



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Nuevos Métodos de Elementos Finitos Híbrido-Multiescala para una Ecuación de Helmholtz

Realizado por: Allan Aquiles Beltrán Morales

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la
Universidad de Concepción para optar al título profesional de Ingeniero Civil
Matemático

Profesor Guía: Dr. Diego Paredes Concha

Septiembre 2024
Concepción, Chile

© 2024, Allan Aquiles Beltrán Morales

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento

Agradecimientos

Este proyecto fue realizado gracias al financiamiento de ANID, a través del proyecto Fondecyt 1181572 “New Developments in Multiscale Hybrid-Mixed Finite Element Methods”.

Quiero expresar mi agradecimiento a todas las personas que han sido parte de este trayecto y han contribuido en mi proceso universitario.

En primer lugar, agradezco profundamente a mi profesor guía, el Dr. Diego Paredes Concha, por su paciencia, guía y apoyo constantes a lo largo de este proyecto. Su disposición y ayuda siempre presentes fueron fundamentales desde el momento en que decidimos emprender este trabajo juntos.

A mis padres, Sandra Morales Fonseca y Julio Beltrán Arriagada, y a mi hermana, Jocelyn Beltrán Morales, les agradezco todo el esfuerzo, el cariño y el apoyo que me han brindado incondicionalmente. También a mis compañeros y amigos que he tenido el privilegio de conocer a lo largo de estos años, por su apoyo y compañía, los cuales han sido claves en mi desarrollo personal.

Finalmente, quiero dedicar un agradecimiento especial a mi abuela, Julia del Carmen Fonseca Concha, por su amor infinito. Sé que, estés donde estés, estás orgullosa de mí.

Nada de esto sería posible sin ustedes.

Resumen

En este trabajo, proponemos, analizamos e implementamos un nuevo Método de Elementos Finitos Híbrido Multiescala para la ecuación de Helmholtz. La principal innovación en la construcción de este método radica en cómo se definen los multiplicadores de Lagrange en una formulación híbrida para la ecuación de Helmholtz, lo que se traduce en la introducción de una condición de Robin en los problemas locales. El objetivo principal de esta modificación es posibilitar la descomposición de la formulación híbrida en problemas locales y un problema global bien definidos, independientemente de los coeficientes de la ecuación o de la partición del dominio. El análisis de error se basa en la formulación híbrida del problema. Este nuevo método fue sometido a diversos experimentos numéricos, con el fin de evaluar y comparar su rendimiento y precisión.

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	II
1. Introducción	1
2.	3
2.1. Resultados Clásicos	3
2.2. Particiones y Mallas	6
2.3. Espacios, Productos interiores y Normas	9
3. Una Nueva Formulación Híbrida Multiescala	14
3.1. El Problema Modelo	14
3.2. Formulación Débil Estándar	15
3.3. Una Nueva Formulación Híbrida	21
3.4. Definición Concreta de $\zeta(\cdot)$	25
3.5. Existencia, unicidad y estabilidad de la solución del problema híbrido	26
3.6. El Problema Híbrido Discreto	32
3.7. Estimación del Error	34
4. Un Método Híbrido Multi-escala	42
4.1. Localización	42
4.2. Problemas MH bien definidos	43
4.3. El Algoritmo de MH	50
5. Experimentos Computacionales	55
5.1. Análisis de Convergencia	55
5.2. MH vs. MHM	58
5.3. Un Problema Multiescala	59
6. Conclusión	64
6.1. Conclusiones Generales	64
Bibliografía	65
Apéndices	68

A.	68
A1. Estabilidad de $a(\cdot, \cdot)$ en V	69

Índice de figuras

2.2.1. Un elemento K , la línea roja representa el diámetro del elemento, la línea azul representa el diámetro de la circunferencia inscrita.	7
2.2.2. Ejemplo de una partición sobre un dominio Ω con elementos poligonales no conformes. Observe las submallas (verde y naranja) discretizando dos elementos diferentes de $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}$ con diferentes granularidades, donde $\mathfrak{T} \in \mathcal{T}_h^K$ es un elemento de la discretización de $K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}$. La línea roja representa un borde $E \in \mathcal{E}$ y la línea azul representa un elemento $F \in \mathcal{E}$ del esqueleto de la malla. [2]	8
3.1.1. Ejemplo aplicado del problema modelo 3.1.3, simulando la propagación de ondas sísmicas. Dentro de la imagen, el término fuente “ f ” corresponde al elemento denominado “Fuente del sismo”, la cual puede venir definida por una función pulso o por una función gaussiana. El dominio Ω en este caso corresponde a una sección del terreno donde ocurrió el sismo que se desea analizar. Dicho dominio presenta densidad ρ y modulo de compresibilidad κ . Además, la frontera se define como todo el borde que encierra este terreno, la cual se puede dividir en dos subconjuntos disjuntos: Γ_D , que representa la superficie del terreno, y Γ_A , que corresponde al resto del borde que encierra el dominio bajo la superficie. La solución del problema describe la propagación y refracción de la onda emitida por la fuente.	16
3.4.1. Construcción particular de σ_0 sobre un dominio Ω . Las aristas $F \in \mathcal{E}$ presentadas en negro entre los elementos representan el caso $\sigma_0 _F = 0$	26
3.4.2. Grafo bipartito correspondiente a σ_0 definido en 3.4.1.	27
5.1.1. Solución discreta u para (5.1.1) con $\omega = 12\pi$, obtenida usando el método MH con una malla de polígonos en forma de cuadrado. Parte imaginaria (izquierda) y parte real (derecha).	56
5.1.2. Solución discreta u para (5.1.1) con $\omega = 6\pi$, obtenida usando el método MH con una malla de polígonos en forma de L. Parte imaginaria (izquierda) y parte real (derecha).	56

5.1.3. Curvas de convergencia del tipo mesh-based usando una malla compuesta por polígonos cuadrados, con $\ell = 0, \omega = 4\pi$, con el segundo nivel $h = \frac{1}{64}$ (izquierda) y $\ell = 2, \omega = 10\pi$, con el segundo nivel $h = \frac{1}{32}$ (derecha).	57
5.1.4. Curvas de convergencia del tipo mesh-based usando una malla compuesta por polígonos en forma de L, con $\ell = 1, \omega = 5\pi$, y en el segundo nivel $h = \frac{1}{64}$	57
5.1.5. Curvas de convergencia space-based para $\mathcal{H} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$, $\ell = 0, \omega = 2\pi$ (Izquierda), con el segundo nivel $h = \frac{1}{64}$ y $\ell = 2, \omega = 22\pi$ (Derecha) con el segundo nivel $h = \frac{1}{32}$, experimento realizado en una partición de polígonos compuesta por cuadrados.	58
5.2.1. Número de condición de los sistemas locales (izquierda) y el sistema global (derecha) para ambos métodos. La configuración para este análisis fue $\ell = 1, k = 3, H = \frac{1}{4}, h = H$, sobre una malla compuesta por cuadrados.	59
5.2.2. Curvas de error para ambos métodos con respecto a ω . La configuración usada es, $\ell = 1, k = 3, H = \frac{1}{4}, h = H$, sobre una malla compuesta por cuadrados.	60
5.3.1. Marmousi II: Velocidad de onda P.	60
5.3.2. Marmousi II: Densidad.	61
5.3.3. Isolíneas para la aproximación de Galerkin (izquierda) y la aproximación MH (derecha).	61
5.3.4. Isovalores para la aproximación de Galerkin (izquierda) y la aproximación MH (derecha).	62
5.3.5. Zoom realizado a las figuras de 5.3.3.	62
5.3.6. Curvas de convergencia mesh-based sobre una malla compuesta por cuadrados, con $F = 2, \omega = 2\pi F, \ell = 0$, con segundo nivel $h = \frac{1}{64}$	63
5.3.7. Curvas de convergencia space-based sobre una malla compuesta por cuadrados, con $F = 2, \omega = 2\pi F, \ell = 0$, para $\mathcal{H} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$, con segundo nivel $h = \frac{1}{64}$	63

Capítulo 1

Introducción

El análisis y estudio de la propagación de ondas, ya sean electromagnéticas o acústicas, ha sido uno de los principales temas de estudio por parte de la comunidad científica durante las últimas décadas. Esto se debe principalmente a su amplio rango de aplicaciones, que abarcan áreas como sondeos de radar/sonar para la detección de iones, análisis sísmicos y diagnósticos médicos no invasivos. Es por esto que la construcción y desarrollo de métodos numéricos para aproximar estas ondas tiene una importancia primordial, especialmente en casos que involucran frecuencias de alto orden, que requieren un tratamiento especial para mitigar sus efectos de dispersión.

La ecuación de Helmholtz es de particular interés, esto debido a que la variación en los parámetros para el análisis de la ecuación puede impactar significativamente en la precisión de la aproximación obtenida por un método numérico en particular. Si bien se han obtenido resultados para casos unidimensionales con condiciones de Robin y condiciones de frontera mixtas [13, 23], nuestra comprensión en casos bidimensionales o tridimensionales ha girado predominantemente en torno a condiciones de frontera Robin, centrándonos en la estabilidad y convergencia, como lo demuestran trabajos como [25], [29] y [17]. Estos estudios han probado la estabilidad, analizado la dispersión de la solución y proporcionado estimaciones para el error, revelando una dependencia entre el tamaño de los elementos de la malla y la frecuencia de la onda.

En [10] se definieron condiciones sobre el dominio para desarrollar y analizar un método MHM (Híbrido-mixto multiescala) para la ecuación de Helmholtz. Sin embargo, esta teoría impone restricciones significativas, que requieren propiedades específicas tanto en los datos como en la malla. El objetivo de este trabajo es presentar un nuevo método híbrido mixto (MH). Su principal innovación es la imposición de una condición de Robin artificial en los problemas locales, con el fin de relajar estas restricciones. Esta idea surge siguiendo la modificación presentada en [2], que introduce una perturbación al multiplicador de Lagrange mediante la adición de un término dependiente de la variable primal.

El objetivo de este trabajo es definir este nuevo método en el contexto de la ecuación de Helmholtz con condiciones de frontera mixtas, abordando un espacio bidimensional, desarrollando una teoría de estabilidad y realizando posteriormente el análisis de error

En adelante, el texto se presenta de la siguiente manera: después de esta introducción en el Capítulo 1, el siguiente capítulo presenta las definiciones fundamentales para este estudio, incluyendo particiones, mallas y normas. El Capítulo 3 presenta y describe el problema modelo, introduce una nueva formulación híbrida, se demuestra que el problema está bien definido, se establecen resultados de estabilidad tanto para versiones continuas como discretas del problema, y se concluye presentando estimaciones de error para el método híbrido. El Capítulo 4 presenta el método híbrido multiescala, sus problemas locales y el problema global, demostrando que todos estos problemas están bien definidos. También se presenta el algoritmo computacional del método. El Capítulo 5 está dedicado a experimentos computacionales que validan los resultados teóricos de los capítulos anteriores. Finalmente, en el Capítulo 6, se presenta un resumen de las conclusiones generales obtenidas en este trabajo.

Capítulo 2

En este capítulo presentamos algunas definiciones y resultados preliminares que serán útiles para comprender este trabajo. Introducimos definiciones para espacios y normas, además, proporcionamos notaciones para las particiones y mallas.

2.1. Resultados Clásicos

Sea X un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, y Ω un abierto Lipschitz en \mathbb{R}^d , con $d \in \{2, 3\}$.

Definición 2.1.1 (Producto Interior). *Un producto interior sobre \mathbb{K} es una aplicación $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ con las siguientes propiedades:*

- i) $(u, u) \geq 0$, para todo $u \in X$.*
- ii) Sea θ el vector nulo sobre X , se tiene que $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = \theta$.*
- iii) $(u, v) = \overline{(v, u)}$, para todo $u, v \in X$.*
- iv) $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, para todo $u, v, w \in X$.*

Definición 2.1.2 (Norma). *Sea $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación con las siguientes propiedades:*

- i) $\|u\| \geq 0$, para todo $u \in X$.*
- ii) Sea θ el vector nulo sobre X , $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \theta$.*
- iii) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, para todo $u \in X$.*
- iv) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, para todo $u, v \in X$.*

Observación 2.1.1. Para efectos de este trabajo consideraremos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definición 2.1.3 (Forma Sesquilineal). Sea V un espacio vectorial complejo. Se define una “Forma Sesquilineal” como una aplicación $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ tal que es lineal en el primer argumento y lineal con respecto al conjugado del segundo argumento.

Sea el dominio A , sea ∂A una frontera Lipschitz de A , sea la normal exterior $\mathbf{n}^{\partial A}$ a A . Se define $\mathbb{P}_k(A)$, como el espacio de polinomios de orden menor o igual a k definidos sobre A .

Además, sea $\mathbb{M}(A)$ un espacio de funciones $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ Lebesgue medible. Se define

$$L^p(A) := \left\{ f \in \mathbb{M}(A) : \|f\|_{L^p(A)} < +\infty \right\}, 1 \leq p \leq +\infty, \quad (2.1.1)$$

con la norma $\|\cdot\|_{L^p} : L^p(A) \rightarrow \mathbb{K}$ definida como:

$$\|f\|_{L^p(A)} := \begin{cases} \left(\int_A |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 1 \leq p < +\infty, \\ \text{ess sup}_{x \in A} |f(x)|, & \text{si } p = +\infty. \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Sea el espacio de funciones localmente integrables $L^1_{\text{loc}}(A)$ definido como:

$$L^1_{\text{loc}}(A) := \left\{ f \in \mathbb{M}(A) : f|_K \in L^1(K), \text{ para todo } K \subset A, K \text{ compacto} \right\}. \quad (2.1.3)$$

En el caso $p = 2$, se define el producto interior $(\cdot, \cdot)_A : L^2(A) \times L^2(A) \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$(f, g)_A = \int_A f g, \quad (2.1.4)$$

además, podemos definir la norma para el espacio $L^2(A)$ como $\|f\|_{L^2(A)} = \|f\|_{0,A} = \sqrt{(f, f)_A}$ para todo $f \in L^2(A)$.

Sean X y Z dos espacios vectoriales. Se define el espacio de todas las aplicaciones lineales de X a Z como $\mathcal{L}(X, Z)$. Además, se define el espacio dual de X como $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ cuya notación es X' .

Definición 2.1.4 (Producto Dualidad). Dada una forma lineal $u' \in X'$ y un vector $v \in X$, se representa el resultado de $u'(v)$ como $\langle u', v \rangle_{X', X}$. Esto define una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X', X} : X' \times X \rightarrow \mathbb{K}$ llamada producto dualidad, que satisface las siguientes propiedades:

- i) $\langle u'_1 + u'_2, v \rangle_{X',X} = \langle u'_1, v \rangle_{X',X} + \langle u'_2, v \rangle_{X',X}$, para todo $u'_1, u'_2 \in X'$, para todo $v \in X$.
- ii) $\langle u', v_1 + v_2 \rangle_{X',X} = \langle u', v_1 \rangle_{X',X} + \langle u', v_2 \rangle_{X',X}$, para todo $u' \in X'$, para todo $v_1, v_2 \in X$.
- iii) $\langle \lambda u', v \rangle_{X',X} = \lambda \langle u', v \rangle_{X',X}$, para todo $u' \in X'$, para todo $v \in X$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.
- iv) $\langle u', \lambda v \rangle_{X',X} = \lambda \langle u', v \rangle_{X',X}$, para todo $u' \in X'$, para todo $v \in X$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

Un multi-índice n -dimensional $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ es una tupla de orden $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$. Para cada $m \in \mathbb{N}_0$, se define $\mathcal{C}^m(A)$ como el espacio vectorial de funciones continuas $u : A \rightarrow \mathbb{K}$, tales que su derivada parcial $\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$ de orden $|\alpha| = m$ es continua. Se denota como $\mathcal{C}_c^\infty(A)$ (funciones continuas con soporte compacto) como $\mathcal{D}(A)$ cuyo espacio dual viene definido como $\mathcal{D}(A)'$. Sea $f \in \mathcal{D}(A)'$, se define su derivada parcial $\partial^\alpha f \in \mathcal{D}(A)'$ como:

$$\langle \partial^\alpha f, v \rangle_{\mathcal{D}(A)', \mathcal{D}(A)} = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha v \rangle_{\mathcal{D}(A)', \mathcal{D}(A)}, \text{ para todo } v \in \mathcal{D}(A). \quad (2.1.5)$$

Donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}(A)', \mathcal{D}(A)} : \mathcal{D}(A)' \times \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathbb{K}$ representa la dualidad entre $\mathcal{D}(A)'$ y $\mathcal{D}(A)$. En particular $u \in L^1_{\text{loc}}(A)$ puede ser representado como $f_u \in \mathcal{D}(A)'$ a través de la siguiente definición:

$$\langle f_u, v \rangle_{\mathcal{D}(A)', \mathcal{D}(A)} = \int_A u v, \text{ para todo } v \in \mathcal{D}(A), \quad (2.1.6)$$

además, se define el funcional $\partial^\alpha f \in \mathcal{D}(A)'$ como “derivada distribucional” de u . Sea $m \in \mathbb{N}_0$, se definen los espacios de Sobolev como:

$$H^m(A) := \{u \in L^2(A) : \partial^\alpha u \in L^2(A), |\alpha| \leq m\}, \quad (2.1.7)$$

con el producto interior $(\cdot, \cdot) : H^m(A) \times H^m(A) \rightarrow \mathbb{K}$ dado por

$$(u, v)_{m,A} := \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_A, \quad (2.1.8)$$

que induce la norma $\|\cdot\|_{m,A} : H^m(A) \rightarrow \mathbb{K}$, definida como $\|\cdot\|_{m,A} := \sqrt{(\cdot, \cdot)_{m,A}}$

y la semi-norma $|\cdot|_{m,A} := \sqrt{(\partial^m \cdot, \partial^m \cdot)_A}$. Sean $u \in L^2(A)$, se define el gradiente de u como la función vectorial $\nabla u := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d} \right)$, y el divergente de $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_d) \in [L^2(A)]^d$ como la función escalar $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} := \sum_{i=1}^d \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i}$. Notemos que, si $\mathbf{u} \in H^1(A)$ implica que $\nabla \mathbf{u} \in [L^2(A)]^d$, entonces, se puede definir la siguiente relación para $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ a través del espacio:

$$\mathbf{H}(\text{div}; A) := \left\{ \boldsymbol{\sigma} \in [L^2(A)]^d : \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \in L^2(A) \right\}. \quad (2.1.9)$$

Se define la restricción de $H^1(A)$ sobre ∂A por:

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial A) := \{v|_{\partial A} : v \in H^1(A)\}, \quad (2.1.10)$$

donde $v|_{\partial A}$ representa la traza v en ∂A . Se define el dual del espacio $H^{\frac{1}{2}}(\partial A)$ como $H^{-\frac{1}{2}}(\partial A)$, que satisface la siguiente identidad:

$$H^{-\frac{1}{2}}(\partial A) = \{ \boldsymbol{\sigma}|_{\partial A} \cdot \mathbf{n}^{\partial A} : \boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{H}(\text{div}, A) \}. \quad (2.1.11)$$

Se define el producto de dualidad $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial A} : H^{-\frac{1}{2}}(\partial A) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial A) \rightarrow \mathbb{K}$, como:

$$\langle \mu, v \rangle_{\partial A} := (\boldsymbol{\sigma}, \nabla v)_A + (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, v)_A, \quad (2.1.12)$$

donde, $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{H}(\text{div}; A)$ tal que $\boldsymbol{\sigma}|_{\partial A} \cdot \mathbf{n}^{\partial A} = \mu$ y $v \in H^1(A)$.

2.2. Particiones y Mallas

Siguiendo las definiciones propuestas en [3], se introducen dos particiones que no necesariamente coinciden pero tampoco son independientes. Primero, se define $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, con $d \in \{2, 3\}$, un dominio con frontera Lipschitz Γ de diámetro d_Ω . Se introduce una familia $\{\mathcal{P}_\mathcal{H}\}_{\mathcal{H}>0}$ de particiones de $\bar{\Omega}$ compuesta por polígonos cerrados, acotados y disjuntos. El diámetro de un elemento $K \in \mathcal{P}_\mathcal{H}$ se denota por \mathcal{H}_K , y el diámetro de la circunferencia inscrita en el polígono viene dado por ρ_K . En la Figura 2.2.1 se presenta un ejemplo para un elemento K en particular. Se define $\mathcal{H} := \max_{K \in \mathcal{P}_\mathcal{H}} \mathcal{H}_K$ y se asume la existencia de $c > 0$ tal que

$$\frac{\mathcal{H}_K}{\rho_K} \leq c, \text{ para todo } K \in \mathcal{P}_\mathcal{H}, \text{ para todo } \mathcal{H} > 0. \quad (2.2.1)$$

Cada polígono K posee frontera ∂K compuesta de aristas E . El conjunto de

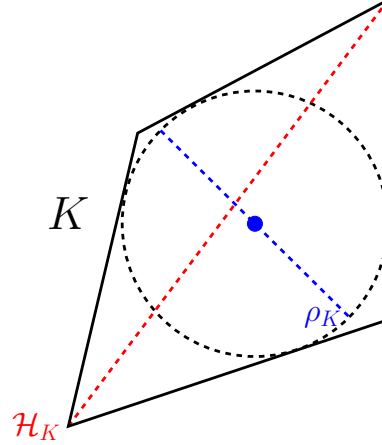


Figura 2.2.1: Un elemento K , la línea roja representa el diámetro del elemento, la línea azul representa el diámetro de la circunferencia inscrita.

bordes de \mathcal{P}_H viene dado por $\partial\mathcal{P}_H$ y el conjunto de aristas por \mathcal{E} ; tal que, $\partial\mathcal{P}_H = \{\partial K : K \in \mathcal{P}_H\}$, y

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{array}{l} E = \partial K_1 \cap \partial K_2, \text{ o} \\ E = \partial K \cap \partial\Omega, \end{array} \left| \begin{array}{l} K_1, K_2 \in \mathcal{P}_H, K_1 \neq K_2, \text{ y} \\ E \text{ no es un punto aislado } (d = 2) \text{ o una arista } (d = 3) \end{array} \right. \right\}.$$

Adicionalmente, se define el conjunto de aristas interiores, denotadas por \mathcal{E}^0 , como sigue

$$\mathcal{E}^0 = \left\{ E = \partial K_1 \cap \partial K_2, \left| \text{ para todo } K_1, K_2 \in \mathcal{P}_H, K_1 \neq K_2 \right. \right\}.$$

Para cada $E \in \mathcal{E}$ se asocia un vector normal unitario \mathbf{n}^E ; su orientación es fija pero arbitraria. Para cada $K \in \mathcal{P}_H$ denotamos por \mathbf{n}^K al vector normal exterior en ∂K , y sea $\mathbf{n}|_{\partial K|_E}$ para cada $E \subset \partial K$ una notación que nos permite indicar sobre qué elemento se analiza la arista E . El primer paso es definir una malla computacional, introduciendo \mathcal{E}_H , una partición sobre \mathcal{E} en segmentos F de largo $H_F \leq H := \max_{D \in \mathcal{E}_H} H_D$, tal que cada $F \in \mathcal{E}_H$ es un subconjunto de solo una arista $E \in \mathcal{E}$. No asumiremos que los segmentos tengan el mismo largo, pero vamos a pedir que no sean muy diferentes. Más precisamente, vamos a imponer la siguiente suposición.

Suposición 2.2.1. *La malla \mathcal{E}_H es tal que, para cada $K \in \mathcal{P}_H$, una malla regular $\Xi_H(K)$ de K puede construirse, donde su traza sobre ∂K coincide con \mathcal{E}_H . Además,*

la malla $\Xi_H := \cup_{K \in \mathcal{P}_H} \Xi_H(K)$ será referenciada como una malla virtual. Esta construcción define una partición conforme.

El último ingrediente de la definición del esquema discreto es la malla que será utilizada para aproximar las funciones de base locales: para cada $K \in \mathcal{P}_H$, se introduce una familia de triangulaciones regulares $\{\mathcal{T}_h^K\}_{h>0}$ construida de la siguiente manera:

1. Primero, para cada $K \in \mathcal{P}_H$, la triangulación $\Xi_H(K)$ se refina una vez. Este proceso se construye tomando cada elemento perteneciente a la malla y subdividiéndolo en 4 triángulos congruentes, uniendo los puntos medios de las aristas del elemento inicial. Este proceso es también llamado red-refinement [4]. La nueva malla obtenida se denomina triangulación mínima;
2. luego, para cada K , la familia $\{\mathcal{T}_h^K\}_{h>0}$ está compuesta por refinamientos regulares de triangulaciones mínimas.

El diámetro de $\mathfrak{T} \in \mathcal{T}_h^K$ se denota por $h_{\mathfrak{T}}$, y $h := \max_{K \in \mathcal{P}_H} \max_{\mathfrak{T} \in \mathcal{T}_h^K} h_{\mathfrak{T}}$. Es importante remarcar que, si $E = K_1 \cap K_2 \in \mathcal{E}$, entonces la traza de dos mallas vecinas $\mathcal{T}_h^{K_1}$ y $\mathcal{T}_h^{K_2}$ no necesariamente coinciden. En la Figura 2.2.2 se muestra un ejemplo de una partición que satisface las suposiciones presentadas.

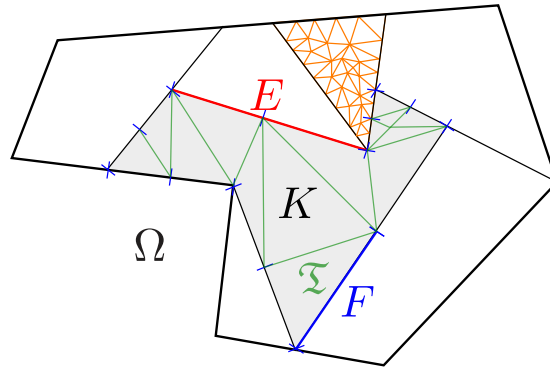


Figura 2.2.2: Ejemplo de una partición sobre un dominio Ω con elementos poligonales no conformes. Observe las submallas (verde y naranja) discretizando dos elementos diferentes de \mathcal{P}_H con diferentes granularidades, donde $\mathfrak{T} \in \mathcal{T}_h^K$ es un elemento de la discretización de $K \in \mathcal{P}_H$. La línea roja representa un borde $E \in \mathcal{E}$ y la línea azul representa un elemento $F \in \mathcal{E}$ del esqueleto de la malla. [2]

Finalmente, enunciamos el siguiente supuesto sobre la partición:

Suposición 2.2.2. La partición satisface la condición de “Star-shaped Regularity”, esto es, existe $\gamma > 0$ tal que, para todo \mathcal{H} , el politopo $K \in \mathcal{P}_H$ satisface que, para

todo $\mathbf{x} \in K$, existe una bola B_K de centro $\mathbf{y}_K \in K$ y de radio $\delta_K > \gamma \mathcal{H}_K$, tal que la intersección de todo conjunto convexo [18, p. 191] formado por $\{\mathbf{x}\} \cup B_K(\mathbf{y}_K, \delta_K)$ está contenida en K [5, Definición 4.2.2].

2.3. Espacios, Productos interiores y Normas

Seguiremos la notación de los espacios de Lebesgue y Sobolev previamente definidos. Para $K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}$ y $m \geq 1$, consideraremos el espacio local $H^m(K)$ equipado con la norma usual. Se define el siguiente espacio

$$H^m(\mathcal{P}_{\mathcal{H}}) = \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in H^m(K), \text{ para todo } K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}\},$$

equipado con la semi-norma y norma,

$$|v|_{m, \mathcal{P}_{\mathcal{H}}} = \left(\sum_{K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}} |v|_{m, K}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ para todo } v \in V,$$

$$\|v\|_{m, \mathcal{P}_{\mathcal{H}}} = \left(\sum_{K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}} \|v\|_{m, K}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ para todo } v \in V,$$

respectivamente, y sea $V = H^1(\mathcal{P}_{\mathcal{H}})$, se define el siguiente producto interior

$$(u, \bar{v})_{\mathcal{P}_{\mathcal{H}}} := \sum_{K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}} (u, \bar{v})_K, \text{ para todo } u, v \in V, \quad (2.3.1)$$

adicionalmente, se tiene

$$(u, v)_V := \sum_{K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}} \omega^2 (u, \bar{v})_K + \omega (u, \bar{v})_{\partial K \cap \Gamma_A} + (\nabla u, \nabla \bar{v})_K, \text{ para todo } u, v \in V, \quad (2.3.2)$$

que induce la norma

$$\|v\|_{V, \omega} = \left(\sum_{K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}} \left\{ \omega^2 \|v\|_{0, K}^2 + \omega \|v\|_{0, \partial K \cap \Gamma_A}^2 + |v|_{1, K}^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ para todo } v \in V, \quad (2.3.3)$$

donde $\omega > 0$ corresponde a un parámetro físico del problema, y $\Gamma_A \subseteq \partial\Omega$. Además, vamos a considerar $V(K) = H^1(K)$, donde la siguiente norma local será útil a lo

largo de este trabajo

$$\|v\|_{V(K),\omega} = \left(\omega^2 \|v\|_{0,K}^2 + \omega \|v\|_{0,\partial K \cap \Gamma_A}^2 + |v|_{1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ para todo } v \in V(K).$$

Además, se define el siguiente espacio:

$$H^{-\frac{1}{2}}(\partial \mathcal{P}_{\mathcal{H}}) = \prod_{K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}} H^{-\frac{1}{2}}(\partial K).$$

El espacio natural consiste en funciones que son trazas normales de $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$; más precisamente, se define el espacio

$$\Lambda := \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega), \\ \boldsymbol{\sigma}|_{\partial K} \cdot \mathbf{n}^K : \boldsymbol{\sigma}|_{\partial K \cap \Gamma_A} \cdot \mathbf{n}^K = 0, \\ \text{para todo } K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}} \end{array} \right\}. \quad (2.3.4)$$

El Teorema de Trazas [14] asegura que la siguiente operación entre $H^{-\frac{1}{2}}(\partial \mathcal{P}_{\mathcal{H}})$ y V está bien definida

$$\langle \mu, \bar{v} \rangle_{\partial \mathcal{P}_{\mathcal{H}}} := \sum_{K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}} \langle \mu, \bar{v} \rangle_{\partial K}, \text{ para todo } (\mu, v) \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial \mathcal{P}_{\mathcal{H}}) \times V. \quad (2.3.5)$$

Siguiendo la notación presentada en [10, Ecuación 3.5], el espacio Λ viene equipado con la siguiente norma

$$\|\mu\|_{\Lambda,\omega} := \sup_{v \in V} \frac{\text{Re} \langle \mu, \bar{v} \rangle_{\partial \mathcal{P}_{\mathcal{H}}}}{\|v\|_{V,\omega}}, \text{ para todo } \mu \in \Lambda. \quad (2.3.6)$$

Simplificaremos la notación escribiendo $\sup_{v \in V}$ en lugar de $\sup_{v \in V \setminus \{0\}}$.

Ahora, para $\ell \geq 0$ y $k \geq 0$, se introducen los siguientes espacios de elementos finitos.

$$V_h := \prod_{K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}} V_h(K). \quad (2.3.7)$$

Donde

$$V_h(K) := \{v_h \in C^0(K) : v_h|_{\mathfrak{T}} \in \mathbb{P}_k(\mathfrak{T}), \text{ para todo } \mathfrak{T} \in \mathcal{T}_h^K\}, \quad (2.3.8)$$

y

$$\Lambda_H := \{\mu_H \in \Lambda : \mu_H|_F \in \mathbb{P}_\ell(F), \text{ para todo } F \in \mathcal{E}_H\}. \quad (2.3.9)$$

Se define el interpolante de Lagrange local [15, Teorema 1.103] $\mathcal{I}_K^k : H^{k+1}(K) \rightarrow V_h(K)$ para todo $K \in \mathcal{P}_\mathcal{H}$ tal que para todo $m = 0, \dots, k+1$ satisface

$$\|v - \mathcal{I}_K^k(v)\|_{m,K} \leq C h_K^{k+1-m} |v|_{k+1,K}, \text{ para todo } v \in H^{k+1}(K), K \in \mathcal{P}_\mathcal{H}, \quad (2.3.10)$$

donde $C > 0$ depende de la regularidad de la submalla, y $h_K = \max_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h^K} h_{\mathcal{T}}$. Ahora, se define $\mathcal{I}_h^k : H^{k+1}(\mathcal{P}_\mathcal{H}) \rightarrow V_h$ como el interpolante de Lagrange global [15, Lemma 1.110], donde \mathcal{I}_h^k satisface

$$\mathcal{I}_h^k(v)|_K = \mathcal{I}_K^k(v), \text{ para todo } K \in \mathcal{P}_\mathcal{H}, \text{ para todo } v \in H^{k+1}(\mathcal{P}_\mathcal{H}). \quad (2.3.11)$$

Antes de introducir un resultado de interpolación, se presenta la siguiente desigualdad de trazas.

Lema 2.3.1. *Sea $K \in \mathcal{P}_\mathcal{H}$ y sea $v \in V(K)$, haciendo uso de la condición de "Star-shaped Regularity" enunciada en la Suposición 2.2.2, se define la siguiente desigualdad de trazas*

$$\|v\|_{0,\partial K} \leq \left(\frac{1}{\mathcal{H}_K} \|v\|_{0,K}^2 + \mathcal{H}_K |v|_{1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.3.12)$$

Demostración. Resultado obtenido de la desigualdad de trazas presentada en [7, Ecuación 2.18] □

Usando estas estimaciones, se presenta el siguiente lema.

Lema 2.3.2. *Sea \mathcal{I}_h^k un interpolante de Lagrange global. Para todo $v \in H^{k+1}(\mathcal{P}_\mathcal{H})$, existe $c_1 > 0, c_2 > 0$ y $c_3 > 0$ dependientes de la regularidad de la submalla, y que no dependen de ω , tal que*

$$\|v - \mathcal{I}_h^k(v)\|_{0,\mathcal{P}_\mathcal{H}} \leq c_1 h^{k+1} |v|_{k+1,\mathcal{P}_\mathcal{H}}, \quad (2.3.13)$$

$$|v - \mathcal{I}_h^k(v)|_{1,\mathcal{P}_\mathcal{H}} \leq c_2 h^k |v|_{k+1,\mathcal{P}_\mathcal{H}}. \quad (2.3.14)$$

Además

$$\|v - \mathcal{I}_h^k(v)\|_{V,\omega} \leq c_3 \left(h^2 + \omega^2 + \frac{\omega}{\mathcal{H}} + h^2 \mathcal{H} \omega \right)^{\frac{1}{2}} h^k |v|_{k+1,\mathcal{P}_\mathcal{H}}. \quad (2.3.15)$$

Demostración. Sea $v \in H^{k+1}(\mathcal{P}_\mathcal{H})$. Recordando que $h = \max_{K \in \mathcal{P}_\mathcal{H}} h_K$. Usando

(2.3.10), (2.3.11), se tiene

$$\begin{aligned}
\|v - \mathcal{I}_h^k(v)\|_{0, \mathcal{P}_h}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \|v - \mathcal{I}_h^k(v)\|_{0, K}^2 \\
&= \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \|v - \mathcal{I}_K^k(v)\|_{0, K}^2 \\
&\leq \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \tilde{c}_1 h_K^{2(k+1)} |v|_{k+1, K}^2 \\
&\leq \tilde{c}_1 \sum_{K \in \mathcal{P}_h} h^{2(k+1)} |v|_{k+1, K}^2 \\
&= \tilde{c}_1 h^{2(k+1)} |v|_{k+1, \mathcal{P}_h}^2,
\end{aligned}$$

donde $\tilde{c}_1 > 0$. Luego,

$$\|v - \mathcal{I}_h^k(v)\|_{0, \mathcal{P}_h} \leq c_1 h^{k+1} |v|_{k+1, \mathcal{P}_h},$$

con $c_1 > 0$. Similarmente, para (2.3.14), usando (2.3.10), (2.3.11), y la definición de h , se tiene

$$\begin{aligned}
|v - \mathcal{I}_h^k(v)|_{1, \mathcal{P}_h}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{P}_h} |v - \mathcal{I}_h^k(v)|_{1, K}^2 \\
&= \sum_{K \in \mathcal{P}_h} |v - \mathcal{I}_K^k(v)|_{1, K}^2 \\
&\leq \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \tilde{c}_2 h_K^{2k} |v|_{k+1, K}^2 \\
&\leq \tilde{c}_2 \sum_{K \in \mathcal{P}_h} h^{2k} |v|_{k+1, K}^2 \\
&= \tilde{c}_2 h^{2k} |v|_{k+1, \mathcal{P}_h}^2,
\end{aligned}$$

donde $\tilde{c}_2 > 0$. Luego,

$$|v - \mathcal{I}_h^k(v)|_{1, \mathcal{P}_h} \leq c_2 h^k |v|_{k+1, \mathcal{P}_h},$$

con $c_2 > 0$. Combinando (2.3.13), (2.3.14), la definición de la norma V , y la

desigualdad de trazas (2.3.12), se tiene

$$\begin{aligned}
\|v - \mathcal{I}_h^k(v)\|_{V,\omega} &= \left(\omega^2 \|v - \mathcal{I}_h^k(v)\|_{0,\mathcal{P}_\mathcal{H}}^2 + |v - \mathcal{I}_h^k(v)|_{1,\mathcal{P}_\mathcal{H}}^2 + \omega \|v - \mathcal{I}_h^k(v)\|_{0,\Gamma_A}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\omega^2 \|v - \mathcal{I}_h^k(v)\|_{0,\mathcal{P}_\mathcal{H}}^2 + |v - \mathcal{I}_h^k(v)|_{1,\mathcal{P}_\mathcal{H}}^2 + \frac{\omega}{\mathcal{H}} \|v - \mathcal{I}_h^k(v)\|_{0,\mathcal{P}_\mathcal{H}}^2 \right. \\
&\quad \left. + \mathcal{H}\omega |v - \mathcal{I}_h^k(v)|_{1,\mathcal{P}_\mathcal{H}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(c_1^2 \omega^2 h^{2k} |v|_{k+1,\mathcal{P}_\mathcal{H}}^2 + c_2^2 h^{2k+2} |v|_{k+1,\mathcal{P}_\mathcal{H}}^2 \right. \\
&\quad \left. + c_1^2 \frac{\omega}{\mathcal{H}} h^{2k} |v|_{k+1,\mathcal{P}_\mathcal{H}}^2 + c_2^2 \mathcal{H}\omega h^{2k+2} |v|_{k+1,\mathcal{P}_\mathcal{H}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c_3 \left(h^2 + \omega^2 + \frac{\omega}{\mathcal{H}} + h^2 \mathcal{H}\omega \right)^{\frac{1}{2}} h^k |v|_{k+1,\mathcal{P}_\mathcal{H}}
\end{aligned}$$

donde $c_3 = \max\{c_1, c_2\}$.

□

Finalmente, se introduce un proyector para Λ_H . Para cada $F \in \mathcal{E}$ se define la proyección $\Pi_F^\ell : L^2(F) \rightarrow \mathbb{P}_\ell(F)$ como

$$(\Pi_F^\ell(\mu), q)_F = (\mu, q)_F, \text{ para todo } q \in \mathbb{P}_\ell(F). \quad (2.3.16)$$

Luego, se define el proyector global $\Pi^\ell : L^2(\mathcal{E}) \rightarrow \Lambda_H$ como $\Pi^\ell(\mu)|_F = \Pi_F^\ell(\mu)$, para cada $\mu \in L^2(\mathcal{E})$.

Capítulo 3

Una Nueva Formulación Híbrida Multiescala

En este capítulo, vamos a introducir y analizar un nuevo método de elementos finitos híbrido multiescala para la ecuación de Helmholtz. Esta nueva formulación híbrida tiene como objetivo ser el punto de partida para el desarrollo de nuevos métodos de elementos finitos multiescala, siguiendo la metodología presentada en [10]. El objetivo principal del desarrollo de esta formulación es que, a diferencia de lo presentado en [10], el método construido a partir de ella esté asociado a problemas locales bien definidos, independientemente de la relación entre la frecuencia ω y la geometría de cada elemento de la partición $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}$.

3.1. El Problema Modelo

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, con $d \in \{2, 3\}$, un dominio con frontera Lipschitz Γ , donde $\kappa \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ es un módulo de compresibilidad y $\rho \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ es la densidad. Considerando una frecuencia angular $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ y un término fuente $f \in L^2(\Omega)$, el campo de dispersión $u \in H^1(\Omega)$ satisface

$$-\frac{\omega^2}{\kappa}u - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla u \right) = f, \quad \text{en } \Omega. \quad (3.1.1)$$

Teniendo en mente sus usos más comunes, como la propagación de ondas sísmicas o acústicas, además de la radiación electromagnética, vamos a separar la frontera Γ

en dos subconjuntos, Γ_D y Γ_A , de manera que $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_A$ y, además, $\Gamma_D \cap \Gamma_A = \emptyset$. Vamos a imponer una condición de frontera Dirichlet $u = 0$ sobre Γ_D . Para Γ_A vamos a considerar una condición de frontera absorbente de primer orden

$$\frac{1}{\rho} \nabla u \cdot \mathbf{n}^{\partial\Omega} - \frac{1}{\sqrt{\kappa\rho}} u = 0, \quad (3.1.2)$$

donde $\mathbf{n}^{\partial\Omega}$ es el vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$. Finalmente, nos concentraremos en resolver el problema de valores de contorno para encontrar $u \in H^1(\Omega)$ tal que:

$$\begin{cases} -\frac{\omega^2}{\kappa} u - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla u \right) = f, & \text{sobre } \Omega \\ u = 0, & \text{en } \Gamma_D \\ \frac{1}{\rho} \nabla u \cdot \mathbf{n}^{\partial\Omega} - \frac{i\omega}{\sqrt{\kappa\rho}} u = g, & \text{en } \Gamma_A \end{cases}, \quad (3.1.3)$$

donde $g \in L^2(\Gamma_A)$. Nuestros resultados están enfocados en casos de frecuencias altas. Vamos a asumir que existe ω_0 tal que $\omega \geq \omega_0 > 0$. Un ejemplo particular sobre el problema modelo recién enunciado se presenta en la figura 3.1.1

3.2. Formulación Débil Estándar

Con el objetivo de presentar una nueva formulación híbrida y construir resultados sobre esta, introduciremos primero la forma débil del problema (3.1.3), entregando resultados de existencia, unicidad y estabilidad para la solución de dicha formulación.

Se define la formulación débil estándar de (3.1.3) como sigue: Encontrar $u \in H_D^1(\Omega)$ tal que:

$$\left(\frac{1}{\rho} \nabla u, \overline{\nabla v} \right)_{\Omega} - \omega^2 \left(\frac{1}{\kappa} u, \bar{v} \right)_{\Omega} - i\omega \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa\rho}} u, \bar{v} \right)_{\Gamma_A} = (f, \bar{v})_{\Omega} + (g, \bar{v})_{\Gamma_A}, \quad (3.2.1)$$

para todo $v \in H_D^1(\Omega)$, donde el espacio $H_D^1(\Omega)$ se define como:

$$H_D^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_D} = 0\}. \quad (3.2.2)$$

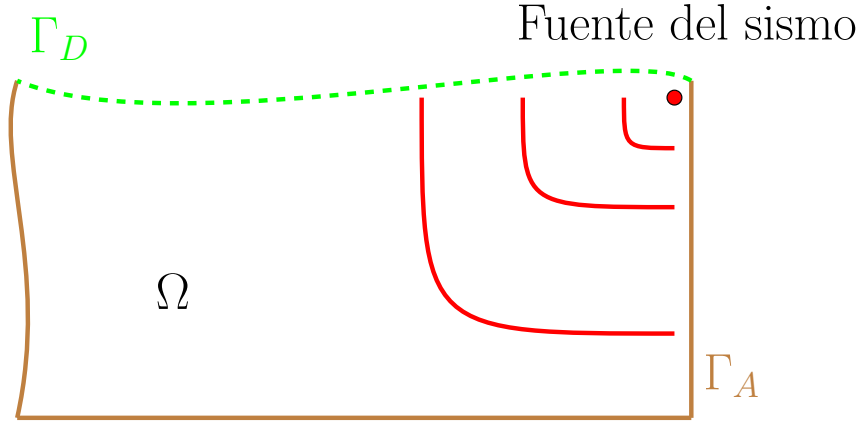


Figura 3.1.1: Ejemplo aplicado del problema modelo 3.1.3, simulando la propagación de ondas sísmicas. Dentro de la imagen, el término fuente “ f ” corresponde al elemento denominado “Fuente del sismo”, la cual puede venir definida por una función pulso o por una función gaussiana. El dominio Ω en este caso corresponde a una sección del terreno donde ocurrió el sismo que se desea analizar. Dicho dominio presenta densidad ρ y modulo de compresibilidad κ . Además, la frontera se define como todo el borde que encierra este terreno, la cual se puede dividir en dos subconjuntos disjuntos: Γ_D , que representa la superficie del terreno, y Γ_A , que corresponde al resto del borde que encierra el dominio bajo la superficie. La solución del problema describe la propagación y refracción de la onda emitida por la fuente.

Adicionalmente, consideraremos el siguiente espacio [28, p. 121]

$$H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_A) := \left\{ \xi|_{\Gamma_A} : \xi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \xi|_{\Gamma_D} = 0 \right\}. \quad (3.2.3)$$

Teniendo esta construcción, se presentan los siguientes resultados de existencia y unicidad:

Lema 3.2.1. *Sea Ω , un dominio con frontera Lipschitz. Existe un único $u \in H_D^1(\Omega)$ que resuelve el problema (3.2.1).*

Demostración. Considerando el resultado presentado en [20, Teorema 2.1], que nos entrega un resultado de existencia y unicidad para el problema de Helmholtz con condiciones de contorno mixtas y coeficientes variables mediante un argumento de continuidad, podemos establecer que existe $u \in H_D^1(\Omega)$, solución única de la formulación débil presentada en (3.2.1). \square

Una vez presentada la existencia y unicidad para el problema (3.2.1), construiremos un resultado de estabilidad para la misma, con el objetivo de analizar su

dependencia con respecto al dominio Ω y los coeficientes ω , κ y ρ .

Para empezar, consideraremos las siguientes definiciones: Sea $K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}$, se definen

$$\rho^* := \sup_{\mathbf{x} \in K} \rho(\mathbf{x}), \quad \rho_* := \inf_{\mathbf{x} \in K} \rho(\mathbf{x}), \quad \kappa^* := \sup_{\mathbf{x} \in K} \kappa(\mathbf{x}), \quad \kappa_* := \inf_{\mathbf{x} \in K} \kappa(\mathbf{x}). \quad (3.2.4)$$

Además

$$\rho^{**} := \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \rho(\mathbf{x}), \quad \rho_{**} := \inf_{\mathbf{x} \in \Omega} \rho(\mathbf{x}), \quad \kappa^{**} := \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \kappa(\mathbf{x}), \quad \kappa_{**} := \inf_{\mathbf{x} \in \Omega} \kappa(\mathbf{x}). \quad (3.2.5)$$

Teniendo en cuenta las definiciones previas, presentamos el siguiente resultado de estabilidad para la solución $u \in H_D^1(\Omega)$ del problema (3.2.1).

Lema 3.2.2. *Sea $u \in H_D^1(\Omega)$, solución del problema (3.2.1). Existe una constante positiva C_{d_Ω} que depende de Ω , tal que, dado $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in L^2(\Gamma_A)$, se cumple la siguiente estimación:*

$$\|u\|_{V,\omega} \leq C_{d_\Omega} (\|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{0,\Gamma_A}). \quad (3.2.6)$$

Demostración. La demostración de este lema es una variación de [26, Proposición 8.1.4] y [22, Proposición 3.3]. Sea $u \in H_D^1(\Omega)$, solución del problema (3.2.1). De manera directa se tiene que $u \in V$. Se define $\gamma > 0$ y \mathbf{x}^T , tales que $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{n}^{\Gamma_A} \geq \gamma$. Además, $|\mathbf{x}^T|_{0,\infty} \leq d_\Omega$ y $\nabla \cdot \mathbf{x}^T = d$. Considerando $v = u$ en la forma sesquilineal (3.2.1), podemos obtener las siguientes desigualdades para la parte real:

$$\frac{1}{\rho^*} \|\nabla u\|_{0,\mathcal{D}_h}^2 - \frac{1}{\kappa^*} \omega^2 \|u\|_{0,\mathcal{D}_h}^2 \leq |(f, \bar{u})_\Omega| + |(g, \bar{u})_{\Gamma_A}|, \quad (3.2.7)$$

además, para la parte imaginaria, podemos obtener lo siguiente.

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^* \kappa^*}} \omega \|u\|_{0,\Gamma_A}^2 \leq |(f, \bar{u})_\Omega| + |(g, \bar{u})_{\Gamma_A}|. \quad (3.2.8)$$

De la ecuación (3.2.8), utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se obtiene

$$\frac{\omega}{\sqrt{\rho^* \kappa^*}} \|u\|_{0,\Gamma_A}^2 \leq \frac{1}{2\epsilon\omega} \|f\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\epsilon\omega}{2} \|u\|_{0,\mathcal{D}_h}^2 + \frac{1}{2\epsilon_2\omega} \|g\|_{0,\Gamma_A}^2 + \frac{\omega\epsilon_2}{2} \|u\|_{0,\Gamma_A}^2, \quad (3.2.9)$$

con $\epsilon > 0$, $\epsilon_2 > 0$ valores fijos pero arbitrarios. De la ecuación (3.2.7), se obtiene

$$\frac{1}{\rho^*} \|\nabla u\|_{0, \mathcal{D}_h}^2 \leq \frac{1}{2\epsilon_3 \omega^2} \|f\|_{0, \Omega}^2 + \frac{\epsilon_3 \omega^2}{2} \|u\|_{0, \mathcal{D}_h}^2 + \frac{1}{2\epsilon_4 \omega^2} \|g\|_{0, \Gamma_A}^2 + \frac{\epsilon_4 \omega^2}{2} \|u\|_{0, \Gamma_A}^2, \quad (3.2.10)$$

con $\epsilon_3 > 0$, $\epsilon_4 > 0$ valores fijos pero arbitrarios. Ahora, si consideramos $v = \mathbf{x}^T \cdot \nabla u$ y usando las estimaciones de [22], se tiene

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} a(u, \mathbf{x}^T \cdot \nabla u) &\geq d \frac{\omega^2}{\kappa_*} \|u\|_{0, \mathcal{D}_h}^2 + \frac{1}{\rho^*} \int_{\Gamma_A} |\nabla u|^2 \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{n}^{\Gamma_A} \\ &\quad - \frac{d-2}{\rho^*} \|u\|_{1, \mathcal{D}_h}^2 - \frac{\omega^2}{\kappa_*} \int_{\Gamma_A} |u|^2 \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{n}^{\Gamma_A} \\ &\quad - 2 \operatorname{Re} \frac{i\omega}{\sqrt{\kappa_* \rho_*}} \int_{\Gamma_A} u \mathbf{x}^T \cdot \nabla u, \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} d \frac{\omega^2}{\kappa_*} \|u\|_{0, \mathcal{D}_h}^2 + \frac{1}{\rho^*} \int_{\Gamma_A} |\nabla u|^2 \overline{\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{n}^{\Gamma_A}} &\leq 2 \operatorname{Re} a_K(u, \mathbf{x}^T \cdot \nabla u) \\ &\quad + \frac{d-2}{\rho^*} \|\nabla u\|_{0, \mathcal{D}_h}^2 \\ &\quad + \frac{\omega^2}{\kappa_*} \int_{\Gamma_A} |u|^2 \overline{\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{n}^{\Gamma_A}} \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} \frac{i\omega}{\sqrt{\kappa_* \rho_*}} \int_{\Gamma_A} u \overline{\mathbf{x}^T \cdot \nabla u}, \end{aligned}$$

como u satisface el problema débil (3.2.1), se tiene que

$$\begin{aligned} d \frac{\omega^2}{\kappa_*} \|u\|_{0, \mathcal{D}_h}^2 + \frac{1}{\rho^*} \int_{\Gamma_A} |\nabla u|^2 \overline{\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{n}^{\Gamma_A}} &\leq 2 \operatorname{Re} \int_{\Omega} \overline{(\mathbf{x}^T \cdot \nabla u)} f \\ &\quad + \frac{d-2}{\rho^*} \|\nabla u\|_{0, \mathcal{D}_h}^2 \\ &\quad + \frac{\omega^2}{\kappa_*} \int_{\Gamma_A} |u|^2 \overline{\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{n}^{\Gamma_A}} \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} \frac{i\omega}{\sqrt{\kappa_* \rho_*}} \int_{\Gamma_A} u \overline{\mathbf{x}^T \cdot \nabla u} \\ &\quad + \operatorname{Re} \int_{\Gamma_A} \overline{(\mathbf{x}^T \cdot \nabla u)} g. \end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y las propiedades de \boldsymbol{x}^t , llegamos a

$$\begin{aligned} d \frac{\omega^2}{\kappa_*} \|u\|_{0,\mathcal{P}_h}^2 + \frac{\gamma}{\rho^*} \|\nabla u\|_{0,\Gamma_A}^2 &\leq \frac{d-2}{\rho^*} \|\nabla u\|_{0,\mathcal{P}_h}^2 \\ &+ C_1 d_\Omega \left(\frac{\omega^2}{\kappa_*} \|u\|_{0,\Gamma_A}^2 + \frac{\omega}{\sqrt{\kappa_* \rho_*}} \|u\|_{0,\Gamma_A} \|\nabla u\|_{0,\Gamma_A} \right) \\ &+ C_2 d_\Omega (\|f\|_{0,\Omega} \|\nabla u\|_{0,\mathcal{P}_h} + \|g\|_{0,\Gamma_A} \|\nabla u\|_{0,\Gamma_A}). \end{aligned}$$

Donde $C_1 > 0$ y $C_2 > 0$ no dependen de ρ o κ . Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene los siguiente:

$$\begin{aligned} \|u\|_{0,\Gamma_A} \|\nabla u\|_{0,\Gamma_A} &\leq \frac{\omega}{2\epsilon_5} \|u\|_{0,\Gamma_A}^2 + \frac{\epsilon_5}{2\omega} \|\nabla u\|_{0,\Gamma_A}^2, \\ \|g\|_{0,\Gamma_A} \|\nabla u\|_{0,\Gamma_A} &\leq \frac{1}{2\epsilon_6} \|g\|_{0,\Gamma_A}^2 + \frac{\epsilon_6}{2} \|\nabla u\|_{0,\Gamma_A}^2. \end{aligned}$$

Similarmente, podemos construir la siguiente estimación

$$\|f\|_{0,\Omega} \|\nabla u\|_{0,\mathcal{P}_h} \leq \frac{1}{2\epsilon_7} \|f\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\epsilon_7}{2} \|\nabla u\|_{0,\mathcal{P}_h}^2,$$

con $\epsilon_5 > 0$, $\epsilon_6 > 0$, $\epsilon_7 > 0$ valores fijos pero arbitrarios. Definiendo

$$\epsilon_6 = \frac{2}{d_\Omega C_2} \left(\frac{\gamma}{\rho^*} - C_1 d_\Omega \frac{\epsilon_5}{2\sqrt{\kappa_* \rho_*}} \right),$$

y tomando ϵ_5 lo suficientemente pequeño, para satisfacer $\epsilon_6 > 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} d \frac{\omega^2}{\kappa_*} \|u\|_{0,\mathcal{P}_h}^2 &\leq \frac{d-2}{\rho^*} \|\nabla u\|_{0,\mathcal{P}_h}^2 \\ &+ C_3 d_\Omega \left(\frac{\omega^2}{\kappa_*} \|u\|_{0,\Gamma_A}^2 + \frac{\omega^2}{2\epsilon_5 \sqrt{\kappa_* \rho_*}} \|u\|_{0,\Gamma_A}^2 \right) \\ &+ C_4 d_\Omega \left(\frac{1}{2\epsilon_7} \|f\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\epsilon_7}{2} \|\nabla u\|_{0,\mathcal{P}_h}^2 + \frac{1}{2\epsilon_6} \|g\|_{0,\Gamma_A}^2 \right), \end{aligned}$$

donde $C_3 > 0$, $C_4 > 0$ no dependen de ρ o κ . Utilizando las desigualdades (3.2.9)

y (3.2.10), podemos obtener que

$$\begin{aligned}
d \frac{\omega^2}{\kappa_*} \|u\|_{0,\mathcal{P}_h}^2 &\leq \frac{d-2}{\rho^*} \left(\frac{\rho^*}{2\epsilon_3 \omega^2} \|f\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\rho^* \epsilon_3 \omega^2}{2} \|u\|_{0,\mathcal{P}_h}^2 + \frac{\rho^*}{2\epsilon_4 \omega^2} \|g\|_{0,\Gamma_A}^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\rho^* \epsilon_4 \omega^2}{2} \|u\|_{0,\mathcal{P}_h}^2 \right) \\
&\quad + C_5 d_\Omega \left(\frac{1}{\kappa_*} + \frac{1}{\epsilon_5 \sqrt{\rho_* \kappa_*}} \right) \left(\frac{1}{2\epsilon} \|f\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\epsilon \omega^2}{2} \|u\|_{0,\mathcal{P}_h}^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2\epsilon_2} \|g\|_{0,\Gamma_A} + \frac{\omega^2 \epsilon_2}{2} \|u\|_{0,\mathcal{P}_h}^2 \right) \\
&\quad + C_6 d_\Omega \left(\frac{1}{2\epsilon_7} \|f\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2\epsilon_6} \|g\|_{0,\Gamma_A} \right) \\
&\quad + C_7 d_\Omega \frac{\epsilon_7}{2} \left(\frac{\rho^*}{2\epsilon_3 \omega^2} \|f\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\rho^* \epsilon_3 \omega^2}{2} \|u\|_{0,\mathcal{P}_h}^2 + \frac{\rho^*}{2\epsilon_4 \omega^2} \|g\|_{0,\Gamma_A}^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\rho^* \epsilon_4 \omega^2}{2} \|u\|_{0,\mathcal{P}_h}^2 \right),
\end{aligned}$$

donde $C_5 > 0, C_6 > 0$, y $C_7 > 0$ no dependen de ρ o κ . Definiendo

$$\begin{aligned}
\epsilon_3 &= \frac{\frac{d}{\kappa_*} - \frac{1}{2} \epsilon_4 \left(\frac{d-2}{\rho^*} + \frac{C_7 d_\Omega \rho^* \epsilon_7}{2} \right)}{\frac{1}{2} \left(\frac{d-2}{\rho^*} + \frac{C_7 d_\Omega \rho^* \epsilon_7}{2} \right)} \\
&\quad + \frac{-C_5 d_\Omega \left(\frac{1}{\kappa_*} + \frac{1}{\epsilon_5 \sqrt{\rho_* \kappa_*}} \right) \left(\frac{\epsilon + \epsilon_2}{2} \right) - \epsilon_8}{\frac{1}{2} \left(\frac{d-2}{\rho^*} + \frac{C_7 d_\Omega \rho^* \epsilon_7}{2} \right)},
\end{aligned}$$

con $\epsilon_8 > 0$, tomando $\epsilon, \epsilon_2, \epsilon_4, \epsilon_7$, y ϵ_8 suficientemente pequeños, obtenemos un denominador siempre positivo, para esto basta con considerar por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\epsilon_4 &= \frac{1}{2} \frac{d}{\kappa_*} \left(\frac{d-2}{\rho^*} + \frac{C_7 d_\Omega \rho^* \epsilon_7}{2} \right)^{-1}, \\
\epsilon = \epsilon_2 &= \frac{1}{4} \frac{d}{\kappa_*} \left(C_5 d_\Omega \left(\frac{1}{\kappa_*} + \frac{1}{\epsilon_5 \sqrt{\rho_* \kappa_*}} \right) \right)^{-1}, \\
\epsilon_8 &= \frac{1}{4} \frac{d}{\kappa_*}. \tag{3.2.11}
\end{aligned}$$

Esto permite establecer que ϵ_3 es siempre es mayor que 0. Así, siempre podemos

obtener la siguiente desigualdad

$$\frac{d}{\kappa_*} > \frac{\epsilon_4 \rho^*}{2} \left(\frac{d-2}{\rho^*} + \frac{C_7 d_\Omega \rho^* \epsilon_7}{2} \right) + C_5 d_\Omega \left(\frac{1}{\kappa_*} + \frac{1}{\epsilon_5 \sqrt{\rho_* \kappa_*}} \right) \left(\frac{\epsilon + \epsilon_2}{2} \right) + \epsilon_8,$$

donde finalmente, se obtiene

$$\omega^2 \|u\|_{0, \mathcal{P}_H}^2 \leq \tilde{C}_{d_\Omega} \left(\|f\|_{0, \Omega} + \|g\|_{0, \Gamma_A} \right), \quad (3.2.12)$$

con $\tilde{C}_{d_\Omega} > 0$ dependiente solo de d_Ω . Junto con (3.2.9) y (3.2.10), obtenemos la estimación deseada. \square

3.3. Una Nueva Formulación Híbrida

En esta sección presentamos una nueva formulación híbrida para la ecuación (3.1.3); posteriormente, se demostrará un resultado de equivalencia entre esta nueva formulación y la formulación débil estándar (3.2.1).

Introducimos una nueva formulación híbrida débil. Para esto construimos $\zeta : V \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial \mathcal{P}_H)$ tal que:

$$v \in H_D^1(\Omega) \Rightarrow \zeta(v) \in \Lambda. \quad (3.3.1)$$

Usando este mapeo, se propone la siguiente formulación híbrida: Encontrar $(u, \lambda) \in V \times \Lambda$ tal que:

$$\begin{cases} a(u, v) + \langle \lambda, \bar{v} \rangle_{\partial \mathcal{P}_H} = (f, \bar{v})_{\mathcal{P}_H} + (g, \bar{v})_{\Gamma_A}, & \text{para todo } v \in V \\ \langle \mu, \bar{u} \rangle_{\partial \mathcal{P}_H} = 0, & \text{para todo } \mu \in \Lambda \end{cases}, \quad (3.3.2)$$

donde la nueva forma sesquilineal $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ viene definida por:

$$a(u, v) := \sum_{K \in \mathcal{P}_H} \left(\frac{1}{\rho} \nabla u, \overline{\nabla v} \right)_K - \left(\frac{\omega^2}{\kappa} u, \bar{v} \right)_K - i \left(\frac{\omega}{\sqrt{\kappa \rho}} u, \bar{v} \right)_{\partial K \cap \Gamma_A} - i \langle \zeta(u), \bar{v} \rangle_{\partial K}. \quad (3.3.3)$$

Adicionalmente, la versión local de $a(\cdot, \cdot)$ está definida como:

$$a_K(u, v) := \left(\frac{1}{\rho} \nabla u, \overline{\nabla v} \right)_K - \left(\frac{\omega^2}{\kappa} u, \bar{v} \right)_K - i \left(\frac{\omega}{\sqrt{\kappa \rho}} u, \bar{v} \right)_{\partial K \cap \Gamma_A} - i \langle \zeta(u), \bar{v} \rangle_{\partial K}. \quad (3.3.4)$$

El término de borde $-i \langle \zeta(u), \bar{v} \rangle_{\partial K}$, introducido en la definición de la nueva forma sesquilineal (3.3.3) tiene el objetivo de posibilitar resultados de existencia y unicidad de solución que definen al método MH.

Ahora, para probar la equivalencia entre las soluciones de ambos métodos, presentamos el siguiente lema:

Lema 3.3.1. *Sea $L \in V'$, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. L se anula en $H_D^1(\Omega)$;
2. Existe un único funcional $\mu \in \Lambda$ tal que $L(v) = \langle \mu, \bar{v} \rangle_{\partial \mathcal{P}_H}$ para todo $v \in V$.

Demostración. Comenzaremos por probar una identidad útil. Sea $v \in H_D^1(\Omega)$, $\mu \in \Lambda$, y $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ tal que $\mu|_{\partial K} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^K$ para todo $K \in \mathcal{P}_H$. Notemos que $v|_{\Gamma_A} \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_A)$, entonces

$$\begin{aligned} \langle \mu, \bar{v} \rangle_{\partial \mathcal{P}_H} &= \sum_{K \in \mathcal{P}_H} (\boldsymbol{\sigma}, \nabla \bar{v})_K + (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \bar{v})_K = (\boldsymbol{\sigma}, \nabla \bar{v})_\Omega + (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \bar{v})_\Omega \\ &= \langle \boldsymbol{\sigma}|_\Gamma \cdot \mathbf{n}, \bar{v}|_\Gamma \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \langle \boldsymbol{\sigma}|_{\Gamma_A} \cdot \mathbf{n}, \bar{v}|_{\Gamma_A} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_A), H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_A)}. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Asumamos ahora que L se anula en $H_D^1(\Omega)$, en particular L se anula en $H_0^1(\Omega)$, luego [27, Lema 1] asegura la existencia de un único funcional $\mu \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial \mathcal{P}_H)$ tal que existe $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ que satisface $\mu|_{\partial K} = \boldsymbol{\sigma}|_{\partial K} \cdot \mathbf{n}^K$ para todo $K \in \mathcal{P}_H$, y además $L(v) = \langle \mu, \bar{v} \rangle_{\partial K}$ para todo $v \in V$. Resta mostrar que $\boldsymbol{\sigma}|_{\Gamma_A} \cdot \mathbf{n} = 0$. En efecto, sea $g \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_A)$, consideremos su extensión por cero $\tilde{g} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ y $v_g \in H_D^1(\Omega)$ tal que $v_g|_{\Gamma_A} = \tilde{g}$. Luego, usando (3.3.5) obtenemos

$$\langle \boldsymbol{\sigma}|_{\Gamma_A} \cdot \mathbf{n}, \bar{g} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_A), H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_A)} = \langle \mu, \bar{v}_g \rangle_{\partial \mathcal{P}_H} = L(v_g) = 0,$$

por lo tanto $\boldsymbol{\sigma}|_{\Gamma_A} \cdot \mathbf{n} = 0$ y además $\mu \in \Lambda$.

Asumamos la existencia de un único funcional $\mu \in \Lambda$ tal que $L(v) = \langle \mu, \bar{v} \rangle_{\partial \mathcal{P}_H}$ para todo $v \in V$. Notemos que la definición de μ implica la existencia de $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ tal que $\mu|_{\partial K} = \boldsymbol{\sigma}|_{\partial K} \cdot \mathbf{n}^K$ para todo $K \in \mathcal{P}_H$, y además $\boldsymbol{\sigma}|_{\Gamma_A} \cdot \mathbf{n}^K = 0$. Sea $v \in H_D^1(\Omega)$, luego $v|_{\Gamma_A} \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_A)$, así en virtud de (3.3.5) tenemos

$$L(v) = \langle \mu, \bar{v} \rangle_{\partial \mathcal{P}_H} = \langle \boldsymbol{\sigma}|_{\Gamma_A} \cdot \mathbf{n}, \bar{v}|_{\Gamma_A} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_A), H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_A)} = 0,$$

por lo tanto L se anula en $H_D^1(\Omega)$. □

Como consecuencia del Lema 3.3.1, se puede presentar la siguiente representación del espacio $H_D^1(\Omega)$.

Corolario 3.3.1. *Se tiene la siguiente caracterización*

$$H_D^1(\Omega) = \{v \in V : \langle \mu, \bar{v} \rangle_{\partial \mathcal{P}_H} = 0, \text{ para todo } \mu \in \Lambda\}.$$

Demostración. Consideremos la aplicación lineal y acotada $B : \Lambda \rightarrow V'$ que para cada $\mu \in \Lambda$ satisface $\langle B\mu, v \rangle_{V',V} = \langle \mu, \bar{v} \rangle_{\partial \mathcal{P}_H}$ para todo $v \in V$. Notemos que B es inyectiva. En efecto, sea $\mu \in \Lambda$ tal que $B\mu = 0$, luego $\langle \mu, \bar{v} \rangle_{\partial \mathcal{P}_H} = 0$ para todo $v \in V$, es decir, para cada $K \in \mathcal{P}_H$ se satisface $\langle \mu, \bar{v} \rangle_{\partial K} = 0$ para todo $v \in H^1(K)$, por lo tanto $\mu|_{\partial K} = 0$.

Adicionalmente consideremos el isomorfismo $\psi : V \rightarrow V'$ dado por el Teorema de Representación de Riesz y mostraremos una identificación entre Λ y $H_D^1(\Omega)^\perp$ a través de la igualdad $Im(B) = Im(\psi|_{H_D^1(\Omega)^\perp})$ como representado en el siguiente diagrama:

$$\Lambda \xleftrightarrow{B} Im(B) = Im(\psi|_{H_D^1(\Omega)^\perp}) \xleftrightarrow{\psi^{-1}} H_D^1(\Omega)^\perp. \quad (3.3.6)$$

Probemos que $Im(B) = Im(\psi|_{H_D^1(\Omega)^\perp})$. Sea $v \in H_D^1(\Omega)^\perp$, tenemos que $\langle \psi(v), w \rangle_{V',V} = (v, w)_V = 0$ para todo $w \in H_D^1(\Omega)$, gracias al Lema 3.3.1 se asegura la existencia de un único $\mu \in \Lambda$ tal que $\langle \psi(v), w \rangle_{V',V} = \langle \mu, \bar{w} \rangle_{\partial \mathcal{P}_H} = \langle B\mu, w \rangle_{V',V}$ para todo $w \in V$, es decir, $B\mu = \psi(v)$, y por lo tanto $\psi(v) \in Im(B)$. Sea $\mu \in \Lambda$, notemos que como B es inyectiva podemos asegurar que la representación, $\langle B\mu, w \rangle_{V',V} = \langle \mu^*, w \rangle_{\partial \mathcal{P}_H}$ para todo $w \in V$, es válida para un único $\Lambda \ni \mu^* = \mu$. Gracias al Lema 3.3.1 hemos probado que $B\mu$ se anula en $H_D^1(\Omega)$. Sea $w \in H_D^1(\Omega)$, notemos que $(\psi^{-1}(B\mu), w)_V = \langle B\mu, w \rangle_{V',V} = 0$, luego $\psi^{-1}(B\mu) \in H_D^1(\Omega)^\perp$, por lo tanto $B\mu \in Im(\psi|_{H_D^1(\Omega)^\perp})$.

Las identificaciones probadas nos llevan a lo siguiente:

$$\begin{aligned} (H_D^1(\Omega)^\perp)^\perp &= \{v \in V : (v, w)_V = 0, \text{ para todo } w \in H_D^1(\Omega)^\perp\} \\ &= \{v \in V : \langle \psi(w), v \rangle_{V',V} = 0, \text{ para todo } w \in H_D^1(\Omega)^\perp\} \\ &= \{v \in V : \langle B\mu, v \rangle_{V',V} = 0, \text{ para todo } \mu \in \Lambda\} \\ &= \{v \in V : \langle \mu, \bar{v} \rangle_{\partial \mathcal{P}_H} = 0, \text{ para todo } \mu \in \Lambda\}. \end{aligned}$$

Finalmente, la demostración concluye en virtud del Lema A0.1 y de [15, p 468] notando que $(H_D^1(\Omega)^\perp)^\perp = \overline{H_D^1(\Omega)} = H_D^1(\Omega)$. \square

Teniendo en cuenta el corolario anteriormente presentado, se puede construir el siguiente Teorema que relaciona el problema débil (3.2.1) con la formulación híbrida (3.3.2):

Teorema 3.3.1. *Existe $u \in H_D^1(\Omega)$ solución de (3.2.1) si y solo si existe $(u, \lambda) \in V \times \Lambda$ que resuelve (3.3.2). Además, se tiene la siguiente relación entre u y λ :*

$$\lambda = - \left(\frac{1}{\rho} \nabla u \cdot \mathbf{n}^K + i \zeta(u) \right) \Big|_{\partial K \setminus \Gamma_A}, \text{ para todo } K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}. \quad (3.3.7)$$

Demostración. Sea $(u, \lambda) \in V \times \Lambda$ solución de (3.3.2), usando la representación de $H_D^1(\Omega)$ obtenida en 3.3.1, se obtiene que $u \in H_D^1(\Omega)$. Reemplazando u en la primera ecuación de (3.3.2), se obtiene que $\zeta(u) \in \Lambda$. Entonces, haciendo uso de la definición de $\zeta(u)$ llegamos a que $\langle \zeta(u), \bar{v} \rangle_{\partial \mathcal{P}_{\mathcal{H}}} = 0$ para todo $v \in H_D^1(\Omega)$, y podemos concluir que

$$\left(\frac{1}{\rho} \nabla u, \overline{\nabla v} \right)_{\Omega} - \omega^2 \left(\frac{1}{\rho} u, \bar{v} \right)_{\Omega} - i \omega \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa \rho}} u, \bar{v} \right)_{\Gamma_A} = (f, \bar{v})_{\Omega} + (g, \bar{v})_{\Gamma_A},$$

para todo $v \in H_D^1(\Omega)$, resolviendo (3.2.1). Por otro lado, sea u solución de (3.2.1). Se define el siguiente funcional sesquilineal L :

$$\begin{aligned} L(v) &= -a(u, v) + \sum_{K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}} (f, \bar{v})_K + (g, \bar{v})_{\partial K \cap \Gamma_A} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}} (f, \bar{v})_K + (g, \bar{v})_{\partial K \cap \Gamma_A} - \left(\frac{1}{\rho} \nabla u, \overline{\nabla v} \right)_K + \omega^2 \left(\frac{1}{\kappa} u, \bar{v} \right)_K \\ &\quad + i \omega \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa \rho}} u, \bar{v} \right)_{\partial K \cap \Gamma_A} - i \langle \zeta(u), \bar{v} \rangle_{\partial K}. \end{aligned}$$

Este operador L se anula en $H_D^1(\Omega)$. Utilizando el Lema 3.3.1, existe un único $\lambda \in \Lambda$ tal que

$$\sum_{K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}} \langle \lambda, v \rangle_{\partial K} = L(v), \text{ para todo } v \in V. \quad (3.3.8)$$

Luego, el par $(u, \lambda) \in V \times \Lambda$ resuelve (3.3.2). Finalmente, como $f = -\frac{1}{\kappa} \omega^2 u -$

$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla u \right)$, reemplazando en integrando por partes, se puede concluir que

$$\begin{aligned}
L(v) &= -a(u, v) + \sum_{K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}} (f, \bar{v})_K + (g, \bar{v})_{\partial K \cap \Gamma_A} \\
&= -a(u, v) + \sum_{K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}} \left(-\frac{\omega^2}{\kappa} u - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla u \right), \bar{v} \right)_K + (g, \bar{v})_{\partial K \cap \Gamma_A} \\
&= \sum_{K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}} \left(-\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla u \right), \bar{v} \right)_K + (g, \bar{v})_{\partial K \cap \Gamma_A} - \left(\frac{1}{\rho} \nabla u, \overline{\nabla v} \right)_K \\
&\quad + i\omega \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa\rho}} u, \bar{v} \right)_{\partial K \cap \Gamma_A} + i\langle \zeta(u), \bar{v} \rangle_{\partial K} \\
&= \sum_{K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}} - \left\langle \frac{1}{\rho} \nabla u \cdot \mathbf{n}^K, \bar{v} \right\rangle_{\partial K} + (g, \bar{v})_{\partial K \cap \Gamma_A} + i\omega \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa\rho}} u, \bar{v} \right)_{\partial K \cap \Gamma_A} \\
&\quad + i\langle \zeta(u), \bar{v} \rangle_{\partial K} \\
&= \sum_{K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}} - \left\langle \frac{1}{\rho} \nabla u \cdot \mathbf{n}^K, \bar{v} \right\rangle_{\partial K \setminus \Gamma_A} + i\langle \zeta(u), \bar{v} \rangle_{\partial K \setminus \Gamma_A}.
\end{aligned}$$

Así, $\lambda = -\frac{1}{\rho} \nabla u \cdot \mathbf{n}^K + i\zeta(u)$ en $\partial K \setminus \Gamma_A$ para cada $K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}$, lo que prueba (3.3.7). \square

3.4. Definición Concreta de $\zeta(\cdot)$

Con el objetivo de obtener resultados explícitos para la formulación (3.3.2), vamos a construir una definición concreta para $\zeta(\cdot)$. Definiremos $\zeta : V \rightarrow \prod_{K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}} H^{-\frac{1}{2}}(\partial K)$ como $\zeta(v)|_{\partial K} = (v \boldsymbol{\sigma}_0)|_{\partial K} \cdot \mathbf{n}^K$, para todo $v \in V$ y sobre cada $K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}$, con $\boldsymbol{\sigma}_0 \in \mathbb{RT}_0$, donde \mathbb{RT}_0 denota las funciones de base de Raviart y Thomas de menor orden. Se construye como sigue: Sea $F \in \mathcal{E}$, definiremos $\boldsymbol{\sigma}_0|_F \cdot \mathbf{n}^F$ como 0 ó 1 de manera que para cada $K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}$, tal que $\partial K \cap \Gamma_A = \emptyset$ se satisfaga que $\boldsymbol{\sigma}_0|_{\partial K} \cdot \mathbf{n}^{\partial K} \neq 0$ y solo pueda ocurrir una de dos situaciones, $\boldsymbol{\sigma}_0|_{\partial K} \cdot \mathbf{n}^{\partial K} \geq 0$, o bien, $\boldsymbol{\sigma}_0|_{\partial K} \cdot \mathbf{n}^{\partial K} \leq 0$, por otro lado, si se satisface que $\partial K \cap \Gamma_A \neq \emptyset$ ocurrirá que $\boldsymbol{\sigma}_0|_{\partial K} \cdot \mathbf{n}^{\partial K} = 0$.

La existencia de $\boldsymbol{\sigma}_0 \in \mathbb{RT}_0$ que cumpla la definición anterior puede ser entendida como un problema de grafos. Definiremos un grafo tal que a cada politopo $K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}$ se le asocia un nodo del grafo. Dos nodos del grafo asociados a $K_1 \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}$ y $K_2 \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}$, respectivamente, estarán conectados por una arista si y solo si

$F = \partial K_1 \cap \partial K_2 \in \mathcal{E}$ y se tiene que $\sigma_0|_F \cdot \mathbf{n}^F = 1$. Diremos que $K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}$ tiene color rojo si $\sigma_0|_{\partial K} \cdot \mathbf{n}^{\partial K} \geq 0$, tiene color azul si $\sigma_0|_{\partial K} \cdot \mathbf{n}^{\partial K} \leq 0$, y no tiene color si $\sigma_0|_{\partial K} \cdot \mathbf{n}^{\partial K} = 0$. Por lo tanto buscamos demostrar que es posible definir un grafo bipartito [12, Sección 1.6] sobre elementos de la partición $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}$ a través de la definición de σ_0 . Para particiones particulares esto es evidente (ver Figura 3.4.1), la demostración del caso más general será abordado en trabajos posteriores.

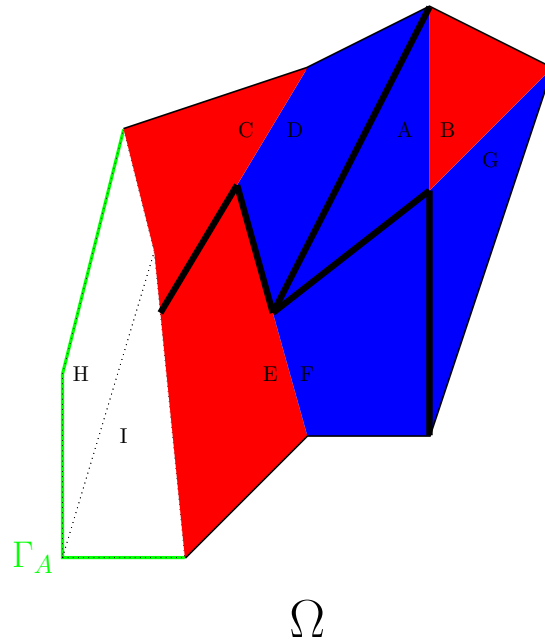


Figura 3.4.1: Construcción particular de σ_0 sobre un dominio Ω . Las aristas $F \in \mathcal{E}$ presentadas en negro entre los elementos representan el caso $\sigma_0|_F = 0$.

3.5. Existencia, unicidad y estabilidad de la solución del problema híbrido

En esta sección demostraremos que la formulación híbrida (3.3.2) tiene solución única y además construiremos una estimación para la estabilidad de nuestra solución.

Primero, usaremos el Lema 3.2.1 para construir el primer resultado sobre (3.3.2).

Teorema 3.5.1. *El problema (3.3.2) tiene una única solución $(u, \lambda) \in V \times \Lambda$.*

Demostración. El resultado de existencia y unicidad para el problema (3.3.2) proviene de la equivalencia con la solución de la formulación débil (3.2.1),

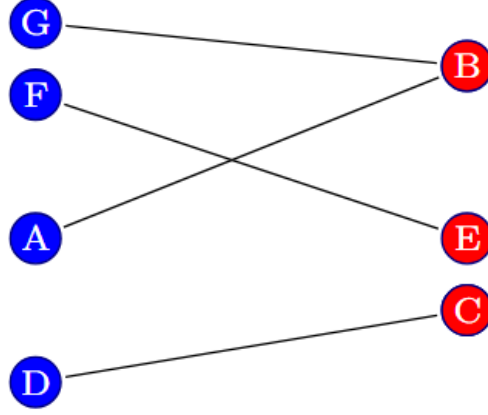


Figura 3.4.2: Grafo bipartito correspondiente a σ_0 definido en 3.4.1.

demostrada en el Teorema 3.3.1. Así, usando el Lema 3.2.1, existe $u \in H_D^1(\Omega)$, solución única de (3.2.1). Por lo tanto, existe $(u, \lambda) \in V \times \Lambda$, solución única de la formulación híbrida continua (3.3.2). \square

Para continuar, primero introduciremos el siguiente resultado de continuidad para la forma $a(\cdot, \cdot)$.

Lema 3.5.1. *Para todo $u, v \in V$, se tiene la siguiente estimación:*

$$|a(u, v)| \leq \frac{1}{2} C \|u\|_{V, \omega} \|v\|_{V, \omega}, \quad (3.5.1)$$

donde $C := \max \left\{ \frac{1}{\rho^{**}}, \frac{1}{\kappa^{**}}, \frac{1}{\sqrt{\kappa^{**} \rho^{**}}} \right\}$.

Demostración. Sean $u, v \in V$, y sea $K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}$. Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se obtienen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \left| -i \omega \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa} \rho} u, \bar{v} \right)_{\partial K \cap \Gamma_A} \right| &\leq \left| \omega \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa} \rho} u, \bar{v} \right)_{\partial K \cap \Gamma_A} \right| \\ &\leq \omega \frac{1}{\sqrt{\kappa_* \rho_*}} \|u\|_{0, \partial K \cap \Gamma_A} \|v\|_{0, \partial K \cap \Gamma_A} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\kappa_* \rho_*}} \|u\|_{V(K), \omega} \|v\|_{V(K), \omega}. \end{aligned}$$

Además, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la definición de $\zeta(\cdot)$, se

obtiene la siguiente estimación para el caso $\partial K \cap \Gamma_A = \emptyset$:

$$\begin{aligned}
 |a_K(u, v)| &= \left| \left(\frac{1}{\rho} \nabla u, \overline{\nabla v} \right)_K - \omega^2 \left(\frac{1}{\kappa} u, \bar{v} \right)_K + i \langle \zeta(u), \bar{v} \rangle_{\partial K} \right| \\
 &\leq \left| \left(\frac{1}{\rho} \nabla u, \overline{\nabla v} \right)_K \right| + \left| \omega^2 \left(\frac{1}{\kappa} u, \bar{v} \right)_K \right| + |i \langle \zeta(u), \bar{v} \rangle_{\partial K}| \\
 &\leq \frac{1}{\rho_*} \|\nabla u\|_{0,K} \|\nabla v\|_{0,K} + \omega^2 \frac{1}{\kappa_*} \|u\|_{0,K} \|v\|_{0,K} + \|u\|_{0,\partial K} \|v\|_{0,\partial K} \\
 &\leq \frac{1}{\rho_*} \|u\|_{V(K),\omega} \|v\|_{V(K),\omega} + \frac{1}{\kappa_*} \|u\|_{V(K),\omega} \|v\|_{V(K),\omega} \\
 &\quad + \|u\|_{V(K),\omega} \|v\|_{V(K),\omega} \\
 &\leq C_2 \|u\|_{V(K),\omega} \|v\|_{V(K),\omega}, \tag{3.5.2}
 \end{aligned}$$

donde $C_2 := \max \left\{ \frac{1}{\rho_*}, \frac{1}{\kappa_*} \right\}$. Por otro lado, usando nuevamente la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la definición de $\zeta(\cdot)$, se tiene la siguiente estimación cuando para el caso $\partial K \cap \Gamma_A \neq \emptyset$:

$$\begin{aligned}
 |a_K(u, v)| &\leq C_2 \|u\|_{V(K),\omega} \|v\|_{V(K),\omega} + \frac{1}{\sqrt{\kappa_* \rho_*}} \|u\|_{V(K),\omega} \|v\|_{V(K),\omega} \\
 &\leq C_3 \|u\|_{V(K),\omega} \|v\|_{V(K),\omega}, \tag{3.5.3}
 \end{aligned}$$

donde $C_3 := \max \left\{ C_2, \frac{1}{\sqrt{\kappa_* \rho_*}} \right\}$. Luego, usando (3.5.2), (3.5.3), y sumando sobre $K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}$, se obtiene

$$\begin{aligned}
 |a(u, v)| &= \left| \sum_{K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}} a_K(u, v) \right| \\
 &\leq \sum_{K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}} |a_K(u, v)| \\
 &\leq C \sum_{K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}} \|u\|_{V(K),\omega} \|v\|_{V(K),\omega} \\
 &\leq \frac{C}{2} \|u\|_{V,\omega} \|v\|_{V,\omega},
 \end{aligned}$$

con $C := \max \{C_2, C_3\}$. □

Utilizando la estimación obtenida en el Lema (3.2.6), demostraremos la siguiente condición *inf-sup* para la forma sesquilineal presentada en (3.3.3).

Teorema 3.5.2. *Sea $\Omega \in \mathbb{R}^d$, $d \in \{2, 3\}$ un dominio de frontera Lipschitz. Existe*

$C_{d_\Omega} > 0$ que depende de d_Ω , tal que, la forma sesquilineal $a(\cdot, \cdot)$ definida en (3.3.3) satisface:

$$\inf_{v \in H_D^1(\Omega)} \sup_{u \in H_D^1(\Omega)} \frac{|a(u, v)|}{\|u\|_{V, \omega} \|v\|_{V, \omega}} \geq \frac{\tilde{C} C_{d_\Omega}}{2(\omega + 1)}. \quad (3.5.4)$$

Donde $\tilde{C} > 0$ no depende de ω , \mathcal{H} , o d_Ω .

Demostración. Sea $u \in H_D^1(\Omega)$, vamos a definir $z \in H_D^1(\Omega)$ como la solución del siguiente problema adjunto

$$\left(\frac{1}{\rho} \nabla v, \overline{\nabla z} \right)_\Omega - \omega^2 \left(\frac{1}{\kappa} v, \bar{z} \right)_\Omega - i \omega \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa \rho}} v, \bar{z} \right)_{\Gamma_A} = 2 \frac{\omega^2}{\kappa_{**}} (v, \bar{u})_\Omega, \quad (3.5.5)$$

para todo $v \in H_D^1(\Omega)$. Gracias al Lema 3.2.1, z está bien definido. Notemos que $-i \langle \zeta(v), \bar{z} \rangle_{\partial K} = 0$ para todo $v \in H_D^1(\Omega)$, lo que nos permite obtener la igualdad (3.5.5). El Lema 3.5.1 y el hecho de que

$$\|u\|_{0, \Omega} = \|u\|_{0, \mathcal{P}_\mathcal{H}}, \quad \text{para todo } v \in H_D^1(\Omega),$$

se tiene que $\|z\|_{V, \omega} \leq C_{d_\Omega} \omega^2 \|u\|_{0, \mathcal{P}_\mathcal{H}}$, sea $v = (1 + i)u + z \in H_D^1(\Omega)$, el cual satisface

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\geq \operatorname{Re} a(u, v) \\ &= \operatorname{Re} a(u, (1 + i)u) + \operatorname{Re} a(u, z) \\ &\geq \frac{1}{\rho^{**}} \|\nabla u\|_{0, \mathcal{P}_\mathcal{H}}^2 + \frac{\omega}{\sqrt{\kappa^{**} \rho^{**}}} \|u\|_{0, \Gamma_A}^2 - \frac{\omega^2}{\kappa^{**}} \|u\|_{0, \mathcal{P}_\mathcal{H}}^2 + \operatorname{Re} a(u, z) \\ &\geq c_1 \|u\|_{V, \omega}^2 - 2 \frac{\omega^2}{\kappa^{**}} + \operatorname{Re} a(u, z) \\ &\geq c_1 \|u\|_{V, \omega}^2, \end{aligned}$$

con $c_1 := \min \left\{ \frac{1}{\kappa^{**}}, \frac{1}{\rho^{**}}, \frac{1}{\sqrt{\kappa^{**} \rho^{**}}} \right\}$, por lo tanto

$$|a(u, v)| \geq c_1 \|u\|_{V, \omega}^2,$$

además, utilizando la definición de v , se obtiene

$$\begin{aligned} \|v\|_{V,\omega} &= \|(1+i)u + z\|_{V,\omega} \\ &\leq 2\|u\|_{V,\omega} + \|z\|_{V,\omega} \\ &\leq 2\|u\|_{V,\omega} + C_{d_\Omega} \omega^2 \|u\|_{0,\mathcal{P}_\mathcal{H}} \\ &\leq \tilde{C}_{d_\Omega} (\omega + 1) \|u\|_{V,\omega}, \end{aligned}$$

donde \tilde{C}_{d_Ω} depende de d_Ω , esto implica

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\geq c_1 \|u\|_{V,\omega}^2 \\ &\geq c_1 \|u\|_{V,\omega} \left(2(\omega + 1) \tilde{C}_{d_\Omega}\right)^{-1} \|v\|_{V,\omega} \\ &\geq \frac{\tilde{C} \hat{C}_{d_\Omega}}{2(\omega + 1)} \|u\|_{V,\omega} \|v\|_{V,\omega}, \end{aligned}$$

con \hat{C}_{d_Ω} dependiente de d_Ω . □

Para finalizar esta sección, usaremos los resultados del Teorema 3.5.2 y del Lema 3.5.1 para construir un resultado de dependencia continua de los datos para el problema (3.3.2).

Teorema 3.5.3. *La solución del problema (3.3.2), $(u, \lambda) \in V \times \Lambda$, satisface la siguiente estimación:*

$$\|\lambda\|_{\Lambda,\omega} + \|u\|_V \leq \tilde{C} C_{d_\Omega} \left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega}\right) (\omega + 1) (\|f\|_{0,\mathcal{P}_\mathcal{H}} + \|g\|_{0,\Gamma_A}). \quad (3.5.6)$$

Donde $\tilde{C} > 0$ no depende de ω , \mathcal{H} o d_Ω , y $C_{d_\Omega} > 0$ depende solo de d_Ω .

Demostración. Sea $(u, \lambda) \in V \times \Lambda$ la solución de (3.3.2). Para todo $v \in H_D^1(\Omega)$, se tiene que $\|v\|_{0,\mathcal{P}_\mathcal{H}} \leq c_P \|\nabla v\|_{0,\mathcal{P}_\mathcal{H}}$ (desigualdad de Poincaré-Friedrichs), con $c_P > 0$ la constante de Poincaré, la cual depende solo de Ω . Entonces, la condición de *inf-sup* presentada en (3.5.6) y el hecho de que se satisface la siguiente igualdad:

$$a(u, v) = (f, \bar{v})_{0,\mathcal{P}_\mathcal{H}} + (g, \bar{v})_{0,\Gamma_A}, \quad \text{para todo } v \in H_D^1(\Omega), \quad (3.5.7)$$

nos permiten construir la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}
 \frac{\tilde{C} C_{d_\Omega}}{2(\omega + 1)} \|u\|_{V,\omega} &\leq \sup_{v \in H_D^1(\Omega)} \frac{|a(u, v)|}{\|v\|_{V,\omega}} \\
 &= \sup_{v \in H_D^1(\Omega)} \frac{|(f, \bar{v})_{0, \mathcal{P}_H} + (g, \bar{v})_{0, \Gamma_A}|}{\|v\|_{V,\omega}} \\
 &\leq \sup_{v \in H_D^1(\Omega)} \frac{\|f\|_{0, \mathcal{P}_H} \|v\|_{0, \mathcal{P}_H}}{\|u\|_{V,\omega}} + \sup_{u \in H_D^1(\Omega)} \frac{\|g\|_{0, \Gamma_A} \|v\|_{0, \Gamma_A}}{\|v\|_{V,\omega}} \\
 &\leq \frac{1}{\omega^2} \sup_{v \in H_D^1(\Omega)} \frac{c_P \|f\|_{0, \mathcal{P}_H} \|v\|_{V,\omega}}{\|v\|_{V,\omega}} + \frac{1}{\omega} \sup_{v \in H_D^1(\Omega)} \frac{c_P \|g\|_{0, \Gamma_A} \|v\|_{V,\omega}}{\|v\|_{V,\omega}} \\
 &\leq c_P \left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} \right) (\|f\|_{0, \mathcal{P}_H} + \|g\|_{0, \Gamma_A}) \\
 &\leq c_P \left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} \right) (\|f\|_{0, \mathcal{P}_H} + \|g\|_{0, \Gamma_A}).
 \end{aligned}$$

Utilizando la definición de la norma (2.3.6), podemos notar que:

$$\|\mu\|_{\Lambda,\omega} \leq \sup_{v \in V} \frac{|\langle \mu, \bar{v} \rangle_{\partial \mathcal{P}_H}|}{\|v\|_{V,\omega}}. \quad (3.5.8)$$

Además, utilizando la primera ecuación de (3.3.2), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \|\lambda\|_{\Lambda,\omega} &\leq \sup_{v \in V} \frac{|\langle \lambda, \bar{v} \rangle_{\partial \mathcal{P}_H}|}{\|v\|_{V,\omega}} \\
 &= \sup_{v \in V} \frac{|(f, \bar{v})_{0, \mathcal{P}_H} + (g, \bar{v})_{0, \Gamma_A} - a(u, v)|}{\|v\|_{V,\omega}} \\
 &\leq \frac{1}{\omega^2} \sup_{v \in V} \frac{c_P \|f\|_{0, \mathcal{P}_H} \|v\|_{V,\omega}}{\|v\|_{V,\omega}} + \frac{1}{\omega} \sup_{v \in V} \frac{c_P \|g\|_{0, \Gamma_A} \|v\|_{V,\omega}}{\|v\|_{V,\omega}} \\
 &\quad + \sup_{v \in V} \frac{C_c \|u\|_{0, \mathcal{P}_H} \|v\|_{0, \mathcal{P}_H}}{\|v\|_{V,\omega}} \\
 &\leq c_P \left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} \right) (\|f\|_{0, \mathcal{P}_H} + \|g\|_{0, \Gamma_A}) + C_c \|u\|_{V,\omega},
 \end{aligned}$$

donde C_c es la constante de continuidad obtenida en el Lema 3.5.1. Combinando las cotas para u y λ , podemos concluir la demostración. \square

3.6. El Problema Híbrido Discreto

Recordando las definiciones de los espacios V_h y Λ_H , dadas en (2.3.8) y (2.3.9), respectivamente, la versión de dimensión finita para el problema (3.3.2) usando estos espacios es la siguiente: Encontrar $(u_h, \lambda_H) \in V_h \times \Lambda_H$ tal que

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h) + \langle \lambda_H, \overline{v_h} \rangle_{\partial \mathcal{P}_h} &= (f, \overline{v_h})_{\mathcal{P}_h} + (g, \overline{v_h})_{\Gamma_A}, & \text{para todo } v_h \in V_h \\ \langle \mu_H, \overline{u_h} \rangle_{\partial \mathcal{P}_h} &= 0, & \text{para todo } \mu_H \in \Lambda_H \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

Primero, analizaremos el núcleo discreto, definido como:

$$\mathfrak{N}_h = \{v_h \in V_h : \langle \mu_H, \overline{v_h} \rangle_{\partial \mathcal{P}_h} = 0, \text{ para todo } \mu_H \in \Lambda_H\}. \quad (3.6.2)$$

La desigualdad de Poincaré - Friedrichs para funciones $H^1(\Omega)$ por partes [6, Ecuación 1.3] implica la existencia de $c_B > 0$ que depende solo de la forma de los polígonos de \mathcal{P}_h , tal que

$$\|v_h\|_{0,\Omega} \leq c_B \|\nabla v_h\|_{0,\mathcal{P}_h}, \text{ para todo } v_h \in \mathfrak{N}_h. \quad (3.6.3)$$

Notemos que $v_h \rightarrow \|\nabla v_h\|_{0,\mathcal{P}_h}$, se define como norma sobre \mathfrak{N}_h . De aquí en adelante, vamos a considerar la siguiente suposición, que nos permitirá establecer que el problema híbrido discreto está bien definido.

Suposición 3.6.1. *Si H es suficientemente pequeño, entonces existe una constante positiva C_{dis} , que no depende de \mathcal{H} o h , y posiblemente depende de las magnitudes físicas del problema, tal que se satisface la siguiente condición inf-sup discreta*

$$\inf_{u_h \in \mathfrak{N}_h} \sup_{v_h \in \mathfrak{N}_h} \frac{|a(u_h, v_h)|}{\|u_h\|_{V,\omega} \|v_h\|_{V,\omega}} \geq C_{dis} > 0. \quad (3.6.4)$$

Considerando la suposición 2.2.1, y utilizando [19, Lema 4.1], existe el operador de Fortin $\Pi_h : V \rightarrow V_h$, que satisface

$$\langle \mu_H, \overline{v - \Pi_h v} \rangle_{\partial \mathcal{P}_h} = 0, \text{ para todo } \lambda_H \in \Lambda_H, \text{ para todo } v \in V, \quad (3.6.5)$$

y además

$$\|\Pi_h v\|_{V,\omega} \leq c_F \|v\|_{V,\omega}, \text{ para todo } v \in V, \quad (3.6.6)$$

donde c_F no depende de h, H, \mathcal{H} , o ω . Combinando (3.6.5), (3.6.6), y la definición de la norma $\|\cdot\|_{\Lambda, \omega}$ en (2.3.6), podemos establecer que $\langle \mu_H, \overline{v_h} \rangle_{\partial \mathcal{P}_h}$ satisface la siguiente condición *inf-sup* discreta

$$\frac{1}{c_F} \|\mu_H\|_{\Lambda, \omega} \leq \sup_{v_h \in V_h} \frac{|\langle \mu_H, \overline{v_h} \rangle_{\partial \mathcal{P}_h}|}{\|v_h\|_{V, \omega}}, \quad (3.6.7)$$

para todo $\lambda_H \in \Lambda_H$. Teniendo en cuenta estas estimaciones, se introduce el siguiente teorema.

Teorema 3.6.1. *Existe un único par $(u_h, \lambda_H) \in V_h \times \Lambda_H$ solución del problema (3.6.1). Además, la solución del problema discreto satisface la siguiente cota de estabilidad:*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c_F} \|\lambda_H\|_{\Lambda, \omega} + \|u_h\|_{V, \omega} \\ & \leq c_B \left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} \right) \left(1 + \frac{1}{C_{dis}} (C_c + 1) \right) \left(\|f\|_{0, \mathcal{P}_h} + \|g\|_{0, \Gamma_A} \right). \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

Demostración. La demostración de existencia y unicidad de la solución para el problema (3.6.1) se obtiene siguiendo lo presentado en [1, Sección 3.4.1], utilizando el resultado de [8, Proposición 2.1]. Así, gracias a la condición *inf-sup* otorgada por la norma (3.6.7) y de la Suposición 3.6.1, que nos entrega la condición *inf-sup* (3.6.4) sobre \mathfrak{N}_h , podemos concluir que existe $(u_h, \lambda_H) \in V_h \times \Lambda_H$, solución del problema (3.6.1).

La parte restante de la demostración corresponde a construir la cota de estabilidad (3.6.8). Sea $(u_h, \lambda_H) \in V_h \times \Lambda_H$ solución de (3.6.1). La condición *inf-sup* (3.6.4), la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la siguiente igualdad

$$a(u_h, v_h) = (f, \overline{v_h})_{0, \mathcal{P}_h} + (g, \overline{v_h})_{0, \Gamma_A}, \quad \text{para todo } v_h \in \mathfrak{N}_h, \quad (3.6.9)$$

nos permiten construir la siguiente cota

$$\begin{aligned}
C_{dis} \|u_h\|_{V,\omega} &\leq \sup_{v_h \in \mathfrak{V}_h} \frac{|a(u_h, v_h)|}{\|v_h\|_{V,\omega}} \\
&= \sup_{v_h \in \mathfrak{V}_h} \frac{|(f, \bar{v}_h)_{0,\mathcal{P}_H} + (g, \bar{v}_h)_{0,\Gamma_A}|}{\|v_h\|_{V,\omega}} \\
&\leq \sup_{v_h \in \mathfrak{V}_h} \frac{\|f\|_{0,\mathcal{P}_H} \|v_h\|_{0,\mathcal{P}_H}}{\|v_h\|_{V,\omega}} + \sup_{v_h \in \mathfrak{V}_h} \frac{\|g\|_{0,\Gamma_A} \|v_h\|_{0,\Gamma_A}}{\|v_h\|_{V,\omega}} \\
&\leq \frac{1}{\omega^2} \sup_{v_h \in \mathfrak{V}_h} \frac{c_B \|f\|_{0,\mathcal{P}_H} \|v_h\|_{V,\omega}}{\|v_h\|_{V,\omega}} + \frac{1}{\omega} \sup_{v_h \in \mathfrak{V}_h} \frac{c_B \|g\|_{0,\Gamma_A} \|v_h\|_{V,\omega}}{\|v_h\|_{V,\omega}} \\
&\leq c_B \left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} \right) \|f\|_{0,\mathcal{P}_H} + c_B \|g\|_{0,\Gamma_A} \\
&\leq c_B \left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} \right) \left(\|f\|_{0,\mathcal{P}_H} + \|g\|_{0,\Gamma_A} \right).
\end{aligned}$$

Ahora, usando la condición *inf-sup* (3.6.7), la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la primera ecuación de (3.6.1), nos entregan que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c_F} \|\lambda_H\|_{\Lambda,\omega} &\leq \sup_{v_h \in V_h} \frac{|\langle \lambda_H, \bar{v}_h \rangle_{\partial \mathcal{P}_H}|}{\|v_h\|_{V,\omega}} \\
&= \sup_{v_h \in V_h} \frac{|(f, \bar{v}_h)_{0,\mathcal{P}_H} + (g, \bar{v}_h)_{0,\Gamma_A} - a(u_h, v_h)|}{\|v_h\|_{V,\omega}} \\
&\leq \frac{1}{\omega^2} \sup_{v_h \in V_h} \frac{c_B \|f\|_{0,\mathcal{P}_H} \|v_h\|_{V,\omega}}{\|v_h\|_{V,\omega}} + \frac{1}{\omega} \sup_{v_h \in V_h} \frac{c_B \|g\|_{0,\Gamma_A} \|v_h\|_{V,\omega}}{\|v_h\|_{V,\omega}} \\
&\quad + \sup_{v_h \in V_h} \frac{C_c \|u_h\|_{0,\mathcal{P}_H} \|v_h\|_{0,\mathcal{P}_H}}{\|v_h\|_{V,\omega}} \\
&\leq c_B \left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} \right) \left(\|f\|_{0,\mathcal{P}_H} + \|g\|_{0,\Gamma_A} \right) + C_c \|u_h\|_{V,\omega},
\end{aligned}$$

donde C_c es la constante de continuidad de Lema 3.5.1. Finalmente, para concluir la demostración basta juntar las cotas construidas para u_h y λ_H . \square

3.7. Estimación del Error

Para esta sección desarrollaremos un análisis de error para el problema a partir de la formulación híbrida, teniendo en cuenta los resultados presentados en la sección anterior. Como primer gran resultado, es necesario construir un Lema de Cea, el cual se presenta a continuación.

Lema 3.7.1. *Sea $(u, \lambda) \in V \times \Lambda$ solución de (3.3.2) y $(u_h, \lambda_H) \in V_h \times \Lambda_H$ solución de (3.6.1). Entonces, se tiene la siguiente estimación*

$$\|u - u_h\|_{V,\omega} \leq c_1 \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{V,\omega} + c_2 \inf_{\mu_H \in \Lambda_H} \|\lambda - \mu_H\|_{\Lambda,\omega}, \quad (3.7.1)$$

$$\|\lambda - \lambda_H\|_{\Lambda,\omega} \leq c_3 \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{V,\omega} + c_4 \inf_{\mu_H \in \Lambda_H} \|\lambda - \mu_H\|_{\Lambda,\omega}, \quad (3.7.2)$$

donde $c_1 = \left(\frac{1}{C_{dis}} + 1\right) (1 + c_F)$, $c_2 = \frac{1}{C_{dis}}$, $c_3 = c_1 C_c c_F$, y $c_4 = (1 + c_F) + c_2 C_c c_F$. Aquí, C_c es la constante de continuidad de 3.5.1 y c_F viene de (3.6.7).

Demostración. La siguiente demostración sigue los pasos presentados en [16, Lema 50.2]. Sea $(u, \lambda) \in V \times \Lambda$ solución del problema (3.3.2) y $(u_h, \lambda_H) \in V_h \times \Lambda_H$ solución del problema (3.6.1). Utilizando la ortogonalidad de Galerkin en la segunda ecuación de (3.6.1), se obtiene $\text{Re}\langle \lambda_H, \overline{u - u_h} \rangle_{\partial \mathcal{P}_h} = 0$, así, para cada $\mu_H \in \Lambda_H$, $\text{Re}\langle \mu_H, \overline{u - u_h} \rangle_{\partial \mathcal{P}_h} = 0$, lo que implica que

$$\text{Re}\langle \lambda - \lambda_H, \overline{u - u_h} \rangle_{\partial \mathcal{P}_h} = \text{Re}\langle \lambda - \mu_H, \overline{u - u_h} \rangle_{\partial \mathcal{P}_h}, \quad \text{para todo } \lambda \in \Lambda. \quad (3.7.3)$$

Ahora, sea $z_h \in \Pi_h(u) + \mathfrak{N}_h$ donde $z_h = \Pi_h(u) + \gamma_h$ con $\gamma_h \in \mathfrak{N}_h$. Luego, tomando $u_h - z_h \in \mathfrak{N}_h$ se tiene

$$\langle \mu_H, \overline{u_h - z_h} \rangle_{\partial \mathcal{P}_h} = \langle \mu_H, \overline{u_h - \Pi_h(u) + \gamma_h} \rangle_{\partial \mathcal{P}_h} \quad (3.7.4)$$

$$= \langle \mu_H, \overline{u_h - u} \rangle_{\partial \mathcal{P}_h} \quad (3.7.5)$$

$$= 0, \quad (3.7.6)$$

para todo $\mu_H \in \Lambda_H$, donde se usó la ortogonalidad de Galerkin para la segunda ecuación de (3.6.1). Recordando la condición *inf-sup* de (3.6.4) y utilizando la ortogonalidad de Galerkin en la primera ecuación de (3.6.1), podemos establecer la siguiente cota

$$\begin{aligned} C_{dis} \|u_h - z_h\|_{V,\omega} &\leq \sup_{w_h \in \mathfrak{N}_h} \frac{|a(u_h - z_h, w_h)|}{\|w_h\|_{V,\omega}} \\ &= \sup_{w_h \in \mathfrak{N}_h} \frac{|a(u - z_h, w_h) + \langle \lambda - \lambda_H, \overline{w_h} \rangle_{\mathcal{P}_h}|}{\|w_h\|_{V,\omega}} \\ &= \sup_{w_h \in \mathfrak{N}_h} \frac{|a(u - z_h, w_h) + \langle \lambda - \mu_H, \overline{w_h} \rangle_{\mathcal{P}_h}|}{\|w_h\|_{V,\omega}} \\ &\leq \|u - z_h\|_{V,\omega} + \|\lambda - \mu_H\|_{\Lambda,\omega}, \end{aligned}$$

Entonces, utilizando (3.7.3) y la desigualdad triangular, se obtiene la siguiente estimación

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{V,\omega} &\leq \|u - z_h\|_{V,\omega} + \|u_h - z_h\|_{V,\omega} \\ &\leq \|u - z_h\|_{V,\omega} + c_1 \|u - z_h\|_{V,\omega} + c_1 \|\lambda - \mu_H\|_{\Lambda,\omega}, \end{aligned} \quad (3.7.7)$$

con $\mu_h \in \Lambda_H$, $z_h \in \mathfrak{N}_h$ y donde $c_1 > 0$ no depende \mathcal{H} , H o h . Como esta estimación fue realizada para un $z_h \in \Pi_h(u) + \mathfrak{N}_h$ arbitrario, basta con considerar el ínfimo y obtener el siguiente resultado

$$\|u - u_h\|_{V,\omega} \leq \tilde{c}_1 \inf_{v_h \in \Pi_h(u) + \mathfrak{N}_h} \|u_h - v_h\|_{V,\omega} + c_2 \|\lambda - \mu_H\|_{\Lambda,\omega}, \quad (3.7.8)$$

donde $\tilde{c}_1 = \frac{1}{C_{dis}} + 1$, y $c_2 = \frac{1}{C_{dis}}$. Finalmente, utilizando el resultado de [16, Lema 50.3] se obtiene que

$$\|u - u_h\|_{V,\omega} \leq \hat{c}_1 \inf_{z_h \in V_h} \|u - z_h\|_{V,\omega} + c_2 \|\lambda - \mu_H\|_{\Lambda,\omega}, \quad (3.7.9)$$

con $\hat{c}_1 = \tilde{c}_1 (1 + c_F \omega^2)$. Entonces, (3.7.1) se obtiene tomando el ínfimo de $\mu_H \in \Lambda_H$. Ahora, realizaremos la estimación (3.7.2) sobre $\lambda - \lambda_H$. Sea $\mu_H \in \Lambda_H$, se tiene

$$\begin{aligned} \|\lambda - \lambda_H\|_{\Lambda,\omega} &= \|\lambda - \lambda_H + \mu_H - \mu_H\|_{\Lambda,\omega} \\ &\leq \|\lambda - \mu_H\|_{\Lambda,\omega} + \|\mu_H - \lambda_H\|_{\Lambda,\omega}. \end{aligned}$$

Sea $v_h \in V_h$, utilizando nuevamente la ortogonalidad de Galerkin, obtenemos

$$\langle \lambda - \mu_H, \overline{v_h} \rangle_{\partial \mathcal{P}_\mathcal{H}} = -a(u - u_h, v_h) + \langle \lambda_H - \mu_H, \overline{v_h} \rangle_{\partial \mathcal{P}_\mathcal{H}},$$

aplicando esta igualdad en el segundo término y utilizando la condición *inf-sup* (3.6.7), llegamos a la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \|\mu_H - \lambda_H\|_{\Lambda,\omega} &\leq c_F \sup_{v_h \in V_h} \frac{|\langle \mu_H - \lambda_H, \overline{v_h} \rangle_{\partial \mathcal{P}_\mathcal{H}}|}{\|v_h\|_{V,\omega}} \\ &\leq c_F \sup_{v_h \in V_h} \frac{|-a(u - u_h, v_h) + \langle \lambda - \mu_H, \overline{v_h} \rangle_{\partial \mathcal{P}_\mathcal{H}}|}{\|v_h\|_{V,\omega}} \\ &\leq c_3 \|u - u_h\|_{V,\omega} + c_4 \|\lambda - \mu_H\|_{\Lambda,\omega}, \end{aligned}$$

donde $c_3 = C_c c_F$ y $c_4 = c_F$, con C_c la constante de continuidad del Lema 3.5.1.

Entonces, la estimación sobre $\lambda - \lambda_H$ se obtiene de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \|\lambda - \lambda_H\|_{\Lambda, \omega} &\leq \|\lambda - \mu_H\|_{\Lambda, \omega} + \|\mu_H - \lambda_H\|_{\Lambda, \omega} \\ &\leq \|\lambda - \mu_H\|_{\Lambda, \omega} + c_3 \|u - u_h\|_{V, \omega} + c_4 \|\lambda - \mu_H\|_{\Lambda, \omega} \\ &\leq c_3 \|u - u_h\|_{V, \omega} + \tilde{c}_4 \|\lambda - \mu_H\|_{\Lambda, \omega}, \end{aligned}$$

con $\tilde{c}_4 = (1 + c_F)$. Así, usando la cota sobre $u - u_h$ y tomando el ínfimo sobre $\mu_H \in \Lambda_H$ se tiene (3.7.2). \square

Ahora, se presenta un resultado de interpolación previo a la construcción de un resultado de convergencia.

Lema 3.7.2. *Suponiendo que existe $w \in H^{\ell+2}(\mathcal{P}_H) \cap H_D^1(\Omega)$, $\frac{1}{\rho} \nabla w \in H^{\ell+1}(\mathcal{P}_H)$, con $l \geq 0$, y $\frac{1}{\rho} \nabla w \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$. Sea $\mu \in \Lambda$ definido como*

$$\mu|_{\partial K \setminus \Gamma_A} = - \left(\frac{1}{\rho} \nabla w \cdot \mathbf{n}^K + i w \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathbf{n}^K \right) \Big|_{\partial K \setminus \Gamma_A}, \quad \mu|_{\partial K \cap \Gamma_A} = 0, \quad (3.7.10)$$

para todo $K \in \mathcal{P}_H$. Entonces, existe una constante positiva $C > 0$, independiente de h , H o \mathcal{H} , y $C_\Omega > 0$ dependiente solo de Ω , tal que

$$\|\mu - \Pi_F^\ell \mu\|_{\Lambda, \omega} \leq C H^{\ell+1} \left| \frac{1}{\rho} \nabla w + i w \boldsymbol{\sigma}_0 \right|_{\ell+1, \mathcal{P}_H}, \quad (3.7.11)$$

con $\Pi_F^\ell \mu \in \Lambda_H$ siendo el operador de interpolación sobre cada $F \in \mathcal{E}$. Además,

$$\inf_{\mu_H \in \Lambda_H} \|\mu - \mu_H\|_{\Lambda, \omega} \leq C H^{\ell+1} \left| \frac{1}{\rho} \nabla w + i w \boldsymbol{\sigma}_0 \right|_{\ell+1, \mathcal{P}_H}, \quad (3.7.12)$$

con Λ_H y $\boldsymbol{\sigma}_0$ definidos en (2.3.9) y en la Sección 3.4, respectivamente.

Demostración. Esta demostración se construye como una variación de [3, Lema 3], construida para \mathbb{R}^2 (extensible a \mathbb{R}^3). Sea $w \in H^{\ell+2}(\mathcal{P}_H)$ y $E \in \mathcal{E}$. Sea $K \in \mathcal{P}_H$ tal que $F \subset \partial K$. Se define $\chi_E := (\frac{1}{\rho} \nabla w \cdot \mathbf{n}_E + i w \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathbf{n}_E) \in H^{\ell+1}(\mathcal{P}_H)$, donde \mathbf{n}_E debe entenderse como la extensión trivial del vector normal \mathbf{n}^E como una función constante sobre todo K , con $|\mathbf{n}_E| = 1$. Notemos que $\mu := \chi_E|_F \in L^2(F)$ para cada $F \subset E \in \mathcal{E}$.

Ahora, definamos ζ_F que define al único elemento en $\Xi_H(K)$ tal que $\zeta_F \cap \partial K = F$.

Sea $\hat{\mathcal{T}}$ el elemento de referencia estándar de vértices $(0,0), (1,0)$ y $(0,1)$, y sea $\mathcal{F}_F : \hat{\mathcal{T}} \rightarrow \zeta_F$ la transformación afín invertible tal que $\mathcal{F}_F(\hat{F}) = F$, donde $\hat{F} = [0, 1]$. Primero, observemos que

$$\widehat{\Pi}_F^\ell \mu = \Pi_{\hat{F}}^\ell \hat{\mu}, \quad (3.7.13)$$

donde Π_F^ℓ esta definido en (2.3.16). Entonces

$$\int_F (\mu - \Pi_F^\ell \mu) v ds = H_F \int_{\hat{F}} (\hat{\mu} - \widehat{\Pi}_F^\ell \mu) \hat{v} d\hat{s} \quad (3.7.14)$$

$$= H_F \int_{\hat{F}} (\hat{\mu} - \Pi_{\hat{F}}^\ell \hat{\mu}) \hat{v} d\hat{s}. \quad (3.7.15)$$

Adicionalmente, mediante argumento de escala [15] y la regularidad de la malla $\Xi_H(K)$, nos entrega que

$$|\hat{z}|_{\ell+1, \hat{\mathcal{T}}} \leq C H_F^\ell |z|_{\ell+1, \zeta_F}, \text{ y } |\hat{v}|_{1, \hat{\mathcal{T}}} \leq C |v|_{1, \zeta_F}, \quad (3.7.16)$$

para todo $z \in H^{\ell+1}(\zeta_F)$ y $v \in H^1(\zeta_F)$. Ahora, utilizando [11] y la desigualdad anterior, se obtiene, que para todo $v \in V$,

$$\int_{\hat{F}} (\hat{\mu} - \Pi_{\hat{F}}^\ell \hat{\mu}) \hat{v} d\hat{s} \leq C |\hat{\chi}_E|_{\ell+1, \hat{\mathcal{T}}} |\hat{v}|_{1, \hat{\mathcal{T}}} \quad (3.7.17)$$

$$\leq C H_F^\ell |\chi_E|_{\ell+1, \zeta_F} |v|_{1, \zeta_F}, \quad (3.7.18)$$

donde C es una constante positiva que solo depende del tamaño de ζ_F .

Ahora, definimos $\tilde{\mu}_H := \Pi_F^\ell \mu$, para cada $F \subset \partial K$ y cada $K \in \mathcal{P}_H$. Un cambio de variable, (3.7.16), (3.7.18), la regularidad de $\Xi_H(K)$, y el hecho de que el elemento

ζ_F no se sobrepone, nos entrega

$$\begin{aligned}
\langle \mu - \tilde{\mu}_H, \bar{v} \rangle_{\partial K} &= \sum_{F \subset \partial F} \int_F (\mu - \tilde{\mu}_H) \bar{v} ds \\
&= \sum_{F \subset \partial F} \int_{\hat{F}} (\hat{\mu} - \widehat{\tilde{\mu}}_H) \bar{v} d\hat{s} \\
&\leq C \sum_{F \subset \partial F} H_F^{\ell+1} |\chi_E|_{\ell+1, \zeta_F} |v|_{1, \zeta_F} \\
&\leq C H_F^{\ell+1} \left\{ \sum_{F \subset \partial F} |\chi_E|_{\ell+1, \zeta_F}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{F \subset \partial F} |v|_{1, \zeta_F}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C H_F^{\ell+1} \left| \frac{1}{\rho} \nabla w + i w \boldsymbol{\sigma}_0 \right|_{\ell+1, K} |v|_{1, K},
\end{aligned}$$

para todo $v \in V$, donde se tiene

$$|\chi_E|_{\ell+1, \zeta_F} = \left| \frac{1}{\rho} \nabla w \cdot \mathbf{n}_E + i w \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathbf{n}_E \right|_{\ell+1, \zeta_F} \leq \left| \frac{1}{\rho} \nabla w + i w \boldsymbol{\sigma}_0 \right|_{\ell+1, \zeta_F}.$$

Así, sumando sobre todo $K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}$ y utilizando los resultados anteriores, se llega a la siguiente cota

$$\begin{aligned}
\langle \mu - \hat{\mu}_H, \bar{v} \rangle_{\partial \mathcal{P}_{\mathcal{H}}} &\leq C H_F^{\ell+1} \left| \frac{1}{\rho} \nabla w + i w \boldsymbol{\sigma}_0 \right|_{\ell+1, K} |v|_{1, K} \\
&\leq C H_F^{\ell+1} \left| \frac{1}{\rho} \nabla w + i w \boldsymbol{\sigma}_0 \right|_{\ell+1, K} |v|_{V, \omega}, \tag{3.7.19}
\end{aligned}$$

que directamente implica

$$\|\mu - \tilde{\mu}_H\|_{\Lambda, \omega} \leq \sup_{v \in V} \frac{|\langle \mu - \hat{\mu}_H, \bar{v} \rangle_{\partial \mathcal{P}_{\mathcal{H}}}|}{\|v\|_{V, \omega}} \tag{3.7.20}$$

$$\leq C H^{\ell+1} \left| \frac{1}{\rho} \nabla w + i w \boldsymbol{\sigma}_0 \right|_{\ell+1, \mathcal{P}_{\mathcal{H}}}, \tag{3.7.21}$$

donde el resultado esperado viene de tomar el ínfimo en el lado izquierdo. \square

Finalmente, utilizando los resultados del Lema 3.6.1, Corolario 2.3.2, y Lema 3.7.2, podemos presentar la siguiente estimación para el error.

Corolario 3.7.1. *Suponiendo que dado $(u, \lambda) \in V \times \Lambda$ solución de (3.3.2), satisface la hipótesis del Lema 3.7.2. Entonces, existen C_1 y C_2 constantes positivas*

independientes de H , tales que:

$$\|u - u_h\|_{V,\omega} \leq C_1 \left(H^{\ell+1} \left| \frac{1}{\rho} \nabla u + i u \boldsymbol{\sigma}_0 \right|_{\ell+1, \mathcal{P}_H} + h^k |u|_{k+1, \mathcal{P}_H} \right), \quad (3.7.22)$$

$$\|\lambda - \lambda_H\|_{\Lambda,\omega} \leq C_2 \left(H^{\ell+1} \left| \frac{1}{\rho} \nabla u + i u \boldsymbol{\sigma}_0 \right|_{\ell+1, \mathcal{P}_H} + h^k |u|_{k+1, \mathcal{P}_H} \right). \quad (3.7.23)$$

Demostración. Sea $u \in H^{\ell+2}(\mathcal{P}_H) \cap H_D^1(\Omega)$. Por el Lema 3.7.1, se tiene

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{V,\omega} &\leq c_1 \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{V,\omega} + c_2 \inf_{\mu_H \in \Lambda_H} \|\lambda - \mu_H\|_{\Lambda,\omega}, \\ \|\lambda - \lambda_H\|_{\Lambda,\omega} &\leq c_3 \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{V,\omega} + c_4 \inf_{\mu_H \in \Lambda_H} \|\lambda - \mu_H\|_{\Lambda,\omega}, \end{aligned}$$

donde $c_1 = \left(\frac{1}{C_{dis}} + 1\right) (1 + c_F)$, $c_2 = \frac{1}{C_{dis}}$, $c_3 = c_1 C_c c_F$, y $c_4 = (1 + c_F) + c_2 C_c c_F$. Además, C_c es la constante de continuidad de Lema 3.5.1 y c_F viene de (3.6.7). Combinando esto con el Lema 3.7.2, se tiene

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{V,\omega} &\leq c_1 \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{V,\omega} + c_2 C H^{\ell+1} \left| \frac{1}{\rho} \nabla u + i u \boldsymbol{\sigma}_0 \right|_{\ell+1, \mathcal{P}_H}, \\ \|\lambda - \lambda_H\|_{\Lambda,\omega} &\leq c_3 \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{V,\omega} + c_4 C H^{\ell+1} \left| \frac{1}{\rho} \nabla u + i u \boldsymbol{\sigma}_0 \right|_{\ell+1, \mathcal{P}_H}. \end{aligned}$$

Además, considerando $u \in H^{k+2}(\Omega)$ y haciendo uso del Corolario 2.3.2, se obtiene

$$\begin{aligned} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{V,\omega} &\leq \|u - \mathcal{I}_h^k(u)\|_{V,\omega} \\ &\leq C_1 \left(h^2 + \omega^2 + \frac{\omega}{\mathcal{H}} + h^2 \mathcal{H} \omega \right)^{\frac{1}{2}} h^k |v|_{k+1, \mathcal{P}_H}, \end{aligned}$$

donde $\mathcal{I}_h : V \rightarrow V_h$ es el interpolante de Lagrange global y $C_1 > 0$. Aplicando esto, se obtiene

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{V,\omega} &\leq c_1 C_1 h^k |u|_{k+1, \mathcal{P}_H} + c_2 C H^{\ell+1} \left| \frac{1}{\rho} \nabla u + i u \boldsymbol{\sigma}_0 \right|_{\ell+1, \mathcal{P}_H} \\ &\leq \tilde{C}_1 \left(h^k |u|_{k+1, \mathcal{P}_H} + H^{\ell+1} \left| \frac{1}{\rho} \nabla u + i u \boldsymbol{\sigma}_0 \right|_{\ell+1, \mathcal{P}_H} \right), \end{aligned}$$

donde $\tilde{C}_1 > 0$, además

$$\begin{aligned} \|\lambda - \lambda_H\|_{\Lambda, \omega} &\leq c_3 C_1 h^k |u|_{k+1, \mathcal{P}_\mathcal{H}} + c_4 C H^{\ell+1} \left| \frac{1}{\rho} \nabla u + i u \sigma_0 \right|_{\ell+1, \mathcal{P}_\mathcal{H}} \\ &\leq \tilde{C}_2 \left(h^k |u|_{k+1, \mathcal{P}_\mathcal{H}} + H^{\ell+1} \left| \frac{1}{\rho} \nabla u + i u \sigma_0 \right|_{\ell+1, \mathcal{P}_\mathcal{H}} \right), \end{aligned}$$

con $\tilde{C}_2 > 0$.

□

Capítulo 4

Un Método Híbrido Multi-escala

El propósito de este capítulo es definir y construir una formulación donde la única incógnita presente sea la aproximación de los multiplicadores de Lagrange en el borde de cada elemento, resultando en un problema global donde λ_H es la única incógnita a determinar. Se demostrará que tanto los problemas locales como el problema global están bien definidos, finalmente, se introducirá el algoritmo que nos permitirá implementar este método a nivel computacional.

4.1. Localización

Sean $T_h : \Lambda \rightarrow V_h$, $\hat{T}_h : L^2(\Omega) \rightarrow V_h$, y $\tilde{T}_h : L^2(\Gamma_A) \rightarrow V_h$ operadores lineales y acotados que resuelven los siguientes problemas para cada $\mu \in \Lambda$, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma_A)$:

$$a(T_h \mu, v_h) = -\langle \mu, \bar{v}_h \rangle_{\partial \mathcal{P}_h}, \quad (4.1.1)$$

$$a(\hat{T}_h f, v_h) = (f, \bar{v}_h)_{\mathcal{P}_h}, \quad (4.1.2)$$

$$a(\tilde{T}_h g, v_h) = (g, \bar{v}_h)_{\Gamma_A}, \quad (4.1.3)$$

para todo $v_h \in V_h$. Donde la forma sesquilineal $a(\cdot, \cdot)$ utilizada corresponde a la definida en (3.3.3), la continuidad de esta forma sobre V obtenida mediante el Lema 3.5.1 es también válida sobre V_h . Ahora, definamos

$$w_h = T_h \lambda_H + \hat{T}_h f + \tilde{T}_h g. \quad (4.1.4)$$

La expresión (4.1.4) se obtiene mediante un procedimiento de condensación estática. Además, como se detalla más adelante, estas aplicaciones T_h , \hat{T}_h y \tilde{T}_h pueden ser calculados localmente. Estos cálculos locales permiten la eliminación de los grados de libertad internos de cada elemento, con el objetivo de poder escribir el problema global solo en términos de λ_H . El último paso en la obtención del método Híbrido Multiescala (MH) es reemplazar (4.1.4) en la segunda ecuación de (3.6.1), para obtener la siguiente ecuación que involucra solo a λ_H : Encontrar $\lambda_H \in \Lambda_H$, tal que

$$\mathfrak{B}(\lambda_H, \mu_H) = \langle \mu_H, \overline{\hat{T}_h f + \tilde{T}_h g} \rangle_{\partial \mathcal{P}_h}, \text{ para todo } \mu_H \in \Lambda_H, \quad (4.1.5)$$

donde el operador \mathfrak{B} viene definido como

$$\mathfrak{B}(\rho_H, \mu_H) = -\langle \mu_H, \overline{T_h \rho_H} \rangle_{\partial \mathcal{P}_h}, \quad (4.1.6)$$

para todo $(\rho_H, \mu_H) \in \Lambda_H \times \Lambda_H$. Entonces, este problema tiene como única solución a $\lambda_H \in \Lambda_H$. Una vez que λ_H es calculado, w_h se puede construir utilizando (4.1.4).

4.2. Problemas MH bien definidos

En la sección anterior, hemos introducido y definido los problemas locales y el problema global de nuestro método MH. Lo que resta es poder establecer que estos problemas están bien definidos, y además, construir un resultado de estabilidad para dichos problemas, específicamente, un resultado de condicionamiento que nos permita establecer constantes de estabilidad para las matrices que componen nuestro método MH. Para los problemas locales, vamos a establecer una condición *inf-sup* para $a(\cdot, \cdot)$ sobre $V_h \times V_h$. Este resultado está detallado en el Apéndice A, donde se tiene la estimación A1.33. Dado que este resultado fue probado para todo u, v en V , la siguiente condición *inf-sup* sobre V_h también es válida:

$$\inf_{u_h \in V_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{|a(u_h, v_h)|}{\|u_h\|_{V, \omega} \|v_h\|_{V, \omega}} \geq \frac{\tilde{C}}{2 \left(1 + \sqrt{\tilde{A} \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{\kappa^{**}}}}\right)} \geq 0, \quad (4.2.1)$$

donde $\tilde{C} > 0$ no depende de ninguna partición ni de ω , y \tilde{A} se define en el Lema A1.1.

Así, podemos asegurar que los problemas (4.1.1), (4.1.2) y (4.1.3) están bien

definidos.

También se puede demostrar que el problema global del método MH (4.1.5) está bien definido. Antes de esto, vamos a presentar el siguiente resultado.

Proposición 4.2.1. *Para todo $\mu_H, \lambda_H \in \Lambda_H$, se tiene*

$$\langle \mu_H, \overline{T_h \lambda_H} \rangle_{\partial \mathcal{P}_h} = \langle \overline{\lambda_H}, \overline{T_h \mu_H} \rangle_{\partial \mathcal{P}_h}. \quad (4.2.2)$$

Demostración. Sea $\mu_H, \lambda_H \in \Lambda_H$. De la ecuación (4.1.1), tenemos

$$\begin{aligned} \overline{\langle \mu_H, \overline{T_h \lambda_H} \rangle_{\partial \mathcal{P}_h}} &= \langle \overline{\mu_H}, \overline{T_h \lambda_H} \rangle_{\partial \mathcal{P}_h} \\ &= -a(T_h \overline{\mu_H}, \overline{T_h \lambda_H}) \\ &= -a(T_h \lambda_H, \overline{T_h \mu_H}) \\ &= \langle \lambda_H, \overline{T_h \mu_H} \rangle_{\partial \mathcal{P}_h}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, (4.2.2) se obtiene tomando el conjugado. \square

Lema 4.2.1. *Para $\lambda_H \in \Lambda_H$, se define $(w_h, \overline{\eta_{\lambda_H}}) \in V_h \times \Lambda_H$ como la única solución del problema*

$$\begin{aligned} a(w_h, v_h) + \langle \overline{\eta_{\lambda_H}}, \overline{v_h} \rangle_{\partial \mathcal{P}_h} &= \langle \overline{T_h \lambda_H}, v_h \rangle_{\mathcal{P}_h}, & \text{para todo } v_h \in V_h, \\ \langle \mu_H, \overline{w_h} \rangle_{\partial \mathcal{P}_h} &= 0, & \text{para todo } \mu_H \in \Lambda_H, \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

entonces, se tiene

$$\langle \eta_{\lambda_H}, \overline{T_h \lambda_H} \rangle_{\partial \mathcal{P}_h} = \|T_h \lambda_H\|_{0, \mathcal{P}_h}^2, \quad (4.2.4)$$

y

$$\|T_h \eta_{\lambda_H}\|_{V, \omega} \leq \left(\frac{c_B (1 + \omega)}{C_{dis} \omega} + \frac{2 \left(1 + \sqrt{\tilde{A}} \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{\kappa_{**}}\right)}{\tilde{C}} \right) \|T_h \lambda_H\|_{0, \mathcal{P}_h}, \quad (4.2.5)$$

donde $\tilde{C} > 0$ no depende de ninguna partición ni de ω , y \tilde{A} se define en el Lema A1.1.

Demostración. Sea $\lambda_H \in \Lambda_H$. El Teorema 3.6.1 nos asegura la existencia y unicidad de la solución, así la definición de $\overline{\eta_{\lambda_H}}$ tiene sentido. Siguiendo los mismos pasos realizados al principio del capítulo, podemos obtener la siguiente igualdad:

$$\langle \mu_H, \overline{T_h \eta_{\lambda_H}} \rangle_{\partial \mathcal{P}_h} = - \left\langle \mu_H, \overline{\hat{T}_h (\overline{T_h \lambda_H})} \right\rangle_{\partial \mathcal{P}_h}, \quad \text{para todo } \mu_H \in \Lambda_H. \quad (4.2.6)$$

Entonces, por la Proposición 4.2.1, se obtiene que

$$\langle \eta_{\lambda_H}, \overline{T_h \lambda_H} \rangle_{\partial \mathcal{P}_H} = \langle \overline{\lambda_H}, \overline{T_h \eta_{\lambda_H}} \rangle_{\partial \mathcal{P}_H} = - \left\langle \overline{\lambda_H}, \overline{\hat{T}_h (\overline{T_h \lambda_H})} \right\rangle_{\partial \mathcal{P}_H}. \quad (4.2.7)$$

Ahora, haciendo uso de la definición de T_h y \hat{T}_h , podemos probar que

$$\begin{aligned} - \left\langle \overline{\lambda_H}, \overline{\hat{T}_h (\overline{T_h \lambda_H})} \right\rangle_{\partial \mathcal{P}_H} &= \left\langle \lambda_H, \overline{\overline{\hat{T}_h (\overline{T_h \lambda_H})}} \right\rangle_{\partial \mathcal{P}_H} \\ &= a \left(T_h \lambda_H, \overline{\hat{T}_h (\overline{T_h \lambda_H})} \right) \\ &= a \left(\hat{T}_h (\overline{T_h \lambda_H}), \overline{T_h \lambda_H} \right) \\ &= (\overline{T_h \lambda_H}, \overline{T_h \lambda_H}) \\ &= \|\overline{T_h \lambda_H}\|_{0, \mathcal{P}_H}^2. \end{aligned}$$

Basta tomar el conjugado para concluir la cuenta. En efecto, se obtiene

$$\left\langle \overline{\lambda_H}, \overline{\hat{T}_h (\overline{T_h \lambda_H})} \right\rangle_{\partial \mathcal{P}_H} = \overline{\|\overline{T_h \lambda_H}\|_{0, \mathcal{P}_H}^2} = \|\overline{T_h \lambda_H}\|_{0, \mathcal{P}_H}^2 = \|T_h \lambda_H\|_{0, \mathcal{P}_H}^2.$$

Finalmente, la estimación (4.2.5) viene de la definición de η_{λ_H} y la desigualdad (3.6.8). \square

Con estos resultados, podemos demostrar que el problema global está bien definido, esto se presenta en el siguiente teorema:

Teorema 4.2.1. *Suponiendo que 2.2.1 se satisface. El problema (4.1.5) está bien definido, además, se tienen las siguientes cotas*

$$|\mathfrak{B}(\nu_H, \mu_H)| \leq \frac{2 \left(1 + \sqrt{\tilde{A}} \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{\kappa_{**}}\right)}{\tilde{C}} \|\mu_H\|_{\Lambda, \omega} \|\nu_H\|_{\Lambda, \omega}, \quad (4.2.8)$$

$$\text{para todo } (\nu_H, \mu_H) \in \Lambda_H \times \Lambda_H, \quad (4.2.9)$$

$$\sup_{\mu_H \in \Lambda_H} \frac{|\mathfrak{B}(\nu_H, \mu_H)|}{\|\nu_H\|_{\Lambda, \omega} \|\mu_H\|_{\Lambda, \omega}} \geq C_{wp} \frac{c}{C_F^2}, \text{ para todo } (\nu_H, \mu_H) \in \Lambda_H \times \Lambda_H. \quad (4.2.10)$$

Con $C_{wp} = 2 C_c \left(1 + \frac{c_B \omega}{\kappa_{**}} \left(\frac{c_B}{C_{dis}} + \frac{2 \left(1 + \sqrt{\tilde{A}} \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{\kappa_{**}}\right)}{\tilde{C}}\right)\right)^{-1}$, $\hat{C} > 0$ y $\tilde{C} > 0$ que no depende de ω o alguna partición, y \tilde{A} se define en el Lema A1.1.

Demostración. Sea $(\nu_H, \mu_H) \in \Lambda_H \times \Lambda_H$, utilizando la condición (4.2.1) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{C}}{2 \left(1 + \sqrt{\tilde{A} \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{\kappa_{**}}}\right)} \|T_h \mu_H\|_{V,\omega} &\leq \sup_{v_h \in V_h} \frac{|a(T_h \mu_H, v_h)|}{\|v_h\|_{V,\omega}} \\ &= \sup_{v_h \in V_h} \frac{|-\langle \mu_H, \overline{v_h} \rangle_{\partial \mathcal{P}_H}|}{\|v_h\|_{V,\omega}} \\ &\leq \frac{\|\mu_H\|_{\Lambda,\omega} \|v_h\|_{V,\omega}}{\|v_h\|_V}. \end{aligned}$$

donde $\tilde{C} > 0$ no depende de ω o alguna partición, y \tilde{A} se define en el Lema A1.1. Esto implica el siguiente resultado de continuidad:

$$\|T_h \mu_H\|_{V,\omega} \leq \frac{2 \left(1 + \sqrt{\tilde{A} \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{\kappa_{**}}}\right)}{\tilde{C}} \|\mu_H\|_{\Lambda,\omega}.$$

Aquí,

$$\begin{aligned} |\mathfrak{B}(\nu_H, \mu_H)| &= |\langle \mu_H, \overline{T_h \nu_H} \rangle_{\partial \mathcal{P}_H}| \\ &\leq \|\mu_H\|_{\Lambda,\omega} \|T_h \nu_H\|_{V,\omega} \\ &\leq \frac{2 \left(1 + \sqrt{\tilde{A} \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{\kappa_{**}}}\right)}{\tilde{C}} \|\mu_H\|_{\Lambda,\omega} \|\nu_H\|_{\Lambda,\omega}. \end{aligned}$$

Ahora, sea $\mu \in \Lambda_H$, utilizando (3.6.7), seguido de (4.1.1), y la continuidad de $a(\cdot, \cdot)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_F} \|\mu_H\|_{\Lambda,\omega} &\leq \sup_{v_h \in V_h} \frac{|\langle \mu_H, \overline{v_h} \rangle_{\partial \mathcal{P}_H}|}{\|v_h\|_{V,\omega}} \\ &\leq \sup_{v_h \in V_h} \frac{|-a(T_h \mu_H, v_h)|}{\|v_h\|_{V,\omega}} \\ &\leq C_c \|T_h \mu_H\|_{V,\omega}, \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

C_c es la constante de continuidad del Lema (3.5.1).

Sea $K \in \mathcal{P}_H$, definimos

$$\rho^* := \sup_{\mathbf{x} \in K} \rho(\mathbf{x}), \quad \rho_* := \inf_{\mathbf{x} \in K} \rho(\mathbf{x}), \quad \kappa^* := \sup_{\mathbf{x} \in K} \kappa(\mathbf{x}), \quad \kappa_* := \inf_{\mathbf{x} \in K} \kappa(\mathbf{x}).$$

Además

$$\rho^{**} := \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \rho(\mathbf{x}), \quad \rho_{**} := \inf_{\mathbf{x} \in \Omega} \rho(\mathbf{x}), \quad \kappa^{**} := \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \kappa(\mathbf{x}), \quad \kappa_{**} := \inf_{\mathbf{x} \in \Omega} \kappa(\mathbf{x}).$$

Dado $\nu_H \in \Lambda_H$, sea $T_h \nu_H \in V_h$ la solución de (4.1.1), se define $(z_h, \overline{\eta_{\nu_H}}) \in V_h \times \Lambda_H$ como la única solución del problema

$$\begin{aligned} a(z_h, v_h) + \langle \overline{\eta_{\nu_H}}, \overline{v_h} \rangle_{\partial \mathcal{P}_H} &= (\overline{T_h \nu_H}, v_h)_{\mathcal{P}_H}, & \text{para todo } v_h \in V_h \\ \langle \lambda_H, \overline{z_h} \rangle_{\partial \mathcal{P}_H} &= 0, & \text{para todo } \lambda_H \in \Lambda_H \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Entonces, por la Proposición 4.2.1 y el Lema 4.2.1, se tiene:

$$\langle \eta_{\nu_H}, \overline{T_h \nu_H} \rangle_{\partial \mathcal{P}_H} = \|T_h \nu_H\|_{0, \mathcal{P}_H}^2, \quad (4.2.13)$$

y

$$\|T_h \eta_{\nu_H}\|_{V, \omega} \leq \left(\frac{c_B (1 + \omega)}{C_{dis} \omega} + \frac{2 \left(1 + \sqrt{\tilde{A}} \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{\kappa_{**}} \right)}{\tilde{C}} \right) \|T_h \nu_H\|_{0, \mathcal{P}_H}. \quad (4.2.14)$$

Ahora, definiendo $\mu_H := (1 + i) \nu_H + 2 \frac{\omega^2}{\kappa_{**}} \eta_{\nu_H}$, utilizando la definición de $\mathfrak{B}(\cdot, \cdot)$,

μ_H , y la definición de η_{ν_H} , se tiene que

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{B}(\nu_H, \mu_H)| &\geq \operatorname{Re} \mathfrak{B}(\nu_H, \mu_H) \\
&= -\operatorname{Re} \langle \mu_H, \overline{T_h \nu_H} \rangle_{\partial \mathcal{P}_H} \\
&= -\operatorname{Re} \left\langle \left((1+i) \nu_H + 2 \frac{\omega^2}{\kappa_{**}} \eta_{\nu_H} \right), \overline{T_h \nu_H} \right\rangle_{\partial \mathcal{P}_H} \\
&= -\operatorname{Re} \langle (1+i) \nu_H, \overline{T_h \nu_H} \rangle_{\partial \mathcal{P}_H} - 2 \frac{\omega^2}{\kappa_{**}} \operatorname{Re} \langle \eta_{\nu_H}, \overline{T_h \nu_H} \rangle_{\partial \mathcal{P}_H} \\
&= \operatorname{Re} a((1+i) T_h \nu_H, T_h \nu_H) - 2 \frac{\omega^2}{\kappa_{**}} \operatorname{Re} \langle \eta_{\nu_H}, \overline{T_h \nu_H} \rangle_{\partial \mathcal{P}_H} \\
&= \operatorname{Re} a((1+i) T_h \nu_H, T_h \nu_H) + 2 \frac{\omega^2}{\kappa_{**}} \|T_h \nu_H\|_{0, \mathcal{P}_H}^2 \\
&\geq \frac{1}{\rho^{**}} \|\nabla T_h \nu_H\|_{0, \mathcal{P}_H}^2 + \frac{\omega}{\sqrt{\kappa_{**} \rho^{**}}} \|T_h \nu_H\|_{0, \Gamma_A}^2 - \frac{\omega^2}{\kappa_{**}} \|T_h \nu_H\|_{0, \mathcal{P}_H}^2 \\
&\quad + 2 \frac{\omega^2}{\kappa_{**}} \|T_h \nu_H\|_{0, \mathcal{P}_H}^2 \\
&\geq \frac{1}{\rho^{**}} \|\nabla T_h \nu_H\|_{0, \mathcal{P}_H}^2 + \frac{\omega}{\sqrt{\kappa_{**} \rho^{**}}} \|T_h \nu_H\|_{0, \Gamma_A}^2 + \frac{\omega^2}{\kappa_{**}} \|T_h \nu_H\|_{0, \mathcal{P}_H}^2 \\
&\geq c \|T_h \nu_H\|_{V, \omega}^2,
\end{aligned}$$

donde $c := \min \left\{ \frac{1}{\kappa_{**}}, \frac{1}{\rho^{**}}, \frac{1}{\sqrt{\kappa_{**} \rho^{**}}} \right\}$. Además, considerando la definición de μ_H , la desigualdad (4.2.11), y la desigualdad (4.2.14), se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{C_F} \|\mu_H\|_{\Lambda, \omega} &\leq C_c \|T_h \mu_H\|_{V, \omega} \\
&\leq 2 C_c \|T_h \nu_H\|_{V, \omega} + \frac{C_c 2 \omega^2}{\kappa_{**}} \|T_h \eta_{\nu_H}\|_{V, \omega} \\
&\leq 2 C_c \|T_h \nu_H\|_{V, \omega} \\
&\quad + \frac{2 c_B \omega^2 C_c}{\kappa_{**}} \left(\frac{c_B (1 + \omega)}{C_{dis} \omega} + \frac{2 \left(1 + \sqrt{\tilde{A}} \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{\kappa_{**}} \right)}{\tilde{C}} \right) \|T_h \nu_H\|_{0, \mathcal{P}_H} \\
&\leq 2 C_c \|T_h \nu_H\|_{V, \omega} \\
&\quad + \frac{2 c_B \omega C_c}{\kappa_{**}} \left(\frac{c_B (1 + \omega)}{C_{dis} \omega} + \frac{2 \left(1 + \sqrt{\tilde{A}} \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{\kappa_{**}} \right)}{\tilde{C}} \right) \|T_h \nu_H\|_{V, \omega}. \quad (4.2.15)
\end{aligned}$$

Combinando (4.2.11) y (4.2.15), se obtiene que

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{B}(\mu_H, \nu_H)| &\geq \operatorname{Re} \mathfrak{B}(\mu_H, \nu_H) \\
&= \operatorname{Re} -\langle \mu_H, \overline{\nu_H} \rangle_{\partial \mathcal{D}_H} \\
&\geq c \|T_h \nu_H\|_{V, \omega}^2 \\
&\geq C_{wp} \frac{c}{C_F} \|\mu_H\|_{V, \omega} \|T_h \nu_H\|_{V, \omega} \\
&\geq C_{wp} \frac{c}{C_F} \|\nu_H\|_{\Lambda, \omega} \|\mu_H\|_{\Lambda, \omega},
\end{aligned}$$

con $C_{wp} = 2 C_c \left(1 + \frac{c_B \omega}{\kappa_{**}} \left(\frac{c_B (1+\omega)}{C_{dis} \omega} + \frac{2 \left(1 + \sqrt{\bar{A}} \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{\kappa_{**}} \right)}{\bar{C}} \right) \right)^{-1}$. Luego, $\mathfrak{B}(\cdot, \cdot)$ satisfice la siguiente condición *inf-sup*

$$\inf_{\mu_H \in \Lambda_H} \sup_{\nu_H \in \Lambda_H} \frac{|\mathfrak{B}(\mu_H, \nu_H)|}{\|\nu_H\|_{\Lambda, \omega} \|\mu_H\|_{\Lambda, \omega}} \geq C_{wp} \frac{c}{C_F},$$

esto prueba la desigualdad (4.2.10). □

Ahora, probaremos la equivalencia entre la solución construida mediante los problemas locales y el problema global con la solución obtenida mediante la formulación híbrida. Consideremos $(u_h, \lambda_H) \in V_h \times \Lambda_H$ como la solución del problema (3.6.1). Vamos a comenzar por notar que la primera ecuación de (3.6.1) puede ser escrita de la siguiente manera:

$$a(u_h, v_h) = -\langle \lambda_H, \overline{v_h} \rangle_{\partial \mathcal{D}_H} + (f, \overline{v_h})_{\mathcal{D}_H} + (g, \overline{v_h})_{\Gamma_A}, \quad \text{para todo } v_h \in V_h. \quad (4.2.16)$$

Recordando que $w_h := T_h \lambda_H + \hat{T}_h f + \tilde{T}_h g$, tomaremos v_h como un elemento de \mathfrak{N}_h . Ahora, usando la definición de los operadores T_h, \hat{T}_h y \tilde{T}_h de (4.1.1), (4.1.2) y (4.1.3), respectivamente, obtenemos:

$$\begin{aligned}
a(w_h, v_h) &= a(T_h \lambda_H + \hat{T}_h f + \tilde{T}_h g, v_h) \\
&= -\langle \lambda_H, \overline{v_h} \rangle_{\partial \mathcal{D}_H} + (f, \overline{v_h})_{\mathcal{D}_H} + (g, \overline{v_h})_{\Gamma_A} \\
&= (f, \overline{v_h})_{\mathcal{D}_H} + (g, \overline{v_h})_{\Gamma_A} \\
&= a(u_h, v_h).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, como la solución $w_h \in V_h$ debe ser única, podemos concluir que $w_h = u_h$. En consecuencia, la solución $u_h \in V_h$ de (3.6.1) se puede expresar de la siguiente manera:

$$u_h = T_h \lambda_H + \hat{T}_h f + \tilde{T}_h g. \quad (4.2.17)$$

Además, el análisis de convergencia presentado en el Corolario (3.7.1) para la solución de (3.6.1), sigue siendo válido para u_h usando la construcción (4.2.17).

En la siguiente sección demostraremos cómo implementar el método MH resolviendo los problemas locales, esto, evitando la solución global para calcular las evaluaciones de T_h, \hat{T}_h y \tilde{T}_h . De (4.1.1), (4.1.2) y (4.1.3) y utilizando la definición local del espacio V_h , podemos ver que en cada $K \in \mathcal{P}_H$, $T_h \mu|_K \in V_h(K)$, $\hat{T}_h f|_K \in V_h(K)$ y $\tilde{T}_h g|_K \in V_h(K)$ son las únicas soluciones de los problemas:

$$a_K(T_h \mu, v_h) = -\langle \mu, \bar{v}_h \rangle_{\partial K}, \text{ para todo } v_h \in V_h(K), \quad (4.2.18)$$

$$a_K(\hat{T}_h f, v_h) = (f, \bar{v}_h)_K, \text{ para todo } v_h \in V_h(K), \quad (4.2.19)$$

$$a_K(\tilde{T}_h g, v_h) = (g, \bar{v}_h)_{\partial K \cap \Gamma_A}, \text{ para todo } v_h \in V_h(K). \quad (4.2.20)$$

Por el Teorema A1.1, los problemas (4.2.18), (4.2.19) y (4.2.20) tienen solución única. Además, estos problemas están bien definidos; en efecto, el resultado de continuidad del Lema 3.5.1 junto con la condición *inf-sup* del Teorema A1.2 nos aseguran que los problemas están bien definidos para cada $K \in \mathcal{P}_H$.

4.3. El Algoritmo de MH

La descomposición en problemas locales, teniendo en cuenta una apropiada selección para la base de Λ_H , resulta en un proceso de computo denominado *Embarrassingly Parallel* [21, p. 14] para calcular las funciones de base del método MH (4.1.5). Precisamente, si $\{\psi_1, \dots, \psi_N\}$ es una base para Λ_H , podemos escribirla de la siguiente manera

$$\{\psi_1, \dots, \psi_N\} = \bigcup_{F \in \mathcal{E}_H} \{\phi_1^F, \dots, \phi_{\ell+1}^F\}, \quad (4.3.1)$$

donde cada $\phi_1^F, \dots, \phi_{\ell+1}^F$ tiene soporte en cada $F \in \mathcal{E}$. Para dar una definición más certera de ϕ_j^F para cada $j = 1, \dots, \ell + 1$, vamos a fijar las bases $\varphi_1, \dots, \varphi_{\ell+1}$ para $\mathcal{P}_\ell(F)$, entonces, vamos a definir $\phi_j^F = (\mathbf{n}^F \cdot \mathbf{n}_F^K) \varphi_j$, para todo $j = 1, \dots, \ell + 1$, por lo tanto, si $K_1^F, K_2^F \in \mathcal{P}_\mathcal{H}$ son tales que $F = K_1^F \cap K_2^F$ y $K_1^F \neq K_2^F$, entonces $\phi_j^F|_{\partial K'} = -\phi_j^F|_{\partial K}$. La definición (4.3.1) induce la existencia de una biyección global-local $\psi_i \longleftrightarrow \phi_k^F$, que se puede definir como una transformación de índices locales a globales, a partir de la siguiente aplicación

$$(k, F) \rightarrow i(k, F), \text{ para todo } i = 1, \dots, N, \quad (4.3.2)$$

donde se abusa un poco de la notación, usando F en lugar del índice de F en alguna estructura asociada a la malla \mathcal{E}_H . Usando (4.3.1), podemos reescribir el problema global como el siguiente sistema lineal: Encontrar $(c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} \langle \psi_1, \overline{T_h \psi_1} \rangle & \cdots & \langle \psi_1, \overline{T_h \psi_N} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \psi_N, \overline{T_h \psi_1} \rangle & \cdots & \langle \psi_N, \overline{T_h \psi_N} \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \langle \psi_1, \overline{\hat{T}_h f + \tilde{T}_h g} \rangle \\ \vdots \\ \langle \psi_N, \overline{\hat{T}_h f + \tilde{T}_h g} \rangle \end{pmatrix}. \quad (4.3.3)$$

Así podemos escribir (4.1.4) de la siguiente manera

$$u_h = \sum_{i=1}^N \bar{c}_i T_h \psi_i + \hat{T}_h f + \tilde{T}_h g. \quad (4.3.4)$$

Ahora, vamos a analizar cómo estas entradas son construidas $\langle \psi_j, \overline{T_h \psi_i} \rangle_{\partial \mathcal{P}_\mathcal{H}}$, para todo $i, j = 1, \dots, N$. Como ψ_j es un elemento de la base (4.3.1), su soporte es un subconjunto de solo una arista $F \in \mathcal{E}_H$. Este elemento F se encuentra a lo más en dos polígonos $\{K_1^F, K_2^F\} := \mathcal{P}_\mathcal{H}^F \subseteq \mathcal{P}_\mathcal{H}$. Vamos a asociar a ψ_i , dos polígonos $\{K_1^{F'}, K_2^{F'}\} := \mathcal{P}_\mathcal{H}^{E'} \subseteq \mathcal{P}_\mathcal{H}$ con $F' \in \mathcal{E}_H$. Utilizando esta notación se tiene

$$\langle \psi_j, \overline{T_h \psi_i} \rangle_{\partial \mathcal{P}_\mathcal{H}} = \sum_{K \in \mathcal{P}_\mathcal{H}^F \cap \mathcal{P}_\mathcal{H}^{E'}} \langle \psi_j, T_h \psi_i \rangle_{\partial K} = \sum_{K \in \mathcal{P}_\mathcal{H}^F \cap \mathcal{P}_\mathcal{H}^{E'}} \int_F \psi_j T_h \psi_i, \quad (4.3.5)$$

para todo $i, j = 1, \dots, N$. Así, la suma en torno a este debe ser cero (cuando $\mathcal{P}_\mathcal{H}^F \cap \mathcal{P}_\mathcal{H}^{E'} = \emptyset$), solo tenemos un elemento (esto es cuando F se encuentra en la frontera de Ω) o compuesto por dos elementos. Como en la implementación de un método de elementos finitos clásicos, se propone para la construcción de (4.3.5) a través de la contribuciones elemento por elemento con respecto a la partición $\mathcal{P}_\mathcal{H}$,

por lo tanto, para cada $K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}, F, F' \subset \partial K, k, m = 1, \dots, \ell + 1$:

$$\int_F \phi_k T_h \phi_m \xrightarrow{\text{Contribuye a}} \langle \psi_{i(k,F)}, \overline{T_h \phi_{i(m,F')}} \rangle_{\partial \mathcal{P}_{\mathcal{H}}}, \quad (4.3.6)$$

donde el mapeo $i : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ fue introducido en (4.3.2). Similarmente, se obtiene

$$\int_F \phi_k \hat{T}_h f \xrightarrow{\text{Contribuye a}} \langle \psi_{i(k,F)}, \overline{\hat{T}_h f} \rangle_{\partial \mathcal{P}_{\mathcal{H}}}, \quad (4.3.7)$$

$$\int_F \phi_k \tilde{T}_h g \xrightarrow{\text{Contribuye a}} \langle \psi_{i(k,F)}, \overline{\tilde{T}_h g} \rangle_{\partial \mathcal{P}_{\mathcal{H}}}. \quad (4.3.8)$$

Lo único que resta explicar del algoritmo de MH es cómo los términos $T_h \phi_m$, $\hat{T}_h f$ y $\tilde{T}_h g$ son calculados en cada $K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}$. Sea $\{\xi_1, \dots, \xi_{N_K}\}$ una base de $V_h(K)$. Del problema variacional discreto podemos ver que para todo $i = 1, \dots, N$, $T_h \psi_i$ se pueden reescribir como $T_h \psi_i = \sum_{k=1}^{N_K} t_k^{(i)} \xi_k$ donde $(t_1^{(i)}, \dots, t_{N_K}^{(i)}) \in \mathbb{R}^{N_K}$ resuelven el siguiente sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} a_K(\xi_1, \xi_1) & \cdots & a_K(\xi_N, \xi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_K(\xi_1, \xi_N) & \cdots & a_K(\xi_N, \xi_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1^{(i)} \\ \vdots \\ t_{N_K}^{(i)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \int_F \psi_i \xi_1 \\ \vdots \\ \int_F \psi_i \xi_N \end{pmatrix}, \quad (4.3.9)$$

donde $F \in \mathcal{E}_H$ es el único elemento contenido en el soporte de ψ_i . Similarmente, de (4.2.19) se obtiene, para todo $i = 1, \dots, N$, $\hat{T}_h f|_K = \sum_{k=1}^{N_K} f_k^{(i)} \xi_k$ resolviendo:

$$\begin{pmatrix} a_K(\xi_1, \xi_1) & \cdots & a_K(\xi_N, \xi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_K(\xi_1, \xi_N) & \cdots & a_K(\xi_N, \xi_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, \xi_1)_K \\ \vdots \\ (f, \xi_N)_K \end{pmatrix}, \quad (4.3.10)$$

similarmente, de (4.2.20) para todo $i = 1, \dots, N$, se obtiene $\tilde{T}_h g|_K = \sum_{k=1}^{N_K} g_k^{(i)} \xi_k$ resolviendo:

$$\begin{pmatrix} a_K(\xi_1, \xi_1) & \cdots & a_K(\xi_N, \xi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_K(\xi_1, \xi_N) & \cdots & a_K(\xi_N, \xi_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (g, \xi_1)_{\partial K \cap \Gamma_A} \\ \vdots \\ (g, \xi_N)_{\partial K \cap \Gamma_A} \end{pmatrix}, \quad (4.3.11)$$

donde $\partial K \cap \Gamma_A \neq \emptyset$.

Finalmente, notemos que luego de resolver los sistemas lineales (4.3.9), (4.3.10) y

(4.3.11), la parte derecha de (4.3.9) nos entrega una forma fácil de poder calcular las contribuciones de (4.3.6), (4.3.7) y (4.3.8) para construir (4.3.3) a través de productos matriciales-vectoriales

$$\int_F \psi_i T_h \psi_j = \sum_{k=1}^{N_K} t_k^{(j)} \int_F \psi_i \xi_k, \text{ para todo } i, j = 1, \dots, N, \quad (4.3.12)$$

$$\int_F \psi_i \hat{T}_h f = \sum_{k=1}^{N_K} f_k \int_F \psi_i \xi_k, \text{ para todo } i = 1, \dots, N, \quad (4.3.13)$$

$$\int_F \psi_i \tilde{T}_h g = \sum_{k=1}^{N_K} g_k \int_F \psi_i \xi_k, \text{ para todo } i = 1, \dots, N. \quad (4.3.14)$$

El siguiente algoritmo resume los pasos principales para construir la solución del método MH.

Algorithm 4.1 Calcular la solución de MH

- 1: **for** $K \in \mathcal{P}_H$ **do**
 - 2: Construir el lado izquierdo de \mathbb{A} en (4.3.9);
 - 3: Construir el lado izquierdo de b_f en (4.3.10);
 - 4: **if** $\partial K \cap \Gamma_A \neq \emptyset$ **then**
 - 5: Construir el lado derecho b_g de (4.3.11);
 - 6: **end if**
 - 7: **for** $F \in \partial K$ **do**
 - 8: **for** $j = 1, \dots, l + 1$ **do**
 - 9: Construir la j -ésima columna del lado derecho de $\mathbb{B}_K(:, j)$ en (4.3.9)
 - 10: **end for**
 - 11: **end for**
 - 12: Resolver $\mathbb{A} * [\mathbb{E}_K f_K + g_{\partial K \cap \Gamma_A}] = [\mathbb{B}_K + \mathbf{b}_f + \mathbf{b}_g]$; (ver (4.3.9), (4.3.10) y (4.3.11)),
 - 13: $-\mathbb{E}_K^T * \mathbb{B}_K \xrightarrow{\text{Contribuye a}} \mathbb{M}$; (lado izquierdo de (4.3.3), además (4.3.6) y (4.3.12))
 - 14: $(\mathbf{g}_{\partial K \cap \Gamma_A}^T + \mathbf{f}_K^T) * \mathbb{B}_K \xrightarrow{\text{Contribuye a}} \mathbf{L}$; (lado izquierdo de (4.3.3), además (4.3.7), (4.3.8) y (4.3.12))
 - 15: **end for**
 - 16: Resolver $\mathbb{M} * \mathbf{V} = \mathbf{L}$;
 - 17: **for** $K \in \mathcal{P}_H$ **do**
 - 18: Extraer \mathbf{V}_K de \mathbf{V} ; (coeficientes relacionados a K)
 - 19: $\mathbf{u}_K = \overline{\mathbf{V}_K^T} * \mathbb{E}_K + \mathbf{g}_{\partial K \cap \Gamma_A} + \mathbf{f}_K$
 - 20: **end for**
-

Observación 4.3.1. *El Método Híbrido Mixto Multiescala: La formulación del Método Híbrido Mixto Multiescala (MHM) presentada en [10] está bien definida, bajo la suposición de que la partición \mathcal{P}_H es suficientemente refinada, y podemos controlar la expresión $\omega \mathcal{H}$. Además, se establece que el problema puede estar bien definido, incluso si el término $\omega \mathcal{H}$ no está controlado. En este caso, se tienen*

dos escenarios. En el primer caso, los problemas locales asociados a los bordes Γ_A están bien definidos ya que nos encontramos en el caso de un problema de Helmholtz con condiciones de absorción. Por otro lado, los elementos interiores ($\partial K \cap \Gamma_A = \emptyset$) presentan gran complejidad de análisis, esto debido a la existencia de un conjunto discreto de frecuencias, que impiden que los problemas estén bien definidos. Este conjunto de frecuencias corresponden a los valores propios $\tilde{\omega}^2$ que satisfacen la siguiente relación:

$$(\rho^{-1} \nabla u, \nabla v)_K = \tilde{\omega}^2 (\kappa^{-1} u, v)_K.$$

La dificultad previamente enunciada se soluciona en el nuevo método híbrido (MH) desarrollado a lo largo de este trabajo, gracias a la adición del término de borde $-i \langle \zeta(u), \bar{v} \rangle_{\partial K}$, el cual funciona como una condición de Robin para los problemas locales. Así, como se demostró en la sección 4.2, se estableció que tanto los problemas locales como el problema global están bien definidos, independientemente del valor y/o de la relación que se tenga entre ω y \mathcal{H} .

Capítulo 5

Experimentos Computacionales

En esta sección, presentamos experimentos numéricos para ilustrar los principales resultados del nuevo método MH. Definiremos a Ω como el cuadrado unitario $(0, 1)^2$, como dominio del problema (3.1.3). Usaremos mallas cartesianas compuestas por elementos cuadrados; además, de una partición compuesta por polígonos en forma de L. Para asegurar la precisión de la solución aproximada por los problemas locales, hemos considerado $k = \ell + 2$. Por lo tanto, la convergencia siempre se medirá con respecto al orden de aproximación para Λ_H , ℓ .

5.1. Análisis de Convergencia

El siguiente experimento tiene el objetivo de verificar los resultados expuestos en el Capítulo 3. Consideramos el siguiente problema: Encontrar u tal que

$$\begin{cases} -\omega^2 u - \Delta u = 0, & \text{en } \Omega \\ \nabla u \cdot \mathbf{n}^{\partial\Omega} - i\omega u = g, & \text{en } \partial\Omega \end{cases}, \quad (5.1.1)$$

donde $g \in L^2(\partial\Omega)$ es elegido de forma que $u = J_0(\omega |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) + i Y_0(\omega |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$, donde J_0 y Y_0 son las funciones de Bessel de primer y segundo tipo, respectivamente, $\mathbf{x} \in \Omega$, y $\mathbf{y} = (1.5, 0.5)$. Esta solución corresponde a la solución fundamental de la ecuación de Helmholtz. La Figura 5.1.1 presenta una solución discreta para $\omega = 12\pi$, utilizando una malla compuesta por cuadrados y la siguiente configuración $H = \frac{1}{8}$ y $h = \frac{1}{64}$. La Figura 5.1.2 presenta la solución discreta para $\omega = 6\pi$, utilizando una malla compuesta por polígonos en forma de L, utilizando

la siguiente configuración $H = \frac{1}{8}$ y $h = \frac{1}{64}$.

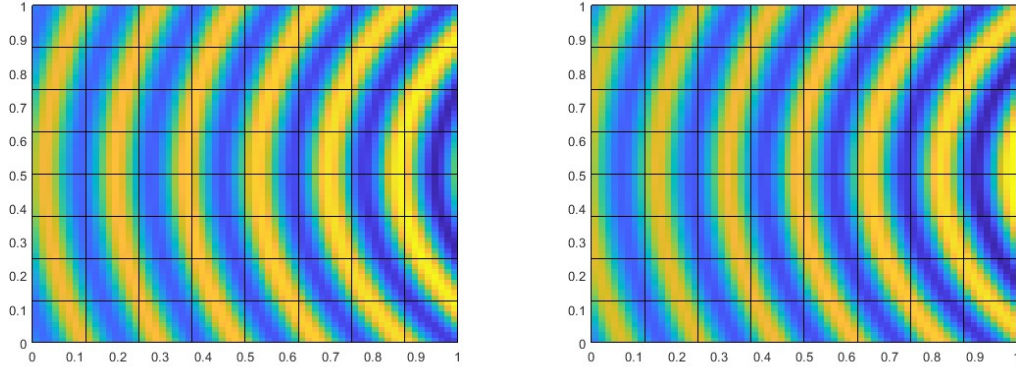


Figura 5.1.1: Solución discreta u para (5.1.1) con $\omega = 12\pi$, obtenida usando el método MH con una malla de polígonos en forma de cuadrado. Parte imaginaria (izquierda) y parte real (derecha).

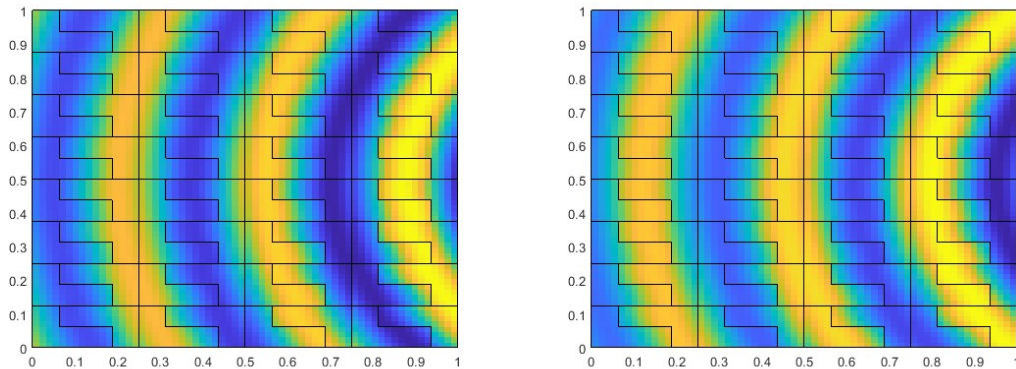


Figura 5.1.2: Solución discreta u para (5.1.1) con $\omega = 6\pi$, obtenida usando el método MH con una malla de polígonos en forma de L. Parte imaginaria (izquierda) y parte real (derecha).

La primera prueba de convergencia se realiza utilizando ambas formas de malla (cuadrada y en forma de L), donde el esqueleto \mathcal{E}_H coincide con \mathcal{E} , es decir, $H = \mathcal{H}$. Como mencionamos anteriormente, elegimos $k = \ell + 2$. La Figura 5.1.3 representa la convergencia predicha por el Corolario 3.7.1.

En las figuras anteriores, podemos observar que muestran los valores óptimos de la tasa de convergencia en sus respectivos órdenes. Además, es evidente que hay efectos de dispersión-contaminación en ambas figuras cuando el valor de H no es

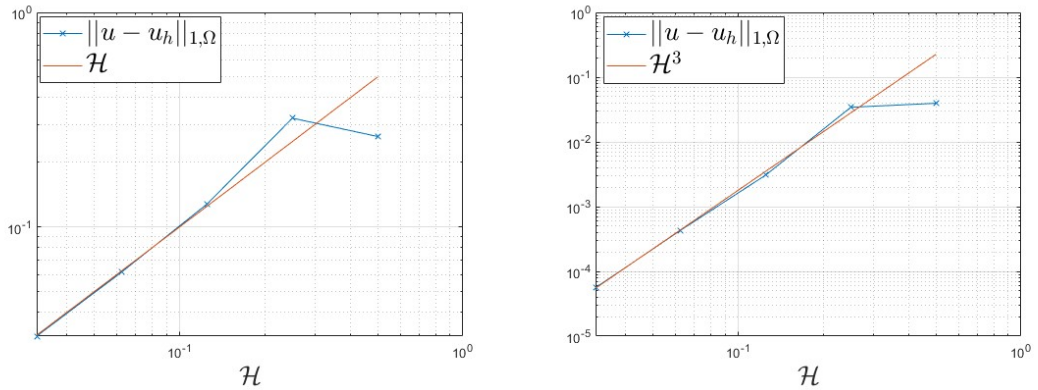


Figura 5.1.3: Curvas de convergencia del tipo mesh-based usando una malla compuesta por polígonos cuadrados, con $\ell = 0, \omega = 4\pi$, con el segundo nivel $h = \frac{1}{64}$ (izquierda) y $\ell = 2, \omega = 10\pi$, con el segundo nivel $h = \frac{1}{32}$ (derecha).

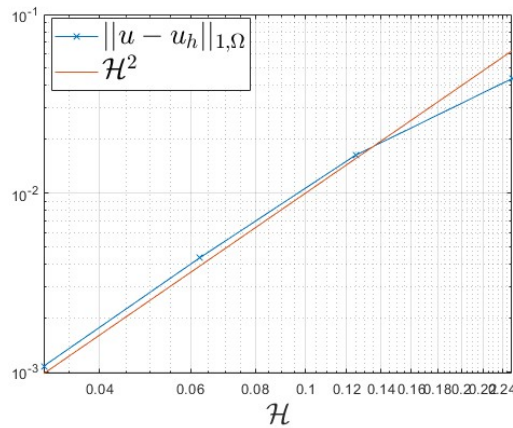


Figura 5.1.4: Curvas de convergencia del tipo mesh-based usando una malla compuesta por polígonos en forma de L, con $\ell = 1, \omega = 5\pi$, y en el segundo nivel $h = \frac{1}{64}$.

lo suficientemente pequeño. Este comportamiento nos permite asumir una relación entre ω y H como se supuso en el Capítulo 3. Además, esta relación establece una dependencia con respecto a H , donde la condición de que H sea lo suficientemente pequeño debe cumplirse para garantizar que la solución es óptima.

Para una segunda prueba de convergencia, analizamos el comportamiento con respecto a H . Hacemos esto manteniendo fija una partición específica \mathcal{P}_H y refinando \mathcal{E}_H (llamado convergencia space-based, como se menciona en [3]). La siguiente figura ilustra una súper convergencia acorde con la estimación teórica proporcionada en la Sección 3.7.

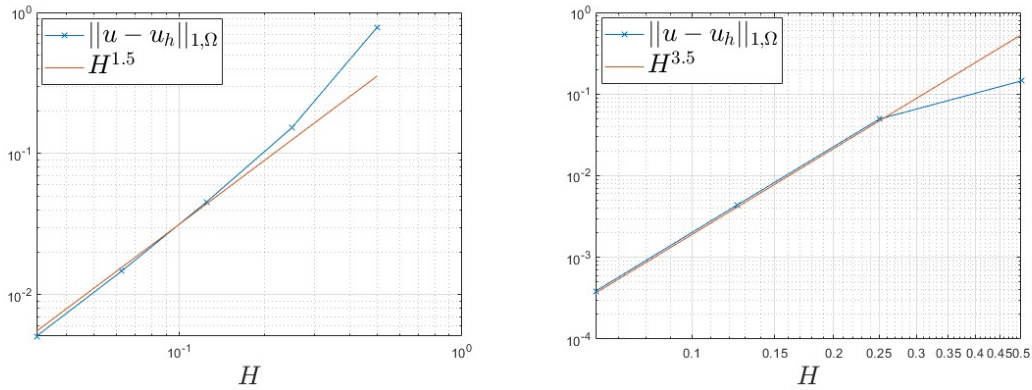


Figura 5.1.5: Curvas de convergencia space-based para $\mathcal{H} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$, $\ell = 0$, $\omega = 2\pi$ (Izquierda), con el segundo nivel $h = \frac{1}{64}$ y $\ell = 2$, $\omega = 22\pi$ (Derecha) con el segundo nivel $h = \frac{1}{32}$, experimento realizado en una partición de polígonos compuesta por cuadrados.

La Figura 5.1.5 presenta medio orden más con respecto a lo esperado. Este comportamiento fue mencionado en [2], [3] y ha sido analizado en [9].

5.2. MH vs. MHM

En la observación 4.3.1, discutimos que el método MHM impone ciertas restricciones en los problemas locales que carecen de una condición de absorción. Específicamente, existe un rango de valores de ω donde las soluciones no son únicas, cuando estas condiciones no se cumplen. En la Sección 3.3, desarrollamos un método MH mediante la introducción de una condición de Robin artificial en los problemas locales. Analizamos minuciosamente estas condiciones y demostramos que el problema está bien definido, independientemente de los valores de ω . Para este análisis, usamos una solución u diferente, que también satisface (5.1.1) pero $g(\mathbf{x})$ está elegida de tal manera que:

$$u = e^{i\omega \mathbf{d} \cdot \mathbf{x}}$$

donde $\mathbf{d} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$. Para todos los casos hemos elegido $\theta = \frac{\pi}{2}$. Las siguientes figuras representan el comportamiento de los métodos MH.

En la Figura (5.2.1), presentamos el número de condición de los sistemas locales

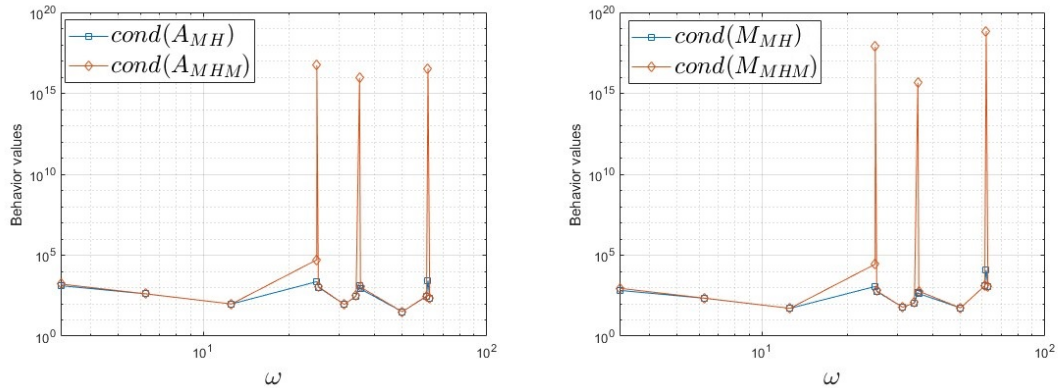


Figura 5.2.1: Número de condición de los sistemas locales (izquierda) y el sistema global (derecha) para ambos métodos. La configuración para este análisis fue $\ell = 1, k = 3, H = \frac{1}{4}, h = H$, sobre una malla compuesta por cuadrados.

y globales, mientras los valores de ω crecen. Aquí, M_{MH} y M_{MHM} corresponden a la matriz del sistema global de los métodos MH y MHM, respectivamente, además, A_{MH} y A_{MHM} corresponden a la matriz del sistema local de los métodos MH y MHM, respectivamente. Sin embargo, cuando las frecuencias son iguales a los autovalores de la ecuación de Helmholtz, el número de condición aumenta repentinamente, lo que indica que las matrices obtenidas son inconsistentes y la aproximación numérica podría ser inexacta, esto en el caso del método MHM. Por otro lado, para el método MH, el número de condición también aumenta en estos casos, pero sigue siendo más similar en magnitud a los otros valores. Para complementar este análisis, la siguiente figura presenta las curvas de error con respecto a ω . La Figura 5.2.2 nos ayuda a confirmar lo mencionado anteriormente: la mala condición del problema local y global cuando ω es igual a un autovalor de la ecuación de Helmholtz, lo que presenta un problema discreto en la estimación del error para el método MHM, este error no se ha observado en el método MH. Estos resultados confirman que las principales ideas presentadas en el Capítulo 3 para el problema híbrido (continuo y discreto) se cumplen para toda frecuencia ω .

5.3. Un Problema Multiescala

Concluimos este capítulo con un problema de aplicación. Consideramos el modelo sintético Marmousi II [24]. Tomando un dominio de propagación de 10 km de

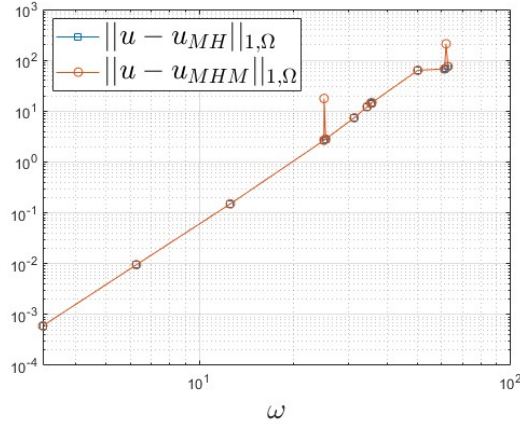


Figura 5.2.2: Curvas de error para ambos métodos con respecto a ω . La configuración usada es, $\ell = 1, k = 3, H = \frac{1}{4}, h = H$, sobre una malla compuesta por cuadrados.

largo y 2.5 km de profundidad. Del modelo podemos extraer la velocidad de onda P c_p y la densidad ρ , las cuales están dadas en la misma malla (ver Figura 5.3.1 y Figura 5.3.2). El módulo de compresión se define a partir de la velocidad de onda P y la densidad a través de la fórmula $\kappa = c_p^2 \rho$.

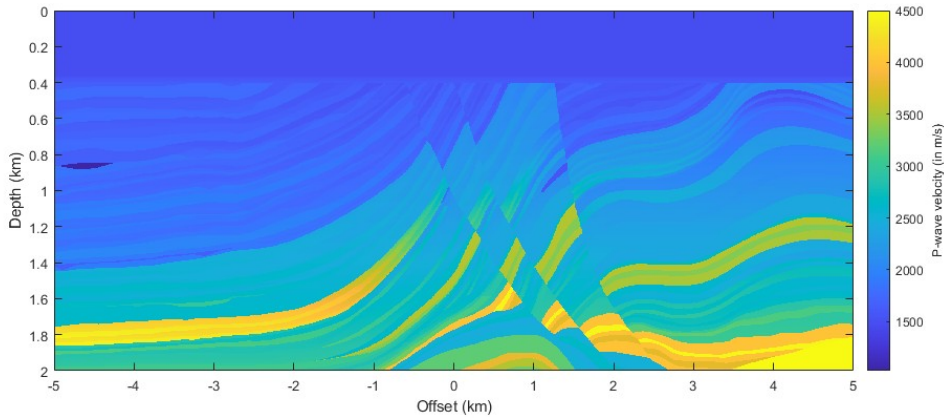


Figura 5.3.1: Marmousi II: Velocidad de onda P.

Finalmente, nos enfocamos en el problema de valor de contorno: encontrar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} -\frac{\omega^2}{\kappa}u - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla u \right) = f, & \text{en } \Omega \\ u = 0, & \text{en } \Gamma_D = [-5, 5] \times [0], \\ \frac{1}{\rho} \nabla u \cdot \mathbf{n}^{\partial\Omega} - \frac{i\omega}{\sqrt{\kappa\rho}}u = 0, & \text{en } \Gamma_A = \partial\Omega \setminus \Gamma_D \end{cases} \quad (5.3.1)$$

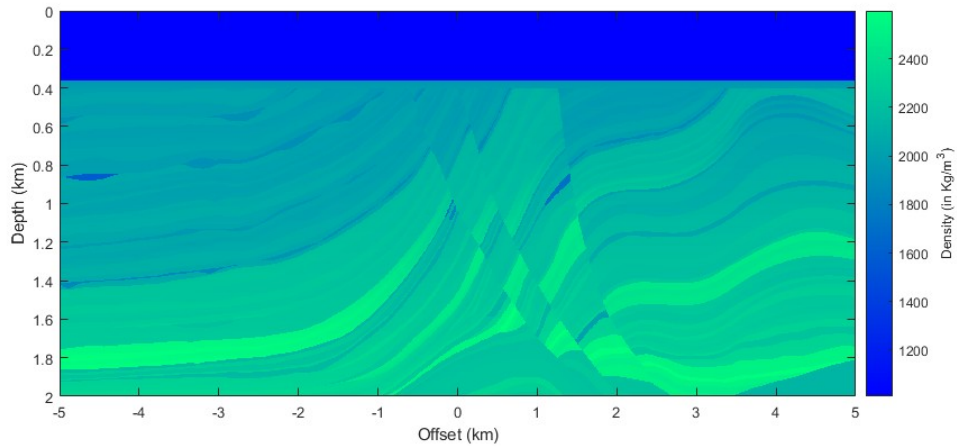


Figura 5.3.2: Marmousi II: Densidad.

con $f(\mathbf{x}) = F e^{\left(\frac{-1}{0.01}|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|\right)}$, donde F es la frecuencia (en [Hz]) y $\mathbf{x}_0 = (0.00, 2.00)$. Para este caso, dado que no hay una solución analítica, compararemos las soluciones obtenidas utilizando el método MH y el método de elementos finitos. Calculamos una solución de referencia utilizando el método de Galerkin con polinomios cuadráticos en una malla refinada (que contiene 5, 242, 880 elementos cuadriláteros uniformes). Calculamos la aproximación MH, con los espacios Λ_H y V_h utilizando $\ell = 0, k = 2, h = \frac{1}{32} \mathcal{H}, H = \frac{1}{16} \mathcal{H}$, y $\mathcal{H} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. La Figura 5.3.4 y la Figura 5.3.3 comparan el resultado de las isolíneas y los isovalores entre la solución de Galerkin y la solución MH.

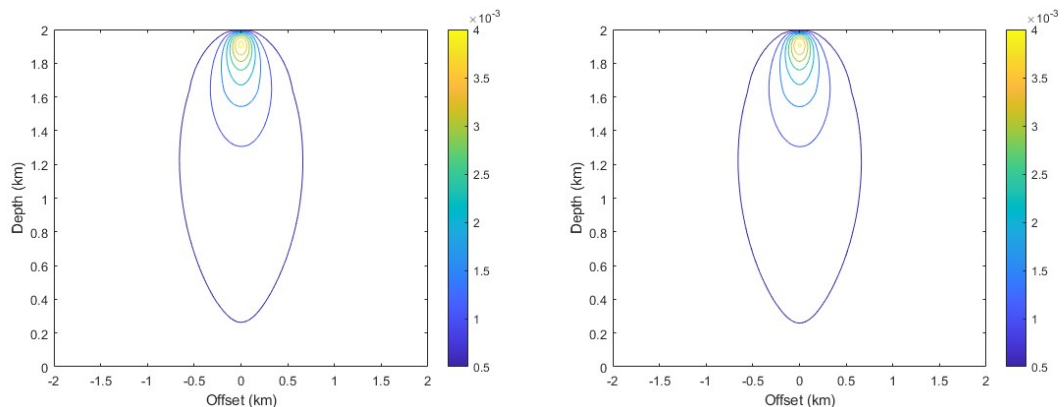


Figura 5.3.3: Isolíneas para la aproximación de Galerkin (izquierda) y la aproximación MH (derecha).

En las Figuras 5.3.6 y 5.3.7 se presenta el error entre la solución MH y la solución de referencia. Para esto, hemos utilizado enfoques mesh-based y space-based

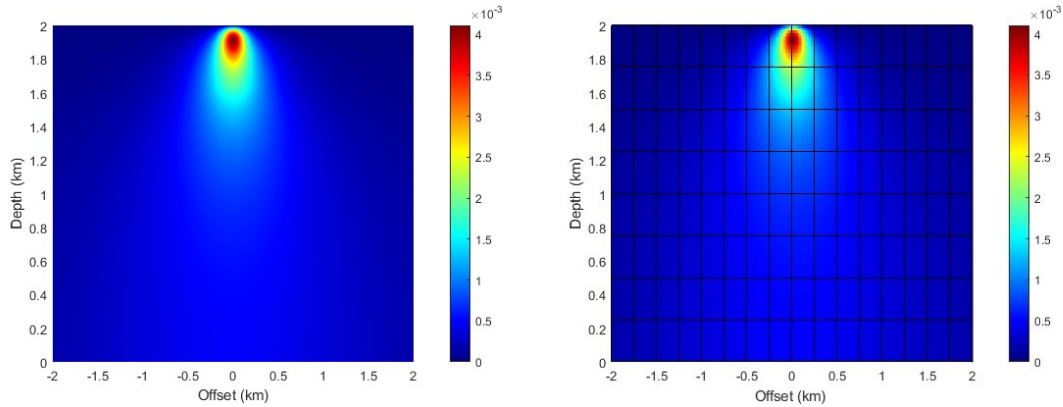


Figura 5.3.4: Isovalores para la aproximación de Galerkin (izquierda) y la aproximación MH (derecha).

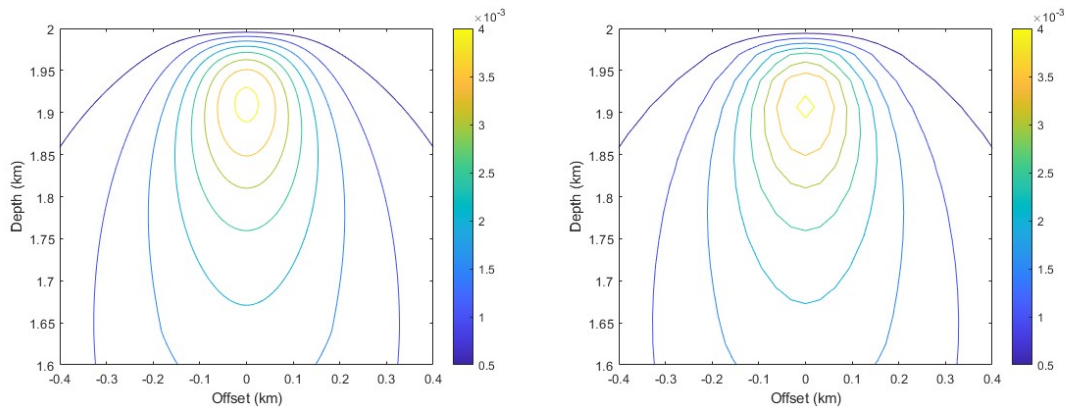


Figura 5.3.5: Zoom realizado a las figuras de 5.3.3.

($\mathcal{H} = H$). Podemos observar en la Figura 5.3.6 que el error presenta los mismos efectos de dispersión que en los experimentos anteriores. Cuando el valor de \mathcal{H} es lo suficientemente pequeño, el error disminuye con la tasa esperada $O(\mathcal{H})$. En el caso del enfoque space-based, el error disminuye a la tasa esperada $O(H^{\frac{3}{2}})$.

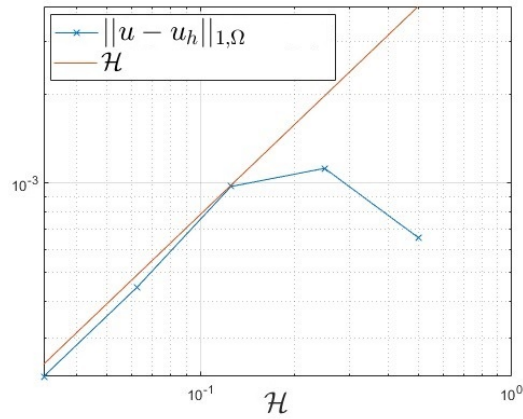


Figura 5.3.6: Curvas de convergencia mesh-based sobre una malla compuesta por cuadrados, con $F = 2$, $\omega = 2\pi F$, $\ell = 0$, con segundo nivel $h = \frac{1}{64}$.

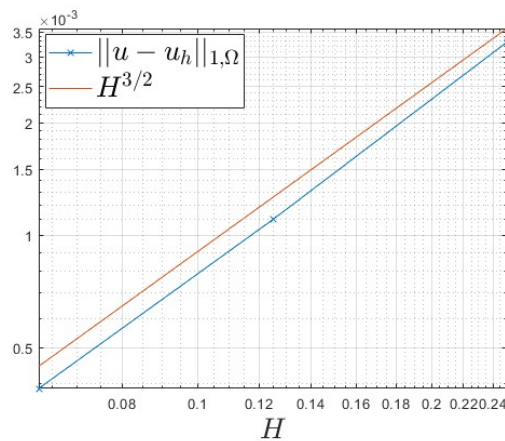


Figura 5.3.7: Curvas de convergencia space-based sobre una malla compuesta por cuadrados, con $F = 2$, $\omega = 2\pi F$, $\ell = 0$, para $\mathcal{H} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$, con segundo nivel $h = \frac{1}{64}$.

Capítulo 6

Conclusión

6.1. Conclusiones Generales

En este trabajo, hemos introducido un nuevo método multiescala basado en una nueva formulación híbrida. Como se destacó anteriormente, las principales ventajas de este método radican en el hecho de que tanto los problemas locales como globales tienen una solución única, independientemente de la relación entre la malla y la frecuencia, u otras condiciones físicas del problema. Además, hemos llevado a cabo un análisis del error usando el problema híbrido para los dos niveles de discretización. Con toda esta base teórica establecida, nuestro objetivo fue centrarnos en la implementación del método. En esta fase, hemos demostrado su precisión, siguiendo las expectativas teóricas y también su precisión en comparación con el método MHM. Hemos aplicado el método para resolver un problema práctico y comparado los resultados con los obtenidos utilizando un método de Galerkin. Finalmente, entre los trabajos y avances futuros, se encuentra la construcción generalizada para σ_0 y la obtención explícita de la constante para la condición de *inf-sup* (3.6.4) del problema híbrido discreto. Este último permitirá analizar todas las dependencias entre la frecuencia y los tamaños de malla para esta constante.

Bibliografía

- [1] M. Amara, R. Djellouli, and C. Farhat. Convergence analysis of a discontinuous galerkin method with plane waves and lagrange multipliers for the solution of helmholtz problems. *SIAM J. Numerical Analysis*, 47:1038–1066, 01 2009.
- [2] G. R. Barrenechea, A. T. A. Gomes, and D. Paredes. A multiscale hybrid method. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 46(3):A1628–A1657, 2024.
- [3] G. R. Barrenechea, F. Jaillot, D. Paredes, and F. Valentin. The multiscale hybrid mixed method in general polygonal meshes. *Numerische Mathematik*, 145(1):197–237, 2020.
- [4] J. Bey. Tetrahedral grid refinement. *Computing*, 55:355–378, 1995.
- [5] S. Brenner and R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2007.
- [6] S. C. Brenner. Poincaré–friedrichs inequalities for piecewise h1 functions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 41(1):306–324, 2003.
- [7] S. C. Brenner and L.-Y. Sung. Virtual element methods on meshes with small edges or faces. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 28(07):1291–1336, 2018.
- [8] F. Brezzi and M. Fortin. Mixed and hybrid finite element method. *Springer Series In Computational Mathematics; Vol. 15*, page 350, 01 1991.
- [9] T. Chaumont-Frelet, D. Paredes, and F. Valentin. Flux approximation on unfitted meshes and application to multiscale hybrid-mixed methods. working paper or preprint, Oct. 2022.
- [10] T. Chaumont-Frelet and F. Valentin. A multiscale hybrid-mixed method for the helmholtz equation in heterogeneous domains. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 58(2):1029–1067, 2020.
- [11] M. Crouzeix and P.-A. Raviart. Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary stokes equations i. *Revue française d’automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique*, 7(R3):33–75, 1973.

-
- [12] R. Diestel. *Graph Theory*. Springer Publishing Company, Incorporated, 5th edition, 2017.
- [13] J. Douglas, J. E. Santos, D. Sheen, and L. S. Bennethum. Frequency domain treatment of one-dimensional scalar waves. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 03:171–194, 1993.
- [14] A. Ern and J. Guermond. *Finite Elements I: Approximation and Interpolation*. Texts in Applied Mathematics. Springer International Publishing, 2021.
- [15] A. Ern and J.-L. Guermond. *Theory and practice of finite elements*, volume 159. Springer, 2004.
- [16] A. Ern and J.-L. Guermond. *Finite Elements II: Galerkin Approximation, Elliptic and Mixed PDEs*. Springer, Apr. 2021.
- [17] S. Esterhazy and J. M. Melenk. On stability of discretizations of the helmholtz equation. In *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, pages 285–324. Springer Berlin Heidelberg, aug 2011.
- [18] R. Goldman. Chapter 5 - bezier approximation and pascal’s triangle. In R. Goldman, editor, *Pyramid Algorithms*, The Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics, pages 187–306. Morgan Kaufmann, San Francisco, 2003.
- [19] A. T. A. Gomes, W. S. Pereira, and F. Valentin. The MHM Method for Linear Elasticity on Polytopal Meshes. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 08 2022. drac041.
- [20] I. Graham and S. Sauter. Stability and error analysis for the helmholtz equation with variable coefficients. *Mathematics of Computation*, 89, 03 2018.
- [21] M. Herlihy and N. Shavit. *The art of multiprocessor programming*. Morgan Kaufmann, 2008.
- [22] U. Hetmaniuk. Stability estimates for a class of helmholtz problems. *Communications in Mathematical Sciences*, 5:665–678, 2007.
- [23] F. Ihlenburg and I. Babuška. Finite element solution of the helmholtz equation with high wave number part i: The h-version of the fem. *Computers & Mathematics with Applications*, 30(9):9–37, 1995.
- [24] G. Martin, R. Wiley, and K. Marfurt. Marmousi2: An elastic upgrade for marmousi. *The Leading Edge*, 25:156–166, 02 2006.
- [25] J. Melenk and S. Sauter. Convergence analysis for finite element discretizations of the helmholtz equation with dirichlet-to-neumann boundary conditions. *Mathematics of Computation*, 79(272):1871–1914, 2010.
- [26] J. M. Melenk. *On generalized finite element methods*. PhD thesis, research directed by Dept. of Mathematics. University of Maryland at College Park, 1995.

-
- [27] P.-A. Raviart and J.-M. Thomas. Primal hybrid finite element methods for 2nd order elliptic equations. *Mathematics of computation*, 31(138):391–413, 1977.
- [28] F. J. Sayas, T. S. Brown, and M. E. Hassell. *Variational techniques for elliptic partial differential equations: Theoretical tools and advanced applications*. CRC Press, 2019.
- [29] T. Strouboulis, I. Babuška, and R. Hidajat. The generalized finite element method for helmholtz equation: Theory, computation, and open problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(37):4711–4731, 2006. John H. Argyris Memorial Issue. Part I.

Apéndice A

Lema A0.1. $\overline{H_D^1(\Omega)} = H_D^1(\Omega)$.

Demostración. Sea $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in H_D^1(\Omega)$, una sucesión convergente con respecto a la norma $\|\cdot\|_{V,\omega}$, con límite $v \in V$. Esto es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v - v_n\|_{V,\omega} = 0.$$

Por definición del espacio V , se tiene que $v \in L^2(\Omega)$. Ahora probaremos que $\nabla v \in L^2(\Omega)$. Se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 &= \int_{\Omega} |\nabla v - \nabla v_n + \nabla v_n|^2 \\ &\leq \int_{\Omega} 2 (|\nabla v - \nabla v_n|^2 + |\nabla v_n|^2) \\ &\leq 2 \int_{\Omega} |\nabla v - \nabla v_n|^2 + 2 \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 \\ &= 2 \sum_{K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}} \int_K |\nabla v - \nabla v_n|^2 + 2 \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 \\ &= 2 \sum_{K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}} \int_K |\nabla(v - v_n)|^2 + 2 \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 \\ &= 2 \sum_{K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}} |v - v_n|_{1,K}^2 + 2 |v_n|_{1,\Omega}^2 \\ &\leq 2 \|v - v_n\|_{V,\omega}^2 + 2 \|v_n\|_{1,\Omega}^2, \end{aligned}$$

donde, como $v_n \in H^1(\Omega)$, esto implica que $\|v_n\|_{1,\Omega} < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, existe $C > 0$ tal que $\|v_n\|_{1,\Omega} < C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, tomando el límite $n \rightarrow \infty$ en la última expresión y usando que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v - v_n\|_{V,\omega} = 0$, se obtiene que $\int_{\Omega} |\nabla v|^2 < \infty$, así, $\nabla v \in L^2(\Omega)$. Luego, $\|v\|_{1,\Omega} \leq \|v\|_{0,\Omega} + |v|_{1,\Omega} < \infty$,

donde se puede concluir que $v \in H^1(\Omega)$, resta probar que $v|_\Gamma = 0$. En efecto, sea el operador de trazas $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$, continuo. Finalmente

$$\gamma(v)|_{\Gamma_D} = \gamma\left(\lim_{n \rightarrow \infty} v_n\right)|_{\Gamma_D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(v_n)|_{\Gamma_D} = 0, \quad (\text{A0.1})$$

concluyendo así que $v \in H_D^1(\Omega)$. \square

Teorema A0.1. *Sea W un espacio de Hilbert con $(\cdot, \cdot)_W : W \times W \rightarrow \mathbb{C}$ un producto interior sobre W . Para cada $w' \in W'$, existe un único $u \in W$ tal que*

$$\forall v \in W, \langle w', v \rangle_{W', W} = (u, v)_W. \quad (\text{A0.2})$$

Además, la aplicación $w' \in W' \mapsto u \in W$, es un isomorfismo.

Demostración. Este teorema y su demostración se encuentran en [28, p. 467, Teorema A.28]. \square

A1. Estabilidad de $a(\cdot, \cdot)$ en V

Para analizar la estabilidad de la forma sesquilineal $a(\cdot, \cdot)$ sobre V , primero analizaremos el siguiente resultado.

Teorema A1.1. *Sea $a(\cdot, \cdot)$ la forma sesquilineal definida en (3.3.3) sobre V y sea $F \in V'$. Se define el siguiente problema: Encontrar $u \in V$ tal que*

$$a(u, v) = F(v), \text{ para todo } v \in V. \quad (\text{A1.1})$$

Si el problema A1.1 tiene solución, entonces dicha solución es única.

Demostración. Sea $K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}$, asumamos que

$$a(u, v) = 0, \text{ para todo } v \in V(K). \quad (\text{A1.2})$$

Definamos ahora $v \in V$ tal que

$$v|_K = u|_K, \text{ y } v|_{K'} = 0 \text{ para todo } K' \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}} \text{ tal que } K' \neq K.$$

Entonces, de la parte imaginaria se obtiene: Para el caso $\partial K \cap \Gamma_A \neq \emptyset$, se tiene

$$\omega \int_{\partial K \cap \Gamma_A} \frac{1}{\sqrt{\kappa \rho}} |u|^2 = 0 \Rightarrow u \Big|_{\partial K \cap \Gamma_A} = 0. \quad (\text{A1.3})$$

Para el caso $\partial K \cap \Gamma_A = \emptyset$, se tiene

$$(\boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathbf{n}^K) \int_E |u|^2 = 0 \Rightarrow u \Big|_E = 0. \quad (\text{A1.4})$$

Aquí, E representa el conjunto de aristas $F \in \mathcal{E}^0 \cap \partial K$ donde $\boldsymbol{\sigma}_0|_E \neq 0$. Utilizando la demostración de [16, Teorema 35.10], [1, Proposition 2], y [20, Teorema 2.1], podemos concluir que $u = 0$ para todo $K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}$. Así, $u = 0$, estableciendo la unicidad de la solución. \square

Teniendo en cuenta las definiciones presentadas en (3.2.4) y (3.2.5), se presentan los siguientes resultados:

Lema A1.1. *Para un elemento $K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}$ dado, y sea $u \in V(K)$. Se define $z \in V(K)$ como el único elemento, tal que*

$$a_K(w, z) = (w, \bar{u})_K, \text{ para todo } w \in V(K). \quad (\text{A1.5})$$

Luego, se satisface la siguiente estimación:

$$\|z\|_{V(K), \omega}^2 \leq \tilde{A} \frac{1}{\omega} \|u\|_{V(K), \omega}^2, \quad (\text{A1.6})$$

donde $\tilde{A} = \max\{A_1, A_2\}$ con

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\rho^*}{\omega} \sqrt{2 \kappa_* \left(\rho^* \mathcal{H}_K^2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa_* A^2}{\omega^2} \right)} + 4 \rho^* \kappa_* \left(\rho^* \mathcal{H}_K^2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa_* A^2}{\omega^2} \right) \\ &+ 2 \kappa_* \left(\rho^* \mathcal{H}_K^2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa_* A^2}{\omega^2} \right) + \frac{\sqrt{\kappa_* \rho^*}}{\omega} \sqrt{2 \kappa_* \left(\rho^* \mathcal{H}_K^2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa_* A^2}{\omega^2} \right)}, \end{aligned} \quad (\text{A1.7})$$

y además

$$\begin{aligned} |z|_{1,K}^2 &\leq \rho^* \left(\|u\|_{0,K} \|z\|_{0,K} + \frac{\omega^2}{\kappa_*} \|z\|_{0,K}^2 \right) \\ &\leq \frac{\rho^*}{\omega} \sqrt{2\kappa_* \left(\rho^* \mathcal{H}_K^2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa_* A^2}{\omega^2} \right)} \|u\|_{0,K}^2 \end{aligned} \quad (\text{A1.8})$$

$$+ 2\rho^* 2\kappa_* \left(\rho^* \mathcal{H}_K^2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa_* A^2}{\omega^2} \right) \|u\|_{0,K}^2, \quad (\text{A1.9})$$

donde A depende de ω , \mathcal{H}_K y de las variables físicas del problema.

Demostración. Para esta demostración se analizarán dos casos. Para el primer caso, vamos a asumir que nos encontramos en los elementos $K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}$ tales que $\partial K \cap \Gamma_A \neq \emptyset$. Se define $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, y $\gamma > 0$, tales que $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \cdot \mathbf{n}^K \geq \gamma$ en ∂K , además, se tiene $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \cdot \mathbf{n}^K = 0$ para todo $\partial K \setminus E$, donde $\partial K \cap \Gamma_A = E$. Además, $|(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T|_{0,\infty,K} \leq \mathcal{H}_K$ y $\nabla \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T = d$. Tomando $w = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \cdot \nabla z$, utilizando las definiciones de $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T$, z , y los resultados de [22], podemos obtener lo siguiente

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} a_K((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \cdot \nabla z, z) &\geq d \frac{\omega^2}{\kappa_*} \|z\|_{0,K}^2 + \frac{1}{\rho^*} \int_{\partial K} |\nabla z|^2 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \cdot \mathbf{n}^K \\ &\quad - \frac{d-2}{\rho_*} |z|_{1,K}^2 - \frac{\omega^2}{\kappa_*} \int_{\partial K} |z|^2 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \cdot \mathbf{n}^K \\ &\quad - 2 \operatorname{Re} \frac{i\omega}{\sqrt{\kappa_* \rho_*}} \int_E z (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \cdot \nabla z, \end{aligned}$$

esto implica

$$\begin{aligned} d \frac{\omega^2}{\kappa_*} \|z\|_{0,K}^2 + \frac{1}{\rho^*} \int_{\partial K} |\nabla z|^2 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \cdot \mathbf{n}^K &\leq 2 \operatorname{Re} a_K((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \cdot \nabla z, z) \\ &\quad + \frac{d-2}{\rho_*} |z|_{1,K}^2 \\ &\quad + \frac{\omega^2}{\kappa_*} \int_{\partial K} |z|^2 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \cdot \mathbf{n}^K \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} \frac{i\omega}{\sqrt{\kappa_* \rho_*}} \int_E z (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \cdot \nabla z, \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} d \frac{\omega^2}{\kappa_*} \|z\|_{0,K}^2 + \mathcal{H}_K \frac{\gamma}{\rho^*} \|\nabla z\|_{0,E}^2 &\leq 2 \mathcal{H}_K \|u\|_{0,K} |z|_{1,K} + \frac{d-2}{\rho_*} |z|_{1,K}^2 \\ &+ \mathcal{H}_K \frac{\omega^2}{\kappa_*} \|z\|_{0,E}^2 + 2 \mathcal{H}_K \frac{\omega}{\sqrt{\kappa_* \rho_*}} \|z\|_{0,E} \|\nabla z\|_{0,E}. \end{aligned}$$

Luego, como

$$2 \mathcal{H}_K \frac{\omega}{\sqrt{\kappa_* \rho_*}} \|z\|_{0,E} \|\nabla z\|_{0,E} \leq \frac{\omega^2 \mathcal{H}_K}{\sqrt{\kappa_* \rho_*}} \frac{\rho^*}{\gamma} \|z\|_{0,E}^2 + \mathcal{H}_K \frac{\gamma}{\rho^*} \|\nabla z\|_{0,E}^2, \quad (\text{A1.10})$$

con γ una constante positiva, se obtiene que

$$\begin{aligned} d \frac{\omega^2}{\kappa_*} \|z\|_{0,K}^2 &\leq 2 \mathcal{H}_K \|u\|_{0,K} |z|_{1,K} + \frac{d-2}{\rho_*} |z|_{1,K}^2 \\ &+ \mathcal{H}_K \frac{\omega^2}{\kappa_*} \|z\|_{0,E}^2 + \frac{\omega^2 \mathcal{H}_K}{\sqrt{\kappa_* \rho_*}} \frac{\rho^*}{\gamma} \|z\|_{0,E}^2 \\ &\leq 2 \mathcal{H}_K \|u\|_{0,K} |z|_{1,K} + \frac{d-2}{\rho_*} |z|_{1,K}^2 \\ &+ \omega^2 \mathcal{H}_K \left(\frac{1}{\kappa_*} + \frac{\rho^*}{\gamma \sqrt{\kappa_* \rho_*}} \right) \|z\|_{0,E}^2, \end{aligned}$$

donde se puede llegar a la siguiente estimación

$$2 \mathcal{H}_K \|u\|_{0,K} |z|_{1,K} \leq \rho^* \mathcal{H}_K^2 \|u\|_{0,K}^2 + \frac{1}{\rho^*} |z|_{1,K}^2, \quad (\text{A1.11})$$

con $\rho^* > 0$. Entonces, usando (A1.11) obtenemos

$$\begin{aligned} d \frac{\omega^2}{\kappa_*} \|z\|_{0,K}^2 &\leq \rho^* \mathcal{H}_K^2 \|u\|_{0,K}^2 + \frac{d-1}{\rho_*} |z|_{1,K}^2 \\ &+ \omega^2 \mathcal{H}_K \left(\frac{1}{\kappa_*} + \frac{\rho^*}{\gamma \sqrt{\kappa_* \rho_*}} \right) \|z\|_{0,E}^2. \end{aligned} \quad (\text{A1.12})$$

Utilizando la definición de z , llegamos a la siguiente estimación

$$\frac{1}{\rho^*} |z|_{1,K}^2 - \frac{\omega^2}{\kappa_*} \|z\|_{0,K}^2 \leq \operatorname{Re} a(z, z),$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^*} |z|_{1,K}^2 &\leq \operatorname{Re} a_K(z, z) + \frac{\omega^2}{\kappa_*} \|z\|_{0,K}^2 \\ &\leq \|u\|_{0,K} \|z\|_{0,K} + \frac{\omega^2}{\kappa_*} \|z\|_{0,K}^2, \end{aligned} \quad (\text{A1.13})$$

luego, combinando (A1.12) y (A1.13)

$$\frac{d-1}{\rho^*} |z|_{1,K}^2 \leq (d-1) \|u\|_{0,K} \|z\|_{0,K} + \frac{(d-1)\omega^2}{\kappa_*} \|z\|_{0,K}^2, \quad (\text{A1.14})$$

y usando (A1.12) y (A1.14), se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{\kappa_*} \|z\|_{0,K}^2 &\leq \rho^* \mathcal{H}_K^2 \|u\|_{0,K}^2 + (d-1) \|u\|_{0,K} \|z\|_{0,K} \\ &\quad + \omega^2 \mathcal{H}_K \left(\frac{1}{\kappa_*} + \frac{\rho^*}{\gamma \sqrt{\kappa_* \rho_*}} \right) \|z\|_{0,E}^2. \end{aligned} \quad (\text{A1.15})$$

Además, obtenemos

$$\frac{\omega}{\sqrt{\kappa_* \rho_*}} \|z\|_{0,E}^2 \leq -\operatorname{Im} a_K(z, z) = -\operatorname{Im}(u, z)_K \leq \|u\|_{0,K} \|z\|_{0,K}, \quad (\text{A1.16})$$

por lo tanto, combinando (A1.15) y (A1.16) se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{\kappa_*} \|z\|_{0,K}^2 &\leq \rho^* \mathcal{H}_K^2 \|u\|_{0,K}^2 + (d-1) \|u\|_{0,K} \|z\|_{0,K} \\ &\quad + \omega \mathcal{H}_K \left(\frac{1}{\kappa_*} + \frac{\rho^*}{\gamma \sqrt{\kappa_* \rho_*}} \right) \sqrt{\kappa_* \rho_*} \|u\|_{0,K} \|z\|_{0,K} \\ &\leq \rho^* \mathcal{H}_K^2 \|u\|_{0,K}^2 + A \|u\|_{0,K} \|z\|_{0,K}, \end{aligned}$$

donde $A = (d-1) + \omega \mathcal{H}_K \left(\frac{1}{\kappa_*} + \frac{\rho^*}{\gamma \sqrt{\kappa_* \rho_*}} \right) \sqrt{\kappa_* \rho_*}$. Utilizando la siguiente desigualdad

$$A \|u\|_{0,K} \|z\|_{0,K} \leq \frac{1}{2} \frac{\kappa_* A^2}{\omega^2} \|u\|_{0,K}^2 + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\kappa_*} \|z\|_{0,K}^2, \quad (\text{A1.17})$$

podemos llegar a la siguiente estimación

$$\omega^2 \|z\|_{0,K}^2 \leq 2 \kappa_* \left(\rho^* \mathcal{H}_K^2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa_* A^2}{\omega^2} \right) \|u\|_{0,K}^2. \quad (\text{A1.18})$$

Usando (A1.18), recordando (A1.13) y (A1.16), se obtiene

$$\begin{aligned}
|z|_{1,K}^2 &\leq \rho^* \left(\|u\|_{0,K} \|z\|_{0,K} + \frac{\omega^2}{\kappa_*} \|z\|_{0,K}^2 \right) \\
&\leq \frac{\rho^*}{\omega} \sqrt{2\kappa_* \left(\rho^* \mathcal{H}_K^2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa_* A^2}{\omega^2} \right)} \|u\|_{0,K}^2 \\
&\quad + 4\rho^* \kappa_* \left(\rho^* \mathcal{H}_K^2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa_* A^2}{\omega^2} \right) \|u\|_{0,K}^2, \tag{A1.19}
\end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned}
\omega \|z\|_{0,E}^2 &\leq \sqrt{\kappa_* \rho_*} \|u\|_{0,K} \|z\|_{0,K} \\
&\leq \frac{\sqrt{\kappa_* \rho_*}}{\omega} \sqrt{2\kappa_* \left(\rho^* \mathcal{H}_K^2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa_* A^2}{\omega^2} \right)} \|u\|_{0,K}^2 \tag{A1.20}
\end{aligned}$$

finalmente, usando (A1.18), (A1.19) y (A1.20) se llega a

$$\|z\|_{V(K),\omega}^2 \leq A_1 \frac{1}{\omega} \|u\|_{V(K),\omega}^2, \tag{A1.21}$$

donde

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\rho^*}{\omega} \sqrt{2\kappa_* \left(\rho^* \mathcal{H}_K^2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa_* A^2}{\omega^2} \right)} + 4\rho^* \kappa_* \left(\rho^* \mathcal{H}_K^2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa_* A^2}{\omega^2} \right) \\
&\quad + 2\kappa_* \left(\rho^* \mathcal{H}_K^2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa_* A^2}{\omega^2} \right) + \frac{\sqrt{\kappa_* \rho_*}}{\omega} \sqrt{2\kappa_* \left(\rho^* \mathcal{H}_K^2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa_* A^2}{\omega^2} \right)}. \tag{A1.22}
\end{aligned}$$

Para el otro caso, elementos $K \in \mathcal{P}_\mathcal{H}$ tales que $\partial K \cap \Gamma_A = \emptyset$, vamos a definir nuevamente $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, y $\gamma > 0$ tales que $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \cdot \mathbf{n}^K \geq \gamma$ en ∂K , además, se cumple $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \cdot \mathbf{n}^K = 0$ para todo $\partial K \setminus E$, donde $\boldsymbol{\sigma}_0|_E \cdot \mathbf{n}^E \neq 0$, $|(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T|_{0,\infty,K} \leq \mathcal{H}_K$ y $\nabla \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T = d$. Nuevamente, considerando $w = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \cdot \nabla z$ y usando la

definición de $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T$, z y los resultados de [22] se tiene:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} a_K((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \cdot \nabla z, z) &\geq d \frac{\omega^2}{\kappa_*} \|z\|_{0,K}^2 + \frac{1}{\rho_*} \int_{\partial K} |\nabla z|^2 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \cdot \mathbf{n}^K \\ &\quad - \frac{d-2}{\rho_*} |z|_{1,K}^2 \\ &\quad - \frac{\omega^2}{\kappa_*} \int_{\partial K} |z|^2 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \cdot \mathbf{n}^K \\ &\quad - 2 \operatorname{Re} i \langle \zeta ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \cdot \nabla z), z \rangle_{\partial K}, \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned} d \frac{\omega^2}{\kappa_*} \|z\|_{0,K}^2 + \frac{1}{\rho_*} \int_{\partial K} |\nabla z|^2 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \cdot \mathbf{n}^K &\leq 2 \operatorname{Re} a_K((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \cdot \nabla z, z) \\ &\quad + \frac{d-2}{\rho_*} |z|_{1,K}^2 \\ &\quad + \frac{\omega^2}{\kappa_*} \int_{\partial K} |z|^2 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \cdot \mathbf{n}^K \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} i \int_E z (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \cdot \nabla z, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} d \frac{\omega^2}{\kappa_*} \|z\|_{0,K}^2 + \mathcal{H}_K \frac{\gamma}{\rho_*} \|\nabla z\|_{0,E}^2 &\leq 2 \mathcal{H}_K \|u\|_{0,K} |z|_{1,K} + \frac{d-2}{\rho_*} |z|_{1,K}^2 \\ &\quad + \mathcal{H}_K \frac{\omega^2}{\kappa_*} \|z\|_{0,E}^2 + 2 \mathcal{H}_K \|z\|_{0,E} \|\nabla z\|_{0,E}. \end{aligned}$$

Entonces, como

$$2 \mathcal{H}_K \|z\|_{0,E} \|\nabla z\|_{0,E} \leq \mathcal{H}_K \frac{\rho_*}{\gamma} \|z\|_{0,E}^2 + \mathcal{H}_K \frac{\gamma}{\rho_*} \|\nabla z\|_{0,E}^2, \quad (\text{A1.23})$$

con γ una constante positiva, podemos obtener la siguiente estimación

$$\begin{aligned} d \frac{\omega^2}{\kappa_*} \|z\|_{0,K}^2 &\leq \rho_* \mathcal{H}_K^2 \|u\|_{0,K}^2 + \frac{d-1}{\rho_*} |z|_{1,K}^2 \\ &\quad + \left(\frac{\omega^2 \mathcal{H}_K}{\kappa_*} + \frac{\mathcal{H}_K \rho_*}{\gamma} \right) \|z\|_{0,E}^2. \end{aligned} \quad (\text{A1.24})$$

Teniendo (A1.13), se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{\kappa_*} \|z\|_{0,K}^2 &\leq \rho^* \mathcal{H}_K^2 \|u\|_{0,K}^2 + (d-1) \|u\|_{0,K} \|z\|_{0,K} \\ &\quad + \mathcal{H}_K \left(\frac{\omega^2}{\kappa_*} + \frac{\rho^*}{\gamma} \right) \|z\|_{0,E}^2, \end{aligned} \quad (\text{A1.25})$$

además, se tiene

$$\|z\|_{0,E}^2 \leq |\operatorname{Im} a_K(z, z)| = |\operatorname{Im}(u, z)_K| \leq \|u\|_{0,K} \|z\|_{0,K}, \quad (\text{A1.26})$$

por lo tanto, de (A1.13) y (A1.26) llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{\kappa_*} \|z\|_{0,K}^2 &\leq \rho^* \mathcal{H}_K^2 \|u\|_{0,K}^2 + (d-1) \|u\|_{0,K} \|z\|_{0,K} \\ &\quad + \mathcal{H}_K \left(\frac{\omega^2}{\kappa_*} + \frac{\rho^*}{\gamma} \right) \|u\|_{0,K} \|z\|_{0,K} \\ &\leq \rho^* \mathcal{H}_K^2 \|u\|_{0,K}^2 + A \|u\|_{0,K} \|z\|_{0,K}, \end{aligned}$$

donde $A = (d-1) + \mathcal{H}_K \left(\frac{\omega^2}{\kappa_*} + \frac{\rho^*}{\gamma} \right)$. Entonces, usando (A1.17), podemos obtener

$$\omega^2 \|z\|_{0,K}^2 \leq 2 \kappa_* \left(\rho^* \mathcal{H}_K^2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa_* A^2}{\omega^2} \right) \|u\|_{0,K}^2. \quad (\text{A1.27})$$

Además, se tiene

$$\begin{aligned} |z|_{1,K}^2 &\leq \rho^* \left(\|u\|_{0,K} \|z\|_{0,K} + \frac{\omega^2}{\kappa_*} \|z\|_{0,K}^2 \right) \\ &\leq \frac{\rho^*}{\omega} \sqrt{2 \kappa_* \left(\rho^* \mathcal{H}_K^2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa_* A^2}{\omega^2} \right)} \|u\|_{0,K}^2 \end{aligned} \quad (\text{A1.28})$$

$$+ 2 \rho^* 2 \kappa_* \left(\rho^* \mathcal{H}_K^2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa_* A^2}{\omega^2} \right) \|u\|_{0,K}^2. \quad (\text{A1.29})$$

De (A1.27) y (A1.28), llegamos a

$$\|z\|_{V(K),\omega}^2 \leq A_2 \frac{1}{\omega} \|u\|_{V(K),\omega}^2, \quad (\text{A1.30})$$

donde

$$A_2 = \frac{\rho^*}{\omega} \sqrt{2 \kappa_* \left(\rho^* \mathcal{H}_K^2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa_* A^2}{\omega^2} \right) + 4 \rho^* \kappa_* \left(\rho^* \mathcal{H}_K^2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa_* A^2}{\omega^2} \right)} + 2 \kappa_* \left(\rho^* \mathcal{H}_K^2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa_* A^2}{\omega^2} \right). \quad (\text{A1.31})$$

Finalmente, se tiene

$$\|z\|_{V(K),\omega}^2 \leq \tilde{A} \frac{1}{\omega} \|u\|_{V(K),\omega}^2, \quad (\text{A1.32})$$

donde $\tilde{A} = \max\{A_1, A_2\}$. □

Con este resultado podemos establecer el siguiente teorema.

Teorema A1.2. *Sea $u, v \in V$, se tiene la siguiente condición inf-sup :*

$$\inf_{u \in V} \sup_{v \in V} \frac{|a(u, v)|}{\|u\|_{V,\omega} \|v\|_{V,\omega}} \geq \frac{\tilde{C}}{2 \left(1 + \sqrt{\tilde{A}} \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{\kappa_{**}}\right)}, \quad (\text{A1.33})$$

donde $\tilde{C} > 0$ no depende de ninguna partición o de ω , y \tilde{A} viene del Lema A1.1.

Demostración. Sea $u, z \in V$, se define

$$v := \begin{cases} (1+i)u + 2 \frac{\omega^2}{\kappa_*} z, & \text{para todo } K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}, \text{ tal que } \partial K \cap \Gamma_A \neq \emptyset \\ u + 2 \frac{\omega^2}{\kappa_*} z, & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad (\text{A1.34})$$

donde z es la solución del siguiente problema adjunto

$$a_K(w, z) = (w, u)_K, \text{ para todo } w \in V(K), \text{ para todo } K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}.$$

Luego, por el Lema A1.1, se tiene que existe $C > 0$, tal que

$$\|z\|_{V(K),\omega} \leq \sqrt{\tilde{A}} \frac{1}{\omega^{\frac{1}{2}}} \|u\|_{V(K),\omega}, \quad (\text{A1.35})$$

\tilde{A} viene del Lema A1.1. Ahora, para $K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}$ donde $\partial K \cap \Gamma_A \neq \emptyset$, se tiene que

$$\begin{aligned} |a_K(z, v)| &\geq \frac{1}{\rho^*} \|\nabla z\|_{0,K}^2 - \frac{\omega^2}{\kappa_*} \|z\|_{0,K}^2 + \frac{\omega}{\sqrt{\kappa_*} \rho^*} \|z\|_{0,\partial K \cap \Gamma_A}^2 \\ &\quad + 2 \frac{\omega^2}{\kappa_*} \|z\|_{0,K}^2 \\ &\geq C_1 \|z\|_{V(K),\omega}^2, \end{aligned} \tag{A1.36}$$

con $C_1 > 0$. En otro caso, para $K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}$ donde $\partial K \cap \Gamma_A = \emptyset$, se tiene

$$\begin{aligned} |a_K(z, v)| &\geq \frac{1}{\rho^*} \|\nabla z\|_{0,K}^2 - \frac{\omega^2}{\kappa_*} \|z\|_{0,K}^2 + \|z\|_{0,E}^2 \\ &\quad + \left(2 \frac{\omega^2}{\kappa_*}\right) \|u\|_{0,K}^2 \\ &\geq C_2 \|u\|_{V(K),\omega}^2, \end{aligned} \tag{A1.37}$$

con $C_2 > 0$. De (A1.35), se tiene que

$$\begin{aligned} \|v\|_{V,\omega} &\leq 2 \|u\|_{V,\omega} + 2 \frac{\omega^2}{\kappa_{**}} \|z\|_{V,\omega} \\ &\leq 2 \|u\|_{V,\omega} + 2 \frac{\omega^2}{\kappa_{**}} \sum_{K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}} \sqrt{\tilde{A}} \frac{1}{\omega^{\frac{1}{2}}} \|u\|_{V(K),\omega} \end{aligned} \tag{A1.38}$$

$$\leq 2 \left(1 + \sqrt{\tilde{A}} \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{\kappa_{**}}\right) \|u\|_{V,\omega}, \tag{A1.39}$$

donde \tilde{A} viene del Lema A1.1. Finalmente, de (A1.36), (A1.37), y (A1.39), llegamos a

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\geq \operatorname{Re} a(u, v) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}} \operatorname{Re} a_K(u, v) \\ &\geq \sum_{K \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}} C \|u\|_{V(K),\omega}^2 \\ &= C \|u\|_{V,\omega} \|u\|_{V,\omega} \\ &\geq \frac{\tilde{C}}{2 \left(1 + \sqrt{\tilde{A}} \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{\kappa_{**}}\right)} \|u\|_{V,\omega} \|v\|_{V,\omega}, \end{aligned}$$

donde $\tilde{C} > 0$ no depende de \mathcal{H} o ω , y \tilde{A} viene del Lema A1.1. \square