una señal de

> televisión, en astronomía, en la resolución de ecuaciones en diferencias finitas y ecuaciones diferenciales, en la creación de archivos JPG o PNG. formatos, en teoría de grupos y redes, en informática, en óptica, en física nuclear, en espectroscopia, en el estudio de la estructura del átomo o resonancias en la teoría de la oscilación. Por ejemplo, la longitud de onda.

Finalmente, la Teoría de Números es un campo vasto y relevante que trasciende muchas otras ramas de las matemáticas. Como bien señala Niven et al. (1991), "la teoría de números es un campo amplio con muchas conexiones sólidas con otras ramas de las matemáticas". De manera similar Apostol (1976) expresa que:

> El matemático profesional se siente atraído por la teoría de números debido a la manera en que todas las herramientas de las matemáticas modernas pueden aplicarse a sus problemas. De hecho, muchas ramas importantes de las matemáticas tuvieron su origen en la teoría de números. Por ejemplo, los primeros intentos de probar el teorema de los números primos estimularon el desarrollo de la teoría de funciones de una variable compleja, especialmente la teoría de funciones enteras. Los intentos de demostrar que la ecuación diofántica $x^n + y^n = z^n$ no tiene solución no trivial si $n \geq 3$ (la conjetura de Fermat) llevaron al desarrollo de la teoría algebraica de números, una de las áreas más activas de la investigación matemática moderna. La conjetura en sí misma parece poco importante en comparación con la gran cantidad de matemáticas valiosas que fue creada por aquellos que trabajaron en ella. (A. Wiles anunció una prueba de la conjetura de Fermat en 1994.) Otro ejemplo es la teoría de particiones, que ha sido un factor importante en el desarrollo del análisis combinatorio y en el estudio de funciones modulares.

2.5.1 El caso de la criptografía

Un caso especial de estas aplicaciones La aplicación de la teoría de números en criptografía se puede ver a lo largo de la historia, incluso si el campo en sí no fue reconocido formalmente hasta el siglo XX. A principios del siglo XX, con la llegada de las telecomunicaciones, la necesidad de una comunicación segura impulsó el desarrollo de técnicas de cifrado.

En relación a la criptografía, Granados Paredes (2006) señala:

> La necesidad de Seguridad de la Información en una organización ha cambiado en las últimas décadas. Antes del uso de las computadoras, la Seguridad de la Información era proporcionada por medios físicos, por ejemplo, el uso de cajas fuertes y por medidas administrativas, como los procedimientos de clasificación de documentos.
>
> Con el uso de la computadora, y más aún con la llegada de Internet, fue indispensable el uso de herramientas automatizadas para la protección de archivos y otro tipo de información almacenada en la computadora, algunas de estas herramientas son los cortafuegos, los Sistemas Detectores de Intrusos y el uso de sistemas criptográficos.
>
> Estas herramientas no sólo permiten proteger a la información, sino también a los Sistemas Informáticos que son los encargados de administrar la información. De la necesidad por proteger a la información y a los sistemas que la administran surge el término de Seguridad Informática.
>
> En este punto hay que hacer una breve pausa para aclarar el hecho de que actualmente los términos de seguridad, seguridad de la información y de seguridad informática han sido empleados de diversas maneras y se les

> han dado diversos significados de acuerdo al contexto.

En relación a esto,

> En su clasificación dentro de las ciencias, la criptografía proviene de una rama de las matemáticas, que fue iniciada por el matemático Claude Elwood Shannon en 1948, denominada: "Teoría de la Información". Esta rama de las ciencias se divide en: "Teoría de Códigos" y en "Criptología". Y a su vez la Criptología se divide en Criptoanálisis y Criptografía, como se muestra en la siguiente figura [(ver Figura 2.9)].
>
> En un sentido más amplio, la Criptografía es la ciencia encargada de diseñar funciones o dispositivos, capaces de transformar mensajes legibles o en claro a mensajes cifrados de tal manera que esta transformación (cifrar) y su transformación inversa (descifrar) sólo pueden ser factibles con el conocimiento de una o más llaves.
>
> En contraparte, el criptoanálisis es la ciencia que estudia los métodos que se utilizan para, a partir de uno o varios mensajes cifrados, recuperar los mensajes en claro en ausencia de la(s) llave(s) y/o encontrar la llave o llaves con las que fueron cifrados dichos mensajes.

Como breve introducción a la relación entre estas dos áreas Fontecha Moreno y Vacca Díaz (2020) dicen:

- La criptografía se complementa de varias ramas de las matemáticas que hacen más fácil su funcionalidad, las cuales son la Complejidad Algorítmica, la Estadística y la Teoría de Números, importantes para desarrollar computacionálmente un proceso criptógrafo.

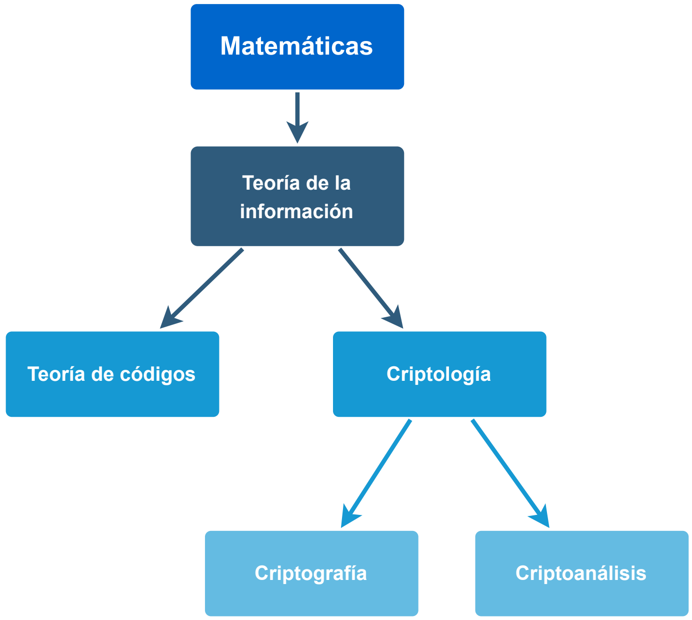


Figura 2.9: Origen de la criptografía por Granados Paredes (2006)

- Durante muchos años la matemática ha estado involucrada en el desarrollo de la humanidad, aunque en ocasiones parezca un tanto complicado de entender, en especial por los campos en que se profundiza. Siendo importante para diferentes áreas de la tecnología en la actualidad, sobre todo para la criptografía ya que ha permitido crear sofisticados algoritmos informáticos que ayudan a la seguridad de redes.

- Involucrar la criptografía en el aprendizaje de temas matemáticos en la licenciatura en matemáticas, puede despertar un interés por investigar y aprender mediante aplicaciones de la vida real.

- En el mundo de la seguridad informática así como hay métodos de encriptación que tienen un algoritmo básico, existen otros en la actualidad que son más sofisticados gracias a los métodos matemáticos que utilizan para diseñar el algoritmo de cifrado, este tipo de criptosistemas se conoce con el nombre de cifrado asimétricos o cifrado con clave pública que apareció en 1976, con la publicación de un trabajo sobre criptografía por Whitfeld Die y Martin Hellman que sugirieron usar problemas computacionálmente irresolubles para el diseño de criptosistemas seguros.

2.6 Ecuación de Pell

Comunmente en matemáticas las definiciones suelen ser precisas y similares dada la naturaleza de la disciplina

2.6.1 Ecuación Diofántica

Es por ello que, para la definición de Ecuación Diofántica

- Apostol (1976): Las ecuaciones que deben resolverse con valores enteros de las incógnitas ahora se llaman ecuaciones diofánticas, y el estudio de tales ecuaciones se conoce como análisis diofántico. La ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ o triples pitagóricos es un ejemplo de una ecuación diofántica.

- Niven et al. (1991):

  > A menudo nos encontramos con situaciones en las que deseamos encontrar soluciones de una ecuación con valores enteros de las variables, o tal vez valores racionales. A veces buscamos soluciones en enteros no negativos. En cualquiera de estos casos, nos referimos a la ecuación como una *ecuación diofántica*, en honor al matemático griego Diophantus, quien estudió este tema en el tercer siglo d.C. [Con respecto al capítulo,] limitamos nuestra atención a ecuaciones que involucran polinomios en una o más variables. No hay un método

> universal para determinar si una ecuación diofántica tiene solución, o para encontrarlas todas si existen soluciones. Sin embargo, tenemos bastante éxito al tratar con polinomios de bajo grado o con un pequeño número de variables.

- Jacobson y Williams (2009):

> Una ecuación Diofántica es una ecuación indeterminada cuyas incógnitas solo pueden asumir valores enteros$*$ o, a veces, valores racionales. El estudio de tales ecuaciones se remonta a la antigüedad; de hecho, llevan el nombre de Diophantus de Alejandría (c. 200-284 d.C.) en honor a su trabajo en ellas. Sin embargo, es muy probable que los matemáticos griegos estuvieran investigando sus propiedades mucho antes de esto. Tomemos un ejemplo sencillo, considera la ecuación:
>
> $$x^2 + ay^2 = z^2$$
>
> donde restringimos una solución (x, y, z) a ser un triplete de enteros. Todo estudiante de geometría de secundaria está familiarizado con la solución $(3, 4, 5)$, y algunos incluso conocen las soluciones adicionales $(5, 12, 13)$ y $(8, 15, 17)$. De hecho, como veremos a continuación, existe una infinitud de soluciones enteras distintas de la ecuación $[x^2+ay^2 = z^2]$ para las cuales $(x, y, z) = 1$.

- Stillwell (2010): “Las ecuaciones para las cuales se buscan soluciones enteras o racionales se llaman Diofánticas, en honor a Diophantus”.

- Weissman (2017):

Una ecuación diofántica es una ecuación que involucra enteros, variables y las operaciones elementales de suma, resta y multiplicación. Resolver una ecuación diofántica significa encontrar soluciones enteras. Una ecuación diofántica se llama lineal si las variables nunca se multiplican con variables. Por ejemplo, $2x + 3y = 17$ es una ecuación Diofántica lineal, donde $2x^2 - 7xy + y^2 = 17$ es una ecuación Diofántica cuadrática (no lineal).

Las ecuaciones diofánticas llevan el nombre del matemático griego Diophantus.

2.6.2 Definición de la Ecuación de Pell

De manera similar, la Ecuación de Pell es definida según:

- Niven et al. (1991):

  La ecuación $x^2 - dy^2 = N$, con los enteros dados d y N y las incógnitas x y y, suele llamarse Ecuación de Pell. Si d es negativo, puede tener solo un número finito de soluciones. Si d es un cuadrado perfecto, digamos $d = a^2$, la ecuación se reduce a $(x - ay)(x + ay) = N$ y nuevamente hay solo un número finito de soluciones. El caso más interesante de la ecuación surge cuando d es un entero positivo que no es un cuadrado perfecto. Para este caso, las fracciones continuas simples son muy útiles.

- Jacobson y Williams (2009):

> La ecuación Diofántica
>
> $$T^2 - DU^2 = 1$$
>
> es llamada Ecuación de Pell.

es importante destacar que antes de dar está definición, realiza un desarrollo de cómo obtener la misma a partir de la ecuación Diofántica $x^2 + ay^2 = z^2$. En donde "Por lo tanto, abordaremos esta ecuación de otra manera. No hay pérdida de generalidad al asumir que $a < 0$ y que $-a$ no es un cuadrado perfecto (esto nos llevaría de nuevo al problema de resolver $[x^2 + ay^2 = z^2]$). Denominaremos $-a$ como D".

- Lenstra (2008):

> La Ecuación de Pell es la ecuación
>
> $$x^2 - Dy^2 = 1$$
>
> que debe resolverse en enteros positivos x, y para un número entero no nulo d dado.

- Stillwell (2010):

> La ecuación diofántica $x^2 - Ny^2 = 1$ donde N es un número entero no cuadrado, es conocida como la Ecuación de Pell porque Euler atribuyó erróneamente una solución de esta a John Pell, un matemático inglés del siglo XVII (debería haber sido atribuida a Brouncker).

- Weissman (2017): "Las consecuencias diofánticas incluyen la solución de la

Ecuación de Pell $x^2 - Ny^2 = 1$ para todos los valores positivos de N libre de cuadrados.”

2.6.3 Historia de la Ecuación de Pell

Existen diversos textos que relatan en gran detalle la historia de la Ecuación de Pell, debido a su importancia dentro de la Teoría de Números, entre ellos

- Whitford (1912), este libro presenta de forma muy accesible un relato histórico de la Ecuación de Pell, siendo uno de los primeros textos creados con el objetivo de compilar su historia.

- Dickson (1966), mejor descrito en el artículo de Fenster (1999):

  > En una carta de 1993 a las *Notices of the American Mathematical Society*, Irving Kaplansky señaló una omisión sorprendente en la historia de las matemáticas. “Todos saben”, afirmó Kaplansky, “que la Historia de la Teoría de los Números de Dickson cubre toda la teoría de números hasta aproximadamente 1918. ¿Verdad?” “Incorrecto”, respondió de manera contundente, “[i]ntenta buscar la reciprocidad cuadrática”. Kaplansky tiene razón. El monumental compendio de Leonard Eugene Dickson sobre la historia de la teoría de números excluye la historia de la reciprocidad cuadrática, la “joya de la corona de la teoría elemental de números”.

  el cual posee un capítulo dedicado a la Ecuación de Pell, donde detalla cada resultado (importante) obtenido a lo largo de la historia.

- Chahal (2004), artículo que señala la importancia de la Ecuación de Pell y su relación con diversos temas matemáticos.

- Weil (2007), breve reseña histórica de los principales resultados de la Teoría de Números[41], donde la Ecuación de Pell no es el centro de atención pero igual es estudiado.

- Jacobson y Williams (2009), que en sus propias palabras:

  > El propósito de este libro es ofrecer una discusión integral sobre cómo encontrar la solución fundamental y, en particular, describir los métodos desarrollados desde 1972 para valores grandes de D. Dado que gran parte de este material está disperso en la literatura, este será el primer libro en abordar este tema en detalle. El componente principal de nuestra investigación será técnicas computacionales, pero para derivarlas, será necesario desarrollar la teoría requerida. En este proceso, exploraremos una gran variedad de temas en teoría de números, algunos de los cuales se pueden encontrar en el índice.

- Stillwell (2010), ofrece una visión única de las matemáticas de pregrado. Cuanta con variós capítulos de Teoría de Números.

- Curd (2014), que dedica uno de tres apartados de su tesis doctoral para presenta la historia de la Ecuación de Pell en orden cronológico inverso.

- Lemmermeyer (2023), contiene una detallada exposición sobre el desarrollo de la Teoría de Números, siendo una muy buena referencia para esta, aunque los contenidos de Ecuación de Pell son mínimos.

Para efectos prácticos, se usarán principalmente los textos de Jacobson y Williams (2009), Lemmermeyer (2023) y Stillwell (2010) para mostrar un breve resumen

[41]Tras una breve revisión bibliográfica se pudo notar que es el más referenciado en otras investigaciones matemáticas actualmente.

histórico de la Ecuación de Pell. En el caso de que se busque una cronología completa de esta se sugiere el texto de Dickson (1966).

Como breve resumen, se seguirá el mismo proceso que en el Apartado 2.4. De esta manera, comenzando con Stillwell (2010):

La ecuación diofántica $x^2 - Ny^2 = 1$, donde N es un entero no cuadrado, se conoce como la Ecuación de Pell porque Euler atribuyó erróneamente una solución de esta al matemático inglés del siglo XVII Pell (debería haberse atribuido a Brouncker). La Ecuación de Pell es probablemente la ecuación diofántica más conocida después de la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$ para triples pitagóricos, y de alguna manera es más importante. Resolver la Ecuación de Pell es el paso principal en la solución de la ecuación diofántica cuadrática general en dos variables (ver, por ejemplo, Gelfond 1961), y también una herramienta clave para demostrar el teorema de Matiyasevich mencionado en la Sección 1.3 de que no hay un algoritmo para resolver todas las ecuaciones diofánticas (ver, por ejemplo, Davis 1973 o Jones y Matiyasevich 1991). A la luz de esto, es apropiado que la Ecuación de Pell haga su primera aparición en los fundamentos de las matemáticas griegas, y es impresionante ver cuánto la entendían los griegos.

La instancia más simple de la Ecuación de Pell:

$$x^2 - Ny^2 = 1,$$

fue estudiada por los pitagóricos en relación con $\sqrt{2}$. Si x e y son soluciones grandes de esta ecuación, entonces $x/y \approx \sqrt{2}$, y de hecho los pitagóricos encontraron una manera de generar soluciones cada vez más grandes mediante relaciones recursivas.

$$x_{n+1} = x_n + 2y_n, \quad y_{n+1} = x_n + y_n.$$

Un breve cálculo muestra que

$$\frac{x_{n+1}^2}{2y_{n+1}^2} - \frac{x_n^2}{2y_n^2} = \left(\frac{x_n^2}{2y_n^2}\right)^{-1}.$$

Entonces, si (x_n, y_n) satisface $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, entonces (x_{n+1}, y_{n+1}) satisface $x^2 - 2y^2 = \mp 1$.

Comenzando con la solución trivial $(x_0, y_0) = (1, 0)$ de $x^2 - 2y^2 = 1$, obtenemos sucesivamente soluciones más grandes $(x_2, y_2), (x_4, y_4), \ldots$ de la ecuación $x^2 - 2y^2 = 1$. (Los pares (x_n, y_n) eran conocidos como *números laterales y diagonales* porque la razón $\frac{y_n}{x_n}$ tiende a ser la misma que la del lado y la diagonal en un cuadrado).

Muchas otras instancias de la Ecuación de Pell, $x^2 - Ny^2 = 1$, aparecen en las matemáticas griegas, y estas pueden entenderse de manera similar aplicando la antifairesis al rectángulo con lados 1, $\sqrt{N}$. En el siglo VII d.C., el matemático indio Brahmagupta dio una relación de recurrencia para generar soluciones de $x^2 - Ny^2 = 1$, como veremos en [en su momento]. Los indios llamaron al algoritmo euclidiano la "trituradora" porque descompone los números en fragmentos cada vez más pequeños. Para obtener una recurrencia, es necesario saber que un rectángulo proporcional al original eventualmente vuelve a ocurrir, un hecho que fue demostrado rigurosamente solo en 1768 por Lagrange. El trabajo posterior en la Ecuación de Pell por parte de los europeos, que comenzó en el siglo XVII con Brouncker y otros, se basó en la fracción continua para $\sqrt{N}$., aunque esto es equivalente a la [antifairesis].

Un aspecto interesante de la teoría es la relación muy irregular entre N y el número de pasos de la antifairesis antes de que un rectángulo proporcional al original vuelva a ocurrir. Si el número de pasos es grande, la solución no trivial más pequeña de $x^2 - 2Ny^2 = 1$ es enorme. Un ejemplo famoso es el llamado problema del ganado de Arquímedes (287–212 a.C.). Este problema conduce a la ecuación

$$2x^2 - 4729494y^2 = 1,$$

cuya solución más pequeña, encontrada por Krummbiegel y Amthor (1880), ¡tiene 206,545 dígitos!

Un artículo reciente sobre el problema del ganado, Lenstra (2008), presenta una forma notablemente condensada de la solución: "por primera vez en la historia, todas las infinitas soluciones al problema del ganado se muestran en una pequeña y útil tabla". En lo que respecta a las ecuaciones diofánticas lineales, las matemáticas indias y chinas son muy similares. De hecho, la semejanza es aún mayor de lo que se ha sugerido hasta ahora, ya que los problemas del resto chino también se estudiaron en la India. Esto sugiere posibles contactos y compartición de ideas. Por otro lado, las dos culturas matemáticas divergen en otros aspectos. Los chinos desarrollaron álgebra y métodos de aproximación para ecuaciones de alto grado, pero no soluciones enteras para ecuaciones no lineales (excepto la ecuación pitagórica). Los indios progresaron menos en álgebra, pero tuvieron un éxito sorprendente al encontrar soluciones enteras de la Ecuación de Pell, el primer avance importante en teoría de números desde Diophantus.

El autor de este avance fue Brahmagupta, cuya obra "Brahma-sphuta-siddhanta" del 628 d.C. se puede leer en la traducción al inglés de Colebrooke (1817). El tratamiento de Brahmagupta de la Ecuación de Pell $x^2 - Ny^2 = 1$, donde N es un entero no cuadrado, se basa en su descubrimiento (ver Colebrooke (1817), p. 363) de que

$$(x_1^2 - Ny_1^2)(x_2^2 - Ny_2^2) = (x_1x_2 + Ny_1y_2)^2 - 2N(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Esta identidad generaliza la identidad descubierta por Diophantus

$$(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = (x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1),$$

a la cual volveremos más adelante[42] en relación con los números complejos. Al igual que la identidad de Diophantus, la de Brahmagupta se verifica fácilmente multiplicando ambos lados, aunque no es fácil descubrirla en primer lugar.

Brahmagupta utilizó su identidad para encontrar soluciones de

$$x^2 - Ny^2 = 1$$

mediante una secuencia de ecuaciones de la forma

$$x^2 - Ny^2 = k_i.$$

Su identidad muestra que si

$$x = x_1, \quad y = y_1 \quad \text{es una solución de} \quad x^2 - Ny^2 = k_1$$

[42] en el material original

y

$$x = x_2, \quad y = y_2 \quad \text{es una solución de} \quad x^2 - Ny^2 = k_2$$

Entonces

$$x = x_1x_2 + Ny_1y_2, \quad y = x_1y_2 + x_2y_1 \quad \text{es una solución de} \quad x^2 - Ny^2 = k_1k_2.$$

Esto se llama *composición* de los triples (x_1, y_1, k_1) y (x_2, y_2, k_2) para formar el triple $(x_1x_2 + Ny_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1, k_1k_2)$.

Brahmagupta encontró soluciones enteras para muchas ecuaciones de Pell $x^2-Ny^2 = 1$ mediante su método de composición, pero no pudo aplicarlo uniformemente para todos los valores de N. Lo mejor que pudo hacer fue mostrar que si $x^2 - Ny^2 = k$ tiene una solución entera para $k = \pm1, \pm2$ o ±4, entonces $x^2 - Ny^2 = 1$ también tiene una solución entera. Sus demostraciones de que la composición tiene éxito en estos casos se pueden encontrar en Srinivasiengar (1967), p. 111.

El primer método general para resolver la Ecuación de Pell fue dado por Bhaskara II en su "Bījaganita" de 1150 d.C. Completó el programa de Brahmagupta al proporcionar un método, llamado el "cakravala" o *proceso cíclico*, que siempre tiene éxito en encontrar enteros x, y, k con $x^2 - Ny^2 = k$ y $k = \pm1, \pm2$ o ±4. Es cierto que, Bhāskara II no proporcionó una prueba de que el proceso cíclico siempre funciona, esto fue hecho por primera vez por Lagrange (1768), pero de hecho lo hace. Una prueba utilizando solo conceptos accesibles a Bhāskara II se puede encontrar en Weil (1984), p. 22.

A continuación se sigue la historia en base a lo expuesto en el libro de Jacobson y Williams (2009).

La historia de la Ecuación de Pell se reanuda [en Occidente] con el desafío lanzado en 1657 a Frénicle en particular y a los matemáticos en general por Fermat. Fermat probablemente, a través de su investigación, llegó a reconocer la naturaleza fundamental de la Ecuación de Pell. Solicita una prueba de la siguiente afirmación:

Dado cualquier número [positivo] [D] que no sea un cuadrado, también se dan un número infinito de cuadrados de tal manera que, si el cuadrado se multiplica por el número dado y se le suma la unidad al producto, el resultado es un cuadrado. Luego solicita una regla general por la cual se puedan determinar soluciones del problema y, como ejemplos, solicita soluciones cuando $D = 109, 149, 433$. La historia de cómo Brouncker y Wallis respondieron a la segunda parte de este desafío ha sido muy bien contada por Weil y Mahoney y no necesita elaboración aquí.

Brouncker utilizó su método para encontrar soluciones de varias ecuaciones de Pell difíciles, incluida $x^2 - 433y^2 = 1$. Este fue un logro importante en cálculos, ya que el valor de y es un número de 19 dígitos. Sin embargo, ni él ni Wallis ni Frénicle pudieron proporcionar una prueba de que la Ecuación de Pell siempre pudiera resolverse (no trivialmente) para cualquier valor positivo libre de cuadrados de D. Fermat se percató de esto y afirmó que tenía tal demostración "mediante un *descenso* debidamente y adecuadamente aplicado". Desafortunadamente, Fermat no proporcionó más información que esto sobre su demostración. Hofmann y, con más éxito, Weil, han intentado reconstruir cómo podría haber sido el método de Fermat. Aunque es posible que nunca sepamos realmente cuál fue, es muy probable que Fermat tuviera una prueba. El hecho de que seleccionara 109, 149 y 433 como ejemplos desafiantes es particularmente sugestivo porque las ecuaciones de Pell correspondientes tienen valores grandes de t y u.

El método de Brouncker fue modificado y extendido por Euler, quien se dio cuenta de que, como es evidente en [la ecuación anterior][43], las fracciones continuas podrían usarse para proporcionar un algoritmo eficiente para resolver la Ecuación de Pell. Sin embargo, aunque había ideado todas las herramientas importantes, no logró demostrar que su método funcionaría para cualquier D libre de cuadrados. Como se mencionó anteriormente, el desarrollo de tal técnica fue realizado por primera vez por Lagrange en un trabajo bastante torpe, que luego mejoró. Para obtener más información sobre esta parte particularmente interesante de la historia matemática, se remite al libro de Weil.

Aunque las técnicas de los matemáticos indios y las de Brouncker, Euler y Lagrange para resolver la Ecuación de Pell son diferentes en cierta medida, todas pueden unificarse al considerar la teoría de lo que se llaman fracciones continuas semirregulares.

2.6.4 Problemas y teoremas interesantes encontrados en la revisión bibliográfica

Cada uno de los siguientes problemas, teoremas, proposiciones y lemas, es mencionado solamente, su fuente y demostración se encuentra en las citas al costado del nombre.

2.6.4.1 Solución geométrica

Del segundo libro[44] de Euclides.

Proposición 2.1 (Heath et al., 1956). *Si una línea recta se corta en segmentos iguales y desiguales, entonces la suma de los cuadrados de los segmentos desiguales del todo es el doble de la suma del cuadrado de la mitad y del cuadrado de la línea*

[43] Jacobson reconstruye la demostración de Brouncker y aquí hace mención a una parte de ella, pero no es posible citarla sin citar tal demostración, que escapa al interés de este trabajo de titulación.

[44] Notar que en la antigüedad lo que llamamos libro actualmente se podría considerar como un capítulo.

recta entre los puntos de la sección

2.6.4.2 Solución general

La siguiente identidad es la de Brahmagupta:

Identidad 2.2 (Weil, 2007). *Sean x, y enteros,*

$$(x^2 - Ny^2)(z^2 - Nt^2) = (xz \pm Nyt)^2 - N(xt \pm yz)^2$$

donde N es un entero positivo.

El siguiente es el Lema de Brahmagupta

Lema 2.3 (Jacobson y Williams, 2009). *Si (a, b) y (a', b') son soluciones de las ecuaciones*

$$x^2 - Dy^2 = k \quad y \quad x^2 - Dy^2 = k'$$

respectivamente, entonces

$$(aa' + Dbb', ab' + ba')$$

es solución de

$$x^2 - Dy^2 = kk'.$$

2.6.4.3 Estructura de grupo

Definición 2.4 (Castillo, 2012). Definimos

$$\mathcal{C}_d(\mathbb{K}) = \{(x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} | x^2 - dy^2 - 1 = 0$$

que es un conjunto algebraico formado por las soluciones en $\mathbb{K}$ de la Ecuación de Pell.

Definición 2.5 (Castillo, 2012). Sea $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$ dos puntos en $\mathcal{C}_d(\mathbb{K})$. Definimos una operación de adición entre P y Q por

$$P \oplus Q = (p_1q_1 + dp_2q_2, p_1q_2 + p_2q_1)$$

Proposición 2.6 (Castillo, 2012).

- *El conjunto $\mathcal{C}_d(\mathbb{K})$ con la operación $\oplus$ es un grupo.*
- *$\mathcal{C}_d(\mathbb{K})$ es un subgrupo de $\mathcal{C}_d(\mathbb{Q})$.*

2.6.5 Problema del ganado de Arquímides

Problema 2.6.1 (Lenstra, 2008). El ganado del dios Sol, amigo, aplica tu atención para contar su número, si posees la porción de sabiduría. Pastaron antaño en el suelo de Trinacria,

la isla de Sicilia, divididos en cuatro,

color por color: una manada blanca como la crema,

la siguiente con capas resplandecientes de negro brillo,

la tercera de piel marrón y la última manchada.

Cada manada tenía toros con un poder sin igual,

en estas proporciones: cuenta la mitad de los de negro,

añade un tercio más, luego incluye a todos los marrones;

así, amigo, podrás decir el número de toros blancos.

Los negros también superaban a los marrones,

ahora por una cuarta y quinta parte de los manchados.

Para conocer a los manchados, todos los toros restantes,

vuelve a contar los toros marrones y únelos

con una sexta y séptima parte de los blancos.

Entre las vacas, el relato de las plateadas,

cuando se compara con toros y vacas de negro,

es precisamente uno de cada tres más uno de cada cuatro.

Las vacas negras contaban uno de cada cuatro una vez más,

y ahora una quinta parte, de la raza moteada,

cuando, junto con los toros, salían a pastar.

Las vacas moteadas sumaban una quinta y sexta parte

de todos los de pelo marrón, machos y hembras mezclados.

Por último, las vacas marrones sumaban la mitad de una tercera

y una séptima parte de la manada plateada.

Si puedes decir infaliblemente cuántas cabezas

poseía el Sol, amigo, tantos toros bien alimentados

como vacas de cada color, nadie negará

que tienes el arte y la habilidad de los números,

aunque aún no te contarás entre los sabios.

¡Pero ven! también reconoce lo siguiente.

Cuando los toros blancos del dios Sol se unían a los negros,

su multitud se reunía en un grupo

de igual longitud y anchura, llenando cuadradamente

el territorio amplio y largo de Trinacia.

Pero cuando los toros marrones se mezclaban con los moteados,

en filas creciendo desde uno se recopilaban,

formando un triángulo perfecto, sin

ningún toro de color diferente y ninguno de sobra.

Amigo, ¿puedes analizar esto en tu mente,

y de estas masas encontrar todas las medidas,

sal glorioso! ten la seguridad de que todos consideran

tu sabiduría en esta disciplina como suprema.

Otro lugar en donde se puede encontrar este problema es en Jacobson y Williams (2009)

2.6.5.1 Aproximación de la raíz cuadrada

Teorema 2.7 (Jacobson y Williams, 2009). *Si* $x, y, D, n \in \mathbb{Z}$; $D, x, y > 0$; $\sqrt{D} \notin \mathbb{Q}$; $|n| < \sqrt{D}$; *y*

$$x^2 - Dy^2 = n,$$

entonces x/y *converge en la expansión fraccional continua simple de* $\sqrt{D}$.

Teorema 2.8. *Si x y y son grandes enteros positivos para los cuales $x^2 - dy^2 = 1$, entonces*

$$\left|\frac{x}{y} - \sqrt{d}\right| = \frac{1}{y|x + y\sqrt{d}|}$$

será muy pequeña. Esto significa que x/y estará cerca de $\sqrt{d}$ por lo que deberíamos estar viendo aproximaciones racionales cercanas a $\sqrt{d}$.

2.6.5.2 Las soluciones de la Ecuación de Pell siempre son enteras

El siguiente es el Teorema de Aproximación de Dirichlet,

Teorema 2.9 (Stillwell, 2010). *Para cualquier número irracional α y cualquier entero $Q > 1$ hay enteros positivos p y q con $0 < q < Q$ y $|q\alpha - p| \leq 1/Q$.*

Teorema 2.10 (Stillwell, 2010). *La Ecuación de Pell $x^2 - Dy^2 = 1$ siempre tiene una solución entera.*

2.7 Secuencia didáctica

Con respecto a que es una secuencia didáctica y como se puede realizar una secuencia didáctica, se presentan dos autores que trabajaron este tema.

2.7.1 Rodriguez Reyes

Rodríguez-Reyes (2014) menciona que “Las secuencias de actividades o secuencias didácticas consisten en una sucesión de actividades previamente pensadas que dan orden y lógica a los procesos de enseñanza y acompañados con modelos de aprendizaje dan sentido a la asimilación y comprensión de los contenidos diseñadas por el docente”.

Además, Rodríguez-Reyes presenta la siguiente manera para poder elaborar secuencias didácticas, en donde se debe tener en consideración las competencias, los propósitos y los aprendizajes esperados, también requerir de la transversalidad, la formación situada y los principios pedagógicos de la planificación.

Por lo que para poder realizar esta planificación se debe considerar un inicio, un desarrollo y un cierre, en donde las secuencias didácticas se determinan por tres momentos básicos: actividades de apertura, de desarrollo y de cierre (Rodríguez-Reyes, 2014)[45], que se muestran a continuación.

Inicio (apertura, introducción) Definido como: En estas actividades iniciales el docente controla las actividades o conocimientos previos, buscando introducir actividades iniciales como un diálogo, debate, lluvia de ideas, que facilite el conocimiento para que sirva como punto de partida de los contenidos. Son actividades diagnósticas que sirven como punto de partida de manera lógica para construir y reconstruir significados. Todavía no se sabe si las estrategias y actividades tratadas son suficientes, y si van a funcionar, pero hay que seguir trabajando y hacer las primeras intervenciones. Una de ellas es estar al tanto de construcciones en los procesos de aprendizaje a través de conflictos cognitivos y esto en cierta manera obligará al alumno a cuestionar sus conocimientos y reconsiderar su análisis, interpretación y explicación del contenido de estudio. Es necesario revisar constantemente las actividades iniciales su impacto y funcionalidad y vigilar las frecuentes necesidades e intereses de los alumnos. Es en este momento inicial donde se consideran los referentes teóricos para construir conocimientos es cuando comienzan a ajustarse los aprendizajes esperados y se hacen de manera transversal. Los ajustes que se hagan vienen identificados de acuerdo con su contenido y pueden ser: conceptual, procedimental y actitudinal.

[45] Originalmente la información aparece en un cuadro.

Cuyas actividades son

- Determina la lista de tareas y las temáticas de los contenidos.
- Utiliza las tecnologías de la información y de la comunicación.
- Realiza un diagnóstico para garantizar una enseñanza eficiente.
- Identifica y recupera saberes, conocimientos previos que tiene cada alumno en relación con los nuevos contenidos de aprendizaje (preconcepciones o preconocimientos)
- Estima lo que aprende, lo que le falta aprender e identifica en donde se puede intervenir.
- Establecer un vínculo entre lo que el alumno ya conoce y los nuevos contenidos
- Exposición del concepto
- Actividades motivadoras
- Actividades enfocadas a captar la atención de los alumnos
- Fomenta la construcción de preguntas generadoras
- Funcionalidad de los nuevos conocimientos
- Presentación de una situación problema-planteamiento del problema
- Probar un conflicto cognitivo y promover la actividad mental para que se establezcan relaciones entre los nuevos contenidos y los conocimientos previos
- Presentación del contenido
- Consulta de diversas fuentes de información y exploración bibliográfica
- Recogida, selección y clasificación de los datos de información

- Realiza un trabajo de equipo (trabajo cooperativo y colaborativo)

Desarrollo (aplicación, reestructuración, profundización) En estas actividades el grado de conocimiento es más complejo, el proceso de aprendizaje depende de la capacidad o habilidad del docente y toma control de las condiciones prácticas de los aprendizajes esperados, habrá entonces de introducir actividades. El alumno es el protagonista, será él quien haga el desarrollo de la temática a través de diversas estrategias que el docente le permita, de manera que tendrá que demostrar por medio de ciertas competencias establecidas en los propósitos y en los aprendizajes esperados. Uno de los puntos claves para este momento de secuencia es que cuando los contenidos sean más complejos la conducción de la clase sea demasiada simple.

En esta etapa de desarrollo se ubican las actividades de aprendizaje, facilita sus procesos para el logro de los aprendizajes esperados.

Papel del docente: En estas actividades el grado de conocimiento es más complejo, el proceso de aprendizaje depende de la capacidad o habilidad del docente y toma control de las condiciones prácticas de los aprendizajes esperados, habrá entonces de introducir actividades. En esta etapa de desarrollo se definen las actividades de aprendizaje que realizarán los alumnos, también se determinar las necesidades de aprendizaje, y se propone la búsqueda de información y la explicación de las actividades.

- Aplicación y ejecución de las estrategias programadas
- Existe una articulación entre los saberes el conocimiento científico.
- Contextualiza el marco de trabajo académico y vincula las ideas previas.
- Hace una selección de evidencias y productos.

- Inicia el momento de análisis y desarrollo del problema.
- Identifica las áreas de mejora y se retroalimenta.
- Elabora o construye el concepto nuevo
- Hace del contenido interesante, significativo y funcional para los alumnos
- Crea zonas de desarrollo próximo para intervenir
- Expone respuestas intuitivas o suposiciones sobre cada uno de los problemas y situaciones planteadas
- Demuestra la función conceptual-Generalización aportaciones del grupo y las conclusiones obtenidas deducen el trabajo realizado
- Búsqueda de soluciones
- Aplica actividades procedimentales
- Compara los conocimientos previos con los nuevos
- Incluir nuevas estrategias

Cierre (final, validación) La parte de la validación es el complemento de la actividad inicial y de los aprendizajes esperados, en esta se observa la determinación de los criterios de desempeño, las evidencias (evaluación mediante matrices o rúbricas) como los exámenes, escalas estimativas, listas de cotejo, portafolios, ensayos, reportes de lecturas como productos de aprendizaje. En el apartado de cierre culmina con la parte de valorar los desempeños posibles que dan cuenta del fortalecimiento de las competencias. Las evidencias son el reflejo de la planificación, también son la creatividad y la innovación, así como la intervención que tenga en los aprendizajes esperados, que determinan el balance de logros y oportunidades de mejora.

- Esta última etapa de actividades está relacionada con las actividades de evaluación
- Conclusiones. Discusión del grupo y los diferentes puntos de vista
- Notifica la valoración de los aprendizajes esperados
- Elabora síntesis en relación al aprendizaje esperado, retomando preguntas o dudas de los alumnos
- La vigilancia del conocimiento en su proceso y desarrollo hace que se aproveche y se retorne otra transversalidad
- Estimar el nivel de eficacia de la planificación.

Por último, Rodríguez-Reyes responde a la pregunta *¿Cómo se genera el desarrollo de las secuencias didácticas?* de la siguiente manera:

> Para empezar, se tienen que identificar el tipo de contenido que se está desarrollando (conceptual, procedimental, actitudinal). Cada uno de estos contenidos permitirá la forma de desarrollar la temática. Está en su interior del tema el alma del contenido
>
> La selección del contenido plantea la direccionalidad y el tratado de la temática, organiza las necesidades y armoniza las exigencias del conocimiento. La identificación del verbo formula el tipo de contenido que se va a usar en la planificación. Estas se muestran en la Taxonomía de Bloom (1956) que son una agrupación de campos de actuación.

2.7.2 Díaz Barriga

Díaz-Barriga (2014) menciona que

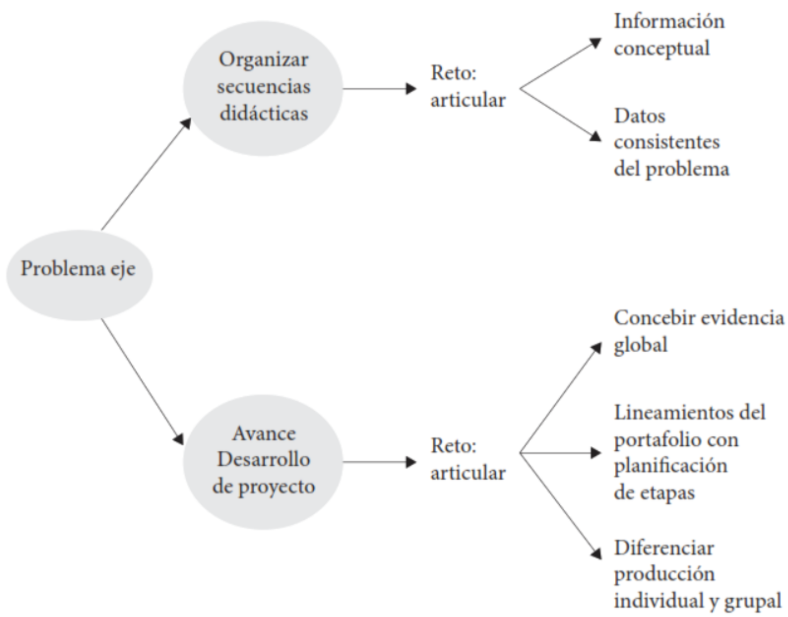


Figura 2.10: Problema-eje, elemento integrador del trabajo pedagógico (Díaz-Barriga, 2014).

> La construcción de un problema-eje en un curso permite desagregar en etapas una secuencia didáctica. Estas etapas se relacionan con la información que se requiere recuperar (conceptual, documental o personal), y se articula con saberes específicos que se requiere trabajar, partiendo de una vinculación entre elementos de la realidad seleccionados con una serie de saberes y saberes hacer. Es en este punto donde se construyen las secuencias didácticas con un carácter indicativo, pues es en la interacción de los alumnos con el problema.

Lo cual es resumido en la Figura 2.10.

Así es como nos menciona que toda planeación es una propuesta que invita a que se realicen ajustes permanentes, a medida que la interacción educativa lo va demandando, por lo que una planeación abierta permite hacer ajustes, correcciones y cambios, lo que enriquece el trabajo del docente y alumnos, así como la misma experiencia docente, esto es lo que el autor gráfica en la Figura 2.11.

De esta manera, Díaz-Barriga (2014) sintetiza el gráfico en lo siguiente

> Dos elementos caracterizan este modelo: la interacción que existe entre todos sus elementos, y la ausencia de algo que predetermine lo que hay que realizar. Permite simplificar la desagregación de competencias, al centrar la tarea en la articulación de las competencias generales del plan de estudios o del curso con un problema-eje y con saberes y saberes hacer.

2.8 Transposición didáctica

Según Chevallard (1998) en su libro nos da las siguientes definiciones de transposición didáctica:

- Todo proyecto social de enseñanza y de aprendizaje se constituye dialécticamente con la identificación y la designación de contenidos de saberes como contenidos a enseñar.
- Los contenidos de saberes designados como aquellos a enseñar (explícitamente: en los programas; implícitamente: por la tradición, evolutiva, de la interpretación de los programas), en general preexisten al movimiento que los designa como tales. Sin embargo, algunas veces (y por lo menos más a menudo de lo que se podría creer) son verdaderas oraciones didácticas, suscitadas por las "necesidades de la enseñanza". (Así ocurrió, por ejemplo, en la enseñanza secundaria francesa. con el "gran coseno" y el "gran seno").
- Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a

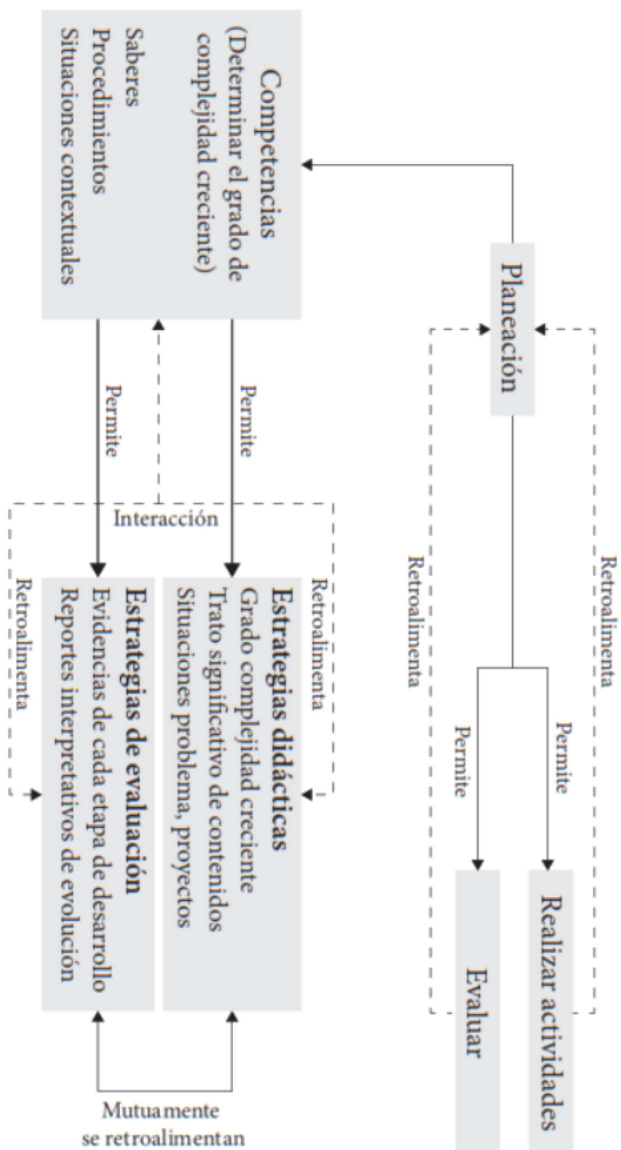


Figura 2.11: Modelo de planeación dinámica en un enfoque de competencias (Díaz-Barriga, 2014).

Figura 2.12: Diagrama de la transposición didáctica encontrado en Chevallard (1998)

hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El "trabajo" que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza; es denominado la transposición didáctica.

- La transformación de un contenido de un contenido de saber preciso en una visión didáctica de ese objeto de saber puede denominarse más apropiadamente "transposición didáctica *stricto sensu*". Pero el estudio científico del proceso de transposición didáctica (que es una dimensión fundamental de la didáctica de las matemáticas) supone tener en cuenta la transposición didáctica *sensu lato* representada por el [siguiente] esquema de enseñanza [(ver Figura 2.12)].

Chevallard explica dicho esquema de la siguiente manera: "en el primer eslabón muestra el paso de lo implícito a lo explicito, de la practica a la teoría, también de lo preconstruido a lo construido". A modo de ejemplo para explicar el esquema anterior nos muestra la siguiente situación:

- la noción de *distancia* (entre dos puntos) se utiliza es posiblemente "desde siempre";
- el *concepto matemático* de distancia es introducido en 1906 por Maurice Fréchet (objeto de saber matemático);
- en el primer ciclo de la enseñanza secundaria francesa, la noción matemática de distancia, surgida de la definición de Fréchet aparece en 1971 en el programa de la clase de cuarto curso (objeto a enseñar);

- su tratamiento didáctico varía con los años a partir de su designación como objeto a enseñar: continúa el "trabajo" de transposición.

Además, Solarte (2006),

> La transposición didáctica vista como una transformación de un contenido del saber sabio (saber científico) a una versión comprensible para la enseñanza denominada saber a enseñar, el cual a su vez sufre un conjunto de nuevas transformaciones hasta hacerse objeto de enseñanza. Un contenido del saber enseñable al ser adaptado por la transposición didáctica para convertirse en un saber a enseñar sufre un conjunto de transformaciones y adaptaciones que lo hacen apto como objeto de enseñanza. El proceso que transforma un objeto de saber sabio, en objeto enseñable, es denominado transposición didáctica.

Esto puede ser resumido de la siguiente manera que muestra la figura Figura 2.13.

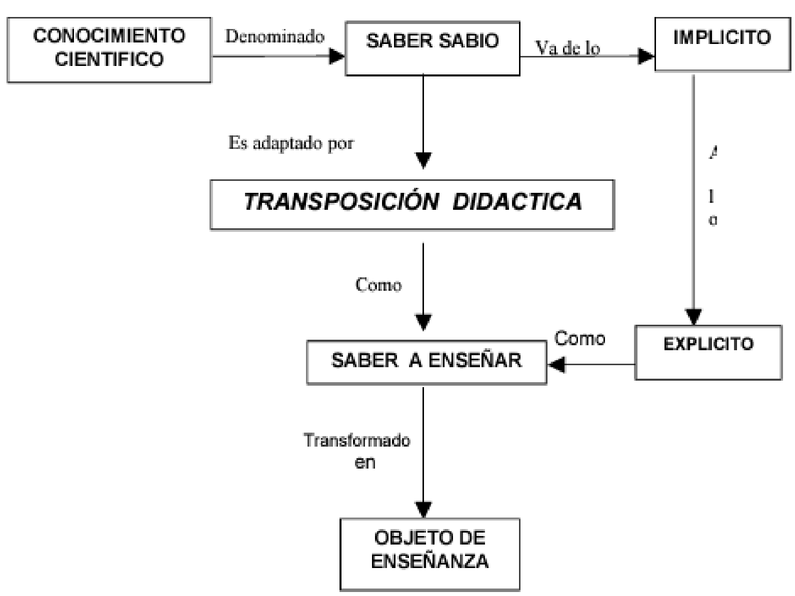


Figura 2.13: El papel de la transposición didáctica (Solarte, 2006)

Figura 2.14: Niveles de transposición (Solarte, 2006)

> Verret, autor de la teoría de transposición considera, que la transposición tiene distintos niveles: Un primer nivel que se da como una mediación entre el conocimiento científico (erudito) y el conocimiento a enseñar. Y un segundo nivel, dado entre el conocimiento a enseñar y el conocimiento enseñado

Estos niveles pueden ser visualizados de mejor manera en la figura Figura 2.14.

Ahora dando un enfoque a los procesos o operaciones que realizar para lograr una transposición didáctica, daremos las definiciones de Ramírez Bravo (2005).

En donde Ramírez Bravo nos presenta algunos pasos a seguir como, seleccionar, reducir, simplificar y reformular, cada una presentada a continuación

- **Seleccionar**: esta etapa consiste en la elección y extracción de temas disciplinares de un conjunto de saberes mayor. Este proceso de distinción o discriminación de saberes no es arbitrario, sino que se realiza en relación con unos principios sociopolíticos fundamentales del contexto en el que se encuentra. Así mismo, este proceso de clasificación guarda correspondencia con la calidad científica requerida para el proceso didáctico que se desea desarrollar. Dicho de otra manera, se trata de elegir, principios y teorías correspondientes a unas disciplinas que se ajusten a los objetivos de la disciplina y a las condiciones socioculturales del estudiante.
- **Reducir**: en esta etapa hay que tener mucho cuidado, porque de la reducción se

puede llegar fácilmente al reduccionismo, hay que tener cuidado con simplemente comprimir temáticas o teorías, sino de condensar o abreviar los saberes sabios para ajustarlos a las perspectivas didácticas del contexto.

La reducción se ejecuta en función de conexiones lógicas entre enunciados empíricamente confirmados. En esta condensación lógica se asumen las correspondencias proposicionales y la reducción ontológica en la que se tiene en cuenta el concepto de persona y de sus reflexiones, sus principios y sus propiedades.

> En todo caso, esta reducción e integración del conocimiento parte de hechos conceptuales que se han generado en el seno de grupos de investigadores, con diferente formación intelectual y con diversos propósitos, pero influidos en mayor o menor medida por los grupos disciplinares.

- **Simplificar**: en esta operación se realiza formas en la que las teorías son más comprensibles, en este proceso podemos encontrar simplificación sintáctica o economía de proposiciones o de teorías; simplificación semántica o clarificación y sencillez en los supuestos y las proposiciones; simplificación epistemológica o mediatización de los supuestos y de las teorías trascendentales (permite obtener lo máximo de lo mínimo), y simplificación pragmática o economía y rentabilidad de trabajo.

- **Reformular**: en esta etapa es donde se reescribe el texto, en donde se reformulan los contenidos científicos en términos de contenidos que sean enseñables, identificando insuficiencias estructurales y conceptuales. Esta reformulación tiene por objeto mejorar, restablecer y volver infinitamente mejorable los contenidos.

A modo de resumen, Ramírez Bravo señala que:

> En el contexto pedagógico, las anteriores operaciones no se desarrollan en solitario o de manera independiente, a la vez que se diferencian, se integran y se complementan, y permiten que la TD sea un proceso integral que tiene en cuenta desde el contexto político nacional (e internacional) hasta el contexto del aula las necesidades y expectativas del estudiante.

Lo cual también representa en la Figura 2.15.

2.9 Planteamiento de problemas

2.9.1 Definición

En relación al formulación o planteamiento de problemas[46], Stoyanova y Ellerton (1996), como es citado textualmente en Malaspina et al. (2015)[47], resumen el significado de crear problemas matemáticos desde diferentes puntos de vista:

> La formulación de problemas ha sido considerada como la creación de un nuevo problema o la reformulación de un problema dado (Duncer, 1945); como la formulación de una secuencia de problemas matemáticos a partir de una situación dada (Shukkwan, 1993); o como una actividad resultante cuando un problema invita a la generación de otros problemas (Mamona Downs, 1993). Dillon (1982) conceptualizó el 'encuentro de problemas' como un proceso que resulta en un problema por resolver.
>
> Silver (1993, 1995) se refirió al planteamiento de problemas como la creación de un nuevo problema a partir de una situación o experiencia, o la reformulación de problemas dados (p. 518).

[46]En inglés *problem posing*.
[47]Aunque igual se revisó el material original.

Figura 2.15: Contexto inmediato y general de la transposición didáctica (Ramírez Bravo, 2005).

por su parte, y recientemente, Singer y Voica (2015) sintetiza de manera similar las definiciones de formulación de un problema:

> Hay diferentes términos que se utilizan en referencia a el planteamiento de problemas [(problem posing)][48], tales como encontrar problemas, percibir problemas, formular problemas [(problem formulating)], descubrimiento creativo de problemas, problematizar, crear problemas e imaginar problemas (Dillon, 1982; Jay & Perkins, 1997). Debido a esta variedad de significados, diferentes autores utilizan diferentes marcos de estudio para analizar las actividades de formulación de problemas. Por ejemplo, Brown y Walter (1983/1990) examinaron la formulación de problemas dentro de una estrategia centrada en la frase "¿Y si no?". Esta estrategia asume que, al discutir la importancia de los componentes del problema y al intentar modificarlos, los estudiantes pueden obtener una comprensión más profunda del problema, en lugar de simplemente centrarse en encontrar la solución.

Finalmente, a partir de lo dicho por Malaspina et al. (2015) parafraseando a Silver presente anteriormente, "consideramos que formular problemas[49] matemáticos es un proceso mediante el cual se genera un nuevo problema a partir de uno dado (variación del problema) o un nuevo problema a partir de una situación (elaboración del problema), ya sea real o imaginaria".

[48]Como aparecen ambos en el texto original, decidí usar planteamiento para posing y formulación para formulating, aunque en la literatura en español se presenta de ambas maneras.

[49]*problem posing.*

2.9.2 Literatura

En relación a lo anterior, la literatura hace mención de una falta de material para su cómo, según

> existe una falta de investigación que se centra en la formulación de problemas en los libros de texto que los estudiantes y profesores realmente utilizan, en contraste con los marcos curriculares en los que se basan esos libros de texto. ¿Cómo se ha reflejado la inclusión de la formulación de problemas en los marcos curriculares en los libros de texto reales? Dada la variedad de formas de involucrar a los estudiantes en algún tipo de formulación de problemas, ¿cómo incorporan exactamente los libros de texto la formulación de problemas? ¿Qué tipos de decisiones han tomado los escritores de libros de texto y los desarrolladores de currículos al crear los materiales existentes? Para comenzar a abordar estas preguntas, este estudio adoptó una perspectiva internacional para examinar cuatro series de libros de texto de matemáticas, dos de las cuales se utilizan en China y dos en los Estados Unidos. Las cuatro series se basan en estándares de currículo de reforma de sus respectivos países (Ministerio de Educación de China, 2001a; NCTM, 2000), que incluyen la formulación de problemas como un elemento importante. (actualmente)

De igual manera, Pino-Fan et al. (2020):

> Una de las líneas de investigación que ha sido intensamente estudiada por la comunidad internacional de investigación sobre didáctica de la matemática, es la resolución de problemas (Problem Solving), la cual explora características cognitivas, afectivas y actitudinales de los estu-

> diantes cuando resuelven problemas de matemáticas (Felmer, Pehkonen & Kilpatrick, 2016; Liljedahl, Santos-Trigo, Malaspina & Bruder, 2016). Sin embargo, poco énfasis se le ha dado al estudio de cómo los profesores hacen el planteamiento de esos problemas, o sobre qué competencias y conocimientos requieren para el planteamiento o diseño de estos mismos (Singer, Ellerton, & Cai, 2015), aun cuando el profesor es el vehículo que hace diseño de clase dentro de lo que se contempla el planteamiento de problemas– (Foster & Inglis, 2017).

Realizando un breve análisis bibliográfico tenemos que…

Para efectos prácticos, en la investigación Chen et al. (2015), en la cual "proponen un diseño de experimento para potenciar el desarrollo de las habilidades de planteamiento y resolución de problemas, las creencias y la actitud de los estudiantes chinos de quinto grado." Singer y Voica (2015), donde:

> Durante el proceso de plantear un problema, a los estudiantes se les entregó una tarjeta de instrucciones, como se muestra en la Figura, con instrucciones de estructuración que debían seguir secuencialmente. Esta tarjeta se utilizó inicialmente de manera intensiva y sistemática, y se retiró gradualmente a medida que los estudiantes comenzaron a interiorizar su contenido.

dicha figura, traducida y transcrita, posee la siguiente información

Pasos para el planteamiento de problemas

1. Comprender la tarea de planteamiento de problemas. Identificar la categoría de la tarea de planteamiento de problemas presentada.

- Categoría 1: Generar nuevos problemas a partir de una situación de planteamiento de problemas.
- Categoría 2: Transformar un problema dado en nuevos problemas.

2. Comprender la tarea de planteamiento de problemas.
3. Identificar la categoría de la tarea de planteamiento de problemas presentada.
    - Categoría 1: Generar nuevos problemas a partir de una situación de planteamiento de problemas.
    - Categoría 2: Transformar un problema dado en nuevos problemas.
4. Plantear nuevos problemas aplicando estrategias de planteamiento de problemas apropiadas.
    - Categoría 1: Generar nuevos problemas a partir de una situación de planteamiento de problemas.

      Pensar en una pregunta que te harías a ti mismo si estuvieras realmente en esa situación.

      Reflexionar sobre diferentes tipos de problemas verbales aditivos o multiplicativos que hayas aprendido.
    - Categoría 2: Transformar un problema dado en nuevos problemas.

      Intentar invertir conocidos y desconocidos.

      Intentar agregar más conocidos y/o más restricciones.

      Intentar aplicar la estrategia del "¿y si no?".
5. Evaluar los problemas planteados.

- ¿Es el problema un problema matemáticamente resoluble?
- ¿La redacción del problema es lo suficientemente clara?
- ¿El problema es lo suficientemente interesante?
- ¿El problema es lo suficientemente original?
- ¿El problema es lo suficientemente complejo?
- ¿El problema es lo suficientemente realista?

Capítulo 3

Marco Metodológico: Diseño de la Propuesta Didáctica

El trabajo de (Etkin et al., 2022) y Hernández Sampieri y Mendoza Torres (2018) aborda la metodología de investigación, definiéndola como el proceso científico de recopilación, ordenamiento y análisis de información para la comprobación de hipótesis. Se distinguen dos enfoques básicos: cualitativo, que profundiza en la interpretación de datos sin mediciones numéricas, y cuantitativo, que se basa en mediciones numéricas. Además, se presenta un enfoque mixto que combina ambos métodos.

En relación a lo anterior, y para efectos prácticos, Hernández Sampieri y Mendoza Torres (2018) caracteriza y compara los enfoques cuantitativo y cualitativos, de la Tabla 3.1.

Con el fin de llevar a cabo este estudio, se optará por un enfoque cualitativo con el propósito de diseñar y validar guías de trabajo. Estas guías estarán alineadas con las Bases Curriculares y se centrarán en el desarrollo de la habilidad de resolución

Ruta Cuantitativa	Procesos fundamentales	Ruta cualitativa
Específico, acotado, centrado en variables medibles u observables. Orientado a describir, relacionar, predecir y explicar. Se afina en base a la revisión analítica de la literatura.	Planteamiento del problema	Abierto, emergente y que se enfoca conforme se desarrolla el proceso en cuestiones que nos permitan entender el fenómeno estudiado. Orientado hacia explorar, describir y comprender. Se afina en base a las experiencias y a la revisión analítica de la literatura.
Direcciona el proceso y justifica el planteamiento y la necesidad del estudio. Se guía por variables de búsqueda significativas incluidas en el planteamiento.	Revisión de la literatura	Contextualiza al proceso y justifica el planteamiento y la necesidad del estudio. Se guía por conceptos de búsqueda significativos incluidos en el planteamiento y la experiencia inicial con el fenómeno.
Se establecen antes de recolectar datos y se pretende probarlas (aceptar-rechazar).	Hipótesis	Emergentes (se generan y cobran sentido durante el estudio).
Preestablecidos y se implementan al pie de la letra (tal y como se planearon).	Diseños	Emergentes, son abordajes que se aplican de acuerdo a las circunstancias.
El tamaño depende de qué tan grande y heterogénea sea la población (un número representativo de casos). Se determina a partir de fórmulas y estimaciones de probabilidad.	Muestra	El tamaño depende de que comprendamos el fenómeno bajo estudio (casos suficientes y pertinentes). La muestra se determina de acuerdo al contexto y necesidades. Comienza con una muestra inicial que puede ampliarse.
Instrumentos predeterminados y estandarizados. Antes del análisis se recaban todos los datos numéricos.	Recolección de datos	Instrumentos que se van afinando y uniformando paulatinamente. La recolección está orientada a proveer de un mayor entendimiento de los significados y experiencias de las personas.
Estadístico sobre una matriz. Los datos encajan en categorías predeterminadas. Descripción de tendencias, contraste de grupos y relación entre variables.	Análisis de los datos	Análisis temático y de narrativas usando una base de datos. Los datos generan categorías que se describen, ilustran y relacionan para proporcionar significados profundos.
Distribuciones de variables, coeficientes, tablas y figuras que relacionan variables, así como modelos matemáticos y estadísticos.	Presentación de resultados	Categorías, temas y patrones; tablas y figuras que asocian categorías, materiales simbólicos y modelos relacionales entre conceptos para comprender el fenómeno.
Basado en un estilo de publicaciones, estándar, tono impersonal, búsqueda de objetividad y sin tendencias.	Reporte de resultados	Basado en un estilo de publicaciones, emergente, flexible, tono personal, incluye tendencias del investigador, pero clarificadas.

Tabla 3.1: Resumen de la comparación entre las rutas cuantitativa y cualitativa (Hernández Sampieri y Mendoza Torres, 2018)

de problemas, específicamente a través del uso de heurismos en la resolución de la Ecuación de Pell. Para ello, se buscará la experiencia profesional de docentes especializados en matemáticas o didáctica de la matemática, que hayan trabajado en el área de resolución de problemas, buscando obtener percepciones detalladas sobre un área de investigación que ha sido poco explorada.

En cuanto a la metodología, se llevará a cabo la recopilación de información a partir de repositorios y libros de texto que aborden el uso de heurismos en la resolución de problemas y su aplicación en la enseñanza de las matemáticas. Este proceso tiene como objetivo especificar las propiedades y características de los fenómenos relacionados con la resolución de problemas y el uso de heurismos.

3.1 Tipo de investigación

Etkin et al. (2022) adopta la clasificación propuesta por Hernández Sampieri (2004) para definir la tesis de investigación básica[1], la cual se categoriza como:

- **Exploratoria**: “el objetivo es examinar un tema o problema de investigación poco estudiado que no se haya abordado en profundidad. Este tipo de estudio permite a un investigador formular hipótesis de primer y segundo grado”.
- **Descriptiva**: “apunta a describir las propiedades, características y perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que pueda someterse a un análisis científico. El conocimiento será de mayor profundidad que el exploratorio llegado a formular hipótesis de tercer grado”.

Es por ello por lo que es posible decir que este es un trabajo de titulación cuya investigación es del tipo exploratoria.

[1] Nombre dado a las de pregrado.

3.2 Técnica: Juicio de expertos

En su investigación, Robles Garrote y del Carmen Rojas (2015) hacen mención a la definición de Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez (2008) como "el juicio de expertos es un método de validación útil para verificar la fiabilidad de una investigación que se define como una opinión informada de personas con trayectoria en el tema, que son reconocidas por otros como expertos cualificados en éste, y que pueden dar información, evidencia, juicios y valoraciones". Para luego señalar, aparte:

> Tras someter un instrumento de cotejo a la consulta y al juicio de expertos éste ha de reunir dos criterios de calidad: validez y fiabilidad. La validez de contenido se establece con frecuencia a partir de dos situaciones, una que atañe al diseño de una prueba y, la otra, a la validación de un instrumento sometido a procedimientos de traducción y estandarización para adaptarlo a significados culturales diferentes. Es aquí donde la tarea del experto se convierte en una labor fundamental para eliminar aspectos irrelevantes, incorporar los que son imprescindibles y/o modificar aquellos que lo requieran.

Es decir, validez y fiabilidad son los dos criterios de calidad que debe reunir todo instrumento de medición tras ser sometido a la consulta y al juicio de expertos con el objeto de que los investigadores puedan utilizarlo en sus estudios (Robles Garrote y del Carmen Rojas, 2015). Donde:

> La validez, definida como "el grado en que un instrumento de medida mide aquello que realmente pretende medir o sirve para el propósito para el que ha sido construido" (Martín Arribas, 2004:27), puede referirse al contenido o al constructo. En el primer caso, se señala que los ítems o aspectos

elegidos para la elaboración del instrumento de medición son indicadores de lo que se pretende medir; la valoración de los expertos es cualitativa pues deben juzgar la capacidad del mismo para evaluar todas las dimensiones que deseamos medir. En cuanto a la validez de constructo, íntimamente relacionada con la anterior, indica que las medidas resultantes en el contenido pueden ser utilizadas y consideradas pertinentes al fenómeno que se quiere medir, para lo cual es fundamental previamente una clara definición del constructo o aspecto por medir.

La fiabilidad, el otro requisito de calidad de todo instrumento de medición, se define como el grado con el que un instrumento mide con precisión y descarta el error, y lo hace a través de la consistencia, la estabilidad temporal y el acuerdo entre los expertos. Martín Arribas (2004) define la consistencia como el nivel de cohesión de los diferentes ítems o aspectos del instrumento que se puede comprobar a través de diferentes métodos estadísticos como, por ejemplo, el coeficiente Alfa de Cronbach2, utilizado con mayor frecuencia. En relación con la estabilidad temporal, alude a la escasa variabilidad de las medidas del objeto cuando el proceso de medición se repite en situaciones distintas. En otras palabras “de la variabilidad de las puntuaciones obtenidas en repeticiones de la medición puede obtenerse un indicador de la fiabilidad, consistencia o precisión de las medidas. Si la variabilidad de las medidas del objeto es grande, se considerará que los valores son imprecisos y, en consecuencia, poco fiables (Prieto y Delgado, 2010:67). de la variabilidad de las puntuaciones obtenidas en repeticiones de la medición puede obtenerse un indicador de la fiabilidad, consistencia o precisión de las medidas. Si la variabilidad de las medidas del objeto es grande, se considerará que los valores son imprecisos y, en consecuencia, poco fiables (Prieto y Delgado, 2010:67). de la variabilidad de las puntuaciones obtenidas en repeticiones de la medición puede obtenerse un indicador de la fiabilidad, consistencia o precisión de las medidas. Si la variabilidad de las medidas del objeto es grande, se considerará que los valores son imprecisos y, en consecuencia, poco fiables (Prieto y Delgado, 2010:67).”,

3.2.1 Criterio para la selección de expertos

La investigación consideró a profesores de la Universidad de Concepción, campus Los Ángeles, los cuales fueron seleccionados considerando los siguientes criterios:

1. Experiencia de al menos 5 años de enseñanza en la formación de profesores.
2. Estar en posesión de un posgrado en educación o matemática.
3. Tener experiencia en la enseñanza de la resolución de problemas.

Capítulo 4

Resultados

4.1 Resultados del Objetivo 1

No ha sido posible encontrar una definición formal y precisa del término heurismo en el contexto de la resolución de problemas de matemática. Luego de la revisión, podemos entender los heurismos (aventurándonos a escribir una definición, y que tal vez no sea la correcta) como procedimientos para la resolución de problemas que requieren de probar distintos procesos o métodos para resolver el problema, hasta encontrar el que efectivamente lo resuelve.

Los heurismos que se utilizaron para la creación de las guías son los descritos por Bruder y Collet (2011), que se separan en Herramientas Heurísticas, Estrategias Heurísticas y Principios Heurísticos, cada uno con su propia definición, Descritas en el Apartado 2.1.2. Además, es importante destacar que la categorización de Bruder y Collet tiene una orientación didáctica, de modo que se centran en aquellos heurismos que han demostrado ser útiles y prácticos en la práctica para los primeros años de la enseñanza media. A diferencia de Schwarz (2006) que ha llevado a cabo una sistematización de los heurismos con una orientación matemática, que proporciona una visión muy completa, claramente estructurada y fácil de entender de los heurismos, su categorización y sus posibles aplicaciones Stiller et al. (2021). Ver Figura 4.1.

4.2 Resultados del Objetivo 2

En relación al segundo objetivo específico, el presente estudio se enfoca en la adaptación de la resolución de un problema clásico de la Teoría de Números para estudiantes de enseñanza media, con el objetivo de fomentar el desarrollo de habilidades en la resolución de problemas mediante el uso de heurismos. Este enfoque se alinea estrechamente con las Bases Curriculares, buscando proporcionar a los estudiantes una guía de trabajo adecuada con una estructura conceptual sólida para abordar desafíos matemáticos complejos. Aunque las guías de trabajo diseñadas para esta adaptación no se implementaron directamente, los resultados obtenidos ofrecen una perspectiva valiosa sobre cómo integrar la teoría con la práctica dentro del objetivo de investigación, lo que podría informar futuras estrategias pedagógicas en el campo de la educación matemática.

4.2.1 Diseño

Para la realización de la guía de actividades y posterior secuencia didáctica, se considerará lo siguiente:

- En relación, a la definición de problema se usó la de Fuchs (2006) y Schoenfeld (1989) debido a su practicidad, nos ofrecen una distinción entre problema y ejercicio, y aborda la cuestión desde una perspectiva que considera el desarrollo

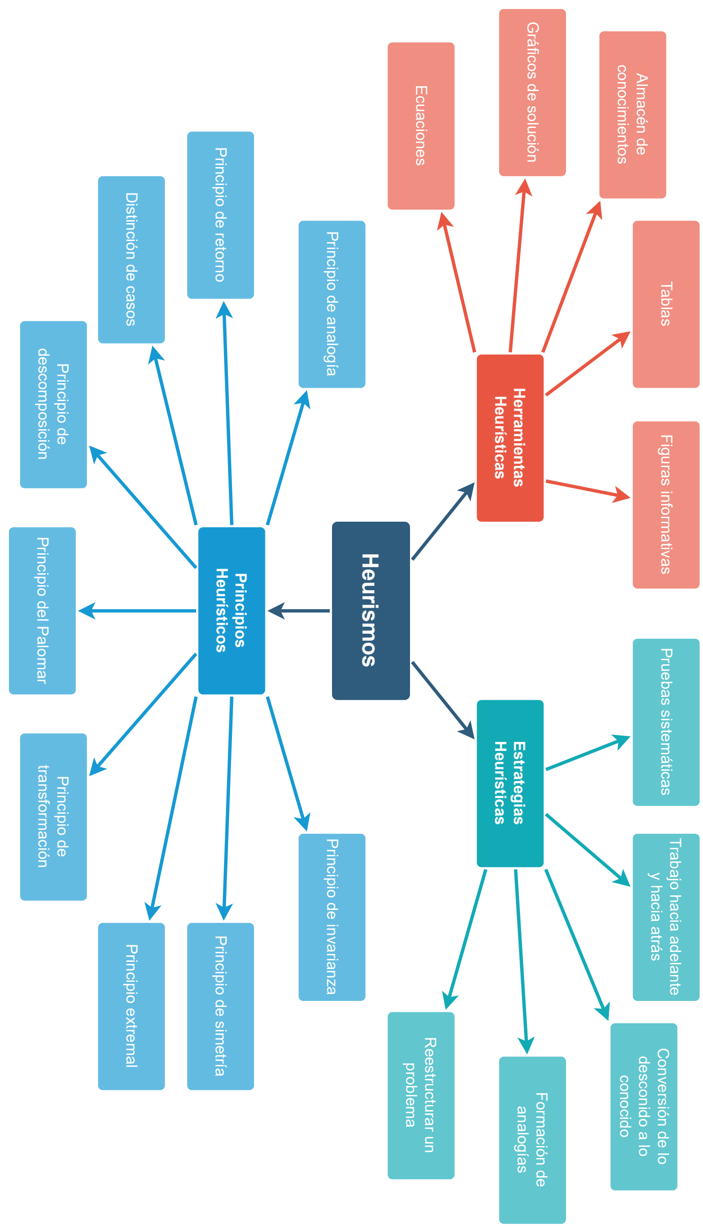


Figura 4.1: Diagrama de los Heurismos propuestos por Bruder y Collet (2011).

cognitivo (Ver Apartado 2.1).

- Definición de resolución de problemas Bruder y Collet (2011) y Ministerio de Educación (2015), dado al objetivo de usarse en el sistema escolar chileno y la aplicación de los heurismos de estas últimas (Ver Apartado 2.1).
- Entenderemos la formulación de un problema la presentada por Malaspina et al. (2015) franqueza y claridad (ver Apartado 2.9).
- Además, la secuencia didáctica de Díaz-Barriga (2014) y Rodríguez-Reyes (2014)
- Finalmente, se trabajarán los resultados obtenidos en Apartado 2.6.4.
- Los cuales serán trabajados basándonos en la formulación de problemas de Chen et al. (2015) y la Transposición Didáctica descrita en Apartado 2.8.

4.2.2 Guías de actividades

La secuencia didáctica consta de cuatro guías con sus indicadores de logros específicos. historia abreviada sobre la matemática (relacionada con lo trabajado en cada guía) y sus instrucciones de trabajo, distribuidas de la siguiente manera:

En la primera guía se tiene como objetivo demostrar analíticamente una proposición del libro de los Elementos de Euclides, analizando un geoplano que representa la proposición, para luego buscar soluciones a la Ecuación de Pell. Se presentan los siguientes elementos:

- La definición de la Ecuación de Pell y Ecuación Diofántica.
- Una breve historia de cómo esta ecuación llegó a ser descubierta, nombrando a varios matemáticos que la trabajaron en algún momento de sus vidas.

- La proposición IX, del segundo libro de los Elementos de Euclides,
- Dos actividades orientadas a la demostración geométrica de dicha proposición usando un geoplano como apoyo. Donde el objetivo final busca que el estudiante encuentre y describa un algoritmo que permita buscar más soluciones a partir de una inicial.

En la segunda guía se busca lograr los objetivos:

- Programar una plantilla electrónica con un algoritmo que genere soluciones para la Ecuación de Pell donde $D = 2$.
- Analizar las soluciones de la ecuación Pell para obtener aproximaciones de la raíz cuadrada.
- Comprobar la posibilidad de generalizar el método de Euclides, mediante ensayo y error.
- Diseñar un algoritmo en una plantilla electrónica que no solo genere soluciones para la Ecuación de Pell cuando $D = 2$ y las utilice para aproximar $\sqrt{2}$, sino que también explore su generalización a través de ensayo y error para otros valores de D libre de cuadrados.

Esta guía, y las siguientes cuentan con los siguientes elementos:

- La definición de la Ecuación de Pell.
- Una breve historia relacionada con las actividades.
- Proposición, definición, lema, relevante para el desarrollo de las guías de trabajo.
- Dos actividades orientadas a la demostración geométrica de dicha proposición usando un geoplano como apoyo. Donde el objetivo final busca que el estudiante

encuentre y describa un algoritmo que permita buscar más soluciones a partir de una inicial.

En la tercera guía el objetivo es utilizar el lema de Brahmagupta para encontrar y comparar soluciones de la Ecuación de Pell, empleando análisis algebraico y una plantilla electrónica.

Finalmente, en la cuarta guía, el objetivo es que los estudiantes muestren las relaciones entre las soluciones de la Ecuación de Pell y predigan su comportamiento en un gráfico, notando que forman una estructura algebraica de grupo, utilizando GeoGebra.

Una vez elaboradas, las guías fueron remitidas a académicos de la Universidad de Concepción, específicamente al campus Los Ángeles, para su validación. Este proceso implica una revisión exhaustiva de la redacción y pertinencia de los indicadores de logro incluidos en las guías. Además, se les proporciona una tabla donde cada actividad se clasifica según Herramientas Heurísticas, Estrategias Heurísticas y Principios Heurísticos. Los académicos ajustan esta clasificación en función de los heurismos descritos en la validación, expresando su acuerdo o desacuerdo junto con las correspondientes justificaciones y observaciones.

Una vez elaboradas, las guías fueron enviadas a académicos de la Universidad de Concepción, específicamente al campus Los Ángeles, para su validación. Este proceso implica una revisión que abarca los siguientes aspectos:

- La evaluación de la redacción y pertinencia de los indicadores de logro incluidos en las guías.

- El análisis de la clasificación de cada actividad, según Herramientas Heurísticas, Estrategias Heurísticas y Principios Heurísticos, utilizando una tabla proporcionada.

Posteriormente, los académicos expresan su acuerdo o desacuerdo con las recomendaciones presentadas, acompañando sus opiniones con justificaciones y observaciones pertinentes.

De esta manera, se logró la creación de cuatro guías de trabajo, en donde cada guía consta de indicadores de logros, historia introductoria a cada tema y actividades secuenciadas para lograr el objetivo deseado.

Las siguientes páginas muestran las guías de actividades desarrolladas, las cuales están dirigida a estudiantes de nivel de enseñanza media igual o superior a segundo medio, con el propósito de fortalecer las competencias matemáticas, especialmente en la resolución de problemas, usando un problema de la Teoría de Números y la aplicación de heurismos.

Profs. Morales y Ruz
Pedagogía en Matemática
Universidad de Concepción

Guía 1

Ecuación de Pell

Nombre: ______________________________ **Fecha:** __________

Indicadores:

- Demuestra analiticamente la proposición de Euclides, utilizando el geoplano que representa la proposición, para luego buscar soluciones a la ecuación de Pell.
- Encuentran un algoritmo para obtener más soluciones a partir de una dada.

Instrucciones: Este instrumento corresponde a un taller de 2 actividades con desarrollo de respuesta abierta. Su aplicación se ajusta a las indicaciones dadas por el profesor encargado de la asignatura.

1 Definiciones

Definición 1. Una **ecuación diofántica** es una ecuación algebraica con coeficientes enteros cuyas incógnitas solo pueden asumir valores enteros.

La ecuación de Pell, en la que nos enfocaremos, es un caso particular de una ecuación diofántica, y dedicaremos a estudiar sus soluciones y propiedades.

Definición 2. La ecuación diofántica

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

donde D es un número entero libre de cuadrados[a], es conocida como la ecuación de Pell.

[a] Entendemos un número *libre de cuadrados* como aquel que no tiene divisor que sea el cuadrado de un número primo.

2 Un poco de historia

La ecuación $x^2 - Dy^2 = 1$, conocida como la ecuación de Pell, tiene una historia fascinante que se extiende desde la antigua Grecia hasta la actualidad. Originada en el problema del ganado de Arquímedes en el 251 a.C., ha sido explorada por destacados matemáticos como Arquímedes, Diofanto, Brahmagupta, Bhaskara II, Fermat, Brouncker, Euler, Lagrange y Lenstra. En 1768, Lagrange puso fin a la búsqueda demostrando rigurosamente que la ecuación tiene infinitas soluciones enteras, derivadas de la solución fundamental y calculables mediante un algoritmo basado en la expansión en fracciones continuas del radical $\sqrt{D}$. Hoy en día, esta ecuación sigue siendo objeto de investigación y existe un criptosistema fundamentado en ella (Morales, 2020).

2.1 Euclides

Euclides, un antiguo matemático griego nacido alrededor del año 300 a. C. en Alejandría, dejó una marca indeleble en el panorama matemático con su influyente obra "Los Elementos". Se sabe poco sobre la vida de Euclides, pero su legado perdura a través de esta recopilación fundamental de trece libros, que se convirtió en la piedra angular de la matemáticas clásica.

En "Los Elementos", Euclides profundiza en la geometría, la teoría de números y las demostraciones lógicas, estableciendo una guía atemporal para el estudio matemático. Esta obra maestra refleja el duradero impacto intelectual de Euclides, que dio forma al curso de las matemáticas durante siglos (Stillwell, 2010).

Figura 1: Retrato de Euclides

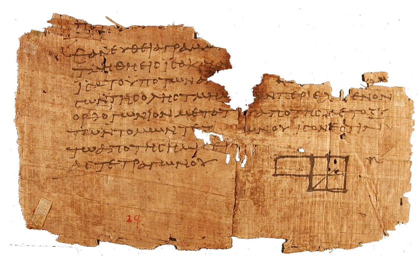


Figura 2: Fragmento, más antiguo del que tenemos registro, del libro de Euclides.

3 Proposición 9 del libro 2

Proposición 3 (de Euclides). *Si una línea recta se corta en segmentos iguales y desiguales, entonces la suma de los cuadrados de los segmentos desiguales del todo es el doble de la suma del cuadrado de la mitad y del cuadrado de la línea recta entre los puntos de la sección. En otras palabras:*

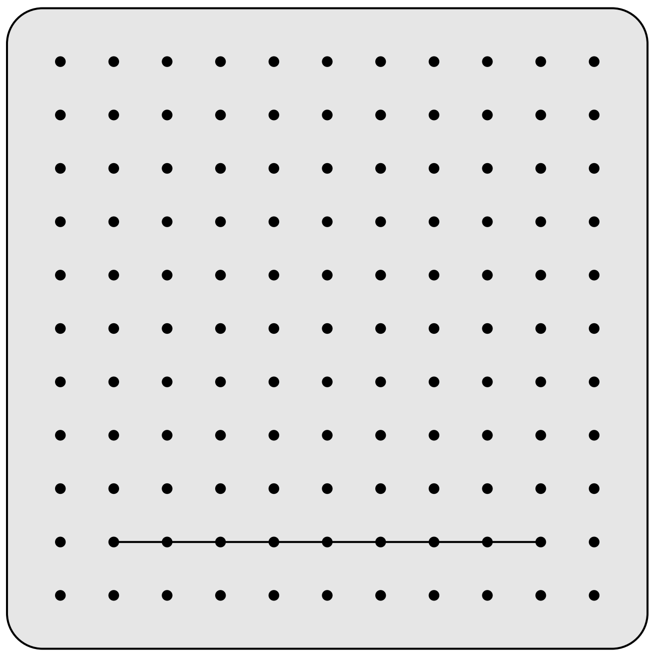
"Sea $\overline{AB}$ un segmento, bisectada en el punto C, y cortada en un punto arbitrario D.

La suma de los cuadrados de AD y DB es igual al doble de la suma de los cuadrados de AC y DC".

Definición 4. Un geoplano es un instrumento manipulativo matemático utilizado para explorar conceptos básicos de la geometría plana como el perímetro, el área y las características de triángulos y otros polígonos. Consiste en un tablero físico con una cierta cantidad de clavos, alrededor de los cuales se envuelven elásticos o hilos para representar segmentos.

4 Actividades

Actividad 1. Usando el Geoplano,



construya la figura geométrica a partir de los siguientes pasos,

a. Trace un segmento $\overline{AB}$, considerando un punto medio C sobre el segmento $\overline{AB}$ y un punto cualquiera D sobre el segmento $\overline{AB}$ de tal manera que divida al segmento $\overline{AB}$ en partes desiguales.

   Indicación: se sugiere trazar el segmento $\overline{AB}$ paralelo a uno de los lados del Geoplano.

b. Construya un segmento $CE = AC$ de modo que $\overline{AB} \perp \overline{CE}$.

c. Trace los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{EB}$.

d. Considerando los puntos F y G, de tal modo que el punto G pertenezca al segmento $\overline{EC}$ y el punto F pertenezca al segmento $\overline{AE}$ o $\overline{EB}$, y además que $\overline{GF} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{DF} \parallel \overline{CE}$.

e. Considerando los puntos F y G, de tal modo que $\overline{GF} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{DF} \parallel \overline{CE}$.

   Indicación: el punto G debe estar en el segmento $\overline{EC}$ y F en el $\triangle ABE$.

Actividad 2. Basándose en el Geoplano obtenido de la actividad anterior, responda lo siguiente:

a. ¿Qué relaciones puede obtener? Con respecto a las medidas.

   Indicación: Observe los segmentos que tienen igual medida y utilice el Teorema de Pitágoras.

b. Luego, con las relaciones obtenidas, demuestre la proposición de Euclides, en otras palabras

$$AD^2 + DB^2 = 2(AC^2 + CD^2).$$

c. Considerando la igualdad anterior, $CD = y$ y $DB = x$, llegue a la siguiente expresión

$$x^2 - 2y^2 = -\Big((x + 2y)^2 - 2(x + y)^2\Big).$$

   Indicación: Observe la base $\overline{AB}$ del triángulo formado anteriormente.

d. Si una solución de la ecuación de Pell $x^2 - 2y^2 = 1$ es (a, b), obtenga otra solución basada en esta. Describa su procedimiento.

   Indicación: Recuerde que la solución de una ecuación de dos incógnitas se puede representar con un par ordenado.

Profs. Morales y Ruz
Pedagogía en Matemática
Universidad de Concepción

Guía 2

Ecuación de Pell

Nombre: ______________________________ **Fecha:** __________

Indicadores:

- Programan en una planilla electrónica un algoritmo que genere soluciones para la ecuación de Pell donde $D = 2$.
- Analizan las soluciones de la ecuación Pell, obteniendo aproximaciones de la raíz cuadrada.
- Comprueban la posibilidad de generalizar el método de Euclides, mediante ensayo y error.
- Diseñan un algoritmo en una planilla electrónica que no solo genere soluciones para la ecuación de Pell cuando $D = 2$ y las utilice para aproximar 2, sino que también explore su generalización a través de ensayo y error para otros valores de D libre de cuadrados.

Instrucciones: Este instrumento corresponde a un taller de 3 actividades con desarrollo de respuesta abierta. Su aplicación se ajusta a las indicaciones dadas por el profesor encargado de la asignatura.

5 Historia

Para despertar interés en la ecuación de Pell e introducir algunas ideas importantes para su estudio, examinaremos la cuestión de la irracionalidad de la raíz cuadrada de 2. Este problema tiene raíces en las matemáticas griegas y puede abordarse desde la aritmética, geometría o análisis (Barbeau, 2003). Descubierta independientemente en la India alrededor del siglo VII d. C. (Lemmermeyer, 2023).

La raíz cuadrada de 2, que fue el primer número irracional descubierto, era conocida por los primeros pitagóricos (IV a. C.), y se descubrieron métodos ingeniosos para aproximar su valor. El mejor de estos señala que si x, y son soluciones grandes de esta ecuación, entonces $x/y \approx \sqrt{2}$, y de hecho los pitagóricos encontraron una manera de generar soluciones cada vez más grandes mediante las relaciones que veremos a continuación.

6 Definiciones

Definición 5. La ecuación diofántica

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

donde D es un número entero libre de cuadrados, es conocida como la ecuación de Pell.

Proposición 6. *Si* (x, y) *es solución de* $x^2 - 2y^2 = 1$, *entonces* $(x + 2y, x + y)$ *también lo es.*

7 Actividades

Actividad 3. Considere la ecuación de Pell para $D = 2$,

a. Mediante ensayo y error, encuentre un par de números (x, y) que satisfacen la ecuación de Pell.

b. Usando una planilla electrónica y Proposición 6, programe un algoritmo que permita encontrar 10 soluciones de la ecuación de Pell.

x	y	$x^2 - 2y^2$
valor x_1	valor y_1	resultado
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
valor x_n	valor y_n	resultado

Figura 3: Ejemplo tabla para la Actividad 3 para n resultados.

Actividad 4.

a. Demuestre que, a partir de la ecuación $x^2 - 2y^2 = 1$, se puede obtener

$$\frac{x}{y} = \sqrt{2 + \frac{1}{y^2}}.$$

b. En una planilla electrónica, a partir de la Proposición 6 y las soluciones obtenidas en la Actividad 3,

(i) Calcule la división del lado izquierdo para cada una de estas soluciones.

(ii) Calcule el radicando y luego la raíz para cada una de estas soluciones.

(iii) ¿Qué sucede con los resultados obtenidos en los dos puntos anteriores tras incrementar las soluciones de la tabla?

(iv) Analice la ecuación y los resultados obtenidos en la planilla electrónica con el valor aproximado de $\sqrt{2}$ y luego observe si es una buena aproximación.

Indicación: Use una calculadora, o su programa favorito, para encontrar el valor de $\sqrt{2}$.

Actividad 5. Usando el procedimiento de la Actividad 3, muestre si funciona para $D = 3$ o $D = 5$. Luego, ¿podemos decir que esta relación funciona para cualquier D libre de cuadrados?

Guía 3
Ecuación de Pell

Nombre: ______________________ **Fecha:** __________

Indicadores: Utilizan el lema de Brahmagupta para encontrar y comparar soluciones de la ecuación de Pell, empleando análisis algebraico y una planilla electrónica.

Instrucciones: Este instrumento corresponde a un taller de 1 actividad con desarrollo de respuesta abierta. Su aplicación se ajusta a las indicaciones dadas por el profesor encargado de la asignatura.

8 Historia

Brahmagupta, matemático y astrónomo indio del siglo VII, hizo contribuciones influyentes a las matemáticas y la astronomía a través de su obra, el "Brahmasphutasiddhanta o Doctrina de Brahma Correctamente Establecida". En este completo tratado, abordó diversos temas matemáticos, incluidos álgebra, geometría y teoría de números. Los conocimientos pioneros de Brahmagupta sobre el cero y los números negativos sentaron las bases para los desarrollos algebraicos y dejaron un impacto duradero en las tradiciones matemáticas de todo el mundo.

Un aspecto notable del trabajo de Brahmagupta es su contribución a la resolución de la ecuación de Pell, $x^2 - Dy^2 = 1$, donde D es un entero libre de cuadrados. El enfoque de Brahmagupta anticipó los esfuerzos posteriores de matemáticos europeos, como los de Fermat y Euler, mostrando su profunda comprensión de la teoría de números y su capacidad para formular soluciones generales para problemas matemáticos complejos. Su legado persiste como un capítulo vital en la historia de las matemáticas indias (Stillwell, 2010).

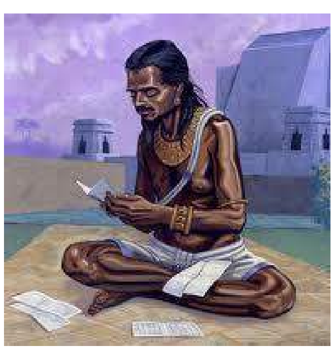


Figura 4: Dibujo de Brahmagupta.

Figura 5: Retrato de Lagrange.

9 Definiciones

Definición 7. La ecuación diofántica

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

donde D es un número entero libre de cuadrados, es conocida como la ecuación de Pell.

Lema 8 (de Brahmagupta). *Si (a, b) y (a', b') son soluciones de las ecuaciones*

$$x^2 - Dy^2 = k \quad y \quad x^2 - Dy^2 = k'$$

respectivamente, entonces

$$(aa' + Dbb', ab' + ba')$$

es solución de

$$x^2 - Dy^2 = kk'.$$

10 Actividades

Actividad 6.

a. Demuestre la identidad

$$(a^2 - Db^2)(a'^2 - Db'^2) = (aa' + Dbb')^2 - D(ab' + ba')^2.$$

Indicación: desarrolle ambos lados de la igualdad.

b. Utilizando el punto anterior, demuestre el lema de Brahmagupta.

Indicación: Considerando $k = k' = 1$.

c. A partir del lema anterior, utilice una planilla electrónica para encontrar 10 soluciones de la ecuación de Pell para $D = 3$ y $D = 5$.

d. ¿Cuál es la diferencia entre este procedimiento y el visto en la Actividad 5? ¿qué me permite concluir esto?

Guía 4

Ecuación de Pell

Nombre: ______________________________ **Fecha:** ____________

Indicadores: Mostrar que las soluciones de la ecuación de Pell forman un grupo, usando GeoGebra.

a. Utilizan GeoGebra para mostrar cómo se relacionan entre sí las soluciones de la ecuación de Pell.
b. Predicen su comportamiento en un gráfico.

Instrucciones: Este instrumento corresponde a un taller de 2 actividades con desarrollo de respuesta abierta. Su aplicación se ajusta a las indicaciones dadas por el profesor encargado de la asignatura.

11 Historia

La Teoría de Grupos, esencial en simetría y álgebra abstracta, surge de las ecuaciones del álgebra antigua. Euler y Lagrange, sin conocer el concepto de grupo, utilizaron sus propiedades, las cuales abordaremos en esta guía. Galois comprendió plenamente el concepto y lo aplicó brillantemente a la solubilidad de ecuaciones por radicales. En el siglo XIX, la idea de grupos se extendió de álgebra a geometría (Stillwell, 2010).

Luego, surgió el concepto de anillo en el intento de encontrar soluciones enteras. Euler y Gauss sentaron las bases, y Dedekind desarrolló la Teoría de Ideales, sentando las bases para la Teoría de Anillos. Estas investigaciones llevaron a Dirichlet, quien, a través del "Teorema de las Unidades de Dirichlet", realizó una importante generalización de la solubilidad de la ecuación de Pell (Lemmermeyer, 2023).

Figura 6: Retrato de Galois.

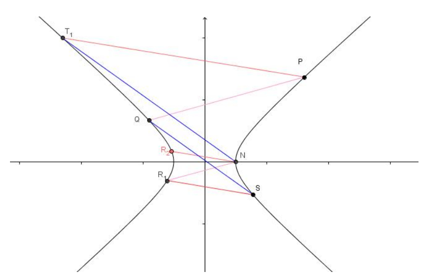


Figura 7: Asociatividad de la ecuación de Pell con la operación dada por el Lema 10.

12 Definiciones

Definición 9. La ecuación diofántica

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

donde D es un número entero libre de cuadrados, es conocida como la ecuación de Pell.

Lema 10 (de Brahmagupta). *Si (a,b) y (a',b') son soluciones de las ecuaciones*

$$x^2 - Dy^2 = k \quad y \quad x^2 - Dy^2 = k'$$

respectivamente, entonces

$$(aa' + Dbb', ab' + ba')$$

es solución de

$$x^2 - Dy^2 = kk'$$

Actividad 7. Dada la ecuación de Pell para $D = 2$, realice lo siguiente usando GeoGebra.

a. Grafique la curva $x^2 - 2y^2 = 1$. Este tipo de curva recibe el nombre de hipérbola.

b. Grafique los puntos obtenidos en la Actividad 3.

c. Elijan dos puntos de la curva y opérelos usando el lema de Brahmagupta. Además, grafique el nuevo punto obtenido.

   Indicación: Puede ser cualquier par ordenado en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

d. Explique por qué al operar, usando el Lema 10, dos puntos de la curva obtendremos otro punto de ella.

Actividad 8. De la gráfica obtenida anteriormente

a. Muestre que, utilizando la identidad anterior, si el orden en el que combinas las soluciones afecta su resultado.

b. Encuentre una solución que al operarla con otra de como resultado esta última. Esto es considerado el elemento neutro.

c. Dada una solución, encuentre otra que al operarla con la primera de como resultado el elemento neutro.

   Indicación: Puede usar una planilla electrónica.

4.2.3 Relación de las guías con el curriculum nacional en Matemática

A continuación presentan una serie de tablas que establecen una relación entre los Indicadores de Logro de diversas guías y los Objetivos de Aprendizaje propuestos por el Ministerio de Educación. Estas tablas ofrecen una visión detallada de cómo los indicadores específicos se alinean con los objetivos curriculares establecidos. Cada tabla aborda un conjunto distinto de indicadores y objetivos, proporcionando un panorama completo de la integración entre el contenido enseñado y los objetivos educativos.

La primera tabla (Tabla 4.1) examina los indicadores relacionados con la demostración analítica de la proposición de Euclides y la resolución de la Ecuación de Pell. Se detallan los niveles de grado y los Objetivos de Aprendizaje asociados, desde el octavo básico hasta el cuarto medio, destacando la aplicación del teorema de Pitágoras y la resolución de problemas geométricos utilizando herramientas manuales y tecnológicas.

En la segunda tabla (Tabla 4.2), se profundiza en la programación de algoritmos en una planilla electrónica para la resolución de la Ecuación de Pell y su análisis, con un enfoque particular en la generalización del método de Euclides. Los Objetivos de Aprendizaje abordados en esta tabla se centran en operaciones con números reales y la resolución de problemas contextualizados.

La tercera tabla (Tabla 4.3) destaca el uso del lema de Brahmagupta para abordar la Ecuación de Pell, combinando análisis algebraico y herramientas electrónicas, y vincula estos indicadores con los Objetivos de Aprendizaje específicos relacionados con la multiplicación y la división de fracciones y decimales.

Por último, la cuarta tabla (Tabla 4.4) aborda la visualización de las soluciones de la Ecuación de Pell como un grupo, utilizando GeoGebra, y su relación con los conceptos de proporciones directas e inversas. Esta tabla muestra la intersección entre los objetivos curriculares de séptimo básico y cuarto medio, destacando la aplicación de conceptos geométricos en diferentes contextos.

En conjunto, estas tablas ofrecen una visión completa de cómo las guías de trabajo específicas se vinculan con los objetivos educativos del currículo. Muestran cómo los indicadores de logro de cada guía están alineados con los objetivos curriculares, proporcionando una comprensión detallada de cómo se integran los contenidos matemáticos específicos con los objetivos más amplios del plan de estudios. Esta conexión directa entre las guías de trabajo y el currículo proporciona un marco claro para el diseño, implementación y evaluación del proceso educativo, garantizando que los estudiantes alcancen los estándares esperados en matemáticas a lo largo de su educación.

Indicador	Objetivos del Currículum
Demuestra analíticamente la proposición de Euclides, utilizando el geoplano que representa la proposición, para luego buscar soluciones a la Ecuación de Pell.	8vo básico, OA12 – Explicar, de manera concreta, pictórica y simbólica, la validez del teorema de Pitágoras y aplicar a la resolución de problemas geométricos y de la vida cotidiana, de manera manual y/o con software educativo. 4to medio, OA04 – Resolver problemas acerca de rectas y circunferencias en el plano, mediante su representación analítica, de forma manuscrita y con uso de herramientas tecnológicas.
Encuentran un algoritmo para obtener más soluciones a partir de una dada.	6to básico, OA09 – Demostrar que comprenden la relación entre los valores de una tabla y aplicarla en la resolución de problemas sencillos: • identificando patrones entre los valores de la tabla. • formulando una regla con lenguaje matemático.

Tabla 4.1: Relación entre los Indicadores de Logro de la guía 1 y los Objetivos de Aprendizaje propuestos por el Ministerio de Educación.

Indicador	Objetivos del Currículum
Programan en una planilla electrónica un algoritmo que genere soluciones para la Ecuación de Pell donde $D = 2$ Analizan las soluciones de la ecuación Pell, obteniendo aproximaciones de la raíz cuadrada. Comprueban la posibilidad de generalizar el método de Euclides, mediante ensayo y error. Diseñan un algoritmo en una planilla electrónica que no solo genere soluciones para la Ecuación de Pell cuando $D = 2$ y las utilice para aproximar 2, sino que también explore su generalización a través de ensayo y error para otros valores de D libre de cuadrados.	2do medio, OA1 – Realizar cálculos y estimaciones que involucren operaciones con números reales: • Utilizando la descomposición de raíces y las propiedades de las raíces. • Combinando raíces con números racionales. • Resolviendo problemas que involucren estas operaciones en contextos diversos.

Tabla 4.2: Relación entre los Indicadores de Logro la guía 2 y Objetivos de Aprendizaje propuestos por el Ministerio de Educación

Indicador	Objetivos del Currículum
Utilizan el lema de Brahmagupta para encontrar y comparar soluciones de la Ecuación de Pell, empleando análisis algebraico y una planilla electrónica.	7mo básico, OA3 – Resolver problemas que involucren la multiplicación y la división de fracciones y de decimales positivos de manera concreta, pictórica y simbólica (de forma manual y/o con software educativo)

Tabla 4.3: Relación entre los Indicadores de Logro la guía 3 y Objetivos de Aprendizaje propuestos por el Ministerio de Educación

Indicador	Objetivos del Currículum
Mostrar que las soluciones de la Ecuación de Pell forman un grupo, usando GeoGebra. a. Utilizan GeoGebra para mostrar cómo se relacionan entre sí las soluciones de la Ecuación de Pell. b. Predicen su comportamiento en un gráfico.	7mo básico, OA8 – Mostrar que comprenden las proporciones directas e inversas: • Realizando tablas de valores para relaciones proporcionales. • Graficando los valores de la tabla. • Explicando las características de la gráfica. • Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas. 4to medio, OA4 – Resolver problemas acerca de rectas y circunferencias en el plano, mediante su representación analítica, de forma manuscrita y con uso de herramientas tecnológicas.

Tabla 4.4: Relación entre los Indicadores de Logro la guía 4 y Objetivos de Aprendizaje propuestos por el Ministerio de Educación

4.2.4 Relación de las guías de actividades con los Heurismos

El análisis detallado de los Heurismos presentados en las actividades de las diversas guías se basa en los resultados obtenidos de un juicio de expertos, como se detalla en el apéndice correspondiente. Estas tablas proporcionan una valiosa síntesis de las estrategias cognitivas y herramientas utilizadas en la resolución de problemas matemáticos, permitiendo una comprensión profunda de cómo los estudiantes enfrentan estos desafíos. La consulta a expertos en el campo asegura la validez y la fiabilidad de los hallazgos, ofreciendo una base sólida para la interpretación de los datos y su aplicación en el diseño educativo. Ver Tabla 4.5 a 4.8.

Se destacaron las siguientes observaciones realizada por los expertos (en Capítulo B) para comprender de mejor manera esta asociación:

- La definición proporcionada de "prueba sistemática" no es completa porque no aborda completamente el proceso de prueba sistemática en sí mismo. Si bien menciona que implica el desarrollo de un sistema que contiene todos los "casos posibles" para llegar a la solución correcta, no profundiza en cómo se lleva a cabo este proceso ni en qué criterios se utilizan para determinar la validez de las pruebas.

  Por otro lado, la definición de "prueba asistemática" es completa ya que describe de manera clara y precisa el enfoque de ensayo y error utilizado típicamente cuando uno no conoce un procedimiento o no sabe qué más hacer. Explica cómo se lleva a cabo este proceso y proporciona ejemplos de cómo los individuos suelen comenzar a abordar un problema sin un método específico en mente. Sin embargo, no menciona la transición a la prueba sistemática, que es importante para comprender el panorama completo del proceso de resolución de problemas.

- La definición de "almacén de conocimientos" proporcionada parece ser demasiado amplia y vaga para algunos expertos. La inclusión de elementos como cuadernos, libros de fórmulas y heurismos con preguntas específicas puede resultar confusa y poco clara. Además, la mención de que los almacenes de conocimiento pueden presentarse en forma de mapa mental podría generar ambigüedad en cuanto a su función y naturaleza exactas. Los expertos podrían requerir una definición más precisa y específica que delinee claramente qué se considera un almacén de conocimientos en el contexto del juicio de expertos. O como realizó Kipman (2018) en su resumen del trabajo de Bruder y Collet (2011), incluir una imagen explicativa en cada determinados heurismos.

- En relación a la Actividad 4 ítem a presente en la segunda guía, uno de los expertos mencionó "se puede realizar en forma mecánica", por otro lado, el resto de los expertos estaba de acuerdo. Por decisión de los investigadores, se optó por incluir el principio de simetría en la actividad, pues aunque este puede parecer mecánico en cierto sentido, ya que implica la aplicación sistemática de reglas y patrones para derivar resultados, este enfoque va más allá de una simple aplicación mecánica. En realidad, implica una comprensión profunda de la estructura y los principios subyacentes de la ecuación y su relación con el principio de simetría. Los estudiantes deben analizar y razonar sobre la simetría presente en la ecuación, lo que requiere habilidades cognitivas más avanzadas que la simple mecánica. Además, el uso del principio de simetría en el análisis de resultados en una planilla electrónica también implica un pensamiento crítico y una comprensión del contexto matemático más amplio, lo que no puede considerarse simplemente como un proceso mecánico.

- Por decisión de los investigadores, se incluyó el principio de analogía en la

Actividad 4, ítem b, subítem (iv). El principio de analogía se utiliza para buscar similitudes entre la situación actual de resolución de problemas y una situación previa que ya ha sido resuelta. En este caso, los estudiantes buscarían similitudes entre problemas similares para encontrar una solución a la nueva tarea.

Sin embargo, la crítica planteada por un experto sugiere que el enunciado "Analice la ecuación y los resultados obtenidos en la planilla electrónica con el valor aproximado de $\sqrt{2}$ y luego observe si es una buena aproximación." de la actividad puede no estar completamente alineado con el principio de analogía. La crítica destaca que este enunciado parece estar más relacionado con la aplicación repetida de un algoritmo para calcular expresiones específicas en lugar de buscar similitudes entre problemas y utilizar analogías para encontrar una solución. Esto podría llevar a una comprensión superficial de los conceptos matemáticos involucrados, ya que no fomenta el pensamiento analítico y la comprensión profunda de la relación entre los problemas.

- Por elección de los investigadores, se aplicó el principio de retorno en la Actividad 6. Este principio consiste en descomponer tareas complejas en tareas más simples y conocidas, lo que facilita el trabajo con conceptos análogos a un nivel menos exigente y abstracto. Aunque la crítica del experto sugiere que este enfoque podría asemejarse al uso del almacén de conocimientos, en realidad, implica simplificar y estructurar problemas complejos. Aunque la conclusión en 6b parece una consecuencia directa de 6a, el proceso de demostración implica rastrear la identidad compleja hasta tareas más manejables y estructuradas, lo que refleja el principio de retorno en acción.

- Finalmente destacamos la observación "Con respecto a los Heurismos empleados,

Actividad	Clasificación	Heurismo
1	Herramienta	Figura informativa
2	Herramienta	Almacén de conocimiento
	Estrategia	**Pruebas sistemáticas**
		Trabajo hacia delante hacia atrás
		Formación de analogías

Tabla 4.5: Heurismos presentados en las actividades de la 1ra guía

esperaría que estos surjan en el proceso de resolución como una decisión del resolutor de la tarea. En este caso, cada tarea apunta a un Heurismo particular, lo que parece quitar el sentido de los mismos.“ Donde consideramos que en el contexto educativo, el enfoque explícito en la enseñanza de heurísticas puede ser beneficioso para mejorar la flexibilidad del pensamiento y la resolución de problemas. Este método implica enseñar heurismos específicos paso a paso, como la reversibilidad y la transferencia, lo que permite a los estudiantes desarrollar habilidades conscientes para abordar diversas situaciones. La investigación ha demostrado que este enfoque mejora significativamente la capacidad de resolución de problemas, incluso para aquellos con dificultades iniciales en la flexibilidad mental. Basado en las ideas de los enfoques de aprendizaje de resolución de problemas resumidos en Gebel y Kuzle (2019), donde Bruder y Collet (2011) exponentes del enfoque explícito.

Notamos que estos comentarios son destacados en las Tabla 4.5 a 4.8 en negrita, salvo el almacén de conocimientos y otras observaciones que detectamos tras analizar las respuestas de los expertos.

Actividad	Clasificación	Heurismo
3	Estrategia	**Pruebas sistemáticas**
	Herramientas	Tablas
		Almacén de conocimientos
4	Herramienta	Almacén de conocimiento
		Tablas
	Principio	**Principio de simetría**
	Estrategia	**Formación de analogías**
5	Principio	Principio de simetría

Tabla 4.6: Heurismos presentados en las actividades de la 2da guía

Actividad	Clasificación	Heurismo
6	Herramienta	Tablas
	Estrategia	**Pruebas sistemáticas**
		Trabajo hacia delante y hacia atrás
		Formación de analogías
	Principio	**Principio de retorno**

Tabla 4.7: Heurismos presentados en las actividades de la 3ra guía

Actividad	Clasificación	Heurismo
7	Estrategia	Restaurar un problema
	Herramienta	Figuras informativas
	Principio	Principio de transformación
8	Herramienta	Almacén de conocimientos
	Estrategia	**Pruebas sistemáticas**

Tabla 4.8: Heurismos presentados en las actividades de la 4ta guía

4.2.5 Transposición didáctica de la Ecuación de Pell

Guiándonos por Ramírez Bravo (2005) para el proceso que se tiene que realizar para lograr una transposición didáctica.

En cuanto a cómo se aplican estos procesos en la guía de trabajo:

- **Selección y reducción de contenidos**: Se eligen específicamente la ecuación de Pell y la proposición de Euclides como temas principales. Se proporcionan definiciones claras y se contextualiza la importancia histórica de estos conceptos matemáticos.

- **Simplificación**: Las instrucciones y actividades se presentan de manera clara y organizada. Se utilizan ejemplos visuales, como el geoplano, para facilitar la comprensión de los conceptos geométricos y algebraicos involucrados.

- **Reformulación**: Los contenidos matemáticos se presentan de manera estructurada y se proporcionan indicaciones claras para su aplicación práctica. Se fomenta la reflexión y el razonamiento matemático a través de las actividades propuestas, lo que permite a los estudiantes profundizar en su comprensión de los temas abordados.

En resumen, la guía de trabajo muestra un claro esfuerzo por aplicar los principios de transposición didáctica para hacer accesibles y comprensibles los conceptos matemáticos involucrados en la demostración analítica de la proposición de Euclides y la resolución de la ecuación de Pell.

Guía 1 El proceso de transposición didáctica en el esquema de “saber sabio” a “saber a enseñar” y finalmente a “objeto de enseñanza” es mostrado a continuación para cada una de las guías trabajada.

- Saber sabio (saber matemático): Este nivel corresponde a la ecuación de Pell, que es un concepto matemático avanzado con una historia rica y compleja en la teoría de números. Esta ecuación tiene aplicaciones en campos como la criptografía y la teoría de números algebraicos.

- Saber a enseñar: En este nivel, la ecuación de Pell se presenta de una manera más accesible y comprensible para los estudiantes. Se proporcionan definiciones claras y ejemplos históricos para contextualizar el concepto. Además, se incluyen actividades prácticas, como la construcción de figuras geométricas relacionadas con la ecuación en un geoplano, para ayudar a los estudiantes a visualizar y comprender mejor el concepto.

- Objeto de enseñanza: La guía de trabajo en su totalidad sirve como el objeto de enseñanza. No solo se presenta la ecuación de Pell y su contexto histórico, sino que también se proporcionan actividades prácticas y pasos detallados para que los estudiantes exploren y comprendan el concepto en profundidad. Además, se integran otros conceptos matemáticos, como la proposición de Euclides, para ampliar la comprensión y conectar diferentes áreas de las matemáticas.

A continuación, se presenta un esquema que resume de manera más clara lo expuesto, el cual puede encontrarse en la Figura 4.2.

Guía 2 Esta guía sobre la ecuación de Pell está diseñada para involucrar a los estudiantes en la exploración activa y práctica de este concepto matemático. Aquí está un resumen similar al anterior:

- Saber sabio (saber matemático): La guía aborda la ecuación de Pell, un tema matemático avanzado con aplicaciones en la teoría de números. A través de actividades prácticas en una plantilla electrónica, los estudiantes desarrollan

Figura 4.2: Esquema de la transposición didáctica realizada en la guía 1

habilidades para generar soluciones para la ecuación de Pell y explorar su generalización para valores de D libres de cuadrados.

- Saber a enseñar: La guía presenta la historia y contexto de la ecuación de Pell para despertar el interés de los estudiantes. Luego, proporciona actividades prácticas paso a paso que permiten a los estudiantes programar algoritmos en una planilla electrónica para encontrar soluciones de la ecuación de Pell y realizar análisis numéricos para comprender mejor el concepto.

- Objeto de enseñanza: La guía en su totalidad sirve como objeto de enseñanza al proporcionar una experiencia de aprendizaje completa. Desde la historia y las definiciones iniciales hasta las actividades prácticas de programación en una plantilla electrónica, los estudiantes no solo adquieren conocimientos sobre la ecuación de Pell, sino que también desarrollan habilidades computacionales y analíticas importantes en matemáticas.

A continuación, se presenta un esquema que resume de manera más clara lo expuesto, el cual puede encontrarse en la Figura 4.3.

Figura 4.3: Esquema de la transposición didáctica realizada en la guía 2

Guía 3 Aquí está cómo se puede ver el proceso de transposición didáctica en la tercera guía de trabajo proporcionada sobre la ecuación de Pell:

- Saber sabio (saber matemático): En este caso, el saber matemático incluye la historia y la definición de la ecuación de Pell, así como el lema de Brahmagupta relacionado con la búsqueda y comparación de soluciones. También implica el conocimiento de cómo aplicar el análisis algebraico y el uso de una planilla electrónica para resolver problemas relacionados con la ecuación de Pell.

- Saber a enseñar: La guía de trabajo presenta la ecuación de Pell y el lema de Brahmagupta de una manera que sea comprensible para los estudiantes. Proporciona una breve historia sobre Brahmagupta y su contribución a la resolución de la ecuación de Pell, lo que contextualiza el concepto en la historia de las matemáticas. Además, incluye definiciones claras y actividades prácticas que permiten a los estudiantes aplicar el lema de Brahmagupta y utilizar una planilla electrónica para resolver la ecuación de Pell para casos específicos de D.

- Objeto de enseñanza: La guía de trabajo en su conjunto sirve como objeto

Figura 4.4: Esquema de la transposición didáctica realizada en la guía 3

de enseñanza. Presenta la ecuación de Pell y el lema de Brahmagupta como conceptos importantes en la teoría de números, y proporciona actividades prácticas que permiten a los estudiantes explorar y aplicar estos conceptos. Además, fomenta el uso de herramientas tecnológicas, como las planillas electrónicas, para resolver problemas matemáticos de manera eficiente.

A continuación, se presenta un esquema que resume de manera más clara lo expuesto, el cual puede encontrarse en la Figura 4.4.

Guía 4 Aquí está cómo se puede ver el proceso de transposición didáctica en la cuarta guía de trabajo proporcionada sobre la ecuación de Pell:

- Saber sabio (saber matemático): La guía aborda la relación entre las soluciones de la ecuación de Pell y la Teoría de Grupos, destacando su importancia en áreas como la simetría y el álgebra abstracta. Además, proporciona contexto histórico sobre la evolución de la Teoría de Grupos desde la antigüedad hasta el siglo XIX, incluyendo contribuciones importantes de matemáticos como Euler, Lagrange, Galois y Dirichlet.

Figura 4.5: Esquema de la transposición didáctica realizada en la guía 4

- La guía presenta la ecuación de Pell y el lema de Brahmagupta en un contexto accesible para los estudiantes, utilizando herramientas computacionales como GeoGebra para visualizar las soluciones y comprender su comportamiento. También incluye actividades prácticas que permiten a los estudiantes experimentar con las operaciones definidas por el lema de Brahmagupta.

- Objeto de enseñanza: La guía de trabajo sirve como objeto de enseñanza al integrar conceptos matemáticos avanzados con la historia y el contexto histórico relevante. Proporciona una experiencia de aprendizaje completa que incluye actividades prácticas, visualización de conceptos y análisis de resultados, lo que ayuda a los estudiantes a comprender la ecuación de Pell y su relación con la Teoría de Grupos.

A continuación, se presenta un esquema que resume de manera más clara lo expuesto, el cual puede encontrarse en la Figura 4.5.

En resumen, las cuatro guías de trabajo muestran como se transforma el saber matemático avanzado relacionado con la ecuación de Pell en un objeto de enseñanza accesible y comprensible para los estudiantes a través de la transposición didáctica.

Se simplifican y adaptan los contenidos matemáticos para hacerlos adecuados para el contexto educativo, y se proporcionan actividades prácticas que facilitan el aprendizaje activo y significativo.

Ahora dando un enfoque a los procesos u operaciones que se realizaron realizar para lograr una Transposición didáctica, según Ramírez Bravo (2005), tenemos para cada una de las guías cada paso a seguir.

Guía 1 Siguiendo los pasos sugeridos para adaptar la primera guía de trabajo sobre la proposición de Euclides y la resolución de la ecuación de Pell:

1. Seleccionar:
    - Identificar los temas matemáticos relevantes para la proposición de Euclides: geometría (teorema de Pitágoras, segmentos iguales y desiguales), álgebra (ecuaciones cuadráticas), y teoría de números (ecuación de Pell).
    - Para la resolución de la ecuación de Pell: conceptos de teoría de números, como números enteros, ecuaciones diofánticas y números libres de cuadrados.
2. Reducir:
    - Condensar los temas seleccionados para hacerlos pertinentes para el nivel de los estudiantes y los objetivos de la guía.
    - Por ejemplo, simplificar la explicación de la proposición de Euclides y centrarse en los aspectos geométricos más relevantes, como la relación entre los segmentos y sus áreas.
    - Para la ecuación de Pell, enfocarse en la idea central de encontrar soluciones

enteras para la ecuación $x^2 - Dy^2 = 1$, y proporcionar ejemplos prácticos para ilustrar cómo se aplican los conceptos matemáticos en la resolución de problemas.

3. Simplificar:

   - Hacer los conceptos y procedimientos matemáticos más comprensibles para los estudiantes.
   - Utilizar ejemplos claros y actividades prácticas que ayuden a visualizar y comprender los conceptos.
   - Por ejemplo, proporcionar ejercicios pasó a paso que guíen a los estudiantes a través de la construcción de la figura geométrica requerida para la proposición de Euclides, utilizando el geoplano.
   - Para la resolución de la ecuación de Pell, ofrecer ejemplos numéricos concretos y explicar detalladamente el proceso para encontrar soluciones.

4. Reformular:

   - Reescribir los contenidos matemáticos de manera que sean enseñables y comprensibles para los estudiantes.
   - Identificar posibles dificultades conceptuales y estructurales y abordarlas en la guía.
   - Por ejemplo, proporcionar explicaciones adicionales y ejemplos para aclarar conceptos difíciles, como la relación entre los segmentos en la proposición de Euclides.
   - Para la ecuación de Pell, anticipar posibles confusiones sobre la termino-

logía y los pasos del proceso de resolución, y proporcionar aclaraciones adicionales para garantizar una comprensión completa.

Guía 2 Ahora para la segunda guía de trabajo tenemos:

1. Seleccionar:
   - La guía selecciona temas como la historia de la irracionalidad de la raíz cuadrada de 2 y la definición de la ecuación de Pell.
   - Estos temas se eligen en función de su relevancia histórica y su importancia en la teoría de números.
2. Reducir:
   - La guía condensa la historia de la raíz cuadrada de 2 y su relación con la ecuación de Pell, enfocándose en los aspectos esenciales para comprender la naturaleza de la ecuación y su resolución.
   - Se integran las definiciones clave, como la ecuación diofántica y la proposición relacionada con la solución de $x^2 2y^2 = 1$.
3. Simplificar:
   - La guía busca simplificar los conceptos matemáticos, utilizando una planilla electrónica como herramienta para facilitar la programación de algoritmos y la exploración de soluciones.
   - Se realizan análisis numéricos para obtener aproximaciones de la raíz cuadrada y se busca comprender la relación entre las soluciones de la ecuación de Pell y la aproximación de $\sqrt{2}$.
4. Reformular:

- La guía presenta los contenidos matemáticos de manera enseñable y accesible, permitiendo a los estudiantes experimentar con la programación de algoritmos en una planilla electrónica.
- Se fomenta la reflexión sobre la generalización del método de Euclides y la exploración de soluciones para valores de D diferentes de 2, promoviendo así una comprensión más profunda de la ecuación de Pell.

Guía 3 Luego aplicando los pasos para la tercera guía de trabajo sobre la ecuación de Pell:

1. Seleccionar:
    - Identificar los temas matemáticos relevantes: la ecuación de Pell, el lema de Brahmagupta y su relación con las soluciones de la ecuación.
    - Temas adicionales incluyen el uso de herramientas algebraicas y planillas electrónicas para encontrar y comparar soluciones.
2. Reducir:
    - Condensar los temas seleccionados para que sean pertinentes y comprensibles para el nivel de los estudiantes.
    - Simplificar la explicación del lema de Brahmagupta y su aplicación en la búsqueda de soluciones para la ecuación de Pell.
    - Enfatizar la importancia del lema de Brahmagupta como una herramienta para generar nuevas soluciones a partir de soluciones conocidas.
3. Simplificar:
    - Hacer los conceptos y procedimientos matemáticos más accesibles mediante

ejemplos claros y actividades prácticas.

- Utilizar una planilla electrónica para ilustrar cómo se pueden encontrar y comparar soluciones de la ecuación de Pell de manera eficiente.
- Proporcionar ejemplos numéricos concretos y guiar a los estudiantes a través del proceso paso a paso.

4. Reformular:
   - Reescribir los contenidos matemáticos de manera que sean enseñables y comprensibles.
   - Identificar posibles dificultades conceptuales, como entender el propósito y la aplicación del lema de Brahmagupta, y abordarlas en la guía.
   - Ofrecer explicaciones detalladas y ejemplos adicionales para ayudar a los estudiantes a entender el lema de Brahmagupta y su relevancia en la resolución de la ecuación de Pell.
   - Destacar las diferencias entre el enfoque utilizado en esta guía y el de la guía anterior, y explicar cómo se complementan entre sí en la comprensión de la ecuación de Pell.

Guía 4 Por ultimo en la cuarta guía de trabajo los pasos a seguir se clasificaron de la siguiente manera:

1. Seleccionar:
   - La guía selecciona temas relevantes como la historia de la Teoría de Grupos, la ecuación de Pell y el Lema de Brahmagupta.
   - Estos temas se eligen en función de su importancia en la teoría de números

y su relevancia para comprender la relación entre soluciones de la ecuación de Pell.

2. Reducir:

   - La guía condensa la historia de la Teoría de Grupos y la relevancia de la ecuación de Pell en el contexto matemático.

   - Se integran los conceptos de la ecuación de Pell y el Lema de Brahmagupta en función de su conexión lógica y su importancia para comprender la naturaleza de las soluciones.

3. Simplificar:

   - La guía busca hacer comprensibles los conceptos y teoremas relacionados con la ecuación de Pell, utilizando GeoGebra para visualizar gráficamente las soluciones y su comportamiento.

   - Se simplifican los pasos y los conceptos matemáticos, permitiendo a los estudiantes explorar de manera intuitiva la relación entre las soluciones de la ecuación de Pell.

4. Reformular:

   - La guía presenta los contenidos científicos de manera enseñable y accesible, permitiendo a los estudiantes identificar las conexiones entre los conceptos y realizar operaciones con las soluciones de la ecuación de Pell.

   - Se fomenta la reflexión sobre el impacto del orden de las operaciones en los resultados, así como la identificación de elementos neutros en el conjunto de soluciones.

Estos procesos permiten adaptar el saber matemático sobre la Ecuación de Pell a las necesidades y capacidades de los estudiantes, facilitando su comprensión y aprendizaje dentro del contexto educativo.

4.2.6 Consideración de los posibles errores y dificultades de los y las estudiantes

Basados en Apartado 2.2, en este apartado mostraremos alguno de los errores que podría cometer un estudiante al realizar las guías, y como la estructura de la guía permite que estos errores se eviten, primeramente aquí hay algunos posibles errores que los estudiantes podrían cometer al desarrollar estas guías de trabajo:

- **Falta de comprensión conceptual**: Los estudiantes podrían tener dificultades para comprender los conceptos fundamentales detrás de la ecuación de Pell, como las ecuaciones diofánticas, la historia detrás de la ecuación y su importancia en la teoría de números.

- **Errores en la implementación de algoritmos**: Al programar algoritmos en una plantilla electrónica, los estudiantes podrían cometer errores en la codificación, lo que llevaría a resultados incorrectos o a la falta de funcionamiento del algoritmo.

- **Confusión en el uso de herramientas computacionales**: Utilizar herramientas como GeoGebra o plantillas electrónicas puede ser desafiante para algunos estudiantes. Podrían cometer errores al ingresar datos, configurar gráficos o utilizar funciones específicas de estas herramientas.

- **Errores en la interpretación de resultados**: Los estudiantes podrían interpretar incorrectamente los resultados obtenidos, especialmente en actividades que requieren análisis algebraico o geométrico. Esto podría deberse a una falta de comprensión de los conceptos involucrados o a errores en el cálculo.

- **Falta de atención a los detalles**: En actividades que involucran construcciones geométricas o manipulación de datos, los estudiantes podrían pasar por alto detalles importantes o cometer errores simples debido a la falta de atención.
- **Falta de generalización**: Los estudiantes podrían tener dificultades para generalizar los resultados obtenidos en las actividades a otros casos o situaciones, lo que limitaría su comprensión del tema.
- **Falta de comunicación clara**: Al presentar sus resultados, los estudiantes podrían no comunicar claramente sus hallazgos, conclusiones o el proceso seguido para llegar a ellos, lo que dificultaría la evaluación de su trabajo por parte del profesor.

Para evitar estos errores, es importante que los estudiantes trabajen de manera cuidadosa, prestando atención a los detalles, comprendiendo los conceptos fundamentales y buscando ayuda cuando sea necesario.

El diseño de las guías de trabajo puede contribuir a prevenir algunos de los errores mencionados anteriormente mediante las siguientes estrategias:

- **Claridad en los objetivos y las instrucciones**: Las guías deben establecer claramente los objetivos de aprendizaje y proporcionar instrucciones paso a paso para cada actividad. Esto ayuda a los estudiantes a comprender lo que se espera de ellos y cómo abordar cada tarea.
- **Explicación detallada de los conceptos**: Antes de comenzar con las actividades, las guías deben incluir una explicación detallada de los conceptos

relevantes, como las ecuaciones diofánticas, la historia de la ecuación de Pell y los métodos para resolverla. Esto ayuda a los estudiantes a comprender la importancia de lo que están estudiando y cómo se relaciona con otros temas en matemáticas.

- **Ejemplos ilustrativos**: Incluir ejemplos ilustrativos puede ayudar a los estudiantes a visualizar los conceptos y entender cómo aplicarlos en diferentes situaciones. Los ejemplos también pueden mostrar posibles errores comunes y cómo evitarlos.

- **Guía paso a paso para herramientas computacionales**: Si las actividades involucran el uso de herramientas computacionales como Excel o GeoGebra, las guías deben proporcionar instrucciones detalladas sobre cómo utilizar estas herramientas, desde la introducción de datos hasta la interpretación de resultados.

- **Revisión y retroalimentación**: Las guías deben incluir oportunidades para que los estudiantes revisen su trabajo y reciban retroalimentación, ya sea a través de autoevaluación, revisión por pares o retroalimentación del profesor. Esto les permite corregir errores y mejorar su comprensión.

- **Actividades de generalización**: Las guías pueden incluir actividades que fomenten la generalización de los conceptos aprendidos, como la aplicación de métodos y algoritmos a diferentes casos o la exploración de extensiones de los problemas planteados.

- **Énfasis en la comunicación clara**: Se puede alentar a los estudiantes a comunicar claramente sus procesos de pensamiento y resultados mediante la inclusión de secciones para explicar su razonamiento, justificar sus respuestas y discutir cualquier dificultad encontrada durante el proceso de resolución.

En resumen, un diseño cuidadoso de las guías de trabajo puede ayudar a prevenir errores al proporcionar orientación clara, explicaciones detalladas, ejemplos ilustrativos y oportunidades para revisión y retroalimentación.

La inclusión de información histórica sobre la ecuación de Pell y su relevancia a lo largo del tiempo no solo proporciona un contexto enriquecedor para el estudio, sino que también motiva a los estudiantes a profundizar en el tema. Conocer la historia detrás de la ecuación de Pell y las contribuciones de matemáticos famosos como Euclides, Brahmagupta, Euler y otros puede despertar el interés de los estudiantes, mostrando la relevancia y la importancia de los conceptos matemáticos en diferentes contextos y períodos de tiempo.

- **Comprensión de conceptos**: La historia puede servir como un vehículo para explicar conceptos matemáticos complejos de manera más accesible y comprensible. Al relacionar los conceptos con ejemplos históricos o anécdotas, los estudiantes pueden desarrollar una comprensión más profunda de los temas y su aplicación en situaciones reales.

- **Perspectiva histórica**: La historia proporciona una visión más amplia sobre el desarrollo de las matemáticas a lo largo del tiempo, mostrando cómo los problemas y teoremas matemáticos han sido abordados y desarrollados por diferentes culturas y épocas. Esto puede ayudar a los estudiantes a apreciar la diversidad y la universalidad de las matemáticas, así como a comprender la naturaleza dinámica y en constante evolución de la disciplina.

Al integrar la historia de las matemáticas en el diseño de las guías de trabajo, se puede enriquecer la experiencia de aprendizaje de los estudiantes al proporcionar contexto, comprensión de conceptos y una perspectiva histórica sobre los temas estudiados.

Los conceptos concretos, pictóricos y simbólicos se pueden ver reflejados en las guías de trabajo de varias maneras, y su inclusión puede ser beneficiosa para el aprendizaje de los estudiantes.

1. **Concreto**: En las guías de trabajo, los conceptos concretos pueden estar representados por actividades prácticas que involucren manipulativos físicos o materiales tangibles, como en el caso del geoplano mencionado en la Guía 1. La construcción de figuras geométricas con un geoplano es una actividad concreta que permite a los estudiantes experimentar directamente con los conceptos geométricos y visualizar relaciones espaciales.

Esto ayuda a los estudiantes a desarrollar una comprensión intuitiva de los conceptos matemáticos antes de pasar a representaciones más abstractas. Además, proporciona una experiencia sensorial que puede hacer que los conceptos sean más significativos y memorables.

2. **Pictórico**: Las representaciones pictóricas se utilizan en las guías de trabajo para ayudar a los estudiantes a visualizar conceptos matemáticos de manera gráfica o diagramática. Por ejemplo, las figuras geométricas trazadas en el geoplano en la Guía 1 proporcionan una representación pictórica de las relaciones entre segmentos y puntos en el plano.

Estas representaciones visuales pueden ayudar a los estudiantes a comprender conceptos abstractos de manera más accesible, especialmente para aquellos que son aprendices visuales. Las imágenes y diagramas también pueden facilitar la comunicación de ideas matemáticas complejas y servir como herramientas de apoyo para el aprendizaje.

3. **Simbólico**: Los conceptos simbólicos se refieren a la manipulación de símbolos y expresiones matemáticas abstractas. En las guías de trabajo, los estudiantes pueden encontrar ecuaciones, fórmulas y notación matemática que representan los conceptos que están estudiando, como la ecuación de Pell en la Guía 1.

La manipulación de símbolos y la resolución de problemas matemáticos utilizando expresiones simbólicas ayudan a los estudiantes a desarrollar habilidades en el razonamiento abstracto y la manipulación algebraica. Esto les permite generalizar conceptos, resolver problemas de manera sistemática y comunicar ideas matemáticas de manera precisa.

La inclusión de conceptos concretos, pictóricos y simbólicos en las guías de trabajo proporciona múltiples modalidades de aprendizaje que pueden satisfacer las necesidades de diversos tipos de estudiantes y facilitar la comprensión y aplicación de los conceptos matemáticos. Además, esta variedad de enfoques puede hacer que el aprendizaje sea más dinámico y enriquecedor.

En resumen, un diseño cuidadoso de las guías de trabajo puede ayudar a prevenir errores al proporcionar orientación clara, explicaciones detalladas, ejemplos ilustrativos y oportunidades para revisión y retroalimentación.

Ahora presentando los errores que se podría cometer en cada guía y que se realizó para evitar estos errores tenemos:

1. Primera guía

    - **Error en la construcción de la figura geométrica**: El estudiante podría trazar incorrectamente los segmentos o no seguir las indicaciones adecuadamente, lo que resultaría en una figura geométrica incorrecta desde el principio, es por esto que se le da la indicación que le sugiere al estudiante trazar el segmento $\overline{AB}$ paralelo a uno de los lados del Geoplano.

- **Malinterpretación de las relaciones entre segmentos**: El estudiante podría tener dificultades para identificar las relaciones entre los segmentos de la figura construida, lo que podría llevar a errores en la aplicación del Teorema de Pitágoras y, por lo tanto, en la demostración de la proposición de Euclides, de ahí que se considera las siguientes indicaciones

  Indicación: Observe los segmentos que tienen igual medida y utilice el Teorema de Pitágoras.

  Indicación: Observe la base $\overline{AB}$ del triángulo formado anteriormente. Para así guiar al estudiante con los segmentos que debe utilizar y como relacionarlos a través del teorema de Pitágoras.

- **Confusión en la aplicación del algoritmo para encontrar otra solución de la ecuación de Pell**: Si el estudiante no comprende completamente el algoritmo o comete errores en su aplicación, podría obtener una solución incorrecta o incompleta, dado esto de le menciona al estudiante a través de una indicación que recuerde que la solución de una ecuación de dos incógnitas se puede representar con un par ordenado, para que así tenga como foco encontrar pares ordenados, y no una solución que no tenga relación con la ecuación.

2. Segunda guía

- **Errores de programación en la implementación del algoritmo**: Los estudiantes podrían cometer errores al programar el algoritmo para encontrar soluciones de la ecuación de Pell. Esto podría resultar en un código incorrecto que no genere las soluciones esperadas, es por esto que se les muestra un ejemplo de cómo podría ser la tabla, para que así se guíen en la construcción de algoritmo en la plantilla electrónica.

- **Errores en la manipulación algebraica**: Durante la demostración de la relación $x^2 2y^2 = 1$ y $\frac{x}{y} = \sqrt{2 + \frac{1}{y^2}}$.

  Los estudiantes podrían cometer errores en la manipulación algebraica, especialmente al simplificar expresiones o al realizar operaciones con raíces cuadradas, es por ello que se tomó la decisión de desglosar ese problema en cuatro pasos a seguir, incluso en dar como indicación que se use una calculadora, o su programa favorito, para encontrar el valor de raíz de 2.

3. Tercera guía

- **Errores en la demostración de la identidad**: Los estudiantes podrían cometer errores en el desarrollo algebraico de ambos lados de la identidad, especialmente al expandir los términos y al manipular las expresiones, dado esto es que se les da la indicación de que desarrolle ambos lados de la igualdad, para que así tenga noción de como comenzar la demostración.

- **Errores en la demostración del lema de Brahmagupta**: Si los estudiantes no comprenden completamente cómo utilizar la identidad demostrada en el punto anterior, podrían cometer errores al intentar demostrar el lema de Brahmagupta, dado esto se les indica a los estudiantes que consideraran $k = k' = 1$.

4. Cuarta guía

- **Errores en la identificación y gráfica de puntos**: Los estudiantes podrían cometer errores al seleccionar los puntos que representan las soluciones de la ecuación de Pell y al graficarlos en la curva, por lo que se da la instrucción de que puede ser cualquier par ordenado en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

- **Errores en la interpretación de resultados**: Los estudiantes podrían cometer errores al interpretar los resultados obtenidos al operar dos puntos de la curva. Esto podría incluir una interpretación incorrecta de por qué se obtiene otro punto de la curva después de la operación, así como una falta de comprensión sobre cómo afecta el orden de combinación de las soluciones, para esto se le sugiere al estudiante que utilice una plantilla electrónica para realizar cada uno de los pasos de la última actividad.

Cabe destacar que cuando las guías sean aplicadas, una buena práctica guiada puede proporcionar oportunidades para que los estudiantes practiquen cada paso de la actividad bajo la supervisión del profesor, esto puede ayudar a corregir errores y aclarar conceptos malentendidos antes de que los estudiantes intenten realizar la actividad por su cuenta.

4.2.7 Secuencia Didáctica

En las guías de trabajo se incluyen elementos que pueden ser utilizados en la planificación de una secuencia didáctica, otros quedan a criterio de quien utilizará el material diseñado.

- Objetivo de aprendizaje/Indicadores: ver de la Tabla 4.1 a 4.4.
- Inicio de la clase: Comenzamos la sesión introduciendo una breve historia relacionada con los temas que abordaremos durante la clase. Esta narrativa tiene como objetivo motivar a los estudiantes y despertar su interés en el contenido que exploraremos.

- Desarrollo de la clase: Durante esta etapa, seguimos una serie de pasos diseñados para alcanzar los objetivos de aprendizaje establecidos en cada guía.
- Cierre de la clase: Concluimos la sesión mediante la demostración o exploración de un teorema o lema relevante, que servirá como base para el trabajo futuro en las siguientes guías.

4.3 Discución de los resultados

La introducción de problemas matemáticos desafiantes en el ámbito educativo ha sido un tema de interés, destacado por Felmer y Perdomo-Díaz (2017). Se plantea que un problema matemático, en esencia, representa una situación en la cual el estudiante enfrenta una dificultad sin contar con un procedimiento claro para su resolución. Este desafío es lo que genera el interés y la motivación en el estudiante para abordar la situación. En este contexto, se plantea la idea de utilizar la Teoría de Números como un campo propicio para la exploración matemática, presentando fenómenos intrigantes como números primos, divisibilidad y congruencias. La Teoría de Números, por su naturaleza, abre las puertas a la curiosidad y puede inspirar a los estudiantes a ir más allá de los conceptos tradicionales en el aula.

En relación a los heurismos, es necesario destacar, Stiller et al. (2021):

> La nomenclatura propuesta por Bruder es en parte torpe/desacertada[1] y confusa: la denominación elegida para las herramientas como heurísticas no es precisa, como queda claro, especialmente en el subpunto de Almacenamiento de Conocimientos y Almacenamiento de Conocimientos reestructurado (Bruder y Collet 2011, pág. 37). La distinción entre

[1] ungeschickt.

> estrategias y principios tampoco es totalmente plausible, pero es evidente que, a diferencia de Schwarz y Schreiber, Bruder no fundamenta esta clasificación en las propiedades inmanentes de las heurísticas, sino que la relaciona con el contexto de aplicación [en el aula].
>
> [En relación a estos sistemas de clasificación,] Schwarz ha realizado una sistematización orientada a las matemáticas aplicadas, proporcionando una visión integral, clara y bien estructurada de las heurísticas, su clasificación y sus posibles aplicaciones. Por otro lado, la categorización de Bruder y Collet está orientada didácticamente, enfocándose en aquellas heurísticas que han demostrado ser significativas y prácticamente viables en la Educación Secundaria[2].

En concordancia con lo previamente expuesto y discutido con los integrantes del panel de expertos. La observación sobre la nomenclatura propuesta por Bruder y Collet, destacada por Stiller et al. (2021), refleja un punto relevante y ofrece una perspectiva crítica. Aunque esta resalta aspectos de la nomenclatura, se debe tener en cuenta que no contradice los hallazgos presentados en este trabajo de titulación, ya que se basa en evaluaciones específicas de la terminología y la orientación didáctica. Por lo tanto, se considera que esta información es pertinente para contextualizar el análisis de los heurismos, sin desestimar la validez de los resultados obtenidos.

Uno de los aspectos destacados es la preparación que brinda este enfoque para conceptos y teorías matemáticas más avanzadas. Felmer y Perdomo-Díaz (2017) sugieren que la resolución de problemas en la Teoría de Números sienta las bases para disciplinas matemáticas más complejas, como álgebra abstracta, análisis complejo y matemáticas discretas. Este planteamiento se refuerza con el análisis bibliográfico de

[2] Sekundarstufe I.

Kipman (2018), quien sostiene que la competencia para resolver problemas implica la búsqueda de rutas de solución y el compromiso con el proceso de resolución.

Sin embargo, al abordar un problema tan avanzado y completo como la Ecuación de Pell, se presenta un desafío adicional. La necesidad de crear una ruta de solución específica para este problema condujo a la aplicación del concepto de transposición didáctica, según las definiciones proporcionadas por Chevallard (1998). En este caso, la creación de una guía o secuencia didáctica para abordar la Ecuación de Pell se ajusta su trabajo, permitiendo que los estudiantes de enseñanza media enfrenten el problema de manera estructurada.

Esta adaptación se realiza con pleno conocimiento de la complejidad del proceso de resolución de la Ecuación de Pell, reconociendo que cada paso puede resultar desafiante para un estudiante de enseñanza media. La transposición didáctica se convierte así en una herramienta esencial para facilitar la comprensión y el abordaje del problema, permitiendo que los estudiantes se sumerjan en la resolución de un problema matemático avanzado.

Finalmente, la reflexión de Malaspina et al. (2015), basada en la idea de Silver, aporta una perspectiva interesante sobre la formulación de problemas matemáticos. La capacidad de formular problemas matemáticos ya sea mediante variaciones de un problema existente o la creación de nuevos problemas a partir de situaciones reales o imaginarias, se considera un proceso valioso. En el contexto de la enseñanza de la Ecuación de Pell, esta capacidad de formulación de problemas puede fomentar una comprensión más profunda y una mayor implicación por parte de los estudiantes.

En resumen, la introducción de problemas matemáticos avanzados, como la Ecuación de Pell, en la enseñanza media requiere una cuidadosa transposición didáctica para hacerlos accesibles y comprensibles.

Capítulo 5

Conclusiones y Proyecciones

5.1 Conclusiones

En conclusión, el desarrollo de esta tesis implicó enfrentar diversos desafíos, especialmente al trabajar con heurismos y adaptar la resolución de la Ecuación de Pell para su aplicación en la enseñanza media. En primer lugar, la ambigüedad en la definición de heurismos por parte de diferentes autores requirió un esfuerzo significativo para establecer conexiones claras entre estas estrategias y las actividades propuestas en las guías de trabajo.

En segundo lugar, la adaptación de la resolución de la Ecuación de Pell fue un proceso complejo que demandó una profunda investigación sobre la transposición didáctica y los errores comunes de los estudiantes. La necesidad de descomponer el problema en pasos comprensibles para los estudiantes añadió un componente desafiante, pero fundamental, para lograr que cada actividad reflejara la habilidad de resolución de problemas y promoviera el desarrollo de esta destreza en los estudiantes.

Por último, la creación de las cuatro guías de trabajo no solo implicó la resolución de un problema complejo, sino también la estructuración de cada guía con un inicio, desarrollo y cierre coherentes. La asociación de cada guía con objetivos de aprendizaje de la enseñanza media fue un proceso que demandó tiempo y dedicación, ya que la complejidad de la resolución de la Ecuación de Pell inicialmente no parecía alinearse con los niveles educativos correspondientes. Sin embargo, la reestructuración del problema en múltiples actividades permitió establecer una conexión efectiva con la enseñanza media, siempre y cuando los estudiantes demuestren interés y motivación por la disciplina.

En resumen, esta investigación no solo contribuye a la comprensión de los heurismos y la adaptación de problemas matemáticos complejos, sino que también proporciona guías de trabajo prácticas y alineadas con los objetivos de aprendizaje de la enseñanza media, fomentando así el desarrollo de habilidades de resolución de problemas en los estudiantes interesados y motivados.

5.2 Proyecciones y limitaciones

A continuación, se exponen algunas proyecciones donde se podría optimizar el trabajo de titulación:

1. **Aplicación de las guías propuestas**: implementar la propuesta didáctica en establecimientos educativos, para evaluar su eficacia en la resolución de problemas orientada a la Teoría de Números, realizando talleres o clases en donde se pueda estudiar, analizar y recopilar información sobre el desempeño de los estudiantes, sobre como resuelven las guías y su comprensión del tema.

2. **Estudio sobre el proceso de resolución de problemas de profesionales**

de la matemática: realizar una investigación sobre las estrategias y métodos que utilizan los matemáticos y matemáticas para resolver problemas de Teoría de Números y como logran crear problemas. Esto podría incluir entrevistas con expertos en el campo y revisión bibliográfica sobre el tema.

3. **Análisis del conocimiento docente**: investigar si los profesores del sistema educativo tienen conocimientos sólidos en la habilidad de resolución de problemas y la creación de problemas. Realizar encuestas o entrevistas a docentes para entender cómo abordan la creación de problemas matemáticos y si se sienten cómodos realizando problemas desafiantes en esta área; dentro de esto podría ir la evaluación de la habilidad para crear problemas, en donde se puede diseñar un estudio para evaluar la capacidad de los profesores para crear problemas; podría incluir la creación de un banco de problemas por parte de los docentes y su posterior evaluación por expertos en la materia.

4. **Desarrollo de recursos didácticos**: basándose en los resultados obtenidos sobre el proceso de resolución de problemas y la habilidad que tienen los profesores para crearlos, desarrollar recursos didácticos específicos. Esto podría ser en forma de guías, material concreto o herramientas interactivas para ayudar a los docentes a mejorar la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos, implementando diferentes áreas de la matemática, como los es La Teoría de Números.

Al poner en funcionamiento estas proyecciones, se podría obtener una visión más completa sobre cómo abordar la enseñanza de la teoría de números y la resolución de problemas en el sistema educativo, considerando tanto las estrategias de los matemáticos expertos como las habilidades y necesidades de los profesores y estudiantes.

El desarrollo de esta propuesta didáctica se ha visto limitada por la escasez de literatura y estudios disponibles que aborden específicamente la metodología para la creación de problemas matemáticos originales. La falta de recursos y textos académicos accesibles que detallen en profundidad este proceso ha representado un desafío significativo, debido a que dificulta la obtención de procedimientos claros que indiquen como generar problemas matemáticos que sean verdaderamente innovadores y no procedentes de ejemplos previamente propuestos.

Además, otra limitación destacada ha sido que la mayoría de esta información, textos y estudios están escritos en japonés. La inaccesibilidad de gran parte de estos recursos en otros idiomas ha obstaculizado el acceso completo a los conocimientos y las perspectivas desarrolladas en esta área, limitando así la comprensión y aplicación de metodologías novedosas para la creación de problemas matemáticos.

Estas limitaciones han marcado un camino de investigación más desafiante para avanzar de manera más integral en la creación de la propuesta didáctica.

Bibliografía

Abancin Ospina, R. A., y Castillo Marrero, Z. N. (2022). Tipificación de errores en evaluaciones matemáticas de un primer curso universitario. *Explorador Digital*, *6*(3), 6-27. https://doi.org/https://doi.org/10.33262/exploradordigital.v6i3.2196

Abrate, R. S., Pochulu, M. D., y Vargas, J. M. (2006). *Errores y dificultades en Matemática: Análisis de causas y sugerencias de trabajo* (1.ª ed.). Universidad Nacional de Villa María.

Agencia de Calidad de la Educación. (2014). SOBRE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Análisis de los resultados de la Prueba PISA 2012. *Educación*, (1). http://archivos.agenciaeducacion.cl/Sobre_resolucion_de_problemas_Analisis_de_resultados_PISA_2012.pdf

Agencia de Calidad de la Educación. (2019). PISA 2018 Entrega de Resultados Competencia Lectora, Matemática y Científica en estudiantes de 15 años en Chile. *Educación*, (1). http://archivos.agenciaeducacion.cl/PISA_2018_Entrega_de_Resultados_Chile.pdf

Agencia de Calidad de la Educación. (2020). TIMSS 2019 Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias. *Educación*, (1). https://archivos.agenciaeducacion.cl/Resultados_TIMSS_2019_version_extendida_final.pdf

Agencia de Calidad de la Educación. (2023). Resultados educativos de 2022. *Educación*, (1). chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://s3.amazonaws.com/archivos.agenciaeducacion.cl/PPT+Conferencia+Prensa+Simce+2022+14+junio.pdf

Andrews, G. E. (1971). *Number theory*. Saunders.

Apostol, T. M. (1976). *Introduction to analytic number theory* (S. Axler, F. W. Gehring y K. A. Ribet, Eds.). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-5579-4

Arreaza, T., & Valencia, I. (2015). La resolución de problemas matemáticos: una estrategia en el aula de clase, 553-560. http://funes.uniandes.edu.co/10822/

Astolfi, J. P. (2003). *El "error", un medio para enseñar* (P. Espejo, Ed.; 2.ª ed.). Díada Editora.

Ballestero, C., y Mayela, M. (2008). Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en matemáticas. *Educación*, *32*(1), 123-138. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=44032109

BIFIE (Hrsg.) (2013). *Themenheft Mathematik „Problemlösen". Volksschule Grundstufe I + II.* Graz: Leykam.

Bringmann, K., Bugeaud, Y., Hilberdink, T., y Sander, J. (2015). *Four Faces of Number Theory* (A. Ranicki, Ed.). European Mathematical Society.

Brown, J., Skow, K., y the IRIS Center. (2016). *Mathematics: Identifying and Addressing Student Errors* (J. Miller, Ed.). https://iris.peabody.vanderbilt.edu/wp-content/uploads/pdf_case_studies/ics_matherr.pdf

Brückler, F. M. (2017). *Geschichte der Mathematik kompakt: Das Wichtigste aus Arithmetik, Geometrie, Algebra, Zahlentheorie und Logik* (1.ª ed.). Springer. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-662-55574-3

Bruder, R., y Collet, B. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Cornelsen Scriptor.

Castillo, M. Ecuación de Pell I. En: Universidad de Concepción. 2012, julio.

Cerda, G., Flores, C., y Pérez, C. (2015). Patrones de errores de estudiantes chilenos enresolución de problemas matemáticos. *Revista de Psicología y Educación*, *10*(2), 139-160.

Chahal, J. S. (2004). Pell's Equation and the Unity of Mathematics. En I. Grattan-Guinness (Ed.), *History of the Mathematical Sciences* (pp. 163-170). Hindustan Book Agency.

Chen, L., Dooren, W. v., y Verschaffel, L. (2015). Enhancing the Development of Chinese Fifth- Graders' Problem-Posingand Problem- Solving Abilities, Beliefs, and Attitudes: A Design Experiment. En F. M. Singer, N. F. Ellerton y J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing* (pp. 309-329). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_15

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado* (3.ª ed.). Aique.

Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas. (2021). *Estándares Pedagógicos y Disciplinarios para Carrerasde Pedagogía en Matemática* (Ministerio de Educación, Ed.).

Cruz, G. J. D. (2017). El desarrollo de habilidades cognitivas mediante la resolución de problemas matemáticos. *Journal of Science and Research*, *2*(5), 14-17.

Curd, D. (2014, mayo). *Pell's Equation: History, Methods, and Number Theory* [Tesis doctoral, Texas Christian University]. https://repository.tcu.edu/handle/116099117/7234

Davidson, J. E., y Sternberg, R. J. (2003). *The Psychology of Problem Solving* (1.ª ed.). Cambridge University Press.

Decreto 614 Establece bases curriculares de 7mo año básico a 2do medio en asignaturas que indica (2013, diciembre). https://bcn.cl/2bl9n

Díaz V., P. A. (2013). Resolución de Problemas en Matemática y su Integración con la Enseñanza de Valores Eticos: el caso de Chile. *Educación*, (1). https://www.scielo.br/j/bolema/a/GXfRqfVgSNGQZMYvkbpQwgv/?lang=esf

Díaz-Barriga, Á. (2014). Construcción de programas de estudio en la perspectiva del enfoque de desarrollo de competencias. *Perfiles educativos*, *36*(143), 142-162. https://perfileseducativos.unam.mx/iisue_pe/index.php/perfiles/article/view/44027/39836

Dickson, L. E. (1966). *History of the Theory of Numbers* (Vol. 2). Chelsea Pub Co.

Dörner, D. (1976). *Problemlosen Als Informationsverarbeitung*. Kohlhammer.

Duncker, K. (1974). *Zur Psychologie des produktiven Denkens* (3. Neudr., unveränd. Neudr. der im Verl. Springer, Berlin 1935 ersch. 1. Aufl.). Springer. https://doi.org/DOI10.1007/978-3-642-88750-5

Engel, A. (1998). *Problem-solving strategies*. Springer.

Escobar-Pérez, J., y Cuervo-Martínez, Á. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos: unaaproximación a su utilización. *Avances en Medición*, *6*, 27-36. https://www.researchgate.net/publication/302438451

Espinoza, C. G., Darragh, L., y Peri, A. Oportunidades para mejorar la calidad de las clases en matemáticas [XX Jornadas Nacionales de Educación Matemática]. En: XX Jornadas Nacionales de Educación Matemática. 2016, diciembre.

Etkin, E., Ruiz Balza, A., Pagani, G., y Etkin, P. (2022). *Todo sobre la tesis: Del proyecto a la defensa* (1.ª ed.). La Crujía.

Eves, H. (1983). *Great Moments in Mathematics Before 1650*. American Mathematical Society.

Felmer, P., y Perdomo-Díaz, J. (2015). *Activando la Resolución de Problemas en las Aulas*. ARPA.

Felmer, P., y Perdomo-Díaz, J. (2017). Un programa de desarrollo profesional docente para un currículo de matemática centrado en las habilidades: la resolución de problemas como eje articulador. *Educación Matemática*, *29*(1), 201-217. https://doi.org/10.24844/EM2901.08

Felmer Aichele, P. (2014, abril). *La Resolución de Problemas en la Formación Inicial de Profesores deMatemática de Enseñanza Media* (N.º 721209) (Proyecto FONIDE Nro: 721209). Centro de Modelamiento Matemático, U. de Chile. https://hdl.handle.net/20.500.12365/18538

Felmer P., Perdomo-Díaz J., Quiroz C., Turkieltaub A., & Ruiz B. (2019). *Problemas para activar la resolución de problemas en las aula* (LOM, Ed.; 1.ª ed.).

Fenster, D. D. (1999). Why Dickson Left Quadratic Reciprocity Out of His History of the Theory of Numbers. *The American Mathematical Monthly*, *106*(7), 618-627. https://doi.org/10.1080/00029890.1999.12005095

Fernández Bravo, J. A. (2006). Algo sobre resolución de problemas matemáticos en educación primaria. *Sigma-Revista de matemáticas*, *30*.

Feynman, R. P., y Leighton, R. (1997). *Surely You're Joking, Mr. Feynman!* (E. Hutchings, Ed.). W. W. Norton & Company.

Fontecha Moreno, G. C., y Vacca Díaz, E. A. (2020). Estudio de la Teoría de Números Aplicada a AlgunosMétodos Criptográ!cos haciendo uso de las TIC. *Revista Electrónica de Conocimientos, Saberes y Prácticas*, *3*(1), 49-71.

Fuchs, M. (2006). *Vorgehensweisen mathematisch potentiell begabter Dritt- und Viertklässler beim Problemlösen. Empirische Untersuchungen zur Typisierung spezifischer Problembearbeitungsstile.* Lit.

Gebel, I., y Kuzle, A. (2019, febrero). Implementation research in primary education: Design and evaluation of a problem-solving innovation. En U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (Vol. TWG23). Freudenthal Group. https://hal.science/hal-02429753

Gowers, T. (2008). *The Princeton Companion to Mathematics* (T. Gowers, J. Barrow-Green e I. Leader, Eds.). Princeton University Press.

Granados Paredes, G. (2006). Introducción a la criptografía. *Revista Digital Universitaria*, *7*(7).

Hardy, G. H. (2012). *A Mathematician's Apology.* Cambridge University Press.

Heath, T. L., et al. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements: Books I and II* (2.ª ed., Vol. 1). Dover.

Hernández Sampieri, R. (2004). *Metodología de la investigación* (3.ª ed.). McGraw Hill.

Hernández Sampieri, R., y Mendoza Torres, C. P. (2018). *Metodología de la investigación: Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta* (1.ª ed.). McGraw Hill.

Ireland, K., y Rosen, M. (1982). *A Classical Introduction to Modern Number Theory* (P. R. Halmos, F. W. Gehring y C. C. Moore, Eds.). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1779-2

Jacobson, M. J., y Williams, H. C. (2009). *Solving the Pell Equation* (1.ª ed.). Springer. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-0-387-84923-2

Kipman, U. (2018). *Problemlösen* (1.ª ed.). Springer Gabler Wiesbaden. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-658-22370-0

Klix, F. (1971). *Information und Verhalten*. Huber.

Křížek, M., Somer, L., y Šolcová, A. (2021). *From Great Discoveries in Number Theory to Applications*. Springer. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-030-83899-7

Lemmermeyer, F. (2023). *4000 Jahre Zahlentheorie: Geschichte - Kulturen - Menschen I. Von Babel bis Abel* (1.ª ed., Vol. 1). Springer. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-662-68110-7

Lenstra, H. W. (2008). Solving the Pell equation. En J. P. Buhler y P. Stevenhagen (Eds.), *Algorithmic Number Theory: Lattices, Number Fields, Curves and Cryptography* (pp. 1-23, Vol. 44). Cambridge University Press.

Malaspina, U., Mallart, A., y Font, V. Development of teachers' mathematical and didacticcompetencies by means of problem posing (K. Krainer y N. Vondrová, Eds.). En: *CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (K. Krainer y N. Vondrová, Eds.). Ed. por Krainer, K., y Vondrová, N. Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME. Prague, Czech Republic, 2015, 2861-2866. https://hal.science/hal-01289630

McCarthy, J. (1956). The Inversion of Functions Defined by Turing Machines. En W. R. Ashby, C. E. Shannon y J. McCarthy (Eds.), *Automata Studies* (pp. 177-181, Vol. 34). Princeton University Press.

Miele, A. M. (2014). *The Effects of Number Theory Study on High School Students' Metacognition and Mathematics Attitudes (Order No. 3620892)* [Tesis doctoral, Columbia University]. https://www.proquest.com/docview/1540809465?pq-origsite=gscholar&fromopenview=true&sourcetype=Dissertations%20&%20Theses

Ministerio de Educación. (2015). *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio* (1.ª ed.). https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-37136_bases.pdf

Ministerio de Educación. (2018). *Bases Curriculares 1° básico a 6° básico* (1.ª ed.). https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-37136_bases.pdf

Ministerio de Educación. (2021a). *Programa de Estudio Geometría 3D de 3° y 4° medio Formación Diferenciada* (1.ª ed.). https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-37136_bases.pdf

Ministerio de Educación. (2021b). *Programa de Estudio Límites, Derivadas e Integrales 3° y 4° Medio Formación Diferenciada* (1.ª ed.). https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-37136_bases.pdf

Ministerio de Educación. (2021c). *Programa de Estudio Matemática 3° Medio* (1.ª ed.). https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-37136_bases.pdf

Ministerio de Educación. (2021d). *Programa de Estudio Matemática 4° Medio* (1.ª ed.). https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-37136_bases.pdf

Ministerio de Educación. (2021e). *Programa de Estudio Pensamiento Computacional y Programación 3° y 4° Medio Formación Diferenciada* (1.ª ed.). https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-37136_bases.pdf

Ministerio de Educación. (2021f). *Programa de Estudio Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial 3° y 4° Medio Formación Diferenciada* (1.ª ed.). https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-37136_bases.pdf

Ministerio de Educación. (2023). *Actualización de la priorización curricular para la reactivación integral de aprendizajes, Matemática* (Unidad de Curriculum y Evaluación, Ed.).

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., Kelly, D. L., y Fishbein, B. (2020). *TIMSS 2019 international results in mathematics and science*. TIMSS & PIRLS International Study Center. https://timssandpirls.bc.edu/timss2019/international-results/

Newell, A., y Simon, H. A. (1972). *Human problem solving*. Prentice-Hall.

Niven, I., Zuckerman, H. S., y Montgomery, H. L. (1991). *An Introduction to the Theory of Numbers* (5.ª ed.). John Wiley & Sons.

Nuria Gil Ignacio, E. G. B., Lorenzo J.Blanco Nieto. (2005). El papel de la afectividad en la resolución de problemas matemáticos.

OECD. (2014). *PISA 2012 results* (Vol. 5). https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1787/9789264208070-en

OECD. (2019). *PISA 2018 Results: What Students Know and Can Do* (Vol. 1). https://doi.org/10.1787/5f07c754-en.

Orrantia, J. (2006). dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva evolutiva.

Pettofrezzo, J. A., Byrkit, R. D., y Pomareda, R. J. (1972). *Introducción a la Teoría de los Números*. Prentice Hall International.

Pino-Fan, L. R., Molina-Caberom, J. G., Báez-Huaiquián, D. I., y Hernández-Arredondo, E. (2020). Criterios utilizados por profesores de matemáticas para el planteamiento de problemas en el aula. *Uniciencia*, *34*(2), 114-137. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.15359/ru.34-2.7

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas.

Posamentier, A. S., y Krulik, S. (2008). *Problem-solving strategies for efficient and elegant solutions, grades 6-12: a resource for the mathematics teacher* (2.ª ed.). Corwin.

Preiss, D., Larraín, A., y Valenzuela, S. (2011). Discurso y pensamiento en el aula matemática chilena. *Psykhe*, *20*(2), 131-146. https://doi.org/10.4067/S0718-22282011000200011

Radatz, H. (1979). Error Analysis in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *10*(3), 163-172. https://doi.org/https://doi.org/10.2307/748804

Ramírez Bravo, R. (2005). Aproximación al concepto de transposición didáctica. *Revista Folios*, (21), 33-45. https://www.redalyc.org/pdf/3459/345955978004.pdf

Recalde, M. A. (2016). *Potenciaría el Aprendizaje, la Aplicación didáctica del Facebook, desde una Perspectiva Constructivista, en Alumnos del Nivel Medio en el Espacio Curricular Matemática* [Tesis de maestría, Universidad Tecnológica Nacional]. http://hdl.handle.net/20.500.12272/1558

Reiss, K., y Hammer, C. (2013). *Grundlagen der Mathematikdidaktik: Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe* (1.ª ed.). Birkhauser. https://doi.org/10.1007/978-3-0346-0647-9

Robles Garrote, P., y del Carmen Rojas, M. (2015). La validación por juicio de expertos: dos investigaciones cualitativas en Lingüística aplicada. *Revista Nebrija de Lingüística Aplicada*, (18).

Rodríguez-Reyes, V. M. (2014). La formación situada y los principios pedagógicos de la planificación: la secuencia didáctica. *Ra Ximhai*, *10*(5), 445-456. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=46132134027

Ruiz, D., y García, M. (2003). El lenguaje como mediador en el aprendizaje de la aritmética en la primera etapa de Educación Básica. *Educere*, *7*(23), 321-327. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=35602302

Santos, J. P. d. O. (1998). *Introdução à Teoria dos Números* (E. L. Lima, J. Gomes y P. Sad, Eds.; 1.ª ed.). IMPA.

Saucedo, G. (2007). Categorización de errores algebraicos en alumnos ingresantes a la Universidad. *Itinerarios Educativos*, (2), 22-43.

Schoenfeld, A. H. (1989). *Mathematical thinking and problem solving (Studies in mathematicalthinking and learning)*. Routledge.

Schwarz, W. (2006). *Heuristische Strategien des Problemlösens. Eine fachmethodische Systematikfür die Mathematik*. WTM.

Silver, E. (1993). On mathematical problem posing. En I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu y F. L. Lin (Eds.), *Proceedings of the Seventeenth International Conference for the Psychology ofMathematics Education* (pp. 66-85, Vol. 1).

Silver, E. (1995). The Nature and Use of Open Problems in Mathematics Education: Mathematical and Pedagogical Perspectives. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik/International Reviews on Mathematical Education*, *27*(2), 67-72. https://eric.ed.gov/?id=EJ520599

Singer, F. M., y Voica, C. (2015). Is Problem Posing a Tool for Identifying and Developing Mathematical Creativity? En F. M. Singer, N. F. Ellerton y J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practice* (pp. 141-174). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3

Solarte, M. C. (2006). Los conceptos cientificos presentados en los textos escolares:son consecuencia de la transposición didáctica. *Revista electrónica de la Red de Investigación Educativa*, *1*(4).

Stiller, D., Krichel, K., y Schwarz, W. (2021). *Heuristik im Mathematikunterricht: Bedeutung des Problemlösens in der Geschichte und seine didaktische Funktion für die Zukunft* (1.ª ed.). Springer. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-662-63752-4

Stillwell, J. (2010). *Mathematics and Its History* (3.ª ed.). Springer. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-1-4419-6053-5

Stoyanova, E., y Ellerton, N. F. A Framework for Research into Students' Problem Posing in School Mathematics. En: En *Technology in Mathematics Education*. Mathematics Education Research Group of Australasia, 1996, 518-525. https://www.merga.net.au/Public/Publications/Annual_Conference_Proceedings/1996_MERGA_CP.aspx

Stroth, G., y Waldecker, R. (2019). *Elementare Algebra und Zahlentheorie* (2.ª ed.). Birkhäuser. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-030-25298-4

Tao, T. (2006). *Solving mathematical problems: A personal perspective* (2.ª ed.). OUP.

Tjoe, H. (2019). Looking Back to Solve Differently:Familiarity, Fluency, and Flexibility: Current Themes, Trends, and Research. En M. S.-T. Peter Liljedahl (Ed.), *Mathematical Problem Solving*. Springer. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_1

Toh, P. C., Leong, Y. H., Toh, T. L., Dindyal, J., Quek, K. S., Tay, E. G., y Ho, F. H. (2014). The problem-solving approach in the teaching of number theory. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *45*(2), 241-255. https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.822580

Trilla, J., Cano, E., Carretero, M., Escofet, A., Fairstein, G., Fernández Fernández, J. A., González Monteagudo, J., Gros, B., Imbernón, F., Lorenzo, N., Monés, J., Muset, M., Pla, M., Puig, J. M., Rodríguez Illera, J. L., Solà, P., Tort, A., y Vila, I. (2001). *El legado pedagógico del siglo XX para la escuela del siglo XXI* (J. Trilla, Ed.). Graó.

Universidad de Chile. (s.f.). *Nuestra iniciativa. ARPA. Recuperado el 23 de mayo de 2023*. https://arpa.uchile.cl/nuestra-iniciativa/

Valdiviezo, J. P., y Flores Herrera, J. (2009). Deficiencia en la habilidad de resolver problemas matematicos. http://www.dspace.espol.edu.ec/handle/123456789/351

Villarreal Farah, G. (2005). La resolución de problemas en matemática y el uso de las TIC: resultados de un estudio en colegios de Chile. *Edutec: revista electrónica de tecnología educativa*, (19), 1-22. http://hdl.handle.net/11162/6015

Weil, A. (2007). *Number Theory: An approach through history from Hammurapi to Legendre*. Birkhäuser.

Weissman, M. H. (2017). *An illustrated theory of numbers*. American Mathematical Society.

Whitford, E. E. (1912). *The Pell Equation* [Tesis doctoral, Columbia University]. EE Whitford. http://name.umdl.umich.edu/ABV2773.0001.001

Yan, K. (2019). A Review of the Development and Applications of Number Theory. *Journal of Physics: Conference Series*, *1325*. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1325/1/012128

Zazkis, R., y Campbell, S. R. (2006). *Number Theory in Mathematics Education: Perspectives and Prospects* (1.ª ed.). Routledge.

Apéndice A

Modelo de Carta

Los Ángeles, [fecha]

Señor(a)

Nombre

Estimado Profesor(a),

Es un placer dirigirnos a usted, en el marco de nuestro trabajo de tesis para optar al título de profesor/a de Matemáticas, bajo la supervisión de la profesora Marianela Castillo. Mediante esta carta, quisiéramos solicitar su valiosa colaboración para determinar la validez de contenido de cuatro guías de trabajo.

En particular, nos gustaría contar con su experiencia y conocimientos para revisar la redacción y pertinencia de los indicadores de logro presentes en las guías. Además, de enmendar la clasificación de cada una de las actividades con respecto a los heurismos descritos en la validación.

Valoramos profundamente su experiencia y conocimientos en el campo de la educación matemática, y creemos firmemente que su colaboración será fundamental para asegurar la calidad de nuestras guías de trabajo. Su opinión experta nos permitirá realizar las mejoras necesarias y garantizar que las guías están bien elaboradas.

Agradecemos de antemano su disposición para colaborar con nosotros en este importante trabajo. Su participación será un aporte significativo para nuestro desarrollo académico y profesional. Quedamos a la espera de su respuesta y nos despedimos, atentamente,

Diego Morales Contreras

Alexandra Ruz Martí

Apéndice B

Validación

B.1 Formato

En el contexto de la validación de la presente tesis...

Campus Los Ángeles
Escuela de Educación
Departamento de Ciencias
Básicas

Presentación

La investigación «Heurismos como enfoque para la resolución de problemas en Matemáticas» tiene como objetivo **Validar una secuencia didáctica a partir de un problema clásico de la Teoría de Números, orientado para la asignatura de matemática en enseñanza media y de los primeros años de carreras de pregrado.**

La secuencia didáctica consta de cuatro guías con sus indicadores de logros específicos y sus instrucciones de trabajo distribuidas de la siguiente manera:

En la **primera guía** se tiene como objetivo demostrar analíticamente la proposición de Euclides, analizando el geoplano que representa la proposición, para luego buscar soluciones a la ecuación de Pell. Se presentan los siguientes elementos:

- La definición de la ecuación de Pell y una breve historia de cómo esta ecuación llego a ser descubierta, nombrando a varios matemáticos que la trabajaron en algún momento de sus vidas.
- La proposición IX, del segundo libro de los Elementos de Euclides, y se le da indicaciones a los estudiantes para que muestren la solución geométrica del problema, utilizando como material concreto un geoplano para obtener las relaciones entre segmentos, en donde los estudiantes tienen que buscar la manera de demostrar la proposición dada, y luego de obtener esto, buscar un algoritmo que permita buscar más soluciones a partir de una inicial.

En la **segunda guía** se busca lograr los objetivos:

- Programar una plantilla electrónica con un algoritmo que genere soluciones para la ecuación de Pell donde D = 2.
- Analizar las soluciones de la ecuación Pell para obtener aproximaciones de la raíz cuadrada.
- Comprobar la posibilidad de generalizar el método de Euclides, mediante ensayo y error.
- Diseñar un algoritmo en una plantilla electrónica que no solo genere soluciones para la ecuación de Pell cuando D = 2 y las utilice para aproximar 2, sino que también explore su generalización a través de ensayo y error para otros valores de D libre de cuadrados.

Durante la **tercera guía** se utiliza el lema de Brahmagupta para encontrar y comparar soluciones de la ecuación de Pell, empleando análisis algebraico y una plantilla electrónica.

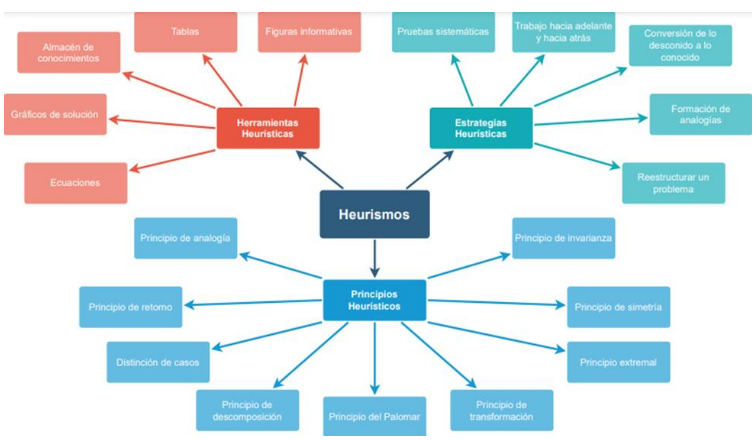
Por último, en la **cuarta guía**, el estudiante utilizando GeoGebra, muestra las relaciones entre las soluciones de la ecuación de Pell y predice su comportamiento en un gráfico, observando que forman un grupo.

Campus Los Ángeles
Escuela de Educación
Departamento de Ciencias Básicas

Heurismos

No ha sido posible encontrar una definición formal y precisa del término heurismo en el contexto de la resolución de problemas de matemática. Luego de la revisión, podemos entender los heurismos (aventurándonos a escribir una definición, y que tal vez no sea la correcta) como procedimientos para la resolución de problemas que requieren de probar distintos procesos o métodos para resolver el problema, hasta encontrar el que efectivamente lo resuelve.

Los heurismos que se utilizaron para la creación de las guías son los descritos por Bruder y Collet (2011), que se separan en *herramientas heurísticas*, *estrategias heurísticas* y *principios heurísticos*, cada uno con su propia definición, que se presentan a continuación. Además, es importante destacar que la categorización de Bruder y Collet tiene una orientación didáctica, de modo que se centran en aquellos heurismos que han demostrado ser útiles y prácticos en la práctica para los primeros años de la enseñanza media. A diferencia de Schwarz (2006) que ha llevado a cabo una sistematización de los heurismos con una orientación matemática, que proporciona una visión muy completa, claramente estructurada y fácil de entender de los heurismos, su categorización y sus posibles aplicaciones (Stiller, D., Krichel, K., & Schwarz, W., 2021).



A. Herramientas heurísticas:

Las herramientas heurísticas ayudan a preparar una tarea de tal manera que pueda resolverse más fácilmente. Ayudan a comprender, estructurar y eventualmente también visualizar el problema. Su objetivo es «ampliar» la memoria y organizar la información de forma específica.

A.1 Figuras formativas

Buscan «presentar tanta información y las relaciones asociadas en una figura como sea posible. Los solucionadores de problemas intuitivos a menudo no pueden poner su solución en palabras. Para ellos, la figura informativa es una buena manera de explicar y documentar su solución posteriormente.

A.2 Tablas

Las cuales pueden utilizarse para estructurar, reducir y enfocar la información que en el proceso de resolución de problemas. También pueden ayudar sobre todo a encontrar un plan de solución y luego a documentarlo. Además, una tabla es particularmente adecuada como soporte para pruebas sistemáticas. Al igual que con la figura informativa, se puede utilizar para registrar las cantidades dadas y buscadas de una tarea, reconocer relaciones dadas y descubrir y comprobar relaciones entre números y cantidades.

Las tablas tienen una función similar a los bocetos. Sirven para documentar los datos, comprender el problema y, en ocasiones, también pueden conducir a una solución.

A.3. Almacén de conocimientos

Son las referencias que uno puede utilizar para resolver (rápidamente un problema), como cuadernos, libros de fórmulas, heurismos con preguntas específicas, entre otros. Es importante notar que «los almacenes de conocimiento no solo aparecen en una tabla, sino que también se pueden mostrar en forma de mapa mental»

A.4. Gráficos de solución

Se utilizan principalmente cuando las tareas requieren varios pasos de solución. Esta herramienta proporciona una muy buena visión general. Por lo tanto, un gráfico de solución es útil si la solución de una tarea tiene varios pasos, de esta manera, con su ayuda es posible comparar las estructuras de un camino de solución y derivar nuevos heurismos a partir de ellos.

Crear los gráficos de solución requiere un poco más de esfuerzo y el uso de varias estrategias auxiliares, como bocetos, ecuaciones, etc. Los datos de la tarea del problema se vuelven visibles a través de la representación y también se pueden derivar varios conocimientos. Muchas veces un gráfico de soluciones no ofrece todas las soluciones o los estudiantes solo reconocen parte de la solución de la representación.

A.5. Ecuaciones

Son las herramientas heurísticas más exigentes pues requieren un nivel muy alto de poder de abstracción. La ecuación ayuda a reducir y resumir la información en un texto a lo esencial.

B. Principios heurísticos

Describen tales procedimientos que corresponden a las cualidades de movilidad del pensamiento, cambiando aspectos y prestando atención a los aspectos. Están mucho más ligados al contenido técnico que a las estrategias, pero también revelan una variedad de referencias a la resolución de problemas en la vida cotidiana.

B.1 Principio de analogía

Se utiliza cuando se buscan similitudes entre la actual situación de resolución-de-problemas a resolver y una situación anterior de resolución-de-problemas que ya se ha resuelto. Así, al pensar por analogía, los estudiantes buscan similitudes entre dos problemas y las utilizan para encontrar una solución a la nueva tarea.

B.2 Principio de retorno

Es aquel donde las tareas más complejas se pueden rastrear hasta tareas estructuradas más simples. El principio de retroalimentación está íntimamente ligado al principio de analogía. Para resolver la situación problema, aquí se utilizan tareas análogas, pero a un nivel más bajo de exigencia y abstracción. Con los principios de retorno y analogía se trabaja con la estrategia de retorno de lo desconocido a lo conocido y con conclusiones de analogía. De esta manera, el principio de retorno es básicamente una continuación del principio de analogía, donde los problemas complejos se simplifican y estructuran; y las tareas análogas se llevan a un nivel inferior para comprender mejor la tarea problema.

B.3 Distinción de Casos

Es un caso especial del principio de descomposición, puesto que se trata de la descomposición completa. Este principio ocurre en geometría, por ejemplo, en la formación de los conceptos de recta tangente, exterior y secante. También es usado en aritmética y combinatoria con el diagrama de árbol.

B.4 Principio de descomposición

Es aquel usado si uno tiene problemas muy complejos, y trata de subdividirlo en subproblemas para poder resolverlo. De tal manera que uno se orienta a elementos conocidos en la información de la tarea y los desglosa.

B.5 Principio de Palomar

El cual se entiende generalmente como «si se distribuyen kn + 1 perlas en n cajones, al menos un cajón contiene más de k perlas»

B.6 Principio de transformación

En forma de modelado matemático interno, un cambio de aspecto debe sustentarse con este principio. Esto significa que los solucionadores de problemas deben describir lo que se les da y lo que buscan de manera diferente, considerarlo en diferentes contextos, desarmarlo, complementarlo y vincularlo con algo nuevo. Así, el problema se traduce a una teoría o lenguaje matemático abstracto. Ejemplos de esto son imágenes, nombres con letras y flechas simples para ilustrar mejor los pasos de la solución.

B.7 Principio de extremal

Trata de encontrar una solución con la ayuda de casos extremos. Este principio se aplica muy a menudo en la vida cotidiana porque el comportamiento y las decisiones muy a menudo se optimizan.

B.8 Principio de simetría

Trata sobre la búsqueda de simetrías y su restauración o sobre la destrucción o disolución de estas simetrías. De esta manera, se buscan o restauran las simetrías que existen entre elementos de la información.

B.9 Principio de invarianza

Trata de reconocer, buscar o construir constantes, valores de referencia o similitudes en la información de la tarea. Al aplicar este principio, debe haber al menos una cosa o relación que no cambie. Así, uno busca lo que no cambia (el llamado invariante) o lo que todos los objetos tienen en común. Una vez que encontrado un invariante, uno puede usar las herramientas heurísticas para encontrar la solución. Las áreas típicas de aplicación se pueden encontrar en lecciones de matemáticas al calcular porcentajes, calcular áreas y sólidos usando cuadrados unitarios y en problemas de mezcla.

C. Estrategias heurísticas

En contraste con un algoritmo, las estrategias heurísticas no garantizan una solución para el problema dado. [Estas] siempre solo dan impulsos importantes para profundizar la reflexión.

C.1 Pruebas sistemáticas

Usada a menudo si uno no conoce un procedimiento y no sabe qué más hacer, el ensayo y error es el curso de acción típico. Cuando los niños, adolescentes o adultos leen o escuchan una tarea problemática, la mayoría comienza muy rápidamente a probarla para llegar a las primeras soluciones. Empiezan a conectar números de forma espontánea o a dibujar algo relacionado con la tarea. En muchos casos, la prueba asistemática es seguida por la prueba sistemática, en la que se desarrolla un sistema que contiene todos los «casos posibles» para luego llegar a la solución correcta. A diferencia de las pruebas aleatorias anteriores, las pruebas sistemáticas son una estrategia heurística útil en la que el solucionador de problemas establece y prueba diferentes relaciones y contextos en un orden determinado. Las estructuras del problema se vuelven claras y en muchos casos los niños obtienen indicaciones claras de una solución general.

C.2 Trabajo hacia adelante y hacia atrás

Campus Los Ángeles
Escuela de Educación
Departamento de Ciencias Básicas

(a) Cuando trabaja hacia adelante, el solucionador de problemas trata de sacar conclusiones y hacer conexiones a partir de lo dado para lograr lo que se busca. Al trabajar con la información dada, uno quiere pasar de una determinada situación inicial a una determinada meta. En la mayoría de los casos, se logran ciertos objetivos secundarios, con la ayuda de los cuales se llega al objetivo combinándolo nuevamente con los datos originales. Trabajar hacia adelante es una muy buena estrategia en la que los estudiantes pueden expresar y desarrollar su creatividad, ya que tienen que combinar muchas perspectivas diferentes sobre un tema.

(b) Por otro lado, trabajar hacia atrás es lo opuesto. Esto significa que se trabaja «hacia adelante» desde lo que uno está buscando hasta lo que es dado. Es decir, cuando se trabaja hacia atrás, se conoce el resultado de la tarea y se debe considerar qué vínculos llevaron a este resultado o a la meta. Trabajar hacia atrás requiere más abstracción en general, ya que el uso de espacios en blanco es necesario para encontrar el resultado.
(c) Finalmente, es ventajoso usar una estrategia combinada los solucionadores de problemas generalmente trabajan hacia adelante desde el estado inicial hasta que no hay más camino. Luego trabajan hacia atrás desde el estado final y vinculan las dos estrategias

C.3 Conversión de lo desconocido a lo conocido

Con esta estrategia, los problemas se reestructuran, amplían o reducen la información para que la tarea del problema en su nueva forma se pueda asignar más fácilmente a las tareas que ya se han procesado. Esta estrategia se utiliza para casi todas las preguntas, ya que uno siempre quiere construir sobre lo que ya ha entendido.

C.4 Formación de analogías

Se usa cuando uno verifica si ya ha resuelto una tarea similar a un problema. Si este es el caso, se intenta recurrir a un procedimiento conocido para encontrar la solución. Las similitudes pueden relacionarse con diferentes aspectos de una tarea, por ejemplo, la estructura de la solución, procedimientos similares o la forma en que se presenta la tarea. Dado que a menudo ocurren ejemplos análogos en clase cuando se practica un tema, es muy difícil aprender esta estrategia y transferirla a otras áreas temáticas.

C.5 Reestructurar un problema

Es mirar el problema desde un punto de vista diferente. Se trata de analizar la estructura de la tarea y convertir la situación inicial en una solución con una perspectiva diferente a través de un arreglo más adecuado.

Validación

Instrucciones: La siguiente tabla contiene las actividades de las guías de trabajo. Indique a qué etapa del modelado corresponde cada actividad e indique observaciones sobre la redacción o cualquier otro aspecto que considere relevante.

Actividad	Heurismos	Justificación	De acuerdo / En desacuerdo	Observaciones / Justificación
1	Herramienta: Figura informativa	De las actividades 1.a. hasta 1.d, se utilizaría la herramienta de figura informativa ya que en cada uno se tiene que trazar segmentos.		
2	Herramienta: Almacén de conocimiento	En la actividad 2.a hasta 2.d se observa esta herramienta ya que directamente se pregunta sobre qué relación se puede obtener, por lo que el estudiante tiene que acudir a sus referencias sobre la materia, en este caso, sobre el Teorema de Pitágoras.		
	Estrategia: Pruebas sistemáticas	Tanto en las actividades 2.b como 2.c nos encontramos con esta estrategia que es muy útil para realizar demostraciones de las cuales no se conoce el procedimiento ya que el estudiante tiene que dedicarte a buscar la solución mediante ensayo y error.		
	Estrategia: Trabajo hacia delante y hacia atrás	En las actividades 2.b y 2.c también se encuentra el trabajo hacia adelante y hacia atrás, debido a que el estudiante tendrá que fijarse cuál es su meta, reflexionando a partir del problema dado.		

	Estrategia: formación de analogías	En la actividad 2.d nos encontramos con la formación de analogías, ya que se pregunta sobre la forma de una posible solución basada en una ya dada, en donde se tiene que recurrir a un procedimiento conocido para poder relacionar en este caso las soluciones.		
3	Estrategia: Pruebas sistemáticas	En la actividad 3.a nos encontramos con esta estrategia ya que por ensayo y error hay que encontrar un par de números que sean solución de la ecuación de Pell.		
	Herramientas: Tablas	En la actividad 3.b al utilizar una planilla electrónica, se colocan los datos en tablas, que permiten estructurar la información para así ayudar con el plan de solución.		
	Herramientas: Almacén de conocimientos	En la actividad 3.b el estudiante tiene que conocer la proposición que permite encontrar más soluciones a partir de una, por lo que se estaría utilizando el almacén de conocimientos.		
	Estrategia: Conversión de lo desconocido a lo conocido	En la actividad 3.b al programar un algoritmo, se está restructurando el problema, y construyendo el propio algoritmo a partir de lo que ya se conocía.		
4	Almacén de conocimiento	El estudiante tiene que tener conocimientos básicos de geometría analítica, y saber utilizar el lema de Brahmagupta.		
	Estrategia: formación de analogías	En la actividad 4.a se relacionan diferentes aspectos de la ecuación, para así recurrir a un procedimiento que permita dejar la expresión x/y en un miembro de la ecuación.		

	Principio: Principio de simetría.	En la actividad 4.a además se pretende encontrar la simetría que existe entre las ecuaciones, a través de la restructuración de la ecuación dada, por lo que nos encontramos con este principio.		
	Herramienta: Grafico de solución.	Al igual que la actividad 1, la actividad 4.b está estructurada en varias actividades que permiten dar una visión general de lo que se quiere lograr en la plantilla electrónica.		
	Herramienta: Tablas	En la actividad 4.b(a) hasta la 4.b(c) nos encontramos con tablas, en las que ubican los resultados necesarios, para luego poder realizar la comparación con la raíz de dos.		
	Estrategia: formación de analogías	La actividad 4.b(d) al realizar el procedimiento de obtener los resultados en planilla electrónica y luego de buscar el valor aproximado de raíz de dos, podemos notar como re realiza un procedimiento que es conocido con el cual relacionamos dos valores que tienen ciertas similitudes.		
5	Principio: Principio de retorno	En esta actividad se encuentra el principio de retorno, ya que se realizan tareas análogas a la actividad 3, en donde se busca similitud con algo que ya fue resuelto.		
	Principio: Principio de simetría	Al contestar la pregunta correspondiente a la actividad se utiliza este principio al buscar una simetría con respecto a la actividad 3, para así dar respuesta a la pregunta.		

6	Estrategia: Pruebas sistemáticas	En la actividad 6.a se presenta una demostración de una identidad, en donde para lograr demostrarlo hay que realizar pruebas sistemáticas como ensayo y error, ya que no se conoce el procedimiento.		
	Estrategia: Trabajo hacia delante y hacia atrás	La actividad 6.a necesita un trabajo hacia adelante y hacia atrás para poder llegar a una respuesta, incluso en las indicaciones se propone que se desarrollen ambos lados de la igualdad.		
	Principio: Principio de analogía	La actividad 6.a y 6.b se presentan similitudes entre lo que se quiere resolver y lo que se resolvió, en este caso la demostración de la identidad.		
	Principio: principio de retorno	Se tiene que en la actividad 6.a y 6.b se presenta un retorno de lo desconocido a lo conocido, en donde esté está ligado al principio de analogía a través de las tareas que se presentan.		
	Herramienta: tablas	En 6.c se presenta la herramienta de tablas, ya que se creará una de estas en Excel para ordenar diferentes soluciones.		
	Estrategia: formación de analogías	En 6.c y 6.d se recurren a procedimientos conocidos, en los que relacionamos diferentes aspectos como la ecuación de Pell para diferentes D, y la diferencia entre procedimientos con la actividad 5.		
7	Estrategia: Restaurar un problema	En toda la actividad 7 se ve esta estrategia presentada, ya que utilizando GeoGebra se ve el problema desde un punto de vista diferente, pudiendo ser más adecuado para su comprensión		

	Habilidad: figuras informativas	En 7.a, 7.b, 7.c se grafican curvas y puntos, lo que correspondería a figuras informativas.		
	Principio: Principio de transformación	En la actividad 7.d pide una explicación que corresponde a describir de manera diferente lo que dice el lema.		
8	Herramienta: almacén de conocimientos	8.a, 8.b, 8.c corresponde a almacén de conocimientos ya que se tiene que acudir a referencias sobre conmutatividad, asociatividad y elemento neutro.		
	Estrategia: Pruebas sistemáticas	8.a, 8.b, 8.c, se tienen que realizar varios procedimientos, para dar respuesta a los problemas.		

Observaciones:

Referencias bibliográficas

Bruder, R., & Collet, C. (2011). Problemlosen lernen im Mathematikunterricht. Berlin, Germany: Cornelsen.

Stiller, D., Krichel, K., & Schwarz, W. (2021). Heuristik im Mathematikunterricht: Bedeutung des Problemlosens in der Geschichte und seine didaktische Funktion fur die Zukunft. Springer Berlin/Heidelberg.

Schwarz, W. (2006). Heuristische Strategien des Problemlösens. Eine fachmethodische Systematik für die Mathematik. Münster: WTM.

B.2 Primera validación

Enviada y recibida a través de un correo electrónico.

Validación

Instrucciones: La siguiente tabla contiene las actividades de las guías de trabajo. Indique a qué etapa del modelado corresponde cada actividad e indique observaciones sobre la redacción o cualquier otro aspecto que considere relevante.

Actividad	Heurismos	Justificación	De acuerdo / En desacuerdo	Observaciones / Justificación
1	Herramienta: Figura informativa	De las actividades 1.a. hasta 1.d, se utilizaría la herramienta de figura informativa ya que en cada uno se tiene que trazar segmentos.		No queda clara la definición de figura informativa
2	Herramienta: Almacén de conocimiento	En la actividad 2.a hasta 2.d se observa esta herramienta ya que directamente se pregunta sobre qué relación se puede obtener, por lo que el estudiante tiene que acudir a sus referencias sobre la materia, en este caso, sobre el Teorema de Pitágoras.	De acuerdo	
	Estrategia: Pruebas sistemáticas	Tanto en las actividades 2.b como 2.c nos encontramos con esta estrategia que es muy útil para realizar demostraciones de las cuales no se conoce el procedimiento ya que el estudiante tiene que dedicarte a buscar la solución mediante ensayo y error.	De acuerdo	
	Estrategia: Trabajo hacia delante y hacia atrás	En las actividades 2.b y 2.c también se encuentra el trabajo hacia adelante y hacia atrás, debido a que el estudiante tendrá que fijarse cuál es su meta, reflexionando a partir del problema dado.	De acuerdo	

	Estrategia: formación de analogías	En la actividad 2.d nos encontramos con la formación de analogías, ya que se pregunta sobre la forma de una posible solución basada en una ya dada, en donde se tiene que recurrir a un procedimiento conocido para poder relacionar en este caso las soluciones.	De acuerdo	
3	Estrategia: Pruebas sistemáticas	En la actividad 3.a nos encontramos con esta estrategia ya que por ensayo y error hay que encontrar un par de números que sean solución de la ecuación de Pell.	De acuerdo	
	Herramientas: Tablas	En la actividad 3.b al utilizar una planilla electrónica, se colocan los datos en tablas, que permiten estructurar la información para así ayudar con el plan de solución.	De acuerdo	
	Herramientas: Almacén de conocimientos	En la actividad 3.b el estudiante tiene que conocer la proposición que permite encontrar más soluciones a partir de una, por lo que se estaría utilizando el almacén de conocimientos.	De acuerdo	
	Estrategia: Conversión de lo desconocido a lo conocido	En la actividad 3.b al programar un algoritmo, se está restructurando el problema, y construyendo el propio algoritmo a partir de lo que ya se conocía.		Estos procesos de conversión, buscan transformar la representación de un objeto matemático con el objetivo de revelar otras cualidades del mismo. En este caso, si bien hay un proceso de conversión al transformarlo mediante una planilla, es ella quien da las respuestas, sin tener que analizar esta nueva representación. Por tal motivo no

				me queda clara la posición ante este indicador.
4	Almacén de conocimiento	El estudiante tiene que tener conocimientos básicos de geometría analítica, y saber utilizar el lema de Brahmagupta.		No me queda claro cuál es el almacén de conocimientos. De acuerdo a la definición dada pare estar asociado a alguna fuente que contiene conocimientos a los que se puede acceder a partir de ella. En este caso no me queda clara cuál podría ser.
	Estrategia: formación de analogías	En la actividad 4.a se relacionan diferentes aspectos de la ecuación, para así recurrir a un procedimiento que permita dejar la expresión x/y en un miembro de la ecuación.	En desacuerdo	¿Por qué lo asocian a analogía? ¿qué tiene la tarea que las promueve?
	Principio: Principio de simetría.	En la actividad 4.a además se pretende encontrar la simetría que existe entre las ecuaciones, a través de la restructuración de la ecuación dada, por lo que nos encontramos con este principio.	De acuerdo	
	Herramienta: Grafico de solución.	Al igual que la actividad 1, la actividad 4.b está estructurada en varias actividades que permiten dar una visión general de lo que se quiere lograr en la plantilla electrónica.	En desacuerdo	No queda claro cómo la tarea, a partir de su enunciado, promueve el gráfico de solución
	Herramienta: Tablas	En la actividad 4.b(a) hasta la 4.b(c) nos encontramos con tablas, en las que ubican los resultados necesarios, para luego poder realizar la comparación con la raíz de dos.	De acuerdo	

	Estrategia: formación de analogías	La actividad 4.b(d) al realizar el procedimiento de obtener los resultados en planilla electrónica y luego de buscar el valor aproximado de raíz de dos, podemos notar como re realiza un procedimiento que es conocido con el cual relacionamos dos valores que tienen ciertas similitudes.	De acuerdo	
5	Principio: Principio de retorno	En esta actividad se encuentra el principio de retorno, ya que se realizan tareas análogas a la actividad 3, en donde se busca similitud con algo que ya fue resuelto.	En desacuerdo	Según las indicaciones de la tarea los estudiantes, lo estudiantes usan el procedimiento de otra actividad para resolver la tarea, sin embargo, mas que nada para replicar y no para reducir el nivel de dificultad de la tarea.
	Principio: Principio de simetría	Al contestar la pregunta correspondiente a la actividad se utiliza este principio al buscar una simetría con respecto a la actividad 3, para así dar respuesta a la pregunta.	De acuerdo	
6	Estrategia: Pruebas sistemáticas	En la actividad 6.a se presenta una demostración de una identidad, en donde para lograr demostrarlo hay que realizar pruebas sistemáticas como ensayo y error, ya que no se conoce el procedimiento.	De acuerdo	
	Estrategia: Trabajo hacia delante y hacia atrás	La actividad 6.a necesita un trabajo hacia adelante y hacia atrás para poder llegar a una respuesta, incluso en las indicaciones se propone que se desarrollen ambos lados de la igualdad.	De acuerdo	

	Principio: Principio de analogía	La actividad 6.a y 6.b se presentan similitudes entre lo que se quiere resolver y lo que se resolvió, en este caso la demostración de la identidad.	De acuerdo	
	Principio: principio de retorno	Se tiene que en la actividad 6.a y 6.b se presenta un retorno de lo desconocido a lo conocido, en donde esté está ligado al principio de analogía a través de las tareas que se presentan.	De acuerdo	
	Herramienta: tablas	En 6.c se presenta la herramienta de tablas, ya que se creará una de estas en Excel para ordenar diferentes soluciones.	De acuerdo	
	Estrategia: formación de analogías	En 6.c y 6.d se recurren a procedimientos conocidos, en los que relacionamos diferentes aspectos como la ecuación de Pell para diferentes D, y la diferencia entre procedimientos con la actividad 5.	De acuerdo	
7	Estrategia: Restaurar un problema	En toda la actividad 7 se ve esta estrategia presentada, ya que utilizando GeoGebra se ve el problema desde un punto de vista diferente, pudiendo ser más adecuado para su comprensión	De acuerdo	
	Habilidad: figuras informativas	En 7.a, 7.b, 7.c se grafican curvas y puntos, lo que correspondería a figuras informativas.	De acuerdo	
	Principio: Principio de transformación	En la actividad 7.d pide una explicación que corresponde a describir de manera diferente lo que dice el lema.	De acuerdo	
8	Herramienta: almacén de conocimientos	8.a, 8.b, 8.c corresponde a almacén de conocimientos ya que se tiene que acudir a referencias sobre conmutatividad, asociatividad y elemento neutro.	De acuerdo	

	Estrategia: Pruebas sistemáticas	8.a, 8.b, 8.c, se tienen que realizar varios procedimientos, para dar respuesta a los problemas.	De acuerdo	

Observaciones:

Con respecto a los Heurismos empleados, esperaría que estos surjan en el proceso de resolución como una decisión del resolutor de la tarea. En este caso, cada tarea apunta a un Heurismo particular, lo que parece quitar el sentido de los mismos.

B.3 Segunda validación

Enviada y recibida a través de un correo electrónico.

Validación

Instrucciones: La siguiente tabla contiene las actividades de las guías de trabajo. Indique a qué etapa del modelado corresponde cada actividad e indique observaciones sobre la redacción o cualquier otro aspecto que considere relevante.

Actividad	Heurismos	Justificación	De acuerdo / En desacuerdo	Observaciones / Justificación
1	Herramienta: Figura informativa	De las actividades 1.a. hasta 1.d, se utilizaría la herramienta de figura informativa ya que en cada uno se tiene que trazar segmentos.	De acuerdo	
2	Herramienta: Almacén de conocimiento	En la actividad 2.a hasta 2.d se observa esta herramienta ya que directamente se pregunta sobre qué relación se puede obtener, por lo que el estudiante tiene que acudir a sus referencias sobre la materia, en este caso, sobre el Teorema de Pitágoras.	De acuerdo	
	Estrategia: Pruebas sistemáticas	Tanto en las actividades 2.b como 2.c nos encontramos con esta estrategia que es muy útil para realizar demostraciones de las cuales no se conoce el procedimiento ya que el estudiante tiene que dedicarte a buscar la solución mediante ensayo y error.	De acuerdo	
	Estrategia: Trabajo hacia delante y hacia atrás	En las actividades 2.b y 2.c también se encuentra el trabajo hacia adelante y hacia atrás, debido a que el estudiante tendrá que fijarse cuál es su meta, reflexionando a partir del problema dado.	De acuerdo	

	Estrategia: formación de analogías	En la actividad 2.d nos encontramos con la formación de analogías, ya que se pregunta sobre la forma de una posible solución basada en una ya dada, en donde se tiene que recurrir a un procedimiento conocido para poder relacionar en este caso las soluciones.	De acuerdo	
3	Estrategia: Pruebas sistemáticas	En la actividad 3.a nos encontramos con esta estrategia ya que por ensayo y error hay que encontrar un par de números que sean solución de la ecuación de Pell.	De acuerdo	
	Herramientas: Tablas	En la actividad 3.b al utilizar una planilla electrónica, se colocan los datos en tablas, que permiten estructurar la información para así ayudar con el plan de solución.	De acuerdo	
	Herramientas: Almacén de conocimientos	En la actividad 3.b el estudiante tiene que conocer la proposición que permite encontrar más soluciones a partir de una, por lo que se estaría utilizando el almacén de conocimientos.	De acuerdo	
	Estrategia: Conversión de lo desconocido a lo conocido	En la actividad 3.b al programar un algoritmo, se está restructurando el problema, y construyendo el propio algoritmo a partir de lo que ya se conocía.	De acuerdo	
4	Almacén de conocimiento	El estudiante tiene que tener conocimientos básicos de geometría analítica, y saber utilizar el lema de Brahmagupta.	De acuerdo	Se necesita los conocimientos de algebra más que de geometría analítica.
	Estrategia: formación de analogías	En la actividad 4.a se relacionan diferentes aspectos de la ecuación, para así recurrir a un procedimiento que permita dejar la expresión x/y en un miembro de la ecuación.	De acuerdo	

	Principio: Principio de simetría.	En la actividad 4.a además se pretende encontrar la simetría que existe entre las ecuaciones, a través de la restructuración de la ecuación dada, por lo que nos encontramos con este principio.	De acuerdo	
	Herramienta: Grafico de solución.	Al igual que la actividad 1, la actividad 4.b está estructurada en varias actividades que permiten dar una visión general de lo que se quiere lograr en la plantilla electrónica.	De acuerdo	
	Herramienta: Tablas	En la actividad 4.b(a) hasta la 4.b(c) nos encontramos con tablas, en las que ubican los resultados necesarios, para luego poder realizar la comparación con la raíz de dos.	De acuerdo	
	Estrategia: formación de analogías	La actividad 4.b(d) al realizar el procedimiento de obtener los resultados en planilla electrónica y luego de buscar el valor aproximado de raíz de dos, podemos notar como re realiza un procedimiento que es conocido con el cual relacionamos dos valores que tienen ciertas similitudes.	De acuerdo	
5	Principio: Principio de retorno	En esta actividad se encuentra el principio de retorno, ya que se realizan tareas análogas a la actividad 3, en donde se busca similitud con algo que ya fue resuelto.	De acuerdo	
	Principio: Principio de simetría	Al contestar la pregunta correspondiente a la actividad se utiliza este principio al buscar una simetría con respecto a la actividad 3, para así dar respuesta a la pregunta.	De acuerdo	

6	Estrategia: Pruebas sistemáticas	En la actividad 6.a se presenta una demostración de una identidad, en donde para lograr demostrarlo hay que realizar pruebas sistemáticas como ensayo y error, ya que no se conoce el procedimiento.	De acuerdo	
	Estrategia: Trabajo hacia delante y hacia atrás	La actividad 6.a necesita un trabajo hacia adelante y hacia atrás para poder llegar a una respuesta, incluso en las indicaciones se propone que se desarrollen ambos lados de la igualdad.	De acuerdo	
	Principio: Principio de analogía	La actividad 6.a y 6.b se presentan similitudes entre lo que se quiere resolver y lo que se resolvió, en este caso la demostración de la identidad.	De acuerdo	
	Principio: principio de retorno	Se tiene que en la actividad 6.a y 6.b se presenta un retorno de lo desconocido a lo conocido, en donde esté está ligado al principio de analogía a través de las tareas que se presentan.	De acuerdo	
	Herramienta: tablas	En 6.c se presenta la herramienta de tablas, ya que se creará una de estas en Excel para ordenar diferentes soluciones.	De acuerdo	
	Estrategia: formación de analogías	En 6.c y 6.d se recurren a procedimientos conocidos, en los que relacionamos diferentes aspectos como la ecuación de Pell para diferentes D, y la diferencia entre procedimientos con la actividad 5.	De acuerdo	
7	Estrategia: Restaurar un problema	En toda la actividad 7 se ve esta estrategia presentada, ya que utilizando GeoGebra se ve el problema desde un punto de vista diferente, pudiendo ser más adecuado para su comprensión	De acuerdo	

	Habilidad: figuras informativas	En 7.a, 7.b, 7.c se grafican curvas y puntos, lo que correspondería a figuras informativas.	De acuerdo	
	Principio: Principio de transformación	En la actividad 7.d pide una explicación que corresponde a describir de manera diferente lo que dice el lema.	De acuerdo	
8	Herramienta: almacén de conocimientos	8.a, 8.b, 8.c corresponde a almacén de conocimientos ya que se tiene que acudir a referencias sobre conmutatividad, asociatividad y elemento neutro.	De acuerdo	
	Estrategia: Pruebas sistemáticas	8.a, 8.b, 8.c, se tienen que realizar varios procedimientos, para dar respuesta a los problemas.	De acuerdo	

Observaciones:

Algunas observaciones respecto a la Guía:

- La Proposición 2 (de Euclides) se debería presentar con un ejemplo o una explicación, el lenguaje formal del libro Los Elementos no siempre es la ideal.
- En la historia de la Ecuación de Pell la igualdad está escrita con ± 1, mientras que la definición solo 1. Además, se menciona que las soluciones son números enteros, pero en la guía se trabaja con números naturales.
- Actividad 1, revisar la notación en a), d) y e), los segmentos deben ir con la línea arriba.
- Actividad 1, se sugiere mejorar la redacción de las instrucciones en d) y e).
- Actividad 2, en a) se sugiere ser más especifico en que se debe relacionar, medida de segmento, medida de área, etc.
- Actividad 2, ¿en b) se debe demostrar o comprobar? ¿la demostración no es muy larga?
- Actividad 2, se sugiere mejorar la redacción de la instrucción, para evitar que la demostración se realice simplemente desarrollando ambos lados de la igualdad.
- Actividad 2, se debe explicar que la solución de una ecuación de dos incógnitas se puede representar con un par ordenado.
- Actividad 2, en d) se sugiere mejorar la redacción de la pregunta, no se comprende totalmente lo que se desea que respondan los estudiantes.
- Actividad 4, en b) ítem (c), se sugiere mejorar la pregunta, para que se comprenda lo que se desea que realicen los estudiantes.
- Guía 3, en la definición de Pell se menciona la variable n.
- Actividad 6, se pudo haber presentado la parte a) y b) de manera diferente, de tal manera que los estudiantes demostraran primero el Lema.
- Actividad 6, se sugiere indicar que se aplica el lema para k=k'=1.
- Actividad 7, en c) dice “don”.
- Actividad 7, en c) se sugiere aclarar que si puede ser cualquier par ordenado o debe ser en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
- Actividad 8, se sugiere explicar mejor b) y c), para que los estudiantes comprendan un elemento neutro o inverso.

B.4 Tercera validación

Enviada y recibida a través de un correo electrónico.

Validación

Instrucciones: La siguiente tabla contiene las actividades de las guías de trabajo. Indique a qué etapa del modelado corresponde cada actividad e indique observaciones sobre la redacción o cualquier otro aspecto que considere relevante.

Actividad	Heurismos	Justificación	De acuerdo / En desacuerdo	Observaciones / Justificación
1	Herramienta: Figura informativa	De las actividades 1.a. hasta 1.d, se utilizaría la herramienta de figura informativa ya que en cada uno se tiene que trazar segmentos.	De acuerdo	NOTA: Lo que destaqué en rojo son detalles de redacción de este instrumento, y algunas correcciones ortográficas. Revisar la redacción de los enunciados en d) y e), la condición de paralelismo es redundante en más de uno, y además, gramaticalmente no se indica una acción concreta (en ninguno de los dos) a ser realizada por el alumno.
2	Herramienta: Almacén de conocimiento	En la actividad 2.a hasta 2.d se observa esta herramienta, ya que directamente se pregunta sobre qué relación se puede obtener, por lo que el estudiante tiene que acudir a sus referencias sobre la materia, en este caso, sobre el Teorema de Pitágoras.	De acuerdo	

	Estrategia: Pruebas sistemáticas	Tanto en las actividades 2.b como 2.c nos encontramos con esta estrategia, que es muy útil para realizar demostraciones de las cuales no se conoce el procedimiento, ya que el estudiante tiene que dedicarse a buscar la solución mediante ensayo y error.	De acuerdo, con observaciones	Aunque hay una resolución sistemática, es importante que ustedes noten que la "conversión de lo desconocido a lo conocido" también es procedente, ya que la resolución pasa por obtener una expresión desconocida (lado derecho) a partir de una relación conocida (la descomposición de AD en dos segmentos según la figura graficada, y la escritura de BD en función de la resta de un segmento mayor con uno menor). Por otro lado, noten que 2c es totalmente independiente del resto de partes de la actividad (se trata de una identidad algebraica: basta con desarrollar el lado derecho para obtener el izquierdo, sin necesitarse que x ni y sean exclusivamente las medidas de los segmentos indicados).

	Estrategia: Trabajo hacia delante y hacia atrás	En las actividades 2.b y 2.c también se encuentra el trabajo hacia adelante y hacia atrás, debido a que el estudiante tendrá que fijarse cuál es su meta, reflexionando a partir del problema dado.	De acuerdo	
	Estrategia: formación de analogías	En la actividad 2.d nos encontramos con la formación de analogías, ya que se pregunta sobre la forma de una posible solución basada en una ya dada, en donde se tiene que recurrir a un procedimiento conocido para poder relacionar en este caso las soluciones.	De acuerdo	
3	Estrategia: Pruebas sistemáticas	En la actividad 3.a nos encontramos con esta estrategia, ya que, por ensayo y error, hay que encontrar un par de números que sean solución de la ecuación de Pell.	De acuerdo	
	Herramientas: Tablas	En la actividad 3.b al utilizar una planilla electrónica, se colocan los datos en tablas, que permiten estructurar la información para así ayudar con el plan de solución.	De acuerdo	
	Herramientas: Almacén de conocimientos	En la actividad 3.b el estudiante tiene que conocer la proposición que permite encontrar más soluciones a partir de una, por lo que se estaría utilizando el almacén de conocimientos.	De acuerdo	
	Estrategia: Conversión de lo desconocido a lo conocido	En la actividad 3.b al programar un algoritmo, se está restructurando el problema, y construyendo el propio algoritmo a partir de lo que ya se conocía.	En desacuerdo	La idea de esta estrategia es que se puede abordar un problema simplificándolo, y pasar de la solución simple a la compleja (por eso, algunos autores la llaman “conversión de lo

				conocido a lo desconocido", al revés de como lo hacen ustedes), por medio de un proceso de razonamiento y el uso de otras estrategias. En el caso de lo que ustedes plantean, esto no procede, ya que el resultado dado por la proposición 5 evita el proceso que menciono, convirtiendo el problema matemático en uno de programación.
4	Almacén de conocimiento	El estudiante tiene que debe tener conocimientos básicos de geometría analítica, y saber utilizar el lema de Brahmagupta.		La actividad es totalmente realizable sin utilizar conocimientos de geometría analítica, y tampoco es evidente el uso del lema de Brahmagupta. Como consejo, cuando presenten solicitudes de validación, sugiero que, además de los enunciados, nos faciliten la solución propuesta por ustedes, para así nosotros ver si el problema está dirigido hacia el camino que ustedes desean que se tome para su resolución.

				P.D.: Después de ver la guía 4, ¿no quedaría mejor la justificación para el problema 7, que SÍ usa el lema de Brahmagupta?
	Estrategia: formación de analogías	En la actividad 4.a se relacionan diferentes aspectos de la ecuación, para así recurrir a un procedimiento que permita dejar la expresión x/y en un miembro de la ecuación.	En desacuerdo	El resultado deseado en 4 a, es un simple despeje algebraico que no involucra analogía alguna.
	Principio: Principio de simetría.	En la actividad 4.a, además, se pretende encontrar la simetría que existe entre las ecuaciones, a través de la restructuración de la ecuación dada, por lo que nos encontramos con este principio.	De acuerdo	
	Herramienta: Grafico de solución.	Al igual que la actividad 1, la actividad 4.b está estructurada en varias actividades que permiten dar una visión general de lo que se quiere lograr en la plantilla electrónica.	De acuerdo	
	Herramienta: Tablas	En la actividad 4.b(a) hasta la 4.b(c), nos encontramos con tablas, en las que ubican los resultados necesarios, para luego poder realizar la comparación con la raíz de dos.	De acuerdo	
	Estrategia: formación de analogías	En la actividad 4.b(d), al realizar el procedimiento de obtener los resultados en planilla electrónica y, luego, de buscar el valor aproximado de raíz de dos, podemos notar como re realiza un procedimiento que es conocido con el cual relacionamos dos valores que tienen ciertas similitudes.	En desacuerdo	No confundir analogías en resolución de problemas (usar la misma forma de proceder en distintas situaciones de distintos contextos), con el uso reiterado de un algoritmo (el dado por el cálculo de

				la expresión correspondiente a cada lado de la ecuación para los valores obtenidos), que es lo que se hace en 4b.
5	Principio: Principio de retorno	En esta actividad se encuentra presenta el principio de retorno, ya que se realizan tareas análogas a la actividad 3, en donde se busca similitud con algo que ya fue resuelto.	En desacuerdo	Creo que es más pertinente el principio de analogía (solamente). Noten que, al cambiar el valor de D, el contexto ya es distinto (pues están cambiando una de las hipótesis), a diferencia de lo que les señalé en el punto anterior.
	Principio: Principio de simetría	Al contestar la pregunta correspondiente a la actividad, se utiliza este principio al buscar una simetría con respecto a la actividad 3, para así dar respuesta a la pregunta.	De acuerdo	
6	Estrategia: Pruebas sistemáticas	En la actividad 6.a se presenta una demostración de una identidad, en donde, para lograr demostrarla, hay que realizar pruebas sistemáticas como ensayo y error, ya que no se conoce el procedimiento.	De acuerdo	
	Estrategia: Trabajo hacia delante y hacia atrás	La actividad 6.a necesita un trabajo hacia adelante y hacia atrás para poder llegar a una respuesta; incluso en las indicaciones se propone que se desarrollen ambos lados de la igualdad.	De acuerdo	
	Principio: Principio de analogía	La actividad 6.a y 6.b se presentan similitudes entre lo que se quiere resolver y lo que se resolvió, en este caso la demostración de la identidad.	En desacuerdo	Creo que es más uso de almacén de conocimientos. Cuando una identidad como la de 6a es demostrada, pasa a

				formar parte de nuestro bagaje de conocimientos. La conclusión de 6b es una consecuencia directa de lo demostrado en 6a (no se trata de una analogía).
	Principio: principio de retorno	Se tiene que en la actividad 6.a y 6.b se presenta un retorno de lo desconocido a lo conocido, en donde esté está ligado al principio de analogía a través de las tareas que se presentan.	En desacuerdo	Idem al punto anterior.
	Herramienta: tablas	En 6.c se presenta la herramienta de tablas, ya que se creará una de estas en Excel para ordenar diferentes soluciones.	De acuerdo	
	Estrategia: formación de analogías	En 6.c y 6.d se recurren a procedimientos conocidos, en los que relacionamos diferentes aspectos como la ecuación de Pell para diferentes D, y la diferencia entre procedimientos con la actividad 5.	De acuerdo	
7	Estrategia: Restaurar un problema	En toda la actividad 7 se ve esta estrategia presentada, ya que utilizando GeoGebra se ve el problema desde un punto de vista diferente, pudiendo ser más adecuado para su comprensión	De acuerdo	
	Habilidad: figuras informativas	En 7.a, 7.b, 7.c se grafican curvas y puntos, lo que correspondería a figuras informativas.	De acuerdo	
	Principio: Principio de transformación	En la actividad 7.d pide una explicación que corresponde a describir de manera diferente lo que dice el lema.	De acuerdo	

8	Herramienta: almacén de conocimientos	8.a, 8.b, 8.c corresponde a almacén de conocimientos ya que se tiene que acudir a referencias sobre conmutatividad, asociatividad y elemento neutro.	De acuerdo	
	Estrategia: Pruebas sistemáticas	8.a, 8.b, 8.c, se tienen que realizar varios procedimientos, para dar respuesta a los problemas.	De acuerdo	Cuidado con la redacción de 8 a. “Muestre si” es ambiguo, queda mejor “Muestre que”. “Muestre” se usa cuando se quiere indicar que es uno y solo uno el desenlace de la situación bajo las hipótesis planteadas.

Observaciones:

B.5 Cuarta validación

En comparación con las anteriores está fue enviada y recibida presencialmente; que luego, por problemas de dimensiones con el escáner usado no se pudo obtener el tamaño exacto de la hoja perdiendo un mínimo de información mencionado a continuación:

- En la actividad 7, segundo heurismo, se encerró en un ciculo la palabra actividad.
- En el apartado de observaciones se lee, respectivamente por línea de texto: “La herramiento”, “estudiante”, “Las herramientas”, y “que”.

nes: La siguiente tabla contiene las actividades de las guías de trabajo. Indique a qué etapa del modelado corresponde cada actividad e indique
nes sobre la redacción o cualquier otro aspecto que considere relevante.

rismos	Justificación	De acuerdo / En desacuerdo	Observaciones / Justificación
amienta: a mativa	De las actividades 1.a. hasta 1.d, se utilizaría la herramienta de figura informativa ya que en cada uno se tiene que trazar segmentos.	DE ACUERDO	FALTA LA ACTIVIDAD
amienta: cén de cimiento	En la actividad 2.a hasta 2.d se observa esta herramienta ya que directamente se pregunta sobre qué relación se puede obtener, por lo que el estudiante tiene que acudir a sus referencias sobre la materia, en este caso, sobre el Teorema de Pitágoras.	DE ACUERDO	AL INICIO DE LA ACTIVIDAD 2 COLOCAR: BASÁNDOSE EN LO ANTERIOR
tegia: bas máticas	Tanto en las actividades 2.b como 2.c nos encontramos con esta estrategia que es muy útil para realizar demostraciones de las cuales no se conoce el procedimiento ya que el estudiante tiene que dedicarte a buscar la solución mediante ensayo y error.	EN DESACUERDO	EL ENSAYO Y ERROR ES UNA PRUEBA ASISTEMÁTICA
tegia: ajo hacia nte y hacia	En las actividades 2.b y 2.c también se encuentra el trabajo hacia adelante y hacia atrás, debido a que el estudiante tendrá que fijarse cuál es su meta, reflexionando a partir del problema dado.	DE ACUERDO	

ategia: ación de ogías	En la actividad 2.d nos encontramos con la formación de analogías, ya que se pregunta sobre la forma de una posible solución basada en una ya dada, en donde se tiene que recurrir a un procedimiento conocido para poder relacionar en este caso las soluciones.	DE ACUERDO	EL ~~ENSAYO Y ERROR~~ EN UNA ~~PF~~
ategia: bas máticas	En la actividad 3.a nos encontramos con esta estrategia ya que por ensayo y error hay que encontrar un par de números que sean solución de la ecuación de Pell.	EN DESACUERDO	EL ENSAYO Y ERROR ES UNA PRUEBA ASISTEMATICA
amientas: as	En la actividad 3.b al utilizar una planilla electrónica, se colocan los datos en tablas, que permiten estructurar la información para así ayudar con el plan de solución.	DE ACUERDO	
amientas: acén de cimientos	En la actividad 3.b el estudiante tiene que conocer la proposición que permite encontrar más soluciones a partir de una, por lo que se estaría utilizando el almacén de conocimientos.	DE ACUERDO	
ategia: versión de lo onocido a lo cido	En la actividad 3.b al programar un algoritmo, se está restructurando el problema, y construyendo el propio algoritmo a partir de lo que ya se conocía.	DE ACUERDO	
acén de cimiento	El estudiante tiene que tener conocimientos básicos de geometría analítica, y saber utilizar el lema de Brahmagupta. 4?	DE ACUERDO	~~NO SE INDICA~~ LA ~~ACTIVIDAD~~
ategia: ación de ogías	En la actividad 4.a se relacionan diferentes aspectos de la ecuación, para así recurrir a un procedimiento que permita dejar la expresión x/y en un miembro de la ecuación.	DE ACUERDO	

cipio: cipio de tría.	En la actividad 4.a además se pretende encontrar la simetría que existe entre las ecuaciones, a través de la restructuración de la ecuación dada, por lo que nos encontramos con este principio.	EN DESACUERDO	SE PUEDE REALIZAR EN FORMA MECÁNICA
amienta: ico de ción.	Al igual que la actividad 1, la actividad 4.b está estructurada en varias actividades que permiten dar una visión general de lo que se quiere lograr en la plantilla electrónica.	~~DE ACUERDO~~ EN DESACUERDO	LA ESTRUCTURA EN VARIAS ACTIVIDADES LA DEBO REALIZAR EL ESTUDIANTE, NO EL PROFESOR
amienta: as	En la actividad 4.b(a) hasta la 4.b(c) nos encontramos con tablas, en las que ubican los resultados necesarios, para luego poder realizar la comparación con la raíz de dos.	EN ACUERDO	
tegia: ación de ogías	La actividad 4.b(d) al realizar el procedimiento de obtener los resultados en planilla electrónica y luego de buscar el valor aproximado de raíz de dos, podemos notar como re realiza un procedimiento que es conocido con el cual relacionamos dos valores que tienen ciertas similitudes.	EN ACUERDO	SOLO SUGERENCIA: CAMBIAR "RELACIONE LA ECUACIÓN..." POR "ANALICE LA ECUACIÓN CONSIDERANDO LOS RESULTADOS ..."
ipio: ipio de no	En esta actividad se encuentra el principio de retorno, ya que se realizan tareas análogas a la actividad 3, en donde se busca similitud con algo que ya fue resuelto. ACTIVIDAD 5	EN ACUERDO	
ipio: ipio de tría	Al contestar la pregunta correspondiente a la actividad se utiliza este principio al buscar una simetría con respecto a la actividad 3, para así dar respuesta a la pregunta.	EN ACUERDO	

ategia: bas máticas	En la actividad 6.a se presenta una demostración de una identidad, en donde para lograr demostrarlo hay que realizar pruebas sistemáticas como ensayo y error, ya que no se conoce el procedimiento.	EN DESACUERDO	EL ENSAYO Y ERROR ES UNA PRUEBA ASISTE-MATICA
ategia: ajo hacia nte y hacia	La actividad 6.a necesita un trabajo hacia adelante y hacia atrás para poder llegar a una respuesta, incluso en las indicaciones se propone que se desarrollen ambos lados de la igualdad.	DE ACUERDO	
cipio: cipio de ogía	La actividad 6.a y 6.b se presentan similitudes entre lo que se quiere resolver y lo que se resolvió, en este caso la demostración de la identidad.	EN DESACUERDO	DEBERÍA SER SOLO LA ACTIVIDAD 6.b y NO LA 6.a
cipio: ipio de no	Se tiene que en la actividad 6.a y 6.b se presenta un retorno de lo desconocido a lo conocido, en donde esté está ligado al principio de analogía a través de las tareas que se presentan.	DE ACUERDO	
amienta: s	En 6.c se presenta la herramienta de tablas, ya que se creará una de estas en Excel para ordenar diferentes soluciones.	DE ACUERDO	
tegia: ación de ogías	En 6.c y 6.d se recurren a procedimientos conocidos, en los que relacionamos diferentes aspectos como la ecuación de Pell para diferentes D, y la diferencia entre procedimientos con la actividad 5.	DE ACUERDO	
tegia: aurar un ema	En toda la actividad 7 se ve esta estrategia presentada, ya que utilizando GeoGebra se ve el problema desde un punto de vista diferente, pudiendo ser más adecuado para su comprensión	DE ACUERDO	

lidad: figuras mativas	En 7.a, 7.b, 7.c se grafican curvas y puntos, lo que correspondería a figuras informativas.	EN ACUERDO	CAMBIAR HABILIDAD POR HERRAMIENTA / EN 7c CAMBIAR UNO POR DOS
cipio: cipio de sformación	En la actividad 7.d pide una explicación que corresponde a describir de manera diferente lo que dice el lema.	DE ACUERDO	
amienta: cén de cimientos	8.a, 8.b, 8.c corresponde a almacén de conocimientos ya que se tiene que acudir a referencias sobre conmutatividad, asociatividad y elemento neutro.	DE ACUERDO	R.
ategia: bas máticas	8.a, 8.b, 8.c, se tienen que realizar varios procedimientos, para dar respuesta a los problemas.	EN DESACUERDO	PORQUE ENCUENTRA SOLUCIONES PARTICULARES

iones:

RRAMIENTA, PRINCIPIO o ESTRATEGÍA PROPUESTA, NO NECESARIAMENTE ES LA QUE UTILIZARÁ EL
DIANTE

ERRAMIENTAS, PRÍNCIPIOS o ESTRATEGÍAS, ~~SON~~ LAS QUE USAN LOS ESTUDIANTES Y NO LAS
USA EL PROFESOR PARA DISEÑAR LA GUÍA.

Cuestionario de auto reporte sobre contribuciones primarias y secundarias a los Objetivos de Desarrollo Sostenible, organizados por categorías.

En caso de que aplique, marque con una "X" un único Objetivo de Desarrollo Sostenible como aporte principal y otro objetivo como aporte secundario.

<table>
<tr><th>Bloques</th><th>Objetivos</th><th>1°</th><th>2°</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Personas</td><td>1. Poner fin a la pobreza en todas sus formas y en el mundo.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2. Poner fin al hambre, lograr la seguridad alimentaria y la mejora de la nutrición y promover la agricultura sostenible</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3. Garantizar una vida sana y promover el bienestar de todos y todas las edades.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4. Garantizar una educación inclusiva y equitativa de calidad y promover oportunidades de aprendizaje permanente para todos.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>5. Lograr la igualdad de género y empoderar a todas las mujeres y las niñas.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">Planeta</td><td>6. Garantizar la disponibilidad y la gestión sostenible del agua y el saneamiento para todos.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>12. Garantizar modalidades de consumo y producción sostenible.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>13. Adoptar medidas urgentes para combatir el cambio climático y sus efectos.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>14. Conservar y utilizar sosteniblemente los océanos, los mares y los recursos marinos para el desarrollo sostenible.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>15. Proteger, restablecer y promover el uso sostenible de los ecosistemas terrestres, gestionar sosteniblemente los bosques, luchar contra la desertificación, detener e invertir la degradación de las tierras y detener la pérdida de biodiversidad.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">Prosperidad</td><td>7. Garantizar el acceso a una energía asequible, fiable, sostenible y moderna para todos.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>8. Promover el crecimiento económico sostenido, inclusivo y sostenible, el empleo pleno y productivo y el trabajo decente para todos.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>9. Construir infraestructuras resilientes, promover la industrialización inclusiva y sostenible y fomentar la innovación.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>10. Reducir la desigualdad en los países y entre ellos.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>11. Lograr que las ciudades y los asentamientos humanos sean inclusivos, seguros, resilientes y sostenibles.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Paz</td><td>16. Promover sociedades pacíficas e inclusivas para el desarrollo sostenible, facilitar el acceso a la justicia para todos y construir a todos los niveles institucionales eficaces e inclusivas que rindan cuentas.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Asociaciones</td><td>17. Fortalecer los medios de implementación y revitalizar la Alianza Mundial para el Desarrollo Sostenible</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Debe adjuntar este documento a su trabajo de titulación, trabajo de título, proyecto de título o seminario de título.