

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



UNA ACCIÓN PARA GRAVEDAD CHERN-SIMONS EN CUATRO DIMENSIONES

Tesis para optar al grado académico
de Magíster en Ciencias
con mención en Física

por

Iván Ignacio Muñoz Sandoval

Profesor Guía : Dr. Patricio Salgado
Comisión : Dr. Fernando Izaurieta
Dr. Luis Roa

Concepción, Chile
Agosto 2015

Índice general

Agradecimientos	v
Resumen	vii
1. Introducción	2
2. Teorías de Gauge y Gravitación	5
2.1. Teoría de Gauge de Yang-Mills	6
2.2. Teoría de la Relatividad General	8
2.3. Teorías de Chern-Simons	9
2.3.1. Acción Chern-Simons para el álgebra AdS	11
2.4. Transgresiones	12
2.4.1. Lagrangeanos a partir de formas de Transgresión	13
2.4.2. Formas de Transgresión como lagrangeano	15
2.4.3. Ecuaciones de Campo	17
3. Teoría de Gauge extendido	19
3.1. Campos de Gauge extendidos	20
3.2. Formas tipo Chern-Simons en dimensiones pares	25
3.3. Transgresiones	29
4. Álgebras diferenciales libres y formas compuestas	34
4.1. Ecuación de Maurer-Cartan	34
4.2. Álgebras Diferenciales Libres	36
4.3. Formalismo de D'Auria-Fre	37
4.4. Formas Compuestas	39
5. Formas de Chern-Simons-Savvidy para el álgebra de Maxwell $\mathfrak{B}_4$	42
5.1. Álgebra de Maxwell	42
5.2. 2-forma $\mathbf{B}$ para el álgebra $\mathfrak{B}_4$	44
5.3. Lagrangeano Chern-Simons-Savvidy en cuatro dimensiones	48
6. Conclusiones	52

Agradecimientos

Quisiera agradecer en primer lugar a mi familia, en particular a mis padres, sin ellos definitivamente nada de esto habría sido posible, pese a la distancia he sentido su apoyo incondicional. También a mis abuelos y tía Sonia.

A Ornella, por ser mi compañera, amiga y por el amor que me ha entregado. Ha sido mi gran apoyo durante mis estudios y a lo largo de la tesis en Concepción.

Ademas mi gratitud a mis amigos que me acompañaron, en las pichangas y otros eventos durante mi estadía en Concepción.

No puedo dejar fuera a profesor Patricio Salgado, sin él este trabajo no existiría y en particular por su paciencia para explicar y enseñar. A profesor Fernando Izaurieta, una parte de este trabajo también es de él.

Resumen

A lo largo de esta tesis construiremos un lagrangeano Chern-Simons en cuatro dimensiones para el álgebra de Maxwell.

Analizamos las teorías de gauge de Yang-Mills y las formas de Chern-Simons. Esta última nos permite describir teorías gravitacionales cuasi-invariante de gauge, sin embargo solo pueden ser construidas en dimensiones impares. También construiremos las formas de transgresión y veremos su uso como lagrangeanos.

Savvidy generaliza las teorías de gauge de Yang-Mills introduciendo campos tensoriales y curvaturas de rangos mas altos. En este contexto es posible construir $(2n + 3)$ –formas las cuales son análogos a las formas Chern-Pontryagin las cuales pueden ser escritas como la derivada exterior de una $(2n + 2)$ –forma análogo a una forma de Chern-Simons. Esta $(2n + 2)$ –forma depende de la 1-forma campo de gauge y de la 2-forma campo de gauge presentada en la teoría de gauge extendida.

Generalizamos este resultado utilizando el teorema de Chern-Weil generalizado, lo que nos permite construir formas de transgresión en $(2n + 2)$ – dimensiones.

Utilizando las álgebras diferenciales libres podemos construir p –formas como multiplicación de 1-formas campos de gauge. Construimos la 2-forma campo de gauge como combinación de campos de gauge del álgebra de Maxwell y obtenemos la 4-forma de Chern-Simons, la cuál contiene el lagrangeano de Einstein-Hilbert.

Capítulo 1

Introducción

El modelo más aceptado para describir la interacción gravitacional es la teoría de la Relatividad General (RG). La teoría RG resulta estar en excelente acuerdo con las observaciones y desde su formulación predijo fenómenos que aun no eran conocidos por la gente de la época conduciendo una revolución en la física.

A pesar de que la teoría RG describe apropiadamente mucha de la fenomenología gravitacional, no ha podido ser cuantizada. Una de las razones del porqué esta teoría se resistiría a ser cuantizada es debido a que hasta ahora no ha podido ser formulada como teoría de gauge. La dificultad radica en que en Relatividad General la métrica es un campo dinámico mientras que en las usuales teorías de Yang-Mills la métrica involucrada es la métrica de Minkowski. Una forma de poder construir una teoría de gravedad como teoría de gauge es construyendo acciones basadas en formas de Chern-Simons.

Las acciones para gravedad Chern-Simons son acciones para una teoría cuasi-invariante de gauge (es invariante modulo termino de borde) bajo uno de los grupos espacio temporales (Poincaré, grupos de (A)dS). En las formas Chern-Simons se consideran como campos fundamental la 1-forma conexión A y la 2-forma curvatura $F = dA + A^2$. Las formas Chern-Simons existen solo en dimensiones impares ya que están definidos como $d\mathcal{C}_{2n-1} = \langle F^n \rangle$, donde $\langle F^n \rangle$ es un invariante topológico. La gravedad Chern-Simons en 2+1 dimensiones para el grupo AdS es equivalente *on-shell* (imponiendo las ecuaciones de movimiento) a la Relatividad General en tres dimensiones con constante cosmológica. Sin embargo al llevar a

cabo una generalización a dimensiones mas altas no se obtiene Relatividad General en dimensiones mayores, sino que una teoría gravitacional altamente no lineal en la curvatura. Otra forma de construir acciones invariantes de gauge para la interacción gravitacional es construir acciones basadas en las formas de transgresión [11].

El problema mas complicado con intentar construir acciones para teorías gravitacionales basadas en formas Chern-Simons o formas de Transgresión es que ellas son validas solo en dimensiones impares.

En Ref. [15] Savvidy generalizó las teorías de Yang-Mills e introdujo los campos de gauge extendidos $A_{\mu\lambda_1\dots\lambda_s}$, los cuales son simétricos en los indices λ y sin simetría a priori entre λ y μ . Este campo extendido contiene al campo de Yang-Mills usual A_μ y agrega nuevos campos cuando se considera $s \neq 0$.

Por otro lado en Ref. [18] fue encontrada en el contexto de los llamados campos de gauge extendidos, una densidad topológica en cinco dimensiones, invariante de gauge y localmente exacta. Esta densidad permite encontrar una forma de “Chern-Simons” en cuatro dimensiones. Antoniadis y Savvidy en Ref. [1] generalizaron la densidad topologica cinco dimensional a mayores dimensiones y encontraron una densidad topológica en dimensiones impares dada por $d\sigma_{2n+2} = \text{tr}(\mathbf{F}^n \mathbf{H})$, donde $\mathbf{F}$ es la 2-forma curvatura usual y $\mathbf{H} = F_{\mu\nu,\lambda} dx^\mu dx^\nu dx^\lambda$ es una 3-forma. $F_{\mu\nu,\lambda}$ es en principio un tensor antisimetrico en sus indices $\mu\nu$ y sin simetría a priori con λ . La $2n + 2$ -forma es una forma de “Chern-Simons” en dimensiones pares.

En el contexto de supergravedad (SUGRA) estándar en once dimensiones, conocida como supergravedad CJS [8], se tiene que para que los grados de libertad bosónicos y fermiónicos sean iguales es necesario introducir una 3-forma bosónica $A = A_{\mu\nu\lambda} dx^\mu dx^\nu dx^\lambda$. En esta SUGRA no es posible encontrar un álgebra de Lie donde e^a, ω^{ab}, ψ y A sean interpretados como campos de gauge. Sin embargo estos campos definen un álgebra conocida como un álgebra diferencial libre. En ref. [3, 12] fue encontrado que escribiendo la 3-forma A como una combinación de las 1-forma de gauge del álgebra de D’Auria-Fre, es posible construir una super-

gravedad once dimensional bajo el álgebra de D'Auria-Fre.

En esta tesis es construida una acción 4-dimensional para la interacción gravitacional basada en una forma Chern-Simons invariante bajo el álgebra de Maxwell. Esto es logrado utilizando la 4-forma análoga a una forma de Chern-Simons obtenida por Savvidy y Antoniadis en las refs [1, 18] y de un procedimiento desarrollado por D'Auria en Ref. [3] y aplicada en [5, 12].



Capítulo 2

Teorías de Gauge y Gravitación

Las teorías de gauge parecen ser el modelo adecuado para describir tres de las cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza. La teoría electromagnética es una teoría de gauge para el grupo $U(1)$ donde el campo de gauge corresponde al cuadripotencial (potencial electromagnético) A_μ . La generalización de esta teoría abeliana al caso de simetrías no abelianas permitió la construcción de las llamadas teorías de gauge de Yang-Mills donde el campo de gauge es dado por el potencial de Yang-Mills A_μ el cual es evaluado en alguna álgebra de Lie arbitraria. El desarrollo de las teorías de gauge no abelianas condujo a la construcción de una teoría, conocida como teoría gran unificada, que en principio unifica tres de las cuatro fuerzas fundamentales. Sin embargo la más antigua interacción fundamental, la interacción gravitacional, se ha resistido a ser parte de una teoría que unifique las cuatro fuerzas fundamentales hasta ahora conocidas. La razón es que las teorías de Yang-Mills son basadas en un espacio-tiempo background descrito por una métrica constante, es decir sin dinámica, mientras que en la teoría que describe la interacción gravitacional, a saber Relatividad General la cual describe la interacción gravitacional como un campo que se identifica con un espacio tiempo que tiene dinámica, la cual es descrita por las ecuaciones de campo de Einstein.

Durante las ultimas décadas han sido construidas acciones invariantes de gauge (modulo términos de borde) o en forma de Transgresión, las cuales son validas solo en dimensiones impares.

2.1. Teoría de Gauge de Yang-Mills

Consideremos la acción S para un campo escalar ϕ , la cual nos entrega las ecuaciones de movimiento. Si S es invariante bajo transformaciones del tipo $\phi \rightarrow \phi' = e^{-\lambda}\phi$, con λ una constante, entonces diremos que S es globalmente invariante y que el conjunto de transformaciones es una simetría global del sistema. Sin embargo puesto que el campo ϕ está definido en cada punto del espacio-tiempo, entonces se tiene que la transformación es la misma para cada punto del espacio, lo cual entra en conflicto con la teoría especial de la relatividad y con el principio de la causalidad de la simetría de gauge. Esto condujo a postular que las transformaciones que dejen invariante la acción S sean del tipo $\phi \rightarrow \phi' = e^{-\lambda(x)}\phi$, donde ahora λ ahora está definido en cada punto del espacio-tiempo. Este grupo de transformaciones son conocidos como simetrías locales.

Estas transformaciones obliga a definir una nueva derivada para los términos cinéticos de la teoría, los que serán ahora invariante bajo transformaciones locales. La nueva derivada, llamada derivada covariante es definida como

$$D = d + A, \quad (2.1)$$

donde $A = A_\mu dx^\mu$ es una 1-forma. Esto tiene como consecuencia que la derivada covariante del campo transforme de la misma forma que los campos ($\phi \rightarrow \phi' = U(\lambda)\phi = \exp(-\lambda^a(x)T_a)\phi$), es decir transforme como $D\phi \rightarrow (D\phi)' = U(\lambda)D\phi = e^{-\lambda(x)}D\phi$, siempre que la 1-forma campo de gauge transforme como una conexión, es decir transforme como

$$A \rightarrow A' = UAU^{-1} + U d(U^{-1}), \quad (2.2)$$

donde $U(\lambda) = \exp(-\lambda^a(x)T_a)$, T_a son los generadores del álgebra de Lie y λ^a son llamados parámetros de gauge.

A partir de la derivada covariante D es posible construir la 2-forma curvatura F ,

$$DD\phi = (dA + A^2)\phi = F\phi,$$

dada por

$$F \equiv dA + A^2 = F_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (2.3)$$

la cual transforma como

$$F \rightarrow F' = UFU^{-1}. \quad (2.4)$$

Bajo una transformación infinitesimal $U = 1 + \lambda$ el potencial de gauge y la curvatura transforman como,

$$\delta A = d\lambda + [A, \lambda] \quad (2.5)$$

$$\delta F = [F, \lambda]. \quad (2.6)$$

El lagrangeano de Yang-Mills [21] es dado por,

$$\mathcal{L}_{YM} = \langle F * F \rangle, \quad (2.7)$$

donde $\langle \dots \rangle$ es alguna forma multilineal invariante del álgebra, conocida también llamada traza simetrizada y donde $*$ denota el dual de Hodge. Este lagrangeano para el caso de grupo de simetría abeliana $U(1)$ en cuatro dimensiones nos conduce al lagrangeano de Maxwell $\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, el cuál conduce a las ecuaciones de Maxwell en el vacío.

2.2. Teoría de la Relatividad General

La acción que conduce a las ecuaciones de campo de Einstein en 3+1 dimensiones es dada por la llamada acción de Einstein-Hilbert,

$$S_{EH} = \int_{\mathcal{M}_4} \epsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d = \int_{\mathcal{M}_4} d^4x \sqrt{-g} R, \quad (2.8)$$

donde R^{ab} es la 2-forma curvatura de Riemann, e^a es el vielbein, g es el determinante de la métrica y R es el escalar de Ricci.

Realizando la variación de la acción escrita en formas diferenciales con respecto al vielbein e^a y la conexión de spin ω^{ab} se obtienen las siguientes ecuaciones de campo,

$$\delta_e S_{EH} = \epsilon_{abcd} R^{ab} e^c = 0, \quad \delta_\omega S_{EH} = \epsilon_{abcd} T^c e^d = 0, \quad (2.9)$$

la primera ecuación es la ecuación de Einstein $G_{\mu\nu} = 0$ escrito en formas diferenciales la que se cumple siempre ya que estamos considerando la teoría sin un lagrangeano de materia, mientras que la segunda ecuación implica la nulidad de la torsión.

La acción de Einstein-Hilbert es invariante bajo transformaciones generales de coordenadas

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu. \quad (2.10)$$

Puesto que las transformaciones generales de coordenadas pueden ser identificadas con traslaciones locales de Poincaré cuando la torsión es nula, podemos postular que el grupo de simetría para Relatividad General es el grupo de Poincaré, (el cuál contiene como subgrupo al grupo de Lorentz y al grupo de las traslaciones) cuyos generadores satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [P_a, P_b] &= 0, \\ [J_{ab}, P_c] &= \eta_{bc} P_a - \eta_{ac} P_b, \\ [J_{ab}, J_{cd}] &= \eta_{bc} J_{ad} + \eta_{ad} J_{bc} - \eta_{ac} J_{bd} - \eta_{bd} J_{ac}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Donde P_a son los generadores de las traslaciones y J_{ab} son los generadores del álgebra de Lorentz. Esto significa que la 1-forma conexión evaluada en el álgebra de Poincaré es dada por

$$\mathbf{A} = e^a P_a + \frac{1}{2} \omega^{ab} J_{ab}. \quad (2.12)$$

Puesto que

$$\delta \mathbf{A} = D\lambda = D \left(\lambda^a P_a + \frac{1}{2} \lambda^{ab} J_{ab} \right), \quad (2.13)$$

se encuentra bajo traslaciones locales de Poincaré los campos vielbein y conexión de spin transforman como

$$\delta_{tlp} e^a = D\lambda^a, \quad \delta_{tlp} \omega^{ab} = 0, \quad (2.14)$$

mientras que bajo rotaciones locales de Lorentz,

$$\delta_{rl} e^a = \lambda_b^a e^b, \quad \delta_{rl} \omega^{ab} = D\lambda^{ab}. \quad (2.15)$$

Es directo probar que la acción de Einstein-Hilbert es invariante bajo rotaciones de Lorentz. Sin embargo bajo traslaciones locales de Poincaré, transforma como

$$\delta_{tlP} S_{EH} = 2 \int_{\mathcal{M}_4} \epsilon_{abcd} R^{ab} T^c \lambda^d - \int_{\partial \mathcal{M}_4} d(\epsilon_{abcd} R^{ab} e^c \lambda^d). \quad (2.16)$$

Esto significa que la acción de Einstein-Hilbert es (cuasi-)invariante sólo y sólo si se impone la condición de nulidad de la torsión.

2.3. Teorías de Chern-Simons

Las formas de Chern Simons pueden ser obtenidas a partir de invariantes topológicos de la forma,

$$\mathcal{P}_{2n+2} = \langle \mathbf{F}^{n+1} \rangle, \quad (2.17)$$

el cuál es una $2n + 2$ -forma que satisface $d\mathcal{P}_{2n+2} = 0$. De acuerdo con el lema de Poincaré, podemos escribir $\mathcal{P}_{2n+2} = d\mathcal{C}_{2n+1}$ donde $\mathcal{C}_{2n+1}$ es la llamada forma de Chern-Simons. Es posible demostrar que la forma de Chern-Simons satisface la condición $\delta_{gauge}\mathcal{C}_{2n+1} = d\Omega$, lo cuál nos garantiza que si consideramos a la forma Chern-Simons $\mathcal{C}_{2n+1}$ como un lagrangeano sobre una variedad $2n + 1$ dimensiones, entonces la correspondiente acción $S(A)$ es invariante de gauge,

$$\delta S(A) = \int_{\mathcal{M}_{2n+1}} \delta\mathcal{C}_{2n+1} = \int_{\mathcal{M}_{2n}} d\Omega. \quad (2.18)$$

Las formas de Chern-Simons son “libres de background” e invariantes bajo transformaciones generales de coordenada [11, 22].

A partir de (2.17) es posible probar que la $(2n + 1)$ -forma de Chern-Simons es dada por,

$$\mathcal{C}_{2n+1} = (n + 1) \int_0^1 dt \langle \mathbf{A} \mathbf{F}_t^n \rangle, \quad (2.19)$$

donde $\mathbf{F}_t = t d\mathbf{A} + t^2 \mathbf{A}^2$. Si $n = 1$ se encuentra que (2.17) toma la forma

$$\mathcal{P}_4 = d \left\langle AdA + \frac{2}{3} A^3 \right\rangle \quad (2.20)$$

y (2.19) viene dada por

$$S = \int_{\mathcal{M}_3} \left\langle AdA + \frac{2}{3} A^3 \right\rangle. \quad (2.21)$$

Los lagrangeanos construidos a partir de formas Chern-Simons permiten construir una teoría de gauge para la gravedad aunque esto es posible sólo en dimensiones impares.

Lo más cercano a una acción Chern-Simons para la gravedad en dimensiones pares son las llamadas teorías tipo Born-Infeld [22] la cual es obtenida eligiendo de manera apropiada los coeficientes del lagrangeano de Lanczos-Lovelock [20].

2.3.1. Acción Chern-Simons para el álgebra AdS

Para describir gravedad Chern-Simons consideraremos el grupo (A)dS¹. En d -dimensiones, el álgebra AdS es dada por

$$\begin{aligned} [P_a, P_b] &= J_{ab}, \\ [J_{ab}, P_c] &= \eta_{bc}P_b - \eta_{ac}P_a, \\ [J_{ab}, J_{cd}] &= \eta_{cb}J_{ad} - \eta_{ca}J_{bd} + \eta_{bd}J_{ca} - \eta_{da}J_{cb}. \end{aligned}$$

La 1-forma conexión de gauge evaluada en el álgebra AdS toma la forma,

$$A = \frac{1}{l}e^a P_a + \frac{1}{2}\omega^{ab}J_{ab}, \quad (2.22)$$

donde e^a es interpretado como el vielbein y ω^{ab} como la conexión de spin de la variedad base. La 2-forma curvatura asociada es,

$$F = \frac{1}{l}T^a P_a + \frac{1}{2}\left(R^{ab} + \frac{1}{l^2}e^a e^b\right)J_{ab}, \quad (2.23)$$

donde

$$R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega_c^a \omega^{cb}, \quad (2.24)$$

$$T^a = de^a + \omega_c^a e^c, \quad (2.25)$$

definen la curvatura de Riemann y la torsión respectivamente.

Un tensor invariante simétrico de rango $n + 1$ para el álgebra AdS es dado por el tensor de Levi-Civita

$$\langle J_{a_1 a_2} \cdots J_{a_{2n-1} a_{2n}} P_{a_{2n+1}} \rangle = \frac{2^n}{n+1} \epsilon_{a_1 \cdots a_{2n+1}}. \quad (2.26)$$

¹El caso de Poincaré puede ser obtenido por medio de una contracción de Inönü-Wigner

Por lo tanto, al considerar el álgebra AdS y el tensor invariante de Levi-Civita en la forma general de una acción Chern-Simons (2.19), se obtiene

$$L_G^{(2n+1)} = k\epsilon_{a_1 \dots a_{2n+1}} \sum_{k=0}^n \frac{1}{l^{2(n-k)+1}} \frac{1}{2(n-k)+1} \binom{n}{k} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2k-1} a_{2k}} e^{a_{2k+1}} \dots e^{a_{2n+1}}, \quad (2.27)$$

expresión que coincide con el lagrangeano propuesto originalmente por Chamseddine [6, 7]

En el límite $l \rightarrow \infty$ se obtiene el lagrangeano para gravedad Chern-Simons invariante bajo el grupo de Poincaré,

$$L = k\epsilon_{a_1 \dots a_{2n+1}} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2n-1} a_{2n}} e^{a_{2n+1}}. \quad (2.28)$$

2.4. Transgresiones

Un importante hecho que debemos destacar es el hecho que las formas Chern-Simons están definidos solo localmente. Para verificar esta afirmación consideremos el llamado teorema de Chern-Weil:

Teorema 1 (Chern-Weil) *Sea $\langle \mathbf{F}^{n+1} \rangle$ un polinomio invariante. Entonces*

1. $\langle \mathbf{F}^{n+1} \rangle$ es una forma cerrada, es decir $d\langle \mathbf{F}^{n+1} \rangle = 0$.
2. Si $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_0$ son dos 1-forma conexiones de gauge de un fibrado basado en una variedad M $(2n+1)$ -dimensional, y si $\mathbf{F}_0$ y $\mathbf{F}_1$ son las correspondientes 2-formas curvaturas, entonces la diferencia $\langle \mathbf{F}_1^{n+1} \rangle - \langle \mathbf{F}_0^{n+1} \rangle$ es una forma exacta².

Es decir

$$\langle \mathbf{F}_1^{n+1} \rangle - \langle \mathbf{F}_0^{n+1} \rangle = d\mathcal{T}^{(2n+1)}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_0), \quad (2.29)$$

donde

$$\mathcal{T}^{(2n+1)}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_0) = (n+1) \int_0^1 dt \langle \Theta \mathbf{F}_t^n \rangle \quad (2.30)$$

²La demostración a este teorema puede ser encontrada en [11]

es la llamada forma de transgresión y donde hemos definido,

$$\Theta = \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_0, \mathbf{A}_t = \mathbf{A}_0 + t\Theta; \mathbf{F}_t = d\mathbf{A}_t + \mathbf{A}_t\mathbf{A}_t. \quad (2.31)$$

Es directo probar [11] que la forma de transgresión puede ser expresado en términos de formas de Chern-Simons para $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_0$,

$$\mathcal{T}_{2n+1}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_0) = \mathcal{C}_{2n+1}(\mathbf{A}_1) - \mathcal{C}_{2n+1}(\mathbf{A}_0) + d\mathcal{B}, \quad (2.32)$$

donde $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_0$ están valuados sobre la misma álgebra de Lie.

2.4.1. Lagrangeanos a partir de formas de Transgresión

1. Los llamados lagrangeanos de Chern-Simons son formas de Chern-Simons del polinomio invariante

$$\langle \mathbf{F}^{n+1} \rangle = d\mathcal{C}^{2n+1}(\mathbf{A}, \mathbf{F}) \quad (2.33)$$

y son definidos como

$$\begin{aligned} L_{CS}^{2n+1} &= k\mathcal{C}^{2n+1}(A, F) = k(n+1) \int_0^1 \langle \mathbf{A}\mathbf{F}_t^n \rangle \\ &= k(n+1) \int_0^1 dt \langle \mathbf{A}(td\mathbf{A} + t^2\mathbf{A}^2)^n \rangle. \end{aligned}$$

En la practica, formas de Chern-Simons son usadas como lagrangeanos básicamente debido a que

- a) Formas de Chern-Simons conducen a teorías de gauge con una estructura de fibrado cuyo único campo dinámico es una 1-forma conexión de gauge $\mathbf{A}$.
- b) Formas de Chern-Simons cambian, bajo una transformación de gauge, en una derivada total, es decir son invariante salvo un termino de borde.

2. Bajo una transformación de gauge de la forma,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_1 &\rightarrow \mathbf{A}'_1 = U^{-1}\mathbf{A}_1U - U^{-1}dU, \\ \mathbf{A}_0 &\rightarrow \mathbf{A}'_0 = U^{-1}\mathbf{A}_0U - U^{-1}dU.\end{aligned}$$

El polinomio $\langle \mathbf{F}^{n+1} \rangle$ no cambia bajo transformaciones de gauge debido a que es un invariante topológico conocido como forma de Chern-Pontrjagin. Esto significa que el lado derecho de la ecuación para las formas de transgresión

$$d\mathcal{T}^{2n+1}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_0) = \langle \mathbf{F}_1^{n+1} \rangle - \langle \mathbf{F}_0^{n+1} \rangle \quad (2.34)$$

no cambian. Así tenemos que bajo una transformación de gauge se tiene,

$$\delta(d\mathcal{T}^{2n+1}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_0)) = \delta\langle \mathbf{F}_1^{n+1} \rangle - \delta\langle \mathbf{F}_0^{n+1} \rangle = 0 \quad (2.35)$$

de donde

$$d[\delta\mathcal{T}^{2n+1}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_0)] = 0. \quad (2.36)$$

3. Haciendo $\mathbf{A}_0 = 0$ y $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$ en el teorema de Chern-Weyl se tiene,

$$d\mathcal{C}^{2n+1} = \langle \mathbf{F}^{n+1} \rangle, \quad (2.37)$$

de donde

$$\delta(d\mathcal{C}^{2n+1}(\mathbf{A})) = \delta\langle \mathbf{F}^{n+1} \rangle = 0. \quad (2.38)$$

Así tenemos que el teorema de Chern-Weil establece que,

$$d[\delta\mathcal{C}^{2n+1}(\mathbf{A})] = 0, \quad (2.39)$$

lo cual significa que,

$$\delta\mathcal{C}^{2n+1}(\mathbf{A}) = d\Omega, \quad (2.40)$$

para algún Ω invariante bajo transformaciones de gauge. Es un hecho conocido que una conexión no puede ser globalmente cero a menos que el bundle sea trivial. Este hecho y el resultado que las formas Chern-Simons pueden ser obtenidas a partir de las formas Transgresión constituyen la razón del porque las formas Chern-Simons pueden ser definidas sólo localmente.

Este hecho hace que la interpretación de formas Chern-Simons como lagrangeano para teorías de campo de gauge sea impreciso. Sin embargo este hecho es solo un impasse debido a que es necesario integrarlas sobre todo M para obtener la correspondiente acción.

En la practica, formas de Chern-Simons son usadas como lagrangeanos básicamente debido a que,

- a) Formas Chern-Simons conducen a teorías de gauge con una estructura de fibrado cuyo único campo dinámico es una 1-forma conexión de gauge $\mathbf{A}$.
- b) Formas de Chern-Simons cambian, bajo una transformación de gauge, solo en una derivada total.

2.4.2. Formas de Transgresión como lagrangeano

Teniendo en cuenta que

1. Los lagrangeanos Chern-Simons son formas proporcionales a formas Chern-Simons del tipo

$$\mathcal{C}^{2n+1}(\mathbf{A}, \mathbf{F}) = (n+1) \int_0^1 dt \langle \mathbf{A} \mathbf{F}_t^n \rangle,$$

es decir,

$$L_{CS}^{2n+1} = k \mathcal{C}^{2n+1}(\mathbf{A}, \mathbf{F}).$$

2. Las formas transgresión son dadas por

$$\mathcal{T}^{(2n+1)}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_0) = (n+1) \int_0^1 dt \langle (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_0) \mathbf{F}_t^n \rangle.$$

Resulta natural postular la existencia de lagrangeanos basados en las formas transgresiones $\mathcal{T}^{2n+1}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_0)$ de forma análoga a la existencia de lagrangeanos Chern-Simons.

Bajo esta premisa el lagrangeano de transgresión es de la forma,

$$\begin{aligned} L_T^{2n+1}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_0) &= k \mathcal{T}^{2n+1}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_0) \\ &= k(n+1) \int_0^1 dt \langle (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_0) \mathbf{F}_t^n \rangle. \end{aligned}$$

A partir de este lagrangeano podemos construir una teoría de gauge sobre una variedad orientable M $(2n+1)$ -dimensional descrita por medio de la acción

$$\begin{aligned} S_T^{(2n+1)}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_0) &= k \int_M \mathcal{T}^{2n+1}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_0), \\ &= k(n+1) \int_M \int_0^1 dt \langle \Theta \mathbf{F}_t^n \rangle, \end{aligned}$$

donde k es una constante. Esta ecuación describe la dinámica de una teoría con dos campos independientes: Las dos 1-formas conexiones $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_0$.

Estos campos aparecen en la acción con una simetría bien definida. En efecto, de la acción vemos que

$$S_T^{2n+1}(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1) = -S_T^{2n+1}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_0), \quad (2.41)$$

lo cuál nos dice que el intercambio de conexiones no genera cambios en la teoría clásica.

2.4.3. Ecuaciones de Campo

Consideremos ahora las ecuaciones de campo para el lagrangeano

$$L_T^{(2n+1)}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_0) = k(n+1) \int_0^1 dt \langle \boldsymbol{\Theta} \mathbf{F}_t^n \rangle, \quad (2.42)$$

donde $\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_t = \mathbf{A}_0 + t\boldsymbol{\Theta}$.

Bajo cambios infinitesimales,

$$\mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{A}_1 + \delta \mathbf{A}_1, \quad \mathbf{A}_0 \rightarrow \mathbf{A}_0 + \delta \mathbf{A}_0, \quad (2.43)$$

tenemos que $\boldsymbol{\Theta}$ y $\mathbf{A}_t$ varían como

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\Theta} &= \delta \mathbf{A}_1 - \delta \mathbf{A}_0, \\ \delta \mathbf{A}_t &= \delta \mathbf{A}_0 + t \delta \boldsymbol{\Theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \delta \mathbf{A}_t = \delta \boldsymbol{\Theta}, \end{aligned}$$

de manera que el lagrangeano $L_T^{2n+1}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_0)$ varia como,

$$\delta S_T^{2n+1}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_0) = k(n+1) \int_M (\langle \delta \mathbf{A}_1^a T_a \mathbf{F}_1^n \rangle - \langle \delta \mathbf{A}_0^a T_a \mathbf{F}_0^n \rangle) + \int_{\partial M} \Xi, \quad (2.44)$$

donde

$$\Xi = kn(n+1) \int_0^1 dt \langle \delta \mathbf{A}_t \boldsymbol{\Theta} \mathbf{F}_t^{n-1} \rangle, \quad (2.45)$$

entonces las ecuaciones de campo vienen dadas por,

$$\langle \mathbf{F}_1^n T_a \rangle = 0,$$

$$\langle \mathbf{F}_0^n T_a \rangle = 0,$$

donde T_a , $a = 1, \dots, \dim(\mathfrak{g})$ es una base para el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Las condiciones de borde sobre se obtienen exigiendo la anulación de Ξ sobre ∂M .

$$\Xi|_{\partial M} = \int_0^1 dt \langle \delta \mathbf{A}_t \boldsymbol{\Theta} \mathbf{F}_t^{n-1} \rangle \Big|_{\partial M} = 0. \quad (2.46)$$

Estos resultados nos dicen que la teoría consiste de dos teorías Chern Simons independientes que describen una variedad M y que están ligadas en el borde.



Capítulo 3

Teoría de Gauge extendido

Uno de los problemas fundamentales de la física es encontrar una teoría que permita unificar la interacción gravitacional con las interacciones electromagnéticas y nucleares. Una posible solución para encontrar una teoría unificada viene de la teoría de cuerdas. Muchos modelos en teoría de cuerdas predicen una torre infinita de partículas de espines arbitrarios altos. En particular, en el límite de bajas energías de la teoría de cuerdas abiertas, los estados sin masas pueden ser identificados con los cuantos de Yang-Mills. Por esta razón podría ser de interés saber si estos estados pueden aparecer en el espectro de una teoría cuántica de campos lagrangeana

Esto motiva una generalización de la simetría de Yang-Mills que incluya campos de gauge tensoriales no abelianos, la cual conduce a una generalización de la teoría de campos que incluye en su descripción campos de espín arbitrariamente altos. La idea de extender los campos de gauge a tensores de rango más alto fue usada en Ref. [18] para construir invariantes topológicos en cinco dimensiones que conducen a una densidad invariante de gauge independiente de la métrica, la cual es el análogo cuatridimensional de la densidad Chern-Simons. Estos resultados fueron generalizados en Refs. [1, 2, 10] al caso de mayores dimensiones, encontrando polinomios en las formas de curvatura análogos a las densidades de Chern-Pontryagin, las cuales conducen a densidades invariantes de gauge análogas a las formas Chern-Simons. En este capítulo extenderemos estos resultados de manera que permitan la construcción de formas de Transgresión en dimensiones pares.

3.1. Campos de Gauge extendidos

En ref. [15] la teoría de Yang-Mills fue generalizada introduciendo campos de gauge tensoriales $A_{\mu,\lambda_1\ldots\lambda_s}$ definido como [16],

$$\mathcal{A}_\mu(x, e) = \sum_{s=0}^{\infty} A_{\mu,\lambda_1\ldots\lambda_s}^a T_{a\lambda_1\ldots\lambda_s}, \quad (3.1)$$

donde los índice λ son completamente simétricos y no hay una simetría a priori de μ con λ . $T_{a\lambda_1\ldots\lambda_s}$ son los generadores de un álgebra de Lie llamada álgebra de Lie extendida. Es interesante notar que para el caso de $s = 0$ se tiene el campo de gauge de Yang-Mills usual. Los generadores del álgebra de Lie extendida están definidos sobre vectores conmutativos invariantes bajo traslaciones e_λ [17] tal que $T_a^{\lambda_1\ldots\lambda_s} = e^{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes e^{\lambda_s} T_a$ y $A_\mu^{a\lambda_1\ldots\lambda_s}$ es un tensor de rango $s + 1$ [15]. Estos generadores satisfacen las siguientes relaciones de conmutación [17],

$$[T_a^{\lambda_1\ldots\lambda_n}, T_b^{\lambda_{n+1}\ldots\lambda_s}] = f_{abc} T_c^{\lambda_1\ldots\lambda_s}. \quad (3.2)$$

A partir del campo de gauge extendido (3.1) es posible construir el correspondiente tensor de curvatura extendida, en la forma usual, [16]

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(x, e) = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]. \quad (3.3)$$

A partir de esta definición es posible encontrar “curvaturas” de rango más alto,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \\ F_{\mu\nu,\lambda} &= \partial_\mu A_{\nu,\lambda} - \partial_\nu A_{\mu,\lambda} + [A_\mu, A_{\nu,\lambda}] + [A_{\mu,\lambda}, A_\nu] \\ &\vdots \end{aligned}$$

Los tensores de curvatura son antisimétricos en sus dos primeros índices

$$F_{\mu\nu,\lambda_1\ldots\lambda_s} = -F_{\nu\mu,\lambda_1\ldots\lambda_s}, \quad s = 0, 1, \ldots \quad (3.4)$$

y completamente simétrico en los índices λ . Entonces vemos que el tensor de curvatura de rango dos es justamente el tensor presentado en las teorías de gauge de Yang-Mills. El campo de gauge extendido y curvatura extendida transforman de la misma forma que lo hacen en las teorías de gauge,

$$\mathcal{A}' = U(\xi)\mathcal{A}_\mu U^{-1}(\xi) + U(\xi)\partial_\mu U^{-1}(\xi), \quad (3.5)$$

$$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = U(\xi)\mathcal{F}_{\mu\nu}U^{-1}(\xi), \quad (3.6)$$

con $U(\xi) = \exp(-\xi(x, e))$. En esta teoría no solo hay parámetros escalares de gauge, sino que existe una familia de parámetros de la siguiente forma,

$$\xi(x, e) = \sum_{s=0}^{\infty} \xi^{a\lambda_1 \dots \lambda_s} T_{a\lambda_1 \dots \lambda_s}, \quad (3.7)$$

los cuales son conocidos como parámetros de gauge extendidos [16] y los tensores $\xi^{a\lambda_1 \dots \lambda_s}$ son llamados parámetros tensoriales de gauge de rango s . A partir de las versiones infinitesimales de las transformaciones infinitesimales de (3.5) y (3.6), es posible encontrar la transformación para los campos de gauge tensoriales,

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \xi + [A_\mu, \xi],$$

$$\delta A_{\mu,\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + [A_{\mu,\nu}, \xi] + [A_\mu, \xi_\nu], \quad (3.8)$$

$$\vdots$$

$$\delta F_{\mu\nu} = [F_{\mu\nu}, \xi],$$

$$\delta F_{\mu\nu,\lambda} = [F_{\mu\nu}, \xi_\lambda] + [F_{\mu\nu,\lambda}, \xi], \quad (3.9)$$

$$\vdots$$

De donde vemos que el campo de gauge A_μ y la curvatura $F_{\mu\nu}$ transforman como el campo de gauge y la curvatura de Yang-Mills respectivamente. No es difícil ver que las transformaciones de gauge extendidas forman una estructura algebraica

cerrada [14]. En efecto, para A_μ se encuentra,

$$\begin{aligned} [\delta_\eta, \delta_\xi]A_\mu &= \delta_\eta(\delta_\xi A_\mu) - \delta_\xi(\delta_\eta A_\mu) \\ &= \partial_\mu[\eta, \xi] + [A_\mu, [\eta, \xi]], \end{aligned}$$

definiendo el parámetro $\zeta = [\eta, \xi]$ podemos escribir,

$$[\delta_\eta, \delta_\xi]A_\mu = \partial_\mu \zeta + [A_\mu, \zeta] = \delta_\zeta A_\mu. \quad (3.10)$$

Para el campo de gauge tensorial de segundo rango tenemos,

$$\begin{aligned} [\delta_\eta, \delta_\xi]A_{\mu\nu} &= \delta_\eta(\delta_\xi A_{\mu\nu}) - \delta_\xi(\delta_\eta A_{\mu\nu}) \\ &= \partial_\mu([\eta, \xi_\nu] + [\eta_\nu, \xi]) + [A_\mu, ([\eta, \xi_\nu] + [\eta_\nu, \xi])] + [A_{\mu\nu}, [\eta, \xi]], \end{aligned}$$

definiendo los parámetros de gauge,

$$\widehat{\zeta} = [\eta, \xi], \quad \zeta_\nu = [\eta, \xi_\nu] + [\eta_\nu, \xi], \quad (3.11)$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} [\delta_\eta, \delta_\xi]A_{\mu\nu} &= \partial_\mu \zeta_\nu + [A_\mu, \zeta_\nu] + [A_{\mu\nu}, \widehat{\zeta}] \\ &= \delta_\zeta A_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Del mismo modo puede ser probado que este resultado es valido para todas las transformaciones de gauge extendidas.

A partir de los campos de gauge extendidos y de sus correspondientes curvaturas es posible construir generalizaciones del lagrangeano de Yang-Mills En efecto en refs. [14–16], fue encontrado que

$$\mathcal{L}_{s+1} = -\frac{1}{4} \sum_{i=0}^{2s} a_i^s F^{\mu\nu, \lambda_1 \dots \lambda_i} F_{\mu\nu, \lambda_{i+1} \dots \lambda_{2s}}^a \sum_{P's} \eta^{\lambda_{p_1} \lambda_{p_2}} \dots \eta^{\lambda_{p_{2s-1}} \lambda_{p_{2s}}}, \quad (3.12)$$

donde la suma $\sum_P$ corre sobre todas las permutaciones de $p's$ y los coeficientes numéricos son,

$$a_i^s = \frac{s!}{i!(2s-i)!}. \quad (3.13)$$

De (3.12) vemos que los primeros términos tienen la forma ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_{s=1}^{\infty} g_s \mathcal{L}_s \\ &= -\frac{1}{4} g_1 F^{\mu\nu a} F_{\mu\nu}^a - g_2 \left(\frac{1}{4} F^{\mu\nu, \lambda a} F_{\mu\nu, \lambda}^a - \frac{1}{4} F^{\mu\nu a} F_{\mu\nu, \lambda\lambda}^a \right) - \dots \end{aligned}$$

de donde es directo ver que el termino de $\mathcal{L}_1$ corresponde al lagrangeano de Yang-Mills usual, mientras que el segundo termino $\mathcal{L}_2$ corresponde al lagrangeano para el campo de gauge $A_{\mu, \lambda}$. Es directo ver que cada lagrangeano $\mathcal{L}_s$ es invariante bajo las correspondientes transformaciones (3.9).

En lo que resta de este trabajo consideraremos los campos de gauge vectoriales y tensoriales de segundo orden y por razones de simplicidad, usaremos el lenguaje de formas diferenciales.

Se definen la 1-forma campo de gauge correspondiente al campo de gauge vectorial A_μ como $\mathbf{A} = A_\mu^a T_a dx^\mu$ y la 2-forma “campo de gauge” correspondiente al campo de gauge tensorial $A_{\mu, \nu}$ como $\mathbf{B} = A_{\mu, \nu}^a T_a dx^\mu dx^\nu$. Las correspondientes 2-forma y 3-forma “curvaturas” vienen dadas por $\mathbf{F} = F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ y $\mathbf{H} = F_{\mu\nu, \lambda} dx^\mu dx^\nu dx^\lambda$ respectivamente, donde

$$\mathbf{F} = d\mathbf{A} + \mathbf{A}^2, \quad \mathbf{H} = D\mathbf{B} = d\mathbf{B} + [\mathbf{A}, \mathbf{B}]. \quad (3.14)$$

Es directo demostrar que $\mathbf{F}$ y $\mathbf{H}$ satisfacen las siguientes identidades de Bianchi,

$$D\mathbf{F} = 0, \quad D\mathbf{H} + [\mathbf{B}, \mathbf{F}] = 0. \quad (3.15)$$

En efecto, para $D\mathbf{F}$. Como $\mathbf{F} = d\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{A}$ entonces,

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= d\mathbf{A}\mathbf{A} - \mathbf{A}d\mathbf{A} \\ &= (\mathbf{F} - \mathbf{A}\mathbf{A})\mathbf{A} - \mathbf{A}(\mathbf{F} - \mathbf{A}\mathbf{A}) \\ &= \mathbf{F}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{F} - \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$d\mathbf{F} + [\mathbf{A}, \mathbf{F}] = D\mathbf{F} = 0.$$

Para $D\mathbf{H} + [\mathbf{B}, \mathbf{F}]$. A partir de $\mathbf{H} = d\mathbf{B} + [\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ entonces,

$$\begin{aligned} d\mathbf{H} &= d\mathbf{A}\mathbf{B} - \mathbf{A}d\mathbf{B} - d\mathbf{B}\mathbf{A} - \mathbf{B}d\mathbf{A} \\ &= (\mathbf{F} - \mathbf{A}\mathbf{A})\mathbf{B} - \mathbf{A}(\mathbf{H} - [\mathbf{A}, \mathbf{B}]) - (\mathbf{H} - [\mathbf{A}, \mathbf{B}])\mathbf{A} - \mathbf{B}(\mathbf{F} - \mathbf{A}\mathbf{A}) \\ &= [\mathbf{F}, \mathbf{B}] - [\mathbf{A}, \mathbf{H}] - \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{B} - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{A}, \end{aligned}$$

de manera que

$$d\mathbf{H} + [\mathbf{A}, \mathbf{H}] + [\mathbf{B}, \mathbf{F}] = D\mathbf{H} + [\mathbf{B}, \mathbf{F}] = 0. \quad (3.16)$$

Las variaciones infinitesimales de los campos de gauge (3.8) escrita en el lenguaje de formas diferenciales serán,

$$\delta\mathbf{A} = D\xi_0, \quad (3.17)$$

$$\delta\mathbf{B} = D\xi_1 + [\mathbf{B}, \xi_0], \quad (3.18)$$

donde $\xi_0 = \xi^a T_a$ es una 0-forma parámetro de gauge y $\xi_1 = \xi_\mu^a T_a dx^\mu$ es una 1-forma parámetro de gauge [1]. Del mismo modo las variaciones infinitesimales de las curvaturas (3.9) escrita en el lenguaje de formas diferenciales vienen dadas

por,

$$\delta \mathbf{F} = D(\delta \mathbf{A}) = [\mathbf{F}, \xi_0], \quad (3.19)$$

$$\delta \mathbf{H} = D(\delta \mathbf{B}) + [\delta \mathbf{A}, \mathbf{B}]. \quad (3.20)$$

3.2. Formas tipo Chern-Simons en dimensiones pares

En ref. [18] fue encontrado un invariante topológico en un espacio-tiempo (4+1) dimensional que puede ser construido a partir de una traza y de las 2-formas y 3-formas curvaturas generalizadas,

$$\Gamma = \text{tr}(\mathbf{F}\mathbf{H}). \quad (3.21)$$

Este invariante 5-dimensional posee muchas de las propiedades del invariante topológico de Chern-Pontryagin 4-dimensional

$$\mathcal{P}^4 = \langle \mathbf{F}^2 \rangle = d\mathcal{C}^{2+1}, \quad (3.22)$$

donde

$$\mathcal{C}^{2+1} = \left\langle \mathbf{A}d\mathbf{A} + \frac{2}{3}\mathbf{A}^3 \right\rangle \quad (3.23)$$

es la llamada forma de Chern-Simons en tres dimensiones.

El invariante 5-dimensional Γ es obviamente invariante bajo difeomorfismo y es independiente de la métrica espacio-temporal.

En recientes artículos, refs. [1, 2, 10], estos resultados fueron generalizados en al caso de mayores dimensiones, encontrando que en $(2n+3)$ -dimensiones el citado invariante viene dado por,

$$\Gamma_{2n+3} = \text{tr}(\mathbf{F}^n \mathbf{H}), \quad (3.24)$$

el cuál es una forma cerrada en analogía al invariante de Chern-Pontryagin $\mathcal{P}_{2n+2} = \langle \mathbf{F}^n \rangle$. En efecto,

$$\begin{aligned}
 d\Gamma_{2n+3} &= d \operatorname{tr}(\mathbf{F}^n \mathbf{H}) = \operatorname{tr}(d\mathbf{F}\mathbf{F}^{n-1}\mathbf{H} + \mathbf{F}d\mathbf{F}\mathbf{F}^{n-2}\mathbf{H} + \cdots + \mathbf{F}^{n-1}d\mathbf{F}\mathbf{H} + \mathbf{F}^n d\mathbf{H}) \\
 &= \operatorname{tr}((d\mathbf{F} + [\mathbf{A}, \mathbf{F}])\mathbf{F}^{n-1}\mathbf{H} + \cdots + \mathbf{F}^{n-1}(d\mathbf{F} + [\mathbf{A}, \mathbf{F}])\mathbf{H} + \mathbf{F}^n(d\mathbf{H} + [\mathbf{A}, \mathbf{H}])) \\
 &= \operatorname{tr}(D\mathbf{F}\mathbf{F}^{n-1}\mathbf{H} + \cdots + \mathbf{F}^{n-1}D\mathbf{F}\mathbf{H} + \mathbf{F}^n D\mathbf{H}) \\
 &= \operatorname{tr}(\mathbf{F}^n D\mathbf{H}) = \operatorname{tr}(\mathbf{F}^n(D\mathbf{H} + [\mathbf{B}, \mathbf{H}])) \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Donde hemos hecho uso de la propiedad cíclica de la traza y de las identidades de Bianchi. Esto significa que Γ_{2n+3} son formas localmente cerradas y no son exactas globalmente (ver [2, 10]), por lo cual, del lema de Poincaré sabemos que Γ_{2n+3} puede ser escrita localmente como la derivada exterior de una $2n+2$ -forma. Es decir localmente se tiene,

$$\Gamma_{2n+3} = d\sigma_{2n+2}, \tag{3.26}$$

llamaremos a σ_{2n+2} como la $2n+2$ -forma de Chern-Simons-Savvidy.

Para obtener σ_{2n+2} seguiremos el procedimiento usual utilizado para encontrar formas de Chern-Simons en dimensiones impares.

Puesto que,

$$\delta\mathbf{F} = D(\delta\mathbf{A}), \quad \delta\mathbf{H} = D(\delta\mathbf{B}) + [\delta\mathbf{A}, \mathbf{B}], \tag{3.27}$$

utilizando las identidades de Bianchi y las propiedades de la traza, tenemos que la variación de Γ_{2n+3} es dada por,

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma_{2n+3} &= \delta \operatorname{tr}(\mathbf{F}^n \mathbf{H}) = \operatorname{tr}(\delta \mathbf{F}^n \mathbf{H} + \mathbf{F}^n \delta \mathbf{H}) \\
&= \operatorname{tr}(\delta \mathbf{F} \mathbf{F}^{n-1} \mathbf{H} + \dots + \mathbf{F}^{n-1} \delta \mathbf{F} \mathbf{H} + \mathbf{F}^n \delta \mathbf{H}) \\
&= \operatorname{tr}(D(\delta \mathbf{A}) \mathbf{F}^{n-1} \mathbf{H} + \dots + \mathbf{F}^{n-1} D(\delta \mathbf{A}) \mathbf{H} + \mathbf{F}^n D(\delta \mathbf{B}) + \mathbf{F}^n [\delta \mathbf{A}, \mathbf{B}]) \\
&= \operatorname{tr}(D(\delta \mathbf{A} \mathbf{F}^{n-1} \mathbf{H}) + \delta \mathbf{A} \mathbf{F}^{n-1} D\mathbf{H} + \dots + D(\mathbf{F}^{n-1} \delta \mathbf{A} \mathbf{H}) + \mathbf{F}^{n-1} \delta \mathbf{A} D\mathbf{H} \\
&\quad + \mathbf{F}^n D(\delta \mathbf{B}) + \mathbf{F}^n [\delta \mathbf{A}, \mathbf{B}]) \\
&= \operatorname{tr}(D(\delta \mathbf{A} \mathbf{F}^{n-1} \mathbf{H} + \dots + \mathbf{F}^{n-1} \delta \mathbf{A} \mathbf{H} + \mathbf{F}^n \delta \mathbf{B}) \\
&\quad - \delta \mathbf{A} \mathbf{F}^{n-1} [\mathbf{B}, \mathbf{F}] - \dots - \mathbf{F}^{n-1} \delta \mathbf{A} [\mathbf{B}, \mathbf{F}] - \mathbf{F}^n [\mathbf{B}, \delta \mathbf{A}]) \\
&= d \operatorname{tr}(\delta \mathbf{A} \mathbf{F}^{n-1} \mathbf{H} + \dots + \mathbf{F}^{n-1} \delta \mathbf{A} \mathbf{H} + \mathbf{F}^n \delta \mathbf{B}).
\end{aligned}$$

Introduciendo una familia de parámetros homotópicos t , $0 \leq t \leq 1$, parametrizando los campos de gauge y las correspondientes curvaturas como,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_t &= t\mathbf{A}, & \mathbf{F}_t &= t\mathbf{F} + (t^2 - t)\mathbf{A}^2 = t d\mathbf{A} + t^2 \mathbf{A}^2, \\
\mathbf{B}_t &= t\mathbf{B}, & \mathbf{H}_t &= t\mathbf{H} + (t^2 - t)[\mathbf{A}, \mathbf{H}] = t d\mathbf{B} + t^2 [\mathbf{A}, \mathbf{B}].
\end{aligned}$$

Se encuentra

$$\delta \operatorname{tr}(\mathbf{F}_t^n \mathbf{H}_t) = d \operatorname{tr}(\delta \mathbf{A}_t \mathbf{F}_t^{n-1} \mathbf{H}_t + \dots + \mathbf{F}_t^{n-1} \delta \mathbf{A}_t \mathbf{H}_t + \mathbf{F}_t^n \delta \mathbf{B}_t) \quad (3.28)$$

donde $\delta = (\partial/\partial t)\delta t$. Así tenemos que la $2n+2$ -forma de Chern-Simons-Savvidy viene dada por,

$$\sigma_{2n+2}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \int_0^1 dt \operatorname{tr}(\mathbf{A} \mathbf{F}_t^{n-1} \mathbf{H}_t + \dots + \mathbf{F}_t^{n-1} \mathbf{A} \mathbf{H}_t + \mathbf{F}_t^n \mathbf{B}). \quad (3.29)$$

Resultado análogo a la usual forma de Chern-Simons (2.19) pero en dimensiones pares. Entonces la acción de Chern-Simons-Savvidy será,

$$S = \frac{1}{K^{n^2-2}} \int_{\mathcal{M}_{2n+2}} \sigma_{2n+2}, \quad (3.30)$$

donde K es una constante dimensional [1, 18]. De (3.29) vemos que para $n = 1$ se encuentra,

$$\sigma_4 = \int_0^1 dt \operatorname{tr}(\mathbf{A}\mathbf{H}_t + \mathbf{F}_t\mathbf{B}) = \operatorname{tr}(\mathbf{F}\mathbf{B}). \quad (3.31)$$

Por lo tanto la acción Chern-Simons-Savvidy en cuatro dimensiones escrito con formas diferenciales es dada por,

$$S(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = K \int_{\mathcal{M}^4} \operatorname{tr}(\mathbf{F}\mathbf{B}). \quad (3.32)$$

Es directo probar que la acción (3.32) es invariante, modulo termino de borde, bajo las transformaciones (3.17), (3.18). En efecto, de (3.18) y (3.19) sabemos que $\delta\mathbf{F} = [\mathbf{F}, \boldsymbol{\xi}_0]$ y $\delta\mathbf{B} = D\boldsymbol{\xi}_1 + [\mathbf{B}, \boldsymbol{\xi}_0]$ por lo cuál,

$$\begin{aligned} \delta_{\boldsymbol{\xi}} S &= K \int_{\mathcal{M}^4} \operatorname{tr}(\delta\mathbf{F}\mathbf{B} + \mathbf{F}\delta\mathbf{B}) \\ &= K \int_{\mathcal{M}^4} \operatorname{tr}([\mathbf{F}, \boldsymbol{\xi}_0]\mathbf{B} + \mathbf{F}(D\boldsymbol{\xi}_1 + [\mathbf{B}, \boldsymbol{\xi}_0])) \\ &= K \int_{\mathcal{M}^4} \operatorname{tr}(\mathbf{F}D\boldsymbol{\xi}_1 + [\mathbf{F}, \boldsymbol{\xi}_0]\mathbf{B} + \mathbf{F}[\mathbf{B}, \boldsymbol{\xi}_0]) \\ &= K \int_{\mathcal{M}^4} \operatorname{tr}(D(\mathbf{F}\boldsymbol{\xi}_1)) + \operatorname{tr}([\mathbf{F}\mathbf{B}, \boldsymbol{\xi}_0]) \\ &= K \int_{\mathcal{M}^4} d \operatorname{tr}(\mathbf{F}\boldsymbol{\xi}_1) \\ &= K \int_{\partial\mathcal{M}^4} \operatorname{tr}(\mathbf{F}\boldsymbol{\xi}_1). \end{aligned} \quad (3.33)$$

La acción 4-dimensional (3.32), que llamaremos acción de Chern-Simons-Savvidy, es análoga a la acción de Chern-Simons en tres dimensiones dadas en (2.21). De (3.32) se puede ver que si la curvatura se anula, acción también se anula, esto al parecer solo ocurre cuando se consideran cuatro dimensiones.

La acción 6-dimensional de Chern-Simons-Savvidy puede ser obtenida considerando $n = 2$ en (3.29). En efecto si $n = 2$ en (3.29) se encuentra,

$$\sigma_6(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \left(2\mathbf{A}\mathbf{F}\mathbf{H} + \mathbf{B}\mathbf{F}^2 - \frac{1}{2}(\mathbf{A}^3\mathbf{H} + \mathbf{B}\mathbf{A}^2\mathbf{F} - \mathbf{A}^4\mathbf{B}) \right). \quad (3.34)$$

De manera que si $\mathbf{F} = \mathbf{H} = 0$ en σ_6 vemos que $\sigma_6 = 1/6 \operatorname{tr}(\mathbf{A}^4\mathbf{B})$, término que puede ser considerado análogo al término $\mathbf{A}^5$ de la forma Chern-Simons en cinco dimensiones.

3.3. Transgresiones

Como hemos visto las formas de transgresión fueron introducidas en el contexto del conocido teorema de Chern-Weil. En esta sección introduciremos una forma de transgresión en dimensiones pares. Al igual que en el caso de dimensiones impares, es posible introducir la llamada forma de transgresión a partir del teorema de Chern-Weil. Antes de enunciar el teorema de Chern-Weil generalizado es necesario considerar,

1. Dos 1-forma conexión $\mathbf{A}$ y $\bar{\mathbf{A}}$ valuadas sobre un álgebra de Lie, cuyas correspondientes curvaturas son dadas por,

$$\mathbf{F} = d\mathbf{A} + \mathbf{A}^2,$$

$$\bar{\mathbf{F}} = d\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}}^2.$$

2. Dos 2-forma $\mathbf{B}$ y $\bar{\mathbf{B}}$ también valuadas sobre el álgebra de Lie y sus correspondientes “curvaturas”,

$$\mathbf{H} = d\mathbf{B} + [\mathbf{A}, \mathbf{B}],$$

$$\bar{\mathbf{H}} = d\bar{\mathbf{B}} + [\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}].$$

De manera análoga al caso del teorema de Chern-Weil [11] definimos las diferencias,

$$\Theta = \mathbf{A} - \bar{\mathbf{A}}, \quad \Phi = \mathbf{B} - \bar{\mathbf{B}}, \quad (3.35)$$

a partir de ellas definimos,

$$\mathbf{A}_t = \bar{\mathbf{A}} + t\Theta, \quad \mathbf{B}_t = \bar{\mathbf{B}} + t\Phi. \quad (3.36)$$

Notemos que si $t = 1$ recobramos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, mientras que si $t = 0$ recobramos $\bar{\mathbf{A}}$ y $\bar{\mathbf{B}}$. Las correspondientes curvaturas vienen dadas por,

$$\mathbf{F}_t = d\mathbf{A}_t + \mathbf{A}_t^2, \quad (3.37)$$

$$\mathbf{H}_t = D_t \mathbf{B}_t = d\mathbf{B}_t + [\mathbf{A}_t, \mathbf{B}_t]. \quad (3.38)$$

las cuales satisfacen las condiciones,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{F}_t &= D_t \Theta, \\ \frac{d}{dt} \mathbf{H}_t &= D_t \Phi + [\Theta, \mathbf{B}_t]. \end{aligned}$$

Teorema 2 (Chern-Weil Generalizado) *Sea $\Gamma_{2n+3} = \text{tr}(\mathbf{F}^n \mathbf{H})$ un invariante topológico en $2n + 3$ dimensiones. Entonces:*

1. Γ_{2n+3} es una forma cerrada, es decir $d\Gamma_{2n+3} = 0$.
2. Sean $\mathbf{A}$ y $\bar{\mathbf{A}}$ dos 1-forma conexiones de gauge y $\mathbf{F}$ y $\bar{\mathbf{F}}$ sus correspondientes 2-formas curvaturas. Sean además $\mathbf{B}$ y $\bar{\mathbf{B}}$ dos 2-formas conexiones de gauge y $\mathbf{H}$ y $\bar{\mathbf{H}}$ sus correspondientes 3-formas curvaturas. Entonces la diferencia $\Gamma_{2n+3} - \bar{\Gamma}_{2n+3}$ es una forma exacta.

Es decir

$$\Gamma_{2n+3} - \bar{\Gamma}_{2n+3} = \text{tr}(\mathbf{F}^n \mathbf{H}) - \text{tr}(\bar{\mathbf{F}}^n \bar{\mathbf{H}}) = d\mathcal{T}^{(2n+2)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}), \quad (3.39)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{(2n+2)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}) = & \int_0^1 dt \operatorname{tr} \left(\boldsymbol{\Theta} \mathbf{F}_t^{n-1} \mathbf{H}_t + \mathbf{F}_t \boldsymbol{\Theta} \mathbf{F}_t^{n-2} \mathbf{H}_t + \cdots + \mathbf{F}_t^{n-2} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{F}_t \mathbf{H}_t \right. \\ & \left. + \mathbf{F}_t^{n-1} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{H}_t + \mathbf{F}_t^n \boldsymbol{\Phi} \right). \end{aligned}$$

será llamada forma de transgresión generalizada.

Demostración

1. Ver ecuación (3.25)
2. Calculemos $\Gamma_{2n+3} - \bar{\Gamma}_{2n+3}$. En efecto

$$\begin{aligned} \Gamma_{2n+3} - \bar{\Gamma}_{2n+3} &= \operatorname{tr}(\mathbf{F}^n \mathbf{H}) - \operatorname{tr}(\bar{\mathbf{F}}^n \bar{\mathbf{H}}) \\ &= \int_0^1 dt \frac{d}{dt} \operatorname{tr}(\mathbf{F}_t^n \mathbf{H}_t) \\ &= \int_0^1 dt \operatorname{tr} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{F}_t \mathbf{F}_t^{n-1} \mathbf{H}_t + \mathbf{F}_t \frac{d}{dt} \mathbf{F}_t \mathbf{F}_t^{n-2} \mathbf{H}_t + \right. \\ &\quad \left. \cdots + \mathbf{F}_t^{n-2} \frac{d}{dt} \mathbf{F}_t \mathbf{F}_t \mathbf{H}_t + \mathbf{F}_t^{n-1} \frac{d}{dt} \mathbf{F}_t \mathbf{H}_t + \mathbf{F}_t^n \frac{d}{dt} \mathbf{H}_t \right) \\ &= \int_0^1 dt \operatorname{tr} \left(D_t \boldsymbol{\Theta} \mathbf{F}_t^{n-1} \mathbf{H}_t + \mathbf{F}_t D_t \boldsymbol{\Theta} \mathbf{F}_t^{n-2} \mathbf{H}_t + \right. \\ &\quad \left. \cdots + \mathbf{F}_t^{n-2} D_t \boldsymbol{\Theta} \mathbf{F}_t \mathbf{H}_t + \mathbf{F}_t^{n-1} D_t \boldsymbol{\Theta} \mathbf{H}_t + \mathbf{F}_t^n D_t \boldsymbol{\Phi} + \mathbf{F}_t^n [\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{B}_t] \right) \\ &= \int_0^1 dt \operatorname{tr} \left(\mathbf{F}_t^n D_t \boldsymbol{\Phi} + \mathbf{F}_t^n [\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{B}_t] + \sum_{m=1}^n \mathbf{F}_t^{m-1} D_t \boldsymbol{\Theta} \mathbf{F}_t^{n-m} \mathbf{H}_t \right) \end{aligned}$$

Integrando por partes, tenemos,

$$\sum_{m=1}^n \operatorname{tr}(\mathbf{F}_t^{m-1} D_t \boldsymbol{\Theta} \mathbf{F}_t^{n-1} \mathbf{H}_t) = \sum_{m=1}^n \operatorname{tr} \left(D_t (\mathbf{F}_t^{m-1} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{F}_t^{n-m} \mathbf{H}_t) + \mathbf{F}_t^{m-1} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{F}_t^{n-m} [\mathbf{F}_t, \mathbf{B}] \right)$$

de manera que,

$$\begin{aligned}
\text{tr}(\mathbf{F}^n \mathbf{H}) - \text{tr}(\bar{\mathbf{F}}^n \bar{\mathbf{H}}) &= \int_0^1 dt \text{tr} \left(D_t \left(\mathbf{F}_t^n \Phi + \sum_{m=1}^n \mathbf{F}_t^{m-1} \Theta \mathbf{F}_t^{n-m} \mathbf{H}_t \right) \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{F}_t^n [\Theta, \mathbf{B}_t] + \sum_{m=1}^n \mathbf{F}_t^{m-1} \Theta \mathbf{F}_t^{n-m} [\mathbf{B}_t, \mathbf{F}_t] \right). \\
&= \int_0^1 dt \text{tr} \left(D_t (\Theta \mathbf{F}_t^{n-1} \mathbf{H}_t + \mathbf{F}_t \Theta \mathbf{F}_t^{n-1} \mathbf{H}_t \right. \\
&\quad \left. + \cdots + \mathbf{F}_t^{n-2} \Theta \mathbf{F}_t \mathbf{H}_t + \mathbf{F}_t^{n-1} \Theta \mathbf{H}_t) + \mathbf{F}_t^n \Theta + \Theta \mathbf{F}_t^{n-1} [\mathbf{F}_t, \mathbf{B}] \right. \\
&\quad \left. + \Theta \mathbf{F}_t^{n-1} [\mathbf{F}_t, \mathbf{B}] + \mathbf{F}_t \Theta \mathbf{F}_t^{n-2} [\mathbf{F}_t, \mathbf{B}] + \cdots + \mathbf{F}_t^{n-1} \Theta [\mathbf{F}_t, \mathbf{B}_t] \right)
\end{aligned}$$

Es posible demostrar ¹ que,

$$\begin{aligned}
&\text{tr} \left(\mathbf{F}_t^n [\Theta, \mathbf{B}_t] + \sum_{m=1}^n \mathbf{F}_t^{m-1} \Theta \mathbf{F}_t^{n-m} [\mathbf{B}_t, \mathbf{F}_t] \right) = \text{tr} \left(\mathbf{F}_t^n [\Theta, \mathbf{B}_t] + \Theta \mathbf{F}_t^{n-1} [\mathbf{B}_t, \mathbf{F}_t] \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{F}_t \Theta \mathbf{F}_t^{n-2} [\mathbf{B}_t, \mathbf{F}_t] + \mathbf{F}_t^2 \Theta \mathbf{F}_t^{n-3} [\mathbf{B}_t, \mathbf{F}_t] + \cdots + \mathbf{F}_t^{n-3} \Theta \mathbf{F}_t^2 [\mathbf{B}_t, \mathbf{F}_t] \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{F}_t^{n-2} \Theta \mathbf{F}_t [\mathbf{B}_t, \mathbf{F}_t] + \mathbf{F}_t^{n-1} \Theta \mathbf{F}_t [\mathbf{B}_t, \mathbf{F}_t] \right) \\
&= - \text{tr} ([\mathbf{B}_t, \Theta \mathbf{F}_t^n]).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\text{tr}(\mathbf{F}^n \mathbf{H}) - \text{tr}(\bar{\mathbf{B}}^n \bar{\mathbf{H}}) = d \int_0^1 dt \text{tr} \left(\mathbf{F}_t^n \Phi + \sum_{m=1}^n \mathbf{F}_t^{m-1} \Theta \mathbf{F}_t^{n-m} \mathbf{H}_t \right).$$

Definiendo la $(2n+2)$ -forma de transgresión generalizada como,

$$\mathcal{T}^{(2n+2)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}) = \int_0^1 dt \text{tr} \left(\mathbf{F}_t^n \Phi + \sum_{m=1}^n \mathbf{F}_t^{m-1} \Theta \mathbf{F}_t^{n-m} \mathbf{H}_t \right), \quad (3.41)$$

¹Sea $\mathbf{M}$ una M -forma valuada sobre el álgebra de Lie y $\mathbf{N}_i$ una N_i -forma también valuada sobre el álgebra de Lie. Entonces,

$$[\mathbf{M}, \mathbf{N}_1 \cdots \mathbf{N}_n] = \sum_{i=1}^n (-1)^{M(N_1 + \cdots + N_{i-1})} \mathbf{N}_1 \cdots \mathbf{N}_{i-1} [\mathbf{M}, \mathbf{N}_i] \mathbf{N}_{i+1} \cdots \mathbf{N}_n. \quad (3.40)$$

tenemos

$$\Gamma_{2n+3} - \bar{\Gamma}_{2n+3} = d\mathcal{T}^{(2n+2)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}). \quad \square \quad (3.42)$$

Continuando con el procedimiento seguido para el caso de las usuales formas de Chern-Simons, definimos la $(2n + 2)$ –forma de Chern-Simons generalizada que llamaremos $(2n + 2)$ –forma de Chern-Simons-Savvidy como,

$$\begin{aligned} \sigma^{2n+2} &= \mathcal{T}^{(2n+2)}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 0, 0) \\ &= \int_0^1 dt \operatorname{tr} \left(\mathbf{F}_t^n \mathbf{B} + \sum_{m=1}^n \mathbf{F}_t^{m-1} \mathbf{A} \mathbf{F}_t^{n-m} \mathbf{H}_t \right), \end{aligned}$$

resultado que coincide plenamente con la expresión (3.29) encontrada por Savvidy [1, 2, 10].

En esta tesis estamos interesados en el caso 4-dimensional, es decir cuando $n = 1$. En este caso se tiene

$$\sigma_{ChSS} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(\mathbf{A} \left(\mathbf{H} - \frac{1}{3} [\mathbf{A}, \mathbf{B}] \right) \right) + \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(\mathbf{B} \left(\mathbf{F} - \frac{1}{6} [\mathbf{A}, \mathbf{A}] \right) \right). \quad (3.43)$$

Puesto que el objetivo de esta tesis es construir una acción 4-dimensional para la interacción gravitacional basada en una forma Chern-Simons invariante bajo el álgebra de Maxwell, debemos estudiar ahora un procedimiento desarrollado por D'Auria en Ref. [3] y aplicada en refs. [5, 12], que permite expresar p –formas en función de 1–formas.

Capítulo 4

Álgebras diferenciales libres y formas compuestas

Los métodos de la teoría de álgebras de Lie son apropiados para el estudio de la teoría de gauge. Sin embargo existen teorías tales como supergravedad en dimensiones mayores que cinco o supercuerdas que contienen campos tensoriales, los cuales no pueden ser identificados con el generador de un grupo de Lie.

Esta situación conduce a la pregunta si el concepto de álgebra de Lie puede ser extendido de manera tal que pueda acomodar formas de grado mayor que uno.

La respuesta a la pregunta es si y la estructura más general que generaliza el concepto de álgebra de Lie es el concepto “álgebra diferencial libre”. Esto permite mostrar que la variedad de un grupo puede ser extendida al caso donde el álgebra de Lie es reemplazada por un “álgebra diferencial libre”. Para introducir el concepto de “álgebra diferencial libre” se comienza con la formulación dual de un álgebra de Lie dada por la ecuación de Maurer-Cartan y luego es extendida al caso de p -formas con $p > 1$.

4.1. Ecuación de Maurer-Cartan

Si $\{\omega^i\}$, $i = 1, 2, \dots, \dim \mathfrak{g}^*$, es una base de 1-formas invariantes izquierdas en $T_e^*(\mathcal{G})$, entonces la 2-forma $d\omega^i$ es también invariante izquierda.

Si $d\omega^i$ es una 2-forma invariante izquierda, entonces ella puede ser expandida en

la base 2-formas $\{\omega^i \wedge \omega^j\}$. En efecto,

$$d\omega^i = -\frac{1}{2}C_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k,$$

donde las funciones C_{jk}^i son constantes. Estas ecuaciones son conocida como ecuación de Maurer-Cartan para 1-formas invariantes izquierdas.

Álgebras de Lie: El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, de campos vectoriales invariantes izquierdos sobre $\mathcal{G}$ es llamada álgebra de Lie del grupo $\mathcal{G}$. Sea $\{T_i\}$, $i = 1, 2, \dots, \dim \mathfrak{g}$ una base de vectores invariantes, entonces el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es

$$[T_i, T_j] = C_{ij}^k T_k, \quad (4.1)$$

donde C_{ij}^k son las llamadas constantes de estructura de $\mathfrak{g}$.

Teorema 3 *Las ecuaciones de Maurer Cartan*

$$d\omega^i = -\frac{1}{2}C_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k,$$

son la formulación dual del álgebra de Lie

$$[T_i, T_j] = C_{ij}^k T_k. \quad (4.2)$$

De manera que la ecuación de Maurer-Cartan es la usual álgebra de Lie formulada en términos de 1-formas, lo cual significa que el contenido de las ecuaciones de Maurer-Cartan es completamente equivalente al de las ecuaciones $[T_i, T_j] = C_{ij}^k T_k$. La identidad de Jacobi para las constantes de estructura puede ser obtenida a partir de la condición de integrabilidad $d^2 = 0$ para las ecuaciones de Maurer-Cartan. En efecto, dado que $d\omega^i = -1/2 C_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k$ tenemos que tomando la derivada exterior se encuentra,

$$d^2\omega^i = -\frac{1}{2}C_{jk}^i d(\omega^j \wedge \omega^k) \quad (4.3)$$

de donde vemos que $C_{jk}^i d\omega^j \wedge \omega^k = 0$, por lo que

$$C_{jk}^i C_{lm}^j \omega^l \wedge \omega^m \wedge \omega^k = 0,$$

teniendo en cuenta la antisimetría de $\omega^l \wedge \omega^m \wedge \omega^k$ podemos escribir,

$$C_{j[k}^i C_{lm]}^j = 0, \quad (4.4)$$

la cuál es la identidad de Jacobi.

Las álgebras diferenciales libres proporcionan una generalización de las ecuaciones de Maurer-Cartan al caso de p -formas. Sin embargo una álgebra diferencial libre no es la versión dual de una álgebra de Lie. Por esta razón si se le quiere dar una interpretación de álgebra de Lie a las p -formas que satisfacen las álgebras diferenciales libres, es necesario poder construir las p -formas como combinación de 1-formas que si satisfacen la ecuación de Maurer-Cartan.

Considerar álgebras de Lie duales tiene dos ventajas: (i) ellas pueden ser extendidas de manera natural al caso de p -formas con $p > 1$. Esto conduce a una extensión del concepto de álgebra (ii) ellas tratan con formas en lugar de vectores tangentes.

4.2. Álgebras Diferenciales Libres

El concepto de álgebra diferencial libre (FDA por sus siglas en inglés) es la más amplia generalización posible del concepto de álgebra de Lie. Para introducir el concepto de “álgebra diferencial libre” consideraremos la formulación dual de álgebra de Lie dada por la ecuación de Maurer-Cartan.

Sea M una variedad arbitraria y sea $\{\Theta^{A(p)}\}$ un conjunto de formas exteriores definidas sobre M , rotulados por el índice A y por el grado p el cuál puede ser diferente para diferentes valores de A .

Si el conjunto $\{\Theta^{A(p)}\}$ forma una base, entonces $\Theta^{A(p)}$ puede ser expandida como

una combinación de los elementos de la base, lo cual conduce a escribir la “ecuación de Maurer-Cartan-generalizada” en la siguiente forma,

$$d\Theta^{A(p)} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} C_{B_1(p_1)\dots B_n(p_n)}^{A(p)} \Theta^{B_1(p_1)} \wedge \dots \wedge \Theta^{B_n(p_n)} = 0, \quad (4.5)$$

donde $C_{B_1(p_1)\dots B_n(p_n)}^{A(p)}$ son las llamadas constantes de estructura generalizadas y donde $N = p_{\max} + 1$, siendo $p_{\max}$ el grado máximo del conjunto $\{\Theta^{A(p)}\}$.

La simetría de $C_{B_1(p_1)\dots B_n(p_n)}^{A(p)}$ es inducida por la permutación de las formas Θ en el producto cuña. En realidad las constantes de estructura tienen la mismas simetría que las que son inducidas por la permutación de las formas Θ en el producto cuña.

Las constantes de estructura generalizada son distinta de cero sólo si

$$p_1 + \dots + p_n = p_{\max} + 1.$$

Por consistencia se debe satisfacer $d^2 = 0$, lo que conduce a las siguientes condiciones de integrabilidad,

$$\begin{aligned} d^2\Theta^{A(p)} = & - \sum_{n,m=1}^N C_{B_1(p_1)\dots B_n(p_n)}^{A(p)} C_{D_1(q_1)\dots D_m(q_m)}^{B_1(p_1)} \Theta^{D_1(q_1)} \wedge \dots \wedge \Theta^{D_m(q_m)} \\ & \wedge \Theta^{B_2(p_2)} \wedge \dots \wedge \Theta^{B_n(p_n)} = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

esta condición es análoga a las identidades de Jacobi de un álgebra de Lie usual. Notemos que el álgebra de Lie ordinaria puede ser reobtenida cuando todas las formas Θ tienen grado $p = 1$.

4.3. Formalismo de D’Auria-Fre

Hemos visto que la ecuación de Maurer-Cartan $d\omega^i = -\frac{1}{2}C_{jk}^i\omega^j \wedge \omega^k$ implica la ecuación $[T_i, T_j] = C_{ij}^k T_k$ y vice-versa. Del mismo modo la ecuación $dd\omega^i = 0$ implica la identidad de Jacobi $C_{j[k}^i C_{lm]}^j = 0$ y vice-versa. Estas dos maneras de describir

un álgebra de Lie son totalmente equivalentes, aunque la primera $([T_i, T_j] = C_{ij}^k T_k)$ es la más usada en física. Sin embargo la segunda $d\omega^i = -\frac{1}{2}C_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k$ es mas apropiada para el estudio de teorías gravitacionales. Puesto que el objetivo en el método de Maurer-Cartan es la construcción de una acción para potenciales asociados a un grupo, entonces si partimos con las ecuaciones de Maurer-Cartan se tiene que la transición a los potenciales es llevada a cabo reemplazando las 1-formas ω^i que satisfacen $d\omega^i + \frac{1}{2}C_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k = 0$ por un conjunto de 1-formas A^A (las cuales son potenciales de gauge asociados a un grupo) que no satisfacen la ecuación anterior, sino que la ecuación,

$$dA^A + \frac{1}{2}C_{BC}^A A^B A^C = F^A, \quad (4.7)$$

la cuál expresa la desviación de las ecuaciones de Maurer-Cartan y define la llamada curvatura de A^A .

Consideremos de nuevo un álgebra diferencial libre. Es posible extender todos los concepto asociados al método de “variedad de grupo” al caso de las álgebras diferenciales libres.

Potenciales FDA

Un conjunto $\{\Theta^{A(p)}\}$ que satisface,

$$d\Theta^{A(p)} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} C_{B_1(p_1) \dots B_n(p_n)}^{A(p)} \Theta^{B_1(p_1)} \wedge \dots \wedge \Theta^{B_n(p_n)} = 0, \quad (4.8)$$

es llamado un conjunto base invariante izquierdo. Un nuevo conjunto de formas $\{\Pi^{A(p)}\}$ que no satisface la ecuación anterior es llamado un “conjunto suave”. $\{\Pi^{A(p)}\}$ puede ser visto como los potenciales de Yang-Mills del álgebra diferencial libre, en la misma forma como A^A son los potenciales de Yang-Mills del grupo ordinario el cual es descrito por las ecuaciones de Maurer-Cartan.

Curvatura, Identidades de Bianchi y Derivadas Covariantes asociadas a FDS

Dado el conjunto $\{\Pi^{A(p)}\}$, se tiene que la desviación de (4.8) son llamadas curvaturas de los potenciales $\Pi^{A(p)}$,

$$F^{A(p+1)} = d\Pi^{A(p)} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} C_{B_1(p_1)\dots B_n(p_n)}^{A(p)} \Pi^{B_1(p_1)} \wedge \dots \wedge \Pi^{B_n(p_n)} \neq 0, \quad (4.9)$$

los cuales son campos análogos a los campos de gauge de las álgebras de Lie, agregando curvaturas a las ecuaciones de Maurer-Cartan generalizadas, donde los campo $\Pi^{A(p)}$ es un conjunto de p -formas de varios rangos.

La condición (4.6), conocida como identidad de Jacobi, conduce a una identidad diferencial sobre la curvatura conocida como identidad de Bianchi,

$$\nabla F^{A(p+1)} = dF^{A(p+1)} + \sum_{n=1}^N C_{B_1(p_1)\dots B_n(p_n)}^{A(p)} F^{B_1(p_1)} \wedge \Pi^{B_2(p_2)} \wedge \dots \wedge \Pi^{B_n(p_n)} = 0.$$

Si $H^{A(p+1)}$ es un conjunto de $(p+1)$ -formas, entonces la combinación,

$$\nabla H^{A(p+1)} = dH^{A(p+1)} + \sum_{n=1}^N C_{B_1(p_1)\dots B_n(p_n)}^{A(p)} H^{B_1(p_1)} \wedge \Pi^{B_2(p_2)} \wedge \dots \wedge \Pi^{B_n(p_n)}, \quad (4.10)$$

es llamada “derivada covariante” adjunta de $H^{A(p+1)}$. Con esta definición la identidad de Bianchi establece que la derivada covariante adjunta de la curvatura es cero tal como sucede con los grupos de Lie.

4.4. Formas Compuestas

La pregunta ¿Es un álgebra diferencial libre reducible a un grupo ordinario? Es de gran interés para los objetivos de esta tesis.

Esta pregunta aparece de manera natural cuando se intenta identificar la variedad M sobre la cual las formas invariantes izquierda $\Theta^{A(p)}$ o sus análogos $\Pi^{A(p)}$ están

definidas.

Puesto que hasta ahora la dimensión de M no ha sido fijada, se tiene que no se sabe cuantos vectores tangentes independientes T_a pueden ser proyectados sobre ecuaciones de Maurer-Cartan generalizadas. Las preguntas naturales que aparecen en este contexto son [3],

1. ¿Existe una variedad M de dimensión mínima $d = \dim M$ que admite las formas $\Theta^{A(p)}$?
2. ¿Existe una base de $T(M)$ compuesta de vectores tangentes invariantes izquierdos que satisfacen $[T_i, T_j] = C_{ij}^k T_k$, tales que el valor que toma $\Theta^{A(p)}$ al actuar sobre p vectores tangentes T_a es una constante

$$\Theta^{A(p)}(T_{a_1}, \dots, T_{a_p}) = \frac{1}{p} K_{a_1 \dots a_p}^{A(p)} ?$$

Si la respuesta a estas dos preguntas fuese “sí”, entonces la variedad será un grupo de Lie ordinario y las ecuaciones de Maurer-Cartan generalizadas serán exactamente las de un álgebra de Lie.

La manera más apropiada de responder esta pregunta es considerar la descripción dual del álgebra de Lie, es decir en términos de 1-formas invariantes izquierdas. El problema puede ser formalizado como sigue.

A partir de

$$\Theta^{A(p)}(T_{a_1}, \dots, T_{a_p}) = \frac{1}{p} K_{a_1 \dots a_p}^{A(p)},$$

podemos escribir

$$\Theta^{A(p)} = \frac{1}{p} K_{a_1 a_2 \dots a_p}^{A(p)} \omega^{a_1} \wedge \omega^{a_2} \wedge \dots \wedge \omega^{a_p},$$

donde $K_{a_1 a_2 \dots a_p}^{A(p)}$ son constantes. Por otro lados tenemos,

$$d\omega^a + \frac{1}{2} C_{bc}^a \omega^b \wedge \omega^c = 0.$$

Las constantes $K_{a_1 a_2 \dots a_p}^{A(p)}$ y C_{bc}^a deben satisfacer las siguientes condiciones [3],

1. La identidad de Jacobi sobre C_{bc}^a ,

$$dd\omega^a = -\frac{1}{2}C_{bc}^a C_{fg}^b \omega^f \wedge \omega^g \wedge \omega^c = 0. \quad (4.11)$$

2. La equivalencia con las ecuaciones de Maurer-Cartan generalizadas

$$\begin{aligned} d\Theta^{A(p)} &= \frac{1}{p} K_{a_1 \dots a_p}^{A(p)} d(\omega^{a_1} \wedge \dots \wedge \omega^{a_p}) \\ &= K_{a_1 \dots a_p}^{A(p)} d\omega^{a_1} \wedge \dots \wedge \omega^{a_p} \\ &= K_{a_1 a_2 \dots a_p}^{A(p)} \left(-\frac{1}{2} C_{bc}^{a_1} \omega^b \wedge \omega^c \right) \wedge \dots \wedge \omega^{a_p} \\ &= -\frac{1}{2} K_{a_1 a_2 \dots a_p}^{A(p)} C_{bc}^{a_1} \omega^b \wedge \omega^c \wedge \omega^{a_2} \wedge \dots \wedge \omega^{a_p}. \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos

$$d\Theta^{A(p)} = -\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} C_{B_1(p_1) \dots B_n(p_n)}^{A(p)} \Theta^{B_1(p_1)} \wedge \dots \wedge \Theta^{B_n(p_n)}, \quad (4.12)$$

donde ahora,

$$\begin{aligned} \Theta^{B_1(p_1)} &= \frac{1}{p_1} K_{b_1^1 b_2^1 \dots b_{p_1}^1}^{B_1(p_1)} \omega^{b_1^1} \wedge \omega^{b_2^1} \wedge \dots \wedge \omega^{b_{p_1}^1}, \\ \Theta^{B_2(p_2)} &= \frac{1}{p_2} K_{b_1^2 b_2^2 \dots b_{p_2}^2}^{B_2(p_2)} \omega^{b_1^2} \wedge \omega^{b_2^2} \wedge \dots \wedge \omega^{b_{p_2}^2}, \\ &\vdots \\ \Theta^{B_n(p_n)} &= \frac{1}{p_n} K_{b_1^n b_2^n \dots b_{p_n}^n}^{B_n(p_n)} \omega^{b_1^n} \wedge \omega^{b_2^n} \wedge \dots \wedge \omega^{b_{p_n}^n}. \end{aligned}$$

Cualquier solución de estas ecuaciones algebraicas en los coeficientes C_{bc}^a y $K_{a_1 a_2 \dots a_p}^{A(p)}$ conduce a interpretar la álgebra diferencial libre como un grupo y reduce la teoría sobre una variedad FDA a una teoría sobre la variedad de un grupo ordinario. Sin embargo lo que no se garantiza es que las soluciones de las ecuaciones (4.11) y (4.12) sea única.

Capítulo 5

Formas de Chern-Simons-Savvidy para el álgebra de Maxwell $\mathfrak{B}_4$

Hemos visto que la acción de Chern-Simons-Savvidy en cuatro dimensiones es dada por,

$$\begin{aligned} S_{ChSS}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= K \int_{\mathcal{M}^4} \text{tr}(\mathbf{F}\mathbf{B}) \\ &= K \int_{\mathcal{M}^4} \frac{1}{2} \text{tr} \left(\mathbf{A} \left(\mathbf{H} - \frac{1}{3}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \right) + \mathbf{B} \left(\mathbf{F} - \frac{1}{6}[\mathbf{A}, \mathbf{A}] \right) \right) \end{aligned} \quad (5.1)$$

la cual es invariante bajo las transformaciones de gauge (3.17), (3.18), modulo termino de borde. En este capítulo evaluaremos esta acción 4-dimensional en el álgebra de Maxwell $\mathfrak{B}_4$.

5.1. Álgebra de Maxwell

Las llamadas álgebras de Maxwell fueron introducidas a principios de los setentas en ref [4, 19] como álgebras que codifican las simetrías de una partícula moviéndose en un campo electromagnético constante. Los generadores del álgebra son dados por $\{P_a, J_{ab}, Z_{ab}\}$, donde $Z_{ab} = -Z_{ba}$ es un generador abeliano, que en este contexto puede ser interpretado como el tensor electromagnético constante. Estos generadores satisfacen las siguientes relaciones de conmutación, las cuales coinciden con las relaciones de conmutación de la llamada álgebra de $\mathfrak{B}_4$

introducidas, en otro contexto , en Refs [9, 13],

$$\begin{aligned}
[P_a, P_b] &= Z_{ab}, \\
[J_{ab}, P_c] &= \eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b, \\
[J_{ab}, J_{cd}] &= \eta_{bc}J_{ad} + \eta_{ad}J_{bc} - \eta_{ac}J_{bd} - \eta_{bd}J_{ac}, \\
[J_{ab}, Z_{cd}] &= \eta_{bc}Z_{ad} + \eta_{ad}Z_{bc} - \eta_{ac}Z_{bd} - \eta_{bd}Z_{ac}.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Con el propósito de obtener un lagrangeano Chern-Simons-Savvidy cuatridimensional para el álgebra de Maxwell comenzamos con las formas conexiones de gauge $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ evaluadas sobre el álgebra $\mathfrak{B}_4$ y formas curvaturas asociadas.

Para la 1-forma conexión de gauge $\mathbf{A}$ tenemos,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{l}e^a P_a + \frac{1}{2}\omega^{ab} J_{ab} + \frac{1}{2}k^{ab} Z_{ab}, \tag{5.3}$$

donde e^a y ω^{ab} son la 1-forma vielbein y la 1-forma conexión de spin respectivamente. La 1-forma k^{ab} es un campo bosónico antisimétrico. La correspondiente 2-forma curvatura $\mathbf{F} = d\mathbf{A} + \frac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{A}]$ es dada por,

$$\mathbf{F} = \frac{1}{l}T^a P_a + \frac{1}{2}R^{ab} J_{ab} + \frac{1}{2}F^{ab} Z_{ab}, \tag{5.4}$$

donde,

$$\begin{aligned}
T^a &= de^a + \omega_b^a e^b, \\
R^{ab} &= d\omega^{ab} + \omega_c^a \omega^{cb}, \\
F^{ab} &= D_\omega k^{ab} + \frac{1}{l^2}e^a e^b.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Bajo una transformación de gauge infinitesimal con parámetro de gauge $\boldsymbol{\lambda}$ dado por,

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{l}\lambda^a P_a + \frac{1}{2}\lambda^{ab} J_{ab} + \frac{1}{2}\rho^{ab} Z_{ab}, \tag{5.6}$$

se encuentra las 2-formas curvaturas transforman como,

$$\begin{aligned}\delta_\lambda T^a &= \frac{1}{l^2} T^b \lambda_b^a + \frac{1}{l} R_b^a \lambda^b, \\ \delta_\lambda R^{ab} &= R_c^a \lambda^{cb} - R_c^b \lambda^{ca}, \\ \delta_\lambda F^{ab} &= R_c^a \rho^{cb} - R_c^b \rho^{ca} + F_c^a \lambda^{cb} - F_c^b \lambda^{ca} + \frac{1}{l^2} (T^a \lambda^b - T^b \lambda^a).\end{aligned}$$

donde hemos usado el conocido resultado $\delta_\lambda \mathbf{F} = [\mathbf{F}, \boldsymbol{\lambda}]$.

Las ecuaciones (5.5) corresponden a las ecuaciones (4.7) para el álgebra de Maxwell. Por lo tanto si anulamos las curvaturas $T^a = R^{ab} = F^{ab} = 0$ se encuentra

$$de^a + \omega_b^a e^b = 0, \quad (5.7)$$

$$d\omega^{ab} + \omega_c^a \omega^{cb} = 0, \quad (5.8)$$

$$D_\omega k^{ab} + \frac{1}{l^2} e^a e^b = 0. \quad (5.9)$$

los cuales son las ecuaciones de Maurer-Cartan para el álgebra de Maxwell.

5.2. 2-forma $\mathbf{B}$ para el álgebra $\mathfrak{B}_4$

Para la 2-formas conexión de gauge $\mathbf{B} = B^a T_a$ tenemos,

$$\mathbf{B} = B^a P_a + \frac{1}{2} B^{ab} J_{ab} + \frac{1}{2} \beta^{ab} Z_{ab}, \quad (5.10)$$

donde B^a , B^{ab} , β^{ab} son 2-formas que debemos determinar. La correspondiente 3-forma curvatura $\mathbf{H} = D\mathbf{B} = d\mathbf{B} + [\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ es dada por,

$$\mathbf{H} = H^a P_a + \frac{1}{2} H^{ab} J_{ab} + \frac{1}{2} \Xi^{ab} Z_{ab}$$

donde,

$$H^a = D_\omega B^a - \frac{1}{l} B_b^a e^b, \quad (5.11)$$

$$H^{ab} = D_\omega B^{ab}, \quad (5.12)$$

$$\Xi^{ab} = D_\omega \beta^{ab} + k_c^a B^{cb} + k_c^b B^{ac} + \frac{1}{l} [e^a B^b - e^b B^a]. \quad (5.13)$$

Estas ecuaciones son análogas a las ecuaciones (4.9), por lo que no representan un álgebra diferencial libre.

Hemos visto que es posible interpretar una FDA como un grupo de Lie y reducir una teoría sobre una variedad FDA a una teoría sobre la variedad de grupo de Lie. Esto significa que un conjunto de p -formas que satisfacen una FDA pueden ser expresadas como combinaciones de 1-forma que satisfacen las ecuaciones de Maurer-Cartan. Estas combinaciones no son arbitrarias, sino que tienen que satisfacer las ecuaciones (4.11) y (4.12).

En nuestro caso esto significar expresar las componentes de la 2-forma $\mathbf{B}$ como combinación de las 1-forma $\{e^a, \omega^{ab}, k^{ab}\}$ del álgebra de Maxwell $\mathfrak{B}_4$, de tal manera que satisfaga el álgebra diferencial libre obtenida al considerar $\mathbf{H} = 0$. Estos nos permitirá construir el lagrangeano de Chern-Simons-Savvidy en cuatro dimensiones.

Para expresar las 2-formas B^a, B^{ab}, β^{ab} como combinaciones de las 1-formas e^a, ω^{ab}, k^{ab} postulamos lo siguiente siguiendo a las refs. [3, 5],

$$B^a = \frac{a_1}{2l} \omega_b^a e^b + \frac{a_2}{2l} k_b^a e^b, \quad (5.14)$$

$$B^{ab} = \frac{b_1}{2l^2} e^a e^b + \frac{b_2}{2} \omega_c^a k^{cb} + \frac{b_3}{2} k_c^a k^{cb} + \frac{b_4}{2} \omega_c^a \omega^{cb}, \quad (5.15)$$

$$\beta^{ab} = \frac{c_1}{2l^2} e^a e^b + \frac{c_2}{2} \omega_c^a k^{cb} + \frac{c_3}{2} k_c^a k^{cb} + \frac{c_4}{2} \omega_c^a \omega^{cb}, \quad (5.16)$$

donde $a_1, a_2, b_1, \dots, b_4, c_1, \dots, c_4$ son constantes arbitrarias.

Con el objetivo de obtener el FDA que deben satisfacer los campos B^a, B^{ab} y β^{ab} de manera que puedan ser escritos como combinacion de los campos $\{e^a, \omega^{ab}, k^{ab}\}$

calcularemos primero las 3-formas curvatura. Entonces evaluando los campos en las curvaturas dadas por (5.11), (5.12), (5.13) tenemos que estas son dadas por,

$$H^a = \frac{a_1}{2l}(R_b^a e^b - \omega_b^a T^b) + \frac{a_2}{2l}(F_b^a e^b - k_b^a T^b) - \frac{1}{2l^3}(a_2 + b_1)e^a e^c e^b \eta_{cb} \quad (5.17)$$

$$+ \frac{1}{2l}(a_1 - b_4)\omega_c^a \omega_b^c e^b - \frac{b_2}{2l}\omega_c^a k_b^c e^b - \frac{b_3}{2l}k_c^a k_b^c e^b, \\ H^{ab} = \frac{b_1}{2l^2}(T^a e^b - e^a T^b) + \frac{b_4}{2}(R_c^a \omega^{cb} - \omega_c^a R^{cb}) + \frac{b_2}{2}(R_c^a k^{cb} - \omega_c^a F^{cb} \\ + \omega_{cd}\omega^{ad}k^{cb} + \frac{1}{l^2}\omega_c^a e^c e^b) + \frac{b_3}{2}\left(F_c^a k^{cb} - k_c^a F^{cb} - \frac{1}{l^2}e^a e^c k_c^b + \frac{1}{l^2}k_c^a e^c e^b\right), \quad (5.18)$$

$$\Xi^{ab} = \frac{c_1}{2l^2}(T^a e^b - e^a T^b) + \frac{c_2}{2}(R_c^a k^{cb} - \omega_c^a F^{cb}) + \frac{c_3}{2}(F_c^a k^{cb} - k_c^a F^{cb}) \\ + \frac{c_4}{2}(R_c^a \omega^{cb} - \omega_c^a R^{cb}) + \frac{1}{2}(c_2 - 2b_4)\omega_{cd}\omega^{ad}k^{cb} + \frac{1}{l^2}(c_2 - 2a_1)\omega_c^a e^c e^d \\ - \frac{1}{2l^2}(a_2 - c_3 - b_1)e^a e^c k_c^b - \frac{1}{2l^2}(a_2 - c_3 - b_1)k_c^a e^c e^b + \frac{b_2}{2}(k_c^a \omega_d^c k^{db} + k_c^b \omega_d^a k^{dc}). \quad (5.19)$$

Dado que el FDA se obtiene al considerar $\mathbf{F} = 0$ y $\mathbf{H} = 0$, las curvaturas (5.17), (5.18) y (5.19) deben satisfacer,

$$0 = \frac{1}{2l}(a_1 - b_4)\omega_c^a \omega_b^c e^b - \frac{1}{2l^2}(a_2 + b_1)e^a e^c e^b \eta_{ab} - \frac{b_2}{2l}\omega_c^a k_b^c e^b - \frac{b_3}{2l}k_c^a k_b^c e^b, \\ 0 = \frac{b_2}{2}\left(\omega_{cd}\omega^{ad}k^{cb} + \frac{1}{l^2}\omega_c^a e^c e^b\right) + \frac{b_3}{2l^2}(k_c^a e^c e^b - e^a e^c k_c^b), \\ 0 = \frac{1}{2}(c_2 - 2b_4)\omega_{cd}\omega^{ad}k^{cb} + \frac{1}{l^2}(c_2 - 2a_1)\omega_c^a e^c e^d - \frac{1}{2l^2}(a_2 - c_3 - b_1)e^a e^c k_c^b \\ - \frac{1}{2l^2}(a_2 - c_3 - b_1)k_c^a e^c e^b + \frac{b_2}{2}(k_c^a \omega_d^c k^{db} + k_c^b \omega_d^a k^{dc}).$$

Por lo tanto para que se satisfaga el FDA las constantes $a_1, a_2, b_1, \dots, b_4, c_1, \dots, c_4$ deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} a_1 - b_4 &= 0, \\ a_2 + b_1 &= 0, \\ b_2 = b_3 &= 0, \\ c_2 - 2b_4 &= 0, \\ c_2 - 2a_1 &= 0, \\ a_2 - c_3 - b_1 &= 0, \end{aligned}$$

el cual posee por soluciones,

$$a_1 = b_4, \quad a_2 = -b_1, \quad c_2 = 2a_1, \quad c_3 = -2a_2, \quad b_2 = b_3 = 0. \quad (5.20)$$

De manera que los campos que satisfacen la FDA vienen dados por,

$$B^a = \frac{a_1}{2l} \omega_b^a e^b + \frac{a_2}{2l} k_b^a e^b, \quad (5.21)$$

$$B^{ab} = \frac{a_1}{2} \omega_c^a \omega^{cb} - \frac{a_2}{2l^2} e^a e^b, \quad (5.22)$$

$$\beta^{ab} = \frac{c_1}{2l^2} e^a e^b + \frac{a_1}{2} \omega_c^a k^{cb} + \frac{a_1}{2} \omega_c^b k^{ac} + \frac{a_2}{2} k_c^a k^{cb} + \frac{a_2}{2} k_c^b k^{ac} + \frac{c_4}{2} \omega_c^a \omega^{cb}. \quad (5.23)$$

De aquí resulta directo ver que existen cuatro constantes que son arbitrarias. Los campos dados por (5.21), (5.22), (5.23) representan la solución más general que se puede construir a partir de los campo $\{e^a, \omega^{ab}, k^{ab}\}$, por lo cuál cualquier elección que escojamos para las constantes representaran una solución para el álgebra diferencial libre.

Dado que c_1 es una constante, es posible escribirla como. $c_1 = a_1 + \gamma$, donde γ es otra constante. Esto nos permite elegir $a_2 = c_4 = \gamma = 0$, lo cual conduce a una

solución dada por la siguiente combinación de las 1-formas campos de gauge,

$$\mathbf{B} = \frac{a_1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{A}]. \quad (5.24)$$

Mientras que las 3-formas curvaturas son dadas por¹,

$$\begin{aligned} H^a &= \frac{a_1}{2l}(R_b^a e^b - \omega_b^a T^b) + \frac{a_2}{2l}(F_b^a e^b - k_b^a T^b), \\ H^{ab} &= \frac{a_1}{2}(R_c^a \omega^{cb} - \omega_c^a R^{cb}), \\ \Xi^{ab} &= \frac{c_1}{2l^2}(T^a e^b - e^a T^b) + \frac{c_4}{2}(R_c^a \omega^{cb} - \omega_c^a R^{cb}) + a_1(R_c^a k^{cb} - \omega_c^a F^{cb}) \\ &\quad + a_2(F_c^a k^{cb} - k_c^a F^{cb}), \end{aligned}$$

las cuales satisfacen las identidades de Bianchi dada por (3.15).

5.3. Lagrangeano Chern-Simons-Savvidy en cuatro dimensiones

Sea la 1-forma campo de gauge $\mathbf{A}$ evaluado en el álgebra $\mathfrak{B}_4$ escrita en la forma,

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{a}, \quad (5.25)$$

donde

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\omega^{ab}J_{ab}, \quad \mathbf{a} = \frac{1}{l}e^a P_a + \frac{1}{2}k^{ab}Z_{ab}. \quad (5.26)$$

haciendo uso de los tensores invariantes encontrados en ref. [13],

$$\langle J_{ab}J_{cd} \rangle = \alpha_0 l^2 \epsilon_{abcd}, \quad \langle J_{ab}Z_{cd} \rangle = \alpha_2 l^2 \epsilon_{abcd}, \quad (5.27)$$

¹De aquí resulta directo ver que al anular las curvaturas, se satisface idénticamente el FDA

con α_0 y α_2 constantes arbitrarias de dimension $[\text{longitud}]^{-2}$ se encuentra que la 4-forma Chern-Simons-Savvidy (5.1) será de la forma,

$$\begin{aligned} \sigma_4 = & \frac{1}{4}\alpha_0 l^2 \epsilon_{abcd} R^{ab} B^{cd} + \frac{1}{4}\alpha_2 l^2 \epsilon_{abcd} R^{ab} \beta^{cd} + \frac{1}{4}\alpha_2 l^2 \epsilon_{abcd} k^{ab} D_\omega B^{cd} \\ & + \frac{1}{8}\alpha_2 l^2 \epsilon_{abcd} B^{ab} D_\omega k^{cd} + \frac{1}{12}\alpha_2 \epsilon_{abcd} B^{ab} e^c e^d - \frac{1}{2}d \operatorname{tr}(\omega \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (5.28)$$

Introduciendo las ecuaciones (5.21), (5.22), (5.23) en (5.28), encontramos que el lagrangeano Chern-Simons-Savvidy para el álgebra de Maxwell toma la forma

$$\begin{aligned} \sigma_4 = & \frac{1}{8}(-a_2\alpha_0 + \alpha_2 c_1) \epsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d + \frac{1}{8}(\alpha_0 a_1 + c_4 \alpha_2) l^2 \epsilon_{abcd} R^{ab} \omega_e^c \omega^{ed} \\ & + \frac{a_1}{8} \alpha_2 l^2 \epsilon_{abcd} R^{ab} \omega_e^c k^{ed} + \frac{a_1}{8} \alpha_2 l^2 \epsilon_{abcd} R^{ab} \omega_e^d k^{ce} + \frac{a_2}{8} \alpha_2 l^2 \epsilon_{abcd} R^{ab} k_e^c k^{ed} \\ & + \frac{a_2}{8} \alpha_2 l^2 \epsilon_{abcd} R^{ab} k_e^d k^{ce} + \frac{1}{8} \alpha_2 l^2 \epsilon_{abcd} k^{ab} D_\omega \left(a_1 \omega_e^c \omega^{ed} - \frac{a_2}{l^2} e^c e^d \right) \\ & - \frac{a_2}{16} \alpha_2 \epsilon_{abcd} e^a e^b D_\omega k^{cd} + \frac{a_1}{16} \alpha_2 l^2 \epsilon_{abcd} \omega_e^a \omega^{eb} D_\omega k^{cd} + \frac{a_1}{24} \alpha_2 \epsilon_{abcd} \omega_e^a \omega^{eb} e^c e^d \\ & - \frac{a_2}{24 l^2} \alpha_2 \epsilon_{abcd} e^a e^b e^c e^d - \frac{1}{16} d \left[(-a_2 \alpha_0 + \alpha_2 c_1) \epsilon_{abcd} \omega^{ab} e^c e^d \right. \\ & + (a_1 \alpha_0 + c_4 \alpha_2) l^2 \epsilon_{abcd} \omega^{ab} \omega_e^c \omega^{ed} + a_2 \alpha_2 l^2 \epsilon_{abcd} (\omega^{ab} k_e^c k^{ed} + \omega^{ab} k_e^d k^{ce}) \\ & \left. + a_1 \alpha_2 l^2 \epsilon_{abcd} (\omega^{ab} \omega_e^c k^{ed} + \omega^{ab} \omega_e^d k^{ce}) \right]. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Donde podemos ver que si se cumple $\alpha_2 c_1 \neq \alpha_0 a_2$, entonces el lagrangeano de Chern-Simons-Savvidy para el álgebra de Maxwell contiene el termino de Einstein-Hilbert.

Una interesante solución puede ser obtenida si consideramos $a_1 = a_2 = 0$. En este caso los campos (5.21), (5.22), (5.23) toman la forma

$$\begin{aligned} B^a &= 0, \\ B^{ab} &= 0, \\ \beta^{ab} &= \frac{c_1}{2l^2} e^a e^b + \frac{c_4}{2} \omega_e^a \omega^{cb} \end{aligned}$$

Esto significa que el lagrangeano Chern-Simons-Savvidy para el álgebra de Maxwell viene dada por,

$$\begin{aligned}\sigma_4 = & \frac{1}{8}\alpha_2 c_1 \epsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d + \frac{1}{8}c_4 \alpha_2 l^2 \epsilon_{abcd} R^{ab} \omega_e^c \omega^{ed} \\ & - \frac{1}{16}d \left(c_1 \alpha_2 \epsilon_{abcd} \omega^{ab} e^c e^d + c_4 \alpha_2 l^2 \epsilon_{abcd} \omega^{ab} \omega_e^c \omega^{ed} \right).\end{aligned}$$

Donde podemos ver que en el limite $l \rightarrow 0$ se obtiene el lagrangeano de Einstein-Hilbert modulo termino de borde,

$$\sigma_4 = \frac{c_1}{8}\alpha_2 \epsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d - \frac{c_1}{16}\alpha_2 d(\epsilon_{abcd} \omega^{ab} e^c e^d). \quad (5.30)$$

Otro caso particularmente interesante es considerar $a_1 = c_1 = c_4 = 0$, con lo que los campos en (5.21), (5.22), (5.23) serán,

$$B^a = \frac{a_2}{2l} k_b^a e^b, \quad (5.31)$$

$$B^{ab} = -\frac{a_2}{2l^2} e^a e^b, \quad (5.32)$$

$$\beta^{ab} = \frac{a_2}{2} k_c^a k^{cb} + \frac{a_2}{2} k_c^b k^{ac} \quad (5.33)$$

y por lo tanto el lagrangeano de Chern-Simons-Savvidy (5.29) será,

$$\begin{aligned}\sigma_4 = & -\frac{a_2}{8}\alpha_0 \epsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d + \frac{a_2}{8}\alpha_2 l^2 \epsilon_{abcd} R^{ab} k_e^c k^{ed} + \frac{a_2}{8}\alpha_2 l^2 \epsilon_{abcd} R^{ab} k_e^d k^{ce} \\ & - \frac{a_2}{8}\alpha_2 \epsilon_{abcd} k^{ab} D_\omega(e^c e^d) - \frac{a_2}{16}\alpha_2 \epsilon_{abcd} e^a e^b D_\omega k^{cd} - \frac{a_2}{24} \frac{\alpha_2}{l^2} \epsilon_{abcd} e^a e^b e^c e^d \\ & - \frac{1}{16}d \left(-a_2 \alpha_0 \epsilon_{abcd} \omega^{ab} e^c e^d + a_2 l^2 \alpha_2 \epsilon_{abcd} (\omega^{ab} k_e^c k^{ed} + \omega^{ab} k_e^d k^{ce}) \right),\end{aligned} \quad (5.34)$$

al considerar el campo $k^{ab} = 0$ obtenemos el siguiente lagrangeano,

$$\sigma_4 = -\frac{a_2}{8}\alpha_0 \epsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d - \frac{a_2}{24} \frac{\alpha_2}{l^2} \epsilon_{abcd} e^a e^b e^c e^d + \frac{a_2 \alpha_0}{16} d(\epsilon_{abcd} \omega^{ab} e^c e^d). \quad (5.35)$$

Por otro lado el lagrangeano de Einstein-Hilbert con constante cosmológica en cuatro dimensiones es dado por,

$$\mathcal{L}^{(4)} = \frac{c^3}{32\pi G} \epsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d - \frac{c^3 \Lambda}{4! 8\pi G} \epsilon_{abcd} e^a e^b e^c e^d, \quad (5.36)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío y G es la constante de gravitación universal en cuatro dimensiones. Comparando este lagrangeano con (5.35) podemos determinar las constantes

$$a_2 = -\frac{c^3}{4\pi G \alpha_0}, \quad \alpha_2 = -\frac{3}{2} \alpha_0. \quad (5.37)$$

Por lo tanto (5.34) será,

$$\begin{aligned} \sigma_4 = & \frac{c^3}{32\pi G} \epsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d + \frac{3c^3}{32\pi G} l^2 \epsilon_{abcd} R^{ab} k_e^c k^{ed} + \frac{3c^3}{64\pi G} l^2 \epsilon_{abcd} R^{ab} k_e^d k^{ce} \\ & - \frac{3c^3}{128\pi G} \epsilon_{abcd} e^a e^b D_\omega k^{cd} - \frac{c^3}{64\pi G l^2} \epsilon_{abcd} e^a e^b e^c e^d - \frac{3c^3}{64\pi G} \epsilon_{abcd} k^{ab} D_\omega (e^c e^d) \\ & - \frac{c^3}{64\pi G} d \left(\epsilon_{abcd} \omega^{ab} e^c e^d + \frac{3l^2}{2} \epsilon_{abcd} (\omega^{ab} k_e^c k^{ed} + \omega^{ab} k_e^d k^{ce}) \right). \end{aligned}$$

Capítulo 6

Conclusiones

Las teorías de gauge parecen ser la teoría que describen las fuerzas de la naturaleza, sin embargo la Teoría de la Relatividad General que es el modelo más aceptado para describir la gravedad no ha podido ser formulada como teoría de gauge. Un camino para poder desarrollar una teoría de gauge para la gravedad son los lagrangeanos basados en las formas de Transgresión, los cuales están formulados sobre dos conexiones de gauge valuados sobre la misma álgebra de Lie y son invariantes de gauge. A partir de las formas de transgresión es posible obtener formas de Chern-Simons al anular una de las conexiones de la transgresión. Sin embargo las formas de Chern-Simons son invariantes de gauge modulo termino de borde. A pesar de que las formas de transgresión y las formas de Chern-Simons nos permiten construir teorías de gauge para describir la interacción gravitacional, estas solo pueden ser formuladas en dimensiones impares.

Por otro lado Savvidy generaliza la teoría de gauge de Yang-Mills introduciendo tensores de gauge, que incluyen al vector de gauge de Yang-Mills e incluye tensores de gauge de rango mas alto. Cada tensor posee una determinada transformación de gauge en términos de parámetros tensoriales de gauge. A partir de los campos de gauge tensoriales se construyen sus curvaturas asociadas, las cuales son tensores de rango $s + 2$ con $s = 0, 1, \dots$. Tanto los campos de gauge tensoriales como sus correspondientes curvaturas pueden ser englobadas en los llamados campos de gauge extendidos y las curvaturas extendidas. Hemos mostrado que el lagrangeano cuadrático en las curvaturas tensoriales incluye al lagrangeano de

Yang-Mills. A partir de los campos de gauge tensoriales de rango uno y dos escritas en formas diferenciales, y sus correspondientes curvaturas, se encontró una densidad topológica cinco dimensional, la cuál fue generalizada a $2n + 3$ dimensiones y posee muchas de las propiedades de la densidad de Chern-Pontryagin. Se puede escribir como la derivada exterior de una $2n + 2$ -forma análogo a lo que sucede con las formas de Chern-Simons, la $2n + 2$ -forma la cual llamamos forma de Chern-Simons-Savvidy. Demostramos el teorema de Chern-Weil generalizado, a partir del cual hemos podido construir una $(2n + 2)$ -forma de transgresión, la cuál, en forma análoga a lo que sucede en las formas de transgresión en dimensiones impares, nos conduce a la $2n + 2$ -forma de Chern-Simons-Savvidy al anular los campos $\bar{\mathbf{A}}$ y $\bar{\mathbf{B}}$. En esta tesis nos centramos en la densidad topológica en cinco dimensiones que se puede escribir como la derivada exterior de la 4-forma de Chern-Simons-Savvidy, la cuál depende de la 1-forma campo de gauge $\mathbf{A}$ y de la 2-forma campo de gauge $\mathbf{B}$.

En el contexto de SUGRA standar en once dimensiones, es necesaria una 3-forma A la cuál no se puede interpretar como campo de gauge. Sin embargo utilizando las llamadas álgebras diferenciales libre es posible escribir A como combinación de campos de gauge del álgebra de D'Auria-Fre. Siguiendo esta idea, construimos la 2-forma $\mathbf{B}$ como combinación de campos de gauge del álgebra de Maxwell, lo que nos permite encontrar la combinación que deben satisfacer los campos de gauge 2-forma de tal manera que se pueda reducir sobre el álgebra de Maxwell.

En esta tesis fue construida una acción 4-dimensional basada en una forma de Chern-Simons-Savvidy para el álgebra de Maxwell, de la cuál los tensores invariantes son conocidos. La 4-forma de Chern-Simons-Savvidy invariante para el álgebra de Maxwell encontrada contiene al término de Einstein-Hilbert con constante cosmológica.

Bibliografía

- [1] Ignatios Antoniadis and George Savvidy. New gauge anomalies and topological invariants in various dimensions. *The European Physical Journal C*, 72(9), 2012.
- [2] IGNATIOS ANTONIADIS and GEORGE SAVVIDY. Extension of chern–simons forms and new gauge anomalies. *International Journal of Modern Physics A*, 29(03n04):1450027, 2014.
- [3] R. D’Auria and P. Fré. Geometric supergravity in $d=11$ and its hidden supergroup. *Nuclear Physics B*, 201(1):101 – 140, 1982.
- [4] H. Bacry, Ph. Combe, and J.L. Richard. Group-theoretical analysis of elementary particles in an external electromagnetic field. *Il Nuovo Cimento A Series 10*, 67(2):267–299, 1970.
- [5] Igor A. Bandos, José A. de Azcárraga, Moisés Picón, and Oscar Varela. On the formulation of $d = 11$ supergravity and the composite nature of its three-form gauge field. *Annals of Physics*, 317(1):238 – 279, 2005.
- [6] A.H. Chamseddine. Topological gauge theory of gravity in five and all odd dimensions. *Physics Letters B*, 233(3–4):291 – 294, 1989.
- [7] A.H. Chamseddine. Topological gravity and supergravity in various dimensions. *Nuclear Physics B*, 346(1):213 – 234, 1990.
- [8] E. Cremmer, B. Julia, and J. Scherk. Supergravity in theory in 11 dimensions. *Physics Letters B*, 76(4):409 – 412, 1978.
- [9] F. Izaurieta, P. Minning, A. Perez, E. Rodriguez, and P. Salgado. Standard general relativity from chern–simons gravity. *Physics Letters B*, 678(2):213 – 217, 2009.
- [10] Spyros Konitopoulos and George Savvidy. Extension of chern-simons forms. *Journal of Mathematical Physics*, 55(6):–, 2014.
- [11] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*. Graduate student series in physics. Taylor & Francis, 2003.

- [12] A. Pérez, P. Minning, and P. Salgado. Eleven-dimensional {CJS} supergravity and the dáuria-fré group. *Physics Letters B*, 660(4):407 – 414, 2008.
- [13] P. Salgado and S. Salgado. $so(d-1, 1) \oplus so(d-1, 2)$ algebras and gravity. *Physics Letters B*, 728(0):5 – 10, 2014.
- [14] George Savvidy. Non-abelian tensor gauge fields: Generalization of yang–mills theory. *Physics Letters B*, 625(3–4):341 – 350, 2005.
- [15] GEORGE SAVVIDY. Non-abelian tensor gauge fields i. *International Journal of Modern Physics A*, 21(23n24):4931–4957, 2006.
- [16] GEORGE SAVVIDY. Non-abelian tensor gauge fields ii. *International Journal of Modern Physics A*, 21(23n24):4959–4977, 2006.
- [17] GEORGE SAVVIDY. Extension of the poincarÉ group and non-abelian tensor gauge fields. *International Journal of Modern Physics A*, 25(31):5765–5785, 2010.
- [18] George Savvidy. Topological mass generation in a four-dimensional gauge theory. *Physics Letters B*, 694(1):65 – 73, 2010.
- [19] Robert Schrader. The maxwell group and the quantum theory of particles in classical homogeneous electromagnetic fields. *Fortschritte der Physik*, 20(12):701–734, 1972.
- [20] Ricardo Troncoso and Jorge Zanelli. Higher-dimensional gravity, propagating torsion and ads gauge invariance. *Classical and Quantum Gravity*, 17(21):4451, 2000.
- [21] C. Yang and R. Mills. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Phys. Rev.*, 96:191–195, Oct 1954.
- [22] Jorge Zanelli. Lecture notes on Chern-Simons (super-)gravities. Second edition(February 2008). *Notes for the 5th CBPF Graduate School (In Portuguese), Rio d Conference: C04-07-05.18*, 2005.