



Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Inferencia de redes regulatorias con un conjunto dado de puntos periódicos

POR

Ricardo Fabián Vega Gutiérrez

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la
Universidad de Concepción para optar al título profesional de
Ingeniero/a Civil Matemático/a

Profesor Guía: Dr. Julio Bernardo Aracena Lucero (Universidad de Concepción)

12 de agosto de 2025,
Concepción, Chile.

© 2025 Ricardo Fabián Vega Gutiérrez

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento.

Agradecimientos

A lo largo de estos años, tuve la fortuna de conocer a personas maravillosas que hicieron de este camino algo mucho más significativo.

Quiero agradecer profundamente a mis amistades forjadas durante estos años universitarios, ya que sin ellos nada de esto sería posible. Patricio, Catalina, Vicente, Francisca, Javiera, Ignacio, Jaime, David, Estefanía, Luciano, Fernando, Bastián y Benjamín, dentro de muchos más que también fueron parte importante de esta etapa. Compartimos alegrías y penas, risas y llantos, desvelos, desafíos y logros. Sin duda, puedo decir que ustedes fueron lo mejor que me dejó la carrera. Gracias por acompañarme, por motivarme y permitirme ser parte de su vida.

A mi familia, gracias por su apoyo constante y por confiar en mí en todo momento. Aunque no siempre entendieran en qué estaba trabajando, su presencia y cariño fueron esenciales para llegar hasta aquí.

También agradezco a quienes me guiaron académicamente durante este camino, en especial a mi profesor guía, Dr. Julio Aracena, por su disposición, optimismo y confianza en mí y en el desarrollo de esta tesis.

Finalmente, gracias a todas las personas que, de alguna manera, contribuyeron a que este proceso llegara a buen puerto.

Índice general

1. Introducción	4
2. Definiciones y notación	6
2.1. Funciones Booleanas	6
2.2. Redes Booleanas	7
2.3. Compatibilidad	8
3. Matrices de Discrepancia	9
3.1. Discrepancia	9
3.2. Aplicaciones	17
4. Inferencia en Redes Regulatorias	20
4.1. Reformulación del Problema 3	21
4.2. Solución del Problema 6	23
5. Puntos fijos	28
5.1. Conjunto de interés	29
5.2. Cláusulas singulares y signos 0	31
5.3. Vectores completos	34
5.4. Análisis global	36
5.5. Conjuntos de peso k	40
6. Conclusiones	44
6.1. Trabajos Futuros	44

Capítulo 1

Introducción

Una red booleana es un modelo matemático fundamental para representar sistemas dinámicos finitos [13], en los cuales cada variable del sistema toma únicamente dos valores, típicamente representados como 0 (inactivo) y 1 (activo). Cada variable evoluciona en el tiempo de acuerdo con una regla lógica definida por una función booleana, también denominada función de activación local.

Gracias a su simplicidad estructural y capacidad para capturar comportamientos complejos, las redes booleanas han sido ampliamente utilizadas en distintas disciplinas como la biología de sistemas [8, 14], la teoría de la información [1], y los sistemas sociales [11].

En particular, las redes booleanas han tenido un impacto significativo en el modelamiento de redes regulatorias génicas (Gene Regulatory Networks, GRNs) [12], donde cada nodo representa un gen, y las conexiones representan relaciones de activación o inhibición. En este contexto, las redes booleanas han demostrado ser especialmente útiles por su capacidad predictiva, facilidad de interpretación y aplicabilidad en condiciones experimentales variadas.

Uno de los desafíos centrales en este ámbito es el de inferir una red booleana a partir de observaciones experimentales, por ejemplo, datos de expresión génica discretizados a lo largo del tiempo. Este problema de inferencia de redes busca determinar, dados ciertos patrones observados en el sistema, una red booleana que sea compatible con ellos. En términos más concretos, la inferencia consiste en reconstruir las funciones de activación local de cada nodo a partir de los datos. Esta tarea se relaciona estrechamente con el estudio de funciones booleanas parcialmente definidas (pdBf), una noción central en lógica y optimización [6, 5, 9].

Dentro de este marco, recientemente ha aumentado el interés en el estudio de redes booleanas donde las funciones de activación local son unate, es decir, monótonas creciente, monótonas decrecientes o constantes respecto a cada entrada de la función. Este tipo de funciones refleja de forma más realista el comportamiento de ciertos procesos biológicos, como la regulación génica [4, 14, 12]. Estas redes, conocidas como redes regulatorias, son especialmente interesantes por su capacidad

de modelado e interpretabilidad biológica. Además, la inferencia de funciones booleanas unate ha sido abordada recientemente en el trabajo de tesis doctoral de Katerin De la Hoz et al. (2025) [7], en el cual se introduce el concepto de discrepancia como herramienta para estudiar la compatibilidad de distintas funciones unate con un conjunto de observaciones dados, además de presentar una caracterización de funciones unate que pueden generar un cierto conjunto de observaciones dado.

A lo largo del tiempo, se han propuesto diversos métodos computacionales para abordar el problema de la inferencia de redes booleanas a partir de datos experimentales. Entre los enfoques más representativos se encuentran algoritmos clásicos como REVEAL (Reverse Engineering Algorithm) [10], que utiliza teoría de la información para detectar dependencias entre variables, y Best-Fit Extension, que busca funciones booleanas que minimicen el error en tablas de verdad generalizadas. Métodos más recientes, como MIBNI (basado en información mutua) [3], GABNI (basado en algoritmos genéticos) [2], y ATEN (basado en árboles AND/OR) [15], han sido diseñados para mejorar tanto la exactitud dinámica (capacidad de reproducir correctamente los datos observados) como la corrección estructural de la red inferida (similitud con la topología real). Cada uno de estos métodos enfrenta desafíos propios, como el alto costo computacional, la sensibilidad al ruido en los datos, y la dificultad para resolver conflictos o inconsistencias en observaciones reales [12].

A pesar de los avances, no existe aún un consenso sobre un método superior, y las evaluaciones comparativas muestran que el desempeño de cada enfoque depende fuertemente del contexto específico y la naturaleza de los datos disponibles [12]. Por este motivo, la investigación en esta área sigue siendo activa, y se exploran nuevas herramientas teóricas que podrían permitir avances significativos tanto en el análisis como en la inferencia de estas redes.

El objetivo principal de esta tesis es abordar un problema específico de inferencia: Determinar si, dado un conjunto finito de puntos del espacio $\{0, 1\}^n$, existe una red regulatoria cuya dinámica contiene a dichos puntos como puntos periódicos y, más aún, que sean los únicos puntos periódicos. Para ello, se recurre al concepto de discrepancia y se busca explotar al máximo su potencial en el contexto de redes regulatorias, un ámbito en el cual aún no ha sido suficientemente explorado.

El desarrollo de esta tesis se estructura de la siguiente forma. En el Capítulo 2 se presentan las definiciones fundamentales relacionadas con funciones booleanas, redes booleanas y compatibilidad. El Capítulo 3 introduce formalmente la noción de discrepancia, estudia sus propiedades combinatorias relevantes, y se ejemplifica su aplicación en problemas de inferencia. En el Capítulo 4 se reformula el problema de inferencia general para puntos periódicos en redes regulatorias y se propone una metodología constructiva con respecto a la discrepancia para obtener soluciones no triviales. Finalmente, el Capítulo 5 aborda el problema objetivo de la tesis, aplicando los resultados obtenidos del capítulo anterior, y se analiza un caso particular para el cual se demuestra que no existe solución, lo cual evidencia tanto la complejidad como las limitaciones del problema.

Capítulo 2

Definiciones y notación

En este capítulo se presentan las definiciones y conceptos fundamentales que serán utilizados a lo largo de la tesis. Estas nociones proporcionan el marco teórico necesario para la formulación y comprensión de los resultados expuestos en los capítulos siguientes. Se incluyen definiciones básicas, propiedades relevantes y notación estándar, con el objetivo de establecer una base rigurosa y coherente para el desarrollo del trabajo.

2.1. Funciones Booleanas

Las funciones booleanas son un objeto central de estudio en diversas áreas de la matemática y la computación. Formalmente, una función booleana es una aplicación que asigna a cada combinación de valores binarios de entrada un valor binario de salida.

Definición 2.1. *Se denomina función booleana a cualquier aplicación $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, donde $n \geq 1$ indica el número de variables de entrada.*

Toda función booleana puede representarse mediante expresiones lógicas compuestas por *literales*, que son simplemente variables booleanas o sus negaciones. Estas expresiones suelen organizarse en forma de *cláusulas*, entendidas como disyunciones (OR) o conjunciones (AND) de literales. Así, por ejemplo, una función puede escribirse como una conjunción de disyunciones (forma normal conjuntiva, CNF) o una disyunción de conjunciones (forma normal disyuntiva, DNF). Estas representaciones permiten analizar propiedades estructurales y lógicas de las funciones.

Estas funciones pueden clasificarse según ciertas propiedades estructurales. En particular, atendiendo a cómo varía su valor de salida en función de los cambios en la entrada, se puede decir lo siguiente:

Definición 2.2. *Una función booleana f se dice monótona creciente con respecto*

a la variable i si, para todo $x \in \{0, 1\}^n$, se tiene:

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \leq f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

De manera análoga, f se dice monótona decreciente con respecto a la variable i si:

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \geq f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Si f es monótona creciente para todo $i \in [n] := \{1, \dots, n\}$, f se dice función monótona. Si para todo $i \in [n]$, f es monótona creciente o monótona decreciente con respecto a la variable i , se dice que f es una función unate.

2.2. Redes Booleanas

Una red booleana corresponde a un sistema dinámico finito en el cual cada nodo representa una variable booleana y su estado se actualiza en tiempo discreto en función de una colección de funciones booleanas $F = (f_1, \dots, f_n)$, denominadas funciones de activación local, donde para cada nodo i , $f_i : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ representa la forma en que se actualiza el estado del nodo i en la red.

Similar a las funciones booleanas, las redes booleanas pueden ser clasificadas según el tipo de funciones de activación local que esta posee:

Definición 2.3. Una red booleana $F = (f_1, \dots, f_n)$ se denomina monótona si todas sus funciones de activación local son funciones monótonas.

Asimismo, se dice que es regulatoria si todas sus funciones de activación local son funciones unate.

Además de su estructura lógica, las redes booleanas pueden ser descritas mediante su dinámica. En este contexto, la dinámica de una red booleana F corresponde a la iteración sucesiva F . Formalmente, dada una red booleana $F : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ y $x_0 \in \{0, 1\}^n$, la dinámica de F está descrita por:

$$\forall t \in \mathbb{N}_0, \forall x(t) \in \{0, 1\}^n : x(t+1) = F(x(t)).$$

El conjunto $\{x(t)\}_{t \in \mathbb{N}_0} = \{F^t(x_0)\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ con $x(0) = x_0$ se denomina órbita o trayectoria de x_0 .

A partir de su dinámica, podemos definir ciertas estructuras o puntos de interés.

Definición 2.4. Para una red booleana $F = (f_1, \dots, f_n)$ y la entrada $x \in \{0, 1\}^n$.

- x es un punto fijo si $F(x) = x$.
- $PF(F) := \{x \in \{0, 1\}^n : F(x) = x\}$.

- x es un punto periódico si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $F^k(x) = x$, en caso contrario se denomina punto transiente. Se denomina al valor k como periodo.
- Dado x punto periódico de periodo $k \geq 2$. A la secuencia de valores $x_1 x_2 \dots x_k$ tales que $x_1 = x_k = x$ y, para todo $i \in \{2, \dots, k-1\}$ $F(x_i) = x_{i+1}$, se denomina como ciclo límite.
- Un atractor de la red es cualquier punto fijo o ciclo límite de la red.

2.3. Compatibilidad

Uno de los conceptos fundamentales en los problemas de inferencia en redes booleanas es el de *compatibilidad*. Este concepto establece una relación entre una función booleana $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ y un conjunto de observaciones $\mathcal{O} \subseteq \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}$ sobre el sistema. Intuitivamente, decimos que una función es compatible con un conjunto de observaciones si, al evaluar dicha función sobre cada punto observado, se obtienen los valores esperados según las observaciones.

Definición 2.5. Una función $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ es compatible con el conjunto de observaciones $\mathcal{O} \subseteq \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}$ si para todo $(x, t) \in \mathcal{O}$ se cumple que $f(x) = t$.

A partir del conjunto de observaciones, se definen dos conjuntos de interés: $F(0) := \{x : (x, 0) \in \mathcal{O}\}$ y $F(1) := \{x : (x, 1) \in \mathcal{O}\}$. Se asume $F(0) \cap F(1) = \emptyset$. Luego podemos derivar una definición análoga de compatibilidad para los conjuntos $F(0)$ y $F(1)$.

Definición 2.6. Una función $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ es compatible con los conjuntos $F(0)$ y $F(1)$ si para todo $y \in F(0)$, $f(y) = 0$ y para todo $z \in F(1)$, $f(z) = 1$.

Más aún, de ambas definiciones se puede inferir el siguiente resultado.

Proposición 2.7. Dado el conjunto de observaciones $\mathcal{O} \subseteq \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}$ y los conjuntos $F(0), F(1)$ asociados. Una función $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ es compatible con \mathcal{O} si y solo si f es compatible con $F(0)$ y $F(1)$.

Capítulo 3

Matrices de Discrepancia

En este capítulo nos enfocaremos en el concepto de discrepancia, introducido en [7], para abordar los problemas de inferencia con respecto a redes regulatorias. En particular, introduciremos la matriz de discrepancia asociada a conjuntos de observaciones y con ello propiedades interesantes que nos permitan caracterizar el tipo de matrices obtenidas. Además, mostraremos se utiliza la discrepancia para decidir cuando una función booleana f es unate.

3.1. Discrepancia

En las redes regulatorias, las funciones de activación local pueden presentar comportamientos tanto crecientes como decrecientes. En este contexto, la noción de discrepancia surge de manera natural como una herramienta para resumir estas tendencias en cada nodo. En primer lugar, se define la discrepancia con respecto a un par de vectores.

Definición 3.1. *Dados $a, b \in \{0, 1\}^n$ se define la discrepancia entre a y b como el vector de signos $\Delta(a, b) \in \{+, -, 0\}^n$ donde:*

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad \Delta(a, b)_i := \begin{cases} + & \text{si } a_i = 0 \wedge b_i = 1, \\ - & \text{si } a_i = 1 \wedge b_i = 0, \\ 0 & \text{si } a_i = b_i. \end{cases}$$

Ejemplo 3.2. *Sean $a = (0, 1, 1, 0)$ y $b = (1, 0, 1, 0)$, entonces*

$$\begin{aligned} \Delta(a, b) &= [\Delta(a, b)_1 \ \Delta(a, b)_2 \ \Delta(a, b)_3 \ \Delta(a, b)_4] \\ &= [+ \ - \ 0 \ 0]. \end{aligned}$$

Observación 3.3. $\Delta(a, b)$ coincide con el resultado de $b - a$, reemplazando los valores -1 y 1 por $-$ y $+$ respectivamente.

Ahora bien, esta definición se puede generalizar para conjuntos de vectores, a lo cual denominaremos matriz de discrepancia.

Definición 3.4. Sean $A = \{a^1, \dots, a^s\}$ y $B = \{b^1, \dots, b^t\}$ conjuntos de vectores de $\{0, 1\}^n$, tal que $A \cap B = \emptyset$. Se define la matriz de discrepancias con respecto a A y B como la matriz de signos $\Delta_{A,B} \in \mathcal{M}_{st \times n}(\{+, -, 0\})$, como sigue:

$$\Delta_{A,B} := \begin{bmatrix} \Delta(a^1, b^1) \\ \Delta(a^1, b^2) \\ \vdots \\ \Delta(a^1, b^t) \\ \vdots \\ \Delta(a^s, b^t) \end{bmatrix}$$

O bien, definida elemento a elemento

$$(\Delta_{A,B})_{(i,j)} = \Delta(a^{\lceil \frac{i}{t} \rceil}, b^r)_j$$

donde $r \in \{0, 1, \dots, t-1\}$ corresponde al resto de $\frac{i}{t}$, considerando que $b^0 = b^t$.

Ejemplo 3.5. Sean $A = \{(0, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 1)\}$ y $B = \{(1, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1)\}$, entonces:

$$\Delta_{A,B} = \begin{bmatrix} + & 0 & 0 & 0 \\ + & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - & 0 \\ 0 & - & - & 0 \end{bmatrix}$$

La condición $A \cap B = \emptyset$ es necesaria para que los resultados puedan ser interpretables para una función booleana f . Es importante notar que la estructura de la matriz va a depender del orden en el que se computen las discrepancias, por lo tanto para un par de conjuntos pueden haber varias matrices de discrepancia asociada. Para efectos del capítulo, consideraremos siempre el orden impuesto en 3.4.

La discrepancia es una herramienta bastante reciente, y como tal no se tiene muchos resultados que puedan ser de utilidad al momento de abordar problemas, es por ello que es de interés el estudiar este tipo de matrices. De la definición 3.1 podemos inferir un par de observaciones con respecto a la discrepancia entre dos vectores.

Observación 3.6. Sean $a, b, c, d \in \{0, 1\}^n$, se tiene que

- a) Si $a \neq b$ entonces $\Delta(a, b) \neq \Delta(b, a)$.
- b) Si $\Delta(a, b) = \Delta(c, d) \in \{-, +\}^n$, entonces $a = c$ y $b = d$.
- c) Si para $i \in [n]$, $\Delta(a, b)_i \neq \Delta(c, d)_i \in \{-, +\}$, entonces $a_i \neq c_i$ y $b_i \neq d_i$.
- d) Si para $i \in [n]$, $a_i = c_i$, entonces $\Delta(a, b)_i$ y $\Delta(c, d)_i$ no pueden ser signos contrarios.

Al momento de computar las discrepancias entre dos conjuntos de vectores se puede dar que en la matriz de discrepancia hayan filas repetidas. En este caso, podemos decir lo siguiente con respecto a los pares de vectores que originan tal vector de signos.

Proposición 3.7. Sean $a, b, c \in \{0, 1\}^n$. Si $\Delta(a, b) = \Delta(a, c)$ entonces $b = c$, análogamente, si $\Delta(b, a) = \Delta(c, a)$, entonces $b = c$.

Demostración. Si $\Delta(a, b) = \Delta(a, c)$, por definición 3.1 para cada $i \in [n]$ se tiene que $\Delta(a, b)_i = \Delta(a, c)_i = x_i$, con $x_i \in \{+, -, 0\}$, pero también se sigue que para cualquier x_i existe un único valor $y_i \in \{0, 1\}$ tal que, considerando $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $\Delta(a, y)_i = x_i$, luego necesariamente $b = c = y$. El razonamiento para el segundo caso es análogo. \square

Como los conjuntos A y B no repiten vectores, necesariamente si existen filas repetidas en la matriz $\Delta_{A,B}$ entonces son generadas por distintos pares de vectores. Del resultado anterior se puede desprender una relación entre la multiplicidad de las filas de la matriz de discrepancia y el tamaño de los conjuntos que la generan, sin embargo primero consideremos el siguiente resultado.

Proposición 3.8. Sea $r \in \{+, -, 0\}^n$ tal que $k > 0$ de sus coordenadas son 0, entonces existen 2^k pares de vectores distintos tales que su discrepancia es r .

Demostración. Sea $r = (r_1, \dots, r_n)$ como en el enunciado. Como la discrepancia es independiente con respecto a las coordenadas, entonces cada valor r_i se puede representar como la discrepancia entre dos valores $a_i, b_i \in \{0, 1\}$.

Para $r_i = -$ o $r_i = +$ esta representación es única, pero si $r_i = 0$ se tienen dos asignaciones distintas, pues por definición 3.1 se tiene que $a_i = b_i$, luego, $a_i = b_i = 0$ o $a_i = b_i = 1$.

Como por cada valor de 0 podemos construir dos pares de vectores cuya discrepancia es f , entonces si f tiene $k > 0$ coordenadas con signo 0, podemos construir a lo más 2^k pares de vectores, todos distintos, tales que su discrepancia sea r . \square

Ejemplo 3.9. Consideremos $f = (+, -, +, 0, 0)$, luego

$$\begin{aligned}\Delta((0, 1, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 1, 1)) &= f, \\ \Delta((0, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0)) &= f, \\ \Delta((0, 1, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 1, 0)) &= f, \\ \Delta((0, 1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0, 1)) &= f.\end{aligned}$$

Si una fila tiene pocos signos 0 se puede esperar que no se repita muchas veces, sin embargo la cantidad escala de manera exponencial con respecto a la cantidad de signos 0, lo que da lugar al siguiente resultado que permite limitar la cantidad de repeticiones que admite una matriz de discrepancia.

Proposición 3.10. Sean $A, B \subseteq \{0, 1\}^n$, $A \cap B = \emptyset$ y $\Delta_{A,B}$ su matriz de discrepancia de m filas. Sea f una fila de $\Delta_{A,B}$, si f se repite r veces entonces se verifica:

(i) $r \leq \sqrt{m}$,

(ii) $r \leq 2^z$, con z la cantidad de signos 0 en f .

Demostración. Sean $A, B \subseteq \{0, 1\}^n$ tales que $A \cap B = \emptyset$. Si f es una fila de $\Delta_{A,B}$, entonces por definición 3.1 existen $a^1 \in A$ y $b^1 \in B$ tal que $\Delta(a^1, b^1) = f$.

Si f se repite r veces, por proposición 3.7 entonces deben existir $a^2, a^3, \dots, a^r \in A$ y $b^2, b^3, \dots, b^r \in B$, todos distintos, tales que $\Delta(a^i, b^i) = f$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. Luego $|A|, |B| \geq r$. Así, si $r > \sqrt{m}$, entonces $|A|, |B| > \sqrt{m}$ y $|A||B| > m$, pero $|A||B|$ corresponde al número de filas de $\Delta_{A,B}$, por lo tanto necesariamente $r \leq \sqrt{m}$.

Por otro lado, sea z la cantidad de signos 0 en f . Si $r > 2^z$, entonces por proposición 3.8 necesariamente existen $p \neq q \in \{1, \dots, r\}$ tales que $a^p = a^q$ y $b^p = b^q$, luego A y B repiten vectores, por lo tanto necesariamente $r \leq 2^z$. \square

En consecuencia podemos acotar el tamaño de los conjuntos que generan una matriz de discrepancia.

Corolario 3.11. Sean $A, B \subseteq \{0, 1\}^n$, $A \cap B = \emptyset$ y $f \in \{+, -, 0\}$ tales que f se repite r veces en $\Delta_{A,B}$, entonces $|A|, |B| \geq r$.

El siguiente resultado se relaciona al orden establecido en la definición 3.4 con respecto a la periodicidad de la repetición de filas.

Proposición 3.12. Sea $M \in \mathcal{M}_{m \times n}(\{+, -, 0\})$ tal que contiene una fila que se repite al menos 3 veces de manera consecutiva, entonces M no es matriz de discrepancias.

Demostración. Sea M como en el enunciado, consideremos f como la fila que se repite. Supongamos que M es matriz de discrepancias, es decir, existen $A, B \subseteq \{0, 1\}^n$, con $A \cap B = \emptyset$ tal que $M = \Delta_{A,B}$. Por proposición 3.7 podemos inferir que existen al menos $x, y, z \in A$ y $r, s, t \in B$, todos distintos, tal que $\Delta(x, r) = \Delta(y, s) = \Delta(z, t) = f$, luego por corolario 3.11 $|A|, |B| \geq 3$. Sin pérdida de generalidad, consideremos el siguiente orden:

$$M = \begin{bmatrix} \vdots \\ \Delta(x, r) \\ \Delta(y, s) \\ \Delta(z, t) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Por definición 3.4 sabemos que la matriz M se construye, para cada vector en A , computando su discrepancia con todos los vectores en B , luego dada la forma de M podemos inferir que solo hay 1 discrepancia que involucra al vector y , lo cual contradice que $|B| \geq 3$. \square

De la definición 3.4 también se tiene la condición $A \cap B = \emptyset$ sobre los conjuntos. Si este no fuera el caso, al momento de computar las discrepancias entre los conjuntos por definición 3.1 se tendría como resultado al menos un vector con solo signos 0, lo cual nos da una condición necesaria para que una matriz de signos pueda ser de discrepancia.

Proposición 3.13. *Sea $M \in \mathcal{M}_{m \times n}(\{+, -, 0\})$. Si M es matriz de discrepancia para algún par de conjuntos A, B , entonces M no contiene fila de signos 0.*

Hasta este punto se tienen resultados con respecto a las filas de la matriz de discrepancias, sin embargo también se pueden obtener resultados considerando las columnas.

Proposición 3.14. *Sean $A, B \subseteq \{0, 1\}^n$ con $A \cap B = \emptyset$. Si $\Delta_{A,B}$ es tal que al menos una de sus columnas solo contiene signos 0, entonces existen $C \neq A$ y $D \neq B$ conjuntos de vectores tales que $\Delta_{A,B} = \Delta_{C,D}$.*

Demostración. Sea $\Delta_{A,B}$ tal que la k -ésima columna solo contiene signos 0, entonces por definición 3.4 para todo vector $a \in A$ y $b \in B$ se tiene que $a_k = b_k$, si no, existen vectores tal que su discrepancia en la k -ésima coordenada da como resultado $+$ o $-$. Luego, definiendo los conjuntos C y D como los vectores de A y B , respectivamente, pero cambiando el valor de su k -ésima coordenada, se tiene que $\Delta_{C,D} = \Delta_{A,B}$. \square

Ejemplo 3.15. *Sean $A = \{(0, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 1)\}$, $B = \{(1, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1)\}$, $C = \{(0, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0)\}$, $D = \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\}$, entonces*

$$\Delta_{C,D} = \Delta_{A,B} = \begin{bmatrix} + & 0 & 0 & 0 \\ + & - & 0 & 0 \\ - & 0 & - & 0 \\ 0 & - & - & 0 \end{bmatrix}$$

Si consideramos conjuntos $A, B \subseteq \{0, 1\}^n$, con $A \cap B = \emptyset$, tales que fijamos el valor de la k -ésima entrada de los vectores de A o bien de B , por el cuarto punto de la observación 3.6 entonces en la k -ésima columna de $\Delta_{A,B}$ no podrían haber signos contrarios, es decir, no podrían aparecer los signos $+$ y $-$ simultáneamente. Esto se debe a que las discrepancias que generan esos signos requieren necesariamente valores distintos en esa coordenada, lo cual no puede ocurrir si uno de los conjuntos tiene esa coordenada fija.

Esto sugiere que, si en cada columna de una matriz de signos no aparecen signos contrarios, entonces es posible que esa matriz haya sido generada por comparar todos los vectores de un conjunto con un único vector del otro conjunto.

La siguiente proposición formaliza esta idea, caracterizando aquellas matrices de discrepancia $\Delta_{A,B}$ donde uno de los conjuntos tiene tamaño 1.

Proposición 3.16. *Sea $M \in \mathcal{M}_{m \times n}(\{+, -, 0\})$ tal que:*

- (i) *Cada fila de M tiene al menos un signo distinto de 0,*
- (ii) *M no tiene filas repetidas y*
- (iii) *para toda columna k , $\nexists i \neq j : M_{ik} = - \wedge M_{jk} = +$.*

Entonces existen $A, B \subseteq \{0, 1\}^n$, con $A \cap B = \emptyset$ y $|A| = 1$, o bien $|B| = 1$, tal que $M = \Delta_{A,B}$.

Demostración. Sea $M_{\cdot k}$ una columna arbitraria de M . Supongamos sin pérdida de generalidad que $M_{\cdot k}$ solo contiene signos $+$ y 0 . Consideremos $a_k = 0$ y el conjunto $B^k = \{b_k^1, \dots, b_k^m\}$ donde:

$$b_k^i = \begin{cases} 0 & \text{si } M_{ik} = 0 \\ 1 & \text{si } M_{ik} = + \end{cases}$$

Luego $\Delta_{a_k, B^k} = M_{\cdot k}$. Se puede obtener un resultado similar considerando $b_k = 1$ y un conjunto $A^k = \{a_k^1, \dots, a_k^m\}$ donde:

$$a_k^i = \begin{cases} 0 & \text{si } M_{ik} = + \\ 1 & \text{si } M_{ik} = 0 \end{cases}$$

Luego $\Delta_{A^k, b_k} = M_{\cdot k}$.

El razonamiento es análogo si la columna solo contiene signos 0 y $-$. Consideremos para cada columna las discrepancias de la forma Δ_{a_k, B^k} , luego

$$\left[\Delta_{a_1, B^1} \quad \Delta_{a_2, B^2} \quad \dots \quad \Delta_{a_n, B^n} \right] = M$$

Así, los conjuntos $A, B \subseteq \{0, 1\}^n$ dados por

$$\begin{aligned} A &:= \{x \in \{0, 1\}^n : x_i = a_i, \forall i \in [n]\}. \\ B &:= \{x \in \{0, 1\}^n : x = (b_1^j, \dots, b_n^j), j \in [m]\}. \end{aligned}$$

Son tales que $\Delta_{A,B} = M$, con $A \cap B = \emptyset$ y $|A| = 1$. Considerando las discrepancias de la forma Δ_{A^k, b_k} de manera análoga obtenemos conjuntos A, B tales que $\Delta_{A,B} = M$, $A \cap B = \emptyset$ y $|B| = 1$.

□

La condición de que M no tenga fila con solo signos 0 y que no se repitan filas es necesaria para que los conjuntos estén bien definidos y que alguno tenga tamaño 1.

Si no fijáramos las entradas de los vectores, se podría dar el caso de que alguna columna de $\Delta_{A,B}$ si contenga signos contrarios. Para este caso, se propone seccionar la matriz buscando que cada submatriz obtenida no tenga signos contrarios por columna ni repita filas. Si este es el caso, entonces cada submatriz cumple las condiciones dadas en la proposición 3.16 y por ende cada una sería una matriz de discrepancia, sin embargo no necesariamente la unión de estas submatrices es una matriz de discrepancia. Por ejemplo, consideremos los conjuntos $A, B, C, D \subseteq \{0, 1\}^n$, todos distintos, y definamos la matriz de signos M como:

$$M = \begin{bmatrix} \Delta_{A,B} \\ \Delta_{C,D} \end{bmatrix}$$

Dado que A y C son distintos, entonces existe $a \in A$ y $d \in D$ tal que $\Delta(a, d)$ no es una fila de $\Delta_{A,B}$ ni de $\Delta_{C,D}$, luego M no es matriz de discrepancia de los conjuntos $(A \cup C)$ y $(B \cup D)$. En lo siguiente, introduciremos los conceptos de cajón y complemento por signos, los cuales nos permitirán dar condiciones sobre las cuales la unión de matrices de discrepancia si es una matriz de discrepancia.

Definición 3.17. Sea $M \in \mathcal{M}_{m \times n}(\{+, -, 0\})$ y sea M_j la j -ésima fila de M . Sean $p, q \in \mathbb{N}$ tal que $m = pq$, se define el i -ésimo cajón de tamaño q de M como

$$A^{i,q} = \begin{bmatrix} M_{q(i-1)+1} \\ \vdots \\ M_{q(i-1)+q} \end{bmatrix}$$

Donde $1 \leq i \leq p$.

Definición 3.18. Sea $u \in \{0, +\}^{m \times 1}$. Se define el complemento por signos de u , $\bar{u} \in \{-, 0\}^{m \times 1}$, como

$$\forall 1 \leq j \leq m, \quad \bar{u}_j = \begin{cases} - & \text{si } u_j = 0, \\ 0 & \text{si } u_j = +. \end{cases}$$

El complemento para $u \in \{-, 0\}^{m \times 1}$, $\bar{u} \in \{0, +\}^{m \times 1}$, se define análogamente. Si $u = (0, 0, \dots, 0)$, tanto $(+, +, \dots, +)$ como $(-, -, \dots, -)$ son sus complementos.

Proposición 3.19. Sea u una columna de m filas que no contiene signos contrarios, tal que por proposición 3.16 $u = \Delta_{a,B}$, con $B = \{b^1, \dots, b^m\}$ y $a, b^1, \dots, b^m \in \{0, 1\}$, entonces $\bar{u} = \Delta_{a',B}$, con $a' = 1 - a$

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que u solo contiene valores en $\{0, +\}$, luego $a = 0$ (si no, $a = 1$). De la definición 3.18 se tiene, para u

$$\forall 1 \leq j \leq m, \quad \bar{u}_j = \begin{cases} - & \text{si } u_j = \Delta(a, b^j) = 0, \\ 0 & \text{si } u_j = \Delta(a, b^j) = +. \end{cases}$$

Luego, de la definición 3.1 se tiene que:

$$\forall 1 \leq j \leq m, \quad \bar{u}_j = \begin{cases} - & \text{si } b^j = 0, \\ 0 & \text{si } b^j = 1. \end{cases}$$

Así, considerando $\Delta(a', b^j) = \bar{u}_j$, necesariamente se tiene que $a' = 1$. Luego, como se cumple para todo j , se tiene que $\bar{u} = \Delta_{a', B}$, con $a' = 1 = 1 - a$. El caso cuando u contiene valores en $\{-, 0\}$ es análogo, considerando $a = 1$. \square

Finalmente, con estos conceptos podemos dar la siguiente caracterización para matrices de discrepancia.

Teorema 3.20. *Sea $M \in \mathcal{M}_{m \times n}(\{+, -, 0\})$ sin filas de 0. M es matriz de discrepancias si y solo si existe $1 \leq i \leq m$ tal que, para todo $1 \leq k \leq n$ y para $q = \frac{m}{i}$*

- (i) $\forall 1 \leq j, t \leq q, A^{j,i} \neq A^{t,i}$,
- (ii) $\forall 1 \leq j \leq q, A^{j,i}$ no tiene filas repetidas ,
- (iii) $\forall 1 \leq j \leq q, A_{.k}^{j,i}$ no contiene signos contrarios y
- (iv) $\forall 1 \leq j, t \leq q, A_{.k}^{j,i} = A_{.k}^{t,i}$ o bien $A_{.k}^{j,i} = \overline{A_{.k}^{t,i}}$.

Demostración. Sea $M \in \mathcal{M}_{m \times n}(\{+, -, 0\})$ matriz de discrepancias, entonces por definición 3.4 existen $A, B \subseteq \{0, 1\}^n$, con $A \cap B = \emptyset$ tal que $M = \Delta_{A, B}$. Tomando $i = |B|$, se tiene que para todo $1 \leq j < q = \frac{m}{i}$ el j -ésimo cajón de tamaño i de M , $A^{j,i}$, corresponde a la discrepancia entre todos los vectores de B con el j -ésimo vector de A , es decir, $A^{j,i} = \Delta_{a_j, B}$. Como B no repite vectores, entonces ningún cajón repite filas, por otro lado como A no repite vectores, entonces para cada par de cajones estos difieren en al menos una columna. Para cada j , la k -ésima columna del cajón $A^{j,i}$ está dada por:

$$A_{.k}^{j,i} = \begin{bmatrix} \Delta(a_k^j, b_k^1) \\ \vdots \\ \Delta(a_k^j, b_k^i) \end{bmatrix}.$$

Luego, como para todas las discrepancias la primera entrada coincide, la columna no admite signos contrarios.

Sean $j \neq t \in \{1, \dots, q\}$, consideremos los cajones $\Delta_{a_j, B} = A^{j,i}$ y $\Delta_{a_t, B} = A^{t,i}$. Para cada k , si $a_k^j = a_k^t$, entonces $A_{.k}^{j,i} = A_{.k}^{t,i}$, si no, $a_k^j \neq a_k^t$, luego $a_k^j = 1 - a_k^t$ y, por proposición 3.19, se tiene que $A_{.k}^{j,i} = \overline{A_{.k}^{t,i}}$.

Sea ahora $M \in \mathcal{M}_{m \times n}(\{+, -, 0\})$. Supongamos que existe i tal que M cumple con (i), (ii), (iii) y (iv). De (ii) y (iii) se tiene que, por proposición 3.16, para cada $j \in \{1, \dots, q\}$ existe, sin pérdida de generalidad, un elemento $a^j \in \{0, 1\}$ y un conjunto $B^j \subseteq \{0, 1\}^n$, con $|B^j| = i$, tal que $A^{j,i} = \Delta_{a^j, B^j}$.

Sean $A^{j,i}, A^{t,i}$ dos cajones distintos de M . De (iv) se tiene que, para todo $1 \leq k < n$, $A_{\cdot k}^{j,i} = A_{\cdot k}^{t,i}$ o bien $A_{\cdot k}^{j,i} = \overline{A_{\cdot k}^{t,i}}$.

Supongamos que $A_{\cdot k}^{j,i} = A_{\cdot k}^{t,i}$, luego $\Delta_{a_k^j, B_k^j} = \Delta_{a_k^t, B_k^t}$, donde B_k^j corresponde a los valores en la k -ésima coordenada de cada vector en B^j . Si $a_k^j = a_k^t$, entonces por proposición 3.7 se tiene $B_k^j = B_k^t$.

Si $a_k^j \neq a_k^t$, entonces necesariamente $B_k^j \neq B_k^t$, pues discrepancias que difieren en la primera entrada no pueden resultar en el mismo signo. Así, como las discrepancias difieren en ambas entradas, por definición 3.1 la única forma en que los resultados sean iguales es que $A_{\cdot k}^{j,i} = A_{\cdot k}^{t,i} = \mathbf{0}$, con $\mathbf{0}$ la columna de solo signos 0. Luego se tiene que todos los valores en B_k^j y B_k^t deben ser iguales a a_k^j y a_k^t , respectivamente. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, podemos cambiar el valor de a_k^j , y por ende de toda la columna B_k^j , a conveniencia para que $a_k^j = a_k^t$ y $B_k^j = B_k^t$ sin modificar la matriz M .

Ahora bien, si $A_{\cdot k}^{j,i} = \overline{A_{\cdot k}^{t,i}}$, considerando que $A_{\cdot k}^{t,i} = \Delta(a_k^t, B_k^t)$ y que no contiene signos contrarios, entonces por proposición 3.19 se tiene que $A_{\cdot k}^{j,i} = \Delta(1 - a_k^t, B_k^t)$.

En resumen, podemos tomar $B_k^j = B_k^t$ y por arbitrariedad de k se tiene que $B^j = B^t$. Dado que se cumple para cualquier par de cajones, se tiene que existe $B \subseteq \{0, 1\}^n$ con $|B| = i$ que verifica

$$\forall 1 \leq j \leq q : A^{j,i} = \Delta(a^j, B).$$

De (i) se tiene que no hay cajones repetidos, por ende para todo $j \neq k \in \{1, \dots, q\}$ se tiene que $a^j \neq a^k$. Así, definiendo $A \subseteq \{0, 1\}^n$ como

$$A = \bigcup_{j=1}^q a^j.$$

se tiene que $|A| = q$, luego $|A||B| = m$ y como M no contiene filas de 0, entonces podemos concluir que $M = \Delta_{A,B}$ \square

3.2. Aplicaciones

Dado un conjunto de observaciones $\mathcal{O} \subseteq \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}$ y los conjuntos $F(0), F(1) \subseteq \{0, 1\}^n$ asociados a estas observaciones introducidos en la definición 2.6. Se plantea el siguiente problema:

Problema 1 (Problema de compatibilidad en funciones unate). *Dados $F(0), F(1) \subseteq \{0, 1\}^n$ ¿Existe una función unate f compatible con $F(0)$ y $F(1)$?*

Este corresponde a un problema de inferencia en funciones booleanas, el cual ha sido abordado en el trabajo de tesis doctoral de Katerin De la Hoz et al. (2025) [7]. En esta sección mostraremos las principales herramientas que fueron utilizadas en dicho trabajo, las cuales serán fundamentales para posteriores capítulos.

Consideremos una función booleana unate f . Como para cada entrada de la función la dinámica puede ser creciente o decreciente, se define el vector de signos $\Sigma(f) \in \{-, +, 0\}^n$, denominado como *vector de influencia*, para visualizar de mejor manera las distintas dinámicas asociadas a la función. En este vector, la i -ésima entrada es $+$ si la dinámica es creciente, $-$ si la dinámica es decreciente y 0 si la dinámica es constante.

Se introduce ahora la noción de cobertura de un vector de signos con respecto a la matriz $\Delta_{F(0), F(1)}$.

Definición 3.21. *Dado un vector de signos $\Sigma \in \{-, +, 0\}^n$, se dice que Σ cubre a la matriz $\Delta_{F(0), F(1)}$ si, para toda fila r de dicha matriz, existe un índice $j \in [n]$ tal que $\Sigma_j = r_j$.*

Es razonable suponer que, si f es compatible con $F(0)$ y $F(1)$, entonces su vector de signos $\Sigma(f)$ debe tener alguna relación con la matriz $\Delta_{F(0), F(1)}$. En efecto, en el trabajo de Katerin De la Hoz et al. (2025) [7] se establece formalmente esta relación:

Proposición 3.22 (Ver Anexo). *Sean $F(0), F(1) \subseteq \{0, 1\}^n$. Si f es una función unate compatible con $F(0)$ y $F(1)$, entonces $\Sigma(f)$ cubre la matriz $\Delta_{F(0), F(1)}$.*

Surge entonces la pregunta inversa ¿Es posible construir una función unate compatible a partir de un vector de signos que cubre $\Delta_{F(0), F(1)}$? En el trabajo de Katerin De la Hoz et al. (2025) se responde afirmativamente mediante la construcción explícita de funciones a partir de un vector de signos Σ que cumple dicha propiedad.

Definición 3.23. *Dados $F(0), F(1) \subseteq \{0, 1\}^n$ y un vector de signos $\Sigma \in \{-, +, 0\}^n$ que cubre $\Delta_{F(0), F(1)}$, se definen las funciones $f^{\downarrow\Sigma}(x)$ y $f^{\uparrow\Sigma}(x)$ como:*

$$f^{\downarrow\Sigma}(x) := \bigvee_{z \in F(1)} C_z, \quad f^{\uparrow\Sigma}(x) := 1 - \bigvee_{t \in F(0)} C'_t,$$

donde

$$C_z := \bigwedge_{\substack{z_j=1 \\ \Sigma_j=+}} x_j \wedge \bigwedge_{\substack{z_j=0 \\ \Sigma_j=-}} \neg x_j, \quad C'_t := \bigwedge_{\substack{t_j=1 \\ \Sigma_j=-}} x_j \wedge \bigwedge_{\substack{t_j=0 \\ \Sigma_j=+}} \neg x_j.$$

Cuando no haya ambigüedad, denotaremos estas funciones simplemente como $f^{\downarrow}(x)$ y $f^{\uparrow}(x)$. En el trabajo de Katerin De la Hoz et al. (2025) [7] se demuestra lo siguiente.

Proposición 3.24. *Las funciones $f^{\downarrow}(x)$ y $f^{\uparrow}(x)$ son unates y compatibles con los conjuntos $F(0)$ y $F(1)$.*

Esto permite enunciar el siguiente teorema de existencia:

Teorema 3.25. *Existe una función unate compatible con $F(0)$ y $F(1)$ si y solo si existe un vector de signos que cubre la matriz $\Delta_{F(0),F(1)}$.*

Todas las demostraciones de los resultados anteriores se encuentran detalladas en el Anexo.

Capítulo 4

Inferencia en Redes Regulatorias

En capítulos anteriores discutimos los problemas de inferencia de funciones booleanas para conjuntos de observaciones de la forma $\mathcal{O} \subseteq \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}$, los cuales han sido objeto de un análisis detallado en [7], en el cual se caracteriza su compatibilidad mediante herramientas derivadas de la discrepancia. Un paso natural es generalizar la noción de compatibilidad al contexto de redes booleanas.

Definición 4.1. Sea $\hat{\mathcal{O}} \subseteq \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n$ un conjunto de observaciones y $F = (f_1, \dots, f_n)$ una red booleana. Diremos que F es compatible con $\hat{\mathcal{O}}$ si para todo $(x, y) \in \hat{\mathcal{O}}$, $F(x) = y$.

Así, se puede definir el siguiente problema general:

Problema 2 (Problema de Compatibilidad para redes Regulatorias). Dado un conjunto de observaciones $\hat{\mathcal{O}} \subseteq \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n$ ¿Existe red regulatoria compatible con $\hat{\mathcal{O}}$?

Este problema extiende directamente el problema de funciones unate visto en el capítulo anterior, ya que una red F regulatoria compatible con $\hat{\mathcal{O}}$ corresponde con que cada función de activación local sea unate y compatible con su respectivo conjunto de observaciones.

Esta formulación permite abordar problemas más complejos como el siguiente:

Problema 3 (Problema de Inferencia de puntos periódicos en redes regulatorias). Dado un conjunto de puntos $X \subseteq \{0, 1\}^n$ ¿Existe red regulatoria F tal que cada punto de X sea un punto periódico de F ?

Notemos que la red booleana $I : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ tal que $I(x) = x$, para todo $x \in \{0, 1\}^n$, es una solución trivial del problema 3. Esto dado que I es regulatoria y todo vector $x \in \{0, 1\}^n$ es punto fijo de la red. Por otro lado, en [16] se construye otra solución en la cual todos los puntos de $\{0, 1\}^n$ pertenecen a un único ciclo límite, luego todos son puntos periódicos.

Ambas soluciones satisfacen que los puntos de X sean puntos periódicos, pero son soluciones que en la práctica dan poca información puesto que todos los puntos

son periódicos. Esto motiva la búsqueda de otras soluciones más naturales o ajustadas al problema 3 distintas de la red identidad y de la red presentada en [16].

4.1. Reformulación del Problema 3

Para hallar otras soluciones, reformularemos el problema 3 como un problema de inferencia en redes regulatorias. El objetivo es utilizar las herramientas relacionadas a las matrices de discrepancia formalizadas en el capítulo anterior.

Dada $F : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ una red regulatoria y $X \subseteq \{0, 1\}^n$ un conjunto de puntos. Consideremos el conjunto de observaciones $\hat{\mathcal{O}} \subseteq \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n$ dado por:

$$\hat{\mathcal{O}} := \{(x, y) : x \in X, y \in \{0, 1\}^n\}.$$

Si F es solución del problema 2, vale decir, es compatible con $\hat{\mathcal{O}}$, esto no necesariamente implica que los puntos de X son puntos periódicos, pues a menos que sean puntos fijos, su periodicidad podría depender de puntos fuera de X , como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2. Consideremos $n = 3$, el conjunto $X = \{000, 001, 010\}$ y el conjunto de observaciones $\hat{\mathcal{O}}$ dado por:

$$\hat{\mathcal{O}} = \{(000, 000), (001, 001), (010, 101)\}.$$

Consideremos las redes booleanas F y G dadas por:

$$\begin{aligned} F(x) &= ((x_1 \wedge (x_2 \vee \neg x_3)) \vee (x_2 \wedge \neg x_3), (x_1 \wedge (x_2 \vee x_3)) \vee (x_2 \wedge x_3), \\ &\quad (x_2 \wedge (\neg x_1 \vee x_3)) \vee (\neg x_1 \wedge x_3)) \\ G(x) &= (x_1 \vee (x_2 \wedge \neg x_3), x_2 \wedge (x_1 \vee x_3), x_3 \vee (x_2 \wedge \neg x_1)) \end{aligned}$$

Consideremos también la tabla de valores:

x	$F(x)$	$G(x)$
000	000	000
001	001	001
010	101	101
011	011	011
100	100	100
101	010	101
110	110	110
111	111	111

De su definición y la tabla de valores, F y G son redes booleanas regulatorias que son compatibles con $\hat{\mathcal{O}}$. Tanto en F y en G los puntos 000, 001 son puntos fijos. Por otro lado, en F el punto 010 es punto periódico pues pertenece al ciclo límite 010 – 101 – 010, sin embargo en G el punto 010 no tiene preimágenes, por ende no es punto periódico.

Para evitar estos casos, consideremos conjuntos de observaciones de la siguiente forma:

$$\mathcal{O}^\pi = \{(x, \pi(x)) : x \in X \wedge \pi : X \rightarrow X \text{ es permutación}\}.$$

De este modo se garantiza que, si existe una red regulatoria G compatible con \mathcal{O}^π , entonces X son puntos periódicos de G , ya que toda permutación sobre un conjunto finito se puede descomponer en ciclos disjuntos, por ende los puntos de X en G son puntos fijos o forman ciclos límites.

Así, podemos definir el siguiente problema derivado del problema 2:

Problema 4 (versión restringida del problema 2). *Dado el conjunto de puntos $X \subseteq \{0, 1\}^n$ ¿Existe una permutación π sobre X y una red regulatoria F tal que F sea compatible con el conjunto de observaciones $\mathcal{O}^\pi = \{(x, \pi(x)) : x \in X\}$?*

Se sigue que, si una red F es solución del problema 4, entonces F también es solución del problema 3. Consideremos ahora las funciones $f_1, f_2, \dots, f_n : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ como las funciones de activación local de F . Se sigue que, para todo $x \in \{0, 1\}^n$:

$$F(x) = y = (y_1, y_2, \dots, y_n) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)).$$

Así, definiendo para cada $i \in [n]$ el conjunto de observaciones $\mathcal{O}_i^\pi \subseteq \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}$ como:

$$\mathcal{O}_i^\pi = \{(x, \pi(x)_i) : x \in X \wedge \pi : X \rightarrow X \text{ es permutación}\}.$$

Se tiene que, si $F = (f_1, \dots, f_n)$ es compatible con \mathcal{O}^π entonces f_i es compatible con \mathcal{O}_i^π para cada $i \in [n]$. La implicancia inversa se tiene de manera natural, lo que motiva la siguiente observación.

Observación 4.3. *La red booleana $F = (f_1, \dots, f_n)$ es compatible con $\mathcal{O}^\pi \iff f_i$ es compatible con \mathcal{O}_i^π para todo $i \in [n]$.*

Y finalmente definiendo los conjuntos $F_i^\pi(0), F_i^\pi(1)$ como sigue:

$$F_i^\pi(0) = \{x \in X : \pi(x)_i = 0\}, \quad F_i^\pi(1) = \{x \in X : \pi(x)_i = 1\}.$$

De la proposición 2.7, podemos reescribir el problema 4 como un problema de múltiples funciones booleanas:

Problema 5 (Reformulación del Problema 4). *Dado el conjunto de puntos $X \subseteq \{0, 1\}^n$ ¿Existe una permutación π sobre X y, para cada $i \in [n]$, una función unate f_i compatible con $F_i^\pi(0)$ y $F_i^\pi(1)$?*

De esta manera, a pesar de ser un problema de inferencia en redes booleanas, este puede traducirse a problemas de inferencia de funciones booleanas y por ende se pueden aplicar las herramientas relacionadas a la discrepancia.

Si consideramos una permutación trivial, vale decir, $\pi(x) = x$ para todo $x \in X$, entonces la red identidad es compatible con \mathcal{O}^π , luego también es solución del

problema 5. Por otro lado, dado que la dinámica de la red regulatoria planteada en [16] consiste de un único ciclo límite, entonces no existe π que admita esta red como solución del problema 5, salvo que $X = \{0, 1\}^n$. Por ello, para encontrar soluciones del problema 3 distintas de las ya mencionadas, consideraremos el siguiente problema derivado del problema 5:

Problema 6 (Versión restringida del problema 5). *Dado el conjunto de puntos $X \subset \{0, 1\}^n$ ¿Existe una permutación π de X distinta de la trivial y, para cada $i \in [n]$, una función unate f_i compatible con los conjuntos $F_i^\pi(0)$ y $F_i^\pi(1)$?*

4.2. Solución del Problema 6

Sea $X \subset \{0, 1\}^n$ con $|X| = p$. Supongamos que $p = 1$. Consideremos $X = \{u\}$, luego $\mathcal{O}^\pi = \{(u, u)\}$ para todo π . Consideremos la red booleana $G : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ dada por:

$$\forall x \in \{0, 1\}^n, G(x) = u.$$

G es red regulatoria, puesto que al ser red constante cada función de activación local es constante y por ende unate. Más aún, u es punto fijo de G , por lo tanto la red constante G es solución al problema 6.

Proposición 4.4. *El problema 6 tiene solución para todo subconjunto unitario de $\{0, 1\}^n$.*

Supongamos que $2 \leq |X| = p \leq n$. Sean $a, b \in X$, se define la distancia de Hamming entre a y b , $d_H(a, b)$, como la cantidad de coordenadas en las que difieren, vale decir

$$d_H(a, b) := |\{i \in [n] : a_i \neq b_i\}|.$$

Al conjunto de coordenadas en las cuales estos puntos difieren lo denotaremos como $D(a, b) = \{i \in [n] : a_i \neq b_i\}$. A continuación mostraremos que, considerando π' como una permutación trivial e intercambiando las imágenes de dos puntos que maximicen la distancia de Hamming, vale decir, si $a, b \in X$ son un par de esos puntos,

$$\pi'(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in X \setminus \{a, b\}, \\ b & \text{si } x = a, \\ a & \text{si } x = b. \end{cases}$$

entonces, el problema 6 tiene solución para todo X con $2 \leq p < n$.

Para ilustrar esto, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.5. *Para $X = \{0000, 1001, 0111, 1010\}$, notemos que los puntos 0000 y 0111 maximizan la distancia de Hamming, luego:*

$$\mathcal{O}^{\pi'} = \{(0000, 0111), (1001, 1001), (0111, 0000), (1010, 1010)\}.$$

Tenemos que $D(a, b) = \{2, 3, 4\}$. Notemos que para $\mathcal{O}_1^{\pi'}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_1^{\pi'} &= \{(0000, 0), (1001, 1), (0111, 0), (1010, 1)\} \\ F_1^{\pi'}(0) &= \{0000, 0111\}, \quad F_1^{\pi'}(1) = \{1001, 1010\}\end{aligned}$$

Y la matriz $\Delta_{F_1^{\pi'}(0), F_1^{\pi'}(1)}$ está dada por:

$$\Delta_{F_1^{\pi'}(0), F_1^{\pi'}(1)} = \begin{bmatrix} + & 0 & 0 & + \\ + & 0 & + & 0 \\ + & - & - & 0 \\ + & - & 0 & - \end{bmatrix}.$$

Luego, el vector $\Sigma^1 = [+000]$ cubre la matriz $\Delta_{F_1^{\pi'}(0), F_1^{\pi'}(1)}$. Por otro lado, para $i \in D(a, b)$:

$$\Delta_{F_2^{\pi'}(0), F_2^{\pi'}(1)} = \begin{bmatrix} 0 & - & - & - \\ - & 0 & 0 & - \\ - & 0 & - & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta_{F_3^{\pi'}(0), F_3^{\pi'}(1)} = \begin{bmatrix} 0 & - & - & - \\ + & - & 0 & - \\ - & 0 & 0 & - \\ 0 & 0 & + & - \end{bmatrix},$$

$$\Delta_{F_4^{\pi'}(0), F_4^{\pi'}(1)} = \begin{bmatrix} 0 & - & - & - \\ + & - & - & 0 \\ - & 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & - & + \end{bmatrix}.$$

Notemos que las anteriores matrices pueden ser cubiertas por los vectores $\Sigma^2 = [0+---]$, $\Sigma^3 = [0-+-]$, $\Sigma^4 = [0---+]$, los cuales solo difieren en una coordenada con la discrepancia $\Delta(b, a) = [0- - -]$.

La similaridad de los vectores de signos con la discrepancia $\Delta(b, a)$ en el ejemplo anterior tiene sentido dado que a y b maximizan la distancia de Hamming, luego su discrepancia maximiza la cantidad de signos no 0 y por ende cualquier otra discrepancia no debiera ser muy distinta de $\Delta(b, a)$.

Proposición 4.6. Dado un conjunto de puntos $X \subset \{0, 1\}^n$, con $|X| \geq 2$. Sean $a, b \in X$ puntos tales que $d_H(a, b) = \max_{u, v \in X} \{d_H(u, v)\}$, considerando la permutación π' sobre X dada por:

$$\pi'(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in X \setminus \{a, b\}, \\ b & \text{si } x = a, \\ a & \text{si } x = b. \end{cases}$$

Entonces existe red regulatoria G compatible con el conjunto de observaciones $\mathcal{O}^{\pi'}$.

Demostración. Consideremos los puntos $a, b \in X$ y la permutación π' sobre X dados en el enunciado. Sin pérdida de generalidad, consideremos $D = D(a, b)$.

Sea $i \in [n]$, consideremos ahora el conjunto de observaciones $\mathcal{O}_i^{\pi'}$ y los conjuntos $F_i^{\pi'}(0)$, $F_i^{\pi'}(1)$ asociados. Podemos distinguir 2 casos.

Si $i \notin D$, entonces a y b tiene el mismo valor en esta coordenada, vale decir $a_i = b_i$. Se sigue que:

$$\begin{aligned} \forall u \in X \setminus \{a, b\} \quad (u, \pi'(u)_i) &= (u, u_i) \in \mathcal{O}_i^{\pi'}, \\ (a, \pi'(a)_i) &= (a, b_i) = (a, a_i) \in \mathcal{O}_i^{\pi'}, \\ (b, \pi'(b)_i) &= (b, a_i) = (b, b_i) \in \mathcal{O}_i^{\pi'}. \end{aligned}$$

Luego, podemos inferir que, para todo $x \in F_i^{\pi'}(0)$ e $y \in F_i^{\pi'}(1)$, $x_i = 0$ e $y_i = 1$, por lo tanto $\Delta(x, y)_i = +$ y entonces la i -ésima columna de la matriz $\Delta_{F_i^{\pi'}(0), F_i^{\pi'}(1)}$ solo contiene signos $+$. Así, por definición 3.21 el vector de signos $\Sigma^i = e_i^+$ cubre la matriz $\Delta_{F_i^{\pi'}(0), F_i^{\pi'}(1)}$, donde e_i^+ es el vector de signos que tiene 0 en todas las posiciones salvo en la i -ésima coordenada, donde tiene un signo $+$.

De la definición 3.23 y la proposición 3.24, sabemos que las funciones unate $f^{\downarrow \Sigma^i}(x)$ y $f^{\uparrow \Sigma^i}(x)$ son compatibles con $F_i^{\pi'}(0)$ y $F_i^{\pi'}(1)$.

Por otro lado, si $i \in D$ entonces a y b difieren en la i -ésima coordenada. Supongamos que $a_i = 0$ y $b_i = 1$, luego:

$$\begin{aligned} \pi'(a)_i = b_i = 1 &\implies a \in F_i^{\pi'}(1) \\ \pi'(b)_i = a_i = 0 &\implies b \in F_i^{\pi'}(0) \end{aligned}$$

Consideremos los conjuntos $F'(0) = F_i^{\pi'}(0) \setminus \{b\}$ y $F'(1) = F_i^{\pi'}(1) \setminus \{a\}$. Al reordenar las filas de la matriz $\Delta_{F_i^{\pi'}(0), F_i^{\pi'}(1)}$, podemos representarla como una matriz por bloques de la forma:

$$\Delta_{F_i^{\pi'}(0), F_i^{\pi'}(1)} = \begin{bmatrix} \Delta_{F'(0), F'(1)} \\ \Delta_{b, F'(1)} \\ \Delta_{F'(0), a} \\ \Delta(b, a) \end{bmatrix}.$$

Por definición, para todo $x \in F'(0)$ e $y \in F'(1)$, se tiene que $x_i = 0$ e $y_i = 1$. Para $\Delta_{F'(0), F'(1)}$, análogo al caso anterior, se puede cubrir con el vector de signos $\Sigma^i = e_i^+$.

Para $\Delta_{b, F'(1)}$, como $b_i = 1$, entonces la i -ésima columna solo contiene signos 0. Consideremos un vector $z \in F'(1)$, luego $z_i = 1$. Notemos que, como la distancia de Hamming entre a y b es máxima, entonces $d_H(a, z) \leq d_H(a, b)$. Se sigue que existe al menos un $j \in D$ tal que $z_j = a_j$, si no, entonces podría darse que $d_H(a, z) = d_H(a, b)$, $D(a, z) = D(a, b)$ y por ende $z = b$.

Más aún, $j \neq i$, ya que $z_i = b_i \neq a_i$. Así, $z_j \neq b_j$ y las discrepancias $\Delta(b, a)$ y $\Delta(b, z)$ tienen el mismo signo en la j -ésima coordenada. Como se cumple para todo $F'(1)$, entonces cada fila de la matriz $\Delta_{b, F'(1)}$ coincide en al menos una coordenada en D , distinta de i , con la discrepancia $\Delta(b, a)$.

Para $\Delta_{F'(0),a}$ se tiene que $a_i = 0$ y para todo $z \in F'(0)$, $z_i = 0$, entonces la i -ésima columna solo contiene signos 0. Análogo al caso anterior, $d_H(z, b) \leq d_H(a, b)$ y por ende existe $j \neq i$ tal que $z_j = b_j \neq a_j$ y las discrepancias $\Delta(z, a)$ y $\Delta(b, a)$ tienen el mismo signo en la j -ésima coordenada.

$$\begin{aligned} \Delta_{b,F'(1)} &= \begin{bmatrix} \dots & 0 & \dots & +/0 & \dots & -/0 & \dots \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & +/0 & \dots & -/0 & \dots \end{bmatrix} \\ \Delta_{F'(0),a} &= \begin{bmatrix} \dots & 0 & \dots & +/0 & \dots & -/0 & \dots \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & +/0 & \dots & -/0 & \dots \end{bmatrix} \\ \Delta(b, a) &= \left(\begin{array}{ccccccc} \dots & - & \dots & + & \dots & - & \dots \\ & i & & j & & l & \end{array} \right) \end{aligned}$$

Figura 4.1: Signos en las matrices $\Delta_{b,F'(1)}$ y $\Delta_{F'(0),a}$ según $\Delta(b, a)$, $i, j, l \in D^1$.

En consecuencia, el vector de signos Σ^i dado por:

$$\forall t \in [n] \quad \Sigma_t^i = \begin{cases} + & \text{si } t = i, \\ \Delta(b, a)_t & \text{si no.} \end{cases}$$

cubre la matriz de discrepancias $\Delta_{F_i^{\pi'(0)}, F_i^{\pi'(1)}}$ y entonces las funciones unate $f^{\downarrow \Sigma^i}(x)$ y $f^{\uparrow \Sigma^i}(x)$ son compatibles con $F_i^{\pi'(0)}$ y $F_i^{\pi'(1)}$.

Así, para cada $i \in [n]$, las funciones unate $f^{\downarrow \Sigma^i}(x)$ y $f^{\uparrow \Sigma^i}(x)$ son compatibles con $F_i^{\pi'(0)}$ y $F_i^{\pi'(1)}$. Por proposición 2.7, son compatibles con $\mathcal{O}_i^{\pi'}$ y entonces de la observación 4.3 la red booleana $G = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ donde, para cada $i \in [n]$, $g_i \in \{f^{\downarrow \Sigma^i}(x), f^{\uparrow \Sigma^i}(x)\}$, es una red regulatoria y compatible con $\mathcal{O}^{\pi'}$. \square

En conclusión, la red regulatoria G obtenida en el anterior desarrollo es solución del problema 6 considerando la permutación π' sobre X . Esta red también es solución del problema 3. Más aún, como la permutación π es distinta de la trivial, entonces G es distinta de la red identidad y para $|X| > 2$ la dinámica de la red contiene puntos fijos y ciclos límites, por lo tanto es distinta de la red regulatoria presentada en [16].

Ejemplo 4.7. Retomando el ejemplo 4.5, consideremos la red $G = (f^{\downarrow \Sigma^1}, f^{\downarrow \Sigma^2}, f^{\downarrow \Sigma^3}, f^{\downarrow \Sigma^4})$ dada por:

$$G = (x_1, \neg x_3 \wedge \neg x_4, \neg x_2 \wedge \neg x_4, \neg x_2 \wedge \neg x_3).$$

¹Los símbolos $+/0, -/0$ indican que en esa posición solo puede haber alguno de los dos signos.

Y su tabla de valores:

x	$f_{\downarrow\Sigma^1}$	$f_{\downarrow\Sigma^2}$	$f_{\downarrow\Sigma^3}$	$f_{\downarrow\Sigma^4}$
0000	0	1	1	1
0001	0	0	0	1
0010	0	0	1	0
0011	0	0	0	0
0100	0	1	0	0
0101	0	0	0	0
0110	0	0	0	0
0111	0	0	0	0
1000	1	1	1	1
1001	1	0	0	1
1010	1	0	1	0
1011	1	0	0	0
1100	1	1	0	0
1101	1	0	0	0
1110	1	0	0	0
1111	1	0	0	0

En la tabla de valores, los puntos de X se encuentran con color verde.

De la elección de π en el ejemplo 4.5 y de la tabla de valores podemos inferir que G es solución del problema 6 y también del problema 3.

Capítulo 5

Puntos fijos

En el capítulo anterior mostramos que, dado un conjunto arbitrario de puntos $X \subseteq \{0, 1\}^n$, siempre es posible construir una red regulatoria no trivial cuya dinámica tiene a los puntos en X como puntos periódicos.

Sin embargo, esta construcción no garantiza que dichos puntos sean los únicos puntos periódicos de la red, lo que limita su utilidad práctica. En particular, se pueden generar puntos fijos o ciclos límites fuera de X , como se observa en el ejemplo 4.7, donde los puntos $\{0001, 0010, 0100, 1100\}$ son puntos fijos de la red que no pertenecen al conjunto X dado.

Este hecho motiva el estudio del siguiente problema:

Problema 7 (Problema de Inferencia Estricta en Redes Regulatorias).

Dado un conjunto de puntos $X \subseteq \{0, 1\}^n$ ¿ Existe una red regulatoria F tal que los puntos en X sean los únicos puntos periódicos de F ?

Sea $F : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ una red regulatoria que es solución del problema 7, entonces F verifica las siguientes condiciones:

- $(\forall x \in X) F(x) \in X \wedge \exists! y \in X : F(y) = x,$
- $(\forall x \notin X) \nexists k \in \mathbb{N} : F^k(x) = x.$

La primera condición se debe a que, si F contiene ciclos límites, entonces estos ciclos están compuestos necesariamente sólo de puntos en X . Como además cada punto en X debe pertenecer a un ciclo límite o bien ser punto fijo, entonces F actúa como una permutación sobre el conjunto X . Del capítulo anterior sabemos que cualquier red F compatible con un conjunto de observaciones \mathcal{O}^π de la forma:

$$\mathcal{O}^\pi = \{(x, \pi(x)) : x \in X \wedge \pi : X \rightarrow X \text{ es permutación}\},$$

verifica la primera condición. Sin embargo, F no necesariamente verifica la segunda condición, ya que puede tener puntos periódicos fuera del conjunto X . En

general no existen caracterizaciones que permitan descartar, sin recorrer exhaustivamente el espacio, la existencia de atractores (puntos fijos o ciclos límites) fuera del conjunto X .

Por otro lado, incluso al restringirse a puntos fijos, que es el caso más simple de atractores, el problema sigue siendo altamente estructural: se trata de construir funciones unate que fijen un subconjunto dado de $\{0, 1\}^n$ sin fijar ningún otro punto fuera del subconjunto.

Por ello, en este capítulo nos enfocaremos exclusivamente en el caso de los puntos fijos. Más formalmente:

Problema 8 (Problema de Inferencia Estricta de Puntos Fijos en Redes Regulatorias). *Dado un conjunto de puntos $X \subseteq \{0, 1\}^n$ ¿Existe red regulatoria tal que los puntos en X sean sus únicos puntos fijos?*

Así, para encontrar una red factible para el problema 8 podemos buscar entre todas las redes factibles del problema 5 considerando π como la permutación trivial, vale decir, analizar todas las redes regulatorias compatibles con el conjunto de observaciones $\mathcal{O}^\pi = \{(x, x) : x \in X\}$.

Ahora bien, determinar todas las redes regulatorias que son compatibles con un conjunto de observaciones dado es otro problema distinto. Sin embargo, como vimos en la observación 4.3, este problema equivale a determinar todas las funciones unate que son compatibles para cada conjunto de observación \mathcal{O}_j^π asociado a \mathcal{O}^π y, en el trabajo de Katerin De la Hoz et al. (2025) [7], se presenta un teorema que permite caracterizar las funciones unate que son compatibles.

Teorema 5.1. *(Ver Anexo) Sea $F(0), F(1) \subseteq \{0, 1\}^n$ y Σ un vector que cubre $\Delta_{F(0), F(1)}$. Una función unate f tal que $\Sigma(f) = \Sigma$ es compatible con las observaciones si y solo si $f^{\downarrow\Sigma} \leq f \leq f^{\uparrow\Sigma}$.*

Esta caracterización depende a su vez del vector de signos Σ dado y determinar cuántos y cuáles vectores de signos cubren la matriz $\Delta_{F(0), F(1)}$ es otro problema abierto.

Por todo ello, en las siguientes secciones mostraremos que existen conjuntos de puntos cuyas propiedades nos permiten concluir que no es posible construir una red regulatoria que sea solución factible del problema 8, lo que da evidencia de la dificultad intrínseca del problema.

5.1. Conjunto de interés

Consideremos el conjunto de puntos $X_n^{\text{even}} = \{x \in \{0, 1\}^n : w_H(x) \text{ es par}\}$, donde $w_H(x) = \sum_i x_i$ corresponde al peso de Hamming del vector x .

Ejemplo 5.2. *Para $n = 4$, el conjunto X está dado por:*

$$X_4^{\text{even}} = \{0000, 0011, 0101, 0110, 1001, 1010, 1100, 1111\}.$$

Luego $\mathcal{O}^\pi = \{(x, x) : x \in X_4^{even}\}$. Para $j = 3$ se tienen:

$$\mathcal{O}_3^\pi = \{(0000, 0), (0011, 1), (0101, 0), (0110, 1), (1001, 0), (1010, 1), (1100, 0), (1111, 1)\},$$

$$F_3^\pi(0) = \{0000, 0101, 1001, 1100\}, F_3^\pi(1) = \{0011, 0110, 1010, 1111\}.$$

$$\Delta_{F_3^\pi(0), F_3^\pi(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & + & + \\ 0 & + & + & 0 \\ + & 0 & + & 0 \\ + & + & + & + \\ 0 & - & + & 0 \\ 0 & 0 & + & - \\ + & - & + & - \\ + & 0 & + & 0 \\ - & 0 & + & 0 \\ - & + & + & - \\ 0 & 0 & + & - \\ 0 & + & + & 0 \\ - & 0 & + & + \\ 0 & 0 & + & - \\ 0 & + & + & 0 \\ 0 & - & + & + \\ 0 & 0 & + & + \end{bmatrix}.$$

Se puede inferir que $\Sigma = [00 + 0]$ cubre $\Delta_{F_3^\pi(0), F_3^\pi(1)}$. Las discrepancias $[00 + +]$ y $[00 + -]$ no pueden ser cubiertas por un vector de signos Σ con $\Sigma_3 \neq +$.

Dado $i \in [n]$, como para todo $x \in F_i^\pi(0)$ e $y \in F_i^\pi(1)$ se tiene que $x_i = 0$ e $y_i = 1$, entonces la i -ésima columna de la matriz $\Delta_{F_i^\pi(0), F_i^\pi(1)}$ solo contiene signos $+$, de manera que el vector de signos $\Sigma = e_i^+$ cubre la matriz. Más aún, de la definición 3.21 cualquier vector de signos Σ tal que $\Sigma_i = +$ cubre la matriz, lo que motiva la siguiente proposición.

Proposición 5.3. *Sea $\mathcal{O}_i^\pi = \{(x, x_i) : x \in X_n^{even}\}$ y sean $F_i^\pi(0), F_i^\pi(1)$ definidos con respecto a \mathcal{O}_i^π . El vector de signos $\Sigma \in \{0, +, -\}^n$ cubre $\Delta_{F_i^\pi(0), F_i^\pi(1)}$ si y solo si $\Sigma_i = +$.*

Demostración. Supongamos que $\Sigma_i = +$, luego por lo anteriormente explicado Σ cubre $\Delta_{F_i^\pi(0), F_i^\pi(1)}$.

Por otro lado, sea Σ un vector de signos que cubre $\Delta_{F_i^\pi(0), F_i^\pi(1)}$ y por contradicción supongamos que $\Sigma_i \in \{0, -\}$. Consideremos $i, j, k \in [n]$ todos distintos y consideremos los siguientes vectores en $\{0, 1\}^n$:

$$\begin{aligned} u_1 &= e_j + e_k, & v_1 &= e_i + e_j, \\ u_2 &= \vec{0}, & v_2 &= e_i + e_k. \end{aligned}$$

Donde e_t es el t -ésimo vector canónico para todo $t \in [n]$ y $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$. Como $w_H(u_1) = w_H(v_1) = w_H(v_2) = 2$ y $w_H(u_2) = 0$, entonces $u_1, u_2, v_1, v_2 \in X_n^{\text{even}}$. Por definición de $F_i^\pi(0)$ y de $F_i^\pi(1)$, $u_1, u_2 \in F_i^\pi(0)$ y $v_1, v_2 \in F_i^\pi(1)$, luego las discrepancias $\Delta(u_1, v_1)$ y $\Delta(u_2, v_2)$ están en la matriz $\Delta_{F_i^\pi(0), F_i^\pi(1)}$.

$$\forall t \in [n], \quad \Delta(u_1, v_1)_t = \begin{cases} + & \text{si } t = i, \\ - & \text{si } t = k, \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$$\Delta(u_2, v_2)_t = \begin{cases} + & \text{si } t = i, k, \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$$\Delta_{F_i^\pi(0), F_i^\pi(1)} = \begin{array}{ccccccc} & & k & & i & & j \\ \left[\begin{array}{ccccccc} \cdots & 0 & - & 0 & \cdots & 0 & + & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & + & 0 & \cdots & 0 & + & 0 & \cdots & 0 & \cdots \end{array} \right] & \begin{array}{l} \rightarrow \Delta(u_1, v_1) \\ \rightarrow \Delta(u_2, v_2) \end{array} \end{array}$$

Como $\Sigma_i \neq +$ y Σ cubre $\Delta_{F_i^\pi(0), F_i^\pi(1)}$, Σ debe cubrir a $\Delta(u_1, v_1)$ y $\Delta(u_2, v_2)$ en coordenadas distintas de i , pero estas discrepancias tienen signos 0 en todas las coordenadas menos en i y k , luego necesariamente deben ser cubiertas por Σ_k .

Como ambas discrepancias difieren de signo en su k -ésima coordenada, entonces ambas no pueden ser cubiertas al mismo tiempo sólo por esta coordenada, por lo que Σ no cubre ambas discrepancias, luego Σ no puede cubrir $\Delta_{F_i^\pi(0), F_i^\pi(1)}$. En consecuencia, Σ_i necesariamente debe tener signo $+$. \square

Observación 5.4. *Existen conjuntos de puntos $X \subseteq \{0, 1\}^n$ distintos de X_n^{even} para los cuales también aplica el resultado de la proposición 5.3. En particular, de la demostración podemos inferir que el conjunto $X' = \{x \in \{0, 1\}^n : w_H(x) = 2\} \cup \{\vec{0}\}$ también verifica la proposición.*

5.2. Cláusulas singulares y signos 0

Dado $i \in [n]$, Consideremos un vector de signos Σ que cubre $\Delta_{F_i^\pi(0), F_i^\pi(1)}$. De la proposición 3.24, sabemos que las funciones unate $f^{\downarrow(x)\Sigma}$ y $f^{\uparrow(x)\Sigma}$ son compatibles con $F_i^\pi(0)$ y $F_i^\pi(1)$. Sin embargo, la forma de estas funciones depende del valor de Σ . Esto nos motiva a analizar las funciones según un valor de Σ dado que cubre la matriz $\Delta_{F_i^\pi(0), F_i^\pi(1)}$.

Recordemos que para todo $x \in F_i^\pi(0)$ y para todo $y \in F_i^\pi(1)$ se tiene que $x_i = 0$ e $y_i = 1$. Luego, de la proposición 5.3 se tiene $\Sigma_i = +$ y de la definición 3.23 se sigue que cada cláusula de $f^{\downarrow(x)}$ contiene al menos al literal x_i , mientras que cada cláusula de $f^{\uparrow(x)}$ contiene al menos al literal $\neg x_i$. Supongamos que existe

un vector $u \in F_i^\pi(1)$ tal que $C_u = x_i$, luego:

$$f^\downarrow(x) = x_i \vee \bigvee_{z \in F_i^\pi(1) \setminus \{u\}} C_z.$$

Como cada cláusula C_z contiene al literal x_i , se deduce por ley de absorción que $f^\downarrow(x) = x_i$. De manera análoga para $f^\uparrow(x)$, si existe un vector $v \in F_i^\pi(0)$ tal que $C'_v = \neg x_i$, entonces se tiene que $f^\uparrow(x) = 1 - \neg x_i = x_i$. Así, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 5.5. *Sea Σ un vector de signos que cubre la matriz $\Delta_{F_i^\pi(0), F_i^\pi(1)}$.*

- (i) *Si existe $u \in F_i^\pi(1)$ tal que $C_u = x_j$, entonces $f^\downarrow(x) = x_j$, y*
- (ii) *si existe $v \in F_i^\pi(0)$ tal que $C'_v = \neg x_j$, entonces $f^\uparrow(x) = x_j$.*

En adelante, a las cláusulas de la forma $C_u = x_i$ o $C'_v = \neg x_i$ las denominaremos *cláusulas singulares*.

Si el vector de signos Σ genera cláusulas singulares en $f^{\downarrow\Sigma}(x)$ y $f^{\uparrow\Sigma}(x)$, entonces $f^{\downarrow\Sigma}(x) = f^{\uparrow\Sigma}(x) = x_i$. Estas funciones simplifican el análisis de puntos fijos dado que admiten a todo vector $x \in X_n^{\text{even}}$ como punto fijo y, más aun, si $f^{\downarrow\Sigma}(x) = f^{\uparrow\Sigma}(x) = x_i$ entonces por el teorema 3.20 se concluye que no existen funciones unate distintas que sean compatibles con $F_i^\pi(0)$ y $F_i^\pi(1)$, pues no existe una función unate g tal que $f^{\downarrow\Sigma}(x) < g(x) < f^{\uparrow\Sigma}(x)$.

Por lo anterior, interesa analizar cuando un vector de signos Σ que cubre $\Delta_{F_i^\pi(0), F_i^\pi(1)}$ genera cláusulas singulares. Para ello, se definen los conjuntos $I^0, I^+, I^- \subseteq [n]$ como sigue:

$$I^c = \{j \in [n] : \Sigma_j = c\}.$$

Donde $c \in \{0, +, -\}$.

Observación 5.6. *Si Σ es un vector de signos que cubre la matriz $\Delta_{F_i^\pi(0), F_i^\pi(1)}$, entonces $I^+ \neq \emptyset$, esto dado que necesariamente $\Sigma_i = +$, luego $i \in I^+$.*

En primer lugar, consideraremos vectores de signos que contienen 0, luego $I^0 \neq \emptyset$. Consideremos el vector $u \in \{0, 1\}^n$ definido como sigue:

$$u_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in I^+ \setminus \{i\}, \\ 1 & \text{si } k \in I^- \vee k = i, \\ c & \text{si } k \in I^0. \end{cases}$$

Donde $c = 0$ si $|I^-|$ es impar y, si $|I^-|$ es par, se fija un $s \in I^0$ tal que $x_s = 1$ y el resto se hace 0. Luego:

$$w_H(u) = \begin{cases} |I^-| + 1 & \text{si } |I^-| \text{ es impar,} \\ |I^-| + 2 & \text{si } |I^-| \text{ es par.} \end{cases}$$

En ambos casos $w_H(u)$ es par, por lo tanto $u \in X_n^{\text{even}}$ y como $u_i = 1$, entonces $u \in F_i^\pi(1)$.

De la definición 3.23 se sigue que C_u es una cláusula singular, por lo tanto de la proposición 5.5 concluimos que $f^{\downarrow\Sigma}(x) = x_i$.

Ejemplo 5.7. Para $n = 4, j = 3$:

- Si $\Sigma = [00 + -]$, de la construcción anterior obtenemos el vector $u = 0011$. Este vector pertenece al conjunto X_n^{even} y además, $C_u = x_i$.
- Análogamente, si $\Sigma = [0++0]$, de la construcción anterior podemos obtener dos vectores $u = 1010$ o bien $u' = 0011$, ya que $|I^-|$ es par y hay dos coordenadas en $|I^0|$ que podemos fijar a 1. Ambos vectores pertenecen al conjunto X_n^{even} y su cláusula asociada en $f^{\downarrow\Sigma}(x)$ es x_i .

Por otro lado, tomando $v \in \{0, 1\}^n$ tal que

$$v_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in I^+ \setminus \{j\}, \\ 0 & \text{si } k \in I^- \vee k = j, \\ c & \text{si } k \in I^0. \end{cases}$$

Donde $c = 0$ si $|I^+|$ es impar y, si $|I^+|$ es par, se fija un $s \in I^0$ para que $y_s = 1$ y el resto se hace 0.

$$w_H(v) = \begin{cases} |I^+| - 1 & \text{si } |I^+| \text{ es impar,} \\ |I^+| - 1 + 1 & \text{si } |I^+| \text{ es par.} \end{cases}$$

En ambos casos, $w_H(v)$ es par, por lo tanto $v \in X_n^{\text{even}}$ y como $v_i = 0$, entonces $v \in F_i^\pi(0)$.

De la definición 3.23 se tiene que C'_v es una cláusula singular. Análogo al caso anterior, se concluye por proposición 5.5 que $f^{\uparrow\Sigma}(x) = x_i$.

Ejemplo 5.8. Para $n = 4, j = 3$:

- Si $\Sigma = [00 + -]$, de la construcción anterior obtenemos el vector $v = 0000$. Este vector pertenece al conjunto X_n^{even} y además, $C'_v = x_i$.
- Análogamente, si $\Sigma = [0++0]$, de la construcción anterior podemos obtener dos vectores $v = 1100$ o bien $u' = 0101$, ya que $|I^+|$ es par y hay dos coordenadas en $|I^0|$ que podemos fijar a 1. Ambos vectores pertenecen al conjunto X_n^{even} y su cláusula asociada en $f^{\uparrow\Sigma}(x)$ es x_i .

De ambos casos, dado un vector de signos Σ que cubre $\Delta_{F_i^\pi(0), F_i^\pi(1)}$ y tal que Σ tiene al menos un signo 0 podemos construir vectores $u, v \in \{0, 1\}^n$ tal que $u \in F_i^\pi(1)$, $v \in F_i^\pi(0)$ y $C_u = x_i$, $C'_v = \neg x_i$. Luego, $f^{\downarrow\Sigma}(x) = f^{\uparrow\Sigma}(x) = x_i$ y se sigue que no existe función unate g distinta de x_i que sea compatible con $F_i^\pi(0)$ y $F_i^\pi(1)$.

Proposición 5.9. Dado el conjunto de observaciones $\mathcal{O}_i^\pi = \{(x, x_i) : x \in X_n^{\text{even}}\}$ y los conjuntos $F_i^\pi(0), F_i^\pi(1)$ asociados. Sea Σ un vector de signos que cubre $\Delta_{F_i^\pi(0), F_i^\pi(1)}$. Si existe $j \neq i \in [n]$ tal que $\Sigma_j = 0$, entonces $f^{\downarrow\Sigma}(x) = f^{\uparrow\Sigma}(x) = x_i$.

Además, podemos mencionar la siguientes consecuencias de la proposición 5.9 con respecto a las cláusulas de las funciones $f^{\downarrow\Sigma}(x)$ y $f^{\uparrow\Sigma}(x)$.

Corolario 5.10. Sea Σ un vector de signos que cubre $\Delta_{F_i^\pi(0), F_i^\pi(1)}$. Si $f^{\downarrow\Sigma}(x)$ o $f^{\uparrow\Sigma}(x)$ no contienen cláusulas singulares, entonces Σ no contiene signos 0.

5.3. Vectores completos

Siguiendo la idea del corolario anterior, interesa ver que sucede con aquellos vectores que no contienen signos 0. Denominaremos a estos vectores como *completos*.

Consideremos $i \in [n]$ y un vector de signos $\Sigma \in \{0, +, -\}^n$ completo que cubre $\Delta_{F_i^\pi(0), F_i^\pi(1)}$. Supongamos que existe $u \in F_i^\pi(1)$ tal que C_u es una cláusula singular, es decir, $C_u = x_i$. Se sigue, por definición 3.23, que u debe verificar para cada $k \in [n]$:

$$u_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in I^+ \setminus \{j\}, \\ 1 & \text{si } k \in I^- \vee k = j. \end{cases}$$

Así, $w_H(u) = |I^-| + 1$. Si $|I^-|$ es impar, entonces $u \in X_n^{\text{even}}$ y de la proposición 5.5 se sigue que $f^\downarrow(x) = x_i$.

Por otro lado, si $|I^-|$ es par entonces $w_H(u)$ es impar, luego $u \notin X_n^{\text{even}}$. En consecuencia, no existen puntos en $F_i^\pi(1)$ tal que su cláusula asociada sea singular.

Ejemplo 5.11. Para $n = 4$ y $j = 3$

$$\begin{aligned} \Sigma = [- - + -] &\rightarrow u = 1111 \in X_n^{\text{even}} \\ \Sigma = [+ - + -] &\rightarrow u = 0111 \notin X_n^{\text{even}} \end{aligned}$$

Consideremos que $|I^-|$ es par. Sea $t \neq i \in [n]$, tomemos el vector $u^t \in \{0, 1\}^n$ definido como sigue:

$$\forall k \in [n] \quad u_k^t = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in I^+ \setminus \{i, t\}, \\ 1 & \text{si } k \in I^- \vee k = i, \\ c & \text{si } k = t. \end{cases}$$

Donde $c = 0$ si $t \in I^-$ y $c = 1$ si $t \in I^+$. Se sigue que $w_H(u^t) \in \{|I^-|, |I^-| + 2\}$, ambos valores pares, por lo tanto $u^t \in X_n^{\text{even}}$. Como $u_i^t = 1$, este pertenece al conjunto $F_i^\pi(1)$ y por definición 3.23:

$$C_{u^t} = \begin{cases} x_i \wedge x_t & \text{si } c = 1, \\ x_i \wedge \neg x_t & \text{si } c = 0. \end{cases}$$

Definiendo $V = F_i^\pi(1) \setminus \{u^1, \dots, u^{i-1}, u^{i+1}, \dots, u^n\}$ y la cláusula $C_u \setminus \{x_i\}$ tal que $C_u = x_i \wedge C_u \setminus \{x_i\}$ para todo $u \in \{0, 1\}^n$, entonces para todo $v \in F_i^\pi(1)$ podemos

escribir $f^{\downarrow\Sigma}(x)$ como sigue

$$\begin{aligned}
f^{\downarrow\Sigma}(x) &= \bigvee_{z \in F_i^\pi(1)} C_z \\
&= \bigvee_{t \neq i \in [n]} C_{u^t} \vee \bigvee_{z \in V} C_z \\
&= \bigvee_{t \neq i \in [n]} (x_i \wedge C_{u^t} \setminus \{x_i\}) \vee \bigvee_{z \in V} (x_i \wedge C_z \setminus \{x_i\}) \\
&= x_i \wedge \left(\bigvee_{t \neq i \in [n]} C_{u^t} \setminus \{x_i\} \vee \bigvee_{z \in V} C_z \setminus \{x_i\} \right) \\
&= x_i \wedge \left(\bigvee_{t \in I^+ \setminus \{i\}} x_t \vee \bigvee_{t \in I^-} \neg x_t \vee \bigvee_{z \in V} C_z \setminus \{x_i\} \right).
\end{aligned}$$

Consideremos $L = \left(\bigvee_{t \in I^+ \setminus \{i\}} x_t \vee \bigvee_{t \in I^-} \neg x_t \right)$ y $z \in V$. Como todo literal de la cláusula $C_z \setminus \{x_i\}$ debe estar en L (si no $f^{\downarrow\Sigma}(x)$ no sería unate), por absorción esta cláusula “desaparece” de $f^{\downarrow\Sigma}(x)$. Como se cumple para todo $z \in V$, se sigue que:

$$f^{\downarrow}(x) = x_i \wedge \left(\bigvee_{t \in I^+ \setminus \{i\}} x_t \vee \bigvee_{t \in I^-} \neg x_t \right)$$

Ejemplo 5.12. Para $n = 4, j = 3$:

$$\begin{aligned}
\Sigma &= [- - + -] \rightarrow f^{\downarrow}(x) = x_3. \\
\Sigma &= [+ - + -] \rightarrow f^{\downarrow}(x) = x_3 \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4). \\
\Sigma &= [- + + +] \rightarrow f^{\downarrow}(x) = x_3.
\end{aligned}$$

Para $f^{\uparrow}(x)$, análogo al caso anterior supongamos que existe $v \in F_i^\pi(0)$ tal que $C'_v = \neg x_i$, luego:

$$v_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in I^+ \setminus \{i\}, \\ 0 & \text{si } k \in I^- \vee k = i. \end{cases}$$

Se sigue que $w_H(v) = |I^+| - 1$. Si $|I^+|$ es impar, entonces $v \in X_n^{\text{even}}$ y de la proposición 5.5 se sigue que $f^{\uparrow}(x) = x_i$. Si $|I^+|$ es par, $w_H(v)$ es impar y luego $v \notin X_n^{\text{even}}$, por lo que no existen vectores en $F_i^\pi(0)$ tal que su cláusula asociada sea singular.

Ejemplo 5.13. Para $n = 4$ y $j = 3$:

$$\begin{aligned}
\Sigma &= [- - + -] \rightarrow u = 0000 \in X_n^{\text{even}}. \\
\Sigma &= [+ - + -] \rightarrow u = 1000 \notin X_n^{\text{even}}.
\end{aligned}$$

Supogamos que $|I^+|$ es par. Sea $t \neq i \in [n]$, tomando el vector $v^t \in \{0, 1\}^n$ definido como:

$$\forall k \in [n] \quad v_k^t = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in I^+ \setminus \{i, t\}, \\ 0 & \text{si } k \in I^- \vee k = i, \\ c & \text{si } k = t. \end{cases}$$

Donde $c = 0$ si $t \in I^+$ y $c = 1$ si $t \in I^-$. Como $w_H(v^t) \in \{|I^+| - 2, |I^+|\}$, ambos valores pares, entonces $v^t \in X_n^{\text{even}}$ y como $v_i^t = 0$, entonces $v^t \in F_i^\pi(0)$. Por definición 3.23:

$$C'_{v^t} = \begin{cases} \neg x_i \wedge x_t & \text{si } c = 1, \\ \neg x_i \wedge \neg x_t & \text{si } c = 0. \end{cases}$$

Finalmente, de manera similar a $f^{\downarrow \Sigma}(x)$, considerando el conjunto $V' = F_i^\pi(0) \setminus \{v^1, \dots, v^{i-1}, v^{i+1}, \dots, v^n\}$ y las cláusulas $C'_v \setminus \{\neg x_i\}$ tal que:

$$C'_v = \neg x_i \wedge C'_v \setminus \{\neg x_i\}.$$

Podemos concluir que:

$$\begin{aligned} f^\uparrow(x) &= 1 - \left(\neg x_i \wedge \left(\bigvee_{t \in I^+ \setminus \{i\}} \neg x_t \vee \bigvee_{t \in I^-} x_t \vee \bigvee_{z \in V'} C'_z \setminus \{\neg x_i\} \right) \right) \\ f^\uparrow(x) &= 1 - \left(\neg x_i \wedge \left(\bigvee_{t \in I^+ \setminus \{i\}} \neg x_t \vee \bigvee_{t \in I^-} x_t \right) \right) \\ &= x_i \vee \left(\bigwedge_{t \in I^+ \setminus \{i\}} x_t \wedge \bigwedge_{t \in I^-} \neg x_t \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 5.14. Para $n = 4, j = 3$:

$$\begin{aligned} \Sigma = [- - + -] &\rightarrow f^\uparrow(x) = x_3. \\ \Sigma = [+ - + -] &\rightarrow f^\uparrow(x) = x_3 \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_4). \\ \Sigma = [- + + +] &\rightarrow f^\uparrow(x) = x_3. \end{aligned}$$

Así, si Σ es un vector de signos completos, dependiendo de la paridad de signos $+$ y $-$ se tienen funciones bien definidas y que permiten hacer un análisis más claro sobre la dinámica que siguen.

5.4. Análisis global

A partir de las secciones anteriores tenemos resultados suficientes para poder determinar aquellas funciones unate compatibles con $F_i^\pi(0)$ y $F_i^\pi(1)$ con respecto a cada vector de signos Σ que cubre la matriz $\Delta_{F_i^\pi(0), F_i^\pi(1)}$. Definiendo para cada

$i \in [n]$ las funciones $\phi_i^1, \phi_i^2 : \{0, +, -\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ como:

$$\phi_i^1(\Sigma, x) = x_i \wedge \left(\bigvee_{t \in I^+ \setminus \{i\}} x_t \vee \bigvee_{t \in I^-} \neg x_t \right),$$

$$\phi_i^2(\Sigma, x) = x_i \vee \left(\bigwedge_{t \in I^+ \setminus \{i\}} x_t \wedge \bigwedge_{t \in I^-} \neg x_t \right).$$

Se sigue que, para todo vector de signos $\Sigma \in \{0, +, -\}^n$ que cubre $\Delta_{F_i^\pi(0), F_i^\pi(1)}$:

1. Si $I^0 \neq \emptyset$, entonces $f^\downarrow(x) = f^\uparrow(x) = x_i$.
2. Si $I^0 = \emptyset$, n par:
 - a) Si $|I^+|, |I^-|$ son par, $f^\downarrow(x) = \phi_i^1(\Sigma, x)$ y $f^\uparrow(x) = \phi_i^2(\Sigma, x)$.
 - b) Si $|I^+|, |I^-|$ son impar, $f^\downarrow(x) = f^\uparrow(x) = x_i$.
3. Si $I^0 = \emptyset$, n impar:
 - a) Si $|I^+|$ es impar y $|I^-|$ es par, $f^\downarrow(x) = \phi_i^1(\Sigma, x)$ y $f^\uparrow(x) = x_i$.
 - b) Si $|I^+|$ es par y $|I^-|$ es impar, $f^\downarrow(x) = x_i$ y $f^\uparrow(x) = \phi_i^2(\Sigma, x)$.

Para los casos 1 y 2.b), como $f^\downarrow(x) = f^\uparrow(x) = x_i$ del teorema 5.1 no existe función booleana unate g distinta de x_i tal que g es compatible con $F_i^\pi(0), F_i^\pi(1)$.

Para los casos 3.a) y 3.b), notemos que por definición de $\phi_i^1(\Sigma, x)$, si $x_i = 0$ entonces $\phi_i^1(\Sigma, x) = 0$. Si $x_i = 1$, en general se tiene $\phi_i^1(\Sigma, x) = 1$ salvo para el vector $u^\Sigma \in \{0, 1\}^n$ dado por:

$$\forall k \in [n], u_k^\Sigma = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in I^+ \setminus \{i\}, \\ 1 & \text{si } k \in I^- \vee k = i \end{cases}$$

ya que $\phi_i^1(\Sigma, u^\Sigma) = 0 \neq 1 = u_i^\Sigma$. Se sigue que:

$$\phi_i^1(\Sigma, x) = \begin{cases} x_i & \text{si } x \in \{0, 1\}^n \setminus \{u^\Sigma\}, \\ 0 & \text{si } x = u^\Sigma. \end{cases}$$

Como solo difiere en una imagen con la función unate $f(x) = x_i$ y el valor de la imagen pasa de 0 a 1, se tiene que $\phi_i^1(\Sigma, x) < x_i$. Más aun, podemos inferir que no existe función unate $g(x)$ distinta de x_i y $\phi_i^1(\Sigma, x)$ tal que $\phi_i^1(\Sigma, x) < g(x) < x_i$.

De manera análoga para $\phi_i^2(\Sigma, x)$, casi para todo $x \in \{0, 1\}^n$ se tiene que $\phi_i^2(\Sigma, x) = x_i$ salvo para el vector v^Σ dado por:

$$\forall k \in [n], v_k^\Sigma = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in I^+ \setminus \{i\}, \\ 0 & \text{si } k \in I^- \vee k = i. \end{cases}$$

Como $\phi_i^2(\Sigma, v^\Sigma) = 1 \neq 0 = v_i^\Sigma$, se tiene que $x_i < \phi_i^2(\Sigma, x)$. Más aun, podemos inferir que no existe función booleana $g(x)$ distinta de $\phi_i^2(\Sigma, x)$ y x_i tal que $x_i < g(x) < \phi_i^2(\Sigma, x)$.

Para el caso 2.a), de los anteriores casos podemos inferir que $\phi_i^1(\Sigma, x) < x_i < \phi_i^2(\Sigma, x)$. Las funciones $\phi_i^1(\Sigma, x)$ y $\phi_i^2(\Sigma, x)$ solo difieren en las imágenes de u^Σ y v^Σ .

$$\begin{aligned} \forall x \in \{0, 1\}^n \setminus \{u^\Sigma, v^\Sigma\} \quad & \phi_i^1(\Sigma, x) = \phi_i^2(\Sigma, x) = x_i, \\ & \phi_i^1(\Sigma, u^\Sigma) = 0 < 1 = \phi_i^2(\Sigma, u^\Sigma), \\ & \phi_i^1(\Sigma, v^\Sigma) = 0 < 1 = \phi_i^2(\Sigma, v^\Sigma). \end{aligned}$$

A partir de esto, podemos construir dos funciones $g_i^1(x), g_i^2(x)$ tales que $\phi_i^1(\Sigma, x) < g_i^1(x), g_i^2(x) < \phi_i^2(\Sigma, x)$.

En primer lugar, podemos definir $g_i^1(x)$ como sigue:

$$\begin{aligned} \forall x \in \{0, 1\}^n \setminus \{u^\Sigma, v^\Sigma\} \quad & g_i^1(x) = x_i, \\ & g_i^1(u^\Sigma) = 1 = u_i^\Sigma, \\ & g_i^1(v^\Sigma) = 0 = v_i^\Sigma. \end{aligned}$$

Es claro que para todo $x \in \{0, 1\}^n$, $g_i^1(x) = x_i$, la cual es trivialmente unate, por ende del teorema 5.1 es compatible con $F_i^\pi(0)$ y $F_i^\pi(1)$. Por otro lado, para $g_i^2(x)$:

$$\begin{aligned} \forall x \in \{0, 1\}^n \setminus \{u^\Sigma, v^\Sigma\} \quad & g_i^2(x) = x_i, \\ & g_i^2(u^\Sigma) = 0 \neq u_i^\Sigma, \\ & g_i^2(v^\Sigma) = 1 \neq v_i^\Sigma. \end{aligned}$$

En particular, esta función coincide con $\phi_i^1(\Sigma, x)$ en casi todo punto de $\{0, 1\}^n$ salvo para v^Σ . Así, para escribir la función $g_i^2(x)$ podemos tomar una disyunción de la función $\phi_i^1(\Sigma, x)$ con la siguiente cláusula:

$$\left(\bigwedge_{t \in I^+ \setminus \{i\}} x_t \wedge \bigwedge_{t \in I^-} \neg x_t \right). \quad (*)$$

Como es una composición de la función $\phi_i^1(\Sigma, x)$, entonces g_i^2 también depende del vector de signos Σ .

Así, la función $g_i^2(\Sigma, x)$ esta dada por:

$$g_i^2(\Sigma, x) = \left[x_i \wedge \left(\bigvee_{t \in I^+ \setminus \{i\}} x_t \vee \bigvee_{t \in I^-} \neg x_t \right) \right] \vee \left(\bigwedge_{t \in I^+ \setminus \{i\}} x_t \wedge \bigwedge_{t \in I^-} \neg x_t \right)$$

En efecto, notemos que si $\phi_i^1(\Sigma, x) = 1$, entonces $g_i^2(\Sigma, x) = 1$. Si $\phi_i^1(\Sigma, x) = 0$, generalmente se tiene que $g_i^2(\Sigma, x) = 0$ salvo cuando la cláusula descrita en * toma valor 1, y esto sólo sucede para el vector v^Σ .

Como $g_i^2(\Sigma, x)$ se puede escribir sin que un literal y su negación estén presentes, entonces $g_i^2(\Sigma, x)$ es función unate y por lo tanto del teorema 5.1 es compatible con $F_i^\pi(0)$ y $F_i^\pi(1)$.

De todos los casos concluimos que, dado un vector de signos Σ , existen a lo más cuatro funciones unate que verifican el teorema 5.1. Por arbitrariedad de $i \in [n]$, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 5.15. *Dado el conjunto de observaciones $\mathcal{O}_i^\pi = \{(x, x_i) : x \in X_n^{\text{even}}\}$ y los conjuntos $F_i^\pi(0), F_i^\pi(1)$ asociados. Sea Σ un vector de signos que cubre $\Delta_{F_i^\pi(0), F_i^\pi(1)}$. Si h es una función unate compatible con $F_i^\pi(0)$ y $F_i^\pi(1)$ entonces $h \in \{\phi_i^1(\Sigma, x), \phi_i^2(\Sigma, x), x_i, g_i^2(\Sigma, x)\}$.*

Para que una red booleana $F = (f_1, \dots, f_n)$ excluya a un punto $x \in \{0, 1\}^n$ de ser punto fijo, debe existir $i \in [n]$ tal que $f_i(x) \neq x_i$.

Consideremos $i \in [n]$ y un vector de signos Σ que cubre $\Delta_{F_i^\pi(0), F_i^\pi(1)}$. Dada una función unate $h(x)$ que verifique el teorema 5.15, si $h(x) = x_i$, esta función no excluye a ningún punto de ser punto fijo. Si $h(x) = \phi_i^1(\Sigma, x)$ o $h(x) = \phi_i^2(\Sigma, x)$, estas funciones, por su definición, excluyen a los puntos u^Σ o v^Σ , respectivamente. Si $h(x) = g_i^2(\Sigma, x)$, por su definición esta función excluye a los puntos u^Σ y v^Σ . Luego $h(x)$ excluye a lo más dos puntos de ser puntos fijos. Más formalmente, tenemos la siguiente consecuencia del teorema 5.15.

Corolario 5.16. *Sea el conjunto de observaciones $\mathcal{O}_i^\pi = \{(x, x_i) : x \in X_n^{\text{even}}\}$ y los conjuntos $F_i^\pi(0), F_i^\pi(1)$ asociados. Si h_i es una función unate compatible con $F_i^\pi(0)$ y $F_i^\pi(1)$ entonces h_i excluye a lo más 2 valores de ser puntos fijos.*

Sea ahora una red regulatoria $H = (h^1, \dots, h^n) : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ tal que, para todo $i \in [n]$, la función h_i es unate y verifica el teorema 5.15. Por la observación 4.3, la red H es compatible con \mathcal{O}^π .

Del corolario anterior esta red excluye, por cada función de activación local, a lo más 2 valores de ser punto fijo. Luego, puede excluir a lo más $2n$ puntos de ser puntos fijos, por ende $PF(H) \geq 2^n - 2n$.

Como $|X_n^{\text{even}}| = 2^{n-1}$, si $n > 5$ se tiene que $|X_n^{\text{even}}| < PF(H)$, lo cual implica que existen puntos fijos de H que no pertenecen al conjunto X_n^{even} .

Ejemplo 5.17. *Para $n = 4$ se tiene que $2^n - 2n = 2^{n-1}$, luego existe red regulatoria que tiene a X_4^{even} como únicos puntos fijos.*

Consideremos los vectores de signos $\Sigma^1, \dots, \Sigma^4$ tales que

$$\begin{aligned}\Sigma^1 &= [+ - + -] \rightarrow u^{\Sigma^1} = 1101, v^{\Sigma^1} = 0010 \\ \Sigma^2 &= [- + - +] \rightarrow u^{\Sigma^2} = 1110, v^{\Sigma^2} = 0001 \\ \Sigma^3 &= [+ - - +] \rightarrow u^{\Sigma^3} = 0111, v^{\Sigma^3} = 1000 \\ \Sigma^4 &= [- + - +] \rightarrow u^{\Sigma^4} = 1011, v^{\Sigma^4} = 0100\end{aligned}$$

Luego la red regulatoria $H = (g_1^2(\Sigma^1, x), g_2^2(\Sigma^2, x), g_3^2(\Sigma^3, x), g_4^2(\Sigma^4, x))$ esta dada por la siguiente tabla de verdad

x	$g_1^2(\Sigma^1, x)$	$g_2^2(\Sigma^2, x)$	$g_3^2(\Sigma^3, x)$	$g_4^2(\Sigma^4, x)$
0000	0	0	0	0
0001	0	1	0	1
0010	1	0	1	0
0011	0	0	1	1
0100	0	1	0	1
0101	0	1	0	1
0110	0	1	1	0
0111	0	1	0	1
1000	1	0	1	0
1001	1	0	0	1
1010	1	0	1	0
1011	1	0	1	0
1100	1	1	0	0
1101	0	1	0	1
1110	1	0	1	0
1111	1	1	1	1

En color verde están los valores del conjunto X , mientras que en color púrpura están las imágenes de aquellos valores $u^{\Sigma^i}, v^{\Sigma^i}$ para cada $i \in [n]$. A partir de la tabla de verdad, las funciones de activación local quedan definidas por:

$$\begin{aligned}
g_1^2(\Sigma^1, x) &= (x_1 \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4)) \vee (\neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \\
g_2^2(\Sigma^2, x) &= (x_2 \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_3 \wedge x_4) \\
g_3^2(\Sigma^3, x) &= (x_3 \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4)) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_4) \\
g_4^2(\Sigma^4, x) &= (x_4 \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3)
\end{aligned}$$

En síntesis, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 5.18. *El problema 8 no tiene solución para el conjunto $X_n^{\text{even}} = \{x \in \{0, 1\}^n : w_H(x) \text{ es par}\}$ con $n \geq 5$.*

Teniendo en cuenta que para el conjunto de todo $\{0, 1\}^n$ existe una solución, la cual es la red identidad definida en el capítulo anterior ya que esta red presenta a todos los puntos como puntos fijos, interesa ver qué sucede con conjuntos más pequeños que X_n^{even} .

5.5. Conjuntos de peso k

Consideremos ahora al conjunto $X_n^k \subseteq \{0, 1\}^n$ definido como:

$$X_n^k = \{u \in \{0, 1\}^n : w_H(u) = k\}.$$

Donde $k \in [n] \cup \{0\}$.

Para los casos extremos $k = 0$ y $k = n$, el conjunto X^k admite una solución trivial al problema 8. En efecto, para $k = n$ si consideramos que todas las funciones de activación local F_i^π son constantes e iguales a 1, es decir, $F_i^\pi(x) = 1$ para todo j , entonces la red booleana $F = (f^1, f^2, \dots, f^n)$ asigna a cada punto de $\{0, 1\}^n$ la imagen $\vec{1}$, donde $\vec{1}$ denota el vector compuesto únicamente por unos. Luego $\vec{1}$ es el único punto fijo de la red F y $w_h(\vec{1}) = n$, por lo tanto $PF(F) = \{\vec{1}\} = X^n$.

De manera análoga para $k = 0$, si consideramos ahora que todas las funciones de activación local F_i^π son constantes e iguales a 0, entonces $F = (f^1, f^2, \dots, f^n)$ asigna a cada punto de $\{0, 1\}^n$ la imagen $\vec{0}$, donde $\vec{0}$ denota el vector compuesto únicamente por ceros, así $\vec{0}$ es el único punto fijo de la red F y $PF(F) = \{\vec{0}\} = X^0$. En ambos casos, dado que el conjunto X^k solo contiene 1 punto es fácil construir una red booleana constante tal que todas las imagenes sean este punto, sin embargo para $1 \leq k < n$ el conjunto cuenta con más puntos, por lo que no se puede replicar el mismo procedimiento. Sin embargo, en lo que sigue mostraremos que se puede construir una red $G : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ tal que $PF(G) = X^k$ para todo k tal que $1 \leq k < n$.

Ejemplo 5.19. Para $k = 2$ y $n = 5$, el conjunto $X^2 \subset \{0, 1\}^5$ esta dado por

$$X^2 = \{11000, 10100, 10010, 10001, 01001, 00101, 00011, 00110, 0101, 01100\}$$

Consideremos $i \in [n]$, $1 \leq k < n$ y el conjunto de observaciones $\mathcal{O}_i^\pi = \{(x, x_i) : x \in X_n^k\}$. Consideremos los conjuntos $F_i^\pi(0), F_i^\pi(1) \subseteq X^k$ asociados a \mathcal{O}_i^π . Con respecto a la matriz de discrepancia $\Delta_{F_i^\pi(0), F_i^\pi(1)}$, al igual que para el caso anterior, cualquier vector de signos que tenga un $+$ en la j -ésima entrada cubre la matriz, puesto que para cada $u \in F_i^\pi(0)$ y $v \in F_i^\pi(1)$ se tiene que $u_i = 0$, $v_i = 1$ y por ende $\Delta(u, v)_i = +$. Sin embargo, también podemos decir lo siguiente.

Proposición 5.20. Dado el conjunto de observaciones \mathcal{O}_i^π y los conjuntos $F_i^\pi(0), F_i^\pi(1)$ asociados. Sea X_n^k con $k \in [n - 1]$. El vector de signos $\Sigma^i \in \{+, -, 0\}^n$ dado por

$$\forall j \in [n], \quad \Sigma_j^i = \begin{cases} 0 & \text{si } j = i, \\ - & \text{si no.} \end{cases}$$

cubre a la matriz $\Delta_{F_i^\pi(0), F_i^\pi(1)}$.

Demostración. Notemos que, por definición de cobertura de vectores de signos, mostrar que Σ^i cubre la matriz $\Delta_{F_i^\pi(0), F_i^\pi(1)}$ equivale a mostrar que cada fila contiene un signo $-$ en alguna de las $n - 1$ posiciones distintas de i . Cada fila de la matriz $\Delta_{F_i^\pi(0), F_i^\pi(1)}$ corresponde a una discrepancia entre un vector de $F_i^\pi(0)$ y un vector de $F_i^\pi(1)$. Consideremos $u, v \in X^k$ tal que $u \in F_i^\pi(0)$ y $v \in F_i^\pi(1)$. Como $u_i = 0$ y $v_i = 1$, entonces $\Delta(u, v)_i = +$. Más aun, como $w_H(u) = w_H(v) = k$, existe $j \neq i \in [n]$ tal que $u_j = 1$ y $v_j = 0$, luego $\Delta(u, v)_j = -$. Por arbitrariedad de u y v se cumple para todo $F_i^\pi(0)$ y $F_i^\pi(1)$, por lo tanto toda fila de la matriz $\Delta_{F_i^\pi(0), F_i^\pi(1)}$ contiene un signo $-$ en una coordenada distinta de la i -ésima. \square

La función $f^{\downarrow\Sigma^i}(x)$ excluye a una gran cantidad de puntos de ser posibles puntos fijos. Para ver esto notemos que, de la definición 3.23 y de $F_i^\pi(1)$, la función $f^{\downarrow\Sigma^i}(x)$ corresponde a la disyunción de cláusulas conjuntivas de exactamente $n-k$ variables negadas, que es la cantidad de valores 0 que tiene cada vector en $F_i^\pi(1)$. Dado que $\Sigma_i^i = 0$, la variable x_i no está presente en ninguna de las cláusulas.

Ejemplo 5.21. Considerando el conjunto X^2 del ejemplo 5.19, para $j = 1$ el conjunto $F^1(1)$ esta dado por

$$F^1(1) = \{11000, 10100, 10010, 10001\}$$

y considerando $\Sigma^1 = [0 - - - -]$, la función $f^\downarrow(x)$ asociada está dada por

$$f^\downarrow(x) = (\neg x_3 \wedge \neg x_4 \wedge \neg x_5) \vee (\neg x_2 \wedge \neg x_4 \wedge \neg x_5) \vee (\neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_5) \vee (\neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4)$$

Como por definición solo aparecen variables negadas, la función $f^{\downarrow\Sigma^i}(x)$ es unate. Además, de la proposición 3.24 esta función es compatible con $F_i^\pi(1)$ y $F_i^\pi(0)$. Luego, la red $G = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ tal que $g_i(x) = f^{\downarrow\Sigma^i}(x)$ para todo $i \in [n]$ es un buen candidato para ser solución al problema 8 para el conjunto X_n^k . Como cada g_i es compatible con el conjunto de observaciones \mathcal{O}^π , se sigue de la observación 4.3 que la red G es compatible con el conjunto de observaciones $\mathcal{O} = \{(x, x) : x \in X_n^k\}$. En consecuencia, cada $x \in X_n^k$ es punto fijo de la red G .

Consideremos $y \in \{0, 1\}^n$ tal que $y \notin X_n^k$, luego $w_h(y) \neq k$.

Supongamos que $w_h(y) < k$. Sea $i \in [n]$ tal que $y_i = 0$. Como y tiene a lo más $k-1$ coordenadas con valor 1, entonces existen al menos $n-k$ coordenadas distintas de i con valor 0. Sean $j_1, j_2, \dots, j_{n-k} \neq i \in [n]$ índices tales que $y_{j_l} = 0$ para todo $l \in [n-k]$. Consideremos el vector $z \in \{0, 1\}^n$ definido como:

$$z_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in \{j_1, \dots, j_{n-k}\}, \\ 1 & \text{si no.} \end{cases}$$

Entonces $w_H(z) = k$, por ende $z \in X^k$. Como $z_i = 1$, entonces $z \in F_i^\pi(1)$ y la cláusula C_z dada por:

$$C_z = \bigwedge_{j \in [n]: z_j=0} \neg x_j,$$

está contenida en la función $g_i(x)$. En particular, $C_z = 1$ si se evalúa la función en $x = z$. Como las coordenadas donde z toma valor 0 también toman valor 0 en y , se sigue que $C_z = 1$ si se evalúa en $x = y$. En consecuencia, al ser $g_i(x)$ una disyunción de cláusulas, se tiene que $g_i(y) = 1 \neq y_i$ y por ende y no es punto fijo de la red G .

para $w_H(y) > k$, consideremos $i \in [n]$ tal que $y_i = 1$. Luego y tiene a lo más $n-k-1$ coordenadas que toman valor 0 distintas de i , con lo cual cualquier conjunto de $n-k$ índices distintos de i tendrá al menos un índice $l \in [n]$ tal que $y_l = 1$. Se sigue que, como $f^\downarrow(x)$ es una disyunción de cláusulas con $n-k$ variables negadas cada una (y sin incluir variable x_i), al evaluar en $x = y$, cada

cláusula tendrá al menos un literal que tomará valor 1, por ende su negación tomará valor 0 y en consecuencia la cláusula tomará valor 0. Así, como $g_i(x)$ es una disyunción de cláusulas y cada cláusula toma valor 0 al evaluar en $x = y$, $g_i(y) = 0 \neq y_i$ y en consecuencia el vector y no puede ser punto fijo de la red G .

Así, la red G solo admite como puntos fijos al conjunto X_n^k , por ende es solución factible del problema 8.

Para todo $k \in [n]$, el conjunto X_n^k es más pequeño que el conjunto X_n^{even} . Dado que el conjunto X no tiene solución, pero el conjunto de todos los puntos de $\{0, 1\}^n$, que es aun más grande, si tiene solución nos lleva a inferir que el tamaño del conjunto no es una propiedad suficiente para inferir si el problema 8 tiene solución.

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis se abordó un problema específico de inferencia de redes booleanas regulatorias: determinar si, dado un conjunto finito de puntos en $\{0, 1\}^n$, existe una red regulatoria que tenga dichos puntos como sus puntos periódicos. Para abordar este problema, se utilizó el concepto de discrepancia, recientemente introducido en el estudio de funciones booleanas parcialmente definidas. Las herramientas basadas en discrepancia presentadas en la tesis permitieron caracterizar funciones unate compatibles con conjuntos de observaciones, y posteriormente se extendió su aplicación al contexto de redes regulatorias.

Uno de los principales resultados fue la reformulación del problema en términos de compatibilidad con observaciones estructuradas, lo que permitió aplicar herramientas combinatorias y lógicas basadas en la discrepancia para construir redes regulatorias que contuvieran un conjunto dado de puntos como puntos periódicos. En particular, se demostró que para todo subconjunto propio $X \subsetneq \{0, 1\}^n$ es posible construir una red regulatoria no trivial compatible con el conjunto X y tal que los puntos de X son periódicos.

Finalmente, se analizó un caso concreto para el cual se demuestra que no existe una red regulatoria que tenga a un conjunto dado de puntos como sus únicos puntos fijos. Este resultado evidencia que el problema de inferencia estricta planteado en este trabajo no siempre tiene solución, lo cual destaca tanto la complejidad estructural del problema como las limitaciones de las metodologías actuales cuando se requiere control total sobre los atractores del sistema.

6.1. Trabajos Futuros

La reformulación del problema de inferencia en redes regulatorias como un problema de compatibilidad con un conjunto de observaciones estructuradas permitió demostrar que siempre existe una solución no trivial. Sin embargo, esta metodología no considera redes cuya dinámica tenga atractores parcialmente contenidos en el conjunto de interés, como se vio en el ejemplo 4.2. Este tipo de redes es in-

interesante, especialmente a la luz de los resultados del capítulo 5, donde se mostró que en algunos casos el problema de inferencia estricta no tiene solución. En esos casos, sería útil contar a futuro con una forma de inferir una red regulatoria que al menos se aproxime a la dinámica deseada.

Además, en el capítulo 5 se plantean varias preguntas abiertas que podrían estudiarse más adelante. Una de ellas es que no existe una forma general de descartar la presencia de puntos periódicos fuera del conjunto de interés, más allá de revisar todos los puntos del espacio. Encontrar propiedades o condiciones estructurales que permitan evitar este tipo de análisis exhaustivo sería un avance importante.

Otra línea de trabajo futura está relacionada con el concepto de discrepancia. En particular, no se sabe en general cuántos vectores de signos pueden cubrir una matriz de discrepancia, ni cuántas funciones unate son compatibles con un conjunto arbitrario de observaciones. Estas cantidades podrían ayudar a entender la complejidad del problema.

Por último, aunque en esta tesis se construyeron funciones unate que excluyen puntos fuera del conjunto de interés como puntos fijos, esto fue posible porque los ejemplos eran pequeños y tenían propiedades particulares. No existe todavía un método general que, dado un vector de signos que cubre una matriz, permita construir una función unate que maximice la exclusión de puntos no deseados. Desarrollar una herramienta así sería útil para mejorar el control sobre los atractores en problemas de inferencia estricta.

Bibliografía

- [1] Réka Albert y Albert-László Barabási. «Dynamics of complex systems: Scaling laws for the period of Boolean networks». En: *Physical Review Letters* 84.24 (2000), pág. 5660.
- [2] Shohag Barman y Yung-Keun Kwon. «A Boolean network inference from time-series gene expression data using a genetic algorithm». En: *Bioinformatics* 34.17 (2018), págs. i927-i933.
- [3] Shohag Barman y Yung-Keun Kwon. «A novel mutual information-based Boolean network inference method from time-series gene expression data». En: *PloS one* 12.2 (2017).
- [4] Grégory Batt, Delphine Ropers, Hidde de Jong, Johannes Geiselman, Radu Mateescu, Michel Page y Dominique Schneider. «Validation of qualitative models of genetic regulatory networks by model checking: analysis of the nutritional stress response in *Escherichia coli*». En: *Bioinformatics* 21.suppl_1 (jun. de 2005), págs. i19-i28. ISSN: 1367-4803. DOI: 10.1093/bioinformatics/bti1048. URL: <https://doi.org/10.1093/bioinformatics/bti1048>.
- [5] Endre Boros, Vladimir Gurvich, Peter L Hammer, Toshihide Ibaraki y Alexander Kogan. «Decomposability of partially defined Boolean functions». En: *Discrete Applied Mathematics* 62.1-3 (1995), págs. 51-75.
- [6] Yves Crama, Peter L Hammer y Toshihide Ibaraki. «Cause-effect relationships and partially defined Boolean functions». En: *Annals of Operations Research* 16 (1988), págs. 299-325.
- [7] Katerin De la Hoz Luna, Alexis Poindron, Lilian Salinas y Julio Aracena. «The unate inference problem». In preparation. 2025.
- [8] S.A. Kauffman. «Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets». En: *Journal of Theoretical Biology* 22.3 (1969), págs. 437-467. ISSN: 0022-5193. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5193\(69\)90015-0](https://doi.org/10.1016/0022-5193(69)90015-0). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022519369900150>.
- [9] Miguel Lejeune, Vadim Lozin, Irina Lozina, Ahmed Ragab y Soumaya Yacout. «Recent advances in the theory and practice of logical analysis of data». En: *European Journal of Operational Research* 275.1 (2019), págs. 1-15.

- [10] Shoudan Liang, Stefanie Fuhrman y Roland Somogyi. «REVEAL, a general reverse engineering algorithm for inference of genetic network architectures». En: *Pacific symposium on biocomputing*. Vol. 3. 1998, págs. 18-29.
- [11] Omar K Pineda, Hyobin Kim y Carlos Gershenson. «A novel antifragility measure based on satisfaction and its application to random and biological Boolean networks». En: *Complexity* 2019.1 (2019), pág. 3728621.
- [12] Žiga Pušnik, Miha Mraz, Nikolaj Zimic y Miha Moškon. «Review and assessment of Boolean approaches for inference of gene regulatory networks». En: *Heliyon* 8.8 (2022), e10222. ISSN: 2405-8440. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2022.e10222>.
- [13] François Robert. *Discrete iterations: a metric study*. Vol. 6. Springer Science & Business Media, 2012.
- [14] Michael M Saint-Antoine y Abhyudai Singh. «Network inference in systems biology: recent developments, challenges, and applications». En: *Current Opinion in Biotechnology* 63 (2020). Nanobiotechnology, Systems Biology, págs. 89-98. ISSN: 0958-1669. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.copbio.2019.12.002>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0958166919301399>.
- [15] Ning Shi, Zexuan Zhu, Ke Tang, David Parker y Shan He. «ATEN: and/or tree ensemble for inferring accurate Boolean network topology and dynamics». En: *Bioinformatics* 36.2 (2020), págs. 578-585.
- [16] Arturo Zapata-Cortés y Julio Aracena. «Hamiltonian dynamics of Boolean networks». En: *arXiv preprint arXiv:2501.03175* (2025).

Anexo

En este anexo se presentan una serie de resultados relevantes tanto para el problema de inferencia de funciones unate como para los problemas de inferencia en redes booleanas, comunicados por Katerin De la Hoz (DIICC,UDEC) y que forman parte de su trabajo de tesis doctoral.

Estos resultados no forman parte del desarrollo original de esta tesis, pero se consideran fundamentales para complementar el marco teórico y técnico presentado, en particular respecto a la caracterización de funciones compatibles a partir de vectores de signos que cubren matrices de discrepancia.

Definición .1. Sean $y, z \in \{0, +, -\}^n$ vectores de signos. Diremos que y, z son:

- la negación uno del otro si $\forall i \in [n], y_i = + \iff z_i = -$.
- la casi-negación uno del otro si $\forall i \in [n], y_i \neq 0 \wedge z_i \neq 0 \implies y_i \neq z_i$.
- casi iguales $\forall i \in [n], y_i \neq 0 \wedge z_i \neq 0 \implies y_i = z_i$.

Definición .2. El soporte de un vector de signos x se define como el conjunto de índices donde las coordenadas de x son distintas de 0. La cardinalidad del soporte se denomina peso. Un vector de signos se dice singleton si su peso es 1.

El siguiente resultado puede ser probado directamente utilizando la definición de cobertura:

Proposición .3. Sea M una matriz de discrepancias. Un vector de signos $\Sigma \in \{0, +, -\}^n$ cubre la matriz M si y solo si no existe fila r de M tal que r sea una casi-negación de Σ

De esta proposición, considerando ahora la matriz $\Delta_{F(0),F(1)}$, se tiene el siguiente colorario:

Corolario .4. Sea $F(0), F(1) \subseteq \{0, 1\}^n$ y $\Sigma \in \{0, +, -\}^n$ un vector que cubre la matriz $\Delta_{F(0),F(1)}$. Entonces,

- (a) no existe $y \in F(0)$ tal que $\text{sgn}(y)$ sea casi igual a Σ .
- (b) no existe $z \in F(1)$ tal que $\text{sgn}(z)$ sea casi-negación de Σ .

Proposición .5 (proposición 3.22). Sean $F(0), F(1) \subseteq \{0, 1\}^n$. Si f es una función unate compatible con $F(0)$ y $F(1)$, entonces $\Sigma(f)$ cubre la matriz $\Delta_{F(0), F(1)}$.

Demostración. Sea $S = \{\sigma_1, \dots, \sigma_l\}$ el soporte de $\Sigma(f)$. Sean $y \in F(0)$ y $z \in F(1)$, y definiendo $P : x^0 = y, x^1, x^2, \dots, x^l = z$ como el camino entre y y z en $\{0, 1\}^n$, donde $\forall i \in [l], x^i := x^{i-1} \oplus e_{\sigma_i}$, con \oplus la suma módulo 2. Como $f(y) = 0 < 1 = f(z)$, se tiene que $\exists j \in [l]$ tal que $f(x^{j-1}) < f(x^j)$, equivalentemente $f(x^{j-1}) < f(x^{j-1} \oplus e_{\sigma_j})$. Notemos que $y_{\sigma_j} = x_{\sigma_j}^{j-1}$ y $z_{\sigma_j} = x_{\sigma_j}^j$, lo que implica que $\Delta(x^{j-1}, x^j)_{\sigma_j} = \Delta(y, z)_{\sigma_j}$. Procederemos a demostrar que $\Sigma(f)$ cubre $\Delta(y, z)$. Si $\Delta(x^{j-1}, x^j)_{\sigma_j} = +$ se sigue que $\Sigma(f)_{\sigma_j} = +$ de la definición de monótono creciente, luego $\Sigma(f)_{\sigma_j} = \Delta(y, z)_{\sigma_j}$. Análogamente, si $\Delta(x^{j-1}, x^j)_{\sigma_j} = -$, se tiene que $\Sigma(f)_{\sigma_j} = -$ de la definición de monótono decreciente, luego $\Sigma(f)_{\sigma_j} = \Delta(y, z)_{\sigma_j}$. Por lo tanto, $\Sigma(f)$ cubre $\Delta_{F(0), F(1)}$. \square

Proposición .6 (proposición 3.24). Las funciones $f^{\downarrow\Sigma}(x), f^{\uparrow\Sigma}(x)$ son unate y compatibles con los conjuntos $F(0), F(1)$.

Demostración. Para ambas funciones, se sigue de su definición que son funciones unate, pues no presentan a un literal y su negación. Ahora bien, para mostrar la compatibilidad de $f^{\downarrow\Sigma}(x)$ mostraremos que $\forall z \in F(1), f^{\downarrow\Sigma}(z) = 1$ y $\forall y \in F(0), f^{\downarrow\Sigma}(y) = 0$.

Sea $\hat{z} \in F(1)$ e $\hat{y} \in F(0)$. Del colorario .4, ítem (a), se tiene que $C_{\hat{z}}$ no puede ser vacío. Luego, $C_{\hat{z}}$ evaluado en \hat{z} equivale a:

$$\bigwedge_{\substack{\hat{z}_i=1 \\ \Sigma_i=+}} \hat{z}_i \wedge \bigwedge_{\substack{\hat{z}_i=0 \\ \Sigma_i=-}} \neg \hat{z}_i = 1.$$

Por lo tanto $f^{\downarrow\Sigma}(\hat{z}) = 1$. Como Σ , de la definición 3.23, cubre la matriz $\Delta_{F(0), F(1)}$, entonces $\forall z \in F(1), \exists j \in [n]$ tal que $\Sigma_j = \Delta(\hat{y}, z)_j$. Si $\Sigma_j = +$, entonces $\hat{y}_j = 0$ y $z_j = 1$, lo que implica que C_z evaluado en \hat{y} es 0. De la misma forma, si $\Sigma_j = -$, entonces $\hat{y}_j = 1$ y $z_j = 0$, lo que implica que C_z evaluado en \hat{y} es 0. La demostración para $f^{\uparrow\Sigma}(x)$ es análoga, considerando ahora el ítem (b) del colorario .4. \square

De ambas proposiciones se puede concluir el siguiente teorema.

Teorema .7 (Teorema 3.25). Existe una función unate compatible con $F(0)$ y $F(1)$ si y solo si existe un vector de signos que cubre la matriz $\Delta_{F(0), F(1)}$.

Para la demostración del teorema 3.20, necesitamos introducir las siguientes definiciones:

Definición .8. Sea $\Sigma \in \{0, +, -\}^n$ un vector de signos.

- El orden parcial \leq_{Σ} en $\{0, 1\}^n$ se define como: $x \leq_{\Sigma} y$ si y solo si $\forall i \in [n]$, si $\Sigma_i = +$, entonces $x_i \leq y_i$ y, si $\Sigma_i = -$, entonces $x_i \geq y_i$. Si al menos una de las desigualdades es estricta, diremos que $x <_{\Sigma} y$.

- $\mathcal{A} \subseteq \{0, 1\}^n$ se dice Σ -anticadena si $\forall x, y \in \mathcal{A}$, x e y son no comparables con respecto a \leq_Σ , es decir, ni $x \leq_\Sigma y$ ni $x \geq_\Sigma y$.

Definición .9. Sea f una función y sea $\Sigma = \Sigma(f)$.

- Se dice que $\mathcal{A}_f^1 \subseteq \{0, 1\}^n$ describe los unos de f si $f(x) = 1$ si y solo si existe $z \in \mathcal{A}_f^1$ tal que $z \leq_\Sigma x$.
- Se dice que $\mathcal{A}_f^0 \subseteq \{0, 1\}^n$ describe los ceros de f si $f(x) = 0$ si y solo si existe $y \in \mathcal{A}_f^0$ tal que $x \leq_\Sigma y$.

La siguiente proposición muestra como los conjuntos $F(0)$ y $F(1)$ describen el comportamiento de las funciones $f^{\downarrow\Sigma}(x)$ y $f^{\uparrow\Sigma}(x)$.

Proposición .10. Sean $F(0), F(1) \subseteq \{0, 1\}^n$ y $\Sigma \in \{0, +, -\}^n$ un vector de signos que cubre $\Delta_{F(0), F(1)}$. Entonces,

- $F(1)$ describe los unos de $f^{\downarrow\Sigma}(x)$.
- $F(0)$ describe los ceros de $f^{\uparrow\Sigma}(x)$.

Demostración. Primero probaremos el item (a). Mostraremos que $\forall x \in \{0, 1\}^n$, $f^{\downarrow\Sigma}(x) = 1$ si y solo si $\exists z \in F(1)$ tal que $z \leq_\Sigma x$.

De la definición de $f^{\downarrow\Sigma}$ tenemos que,

$$f^{\downarrow\Sigma}(x) = 1 \Leftrightarrow \exists \hat{z} \in F(1), \bigwedge_{\substack{\hat{z}_i=1 \\ \Sigma_i=+}} \hat{z}_i \wedge \bigwedge_{\substack{\hat{z}_i=0 \\ \Sigma_i=-}} \neg \hat{z}_i = 1$$

Esta ecuación tiene solución si $\forall i \in [n]$, $\Sigma_i = +$ y $\hat{z}_i = 1$, o $\Sigma_i = -$ y $\hat{z}_i = 0$, lo cual implica que $\hat{z}_i = x_i$. Por otro lado, para los casos donde $\Sigma_i = +$ y $\hat{z}_i = 0$, o $\Sigma_i = -$ y $\hat{z}_i = 1$, el valor de x_i puede ser 0 o 1, luego $\hat{z}_i \leq x_i$ y $\hat{z}_i \geq x_i$, respectivamente. Por lo tanto, $\hat{z} \leq_\Sigma x$.

La demostración para el item (b) es similar. Usando la definición de $f^{\uparrow\Sigma}$ y razonando análogamente, se prueba que $\forall x \in \{0, 1\}^n$, $f^{\uparrow\Sigma}(x) = 0$ si y solo si $\exists y \in F(0)$ tal que $x \leq_\Sigma y$. \square

Observación .11. Los conjuntos que describen los unos y ceros de una función pueden transformarse en anticadenas con respecto al orden parcial Σ eliminando redundancias. Por ejemplo, si existen $z^1, z^2 \in \mathcal{A}_f^1$ tales que $z^1 <_\Sigma z^2$, entonces, por la propiedad de transitividad del orden parcial, el conjunto $\mathcal{A}_f^1 - \{z^2\}$ sigue describiendo los unos de f . De manera similar, si existen $y^1, y^2 \in \mathcal{A}_f^0$ tales que $y^1 <_\Sigma y^2$, entonces $\mathcal{A}_f^0 - \{y^1\}$ sigue describiendo los ceros de f . Al eliminar todos estos elementos dominados, se obtienen conjuntos minimales con la misma capacidad descriptiva. Estos conjuntos minimales se denominan la 1-anticadena y la 0-anticadena de f , respectivamente.

Y a partir de esta observación, se establece la siguiente relación de orden entre las funciones $f^{\downarrow\Sigma}(x)$ y $f^{\uparrow\Sigma}(x)$.

Corolario .12. Sean $F(0), F(1) \subseteq \{0, 1\}^n$ y $\Sigma \in \{0, +, -\}^n$ un vector de signos que cubre $\Delta_{F(0), F(1)}$. Entonces $f^{\downarrow\Sigma} \leq f^{\uparrow\Sigma}$.

Demostración. Debemos demostrar que $\forall x \in \{0, 1\}^n$, se cumple que $f^{\downarrow\Sigma}(x) = 1 \Rightarrow f^{\uparrow\Sigma}(x) = 1$, y que $f^{\uparrow\Sigma}(x) = 0 \Rightarrow f^{\downarrow\Sigma}(x) = 0$. Procedamos por contradicción: supongamos que existe $x \in \{0, 1\}^n$ tal que $f^{\downarrow\Sigma}(x) = 1$ y $f^{\uparrow\Sigma}(x) = 0$. Por la Proposición .10, sabemos que existen $z \in F(1)$ y $y \in F(0)$ tales que $z \leq_{\Sigma} x$ y $x \leq_{\Sigma} y$. Entonces, por la propiedad de transitividad del orden parcial, se tiene que $z \leq_{\Sigma} y$, y usando nuevamente la Proposición .10 concluimos que $f^{\downarrow\Sigma}(z) = 0$ y $f^{\uparrow\Sigma}(y) = 1$, lo cual es una contradicción. La demostración de la segunda implicación es análoga. \square

Finalmente, tenemos el Teorema 3.20.

Teorema .13 (Teorema 3.20). Sea $F(0), F(1) \subseteq \{0, 1\}^n$ y $\Sigma \in \{0, +, -\}^n$ un vector de signos que cubre $\Delta_{F(0), F(1)}$. Una función unate f tal que $\Sigma(f) = \Sigma$ es compatible con las observaciones si y solo si $f^{\downarrow\Sigma} \leq f \leq f^{\uparrow\Sigma}$.

Demostración. Una función unate f que verifica $f^{\downarrow\Sigma} \leq f \leq f^{\uparrow\Sigma}$ es compatible con las observaciones, ya que $\forall y \in F(0)$ se cumple que $f^{\uparrow\Sigma}(y) = 0$, y $\forall z \in F(1)$ se cumple que $f^{\downarrow\Sigma}(z) = 1$, lo que implica que $f(y) = 0$ y $f(z) = 1$, respectivamente.

Por otro lado, para demostrar la implicación recíproca, basta con probar que $\forall x \in \{0, 1\}^n$, si $f(x) = 1$ entonces $f^{\uparrow\Sigma}(x) = 1$, y si $f(x) = 0$ entonces $f^{\downarrow\Sigma}(x) = 0$.

Si \mathcal{A}_f^1 y \mathcal{A}_f^0 son la 1-anticadena y la 0-anticadena de f , podemos adaptar fácilmente la demostración del Corolario .12 y obtener la misma contradicción. \square