



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

# TAREAS PRÁCTICAS DE INFORMACIÓN CUÁNTICA MEDIANTE EL USO DE FOTONES CORRELACIONADOS EN POLARIZACIÓN

**Por: Felipe Quinteros Moro**

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Concepción para optar al grado académico de Magíster en Ciencias con Mención en Física

Junio 2024

Concepción, Chile

**Profesor Guía: Esteban Sepúlveda Gómez**

© 2024, Felipe Quinteros

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento

Esta tesis y mi magíster están dedicados a mi mamá y mi papá. Gracias a ellos todo esto es posible, su amor y apoyo siempre me acompaña y hace que los momentos difíciles se pongan en perspectiva.

También, agradecer a Florencia por acompañarme y apoyarme cada día, agradezco todo el cariño y consejos que me das. Gracias, Gracias, Gracias por hacer que estos últimos seis meses fueran más llevaderos para mi.

Finalmente, quiero agradecer a Esteban por aceptarme como alumno y guiarme en la formación como científico. También, gracias por la ayuda y los consejos personales.

Y gracias a todas los amigos que hice en el magíster, han hecho de esta experiencia algo muy divertido y también mas llevadero.

Las palabras son pocas para describir lo que siento con todos ustedes... solo decir que muchas gracias.

## **Agradecimientos**

Este proyecto contó con el apoyo del Instituto de Investigación en Óptica (MIRO). Además, con ANID mediante la beca de magíster nacional 2023.

## Resumen

### Resumen

La tesis titulada “Tareas Prácticas de Información Cuántica Mediante el Uso de Fotones Correlacionados en Polarización” se centra en la implementación experimental y el análisis teórico de tareas de información cuántica utilizando fotones correlacionados en polarización. El estudio investiga principalmente la estimación de la matriz de proceso de un 4C-FBS (Divisor de Haz de Cuatro Caminos) y la adaptación de los Códigos de Acceso Aleatorio Cuántico (QRAC) a entornos ruidosos. Aspectos clave incluyen:

1. **Estimación de la Matriz de Proceso:** La tesis explora diferentes bases de medición, como las matrices de Pauli, las matrices de Gell-Mann y las Bases Mutuamente No Sesgadas (MUBs), para estimar la matriz de Choi de los canales cuánticos. El enfoque aprovecha el isomorfismo de Choi-Jamiolkowski para recuperar la matriz de proceso del 4C-FBS.

2. **QRAC en Entornos Ruidosos:** Se diseñó un montaje experimental que incluye una fuente de fotones entrelazados, un interferómetro Sagnac que implementa un canal *amplitud damping* y filtros estocásticos para mitigar los efectos de este canal en un protocolo de QRAC.

Esta investigación contribuye a la comprensión y aplicación práctica del procesamiento de información cuántica, ofreciendo perspectivas que podrían ser útiles para futuros desarrollos en comunicación cuánticas.

**Keywords** – estimación de matriz de proceso, QRAC, isomorfismo de Choi-Jamiolkowski, filtros estocástico

## Abstract

The thesis titled “Practical Quantum Information Tasks Using Polarization-Correlated Photons” focuses on the experimental implementation and theoretical analysis of quantum information tasks using polarization-correlated photons. The study primarily investigates the process matrix estimation of a 4C-FBS (Four-Path Beam Splitter) and the adaptation of Quantum Random Access Codes (QRAC) to noisy environments. Key aspects include:

1. **Process Matrix Estimation:** The thesis explores different measurement bases, such as the Pauli matrices, Gell-Mann matrices, and Mutually Unbiased Bases (MUBs), for estimating the Choi matrix of quantum channels. The approach leverages the Choi-Jamiolkowski isomorphism to recover the process matrix of the 4C-FBS.

2. **QRAC in Noisy Environments:** An experimental setup was designed which includes an entangled photon source, a Sagnac interferometer implementing an amplitude damping channel, and stochastic filters to mitigate the effects of this channel on the QRAC protocol.

This research contributes to the understanding and practical application of quantum information processing, offering insights that could be useful for future developments in quantum communication.

**Keywords** – process matrix estimation, QRAC, Choi-Jamiolkowski isomorphism, stochastic filters

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Resumen</b>	<b>II</b>
<b>Abstract</b>	<b>III</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>4</b>
2.1. Estado cuántico de un sistema . . . . .	4
2.2. Operador de Evolución y Operador de Medición . . . . .	7
2.2.1. Medidas Projectivas . . . . .	9
2.2.2. POVMs . . . . .	9
2.3. Estimación de Estados . . . . .	12
2.3.1. Compressed Sensing . . . . .	13
2.4. Canales Cuánticos . . . . .	15
2.4.1. Operadores de Krauss . . . . .	16
2.4.1.1. Amplitud Damping Channel . . . . .	19
2.4.2. Isomorfismo Choi-Jamiolkowski . . . . .	20
2.5. Transformaciones Estocásticas . . . . .	23
2.6. Código de Acceso Aleatorio Cuántico (QRAC) . . . . .	28
<b>3. Metodología</b>	<b>34</b>
3.1. Estimación Matriz de Proceso de 4C-FBS . . . . .	35
3.2. QRAC adaptado al ruido . . . . .	38
<b>4. Resultados</b>	<b>43</b>
4.1. Estimación Matriz de Proceso de 4C-FBS . . . . .	43
4.2. QRAC adaptado al ruido . . . . .	48
<b>5. Conclusión</b>	<b>51</b>
<b>Referencias</b>	<b>56</b>
<b>Apéndices</b>	<b>57</b>

Índice general	v
<b>A. Calculo Filtros Estocásticos</b>	<b>57</b>
<b>B. Interferómetro de Sagnac como un canal amplitud damping</b>	<b>59</b>

# Índice de figuras

2.3.1.	Representaciones del espacio de búsqueda del optimizador a) El espacio de estados que considera el optimizador es el espacio de todas las matrices Hermíticas. b) Al utilizar optimización convexa se reduce a las matrices de rango bajo. c) Finalmente con CCO se agrega la restricción de positividad, por lo que el espacio de búsqueda se restringe a la intersección de ambas restricciones. . . . .	14
2.4.1.	El efecto de un canal tipo AD sobre la distribución de estados en la esfera de Bloch, para $\gamma = 0,8$ . La distribución de estados es comprimida según la ecuación (2.4.21) hacia el estado $ 0\rangle$ . Imagen de [24]. . . . .	20
2.5.1.	Escenario de Bell bipartito. La fuente genera un par de estados entrelazados, ej: fotones. Luego, envía un estado a Alice y el otro a Bob. Alice puede realizar las medidas $\{a, a'\}$ y Bob las medidas $\{b, b'\}$ , ambos con las salidas $\{-1, +1\}$ . . . . .	24
2.6.1.	Una representación esquemática de (a) QRACs en el escenario SDI ideal cuando Alice transmite estados $\rho_x$ a Bob. Se observa una ventaja cuántica cuando Bob recupera el subconjunto requerido de bits con una ASP $P_b > P_b^{class} = 0,75$ midiendo $M_y$ . Además, la violación del testigo de dimensión (DW) por los estados codificados certifica que son estados cuánticos de dimensión 2, asegurando la independencia semi-dispositivo. (b) QRACs en el escenario SDI cuando los estados de Alice se transmiten a través de un canal cuántico ruidoso $\Lambda$ . Después de la transmisión a lo largo del canal, el estado $\Lambda(\rho_x) = \rho'_x$ llega a Bob. (c) QRACs en el escenario SDI ruidoso con activación. Se aplica un filtro $F_A$ en el extremo de Alice antes de la transmisión del estado codificado $\rho_x$ , produciendo el nuevo estado $\rho'_x$ . Después de la transmisión a lo largo del canal, el estado $\Lambda(\rho'_x)$ es nuevamente filtrado por Bob utilizando $F_B$ antes de realizar mediciones $M_y$ en el estado final $\rho''_x$ . . . . .	29
2.6.2.	Aumento de la tolerancia al parámetro de amortiguamiento $\gamma$ en función del coeficiente $f$ del filtro estocástico. Permite recuperar los valores cuánticos del testigo de dimensión usado. . . . .	33
3.1.1.	Divisor de haces de 4 caminos en fibra óptica. . . . .	35

3.2.1.	Se utiliza una fuente de fotones heraldados basada en el proceso SPDC para estudiar el comportamiento del protocolo SDI QRAC en un escenario ruidoso. El montaje de Alice incluye una HWP ( $\theta_a$ ) que se usa para preparar cuatro estados codificados en el grado de libertad de la polarización: $\rho_{00}$ , $\rho_{11}$ , $\rho_{01}$ y $\rho_{10}$ . Además, se aplica un filtro denotado como $F_A$ antes de enviar el estado. Posteriormente, un interferómetro de Sagnac de dos caminos implementa el canal de amortiguación de amplitud, donde la cantidad de amortiguación de amplitud se controla mediante $\theta_1$ . Después de transmitir el estado a través del canal, Bob aplica $F_B$ y, finalmente, se realizan dos mediciones mediante una HWP, un PBS y dos detectores de fotones. Los dos filtros estocásticos, uno antes y uno después del canal ruidoso, se implementan utilizando ventanas de vidrio colocadas en los ángulos de Brewster. . . . .	39
3.2.2.	Cambio en la visibilidad de un fotón en polarización diagonal ( $ +\rangle$ ) luego de pasar por un canal de amortiguamiento de amplitud con factor de amortiguamiento $\gamma$ . . . . .	42
3.2.3.	Los parámetros de filtro $f_a$ y $f_b$ en función del número de vidrios. Los puntos azules y naranjas representan resultados experimentales. Estos resultados fueron obtenidos utilizando fotones convertidos descendentes (@810 nm), con barras de error calculadas usando propagación de error gaussiana y estadísticas de Poisson de los conteos de coincidencia. . . . .	42
4.1.1.	a) Infidelidad estimación matriz de Choi utilizando la base de Gell-Mann b) Infidelidad estimación matriz del 4C-FBS y el estado utilizado en la estimación.	44
4.1.2.	a) Infidelidad estimación matriz de Choi utilizando la base de MUBs b) Infidelidad estimación matriz del 4C-FBS y el estado utilizado en la estimación.	45
4.1.3.	a) Infidelidad estimación matriz de Choi utilizando la base de Pauli b) Infidelidad estimación matriz del 4C-FBS y el estado utilizado en la estimación.	46
4.2.1.	Probabilidad de éxito promedio (ASP) como función del parámetro de amortiguación de amplitud (ADP). La línea horizontal representa el ASP de un RAC clásico, que es 0.75. Las líneas sólida, discontinua y punteada representan las predicciones teóricas cuando $f = \{0, 0,45, 0,90\}$ . Los puntos rojos son los resultados experimentales. Las barras de error están dentro de los puntos experimentales y se obtienen utilizando la propagación del error gaussiano y teniendo en cuenta las estadísticas de Poisson de los conteos de coincidencias registrados. El área azul muestra cómo cambia el ASP cuando incluimos errores experimentales comunes, como la configuración de las placas de media onda o errores en la caracterización de $f_a$ y $f_b$ . . . .	50

# Capítulo 1

## Introducción

En información cuántica se estudia la transmisión, procesamiento y guardado de información codificada en sistemas físicos cuánticos. Esto se estudia en el contexto de diversas áreas como la criptografía [1], telecomunicaciones [2] y computación [3]. Por ejemplo, algunos protocolos desarrollados son la teleportación de información [4], la generación de bits genuinamente aleatorios [5] o la distribución de claves secretas [6]. Existen diferentes soportes físicos que pueden ser utilizados para implementar estos protocolos [7-9]. Los fotones son excelentes portadores de información dado que son de rápida transmisión, sencillos de manipular y no interactúan entre sí. Además, el sistema actual de telecomunicaciones está basado en el uso de fibras ópticas, lo que hace idóneo el uso de fotones en la implementación de protocolos de información cuántica.

En telecomunicaciones es de gran interés ampliar la capacidad de transmisión de las redes ópticas. Mas en la actualidad estamos alcanzando el límite en la capacidad de estas redes [10-12]. Una solución es reemplazar las actuales fibras ópticas mono-modo (SMF) por fibras ópticas multi-núcleo (MCF) [13]. Su diferencia radica en la cantidad de núcleos que contienen dentro de un mismo recubrimiento. Las MCF permite tener acceso a un número mayor de canales. Además, el hecho de que compartan un recubrimiento hace que la coherencia entre los diferentes núcleos sea más resistente que el ruido de un

conjunto de SMF [13].

En principio las fibras ópticas multi-núcleo fueron estudiadas para resolver el problema de la capacidad de transmisión de las redes de telecomunicaciones. Mas en el contexto de información cuántica estas permiten implementar protocolos de información cuántica usando los caminos como los modos del fotón [14-17]. Para realizar operaciones sobre los fotones dentro de una MCF se requieren elementos ópticos en fibra similares a los existentes para SMF. Un elemento recientemente desarrollado es el divisor de haz multi-camino en fibra óptica (MC-FBS) [18] que combina coherentemente la luz de los diferentes modos de una MCF.

Un desafío al momento de utilizar un MC-FBS es realizar la caracterización de este dispositivo dado que el numero de parámetros aumenta cuadráticamente con el numero de núcleos que contiene. Para soslayar este problema se propone realizar la tomografía utilizando un método usado en la estimación de estados de bajo rango llamado *compressed sensing* (CS) [19]. Para esto simulamos el uso de qubits fotonicos donde utilizamos la polarización como grado de libertad auxiliar para realizar una estimación eficiente de un MC-FBS. Esto permite reducir el numero de mediciones necesarias para estimar la matriz de proceso del 4C-FBS.

Ahora bien las MCFs permiten acceder a protocolos cuánticos para enfrentar el problema de la capacidad de transmisión en telecomunicaciones. Una solución a este problema es comprimir información lo que permite utilizar menos capacidad de la red para transmitir un mensaje. Un método usualmente utilizado es el *código de acceso aleatorio* (RAC) [20], el cual tiene un 75 % de probabilidad de éxito de recuperar la información comprimida. Existe una versión análoga a RAC que hace uso de las propiedades cuánticas del sistema llamado *código de acceso aleatorio cuántico* (QRAC) [21-23], el cual tiene una probabilidad de éxito de recuperar correctamente la información del 87,5 %. Mas un problema al momento de realizar protocolos de información cuántica es el efecto del ruido sobre un estado. El ruido empeora el rendimiento del QRAC respecto del caso clasico RAC [22]. Existen diferentes

tipos de ruido como: *bit flip*, *phase flip*, *dephasing*, *amplitud damping* y *depolarizing* [24]. Recientemente se propuso que mediante un proceso de optimización se puede contrarrestar el ruido tipo *bit flip*, *phase flip* y *dephasing* [22]. En otros trabajos se ha propuesto el uso de filtros estocásticos para recuperar violaciones de desigualdades de Bell en presencia de ruido tipo *amplitud damping* [25, 26]. En esta tesis utilizamos elementos ópticos para implementar un filtro estocástico y recuperar la ventaja del QRAC sobre RAC en un escenario de ruido tipo *amplitud damping*.

La presente tesis se organiza de la siguiente manera. En el capítulo 2 se muestra el marco teórico, donde se presentan los conceptos necesarios para comprender este trabajo. Para esto primero se introducen los postulados de la mecánica cuántica en términos de operadores lineales. Lo que permite explicar de manera natural el formalismo de operadores de Krauss en la descripción de canales cuánticos, como son los de amortiguamiento de amplitud y los filtros estocásticos. También, se describe el isomorfismo de Choi-Jamiolkowski que será de utilidad al momento de estimar la matriz de proceso del 4C-FBS. Además, se explica la estimación de estados y el método CS. Finalmente, se trata el protocolo QRAC y la relación entre su probabilidad de éxito y el testigo de dimensión. Luego, en el capítulo 3 se explican las metodologías seguidas para ambos problemas; la estimación de estados mediante CS y el uso de filtros estocásticos en QRAC con ruido tipo ADC. En el capítulo 4 se muestran los resultados y en el capítulo 5 se presentan las conclusiones de esta tesis.

## Capítulo 2

# Marco Teórico

### 2.1. Estado cuántico de un sistema

La mecánica cuántica provee un marco matemático sobre el cual se construyen las teorías físicas. Por ejemplo, indica el formalismo matemático para describir alguna evolución general de nuestro sistema físico. Este marco matemático se sustenta físicamente mediante *los postulados de la mecánica cuántica*, los cuales definen ciertas condiciones mínimas que todo sistema físico debe tener y le asocian expresiones matemáticas a estos conceptos. Para esto el álgebra lineal a surgido como la herramienta matemática idónea para expresar los postulados, dado que de manera natural los agentes físicos pueden ser expresados mediante operadores lineales o matrices. El primer postulado define el espacio matemático en el cual se encuentran expresados todos los grados de libertad de interés de un sistema físico. Este postulado se define como:

**Postulado 1:** Cualquier sistema físico aislado tiene asociado un espacio vectorial complejo con un producto interno (esto es, el espacio de Hilbert) llamado el *espacio de estados* del sistema. El sistema está completamente descrito por su *vector de estado* el cual pertenece al espacio de estados del sistema [24].

Al espacio de estados ( $\mathcal{H}$ ) le corresponde un conjunto de autovectores llamados la base de representación del sistema ( $|v_i\rangle_{i=1}^d$ ), los cuales son ortonormales entre si  $\langle v_j | v_i \rangle = \delta_{ij}$ .

Con

$$|v_i\rangle = (b_1, \dots, b_d)_i^T, \quad (2.1.1)$$

$$\langle v_i| = (b_1, \dots, b_d)_i^*. \quad (2.1.2)$$

Con  $b_d$  son los elementos del vector de estado  $|v_i\rangle$ . A esta notación matemática para expresar los vectores de estado  $|\cdot\rangle$  y su transpuesto conjugado  $\langle\cdot|$ , se le conoce como *notación de Dirac* (bra-ket). Una base de representación permite expresar cualquier sistema físico mediante el operador lineal  $\rho$ , el cual pertenece al mismo espacio de estados ( $\mathcal{H}$ ) de su base de representación,

$$\forall \{\rho, |v_i\rangle_{i=1}^d\} \in \mathcal{H} \rightarrow \rho = \sum_{i,j=1}^d k_{ij} |v_i\rangle \langle v_j|, \quad (2.1.3)$$

donde  $k_{ij}$  es alguna constante. El operador  $\rho$  es llamado *operador densidad*, el cual contiene toda la información del sistema. Para representar un escenario físico real este debe satisfacer tres restricciones: tener traza unitaria, ser semi-definido positivo y ser hermítico,

$$\text{tr}(\rho) = 1, \quad (2.1.4)$$

$$\lambda(\rho) \geq 0, \quad (2.1.5)$$

$$\rho = \rho^\dagger. \quad (2.1.6)$$

Un espacio de estados pueden ser descompuesto en mas de un conjunto de bases  $|v_i\rangle_{i=1}^d$ . Esto permite expresar el mismo estado físico en diferentes bases de representación. Existen mapas  $\mathbf{A}(\cdot)$ , llamados *operadores de cambio de base*, que mapean la representación del estado entre dos bases distintas pertenecientes al mismo espacio de

Hilbert,

$$\mathbf{A}(\rho) = C\rho C^\dagger = \tilde{\rho}, \quad (2.1.7)$$

$$C = \sum_{i,j=1}^d c_{ij} |v_i\rangle \langle e_j|. \quad (2.1.8)$$

Donde  $\{|v\rangle, |e\rangle\} \in \mathcal{H}$  y  $c_{ij}$  algún coeficiente. El operador  $C$  es una matriz de dimensión  $d \times d$ . Ahora bien, al aplicar el cambio de base al estado  $\rho = \sum_{m,n=1}^d \alpha_{mn} |v_m\rangle \langle v_n|$  tenemos,

$$\mathbf{A}(\rho) = \sum_{i,j=1}^d \sum_{m,n=1}^d \alpha_{mn} c_{ij} c_{ij}^* |e_i\rangle \langle v_j | v_m\rangle \langle v_n | v_i\rangle \langle e_j|, \quad (2.1.9)$$

$$= \sum_{i,j=1}^d \sum_{m,n=1}^d \alpha_{mn} c_{ij} c_{ij}^* |e_i\rangle \langle e_j | \delta_j^m \delta_i^n, \quad (2.1.10)$$

$$= \sum_{i,j=1}^d \alpha_{ji} c_{ij} c_{ij}^* |e_i\rangle \langle e_j|, \quad (2.1.11)$$

$$= \tilde{\rho}. \quad (2.1.12)$$

Lo anterior nos permite describir nuestro sistema físico en la base de representación mejor adecuada a nuestro problema de interés.

De forma general existen dos grandes clasificaciones de operadores densidad: los estados puros y los estados mixtos. Los estados puros, descritos por la ecuación (2.1.3), representan sistemas físicos en algún estado conocido y cumplen que  $\text{tr}(\rho) = \text{tr}(\rho^2) = 1$ . En cambio, los estados mixtos son un ensamble estadístico de  $n$  posibles estados puros,

$$\rho = \sum_n p_n \left( \sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij} |v_i\rangle \langle v_j| \right)_n, \quad (2.1.13)$$

$$= \sum_n p_n \rho_n, \quad (2.1.14)$$

estos cumplen que  $\text{tr}(\rho^2) < 1$ .

También, en mecánica cuántica los sistemas físicos pueden presentar entrelazamiento. Se

pueden definir los estado entrelazados como aquellos que no pueden ser descritos como la suma convexa del producto tensorial de operadores densidad en diferentes subsistemas, en el caso bipartito implica que,

$$\rho_{ent} \neq \sum_i c_i (\rho^A \otimes \rho^B). \quad (2.1.15)$$

Por otro lado, el entrelazamiento es cuantificable mediante diferentes métodos [27-30]. Aquellos que presentan el mayor nivel de entrelamaziendo son llamados *estados máximamente entrelazados*. El vector de estado de algún estados máximamente entrelazado  $|\psi\rangle$  es

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{dd'}} \sum_{i=0}^d \sum_{j=0}^{d'} c_{i,j} |i\rangle \otimes |j\rangle, \quad (2.1.16)$$

con  $c_{i,j} = \{+1, -1\}$ . En particular los estados bipartitos de qubits son llamados estados de Bell, estos son

$$|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_a 0_b\rangle \pm |1_a 1_b\rangle), \quad (2.1.17)$$

$$|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_a 1_b\rangle \pm |1_a 0_b\rangle). \quad (2.1.18)$$

## 2.2. Operador de Evolución y Operador de Medición

Otro aspecto importante para describir algún escenario físico es la dinámica de la evolución del sistema físico. En el cuadro de Schrödinger el estado del sistema es el que evoluciona en el tiempo bajo alguna transformación unitaria llamada *operador de evolución*. El segundo postulado de la mecánica cuántica entrega una definición:

**Postulado 2:** La evolución de un sistema cuántico *cerrado* es descrito por una *transformación unitaria*. Esto es, el estado  $\rho_1$  del sistema en el tiempo  $t_1$  está relacionado con el estado  $\rho_2$  en el tiempo  $t_2$  por un operador unitario  $U$  que depende de los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  [24],

$$U\rho_1U^\dagger = \rho_2. \quad (2.2.1)$$

Si el sistema es cerrado el operador evolución debe cumplir

$$UU^\dagger = \mathbf{I}, \quad (2.2.2)$$

$$\text{tr}(U) = \text{tr}(U^\dagger) = 1. \quad (2.2.3)$$

Dado un Hamiltoniano  $\mathbf{H}$  el operador de evolución temporal es

$$U(t) = e^{-it\mathbf{H}}. \quad (2.2.4)$$

Existen diferentes escenarios que pueden ser descritos mediante un operado de evolución. Uno en particular es el proceso de medir un sistema físico y obtener información sujeto a un observable  $\mathbf{O}$ . El operador de evolución asociado al observable  $\mathbf{O}$  es

$$\mathbf{U}(t) = e^{-it\mathbf{O}}. \quad (2.2.5)$$

Al expandir  $\mathbf{O}$  en la base que lo diagonaliza

$$\mathbf{O} = \sum_m O_m |v_m\rangle\langle v_m|. \quad (2.2.6)$$

El operador de evolución es

$$\mathbf{U}(t) = \sum_m e^{-itO_m} |v_m\rangle\langle v_m|. \quad (2.2.7)$$

Donde  $O_m$  son los autovalores asociados a cada elemento de la base de representación  $|v_m\rangle$  del observable. Ahora supongamos un estado general escrito en la misma base,

$$|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |v_i\rangle. \quad (2.2.8)$$

La probabilidad de obtener el resultado asociado al autovalor  $m$  de nuestro observable es

$$p(m) = \langle \psi | U_m^\dagger U_m | \psi \rangle, \quad (2.2.9)$$

$$= \sum_i \alpha_i \alpha_i^* e^{-itO_m} e^{itO_m} \langle v_i | v_m \rangle \langle v_m | v_m \rangle \langle v_m | v_i \rangle, \quad (2.2.10)$$

$$= \sum_i |\alpha_i|^2 \delta_m^i, \quad (2.2.11)$$

$$= |\alpha_m|^2. \quad (2.2.12)$$

Entonces, obtendremos el autotestado  $m$  de nuestro observable con una probabilidad  $|\alpha_m|^2$  asociado al estado  $|\psi\rangle$ . A los elementos ortogonales  $\mathbf{P}_m = |v_m\rangle\langle v_m|$  del observable  $\mathbf{O}$  se les llama *proyectores*.

### 2.2.1. Medidas Proyectivas

Las medidas proyectivas son aquellas que se describen mediante algún observable  $\mathbf{O}$ . (De acá en adelante se utilizara la variable  $\mathbf{P}$  para hacer referencia a las medidas proyectivas para coincidir con la nomenclatura habitual en los textos de estudio.) Al realizar una medición proyectiva el estado inspeccionado se proyecta con probabilidad  $|\langle v_m | \psi \rangle|^2$  al autoestado  $|v_m\rangle$  del operador de medición  $\mathbf{P}$ ,

$$\mathbf{P} = \sum_m c_m P_m = \sum_m c_m |v_m\rangle\langle v_m|. \quad (2.2.13)$$

Los proyectores cumplen las siguientes relaciones de ortogonalidad y completitud

$$P_m P_{m'} = \delta_{mm'} P_m, \quad \sum_m P_m = \mathbf{I}. \quad (2.2.14)$$

### 2.2.2. POVMs

En un escenario mas general puede ocurrir que el operador de medición  $\mathbf{M}$  no es una proyección ortogonal sobre el estado a medir, o que esta tenga más salidas que la

dimensión del espacio de Hilbert del estado a medir. Estas medidas pueden ser descritas por los *operadores de medición positivamente valuados*  $\mathbf{E}$  (POVM). Talque, los elementos del POVM están relacionado con los elementos del operador de medición  $\mathbf{M}$  según

$$E_m = M_m M_m^\dagger, \quad (2.2.15)$$

donde  $E_m$  es un operador hermítico semi-definido positivo llamado elemento de POVM.

Estamos en condiciones entonces de formular en general el tercer postulado de la mecánica cuántica, el cual introduce una definición acerca de los operadores de medición,

**Postulado 3:** Las mediciones son descritas por una colección  $\{M_m\}$  de *operadores medición*. Estos son operadores que actúan sobre el espacio de estados del sistema medido. El índice  $m$  refiere a la salida de la medición que puede ocurrir en el experimento. Si el estado del sistema cuántico es  $\rho$ , la probabilidad de que el resultado  $m$  ocurra es dado por [24]

$$p(m) = \text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho), \quad (2.2.16)$$

y el estado del sistema después de la medición es

$$\frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho)}. \quad (2.2.17)$$

Los operadores de medición deben satisfacer la *ecuación de completitud*

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = \mathbf{I}. \quad (2.2.18)$$

Esto implica que las probabilidades son unitarias

$$1 = \sum_m p(m) = \sum_m \text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho). \quad (2.2.19)$$

Por lo tanto, los elementos de POVM  $\{E_m\}$  satisfacen las siguientes condiciones:

$$p(m) = \langle \psi | E_m | \psi \rangle, \quad \sum_m E_m = \mathbf{I}. \quad (2.2.20)$$

De manera general, podemos decir que el elemento del operador de medición  $M_m$  se puede escribir en términos del elemento de POVM  $E_m$  como

$$M_m = U_m \sqrt{E_m}, \quad (2.2.21)$$

donde  $U_m$  es un operador unitario. Esta se llama la *descomposición polar* del operador  $M_m$ . Entonces el estado luego del POVM es

$$U_m \left( \frac{\sqrt{E_m} \rho \sqrt{E_m}}{\text{tr}(\sqrt{E_m} \rho \sqrt{E_m})} \right) U_m^\dagger. \quad (2.2.22)$$

Este estado es arbitrario, sujeto a la transformación unitaria  $U_m$  que se escoja. Mediante la selección del operador unitario  $U_m$  se definen los estados de la salida  $m$  del POVM, esta es la descripción mas general de una medición. Este tipo de medición permite diferenciar la información que se obtiene de un estado. Por ejemplo, en la discriminación de estados con protocolos como *mínimo error* o *tasa fija de salida inconclusa (FRIO)* [31, 32], donde una salida puede estar asociado a un resultado inconclusivo la medición.

Finalmente, notemos que las medidas proyectivas son un caso particular de las medidas generales o POVMs. En efecto, si consideramos el operador de medición  $M_m = \sqrt{P_m}$ , tenemos que,

$$\mathbf{M} = \sum_m c_m M_m M_m^\dagger, \quad (2.2.23)$$

$$= \sum_m c_m \sqrt{P_m} \sqrt{P_m}^\dagger, \quad (2.2.24)$$

$$= \sum_m c_m P_m. \quad (2.2.25)$$

De esta formam, recuperamos el caso de una medición proyectiva.

## 2.3. Estimación de Estados

Un aspecto central en información cuántica es reconstruir operadores densidad. Esta tarea se le conoce como estimación de estados y se han desarrollado varios métodos para realizarla [33-36]. Estas se basan en escoger cuidadosamente las mediciones y las funciones objetivos (optimizadores) a utilizar. En este sentido, es el proceso de medición el que entrega información acerca del estado en inspección, y los optimizadores definen el método para reconstruir el estado dada la información obtenida por las mediciones. De forma general un operador densidad de  $n$ -qubit puede ser representado en la base de matrices de Pauli como

$$\rho = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \cdots \sum_{n=0}^3 c_{ij\dots n} \sigma_i \otimes \sigma_j \otimes \dots \sigma_n. \quad (2.3.1)$$

Donde  $c_{00\dots 0} = 1/2^n$ ,  $\sigma_0 = \mathbf{I}_{n \times n}$  y  $\sigma_i$  son los operadores de Pauli. El método más directo es medir en toda la base de Pauli. Un problema de esta estrategia es que la cantidad de parámetros a estimar de un sistema escala con  $O(d^2)$ , con  $d = 2^n$  para  $n$ -qubits. Por ejemplo, para tan solo un sistema de 8 qubits necesito miles de mediciones y semanas de post-procesamiento de datos [37].

Por otro lado, al coleccionar los resultados de las mediciones este se vera afectado por diferentes fuentes de ruido. Los resultados de la medición  $\mathcal{M}(\rho)$  se representan en el vector de frecuencias  $\vec{f}$ , talque,

$$\mathcal{M}(\rho)_{exp} = \vec{f} = \vec{p} + \vec{\varepsilon}. \quad (2.3.2)$$

Donde  $\vec{p}$  es el vector de probabilidades teórico y  $\vec{\varepsilon}$  es el error experimental al obtener el vector de frecuencias. En general se consideran dos tipos de errores, uno proveniente de tener un conjunto finito de copias el estado de interés y otro asociado a los errores

sistemáticos en las mediciones. Estos errores llevan a que la matriz estimada no sea similar a la teórica o no represente un estado físico real.

### 2.3.1. Compressed Sensing

Los problemas antes descritos en ultima instancia provienen de que la estrategia de estimación es muy general. En el sentido de que la estrategia “busca” en el espacio de todos los operadores densidad Fig. 2.3.1. Esto implica que se requiere caracterizar todos los parámetros para estimar un estado y lo hace susceptible a considerar el ruido como parte de la estadística del estado de interés. En la practica se está interesado en una clase particular de estado, generalmente de rango bajo (ej; estados casi puros). Se dice de rango bajo cuando tiene pocos autovalores no-nulos, es decir  $r \ll d$ . Donde  $r$  es el rango del operador a estimar. Este hecho lleva a considerar estrategias en lo que se busca es encontrar un el estado que coincide con la data y tiene el menor rango posible. De esta forma todos los autovectores asociados a valores singulares pequeños son descartados, esto lo hace robusto a ruidos gaussianos. Esto produce que el estado reconstruido este compuesto solo por los autovectores mas característicos del estado. El problema abordado desde esta perspectiva se expresa como

$$\text{mín } \text{rank}(\hat{\rho}), \text{ s.t. } \mathcal{M}(\hat{\rho}) = \vec{f}. \quad (2.3.3)$$

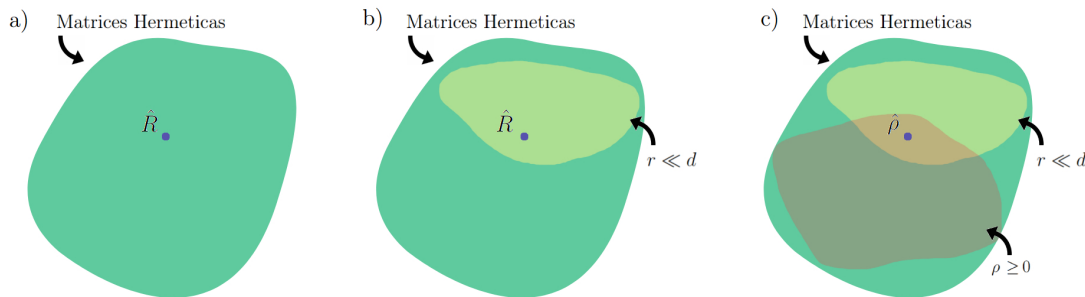
Aun así, el problema de encontrar la matriz exacta de menor rango sujeto a una restricción lineal es del tipo NP-*hard* [38]. Una forma de soslayar este problema de la complejidad es utilizar métodos de optimización convexa. Este método entra en la clasificación de métodos heurísticos. Esto es decir, que entrega el operador densidad mas cercano sujeto a una tolerancia  $\delta$ . Esto resulta ser mucho mas eficiente que buscar la solución exacta. De hecho esta estrategia reduce el numero de mediciones aleatorias que aseguran estimar el estado con precisión  $\delta$  de  $O(d^2)$  a  $O(rd \log^2 d)$  [39].

En general los métodos de optimización convexa utilizan funciones objetivos que actúan

sobre los valores singulares o la norma del estado de interés. Para estimar operadores se utilizan las Schatten  $p$ -normas  $\|\hat{\rho}\|_p = (\sum_i \sigma_i(\hat{\rho})^p)^{1/p} = \text{tr}(|\hat{\rho}|^p)^{1/p}$ , donde  $\sigma_i(\hat{\rho})$  son los valores singulares de  $\hat{\rho}$ . En particular,  $\|\cdot\|_{tr} = \|\cdot\|_1$  se llama norma nuclear, y  $\|\cdot\|_F = \|\cdot\|_2$  es la norma de Frobenius. Por otro lado, para los vectores de estado se utilizan las  $l_p$ -normas  $\|\vec{x}\|_p = (\sum_i |x_i|^p)^{1/p}$ , donde  $x_i$  son las componentes de  $\vec{x}$  [40]. Un método de optimización convexa usual es el de mínimos cuadrados (LS)

$$\min_{\hat{\rho}} (\|\mathcal{M}(\hat{\rho}) - \vec{f}\|_{l_2})^2 \leq \delta. \quad (2.3.4)$$

Esta estrategia resuelve el problema de la complejidad y del ruido, esto al centrarse en buscar la representación comprimida del operador densidad. Pero a pesar de entregar operadores cercanos al operador densidad real estos a veces no son operadores densidad validos. Por ejemplo, pueden presentar autovalores negativos Fig. 2.3.1. Para superar este problema se redefinieron los optimizadores convexos restringidos (CCO) para la estimación de estados. En este contexto los CCO son llamados métodos de *compressed sensing* [19], [41]. La ventaja de este método radica en la introducción de información *a priori* del operador. Esto mediante restricciones impuestas sobre el espacio de búsqueda del optimizador Fig. 2.3.1. Es mas, el hecho de imponer que los operadores densidad



**Figura 2.3.1:** Representaciones del espacio de búsqueda del optimizador a) El espacio de estados que considera el optimizador es el espacio de todas las matrices Hermíticas. b) Al utilizar optimización convexa se reduce a las matrices de rango bajo. c) Finalmente con CCO se agrega la restricción de positividad, por lo que el espacio de búsqueda se restringe a la intersección de ambas restricciones.

sean semi-definidos positivos  $\rho \geq 0$  genera que toda función objetivo del tipo  $p$ -norma o  $l_p$ -norma converja a una única solución  $\rho \approx \rho_e$  [41], ver figura 2.3.1. Estos problemas tipo *compressed sensing* se expresan como

$$\min_{\hat{\rho}} \|\mathcal{M}(\hat{\rho}) - \vec{f}\|_{l_2} \leq \delta \quad s.t. \hat{\rho} \geq 0. \quad (2.3.5)$$

Ahora bien, si el operador a estimar es de rango  $r \approx 1$  existen  $k \geq O(rd)$  mediciones fijas  $\{\zeta_m\}$  que garantizan la convergencia al estado teórico. Para el caso de qubits, estas se pueden construir mediante el producto tensorial de operadores de Pauli [39]

$$\zeta_m = \sigma_i \otimes \sigma_j \otimes \dots \sigma_d. \quad (2.3.6)$$

Las mediciones del conjunto  $\{\zeta_m\}$  son llamadas *medidas compresivas* [39]. En resumen, la estimación de estados mediante *compressed sensing* permite tener una estimación robusta al ruido, garantías de convergencia y definir un conjunto mínimo de medidas óptimas. Por estas razones los métodos basados en *compressed sensing* son ampliamente utilizados en la estimación de operadores de bajo rango.

## 2.4. Canales Cuánticos

Hasta ahora hemos visto dos tipos de transformaciones, por un lado la evolución unitaria generada por algún Hamiltoniano. También, vimos la transformación que genera una medida POVM en un estado. Aun así, existe una transformación más general que actúa sobre operadores, estas transformaciones son llamadas *súper operadores* o *operadores de proceso*. Estos son representados por un mapa  $\xi(\cdot)$  el cual transforman de manera biyectiva en el espacio de operadores. Es la descripción mas general de una transformación sobre un operador cuántico.

Para que un operador de procesos sea un mapa entre operadores valido debe satisfacer las siguientes condiciones [24]:

1. **Probabilista:** La probabilidad de que un estado  $\rho$  evolucione mediante el proceso  $\{\xi_n\}$  está dado por  $\text{tr}[\xi_n(\rho)]$ . Donde  $0 \leq \text{tr}[\xi_n(\rho)] \leq 1$  y  $\sum_n \text{tr}[\xi_n(\rho)] = 1$  para cualquier estado  $\rho$ .
2. **Convexo-lineal:** Un mapa  $\xi$  es convexo-lineal en el conjunto de matrices densidad, si para las probabilidades  $\{p_i\}$  se cumple que,

$$\xi \left( \sum_i p_i \rho_i \right) = \sum_i p_i \xi(\rho_i). \quad (2.4.1)$$

3. **Completamente positivo:** Si  $\xi$  mapea un operador densidad del sistema  $Q_1$  a operadores densidad del sistema  $Q_2$ , entonces  $\xi(\rho)$  debe ser positivo para cualquier operador. Aun mas, si introducimos un sistema extra  $R$  de dimensión arbitraria, debe ser verdad que  $(\mathbf{I} \otimes \xi)(\rho)$  es positivo para cualquier operador densidad en el sistema combinado  $RQ_1$ , donde  $\mathbf{I}$  es el mapa identidad en el sistema  $R$ .

El conjunto de canales que cumplen con las condiciones anteriores y, además, preservan la traza  $\text{tr}[\xi(\rho)] = 1$ , son llamados *Complete positive trace-preserving map* (CPTP). Todo operador de proceso que describa un mapa valido debe ser CPTP.

### 2.4.1. Operadores de Krauss

En información cuántica este mapa es llamado *canal cuántico* y se utiliza para modelar el comportamiento de canales de comunicación como las fibras ópticas. Los canales cuánticos también pueden incluir interacciones con el medio ambiente. Dado que la dinámica de un sistema cuántico abierto se puede describir como la interacción entre el sistema y el ambiente, lo que forma un sistema cuántico cerrado. Para esto se utiliza el formalismo de suma-de-operadores u *operadores de Krauss*. El canal cuántico  $\xi(\cdot)$  descrito por el conjunto de operadores de Krauss  $\{K\}$  actúa como

$$\xi(\rho) = \sum_i K_i \rho K_i^\dagger. \quad (2.4.2)$$

Consideramos que el estado sistema-ambiente se expresa como el producto externo entre el sistema y el ambiente. Luego de la interacción del canal, asumimos que el sistema no interactúa más con el ambiente y trazamos sobre el ambiente para obtener el estado reducido

$$\xi(\rho) = \sum_i \text{tr}_{env} \left[ U(\rho \otimes \rho_{env}) U^\dagger \right]. \quad (2.4.3)$$

Esto no se cumple en escenarios donde el ambiente interactúa constantemente con el sistema físico, lo que genera correlaciones. Por lo tanto, el sistema completo no puede describirse como un producto externo entre el sistema y el ambiente. Sin embargo, si asumimos que la interacción dura un instante siempre se puede suponer que el ambiente comienza en un estado puro. Por ejemplo, sea  $|e_i^{env}\rangle$  la base del ambiente. Se puede introducir un sistema de referencia auxiliar  $|e_i^R\rangle$ , tal que el estado general del ambiente es

$$\rho_{general} = \sum_{ij} \sqrt{p_i p_j} |e_i^{env}\rangle \langle e_j^{env}| \otimes |e_i^R\rangle \langle e_j^R|, \quad (2.4.4)$$

El estado reducido del sistema  $\rho_{env}$  es,

$$\text{tr}_R(\rho_{general}) = \sum_{ij} \sqrt{p_i p_j} |e_i^{env}\rangle \langle e_j^{env}| \text{tr}(|e_i^R\rangle \langle e_j^R|), \quad (2.4.5)$$

$$= \sum_{ij} \sqrt{p_i p_j} |e_i^{env}\rangle \langle e_j^{env}| \delta_{ij}, \quad (2.4.6)$$

$$= \sum_i p_i |e_i^{env}\rangle \langle e_i^{env}|, \quad (2.4.7)$$

$$= |\psi^{env}\rangle \langle \psi^{env}| = \rho_{env}. \quad (2.4.8)$$

Al añadir el sistema  $\rho_R$  y trazar estamos realizando un cambio en el sistema de referencia. Esto permite describir al ambiente en un estado inicial puro. Por lo tanto, la ecuación

(2.4.3) se reescribe como

$$\xi(\rho) = \sum_i \langle e_i | \left[ U(\rho \otimes |e_0\rangle\langle e_0|)U^\dagger \right] |e_i\rangle, \quad (2.4.9)$$

$$= \sum_i \langle e_i | U |e_0\rangle \rho \langle e_i | U^\dagger |e_0\rangle, \quad (2.4.10)$$

$$= \sum_i K_i \rho K_i^\dagger. \quad (2.4.11)$$

Donde  $K_i$  es conocido como un operador de Krauss. Aquellos que preservan la traza cumplen la relación de completitud

$$\mathbf{I} = \sum_i K_i K_i^\dagger, \quad (2.4.12)$$

$$1 = \text{tr} \left( \sum_i K_i \rho K_i^\dagger \right). \quad (2.4.13)$$

Esto permite estudiar la dinámica del sistema de interés sin mayores consideraciones sobre el ambiente, dado que su efecto está incluido en los operadores de Krauss. El estado normalizado luego de operador  $K_i$  es,

$$\rho_i = \frac{K_i \rho K_i^\dagger}{\text{tr}(K_i \rho K_i^\dagger)}. \quad (2.4.14)$$

Además, la probabilidad de obtener el estado  $\rho_i$  está dada por,

$$p(i) = \text{tr}(|e_i\rangle\langle e_i| U(\rho \otimes |e_0\rangle\langle e_0|)U^\dagger |e_i\rangle\langle e_i|), \quad (2.4.15)$$

$$= \text{tr}(K_i \rho K_i^\dagger). \quad (2.4.16)$$

Por lo tanto,

$$\xi(\rho) = \sum_i \text{tr}(K_i \rho K_i^\dagger) \frac{K_i \rho K_i^\dagger}{\text{tr}(K_i \rho K_i^\dagger)}, \quad (2.4.17)$$

$$= \sum_i K_i \rho K_i^\dagger, \quad (2.4.18)$$

$$= \sum_i p_i \rho_i. \quad (2.4.19)$$

Una interpretación de lo que ocurre es que el canal cuántico (mapa) hace evolucionar un estado  $\rho$  a un estado  $\rho_i$  con una probabilidad  $p(i)$ . Esta interpretación de que es un operador de Krauss nos permite modelar distintas formas de ruido que llevan un estado inicial definido a otro conjunto de estados finales con cierta distribución de probabilidad. Existen diferentes tipos de canales cuánticos, de forma general se clasifican en *amplitud damping (AD)*, *filtros estocásticos*, *bit flip*, *depolarizing* y *phase flip*.

#### 2.4.1.1. Amplitud Damping Channel

En algunos casos un sistema cuántico sufre disipación de energía o cambios en la población de su estado. Por ejemplo, en el caso de fotones viajando por una fibra óptica, existe el fenómeno de *perdida dependiente de la polarización (Polarization Dependent Loss)* (PDL). Estos canales se denominan canal amortiguador de amplitud o *amplitude damping channel (AD)*. En la representación de operadores de Krauss estos canales  $\xi_{AD}$  se expresa como

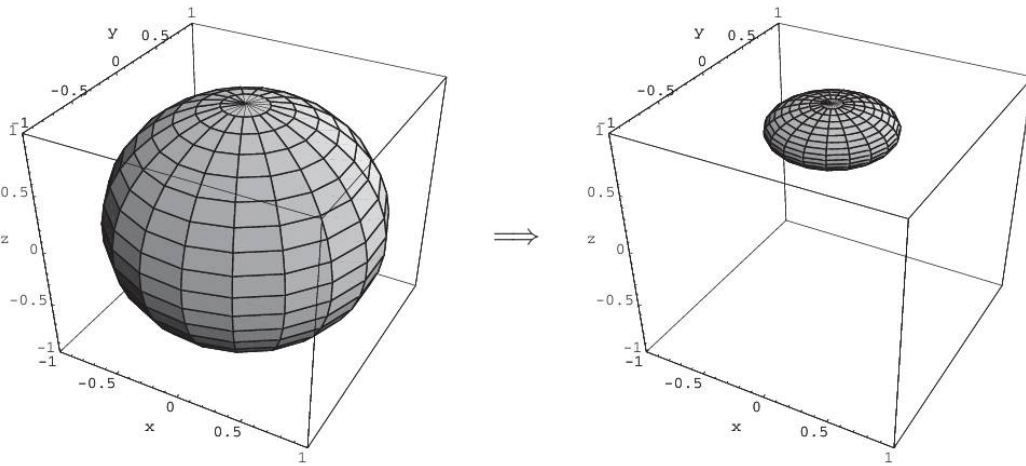
$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.4.20)$$

El operador  $E_1$  cambia el estado del fotón del estado  $|1\rangle$  a  $|0\rangle$  con probabilidad  $\gamma$ . Por otro lado, el operador  $E_0$  reduce la amplitud del estado  $|1\rangle$  y no altera el del estado  $|0\rangle$ . Este canal deja invariante solo al estado puro  $|0\rangle$ . Su efecto sobre un estado en la representación de Bloch está dado por la siguiente transformación del vector de Bloch  $\vec{r}$

como

$$(r_x, r_y, r_z) \rightarrow (r_x\sqrt{1-\gamma}, r_y\sqrt{1-\gamma}, \gamma + r_z(1-\gamma)), \quad (2.4.21)$$

cuando  $\gamma = 1$  el estado converge totalmente al estado puro  $|0\rangle$ . Si consideramos la densidad de estados posibles en la esfera de Bloch, el canal AD comprime el espacio en la esfera de Bloch hacia el estado  $|0\rangle$ , ver Fig 2.4.1.



**Figura 2.4.1:** El efecto de un canal tipo AD sobre la distribución de estados en la esfera de Bloch, para  $\gamma = 0,8$ . La distribución de estados es comprimida según la ecuación (2.4.21) hacia el estado  $|0\rangle$ . Imagen de [24].

## 2.4.2. Isomorfismo Choi-Jamiolkowski

La dualidad estado-canal, también conocida como isomorfismo de Choi-Jamiolkowski, establece una relación entre canales cuánticos y estados cuánticos bipartitos máximamente entrelazados [42-45]. Este enuncia que todo canal cuántico puede asociarse de manera única con un estado cuántico en un espacio de Hilbert de mayor dimensión. Es decir, sea  $\xi(\cdot)$  un canal cuántico y  $\rho$  un estado máximamente entrelazado estos están únicamente representados por el operador densidad de Choi  $J(\xi(\rho))$ . El estado  $\rho$  pertenece a un espacio de Hilbert compuesto  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  de igual dimensión. El estado

máximamente entrelazado se escribe como

$$\rho_{ent} = |\phi^+\rangle\langle\phi^+|, \quad (2.4.22)$$

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_i^d |i\rangle_A |i\rangle_B. \quad (2.4.23)$$

El estado de Choi  $J(\xi)$  se obtiene aplicando el canal  $\xi$  en algún subsistema y dejando el otro sin cambios

$$J(\xi) = (\xi \otimes \mathbf{I})|\phi^+\rangle\langle\phi^+|. \quad (2.4.24)$$

Por lo tanto, el operador  $J$  resultante es un operador densidad en el espacio de Hilbert compuesto. El canal tiene una representación de operadores de Krauss  $\xi = \sum_i K_i K_i^\dagger$ . Entonces la matriz de Choi es

$$J(\xi) = \sum_n (K_n \otimes \mathbf{I})|\phi^+\rangle\langle\phi^+|(K_n^\dagger \otimes \mathbf{I}), \quad (2.4.25)$$

$$= \frac{1}{d} \sum_{i,j=1}^d \sum_n K_n |i\rangle_A \langle j|_A K_n^\dagger \otimes |i\rangle_B \langle j|_B. \quad (2.4.26)$$

Luego de obtener la matriz de Choi del canal. Podemos utilizar la dualidad estado-canal para describir la acción del canal sobre cualquier estado de entrada  $\rho$  como [46]

$$\xi(\rho) = d_f \text{tr}_B[(\rho \otimes \mathbf{I})J(\xi)]. \quad (2.4.27)$$

Donde  $\rho_f$  es el estado de salida del canal y  $d_f$  es su dimensión. Cabe mencionar que la dimensión del estado de salida no es igual que la dimensión del estado de entrada. Ahora bien, el operador densidad de Choi puede ser expresado en su descomposición espectral

$$J(\xi) = \sum_l c_l |e_l\rangle\langle e_l|. \quad (2.4.28)$$

Donde los autovectores  $|e_l\rangle$  no necesitan ser normalizados. Luego podemos escribir cada elemento de la descomposición espectral y escribirlo en la base del espacio de Hilbert

compuesto del sistema total  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  [47]

$$|e_l\rangle = \sum_{i,j}^{d^2} C_{ij}^{(l)} |i_A j_B\rangle = |K^{(l)}\rangle. \quad (2.4.29)$$

El elemento  $C_{ij}^{(l)}$  corresponde a la columna  $ij$  de la matriz  $C^{(l)}$ . Por otro lado,  $|\cdot\rangle$  es la vectorización de un operador. Reemplazando en la ecuación (2.4.27) tenemos

$$\xi(\rho_A) = \sum_l d_f \text{tr}_B[(\rho_A^T \otimes \mathbf{I}_B) |K^{(l)}\rangle \langle\langle K^{(l)}|]. \quad (2.4.30)$$

Dado que  $\rho \in \mathcal{H}_A$ ,  $\mathbf{I}_B \in \mathcal{H}_B$  y  $K^{(l)} : \mathcal{H}_A \rightarrow \mathcal{H}'_A$ , tenemos que [48]

$$(\rho_A^T \otimes \mathbf{I}_B) |K^{(l)}\rangle = |\mathbf{I}_B K^{(l)} \rho_A^T\rangle. \quad (2.4.31)$$

Así recuperamos la expresión del canal en términos de sus operadores de Krauss,

$$\xi(\rho_A) = \sum_l d_f \text{tr}_B[|\mathbf{I}_B K^{(l)} \rho_A\rangle \langle\langle K^{(l)}|], \quad (2.4.32)$$

$$= \sum_l K^{(l)} \rho_A K^{(l)\dagger}. \quad (2.4.33)$$

Por ultimo, podemos obtener el operador de Krauss desde su vectorización

$$K^{(l)} = (|\mathcal{I}_A\rangle\rangle^T \otimes \mathcal{I}_B)(\mathcal{I}_A \otimes |K^{(l)}\rangle) \quad (2.4.34)$$

$$= (|\mathcal{I}_A\rangle\rangle^T \otimes \mathcal{I}_B)(\mathcal{I}_A \otimes |e_l\rangle). \quad (2.4.35)$$

Por lo tanto, podemos obtener los operadores de Krauss del canal a partir de los elementos de la descomposición espectral de la matriz de Choi del proceso. Esto se cumple si solo si, la dimensión del estado inicial es igual a la dimensión de la ancilla, es decir,  $\dim(\mathcal{H}_A) = \dim(\mathcal{H}_B)$ .

## 2.5. Transformaciones Estocásticas

Las transformaciones estocásticas son operadores que, al actuar sobre un estado, modifica sus coeficientes de manera no unitaria (no conserva la probabilidad). En nuestro estudio, vamos a considerar transformaciones que filtran las poblaciones en la base lógica. Podemos escribir la matriz de estas transformaciones como

$$F_A = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad (2.5.1)$$

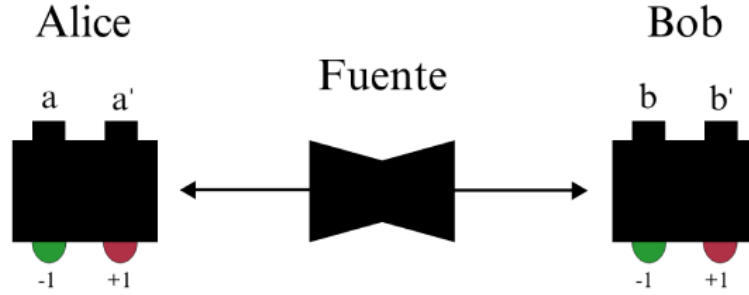
donde  $0 \leq \beta/\alpha \leq 1$  y  $0 < \beta < \alpha$  son números reales y se cumple que  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ . Los filtros estocásticos son de interés dado que pueden recuperar correlaciones cuánticas [25]. A modo de ejemplo, analicemos los efectos de dichos filtros en el escenario más simple donde se pueden observar correlaciones cuánticas: el escenario de Bell bipartito, en el cual dos partes (Alice y Bob) comparten un par de qubits entrelazados. Ambas partes poseen un caja negra con dos mediciones posibles y dos salidas  $\{1, -1\}$ . Alice tiene las mediciones  $\{a, a'\}$  y Bob las mediciones  $\{b, b'\}$ . Una forma de saber si el par de qubits está entrelazado, es comprobar si estas satisfacen la desigualdad CHSH (Clauser-Horne-Shimony-Holt) [49],

$$E(a, b) + E(a, b') + E(a', b) - E(a', b') \leq 2. \quad (2.5.2)$$

Los estados dados en las Eqs. (2.1.17) y (2.1.18) son aquellos que saturan la cota superior cuántica de la desigualdad CHSH ( $2\sqrt{2}$ ) [50]. Además, estos estados son de gran interés dado que permiten mejorar ciertos protocolos de comunicación clásica como; compresión de información, tomografía de canales físicos, distribución de claves, entre otros.

El operador de Bell asociado a la desigualdad CHSH es [51]

$$B_{CHSH} = \hat{a} \cdot \sigma \otimes (\hat{b} + \hat{b}') \cdot \sigma + \hat{a}' \cdot \sigma \otimes (\hat{b} - \hat{b}') \cdot \sigma. \quad (2.5.3)$$



**Figura 2.5.1:** Escenario de Bell bipartito. La fuente genera un par de estados entrelazados, ej: fotones. Luego, envía un estado a Alice y el otro a Bob. Alice puede realizar las medidas  $\{a, a'\}$  y Bob las medidas  $\{b, b'\}$ , ambos con las salidas  $\{-1, +1\}$ .

Además, cualquier estado bipartito mixto puede ser expresado en términos de matrices de Pauli, como

$$\rho = \frac{1}{4}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \sum_{i=1}^3 [\langle \sigma_i^A \rangle \mathbf{I} \otimes \sigma_i + \sigma_i \otimes \mathbf{I} \langle \sigma_i^B \rangle]) + \sum_{i,j=1}^3 \langle \sigma_i^A \otimes \sigma_j^B \rangle \sigma_i \otimes \sigma_j. \quad (2.5.4)$$

Donde  $\sigma_i$  son las matrices de Pauli  $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ . Además,  $\langle \sigma_i^S \rangle$  es el valor de expectación de la matriz de Pauli  $i$  actuando en el subsistema  $S$  del estado  $\rho$ , definido como  $\text{tr}(\rho_S \sigma_i^S)$ . Podemos introducir la matriz simétrica  $U(\rho) := T^T(\rho)T(\rho)$ , que puede ser diagonalizada. Donde los elementos de la matriz están dados por  $T_{ij} = \langle \sigma_i^A \otimes \sigma_j^B \rangle$ . Podemos definir la cantidad  $M(\rho)$  como [51],

$$M(\rho) = \max_{\hat{i}, \hat{j}} (\lambda_i(U) + \lambda_j(U)), \quad (2.5.5)$$

donde  $\lambda_i$  y  $\lambda_j$  son autovalores distintos de  $U$ . Entonces la desigualdad CHSH para un estado  $\rho$  en términos de  $M(\rho)$  se puede escribir como [51],

$$|\text{tr}(\rho B_{CHSH})| = 2\sqrt{M(\rho)} \leq 2. \quad (2.5.6)$$

Por lo tanto, la desigualdad CHSH es violada si

$$\max_{i,j} (\lambda_i + \lambda_j) > 1, \quad (2.5.7)$$

Ahora bien, existen escenarios donde un estado que viola la desigualdad CHSH, al ser afectado por un canal  $\xi(\cdot)$  deja de violar la desigualdad CHSH [25, 26]. Mas, al aplicar una transformación estocástica el estado puede volver a violar la desigualdad CHSH. A este comportamiento se le llama *nonlocality revival* y los canales  $\xi(\cdot)$  que permiten recuperar la violación son llamados *hidden nonlocal channel* [25]. Supongamos los siguientes operadores densidad

$$\rho_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & -\alpha\beta & 0 \\ 0 & -\alpha\beta & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_{++} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_{--} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.5.8)$$

Definimos un estado mixto como

$$\rho(\lambda, \alpha) = \lambda \rho_{\alpha,\beta} + \frac{1}{2}(1 - \lambda)(\rho_{++} + \rho_{--}). \quad (2.5.9)$$

Calculamos los valores de expectación de la ecuación (2.5.4) para el caso del estado (2.5.9):

$$\langle \sigma_z^A \rangle = -\langle \sigma_z^B \rangle = \lambda(\alpha^2 - \beta^2), \quad (2.5.10)$$

$$\langle \sigma_x^A \otimes \sigma_x^B \rangle = -2\lambda\alpha\beta, \quad (2.5.11)$$

$$\langle \sigma_y^A \otimes \sigma_y^B \rangle = -2\lambda\alpha\beta, \quad (2.5.12)$$

$$\langle \sigma_z^A \otimes \sigma_z^B \rangle = 1 - 2\lambda, \quad (2.5.13)$$

el resto de valores de expectación son cero. Por lo tanto el estado (2.5.9) se puede

expresar como [25]

$$\rho(\lambda, \alpha) = \frac{1}{4}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \lambda(\alpha^2 - \beta^2)[\sigma_i \otimes \mathbf{I} - \mathbf{I} \otimes \sigma_z] + (1 - 2\lambda)[\sigma_z \otimes \sigma_z] - 2\lambda\alpha\beta[\sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y]). \quad (2.5.14)$$

Su matriz característica  $U_{ij} = T_{ij}^t T_{ij}$  es

$$U_{ij} = \begin{pmatrix} 4\lambda^2\alpha^2\beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4\lambda^2\alpha^2\beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - 2\lambda)^2 \end{pmatrix}. \quad (2.5.15)$$

Entonces  $M(\rho)$  para el operador  $U_{ij}$  de la ecuación (2.5.15) es

$$M(\rho) = \text{máx} [(2\lambda - 1)^2 + 4\lambda^2\alpha^2\beta^2, \quad 8\lambda^2\alpha^2\beta^2]. \quad (2.5.16)$$

Ahora bien, veamos como cambia la ecuación (2.5.16) cuando aplicamos los filtros estocásticos de la ecuación (2.5.1). Por lo tanto, el estado (2.5.9) luego de los filtros es

$$\rho_{fil} = \frac{(F_A \otimes F_B)\rho(F_A \otimes F_B)^\dagger}{\text{tr}[(F_A \otimes F_B)\rho(F_A \otimes F_B)^\dagger]}. \quad (2.5.17)$$

Tenemos que el denominador es (Ver Apendice A)

$$(F_A \otimes F_B)\rho(F_A \otimes F_B)^\dagger = \frac{\beta}{\alpha}(2\lambda\alpha\beta\rho_{singlete} + \frac{1}{2}(1 - \lambda)(\rho_{++} + \rho_{--})). \quad (2.5.18)$$

La acción de los filtros generan perdida solo respecto a la primera componente del estado  $|\psi\rangle_{\alpha,\beta} = \alpha|+-\rangle - \beta|-+\rangle$ . Por lo que el estado que pasa y no es absorbido por el ambiente es el estado *singlete* máximamente entrelazado. Finalmente el estado luego de los filtros

es

$$\rho_{fil} = \frac{\frac{\beta}{\alpha} (2\lambda\alpha\beta\rho_{sinlgete} + \frac{1}{2}(1-\lambda)(\rho_{++} + \rho_{--}))}{\frac{\beta}{\alpha} \text{tr} \left[ 2\lambda\alpha\beta\rho_{sinlgete} + \frac{1}{2}(1-\lambda)(\rho_{++} + \rho_{--}) \right]}, \quad (2.5.19)$$

$$= \frac{2\lambda\alpha\beta\rho_{sinlgete} + \frac{1}{2}(1-\lambda)(\rho_{++} + \rho_{--})}{2\lambda\alpha\beta + (1-\lambda)}. \quad (2.5.20)$$

Sea  $N = 2\lambda\alpha\beta + (1-\lambda)$  la constante de normalización, finalmente tenemos que

$$\rho_{fil} = \frac{1}{N} [2\lambda\alpha\beta\rho_{sinlgete} + \frac{1}{2}(1-\lambda)(\rho_{++} + \rho_{--})]. \quad (2.5.21)$$

Siguiendo la notación de la ecuación (2.5.4) y luego de calcular los valores de expectación, tenemos que el estado  $\rho_{fil}$  es

$$\rho_{fil} = \frac{1}{4} [\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \frac{1}{N} ((\lambda(1+2\alpha\beta) - 1)(\sigma_z \otimes \sigma_z) + 2\lambda\alpha\beta(\sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y))]. \quad (2.5.22)$$

Sus matrices características  $T_{ij}$  y  $U_{ij}$  son

$$T_{ij} = \frac{-1}{N} \begin{pmatrix} \lambda(1+2\alpha\beta) - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda\alpha\beta & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda\alpha\beta \end{pmatrix}, \quad (2.5.23)$$

$$U_{ij} = \frac{1}{N^2} \begin{pmatrix} (\lambda(1+2\alpha\beta) - 1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4\lambda^2\alpha^2\beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4\lambda^2\alpha^2\beta^2 \end{pmatrix}. \quad (2.5.24)$$

Por lo tanto, la función  $M(\rho)$  es

$$M(\rho_{fil}) = \text{máx} \left[ \frac{1}{N^2} [(\lambda(1+2\alpha\beta) - 1)^2 + 4\lambda^2\alpha^2\beta^2], \frac{1}{N^2} (8\lambda^2\alpha^2\beta^2) \right]. \quad (2.5.25)$$

Escogemos los valores de los coeficientes como  $\lambda = 0,9$  y  $\alpha\beta = 0,2$ . Utilizando la ecuaciones (2.5.16) y (2.5.25) tenemos que  $M(\rho) = 0,77 < 1$  y  $M(\rho_{fil}) = 1,22 > 1$

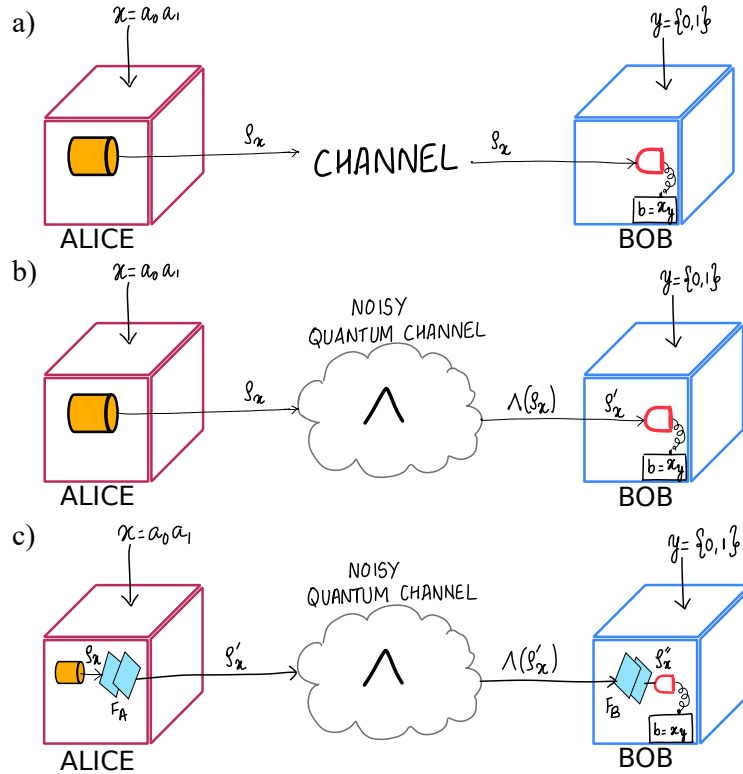
[25]. Por lo tanto, el estado que anteriormente no violaba la desigualdad CHSH luego de los filtros si viola dicha desigualdad. Podemos entender el proceso de los filtros como una destilación donde el estado *singlete* es el resultado, con el coste de aumentar la probabilidad de que el estado sea acoplado al ambiente. Este resultado es útil para recuperar o aumentar el valor con el cual ciertos estados violan alguna desigualdad. También, se ha estudiado su efecto en escenarios en los cuales el sistema a sufrido decoherencias (ej: amplitud damping channel) [26].

## 2.6. Código de Acceso Aleatorio Cuántico (QRAC)

Un tópico de estudio en información cuántica son los protocolos que permiten codificar  $n$ -bits de información clásica en algún *qubit* cuántico. Estos protocolos son llamados *Quantum random access codes* (QRAC) y tienen mejor tasa de recuperación de los bits codificados que su análogo clásico *random acces codes* (RAC) [21-23]. Estos protocolos se definen como,  $n^{d=2} \xrightarrow{p} 1$  QRAC, esto indica que  $n$ -bit se codifican en un qubit de dimensión  $d = 2$ . Por lo tanto, Alice codifica alguna cadena de  $n$ -bit en un estado, y luego Bob realiza alguna medición para recuperar la cadena de  $n$ -bit con probabilidad de éxito promedio (ASP)  $p$ . En el caso cuántico tenemos que  $p = 0,85$  en cambio en el escenario clásico es de  $p = 0,75$ . A los protocolos donde una parte prepara un estado y la otra parte mide se les conoce como *escenarios de preparación-y-medida*.

Un protocolo QRAC  $2^2 \xrightarrow{p} 1$  implica que un remitente (Alice) codifica una cadena de dos bits aleatorios  $x = a_0a_1 \in \{0, 1\}^2$  en un estado cuántico bidimensional  $\rho_x$ . Dado  $x$ , Alice prepara y transmite el estado al receptor (Bob). Él desea recuperar un subconjunto de la cadena de bits codificada  $x$  realizando una medición proyectiva  $M_y$  definida por el bit clásico aleatorio  $y \in \{0, 1\}$ . La ASP (average success probability o probabilidad promedio de éxito) de Bob al extraer el bit requerido se puede escribir como

$$P_b = \frac{1}{8} \sum_x \text{Tr} [\rho_x(M_0 + M_1)], \quad (2.6.1)$$



**Figura 2.6.1:** Una representación esquemática de (a) QRACs en el escenario SDI ideal cuando Alice transmite estados  $\rho_x$  a Bob. Se observa una ventaja cuántica cuando Bob recupera el subconjunto requerido de bits con una ASP  $P_b > P_b^{class} = 0,75$  midiendo  $M_y$ . Además, la violación del testigo de dimensión (DW) por los estados codificados certifica que son estados cuánticos de dimensión 2, asegurando la independencia semi-dispositivo. (b) QRACs en el escenario SDI cuando los estados de Alice se transmiten a través de un canal cuántico ruidoso  $\Lambda$ . Después de la transmisión a lo largo del canal, el estado  $\Lambda(\rho_x) = \rho'_x$  llega a Bob. (c) QRACs en el escenario SDI ruidoso con activación. Se aplica un filtro  $F_A$  en el extremo de Alice antes de la transmisión del estado codificado  $\rho_x$ , produciendo el nuevo estado  $\rho'_x$ . Después de la transmisión a lo largo del canal, el estado  $\Lambda(\rho'_x)$  es nuevamente filtrado por Bob utilizando  $F_B$  antes de realizar mediciones  $M_y$  en el estado final  $\rho''_x$ .

donde las mediciones de Bob están definidas por los operadores  $M_j = \frac{1+n_j\vec{\sigma}\cdot\vec{n}_j}{2}$ , con  $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ , los resultados  $n_j = \pm 1$ , y  $\vec{n}_j$  son vectores en la esfera de Bloch. Un QRAC se implementa con éxito si la ASP de extraer cada uno de los bits transmitidos por Alice supera la ASP clásica óptima  $P_b^{class} = 0,75$ .

*Semi Device Independent (SDI) y testigo de dimensión.*- En el escenario SDI, no se hacen suposiciones sobre la preparación y medición de los estados cuánticos. En cambio,

se asume un límite superior para la dimensión de los estados [52]. Tal escenario se representa en la Fig.2.6.1(a). Alice prepara estados  $\rho_x$  con la suposición de que todo excepto la dimensión del espacio de Hilbert está sin caracterizar. Ahora, Bob puede aplicar mediciones proyectivas  $M_y^b$  con resultados  $b \in \{0, 1\}$ . Entonces, la distribución de probabilidad condicional  $P(b|x, y) = \text{Tr}(\rho_x M_y^b)$  se puede usar para construir un testigo de dimensión (DW) en la forma

$$\begin{aligned} W &= E_{00,0} + E_{00,1} + E_{01,0} - E_{01,1} \\ &\quad - E_{10,0} + E_{10,1} - E_{11,0} - E_{11,1} \leq 2, \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

que es una desigualdad lineal de la distribución de probabilidad condicional  $E_{a_0 a_1, y} = P(b = 0|a_0 a_1, y) = \text{Tr}(\rho_{a_0 a_1} M_y^{b=0})$ . Aquí,  $\rho_{x=a_0 a_1}$  es un estado codificado sobre el cual actúa la medición  $M_y^{b=0}$ . Sin pérdida de generalidad, solo se considera el proyector correspondiente al valor de resultado  $b = 0$ . El límite superior de  $W$  corresponde a la capacidad óptima de un sistema clásico de dimensión 2 para transmitir 1 bit de comunicación. Por otro lado, la desigualdad es violada por qubits con un valor máximo  $2\sqrt{2}$ , estableciendo así su naturaleza como recurso en la transferencia de comunicación mejorada  $>1$  bit. Además, es posible generalizar para una dimensión arbitraria  $d$ . Por lo tanto, los DWs son útiles para caracterizar cualquier sistema arbitrario de dimensión  $d$  bajo consideración como clásico o cuántico de manera *semi-independiente del dispositivo* sin ninguna caracterización del montaje experimental utilizado para realizar estas pruebas.

Reescribiendo la Eq.(2.6.1) usando los parámetros anteriores [52], obtenemos una relación entre ASP y DW en el escenario SDI de la siguiente manera:

$$P_b = \frac{1}{8} \sum_{x,y} P(b = x_y|a_0 a_1, y) = \frac{W + 4}{8}. \quad (2.6.3)$$

De la ecuación anterior podemos inferir que, dado un sistema físico de dimensión  $d = 2$  y si  $W$  es violado, entonces se preparó un sistema *cuántico* de  $d = 2$  y, correspondientemente,

se puede realizar un protocolo QRAC con ASP  $P_b > 0,75$ . Los sistemas clásicos de dimensión  $d = 2$  nunca pueden violar el DW, aunque los de dimensiones superiores sí pueden. Así, los DWs son herramientas útiles para certificar un sistema como clásico o cuántico con dimensión  $d$  y, en el caso de  $d = 2$ , también garantiza la realización de un protocolo QRAC  $2^2 \xrightarrow{P} 1$  en el escenario SDI.

*QRACs adaptados al ruido.*- Ahora consideramos el rendimiento del protocolo SDI-QRAC bajo la acción de un canal de amortiguación de amplitud (ADC) representado como  $\Lambda$  donde actúa sobre los estados codificados que se transmiten, ver Fig.2.6.1(b). Al final de la transmisión, Bob recibe la versión ruidosa de cada estado codificado. El canal de amortiguación de amplitud se representa usualmente como la descomposición de los operadores de Krauss  $K_0(\gamma)$  y  $K_1(\gamma)$ , dados por

$$\begin{aligned} K_0(\gamma) &= |0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-\gamma}|1\rangle\langle 1| \\ K_1(\gamma) &= \sqrt{\gamma}|0\rangle\langle 1|, \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

donde  $K_i(\gamma) \geq 0$  y  $\sum_i K_i^\dagger(\gamma)K_i(\gamma) = \mathbb{1}$ . Aquí  $\gamma \in [0, 1]$  es el parámetro de amortiguación de amplitud del canal. Los estados de Alice que sufren la transformación debido a la amortiguación de amplitud evolucionan como,

$$\rho_x \xrightarrow{\Lambda(\rho_x)} \sum_i K_i(\gamma) \rho_x K_i^\dagger(\gamma) = \rho'_x(\gamma). \quad (2.6.5)$$

Evolucionando los estados codificados  $\rho_x$ , las expresiones correspondientes para el DW y la ASP son

$$\begin{aligned} W(\gamma) &= \sqrt{2}(1 + \sqrt{1-\gamma} - \gamma) \\ P_b(\gamma) &= \frac{W(\gamma) + 4}{8}. \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

En  $\gamma = 0$ , la ASP máxima alcanzable  $P_b \approx 0,85$  para el esquema SDI-QRAC correspondiente a una violación máxima de  $W = 2\sqrt{2}$  en ausencia de ruido se recupera.

Definimos  $\gamma_c$  como el parámetro crítico de amortiguación de amplitud más allá del cual el protocolo SDI-QRAC no es exitoso. Se puede calcular que en  $\gamma_c \approx 0,375$ , los estados ya no dan  $W > 2$ , y el QRAC ya no supera la ASP clásica óptima de  $3/4$ . Para  $\gamma \leq \gamma_c$ , una violación de  $W(\gamma)$  prueba la realización de un esquema SDI-QRAC con  $P_b > 3/4$ .

La *activación* es el proceso de restaurar la naturaleza de recurso cuántico de un protocolo SDI-QRAC bajo la acción del ruido mediante la reactivación de las violaciones del DW mediante la aplicación de operaciones estocásticas adecuadas [25, 53]. Recientemente se ha identificado que mediante la aplicación de ciertas operaciones estocásticas en puntos apropiados a lo largo del canal, es posible combatir el ruido de amortiguamiento de amplitud. Estas operaciones estocásticas deben aplicarse antes de la transmisión en el extremo de Alice y después de la transmisión en el extremo de Bob [26], ver Fig.2.6.1(c). Estas operaciones actúan como filtros sobre el estado codificado ruidoso  $\Lambda(\rho_x)$ . Para el ADC, estas operaciones de filtrado se dan como

$$\begin{aligned} F_A &= |0\rangle\langle 0| + \sqrt{(1-f)}|1\rangle\langle 1| \\ F_B &= \sqrt{(1-f)}|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|, \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

donde  $f \in [0, 1]$  es el parámetro del filtro. Así, un protocolo SDI-QRAC adaptado al ruido puede formularse ahora como sigue:

1. El estado  $\rho_x \in \{\rho_{00}, \rho_{01}, \rho_{10}, \rho_{11}\}$  preparado por Alice se aplica una operación de filtrado  $F_A$  antes de la transmisión a través de un canal de amortiguación de amplitud  $\Lambda$ .

$$\rho_x \xrightarrow{F_A} \frac{F_A \rho_x F_A^\dagger}{\text{Tr}(F_A \rho_x F_A^\dagger)} = \rho'_x \quad (2.6.8)$$

2. El estado amortiguado en amplitud  $\Lambda(\rho'_x)$  es recibido por Bob. Bob aplica otra operación de filtrado  $F_B$  a este estado para obtener

$$\Lambda(\rho'_x) \xrightarrow{F_B} \frac{F_B \Lambda(\rho'_x) F_B^\dagger}{\text{Tr}(F_B \Lambda(\rho'_x) F_B^\dagger)} = \rho''_x \quad (2.6.9)$$

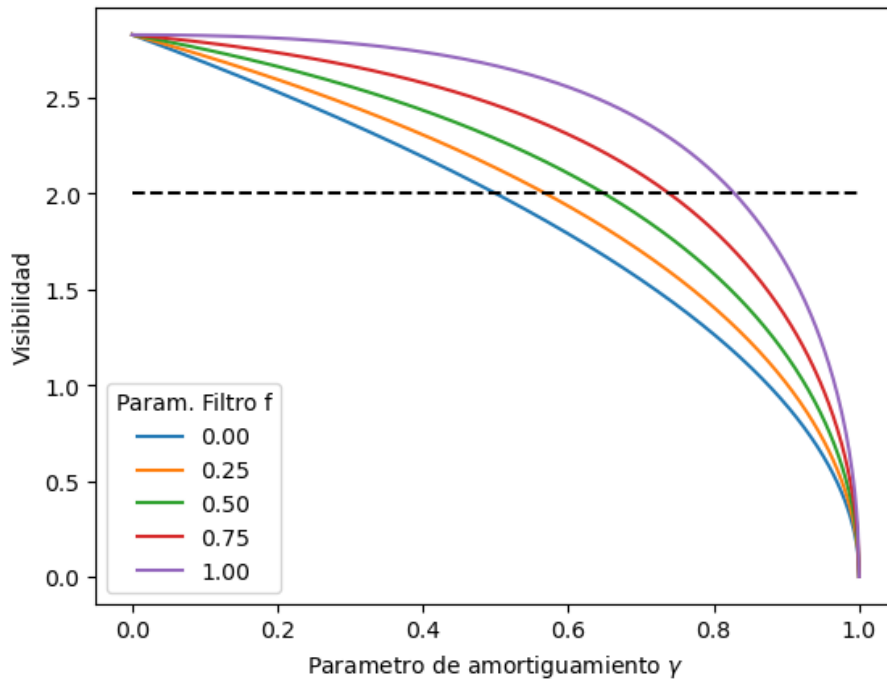
3. Bob realiza mediciones  $M_y$  en el estado final  $\rho_x''$  para extraer el bit requerido.

La distribución de probabilidad de los resultados de la medición en el extremo de Bob se da como

$$p(b|y, x) = \text{Tr} \left[ \Pi_y^b \left( \frac{F_B \circ \Lambda \circ F_A(\rho_x)}{N(x)} \right) \right], \quad (2.6.10)$$

donde  $N(x) = \text{Tr}[F_B(\sum_i K_i(\gamma)(F_A \rho_x F_A^\dagger)K_i(\gamma)^\dagger)F_B^\dagger]$ , es la normalización.

Podemos ver el comportamiento del testigo  $W$  en presencia de diferentes valores de amortiguamiento  $\gamma$  aplicando distintos factores  $f$  de los filtros estocásticos, ver Fig.2.6.2.



**Figura 2.6.2:** Aumento de la tolerancia al parámetro de amortiguamiento  $\gamma$  en función del coeficiente  $f$  del filtro estocástico. Permite recuperar los valores cuánticos del testigo de dimensión usado.

## Capítulo 3

# Metodología

En esta tesis, abordamos dos componentes cruciales en la implementación y optimización de protocolos de información cuántica: el Código de Acceso Aleatorio Cuántico (QRAC) [21-23] y el Divisor de Haz de 4 Núcleos en Fibra Óptica (4c-FBS) [17]. Estos elementos son esenciales para mejorar la capacidad de transmisión y la eficiencia en la recuperación de información en sistemas cuánticos.

El Divisor de Haz de 4 Núcleos en Fibra Óptica (4c-FBS) es una innovación tecnológica que permite la manipulación coherente de fotones en fibras ópticas multicore (MCF). Estas fibras, que contienen múltiples núcleos en un solo recubrimiento, son esenciales para aumentar la capacidad de transmisión en redes ópticas. La caracterización precisa de dispositivos como el 4c-FBS es fundamental para su integración en sistemas cuánticos. En esta tesis, utilizamos compressed sensing para realizar esta caracterización de manera eficiente.

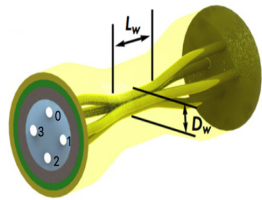
Por otro lado, el Código de Acceso Aleatorio Cuántico (QRAC) es una tarea de información cuántica que permite codificar y recuperar información utilizando las propiedades únicas de los sistemas cuánticos. A diferencia de los códigos de acceso aleatorio clásicos, que tienen una probabilidad de éxito del 75 %, los QRACs pueden alcanzar hasta un 87.5 %

de probabilidad de éxito, aprovechando la superposición y el entrelazamiento cuántico. Este protocolo es particularmente útil, dado que es la primitiva de otros protocolos mas avanzados como distribución cuántica de llaves (QKD), generación de bits aleatorios cuánticos (QRNG).

En esta sección introduciremos las metodologías usadas en ambas investigaciones.

### 3.1. Estimación Matriz de Proceso de 4C-FBS

En este caso queremos simular la caracterización del operador de proceso que describe un divisor de haz de fibra óptica de 4 salidas (4C-FBS). Este es un elemento óptico posee cuatro caminos con diálogo cruzado (“*cross talk*”) entre ellos. Utilizaremos como referencia la matriz de proceso  $\Lambda_{teo}$  dada en [18].



**Figura 3.1.1:** Divisor de haces de 4 caminos en fibra óptica.

$$\Lambda_{teo} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1.1)$$

Para utilizar el isomorfismo de Choi-Jamiolkowski 2.4.2 en la caracterización del 4C-FBS se debe utilizar un estado bipartito maximalmente entrelazado. En este caso entrelazaremos dos grados de libertad distintos de un fotón, primero el grado de libertad de camino, dado que nos interesa como opera el 4C-FBS. Además, usaremos el grado de libertad en polarización como espacio auxiliar. Entonces, el estado máximamente entrelazado que

describe nuestro sistema es

$$\rho_{\Omega} = |\Omega\rangle \langle \Omega|, \quad (3.1.2)$$

$$|\Omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HC\rangle + |VC'\rangle). \quad (3.1.3)$$

Donde  $\{H, V\}$  son la polarización horizontal y vertical respectivamente, y  $\{C, C'\}$  son dos caminos distintos del 4C-FBS. La matriz de Choi esta dada por

$$J = (\Lambda_{4C-FBS} \otimes \mathbf{I})\rho_{\Omega}. \quad (3.1.4)$$

Donde  $\Lambda$  actúa sobre el espacio de los grados de libertad de camino y  $\mathbf{I}$  sobre el grado de libertad auxiliar de polarización. Ahora bien, el proceso para simular la reconstrucción de la matriz de Choi del 4C-FBS se puede resumir en los siguientes pasos:

- 1) Enviar a través del Canal Cuántico (3.1.1) el estado máximamente entrelazado  $|\Omega\rangle$ .
- 2) Realizar las mediciones  $M_i$  de alguna medida  $\mathcal{M}$  y construir el vector de frecuencias  $\vec{f}$ .
- 3) Estimar el estado de Choi usando *compressed sensing*. En este caso utilizamos la función objetivo

$$\min_{\hat{\rho}} \|\mathcal{M}(\hat{\rho}) - \vec{f}\|_{l_2} \leq \delta \quad s.t. \hat{\rho} \geq 0. \quad (3.1.5)$$

- 4) Usar la matriz de Choi estimada  $\hat{\rho}$  para obtener la matriz de proceso del 4C-FBS, talque  $\Lambda_{exp} \approx \Lambda_{teo}$ .

Al momento de realizar alguna medición  $\mathcal{M}$  sabemos que utilizar *compressed sensing* permite disminuir el numero de mediciones  $M_i$  dado que implementa un proceso de optimización no convexa. Para esto utilizamos el paquete de Python CVXPY, el cual permite implementar la función objetivo de la ecuación (3.1.5). Ahora bien, para una medición general de dimensión  $d$  se requieren  $d^2$  operadores, lo que genera  $\frac{d^2!}{(d^2-i)!}$  combinaciones diferentes de  $i$  mediciones. Por lo tanto, realizamos una simulación montecarlo sobre cada

conjunto de  $i$  mediciones  $M_i$ , donde  $i \in [1, d^2]$ . Realizamos 10.000 selecciones aleatorias de  $M_i$  mediciones, forzando siempre la elección de la base lógica. Además, para cada paso de medición usamos  $n$  números de disparos para estimar el valor esperado, donde  $n \in [2^5, 2^{13}]$ . Para incluir el ruido de disparo ( $\approx \sqrt{n}$ ), en cada tomografía cambiamos aleatoriamente el número de disparos

$$n_{final} = n + \beta\sqrt{n}, \quad (3.1.6)$$

donde  $\beta \in [-1, \dots, 1]$  es un coeficiente que modula el comportamiento aleatorio del ruido estadístico de disparo. Para cada tomografía calculamos la infidelidad contra la matriz de Choi del estado final. La infidelidad se calcula como

$$Inf = 1 - \text{tr} \left\{ \sqrt{\sqrt{\rho_{teo}} \hat{\rho} \sqrt{\rho_{teo}}} \right\}. \quad (3.1.7)$$

Luego de estimar la matriz de Choi del proceso, realizamos la recuperación de la matriz del canal 4C-FBS aprovechando el isomorfismo de Choi-Jamiolkowski.

En este trabajo, analizamos el uso de tres bases de medición diferentes: la base del producto tensorial de matrices de Pauli, la base de Gell-Mann y las MUBs (*Mutually Unbiased Bases*). La base de Pauli es un conjunto de matrices complejas ortogonales que pertenecen al espacio vectorial de  $2 \times 2$  de matrices Hermíticas. Normalmente se expresan como  $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ . Estas conforman una base en el espacio vectorial Hermítico de  $2 \times 2$ . Esto implica que cualquier observable que es una matriz Hermítica de  $2 \times 2$  puede ser escrita como una combinación lineal de las matrices de Pauli, con sus coeficientes reales. De manera similar el producto tensorial de las matrices de Pauli también conforman una base general de medición en los espacios vectoriales que son potencias de  $2^n$  [24]. Por otro lado, las matrices de Gell-Mann son una generalización de las matrices de Pauli para alguna dimensión arbitraria. Es decir, estas conforman un conjunto de matrices ortogonales Hermíticas de dimensión  $d$ . En el caso de dimensión  $2 \times 2$  las matrices de

Gell-Mann recuperan las matrices de Pauli. El método para construir las matrices de Gell-Mann esta descrito en la siguiente referencia [54]. Por ultimo, las matrices MUBs son aquellas para las cuales todos los autovectores de los elementos de las MUBs tienen el mismo producto interno, es decir,  $\langle v_i | u_j \rangle = 1/\sqrt{N}$  para todo  $\{i, j\}$ . Su gran ventaja es que el conjunto completo tiene un numero de proyectores que es mínimo [55].

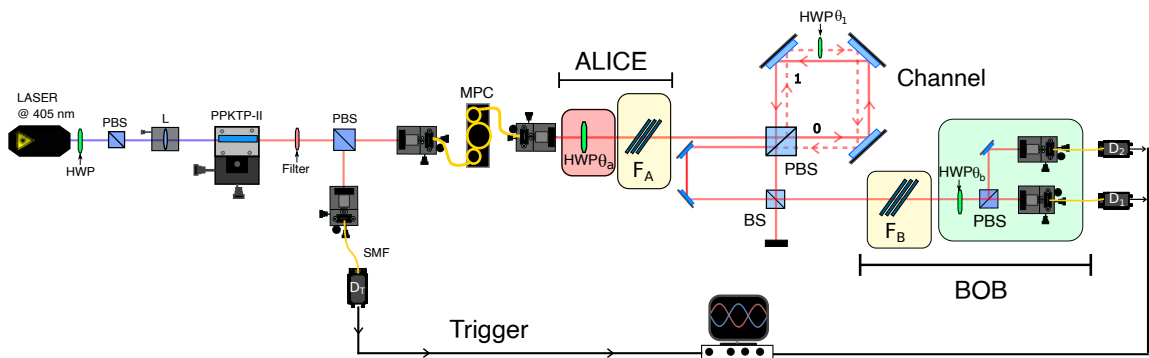
### 3.2. QRAC adaptado al ruido

Un experimento de QRAC siguiendo la discusión teórica de las secciones anteriores fue implementado utilizando el montaje experimental representado en la Fig.3.2.1. Consiste en (i) un emisor (Alice), que codifica cuatro estados en el estado de polarización de fotones individuales, (ii) un receptor (Bob) que realiza mediciones en los fotones, (iii) un canal ruidoso a través del cual los qubits de polarización se propagan de Alice a Bob, y (iv) un conjunto de operaciones de filtro  $F_A$  y  $F_B$  que Alice y Bob usarán para intentar mejorar el rendimiento del protocolo en presencia de ruido. Presentemos estos cuatro componentes en secuencia.

Los fotones individuales se producen utilizando una fuente de fotones individuales heráldica basada en el proceso de conversión paramétrica descendente espontánea (SPDC). Un láser de onda continua que opera a 405 nm bombea un cristal de fosfato de titanyl potasio periódicamente polarizado (PPKTP - tipo II) de 20 mm de largo, produciendo un par de fotones con polarización ortogonal con longitud de onda de 810 nm. La potencia del láser de bombeo se controla activamente (@2 mW) para reducir las fluctuaciones de intensidad. Un filtro de banda estrecha de alta calidad con un ancho de banda de 0,5 nm (transmisión pico  $> 95\%$ ) asegura la degeneración de frecuencia. Además, se utilizan fibras ópticas de modo único para filtrar espacialmente los fotones convertidos descendentes, eliminando correlaciones espaciales indeseables. Se considera un modelo numérico en el diseño del montaje para maximizar el número de coincidencias [56]. La condición de acoplamiento óptima se alcanza cuando  $\omega_{DCP} = \sqrt{2}\omega_p$ , donde  $\omega_p$  y  $\omega_{DCP}$  son los modos de cintura del

haz de bombeo y los fotones convertidos descendentes en el centro del cristal PPKTP, respectivamente. Nuestra configuración alcanza estas cinturas con una lente L de 20 cm de longitud focal y lentes objetivas de  $10\times$ . Un divisor de haz polarizador (PBS) se coloca después del cristal PPKTP para separar los fotones convertidos descendentes por polarización. Un fotón se envía directamente a un detector de fotón individual  $D_T$  que actúa como un disparador, mientras que el otro fotón se envía a Alice (y luego a Bob). Los conteos de coincidencia entre el detector disparador  $D_T$  y los detectores de Bob  $D_1$  ( $D_2$ ), anuncian la presencia del evento de fotón individual heráldico utilizado en el experimento. Además, se utiliza un controlador de polarización de fibra manual (MPC) para ajustar la polarización del fotón de Alice y corregir la birrefringencia de la fibra óptica.

Alice usa una placa de media onda (HWP) para codificar qubits de polarización de la forma  $|\psi\rangle = \cos 2\theta_a |h\rangle + \sin 2\theta_a |v\rangle$ , donde  $\theta_a$  es el ángulo de la HWP con respecto a su



**Figura 3.2.1:** Se utiliza una fuente de fotones heraldados basada en el proceso SPDC para estudiar el comportamiento del protocolo SDI QRAC en un escenario ruidoso. El montaje de Alice incluye una HWP ( $\theta_a$ ) que se usa para preparar cuatro estados codificados en el grado de libertad de la polarización:  $\rho_{00}$ ,  $\rho_{11}$ ,  $\rho_{01}$  y  $\rho_{10}$ . Además, se aplica un filtro denotado como  $F_A$  antes de enviar el estado. Posteriormente, un interferómetro de Sagnac de dos caminos implementa el canal de amortiguación de amplitud, donde la cantidad de amortiguación de amplitud se controla mediante  $\theta_1$ . Después de transmitir el estado a través del canal, Bob aplica  $F_B$  y, finalmente, se realizan dos mediciones mediante una HWP, un PBS y dos detectores de fotones. Los dos filtros estocásticos, uno antes y uno después del canal ruidoso, se implementan utilizando ventanas de vidrio colocadas en los ángulos de Brewster.

eje rápido. Los cuatro estados preparados por Alice para su uso en el QRAC son

$$\begin{aligned}\rho_{00} &= |h\rangle\langle h|, & \rho_{01} &= |A\rangle\langle A|, \\ \rho_{10} &= |D\rangle\langle D|, & \rho_{11} &= |v\rangle\langle v|,\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

donde  $|D\rangle = \frac{|h\rangle+|v\rangle}{\sqrt{2}}$  y  $|A\rangle = \frac{|h\rangle-|v\rangle}{\sqrt{2}}$  son estados de polarización diagonal y anti-diagonal, respectivamente.

Las mediciones de Bob para extraer el bit requerido en el protocolo SDI-QRAC se dan como,

$$\begin{aligned}M_{y=0} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_z - \sigma_x) \\ M_{y=1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_z + \sigma_x).\end{aligned}\tag{3.2.2}$$

Estas se implementan mediante una HWP( $\theta_b$ ) ajustada en  $\theta_b = \{\frac{7\pi}{16}, \frac{\pi}{16}\}$  y un divisor de haz polarizador seguido por dos detectores de fotones individuales en avalancha  $D_1$  y  $D_2$ , como se muestra en la Fig. 3.2.1. Las señales de estos detectores son procesadas por un módulo de conteo de coincidencias con retardos calibrados entre la salida de  $D_1$  ( $D_2$ ) y el detector disparador de Alice  $D_T$ . El módulo tiene una ventana de coincidencia de 1 ns para reducir los conteos accidentales.

El canal de amortiguación de amplitud, representado como una descomposición de los operadores de Krauss  $K_0(\gamma)$  y  $K_1(\gamma)$  dados en (2.6.4), se implementa mediante un interferómetro de Sagnac de dos caminos [57-61]. Como se describe en detalle en las Refs. [57, 58], combinando incoherentemente las dos salidas del interferómetro, podemos implementar un canal de decoherencia controlable descrito por los operadores de Krauss

$$K_0(\theta_1) = |h\rangle\langle h| + \cos(2\theta_1)|v\rangle\langle v|,\tag{3.2.3}$$

$$K_1(\theta_1) = \sin(2\theta_1)|h\rangle\langle v|.\tag{3.2.4}$$

Para comprobar la correcta implementación del canal de amortiguamiento de amplitud comparamos la visibilidad de un estado diagonal a medida que el factor de amortiguamiento  $\gamma$  cambia, ver Fig.(3.2.2).

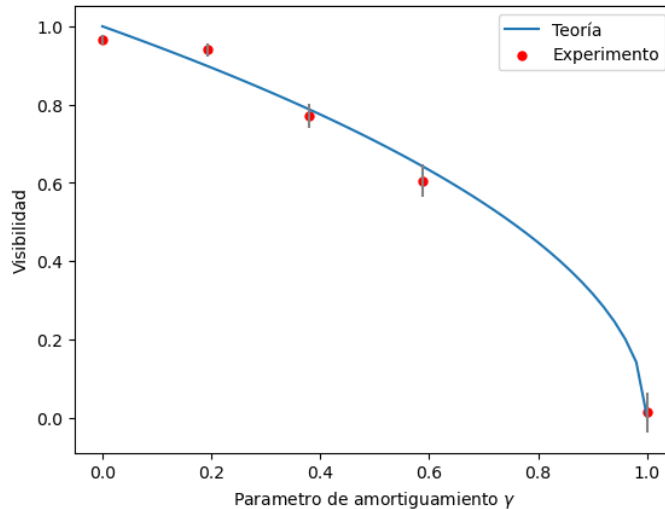
Se dan más detalles sobre el canal óptico de decoherencia en el apéndice (B). Comparando estas expresiones con la Eq.(2.6.4) vemos que

$$\sin 2\theta_1 = \sqrt{\gamma}, \quad (3.2.5)$$

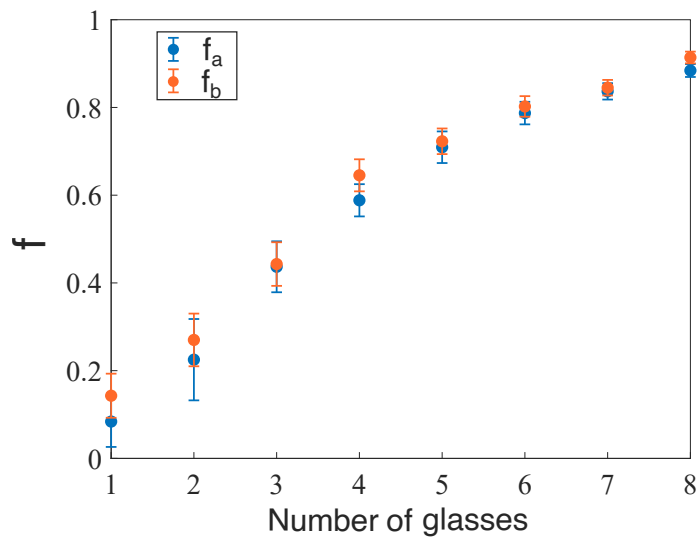
$$\cos 2\theta_1 = \sqrt{1 - \gamma}, \quad (3.2.6)$$

lo que permite controlar  $\gamma$  usando el ángulo de la placa de onda  $\theta_1$ .

Finalmente, las operaciones de filtro  $F_A$  y  $F_B$  se implementan en el grado de libertad de la polarización utilizando placas delgadas de vidrio colocadas en el ángulo de Brewster, de modo que la luz reflejada contiene solo un componente de polarización [62]. Una polarización es parcialmente filtrada del haz transmitido, mientras que la otra permanece sin cambios. La diferencia entre  $F_A$  y  $F_B$  radica en la posición del eje principal de las ventanas, que son ortogonales entre sí, permitiendo filtrar los componentes verticales u horizontales, respectivamente. La Figura 3.2.3 muestra el parámetro  $f$  correspondiente para diferentes cantidades de placas de vidrio. Denotamos el parámetro  $f_a$  ( $f_b$ ) al filtrar la polarización vertical (horizontal), representado por los puntos azules (naranjas). Para ilustrar las ventajas de usar filtros estocásticos en este protocolo, analizamos dos conjuntos de configuraciones de vidrio: uno con 3 placas de vidrio y el otro con 8 placas de vidrio, correspondientes a parámetros de filtro de  $f_a \approx \{0,44 \pm 0,05, 0,88 \pm 0,01\}$  y  $f_b \approx \{0,44 \pm 0,06, 0,91 \pm 0,01\}$ .



**Figura 3.2.2:** Cambio en la visibilidad de un fotón en polarización diagonal ( $|+\rangle$ ) luego de pasar por un canal de amortiguamiento de amplitud con factor de amortiguamiento  $\gamma$ .



**Figura 3.2.3:** Los parámetros de filtro  $f_a$  y  $f_b$  en función del número de vidrios. Los puntos azules y naranjas representan resultados experimentales. Estos resultados fueron obtenidos utilizando fotones convertidos descendentes (@810 nm), con barras de error calculadas usando propagación de error gaussiana y estadísticas de Poisson de los conteos de coincidencia.

## Capítulo 4

# Resultados

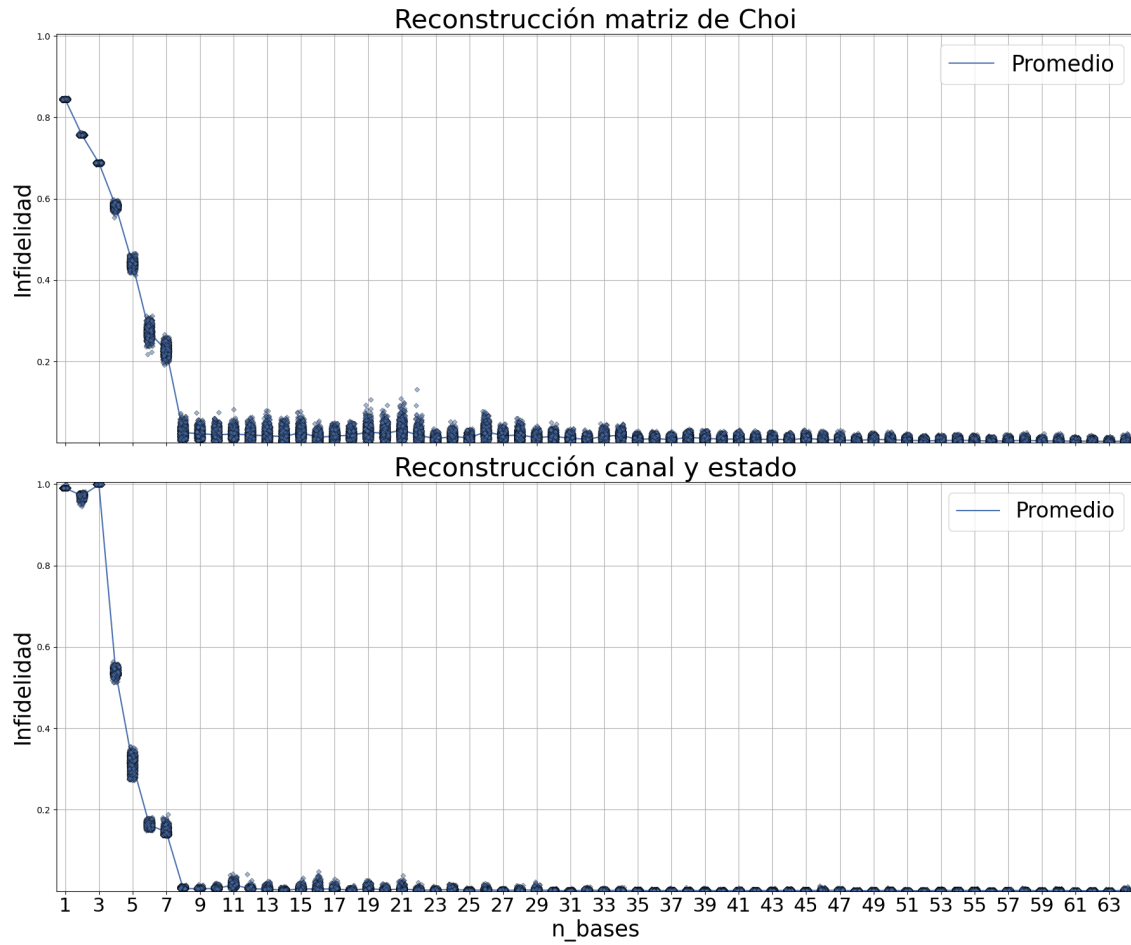
### 4.1. Estimación Matriz de Proceso de 4C-FBS

Podemos observar en los resultados expuesto mas abajo que para las tres mediciones escogidas se logra reducir el numero de elementos de la base utilizados. Para esto utilizaremos como grados de libertad entrelazados el de polarización  $\{H, V\}$  y el de camino  $\{0, 1, 2, 3\}$  de los fotones. En particular para hacer uso del isomorfismo de Choi-Jamiolkowski utilizaremos dos modos de camino en particular para las simulaciones. La operador de Choi  $\mathcal{E}(\rho)$  en particular que estimaremos esta dada por

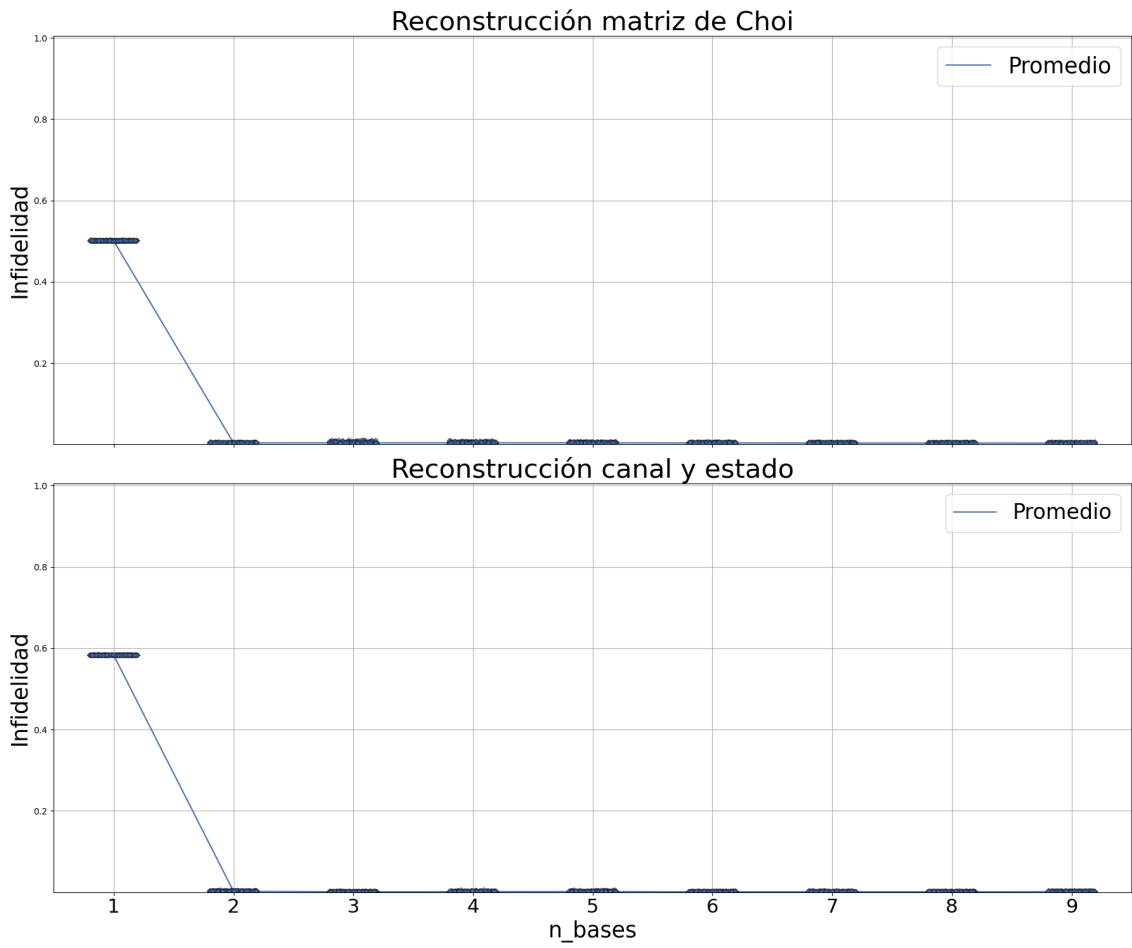
$$J = (\Lambda_{4C-FBS} \otimes \mathbf{I})|\Omega\rangle\langle\Omega|, \quad (4.1.1)$$

con  $|\Omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H0\rangle + |V1\rangle)$ , es decir iluminando los núcleos 0 y 1. Para estas simulaciones escogimos aleatoriamente 10,000 posibles elecciones de distintos conjuntos de bases de medición  $\mathcal{M}_p$ . Además, en el algoritmo de *compressed sensing* definimos una tolerancia de convergencia  $\gamma = 0,01$ . Estudiamos el uso de 3 bases de medición diferentes: primero con la base de Gell-Mann (ver Fig. (4.1.1)), segundo con MUBs (*Mutually Unbiased Bases*, ver Fig. (4.1.2)) y tercero con la base compuesta del producto tensorial de las matrices de

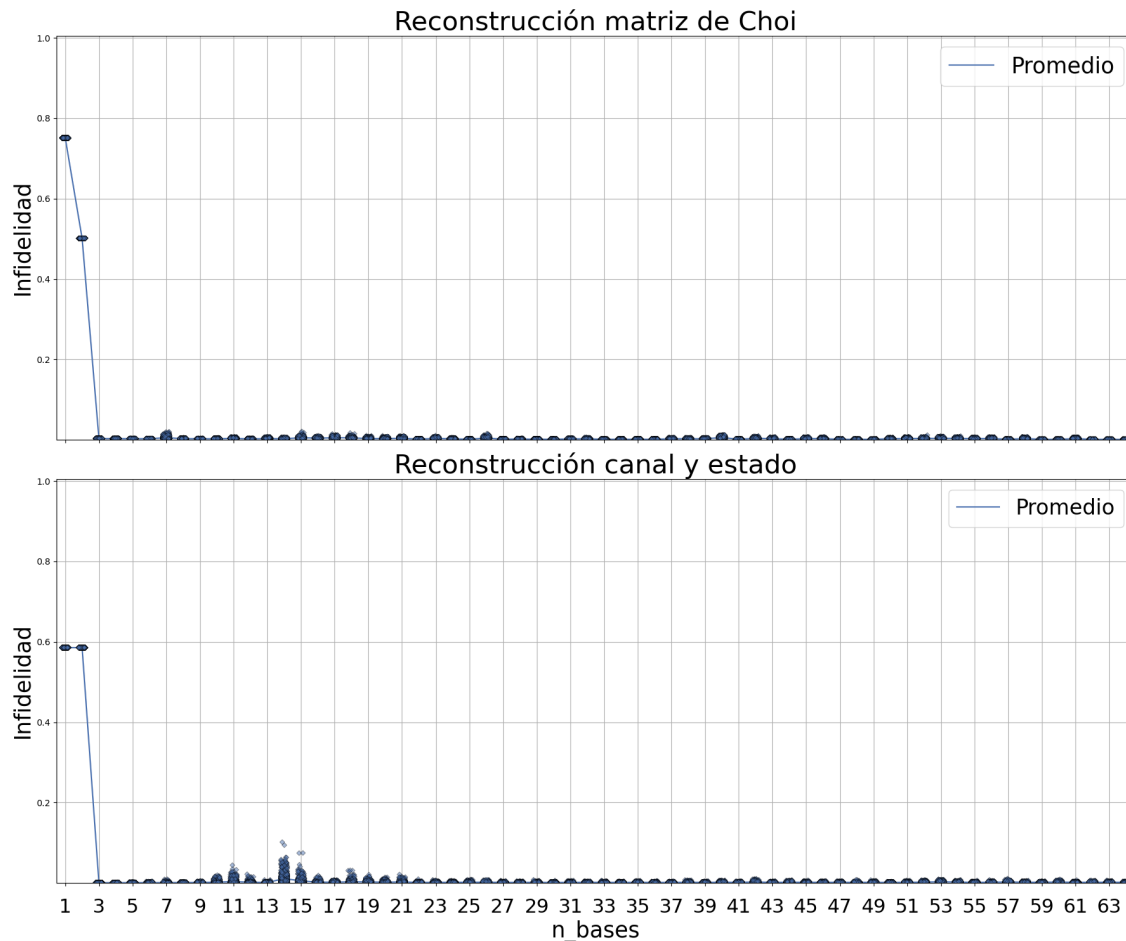
Pauli, ver Fig. (4.1.3).



**Figura 4.1.1:** a) Infidelidad estimación matriz de Choi utilizando la base de Gell-Mann b) Infidelidad estimación matriz del 4C-FBS y el estado utilizado en la estimación.



**Figura 4.1.2:** a) Infielidad estimación matriz de Choi utilizando la base de MUBs b) Infielidad estimación matriz del 4C-FBS y el estado utilizado en la estimación.



**Figura 4.1.3:** a) Infidelidad estimación matriz de Choi utilizando la base de Pauli b) Infidelidad estimación matriz del 4C-FBS y el estado utilizado en la estimación.

Obtuvimos que para estimar la matriz de procesos del 4C-FBS con una fidelidad  $f > 95\%$  se requieren al menos de 8 bases de la base de Gell-Mann, 2 bases de la base de MUBs y 4 bases de la base del producto tensorial de matrices de Pauli. Mas las bases de Gell-Mann tienen la desventaja que algunas bases son medidas entrelazadas, lo cual no es posible de realizar de manera determinista experimentalmente. Luego, exploramos el uso de la medición conformada por el producto de matrices de Pauli. Estas tienen la ventaja de que no presentan elementos de medición entrelazados. Dado que un espacio vectorial de dimensión  $2^n$  puede ser expresado en términos de  $n$  qubits. Lo que permite obtener información del sistema mediante medidas no entrelazadas. Mas no existen estas medidas

para dimensiones que no sean de dimensión  $2^n$ . Por ultimo, vemos que la base de las MUBs es aquella que requiere el menor numero de elementos de medición. Esto puede deberse a que las MUBs son 9 operadores que conforman un conjunto informacionalmente completo, entonces cada base de las MUBs contiene mas información. Por otro lado, si se observan las 2 bases que permiten estimar el estado con bastante fidelidad, vemos que la MUB de la ecuación (4.1.2) se repite en las 10,000 simulaciones aleatorias:

$$MUB_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ i & -i & i & -i & i & -i & i & -i \\ i & i & -i & -i & i & i & -i & -i \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ i & -i & i & -i & -i & i & -i & i \\ -i & -i & i & i & i & i & -i & -i \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1.2)$$

Esto indica que las contribuciones de las otras MUBs son pequeñas cuando se toma en cuenta la normalización en la reconstrucción de la matriz densidad [63], como se indica en la siguiente ecuación para nuestro caso de la matriz de Choi en dimensión 8 (considerando el isomorfismo de Choi-Jamiolkowski):

$$J = \sum_{\alpha=1}^9 \sum_{j=1}^8 p_j^{(\alpha)} \Pi_j^{(\alpha)} - \mathbb{1}, \quad (4.1.3)$$

donde  $\alpha$  denota la  $\alpha$ -ésima MUB, y  $j$  es el índice que recorre los elementos dentro de una MUB.  $p_j^{(\alpha)}$  es la distribución de probabilidades estimadas en la medición sobre cada uno de los proyectores  $\Pi_j^{(\alpha)}$ , y  $\mathbb{1}$  es el operador identidad en dimensión 8.

Estos resultados muestran que en general hacer uso de un grado de libertad auxiliar, talque este permita hacer uso del Isomorfismo de Choi-Jamiolkowski, reduce el numero de mediciones necesarias para estimar la matriz de procesos de un 4C-FBS. Además, de

entre los diferentes tipos de bases aquella que requiere de menos mediciones son las MUBs. Pero tienen la limitante que solo se conocen en dimensiones que sean primos o potencia de primos. Por lo que dependiendo del escenario se debe tener en consideración que bases de medición existen y su factibilidad de ser implementados experimentalmente.

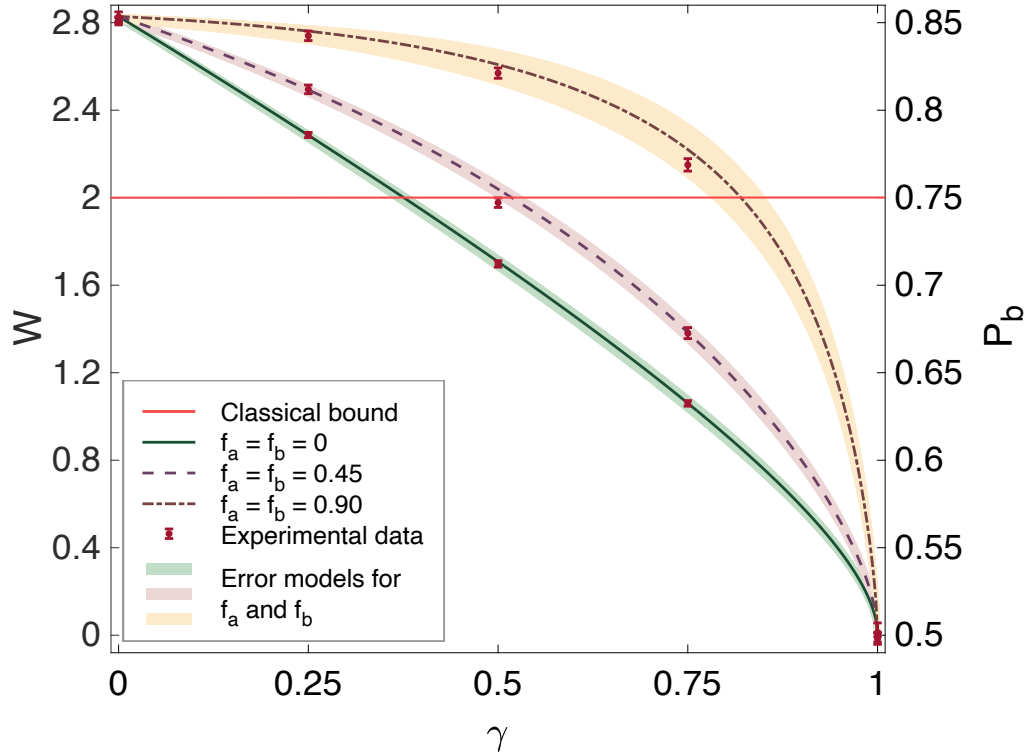
## 4.2. QRAC adaptado al ruido

Podemos observar en la Fig. 4.2.1 que, dependiendo del valor de  $f$ , se logra un aumento en el valor correspondiente del parámetro crítico de amortiguación de amplitud, más allá del cual el esquema ya no mejora sobre el límite clásico, lo que indica que el protocolo se vuelve más robusto a un canal ruidoso. Para  $f = 0,45$  y  $f = 0,90$ , el ASP puede superar el límite clásico para  $\gamma_c = 0,52$  y  $\gamma_c = 0,82$ , respectivamente. Para validar experimentalmente la naturaleza SDI del esquema, medimos el DW, y luego se obtiene el ASP a partir de la Ec. (2.6.7). Las probabilidades  $E_{a_0 a_1, y}$  involucradas en la desigualdad se calculan siguiendo la expresión

$$E_{a_0 a_1, y} = \frac{c(0|a_0 a_1, y)}{c(0|a_0 a_1, y) + c(1|a_0 a_1, y)}, \quad (4.2.1)$$

donde  $c(0|a_0 a_1, y)$  ( $c(1|a_0 a_1, y)$ ) son los conteos de coincidencias registrados entre el detector de disparo  $D_T$  y el detector  $D_1$  ( $D_2$ ) cuando el estado  $\rho_{a_0, a_1}$  es preparado por Alice y el  $M_y$  es realizado por Bob. Cada conteo de coincidencias se registra después de 10 s de tiempo de integración. Los resultados se muestran en la Fig. 4.2.1, donde se presentan el DW y el ASP  $P_b = (W + 4)/8$  como función de cinco diferentes parámetros de amortiguación de amplitud  $\gamma = \{0, 0,25, 0,5, 0,75, 1\}$ . Como observamos en la Sección ??, es posible realizar diferentes  $\gamma$  cambiando el ángulo  $\theta_1$ , de modo que cuando  $\theta_1 = 0$ , todos los fotones salen del interferómetro por la salida  $|0\rangle$ , lo que significa que no hay atenuación de amplitud en el canal, como se esperaba. Además, cuando  $\theta_1 \neq 0$ , los fotones comienzan a poblar el modo  $|1\rangle$ , indicando un aumento en el ruido. Consideremos primero los resultados experimentales en ausencia de cualquier filtrado. Los puntos rojos (en la región verde) muestran que el ASP disminuye muy rápidamente como función de  $\gamma$ , estando

por debajo del límite clásico (representado por la línea horizontal) cuando  $\gamma_c \approx 0,38$ . Sin embargo, hay una mejora cuando se aplican los filtros. Los datos experimentales en la Fig. 4.2.1 demuestran la activación del esquema SDI QRAC para valores de  $\gamma \geq \gamma_c$  cuando se aplican operaciones de filtrado. A medida que el parámetro  $f$  aumenta, más puntos rojos aparecen por encima del límite clásico. Se propone un modelo de error basado en simulaciones de Monte Carlo para comprender cómo las imperfecciones experimentales pueden afectar nuestros resultados experimentales, representados por un área. Para simular el error en la preparación del estado de Alice, se considera un desajuste de  $\pm 1^\circ$  en el ángulo de la HWP( $\theta_a$ ). También se incluye en la simulación una desviación de  $\pm 1\%$  en la caracterización de  $f_a$  y  $f_b$ . Además, se incluye un desajuste de  $\pm 1^\circ$  en la HWP( $\theta_b$ ) colocada en la medición. Las barras de error se obtienen con la propagación del error gaussiano y considerando las estadísticas de Poisson de los conteos de coincidencias registrados. La presencia de un canal de amortiguación de amplitud degrada claramente el rendimiento del protocolo SDI QRAC. Sin embargo, es posible recuperar el ASP utilizando el esquema propuesto en la Sección 3.2, que se basa en la implementación de operaciones estocásticas  $F_A$  y  $F_B$ .



**Figura 4.2.1:** Probabilidad de éxito promedio (ASP) como función del parámetro de amortiguación de amplitud (ADP). La línea horizontal representa el ASP de un RAC clásico, que es 0.75. Las líneas sólida, discontinua y punteada representan las predicciones teóricas cuando  $f = \{0, 0.45, 0.90\}$ . Los puntos rojos son los resultados experimentales. Las barras de error están dentro de los puntos experimentales y se obtienen utilizando la propagación del error gaussiano y teniendo en cuenta las estadísticas de Poisson de los conteos de coincidencias registrados. El área azul muestra cómo cambia el ASP cuando incluimos errores experimentales comunes, como la configuración de las placas de media onda o errores en la caracterización de  $f_a$  y  $f_b$ .

## Capítulo 5

# Conclusión

En esta tesis, hemos presentado un estudio detallado y una implementación práctica de dos componentes innovadores en el campo de la información cuántica: el Código de Acceso Aleatorio Cuántico (QRAC) y el Divisor de Haz de 4 Núcleos en Fibra Óptica (4c-FBS). A través de la combinación de estos elementos, hemos demostrado mejoras significativas en la capacidad de transmisión y en la eficiencia de recuperación de información en sistemas cuánticos.

Primero demostramos que el uso de transformaciones estocásticas permite recuperar la ventaja cuántica en el contexto de un protocolo QRAC afectado por un canal cuántico ruidoso tipo *amplitud damping*. Observamos que la ventaja cuántica del protocolo sobre el caso clásico correspondiente se pierde para un valor crítico de ruido  $\gamma = 0,375$ . Mas mostramos que las operaciones de filtrado estocástico pueden aplicarse localmente por Alice y Bob para contrarrestar la degradación del ruido y restaurar la ventaja cuántica para niveles de ruido por encima del valor crítico. Dado el interés en los códigos de acceso aleatorio cuántico como una primitiva en los protocolos de información cuántica, esperamos que nuestros resultados encuentren uso en otras aplicaciones, como la generación de números aleatorios.

Además, mostramos numéricamente que hacer uso de grados de libertad auxiliares permite utilizar el método de *compressed sensing* para realizar la tomografía de divisores de haz en fibras multi-núcleo (4-FBS). También, probamos que esto se cumple tanto en el escenario de la medición de Gell-Mann, del producto tensorial de Paulis y con MUBs. Esto es de interés dado que no siempre se cuenta con la capacidad de obtener todas las salidas de una medición o en ciertos escenarios hay mediciones que no pueden ser implementadas. Por ejemplo, el uso de bases entrelazadas es un desafío experimental, por lo que se prefieren mediciones no entrelazadas. Esperamos que estos resultados permitan explorar métodos más eficientes al momento de realizar la tomografía de elementos ópticos en fibra, como lo son los divisores de haz. Dado que existen fibras con mayor número de núcleos como 7 y 13, este resultado se hace más relevante dado que el número de mediciones para caracterizar un divisor de haces escala cuadráticamente en el número de núcleos de la fibra.

En conclusión, esta tesis ha contribuido en el desarrollo de técnicas pasivas de mitigación de ruido mediante los filtros estocásticos en tareas de información cuántica. Además, contribuye en el desarrollo de métodos de estimación eficientes de componentes ópticos en fibra. Los hallazgos presentados aquí abren la posibilidad de explorar otras investigaciones en el futuro.

## Referencias

- [1] A. K. Ekert, “Quantum cryptography based on Bell’s theorem”, [Phys. Rev. Lett. \*\*67\*\*, 661 \(1991\)](#).
- [2] S.-K. Liao, W.-Q. Cai, W.-Y. Liu et al., “Satellite-to-ground quantum key distribution”, [Nature \*\*549\*\*, 43 \(2017\)](#).
- [3] “40 years of quantum computing”, [Nature Reviews Physics \*\*4\*\*, 1 \(2022\)](#).
- [4] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle et al., “Experimental quantum teleportation”, [Nature \*\*390\*\*, 575 \(1997\)](#).
- [5] J. Argillander, A. Alarcón, C. Bao et al., “Quantum random number generation based on a perovskite light emitting diode”, [Communications Physics \*\*6\*\*, 1 \(2023\)](#).
- [6] C. H. Bennett y G. Brassard, “Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing”, [Theoretical Computer Science, Theoretical Aspects of Quantum Cryptography – celebrating 30 years of BB84 \*\*560\*\*, 7 \(2014\)](#).
- [7] B. Bürgler, T. F. Sjölander, O. Brinza et al., “All-optical nuclear quantum sensing using nitrogen-vacancy centers in diamond”, [npj Quantum Information \*\*9\*\*, 1 \(2023\)](#).
- [8] G.-Q. Liu y X.-Y. Pan, “Quantum information processing with nitrogen–vacancy centers in diamond”, [Chinese Physics B \*\*27\*\*, 020304 \(2018\)](#).
- [9] W. Ge, B. C. Sawyer, J. W. Britton et al., “Trapped Ion Quantum Information Processing with Squeezed Phonons”, [Physical Review Letters \*\*122\*\*, 030501 \(2019\)](#).
- [10] H. Waldman, “The Impending Optical Network Capacity Crunch”, en [2018 SBFoton International Optics and Photonics Conference \(SBFoton IOPC\)](#) (oct. de 2018), págs. 1-4.
- [11] A. D. Ellis, N. M. Suibhne, D. Saad et al., “Communication networks beyond the capacity crunch”, [Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences \*\*374\*\*, 20150191 \(2016\)](#).
- [12] A. D. Ellis, M. E. McCarthy, M. A. Sorokina et al., “Potential solutions to overcome the capacity crunch”, en [2015 European Conference on Lasers and Electro-Optics - European Quantum Electronics Conference \(2015\)](#), paper [CI\\_1\\_3](#) (jun. de 2015), [CI\\_1\\_3](#).
- [13] D. J. Richardson, J. M. Fini y L. E. Nelson, “Space-division multiplexing in optical fibres”, [Nature Photonics \*\*7\*\*, 354 \(2013\)](#).
- [14] G. B. Xavier y G. Lima, “Quantum information processing with space-division multiplexing optical fibres”, [Communications Physics \*\*3\*\*, 1 \(2020\)](#).

- [15] E. S. Gómez, S. Gómez, I. Machuca et al., “Multi-dimensional entanglement generation with multi-core optical fibers”, *Physical Review Applied* **15**, [arXiv:2005.07847 \[quant-ph\], 034024 \(2021\)](#).
- [16] D. Martínez, E. S. Gómez, J. Cariñe et al., “Certification of a non-projective qudit measurement using multiport beamsplitters”, *Nature Physics* **19**, 190 (2023).
- [17] J. Cariñe, M. N. Asan-Srain, G. Lima et al., “Maximizing quantum discord from interference in multi-port fiber beamsplitters”, *npj Quantum Information* **7**, 1 (2021).
- [18] J. Cariñe, G. Cañas, P. Skrzypczyk et al., “Multi-core fiber integrated multi-port beam splitters for quantum information processing”, *Optica* **7**, 542 (2020).
- [19] D. Gross, Y.-K. Liu, S. T. Flammia et al., “Quantum State Tomography via Compressed Sensing”, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 150401 (2010).
- [20] A. Nayak, “Optimal lower bounds for quantum automata and random access codes”, en *40th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (Cat. No. 99CB37039)* (IEEE, 1999), págs. 369-376.
- [21] A. Ambainis, A. Nayak, A. Ta-Shma et al., “Dense quantum coding and quantum finite automata”, *Journal of the ACM (JACM)* **49**, 496 (2002).
- [22] B. Marques y R. A. da Silva, “Quantum Random Access Code in Noisy Channels”, ver. 1, [ArXiv, doi.org/10.48550/arXiv.2204.09485 \(2022\)](#).
- [23] L. M. Andris Ambainis Debbie Leung y M. Ozols, “Quantum Random Access Codes with Shared Randomness”, ver. 3, <https://doi.org/10.48550/arXiv.0810.2937> (2009).
- [24] M. A. Nielsen e I. L. Chuang, *Quantum computation and quantum information*, 10th anniversary (Cambridge University Press, New York, 2010).
- [25] N. Gisin, “Hidden quantum nonlocality revealed by local filters”, *Physics Letters A* **210**, 151 (1996).
- [26] H.-Y. Ku, H.-C. Weng, Y.-A. Shih et al., “Hidden nonmacrorealism: Reviving the Leggett-Garg inequality with stochastic operations”, *Phys. Rev. Res.* **3**, 043083 (2021).
- [27] M. B. Plenio y S. Virmani, “An introduction to entanglement measures”, [arXiv:quant-ph/0504163, 10.48550/arXiv.quant-ph/0504163 \(2006\)](#).
- [28] S. A. Hill y W. K. Wootters, “Entanglement of a Pair of Quantum Bits”, *Physical Review Letters* **78**, 5022 (1997).
- [29] V. Vedral, “The Role of Relative Entropy in Quantum Information Theory”, *Reviews of Modern Physics* **74**, [arXiv:quant-ph/0102094, 197 \(2002\)](#).
- [30] G. Vidal y R. F. Werner, “Computable measure of entanglement”, *Physical Review A* **65**, 032314 (2002).
- [31] O. Jiménez, M. A. Solís-Prosser, L. Neves et al., “Mutual Information and Quantum Discord in Quantum State Discrimination with a Fixed Rate of Inconclusive Outcomes”, *Entropy* **23**, 73 (2021).
- [32] S. Gómez, E. S. Gómez, O. Jiménez et al., “Experimental quantum state discrimination using the optimal fixed rate of inconclusive outcomes strategy”, *Scientific Reports* **12**, 17312 (2022).
- [33] T. Baumgratz, A. Nüßeler, M. Cramer et al., “A scalable maximum likelihood method for quantum state tomography”, *New Journal of Physics* **15**, 125004 (2013).
- [34] M. Cramer, M. B. Plenio, S. T. Flammia et al., “Efficient quantum state tomography”, *Nature Communications* **1**, 149 (2010).

- [35] G. Torlai, G. Mazzola, J. Carrasquilla et al., “Neural-network quantum state tomography”, [Nature Physics](#) **14**, 447 (2018).
- [36] A. Czerwinski, “Quantum state tomography with informationally complete POVMs generated in the time domain”, [Quantum Information Processing](#) **20**, 105 (2021).
- [37] H. Häffner, W. Hänsel, C. F. Roos et al., “Scalable multiparticle entanglement of trapped ions”, [Nature](#) **438**, 643 (2005).
- [38] B. K. Nataraj, “Sparse Approximate Solutions to Linear Systems”, [SIAM Journal on Computing](#) **24**, 227 (1995).
- [39] R. Kueng, H. Rauhut y U. Terstiege, “Low rank matrix recovery from rank one measurements”, [Applied and Computational Harmonic Analysis](#) **42**, 88 (2017).
- [40] Y.-K. Liu, “Universal low-rank matrix recovery from Pauli measurements”, [arXiv:1103.2816 \[quant-ph, stat\]](#) (2011).
- [41] A. Kalev, R. L. Kosut e I. H. Deutsch, “Quantum tomography protocols with positivity are compressed sensing protocols”, [npj Quantum Information](#) **1**, 15018 (2015).
- [42] A. Jamiołkowski, “Linear transformations which preserve trace and positive semidefiniteness of operators”, [Reports on Mathematical Physics](#) **3**, 275 (1972).
- [43] M.-D. Choi, “Completely positive linear maps on complex matrices”, [Linear Algebra and its Applications](#) **10**, 285 (1975).
- [44] M. Frembs y E. G. Cavalcanti, “Variations on the Choi-Jamiołkowski isomorphism”, [arXiv:2211.16533 \[math-ph, physics:quant-ph\]](#), 10.48550/arXiv.2211.16533 (2022).
- [45] E. Adlam, “The Operational Choi-Jamiołkowski Isomorphism”, [Entropy](#) **22**, [arXiv:2011.06126 \[quant-ph\]](#), 1063 (2020).
- [46] M.-D. Choi, “Completely positive linear maps on complex matrices”, [Linear Algebra and its Applications](#) **10**, 285 (1975).
- [47] J. Watrous, *The Theory of Quantum Information* (Cambridge University Press, 2018).
- [48] M. K. G. Homa A. Ortega, “Choi representation of completely positive maps: a technical introduction”, [ARXiv](#) **11**, 3 (2024).
- [49] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony et al., “Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories”, [Phys. Rev. Lett.](#) **23**, 880 (1969).
- [50] B. S. Cirel’son, “Quantum generalizations of Bell’s inequality”, [Letters in Mathematical Physics](#) **4**, 93 (1980).
- [51] R. Horodecki, P. Horodecki y M. Horodecki, “Violating Bell inequality by mixed spin-1/2 states: necessary and sufficient condition”, [Physics Letters A](#) **200**, 340 (1995).
- [52] M. Pawłowski y N. Brunner, “Semi-device-independent security of one-way quantum key distribution”, [Phys. Rev. A](#) **84**, 010302 (2011).
- [53] P. Horodecki y R. Horodecki, “Distillation and bound entanglement.”, [Quantum Inf. Comput.](#) **1**, 45 (2001).
- [54] R. A. Bertlmann y P. Krammer, “Bloch vectors for qudits”, [Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical](#) **41**, 235303 (2008).
- [55] W. K. Wootters y B. D. Fields, “Optimal state-determination by mutually unbiased measurements”, [Annals of Physics](#) **191**, 363 (1989).
- [56] D. Ljuggren y M. Tengner, “Optimal focusing for maximal collection of entangled narrow-band photon pairs into single-mode fibers”, [Phys. Rev. A](#) **72**, 062301 (2005).
- [57] M. P. A. F. de Melo, M. Hor-Meyll, A. Salles et al., “Environment-Induced Sudden Death of Entanglement”, [Science](#) **316**, 579 (2007).

- 
- [58] A. Salles, F. de Melo, M. P. Almeida et al., “Experimental investigation of the dynamics of entanglement: Sudden death, complementarity, and continuous monitoring of the environment”, *Phys. Rev. A* **78**, 022322 (2008).
- [59] S. Gómez, A. Mattar, E. S. Gómez et al., “Experimental nonlocality-based randomness generation with nonprojective measurements”, *Phys. Rev. A* **97**, 040102 (2018).
- [60] E. S. Gómez, S. Gómez, P. González et al., “Device-Independent Certification of a Nonprojective Qubit Measurement”, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 260401 (2016).
- [61] M. A. Solís-Prosser, P. González, J. Fuenzalida et al., “Experimental multiparty sequential state discrimination”, *Phys. Rev. A* **94**, 042309 (2016).
- [62] P. G. Kwiat, S. Barraza-Lopez, A. Stefanov et al., “Experimental entanglement distillation and ‘hidden’ non-locality”, *Nature* **409**, 1014 (2001).
- [63] G. Lima, L. Neves, R. Guzmán et al., “Experimental quantum tomography of photonic qudits via mutually unbiased basis”, *Opt. Express* **19**, 3542 (2011).
- [64] O. Jiménez Farías, A. Valdés-Hernández, G. H. Aguilar et al., “Experimental investigation of dynamical invariants in bipartite entanglement”, *Phys. Rev. A* **85**, 012314 (2012).
- [65] G. H. Aguilar, O. J. Farías, A. Valdés-Hernández et al., “Flow of quantum correlations from a two-qubit system to its environment”, *Phys. Rev. A* **89**, 022339 (2014).
- [66] B. E. Saleh y M. C. Teich, *Fundamentals of photonics* (John Wiley & Sons, 2019).

## Apéndice A

# Calculo Filtros Estocásticos

Dado dos filtros estocásticos

$$F_A = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad (\text{A0.1})$$

El producto tensorial de ambos acutando sobre los dos subespacios es

$$\begin{aligned} F_A \otimes F_B &:= F_{AB} = F_{AB}^\dagger, \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\beta/\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\beta/\alpha} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A0.2})$$

Al aplicar los filtros sobre el estado  $\rho$  (2.5.9), tenemos que,

$$\begin{aligned}
F_{AB}\rho F_{AB}^\dagger &= \lambda \begin{pmatrix} \sqrt{\beta/\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\beta/\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & -\alpha\beta & 0 \\ 0 & -\alpha\beta & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\beta/\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\beta/\alpha} \end{pmatrix} \\
&+ \frac{1}{2}(1-\lambda) \begin{pmatrix} \sqrt{\beta/\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\beta/\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\beta/\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\beta/\alpha} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Calculamos el producto de matrices

$$F_{AB}\rho F_{AB} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\beta/\alpha)^2\alpha^2 & -(\beta/\alpha)\alpha\beta & 0 \\ 0 & -(\beta/\alpha)\alpha\beta & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(1-\lambda)(\beta/\alpha) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A0.3})$$

Simplificando

$$F_{AB}\rho F_{AB} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & -\beta^2 & 0 \\ 0 & -\beta^2 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(1-\lambda)(\beta/\alpha) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A0.4})$$

$$= 2\lambda\beta^2\rho_{sinlgete} + \frac{1}{2}(1-\lambda)(\beta/\alpha)(\rho_{++} + \rho_{--}), \quad (\text{A0.5})$$

$$= \frac{\beta}{\alpha}(2\lambda\alpha\beta\rho_{sinlgete} + \frac{1}{2}(1-\lambda)(\rho_{++} + \rho_{--})). \quad (\text{A0.6})$$

## Apéndice B

# Interferómetro de Sagnac como un canal amplitud damping

Como se ha demostrado y descrito en trabajos anteriores [57, 58, 64, 65], un interferómetro puede ser utilizado para implementar un canal de decoherencia. Aquí describimos brevemente el interferómetro de Sagnac utilizado para implementar el canal de amortiguamiento de amplitud en el experimento, ilustrado en la parte del “canal” de la figura 3.2.1.

El fotón incide primero en un divisor de haz polarizador (PBS), que separa los componentes horizontales y verticales del qubit de polarización en dos modos de momento lineal  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ , representados como líneas continuas y discontinuas en la Fig.3.2.1, respectivamente. El PBS puede considerarse como una puerta control-NOT (CNOT) entre los grados de libertad de polarización y momento, descrito como

$$\text{PBS} = \hat{h}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) + i\hat{v}(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|), \quad (\text{A0.1})$$

donde  $\hat{h} = |h\rangle\langle h|$  y  $\hat{v} = |v\rangle\langle v|$ . Aplicando el PBS a un estado de entrada  $|\Psi\rangle = |\psi\rangle 0$ ,

donde  $|\psi\rangle$  es el estado inicial de polarización, obtenemos

$$|\Psi'\rangle = \hat{h} |\psi\rangle |0\rangle + i\hat{v} |\psi\rangle |1\rangle.$$

Dentro del interferómetro, se añade una placa de onda media  $\text{HWP}(\theta_1)$  en el camino 1 con su eje rápido alineado en el ángulo  $\theta_1$ . Experimentalmente, es importante considerar la diferencia de longitud de trayecto óptico entre los caminos 0 y 1 causada por la  $\text{HWP}(\theta_1)$ . Por lo tanto, es necesario incluir otra placa de onda media en el camino 0 para compensar la longitud del trayecto óptico. Después de la placa de onda, el estado se describe como

$$|\Psi''\rangle = \hat{h} |\psi\rangle |0\rangle + i\hat{H}(\theta_1)\hat{v} |\psi\rangle |1\rangle,$$

donde  $\hat{H}$  es la representación de la matriz de Jones de una placa de onda media [66]. Los dos caminos se enrutan usando tres espejos, de manera que el fotón pasa nuevamente a través del mismo PBS, implementando una segunda puerta CNOT como se describe en (A0.1). Después del PBS, tenemos el siguiente estado:

$$|\Psi'''\rangle = \left[ \hat{h} - \hat{v}\hat{H}(\theta_1)\hat{v} \right] |\psi\rangle |0\rangle + i \left[ \hat{h}\hat{H}(\theta_1)\hat{v} \right] |\psi\rangle |1\rangle. \quad (\text{A0.2})$$

Los dos modos de salida del PBS se combinan incoherentemente en un divisor de haz (BS), de manera que las longitudes de los trayectos ópticos difieren por unos pocos milímetros, lo cual es mucho más que la longitud de coherencia longitudinal de los fotones (unos pocos cientos de micrones). Este es el equivalente experimental a “rastrear” el entorno, que aquí es el grado de libertad del momento lineal. El estado de salida se describe mediante una matriz de densidad,

$$\rho_{out} = K_0 |\psi\rangle \langle \psi| K_0^\dagger + K_1 |\psi\rangle \langle \psi| K_1^\dagger \quad (\text{A0.3})$$

donde los operadores de Krauss están dados por

$$K_0 = \hat{h} - \hat{v}\hat{H}(\theta_1)\hat{v},$$

$$K_1 = \hat{h}\hat{H}(\theta_1)\hat{v}.$$

Reemplazando los componentes de la matriz de Jones es posible escribir estos operadores de Krauss en la forma dada en la Ecuación (3.2.4) del texto principal.