UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

Efecto Faraday-Cartan y propagación anómala de la polarización de ondas gravitacionales con torsión

Por: Francisco Gabriel Barriga Delgadillo

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Concepción para optar al grado académico de Magíster en Ciencias con Mención en Física

Mayo 2025
Concepción, Chile

Profesor Guía: Dr. Andres Anabalón Dupuy
Profesor Co-Guía: Dr. Fernando Izaurieta Aranda

I have at last succeeded in illuminating a magnetic curve or line of force and in magnetising a ray of light. Michael Faraday. 1845.

AGRADECIMIENTOS

Me resulta algo difícil expresar mis agradecimientos en este momento. Entre tanta gente que me brindó ánimos y apoyo cuando el trayecto parecía particularmente oscuro.

Me gustaría empezar expresando mi gratitud hacia mis profesores. En primer lugar, al profesor Fernando Izaurieta, quien en múltiples ocasiones me ayudó a sortear desafíos, desde participar en mi comision de examen de conocimientos relevantes hasta enseñarme el arte de las formas diferenciales. Pero, sobre todo, por haber aceptado trabajar conmigo y apoyarme en mi ingreso al programa de magíster en la UdeC.

Al profesor Gullermo Rubilar. Sus charlas sobre ondas gravitacionales en el año 2015 fueron un gran impulso para decidir embarcarme en el desafío de estudiar Física. No olvido cuando dijo que para comprender claramente las ecuaciones de Einstein había que entrenar 4 años como físico. Casi 10 años después, me encuentro terminando mi ciclo de postgrado y no hubo semestre en el que él no me enseñara algo nuevo.

También quisiera agradecer al profesor Julio Oliva, quien como director del programa de magíster, siempre mostró gran disposición para orientarme y brindarme su apoyo ante cualquier actividad que quisiera realizar.

Por último, agradecer al profesor Jorge Zanelli, quien me recibió en el Centro de Estudios Científicos en Valdivia y en solo unos meses me ayudó a consolidar el conocimiento adquirido durante años de carrera, así estar más preparado para la investigación.

Si bien el apoyo docente es sumamente importante en la academia, la familia es un pilar fundamental en la vida. Aunque quizás no comprendan por completo lo que uno hace, siempre nos sostienen ante la adversidad. Quiero agradecer a mi padre, Miguel Barriga, por estimular mi curiosidad y pensamiento crítico desde muy pequeño. A mi madre, Erika Delgadillo, por enseñarme que siempre debo anteponer mis valores, ayudar a quien lo necesite y nunca rendirme. También a mis hermanos por estar siempre atentos a mis actividades, especialmente a mi hermana, quien siempre fue un referente de perseverancia, determinación y disciplina, cualidades en las que fallé rotundamente, pero que ella siempre me recuerda con su ejemplo.

Pero, ¿qué sería la universidad sin nuestros amigos? Quiero agradecer a todos aquellos

que en algún momento me mostraron su apoyo y cariño. A Aníbal, quien me acompañó durante mi estancia en la escuela de Brasil; a Feña, con quien siempre pude distraerme hablando de perritos; a Trini, por las constantes pláticas sobre la vida; a Sanjay y Pablo, quienes me integraron cuando ingresé a la universidad y con quienes siempre encontrábamos motivos para reírnos cuando el semestre se tornaba difícil.

Por último, quiero agradecer a mis colegas Fabián Jofre y Pablo Navarrete, con quienes a lo largo de toda la carrera y hasta el día de hoy, discutimos sobre cada detalle que aprendemos, compartiendo el conocimiento que cada uno adquiere en sus respectivas áreas. Agradezco enormemente su apoyo durante la carrera y las innumerables discusiones que han permitido que mis limitados conocimientos en Física se pulan cada vez más. Espero que esta dinámica se mantenga en el tiempo y evolucione tarde o temprano hacia algún grupo de investigación.

Quisiera extender esta gratitud a todas las personas que no mencioné aquí, pero que siempre me demostraron admiración: conocidos del colegio, miembros de mi Tercera Compañía del Cuerpo de Bomberos de Chiguayante y mis amigos de infancia.

Por último, quisiera mencionar de forma especial el agradecimiento hacia mí mismo. Por las incontables ocasiones en las que quería rendirme y abandonarlo todo, pero encontré la fortaleza para seguir adelante y no paralizarme ante las turbulencias que presenta la vida. No fue fácil llegar hasta aquí, pero agradezco no haber perdido el rumbo en la búsqueda del conocimiento.

Resumen

En el año 2016, comenzó la medición sistemática de ondas gravitacionales con una precisión tal que su existencia se convirtió en un hecho irrefutable. En 2017, se registró por primera vez la radiación gravitacional proveniente de un sistema binario de estrellas de neutrones (GW170817), simultáneamente con su contraparte electromagnética (GRB170817A). Esta medición impone restricciones significativas en familias de teorías torsionales, refutando aquellas que predijeron una velocidad y relación de dispersión diferentes a las de la luz. En este sentido, la teoría Einstein-Cartan-Sciama-Kibble (ECSK) ha demostrado ser consistente con las observaciones actuales. Al estudiar la generalización de los operadores de onda de De Rahm y Beltrami sobre una geometría de Riemann-Cartan, encontramos que en el orden dominante de la expansión eikonal, la relación de dispersión coincide con los datos observacionales. Sin embargo, en el límite subdominante, predice una propagación anómala en la amplitud y polarización con respecto a la relatividad general. La influencia de la torsión en la amplitud ha sido calculada, descartando su medición en el futuro próximo. En esta tesis, calculamos la propagación anómala de la polarización sobre una geometría de fondo cosmológico. Observamos que solamente se propagaran los modos de Relatividad General (RG), pero su propagación presentará un comportamiento que llamamos efecto Faraday-Cartan, donde los modos de polarización oscilarán en un ángulo de rotación proporcional al parámetro de la geodésica, con un orden de magnitud de 1 grado cada 5 millones de años luz.

Keywords: Ondas gravitacionales, geometría de Riemann-Cartan, curvatura, torsión, expansión eikonal.

Abstract

In 2016, the systematic measurement of gravitational waves began with such precision that their existence became an irrefutable fact. In 2017, gravitational radiation from a binary neutron star system (GW170817) was observed for the first time, simultaneously with its electromagnetic counterpart (GRB170817A). This measurement imposes significant constraints on families of torsional theories, refuting those that predicted a speed and dispersion relation different from that of light. In this regard, the ECSK theory has shown to be consistent with current observations. By studying the generalization of the De Rahm and Beltrami wave operators on a Riemann-Cartan geometry, we find that at leading order in the eikonal expansion, the dispersion relation coincides with observational data. However, at the next order, it predicts an anomalous propagation in amplitude and polarization with respect to General Relativity. Recently, the influence of torsion on the amplitude was estimated to be extremely small, an effect inaccessible by current and near-future measurements. In this thesis, we calculate the anomalous propagation of polarization over a cosmological background geometry. We observe that the same polarization modes as in General Relativity propagate. However, its propagation will exhibit a behavior which we call the Faraday-Cartan effect, where the polarization modes will oscillate at a rotation angle proportional to the geodesic parameter, with an order of magnitude of 1 degree every 5 million light-years.

Keywords: Gravitational waves, Riemann-Cartan geometry, curvature, torsion, eikonal expansion.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Pasaron cien años desde la predicción de ondas gravitacionales (**GWs**), realizadas por Einstein en 1916, a la confirmación de las primeras mediciones de los equipos **LIGO** y **HANFORD** en 2016 [1]. Aún más revolucionario fue el evento **GW170817** medido por **LIGO/Virgo** [2], logro alcanzado en simultáneo con el estallido de rayos gamma **GRB 170817A** medido por Fermi y otros observatorios [3], evento atribuido a la colisión de un sistema binario de estrellas de neutrones. Al combinar ambos análisis, se logró establecer una cota superior, del orden de una parte en 10^{-15}, entre la velocidad de propagación de la radiación electromagnética y la gravitacional [4, 5], lo cual impone fuertes restricciones en teorías alternativas a Relatividad General (**RG**) estándar, como lo son las **teorías escalares-tensoriales** del tipo **Horndeski** [6, 7, 8, 9, 10], las cuales están destinadas a describir el sector oscuro del Universo considerando grados de libertad más allá de los métricos.

Hay muchas teorías en el contexto de la geometría de **Riemann-Cartan** que consideran a la torsión en el mismo estatus de la curvatura, como lo son la teoría **ECSK**, la cual propone al **tensor de spin** como fuente de la torsión producto de materia fermiónica, hasta acoplamientos no minimales del tipo Horndeski, entre muchas otras. En cualquier escenario, asumiendo un acoplamiento minimal entre la geometría y las partículas del modelo estándar (la ausencia de evidencia experimental para la torsión descarta un acoplamiento no-minimales [11], la torsión solo interactúa muy débilmente con fermiones [12, 13]. En este escenario la torsión se comporta como una fuente de curvatura extra.

Debido a esto se ha planteado que la **torsión** es un **candidato razonable como componente del sector oscuro** del Universo [14, 15, 16, 17]. La situación es inquietante puesto que, aunque el problema imita algunos efectos inflacionarios [18, 19, 20, 21, 22] y podría solucionar el **problema en la tensión de Hubble** [23, 24, 15], debido al acoplamiento minimal es sumamente improbable medir efectos torsionales mediante experimentos de la física de partículas en el futuro cercano. Debido a esto, debemos buscar vías diferentes para medir dichos efectos.

La presente investigación propone buscar herramientas o criterios independientes a modelos de **materia/energía oscura**. Así restringir las teorías torsionales. Las ondas gravitacionales prometen ser potenciales sondas desde donde poder encontrar criterios para restringir dichas familias de teorías. En [25, 26] ya se probó que la torsión no modifica ni la velocidad de propagación ni la relación de dispersión para una **GW**, pero sí su amplitud y polarización, donde a partir del análisis subdominante del **límite eikonal** la torsión impone una propagación anómala de la amplitud, ya sea amortiguándose o amplificándose, y de la polarización, la cual ya no se propaga paralelamente a lo largo de la dirección de propagación de una **GW**, ya que debido a la torsión tendremos cuatro nuevos modos de polarización (x,y,b,l), tres de ellos corresponden a oscilaciones de la onda a lo largo de la dirección de propagación (x,y,l).

En [27] se demostró que la propagación anómala de la amplitud es un efecto que está por debajo del umbral de detección incluso de interferómetros futuros como **LISA**. No obstante, aún está abierta la posibilidad de explorar los escenarios en que la propagación anómala de la polarización pueda ser medida. El punto no es trivial puesto que encontrar efectos torsionales en la polarización cambia por completo el estudio y la búsqueda de un **fondo cósmico de ondas gravitacionales** (**GWB**)[28].

En general, el procedimiento habitual para tratar la propagación de perturbaciones en la geometría **RC** ha sido estudiar perturbaciones del **vielbein** e^a y la conexión de spin ω^{ab} en las ecuaciones de movimiento para teorías particulares, lo cual no permite estudiar la propagación anómala de la polarización, siendo éste nuestro principal punto de interés. Por lo tanto, como se hizo en [27], para llegar a la información en la cual estamos interesados debemos hacerlo mediante operadores de onda generalizados y su límite eikonal en la geometría **RC**.

En la siguiente seccion, introduciremos a los lectores no familiarizados con la gravedad presentando conceptos básicos de tensores, lo cual nos permitirá construir la acción de Einstein-Hilbert para la Relatividad General (**RG**) ver apéndice A. Posteriormente, definiremos una estructura métrica y una estructura afín en el lenguaje de formas diferenciales. De esta manera, en el Capítulo 2, construiremos el lagrangiano de Einstein-Hilbert en formas diferenciales, relajando la condición de torsión nula y presentando

así las ecuaciones de campo de la teoría **ECSK** junto con elementos básicos de torsión. Posteriormente, en el Capítulo 3, revisaremos las perturbaciones a los grados de libertad tanto en la RG estándar como en la teoría ECSK. En esta última teoría, parametrizaremos los grados de libertad afines en función de los grados métricos y de los operadores diferenciales sobre una geometría de Riemann-Cartan. Mediante el **análisis eikonal**, en el orden dominante encontraremos que la relación de dispersión, trayectoria y la velocidad de propagación de una onda gravitacional serán equivalentes a la RG estándar. Sin embargo, al analizar el orden subdominante, encontraremos que las relaciones para la propagación de la amplitud y la polarización diferirán respecto a la RG estándar.
En el Capítulo 4, analizaremos la ecuación para la propagación de la polarización en la teoría ECSK. Para ello, descompondremos la ecuación y, considerando un sistema fermiónico cuya torsión será axial, reduciremos la ecuación a su contribución axial. Luego, considerando una geometría de fondo cosmológica y otra simetría esférica, resolveremos la ecuación, obteniendo un ángulo de rotación

$$\Theta_{\mathrm{grav}}(\eta) = \int_{\eta=0}^{\eta} \mathcal{A}^0 \, \mathrm{d}\ell, \tag{1.0.1}$$

Entre los modos de polarización de RG estándar, la rotación es inducida por la contribución axial de la torsión $\mathcal{A}^\mu$ de fondo en el espacio-tiempo, que dependerá del parámetro de la geodésica η. Cuya tasa de cambio será del orden de magnitud de 1 grado cada 5 millones de años luz.
Finalmente, en el Capítulo 5, discutiremos las repercusiones de este resultado y agruparemos las conclusiones de este proyecto de investigación.

1.1. Formas diferenciales

Los griegos se percataron de que existían dos conceptos fundamentales para determinar correctamente las propiedades geométricas de un espacio: la metricidad, utilizando el compás, y la afinidad, empleando la escuadra, en lo que hoy conocemos como espacios euclidianos.
Posteriormente Descartes formuló la Geometría Analítica logrando relacionar geometría con álgebra, sentando así, tanto las bases del cálculo como las del álgebra lineal. Esto gracias a la definición de producto cartesiano $\times$ que permitió la formulación rigurosa de $\mathbb{R}^{(d)} = \mathbb{R} \underbrace{\times ... \times}_{d \text{ prductos}} \mathbb{R}$ y con esto la de **espacios vectoriales** $\mathcal{V}$, dotando a subconjuntos

$\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^{(d)}$ de las operaciones $\{+, \langle,\rangle\}$, tal que.

$$\mathcal{V} : \mathcal{V}^* \to \mathbb{K}. \tag{1.1.1}$$

Con $\mathbb{K}$ el cuerpo algebraico sobre el espacio vectorial[1]. Junto a sus respectivos espacios duales $\mathcal{V}^*$.

$$\mathcal{V}^* : \mathcal{V} \to \mathbb{K}. \tag{1.1.2}$$

Los elementos del espacio dual actúan como operadores que mapean los elementos del espacio vectorial al cuerpo algebraico sobre el cual se está trabajando. Donde $+$ es una operación binaria interna, comúnmente conocida como suma.

$$+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}. \tag{1.1.3}$$

Además $\langle,\rangle$ es una operación binaria externa, comúnmente llamada producto interno o producto escalar.

$$\langle,\rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{K}. \tag{1.1.4}$$

Entre este tipo de espacios podemos encontrar los llamados espacios métricos. Que son aquellos espacios vectoriales donde el producto escalar $\langle,\rangle = \cdot$ induce una definición de metricidad o métrica g definida por

$$g : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*, \tag{1.1.5}$$

junto a su inversa

$$g^{-1} : \mathcal{V}^* \to \mathcal{V}. \tag{1.1.6}$$

Las componentes de esta transformación definen el producto interno localmente en cada punto P de la variedad:[2]

$$g_{\mu\nu} = \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu, \tag{1.1.7}$$

[1]comúnmente son los números reales $\mathbb{R}$ o los números complejos $\mathbb{C}$.
[2]Presentaremos este concepto más adelante pero generaliza la idea de curva, superficie, etc.

por tanto una noción de distancia. La métrica posee grandes propiedades no obstante su uso más común en Física es para transformar vectores de un espacio vectorial $V^{\mu} \in \mathcal{V}$ a su dual $V_{\mu} = g_{\mu\nu} V^{\nu} \in \mathcal{V}^{*}$[3].

$$\vec{V} = V^{\mu} \vec{e}_{\mu} \Rightarrow V_{\nu} g^{\nu\mu} \vec{e}_{\mu} = V_{\nu} \bar{e}^{\nu} = \bar{X} \tag{1.1.8}$$

$$\bar{V} = V_{\nu} \vec{e}^{\nu} \Rightarrow V^{\mu} g_{\mu\nu} \bar{e}^{\nu} = V^{\mu} \vec{e}_{\mu} = \vec{V} \tag{1.1.9}$$

Esta propiedad es sumamente útil para definir una notación más compacta para el producto matricial. Ya que, los vectores de $\mathcal{V}$ son vectores columna y la métrica es el mapeo que define los vectores duales como vectores fila de forma tal que el producto matricial queda debidamente determinado.

$$\vec{V}^{\mu} \cdot \vec{V}^{\nu} = g_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu} = V_{\mu} V^{\mu} = \begin{pmatrix} V_0 & V_1 & V_2 & V_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^0 \\ V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}. \tag{1.1.10}$$

Riemann utilizó este tensor para parametrizar la metricidad, o sea, el concepto de distancia ds para espacios no necesariamente Euclideos (Espacios curvos),

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \tag{1.1.11}$$

es decir que $g_{\mu\nu}$ definirá el producto interno localmente en torno un punto P de la **Variedad d-dimensional** $P \in M^{(d)}$[4] de puntos, donde existe un conjunto de cartas $U = \{U_{\alpha}, \varphi_{\alpha}\}$.

$$M^{(d)} = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}, \tag{1.1.12}$$

Con $U_{\alpha} \subset M^{(d)}$ y φ_{α} es el mapeo $\varphi_{\alpha} : U_{\alpha} \to U'_{\alpha} \subset \mathbb{R}^{(d)}$. Aquí la noción de campos vectoriales sobre una variedad Riemaniana cambia drásticamente respecto a la que teníamos de campos vectoriales sobre una variedad Euclidea o plana. Esto es, porque en la geometría euclídea los **espacios vectoriales** $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^{(d)}$ pertenecen a una variedad plana $\mathbb{R}^{(d)}$. Los puntos $P \in \mathbb{R}^{(d)}$ como los vectores $\vec{X} \in \mathbb{R}^{(d)}$. No obstante, una variedad $M^{(d)}$ puede tener una geometría arbitraria en general no plana, puede ser una variedad

[3]En Física generalmente escojamos representaciones específicas para la base de los espacios vectoriales. Por lo cual se suele omitir la base y se trabaja únicamente con las componentes

[4]En esta sección los índices $\mu = 1, ..., d$

curva. Por tanto nuestra visualización de vectores en la variedad no funciona ya que dichos vectores no pertenecen a la variedad si no al recorrido U'_α del homeomorfismo φ_α definido en cada punto de a variedad.
Debido lo anterior, formalmente se definen las cartas coordenadas U^α como conjuntos abiertos para la vecindad de un punto P que a su vez definen el concepto de **Variedad Diferenciable**, como un espacio topológico donde en cada punto P existe localmente al menos una carta coordenada $\{U^\alpha, \varphi_\alpha\}$ donde φ_α es un **homeomorfismos** a algún subconjunto de $\mathbb{R}^{(d)}$.

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \subset M^{(d)} \rightarrow U'_\alpha \subset \mathbb{R}^d. \tag{1.1.13}$$

Además, para poder asociar vectores sobre la variedad diferenciable debemos definir dos espacios vectoriales duales entre si para cada punto $P \in M^{(d)}$. El conjunto de todos los vectores $\vec{V}$ en el punto P, **Espacio tangente** $\vec{V} \in T_pM^{(d)}$, y el conjunto de todos los co-vectores $\bar{V}$ en el punto P,**Espacio cotangente** $\bar{V} \in T^*{}_pM^{(d)}$:

$$\vec{V} = V^\mu \vec{e}_\mu \tag{1.1.14}$$

$$\bar{V} = V_\mu \bar{e}^\mu \tag{1.1.15}$$

Cuando las bases son ortonormales se satisface que:

$$\vec{e^\mu}(\vec{e}_\nu) = \vec{e}_\nu(\vec{e^\mu}) = \delta^\mu{}_\nu. \tag{1.1.16}$$

Para construir el espacio tangente debemos imaginar todas las curvas $\Phi(x)$ que intersectan al punto P. Al conjunto de todos los vectores tangentes $\vec{V} = V^\mu \partial_\mu$ a las curvas provenientes desde todas las direcciones de la variedad diferencial en el punto $P \in M^{(d)}$ corresponderán a un espacio vectorial $\vec{V} \in T_pM^{(d)}$ localmente definido para un punto P.
Esto quiere decir que dada una curva $\Phi(x)$ sobre la variedad M^d, donde existe un conjunto abierto U dotado de una carta coordenada $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$. Definiendo las coordenadas $\{x_\mu\}$ en torno a un punto P de la variedad. Cada vector $\vec{V} = V^\mu \partial_\mu$ puede ser descrito como una derivada direccional en el punto P. En la dirección tangente a $\Phi(x)$:

$$\vec{V} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \Phi \rightarrow \vec{V}(\Phi) = V^\mu \partial_\mu \Phi \tag{1.1.17}$$

donde el vector $\vec{V} = V^{\mu}\partial_{\mu}$ en un punto $P \in U \subset M^{(d)}$ será un operador diferencial en el punto P de base $\{\partial_{\mu}\}$ y componentes $\{V^{\mu} = V^{\mu}(x)\}$. Recordemos que dada una curva $\Phi(x)$:

$$\vec{V}(\Phi) = V^{\mu}\partial_{\mu}\Phi \in \mathbb{R} \tag{1.1.18}$$

Este tipo *derivada direccional* define noción usual de **dirección** y corresponde a un elemento del cuerpo algebraico. Con esto podemos definir los elementos del espacio cotangente $\bar{X} \in T^{*}{}_{p}M^{(d)}$ como el espacio vectorial dual

$$\bar{X} = \partial_{\mu}\Phi dx^{\mu}. \tag{1.1.19}$$

A partir del producto interno.

$$\langle\bar{V}|\vec{V}\rangle = \vec{V}(\Phi) \Leftrightarrow \bar{V}(\vec{V}) = \vec{V}(\bar{V}) = \vec{V}(\Phi) \in \mathbb{R} \tag{1.1.20}$$

$$\Leftrightarrow = \partial_{\mu}\Phi dx^{\mu}(V^{\nu}\partial_{\nu}) = \vec{V}(\Phi) \in \mathbb{R} \tag{1.1.21}$$

$$\Leftrightarrow = V^{\nu}\partial_{\mu}\Phi dx^{\mu}(\partial_{\nu}) = \vec{V}(\Phi) \in \mathbb{R} \tag{1.1.22}$$

Esto se cumplirá si solo si $\{\partial_{\mu}\}$ y $\{dx^{\mu}\}$ son bases duales entre si:

$$dx^{\mu}(\partial_{\nu}) = \partial_{\nu}(dx^{\mu}) = \delta^{\mu}{}_{\nu}$$

De esta forma se cumple que

$$V^{\nu}\partial_{\mu}\Phi\delta^{\mu}{}_{\nu} = V^{\mu}\partial_{\mu}\Phi = \vec{V}(\Phi) \in \mathbb{R}. \tag{1.1.23}$$

Con esto podemos escribir los vectores duales en el espacio cotangente $\bar{X} \in T^{*}{}_{p}M^{(d)}$ en general como.

$$\bar{V} = V_{\mu}dx^{\mu} \in T^{*}{}_{p}M^{(d)}. \tag{1.1.24}$$

Ahora para definir el concepto de **campos vectoriales**, **campos co-vectoriales** o de **campo tensorial** debemos recordar que existe un espacio tangente $T_{p}M^{(d)}$ para cada punto de la variedad M^{d}. Por esto el conjunto de todos los espacios tangente es conocido como **fibrado tangente**:

$$TM^{(d)} = \{(P, \vec{V}) : P \in M^{d} \wedge \vec{V} \in T_{p}M^{(d)}\}. \tag{1.1.25}$$

Con esto un **campo vectorial** será un mapeo

$$\vec{\xi} : M^{(d)} \to M^{(d)} \tag{1.1.26}$$

$$P \in M^{(d)} \to \vec{V} = \xi(P) \in T_p M^{(d)}. \tag{1.1.27}$$

lo cual corresponde a escoger un vector por cada espacio tangente o **fibra**. Por tanto un campo vectorial será un subconjunto del fibrado tangente.
Análogamente existe el **fibrado cotangente** $T^*M^{(d)}$.

$$T^*M^{(d)} = \{(P, \bar{V}) : P \in M^{(d)} \wedge \bar{V} \in T_p^*M^{(d)}\} \tag{1.1.28}$$

Sobre el cual podemos definir **campos co-vectoriales**.

$$\bar{\xi} : M^{(d)} \to T^*M^{(d)} \tag{1.1.29}$$

$$P \in M^{(d)} \to \bar{V} = \bar{\xi}(P) \in T_p^*M^{(d)}. \tag{1.1.30}$$

Estos **campos co-vectoriales** son secciones del fibrado cotangente $T^*M^{(d)}$ y al conjunto de todos estos campos se le conoce como el espacio de todas las **1-formas** sobre $M^{(d)}$, $\Omega^1(M^{(d)})$.
Recordemos que los elementos de un espacio vectorial $T_pM^{(d)}$ y sus duales $T_p^*M^{(d)}$.

$$\vec{V} = V^\mu \partial_\mu \in \mathcal{V}, \tag{1.1.31}$$

$$\bar{V} = V_\nu dx^\nu \in \mathcal{V}^*, \tag{1.1.32}$$

constituyen conjuntos de **mapeos lineales** dotando a $\mathbb{R}^{(d)}$ de las operaciones $\{+, \langle,\rangle\}$ sobre un cuerpo algebraico $\{\mathbb{R}\}$ o $\{\mathbb{C}\}$.[5] Generalizando esta idea a los **mapeo multilineales**. Tenemos que, definiendo la operación $\otimes$ conocida como **producto tensorial**.

$$T\binom{m}{n} = \mathcal{V} \underbrace{\otimes ... \otimes}_{m \text{ prductos}} \mathcal{V}^* \underbrace{\otimes ... \otimes}_{n \text{ prductos}} \mathcal{V}^* \tag{1.1.33}$$

Esta operación actúa como un producto cartesiano $\times$ dotado de múltiples propiedades matemáticas, pero destacaremos principalmente una. Los elementos del campo $\mathbb{K}$

[5] Es interesante ver como la noción clásica que teníamos de espacios vectoriales y su dual. No es más que cada variedad tiene un espacio tangente y un espacio cotangente donde pertenecen los vectores. Sucede que $\mathbb{R}^{(d)}$ es su propio espacio tangente y cotangente.

común entre los espacios $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}^*$ se pueden mover de un espacio a otro sin pérdida de generalidad. Esta propiedad dota al **espacio producto tensorial** del estatus de un **espacio vectorial**. Esto quiere decir que los elementos $T\binom{m}{n}$ serán mapeos X que tomarán elementos de $T\binom{m}{n}$ y los mapearan al campo algebraico $\mathbb{K}$.

$$X : T\binom{m}{n} \rightarrow \mathbb{K} \tag{1.1.34}$$

Podemos definir un **campo tensorial** como un tensor para cada punto de la variedad $M^{(d)}$.

Estamos frente un problema. puesto que, para nombrar y establecer relaciones entre los puntos $P \in M$ debemos etiquetarlos con las coordenadas x^μ que resulten más convenientes[6]. Dado que, en todo punto P de la intersección de dos, o más, cartas coordenadas $U_\alpha \bigcap U_\beta$, no existe una única carta coordenada, $\{x^\mu\}$ y $\{\bar{x}^\mu\}$, con las cuales podemos etiquetar el mismo punto $P = P(x^\mu) = P(\bar{x}^\mu) \in U_\alpha \bigcap U_\beta$. Estas cartas coordenadas están relacionadas mediante transformaciones invertibles

$$\bar{x}^\mu = \bar{x}^\mu(x^\mu) \tag{1.1.35}$$

y diferenciables:

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu, \qquad \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^\nu} = \delta^\mu_\nu \tag{1.1.36}$$

En palabras simples estamos diciendo que el vector posición no es invariante bajo transformaciones generales de coordenadas. Pero las magnitudes físicas deben ser independientes de la elección de coordenadas utilizadas, como por ejemplo es el caso del vector $\vec{V} = V^\mu \partial_\mu$ entre dos puntos $P(x^\mu)$ y $P(x^\mu + \epsilon V^\mu)$ desplazados una distancia infinitesimal $dx^\mu = \epsilon V^\mu$. Donde $V^\mu = V^\mu(x^\lambda)$ y ϵ un parámetro infinitesimal:

$$\vec{V}(x^\lambda) = \frac{1}{\epsilon}\lim_{\epsilon\to 0}\left[\phi(x^\lambda + \epsilon V^\lambda) - \phi(x^\lambda)\right] = V^\mu \partial_\mu \phi(x^\lambda) \tag{1.1.37}$$

Este objeto es invariante bajo transformaciones de coordenadas $\bar{x}^\mu = \bar{x}^\mu(x^\lambda)$,

$$V^\mu(\bar{x}^\lambda) = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu(x^\lambda) \tag{1.1.38}$$

[6]por que esta elección no es única

donde si bien las componentes del vector cambian en un factor proporcional a la matriz jacobiana de la transformación $\frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$. El vector V^{μ} entre dos puntos es invariante bajo este conjunto de transformaciones.
En general a los elementos que satisfacen esta propiedad se les denomina tensores $T^{\mu_1 ... \mu_m}{}_{\nu_1 ... \nu_n} \in T\binom{m}{n}$ cuya ley de transformación en general es

$$T^{m_1 ... m_r}{}_{n_1 ... n_s}(P) = \frac{\partial \bar{x}^{m_1}}{\partial x^{k_1}} ... \frac{\partial \bar{x}^{m_r}}{\partial x^{k_r}} \frac{\partial x^{l_1}}{\partial \bar{x}^{n_1}} ... \frac{\partial x^{l_s}}{\partial \bar{x}^{n_s}} T^{k_1 ... k_r} l_1 ... l_s(P). \tag{1.1.39}$$

Los tensores son mapeos multilineales independientes de las coordenadas de los puntos $P \in M^{(d)}$.
Hemos omitido introducir escalares $\Phi(x^{\mu})$, ya que son los elementos más comunes y su ley de transformación es trivial al ser elementos que de por si no dependen de un sistema coordenado.

$$\Phi(\bar{x^{\mu}}) = \Phi(x^{\mu}). \tag{1.1.40}$$

Ahora debemos preguntarnos cómo transformará la derivada de un tensor. Para esto consideremos los tensores más simples no triviales. Un vector covariante V_{ν}, cuya derivada $\partial_{\mu} V_{\nu}$ transforma según,

$$\bar{\partial}_{\mu} \bar{V}_{\nu} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{\nu}} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^{\mu}} \partial_l V_k + \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial \bar{x}^{\mu} \partial \bar{x}^{\nu}} V_{\sigma}, \tag{1.1.41}$$

donde es evidente que la derivada parcial sobre un vector y en general sobre un tensor no transforma como un tensor. Introduciremos un campo que compensará la contribución no tensorial de la derivada parcial llamado **conexión**, cuya ley de transformación es

$$\bar{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \bar{x}^{\nu}} \frac{\partial \bar{x}^{\lambda}}{\partial x^{\gamma}} \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} + \frac{\partial \bar{x}^{\lambda}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial^2 x^{\gamma}}{\partial \bar{x}^{\mu} \partial \bar{x}^{\nu}}. \tag{1.1.42}$$

Con esto es fácil mostrar que la conexión aplicada sobre un tensor transformara homogéneamente.

$$\bar{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\nu} \bar{V}_{\lambda} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \bar{x}^{\nu}} \Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta} V_{\sigma} + \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial \bar{x}^{\mu} \partial \bar{x}^{\nu}} V_{\sigma}. \tag{1.1.43}$$

Directamente se puede notar que el término inhomogéneo de la transformación de la conexión aplicada sobre un tensor es el mismo término inhomogéno de la derivada parcial aplicada sobre un tensor. Por lo tanto la diferencia entre la derivada parcial y la conexión aplicadas sobre un tensor transformará como tensor.

$$\bar{\partial}_\mu \bar{A}_\nu - \bar{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}\bar{A}_\lambda = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^\nu}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^\mu}\partial_l A_k - \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}A_\sigma. \tag{1.1.44}$$

Renombrando los índices contraídos podemos escribir esto como la transformación de un tensor definido por.

$$\bar{\partial}_\mu \bar{V}_\nu - \bar{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}\bar{V}_\lambda = \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu}\partial_\alpha V_\beta - \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}V_\sigma \tag{1.1.45}$$

$$= \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu}\left(\partial_\alpha V_\beta - \Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}V_\sigma\right). \tag{1.1.46}$$

Este tensor es conocido como la **derivada covariante** aplicada sobre un vector $\nabla\bar{V} = (\partial_\mu V_\nu - \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}V_\sigma)dx^\mu \otimes dx^\nu$.

$$\nabla_\mu V_\nu = \left(\partial_\mu V_\nu - \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}V_\sigma\right) \tag{1.1.47}$$

Esta idea es fácilmente generalizable para un tensor de rango arbitrario $T^{a_1\ldots a_n}{}_{b_1\ldots b_n}$.

$$\nabla_\mu T^{a_1\ldots a_n}{}_{b_1\ldots b_n} = \partial_\mu T^{a_1\ldots a_n}{}_{b_1\ldots b_n} + \Gamma^{a_1}{}_{\mu\nu}T^{\nu\ldots a_n}{}_{b_1\ldots b_n} + \ldots \tag{1.1.48}$$

$$+ \Gamma^{a_n}{}_{\mu\nu}T^{a_1\ldots\nu}{}_{b_1\ldots b_n} - \Gamma^\nu{}_{\mu b_1}T^{a_1\ldots a_n}{}_{\nu\ldots b_n} - \ldots - \Gamma^\nu{}_{\mu b_n}T^{a_1\ldots a_n}{}_{b_1\ldots\nu} \tag{1.1.49}$$

La derivada covariante extiende la noción de operador diferencial para tensores de rango arbitrario en la base coordenada, asegurando la independencia de la base coordenada escogida. Ella satisface múltiples propiedades útiles, destacaremos dos. Primero satisface la **regla de Leibniz**, lo cual nos asegura que es a un operador diferencial y segundo la derivada covariante de un escalar coincide con una derivada parcial:

$$\nabla_\mu \phi(x^\lambda) = \partial_\mu \phi(x^\lambda) \tag{1.1.50}$$

Sabemos que para derivadas parciales se cumple que

$$\left[\partial_\mu, \partial_\nu\right] = 0. \tag{1.1.51}$$

No obstante cuando conmutamos derivadas covariantes aplicadas sobre un vector V^ρ se cumplirá la siguiente regla de conmutación:

$$\left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right] V^\rho = \underbrace{\left[\partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma}\right]}_{R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}} V^\sigma - \underbrace{\left[\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}\right]}_{T^\lambda{}_{\mu\nu}} \nabla_\lambda V^\sigma \tag{1.1.52}$$

$$= \left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right] V^\rho = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} V^\sigma - T^\lambda{}_{\mu\nu} \nabla_\lambda V^\rho \tag{1.1.53}$$

Esta relación de conmutación podemos interpretarla como el cambio de un vector a lo largo de un transporte paralelo sobre una curva cerrada tomando dos direcciones distintas ∂_μ y ∂_ν. El primer término $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}V^\sigma$ parametriza la rotación del vector $\vec{V}$ a lo largo del transporte paralelo y el término $T^\lambda{}_{\mu\nu}V^\rho$ codifica la translación del vector $\vec{V}$ luego del transporte paralelo. Aquí $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ es conocido como el tensor de curvatura y $T^\lambda{}_{\mu\nu}$ es conocido como el tensor de torsión. Definidos por:

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma}, \tag{1.1.54}$$

$$T^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}. \tag{1.1.55}$$

Tanto la noción de derivada covariante como las de curvatura y torsión quedan parametrizadas por el campo $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$, conocido como **conexión afín**,

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \mathring{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu} + \kappa^\lambda{}_{\mu\nu} \tag{1.1.56}$$

donde $\mathring{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}$ será la **conexión de Levi-Civita**:

$$\mathring{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}\right). \tag{1.1.57}$$

Además, se introduce el tensor antisimétrico $\kappa^\lambda{}_{\mu\nu}$, conocido como **contorsión**, el cual es totalmente independiente de la métrica. Estos tensores codifican completamente la geometría de los espacios y son, precisamente, el tipo de elementos con los cuales podemos comenzar a pensar en construir un principio de acción para la gravedad.

Aquí aparece el principal aspecto que diferencia entre la geometría de Riemann y la geometría de Riemann-Cartan. Esto debido a que la geometría Riemaniana está libre de torsión. En cambio la geometría de Riemann-Cartan admite a la torsión en el mismo estatus que la curvatura. No obstante la **Relatividad General** está construida tradicionalmente sobre una geometría rimanniana. Para esto impongamos la condición de torsión nula:

$$T^{\lambda}{}_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\nu\mu}. \tag{1.1.58}$$

Por lo tanto en la geometría de Riemann la conexión será simétrica en sus índices inferiores como consecuencia de la restricción de torsión nula. La conexión que satisface esta condición es la **conexión de Levi-Civita** también conocida como los **Símbolos de Christoffel** $\mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\nu}$, usaremos el círculo arriba de los elementos para señalar que son magnitudes libres de torsión y diferenciarlos de su generalización en la geometría de Riemann-Cartan. De esta forma la torsión es nula y en este contexto la curvatura libre de torsión es conocida como **curvatura de Riemann** $\mathring{R}^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu}$:

$$\mathring{R}^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu} = \partial_{\mu}\mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\sigma} + \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\lambda}\mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\nu\sigma} - \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\lambda}\mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\sigma}, \tag{1.1.59}$$

$$T^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\nu\mu} = 0, \tag{1.1.60}$$

Ahora, analizando la traza del tensor de curvatura de Riemann $\mathring{R}^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}$ tendremos el **tensor de curvatura de Ricci** $\mathring{R}_{\mu\nu}$

$$\mathring{R}_{\mu\nu} = \mathring{R}^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} \tag{1.1.61}$$

$$= \partial_{\mu}\mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\rho} - \partial_{\nu}\mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\rho} + \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\lambda}\mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\nu\rho} - \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\lambda}\mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\rho}. \tag{1.1.62}$$

Contrayendo el tensor de Ricci encontramos el **escalar de Ricci** $\mathring{R}$.

$$\mathring{R} = \mathring{R}_{\mu\nu}g^{\mu\nu} \tag{1.1.63}$$

Con estos elementos geométricos tenemos las herramientas necesarias para comenzar a construir un principio de acción que sea invariante bajo transformaciones de coordenadas. No obstante también requerimos invariantes bajo **Transformaciones de Lorentz** $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ actuando **localmente** en cada punto del espacio tiempo $M^{(d=4)}$. Este conjunto de transformaciones y su respectiva invariancia constituye un grupo de simetría $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} \in SO(d-\eta_{-}, \eta_{-})$[7], conocido como **grupo de Lorentz** y en muy pocas palabras nos dice que las leyes de la Física son las mismas en cada sistema de referencia inercial.

[7]Aquí η_{-} representa el numero de signos negativos en la métrica, así para dimensión $d = 4$ y signatura $\eta = (-, +, +, +)$ el grupo de Lorentz se denota $SO(3, 1)$

No obstante los temas que hemos mencionado son conceptos sumamente complejos de por si. En esta sección nos dedicamos exclusivamente a presentar los elementos matemáticos centrales para construir una teoría de la gravedad. Recomendamos un estudio más profundo de estos conceptos en el libro escrito por D. Lovelock. *Tensors, differential forms, and variational principles* [29].
Ahora analizaremos el significado geométrico de metricidad, afinidad, curvatura y la torsión en el lenguaje de formas diferenciales. Para eso comenzemos profundizando en el estudio de los covectores

$$\bar{V} = V_\mu dx^\mu. \tag{1.1.64}$$

Habíamos mencionado que al conjunto de todos los campos covectoriales podíamos llamarlos el espacio de 1-formas $\Omega^{(1)}(M^{(4)})$ para generalizar esto a formas diferenciales de dimensión d o d-formas. Definiremos un producto tensorial antisimetrizado para tensores del tipo $T\binom{0}{d}$. Mejor conocido como producto cuña $\wedge$:

$$\wedge : \Omega^{(p)}(M^{(d)}) \times \Omega^{q}(M^{(d)}) \to \Omega^{(p+q)}(M^{(4)}), \tag{1.1.65}$$

donde la base de p-formas $\alpha \in \Omega^{(p)}(M^{(d)})$ queda determinada por el producto cuña de p 1-formas $\{dx^\mu\}$ de la siguiente manera:

$$dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_p} = \frac{1}{p!}\delta^{\mu_1 ...\mu_p}_{\alpha_1 ...\alpha_p} dx^{\alpha_1} \otimes ... \otimes dx^{\alpha_p}. \tag{1.1.66}$$

Aquí $\delta^{\mu_1 ...\mu_p}_{\alpha_1 ...\alpha_p}$ es conocida como delta de Kronecker generalizada, ver apéndice B, es un tensor totalmente antisimétrico y posee la propiedad de que al actuar sobre un tensor arbitrario $T^{\nu_1 ...\nu_n}$ lo antisimetriza de la siguiente forma

$$T^{[\mu_1 ...\mu_n]} = \delta^{\mu_1 ...\mu_n}_{\alpha_1 ...\alpha_n} T^{\nu_1 ...\nu_n} \tag{1.1.67}$$

Por tanto, la p-forma queda determinada por

$$\alpha = \frac{1}{p!}\alpha_{\mu_1 ...\mu_p} \frac{1}{p!}\delta^{\mu_1 ...\mu_p}_{\alpha_1 ...\alpha_p} dx^{\alpha_1} \otimes ... \otimes dx^{\alpha_p} \tag{1.1.68}$$

$$= \frac{1}{p!}\alpha_{\mu_1 ...\mu_p} dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_p}. \tag{1.1.69}$$

Análogamente una q-forma es:

$$\omega = \frac{1}{q!}\omega_{\nu_1...\nu_q}\frac{1}{q!}\delta^{\nu_1...\nu_q}_{\beta_1...\beta_q}dx^{\beta_1}\otimes...\otimes dx^{\beta_q} \tag{1.1.70}$$

$$= \frac{1}{q!}\omega_{\nu_1...\nu_q}dx^{\nu_1}\wedge...\wedge dx^{\nu_q}. \tag{1.1.71}$$

De esta forma el producto cuña (wedge o exterior) entre una p-forma α y una q-forma ω será una $(p+q)$-forma π definida de la siguiente manera:

$$\pi = \alpha\wedge\omega = \frac{1}{p!}\alpha_{\mu_1...\mu_p}[\frac{1}{p!}\delta^{\mu_1...\mu_p}_{\alpha_1...\alpha_p}dx^{\alpha_1}\otimes...\otimes dx^{\alpha_p}]\wedge\frac{1}{q!}\omega_{\nu_1...\nu_q}[\frac{1}{q!}\delta^{\nu_1...\nu_q}_{\beta_1...\beta_q}dx^{\beta_1}\otimes...\otimes dx^{\beta_q}] \tag{1.1.72}$$

$$= \frac{1}{p!q!}\alpha_{\mu_1...\mu_p}\omega_{\nu_1...\nu_q}[dx^{\mu_1}\wedge...\wedge dx^{\mu_p}]\wedge[dx^{\nu_1}\wedge...\wedge dx^{\nu_q}] \tag{1.1.73}$$

$$= \frac{1}{(p+q)!}\frac{1}{p!q!}\alpha_{\mu_1...\mu_p}\omega_{\nu_1...\nu_q}\delta^{\mu_1...\mu_p\nu_1...\nu_q}_{\alpha_1...\alpha_p\beta_1...\beta_q}[dx^{\alpha_1}\wedge...\wedge dx^{\alpha_p}]\otimes[dx^{\beta_1}\wedge...\wedge dx^{\beta_q}]. \tag{1.1.74}$$

Así es evidente que las componentes de una $(p+q)$-forma $\pi_{\alpha_1...\alpha_p\beta_1...\beta_q}$ quedan determinadas por.

$$\pi_{\alpha_1...\alpha_p\beta_1...\beta_q} = \frac{1}{p!q!}\alpha_{\mu_1...\mu_p}\omega_{\nu_1...\nu_q}\delta^{\mu_1...\mu_p\nu_1...\nu_q}_{\alpha_1...\alpha_p\beta_1...\beta_q}. \tag{1.1.75}$$

Por tanto la $(p+q)$-forma definida a partir del producto wedge se puede escribir como:

$$\pi = \alpha\wedge\omega = \frac{1}{(p+q)!}\pi_{\alpha_1...\alpha_p\beta_1...\beta_q}dx^{\alpha_1}\wedge...\wedge dx^{\alpha_p}\wedge dx^{\beta_1}\wedge...\wedge dx^{\beta_q}. \tag{1.1.76}$$

El producto wedge satisface las siguientes propiedades:

Definición 1. *Dadas las formas diferenciales $\alpha\in\Omega^{(p)}(M^{(d)})$, $\omega\in\Omega^{(q)}(M^{(d)})$, $\pi\in\Omega^{(n)}(M^{(d)})$ el producto exterior satisface que:*

1. $(\alpha+\pi)\wedge\omega = \alpha\wedge\omega+\pi\wedge\omega$
2. $\alpha\wedge(\omega+\pi) = \alpha\wedge\omega+\alpha\wedge\pi$
3. $c(\alpha\wedge\omega) = (c\alpha)\wedge\omega = \alpha\wedge(c\omega)$
4. $\alpha\wedge\omega = (-1)^{pq}\omega\wedge\alpha$
5. $(\alpha\wedge\omega)\wedge\pi = \alpha\wedge(\omega\wedge\pi)$

Ahora podemos presentar el concepto de derivada de una p-forma $\alpha \in \Omega^{(p)}(M^{(d)})$ como una 1-forma $d = \wedge dx^{\lambda}\partial_{\lambda}$ conocida como **derivada exterior**.

Definición 2. *La derivada exterior de una p-forma $\alpha \in \Omega^{(p)}(M^{(d)})$ será un mapeo*

$$d : \Omega^{p}(M^{d}) \to \Omega^{p+1}(M^{d}), \tag{1.1.77}$$

definido por

$$d\alpha = \frac{1}{(p+1)!}\frac{1}{p!}\partial_{\lambda}\alpha_{\mu_1...\mu p}dx^{\lambda} \wedge dx^{\mu_2} \wedge ... \wedge dx^{p}. \tag{1.1.78}$$

Dadas las formas diferenciales $\alpha \in \Omega^{(p)}(M^{(d)})$, $\omega \in \Omega^{(q)}(M^{(d)})$, el operador diferencial d satisface las siguientes propiedades:

1. ***Distributividad.*** $d(\alpha + \omega) = d\alpha + d\omega$
2. ***Regla de Leibniz.*** $d(\alpha \wedge \omega) = d\alpha \wedge \omega + (-1)^{p}\alpha \wedge d\omega$
3. ***Nilpotencia.*** $d^2 = 0 \Leftrightarrow d^2\alpha = 0$

Dado que los espacios vectoriales $\Omega^{p}(M^{d})$ y $\Omega^{d-p}(M^{d})$ tendrán igual dimensionalidad debería ser posible definir un mapeo lineal invertible conocido como el **dual de Hodge**.

Definición 3. *Sea el **dual de Hodge** un mapeo lineal invertible*

$$* : \Omega^{p}(M^{d}) \to \Omega^{d-p}(M^{d}) \tag{1.1.79}$$

aplicado sobre una p-forma $\alpha \in \Omega^{p}(M^{d})$. En la base coordenada quedará determinado por la métrica $g_{\mu\nu}$ y el símbolo de Levi-Civita $\epsilon_{\mu_1...\mu_d}$.

$$*\alpha = \frac{\sqrt{|g|}}{p!(d-p)!}\alpha^{\mu_1...\mu_p}\epsilon_{\mu_1...\mu_p\nu_1...\nu_{d-p}}dx^{\nu_1} \wedge ... \wedge dx^{\nu_{d-p}} \tag{1.1.80}$$

En la base ortonormal, tendremos

$$*\alpha = \frac{1}{(d-p)!p!}\alpha^{a_1...a_p}\epsilon_{a_1...a_p b_1...b_{d-p}}e^{b_1} \wedge ... \wedge e^{b_{d-p}} \tag{1.1.81}$$

Además se cumple que $*^2\alpha = *^{p(d-p)+\eta_-}$.

Ahora podemos definir el operador contracción I_{ζ}[8]:

[8]Este último operador satisface la regla de Leibniz.

Definición 4. *Sea el operador* ***contracción*** *un mapeo definido por.*

$$I_\zeta : \Omega^p(M^d) \to \Omega^{p-1}(M^d). \tag{1.1.82}$$

La contracción I_ζ aplicada sobre una p-forma α es definida mediante el Dual de Hodge $*$.

$$I_\zeta \alpha = \frac{1}{(p-1)!}\zeta^\lambda \alpha_{\lambda\mu_2\dots\mu_p} dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \tag{1.1.83}$$

En la base ortonormal

$$I_a \alpha = (-1)^{d(p-1)+\eta_-} * (e_a \wedge *\alpha \tag{1.1.84}$$

$$= \frac{(-1)^{d(p-1)+\eta_-}}{(d-p)!p!} * (e_a \wedge \alpha^{a_1\dots a_p} \epsilon_{a_1\dots a_p b_1 \dots b_{d-p}} e^{b_1} \wedge \dots \wedge e^{b_{d-p}} \tag{1.1.85}$$

Ahora tenemos los elementos necesarios para definir la derivada de Lie que nos resultará útil en las próximas secciones.

Definición 5. *Sea la derivada de Lie $\pounds_\zeta$ de un tensor de rango arbitrario $T^{\mu_1\dots\mu_m}{}_{\nu_1\dots\nu_n}$ definida por.*

$$\pounds_\zeta T^{\mu_1\dots\mu_m}{}_{\nu_1\dots\nu_n} = \zeta^\lambda \mathring{\nabla}_\lambda T^{\mu_1\dots\mu_m}{}_{\nu_1\dots\nu_n} - \sum_{i=1}^{m} \mathring{\nabla}_\lambda \zeta^{\mu_i} T^{\mu_1\dots\lambda\dots\mu_{i+1}\dots\mu_m}{}_{\nu_1\dots\nu_n} + \sum_{j=1}^{m} \mathring{\nabla}_{\nu_j} \zeta^\lambda T^{\mu_1\dots\mu_m}{}_{\nu_1\dots\nu_{j-1}\lambda\nu_{j+1}\dots\nu_n} \tag{1.1.86}$$

Para p-formas evaluadas en un álgebra de Lie $\mathfrak{G}$. La derivada de Lie será.

$$\pounds_\zeta \alpha = \{dI_\zeta \alpha + I_\zeta d\alpha\} \tag{1.1.87}$$

1.2. Estructura métrica

Como ya vimos la base $\{\partial_\mu\}$ del espacio tangente $T_pM^{(d)}$ y la base $\{dx^\mu\}$ del espacio cotangente $T_p^*M^{(d)}$ no constituyen bases ortonormales, ya que

$$\langle \partial_\mu, \partial_\nu \rangle = g_{\mu\nu}, \tag{1.2.1}$$

$$\langle dx^\mu, dx^\nu \rangle = g^{\mu\nu}. \tag{1.2.2}$$

Sabemos que la estructura métrica quedaba determinada por el tensor métrico

$$g = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu \otimes dx^\nu.$$

También sabemos que localmente existe un isomorfismo al espacio de Minkowski $e^a = e^a{}_\mu dx^\mu$ al que formalmente llamaremos **vielbein**.

$$\begin{aligned} g &= \eta_{ab}e^a{}_\mu(x)e^b{}_\nu(x)dx^\mu \otimes dx^\nu \\ &= \eta_{ab}e^a(x) \otimes e^b(x). \end{aligned}$$

El **vielbein** será la matriz de transformación entre la base de coordenadas dx^μ y la **base ortonormal** e^a del espacio cotangente $T^*_p M^{(d)}$ y análogamente para el espacio tangente $T_p M^{(d)}$ el inverso del **vielbein** será la matriz de transformación entre la base coordenada ∂_μ a la base ortonormal $\hat{e}_a$ determinadas por

$$\hat{e}_a(x) = e^\mu{}_a \partial_\mu, \tag{1.2.3}$$

$$e^a = e^a{}_\mu dx^\mu. \tag{1.2.4}$$

Así es evidente que la base es ortonormal cumple que.

$$\langle \hat{e}_a, \hat{e}_b \rangle = \eta_{ab}, \tag{1.2.5}$$

$$\langle e^a, e^b \rangle = \eta^{ab}. \tag{1.2.6}$$

Para teorías de gravedad la estructura métrica en esta base ortonormal queda determinada como ya vimos por ec. (1.2.3). donde η_{ab} en el caso de **Relatividad General** corresponde a la métrica Lorentizana en $d = 4$ de signatura $\eta = (-1, 1, 1, 1)$, por lo tanto el **Vielbein** contiene toda la información de la estructura métrica en el lenguaje de formas diferenciales.

Definición 6. *El **vielbein** satisface las siguientes propiedades.*

1. $\langle e^a, e^b \rangle = \eta^{ab}$
2. $e^a{}_\nu e^\mu{}_b = \delta^\mu_\nu$
3. $\eta_{ab}e^a{}_\mu e^b{}_\nu = g_{\mu\nu}$
4. $\det(e^a{}_\mu) = \pm\sqrt{|g|}$

El **vielbein** corresponde al isomorfismo entre la variedad $M^{(d)}$ y el espacio tangente $T_pM^{(d)}$, es la manifestación matemática del principio de equivalencia fuerte. No obstante, no existe una elección única de isomorfismo. Esto debido a la infinidad de elecciones de marco de referencia ortogonal localmente posibles. Por lo tanto bajo una transformación de Lorentz $\Lambda(x) \in SO(3,1)$ el **vielbein** transforma como

$$e^a{}_\mu(x) \to \bar{e}^a{}_\mu(x) = \Lambda^a{}_b(x)e^b{}_\mu(x), \tag{1.2.7}$$

es decir el **Vielbein** es un vector en el grupo de Lorentz y por tanto este conjunto de transformaciones $\Lambda(x) \in SO(3,1)$ debe dejar la métrica invariante,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab}\bar{e}^a{}_\mu\bar{e}^b{}_\nu = \eta_{cd}e^c{}_\mu e^d{}_\nu \tag{1.2.8}$$

$$= \eta_{ab}\Lambda^a{}_c\Lambda^b{}_d e^c{}_\mu e^d{}_\nu = \eta_{cd}e^c{}_\mu e^d{}_\nu, \tag{1.2.9}$$

es decir la métrica es un invariante de Lorentz.

$$\eta_{ab}\Lambda^a{}_c\Lambda^b{}_d = \eta_{cd}. \tag{1.2.10}$$

1.3. Estructura Afín

La estructura afín determina el concepto de paralelismo sobre una variedad. En este contexto introducimos la conexión afín $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ como aquel elemento que condensa la información de la estructura afín de la variedad. Comportándose como un campo compensatorio que permite definir una derivada covariante bajo transformaciones generales de coordenadas $x^\mu \to \bar{x}^\mu = \bar{x}^\mu(x)$.
No obstante, en la base ortonormal el conjunto de transformaciones relevantes corresponde a las del grupo de Lorentz,donde los vectores del grupo de Lorentz $SO(d-\eta_-,\eta_-)$ transforman como $V^a \to \bar{V}^a = \Lambda^a{}_b V^b$. De esta forma es evidente que en general, ante transformaciones de Lorentz locales $\Lambda(x)$, la derivada exterior de un vector en el grupo de Lorentz no será un vector en dicho grupo:

$$dV^a \to d\bar{V}^a = \Lambda^a{}_b dV^b + d\Lambda^a{}_b V^b. \tag{1.3.1}$$

Generalizaremos la derivada exterior $d = dx^{\mu}\partial_{\mu}\wedge$ al operador derivada covariante de Lorentz $D = dx^{\mu}D_{\mu}$, tal que.

$$D : \Omega^{p}(M^{(d)}) \rightarrow \Omega^{p+1}(M^{(d)}). \tag{1.3.2}$$

Para esto comenzaremos considerando un campo vectorial $\vec{V} = V^{a}(x^{\rho})\hat{e}_{a}$ y el transporte paralelo de las componentes del vector $V^{a}{}_{\|}(x^{\rho} + \epsilon\zeta^{\rho})$.

$$V^{a}{}_{\|}(x^{\rho} + \epsilon\zeta) = V^{a}(x^{\rho} + \epsilon\zeta^{\rho}) + \epsilon I_{\zeta}\omega^{a}{}_{b}V^{b}(x^{\rho}) \tag{1.3.3}$$

Donde $\omega^{a}{}_{b}$ parametriza el concepto de transporte paralelo bajo transformaciones de Lorentz $\Lambda^{a}{}_{b}$. Con esto la derivada covariante de Lorentz será.

$$I_{\zeta}DV^{a} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{V^{a}{}_{\|}(x^{\rho} + \epsilon\zeta) - V^{a}(x^{\rho})}{\epsilon} \tag{1.3.4}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{V^{a}(x^{\rho} + \epsilon\zeta^{\rho}) - V^{a}(x^{\rho}) + \epsilon I_{\zeta}\omega^{a}{}_{b}V^{b}(x^{\rho})}{\epsilon} \tag{1.3.5}$$

$$= I_{\zeta}\left(dV^{a} + \omega^{a}{}_{b}V^{b}\right). \tag{1.3.6}$$

Por lo tanto la derivada covariante de Lorentz aplicada sobre un vector será:

$$D\vec{V} = (dV^{a} + \omega^{a}{}_{b}V^{b})\hat{e}_{a} \tag{1.3.7}$$

Este operador diferencial que sí transforma como un vector bajo el grupo de Lorentz.

$$D\bar{V}^{a} = \Lambda^{a}{}_{b}DV^{b}. \tag{1.3.8}$$

Definición 7. *La **Derivada covariante de Lorentz** satisfará las siguientes propiedades.*

1. ***Regla de Leibniz.*** $D(P \wedge Q) = DP \wedge Q + (-1)^{p}P \wedge Q$
2. ***Compatibilidad métrica.*** $D\eta_{ab} = 0$
3. ***Derivada covariante de un escalar.*** $D\phi = d\phi$
4. ***Derivada covariante de un tensor en*** $SO(d - \eta_{-}, \eta_{-})$
   $DP^{a_1\ldots a_m}{}_{b_1\ldots b_n} = dP^{a_1\ldots a_m}{}_{b_1\ldots b_n} + \omega^{a_1}{}_{c_1} \wedge P^{c_1a_2\ldots a_m}{}_{b_1\ldots b_n} + \ldots + \omega^{a_m}{}_{c_m} \wedge P^{a_1\ldots a_{m-1}c_m}{}_{b_1\ldots b_n} - \omega^{c_1}{}_{b_1} \wedge P^{a_1\ldots a_m}{}_{c_1b_2\ldots b_n} - \ldots - \omega^{c_n}{}_{b_n} \wedge P^{a_1\ldots a_m}{}_{b_1\ldots b_{n-1}c_n}$
5. ***Postulado del vielbein.*** $\partial_{\mu}e^{a}{}_{\nu} + \omega^{a}{}_{b\mu}e^{b}{}_{\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}e^{a}{}_{\lambda} = 0$

Si bien esta última propiedad es exclusiva para la derivada covariante de 1-forma vectores. Nos permite determinar que tanto la conexión afín $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ como la conexión de spin $\omega^{a}{}_{b\mu}$ codifican la misma noción de transporte paralelo.
Por otra parte el imponer la condición de localidad en las transformaciones de Lorentz $\Lambda(x)$ significa que en cada punto de la variedad $p \in M^{(d)}$ existe la acción local del grupo de Lorentz $G = SO(d - \eta_{-}, \eta_{-})$, por lo tanto esto define una nueva variedad llamada **Fibrado principal** definida localmente por $P = M^{(d)} \times G$. Análogamente al fibrado tangente o cotangente donde asociábamos un espacio vectorial para cada punto de la variedad, ahora asociamos un grupo de simetría a cada punto. En gravedad la variedad $M^{(d)}$ está asociada con el espacio-tiempo y el grupo de simetría G está asociado con el grupo de Lorentz $SO(d - \eta_{-}, \eta_{-})$, cuyo álgebra de Lie $\mathfrak{G}$ asociado es.

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \eta_{bd}J_{ca} - \eta_{ad}J_{cb} + \eta_{bc}J_{ad} - \eta_{ac}J_{bd}. \tag{1.3.9}$$

Por lo tanto la conexión será una forma diferencial en el **fibrado principal** $P = M^{(d)} \times G$ definida como:

$$\omega = \frac{1}{2}\omega^{ab}{}_{\mu}dx^{\mu} \otimes J_{ab} \in \Omega^{1}(P) \otimes \mathfrak{G}. \tag{1.3.10}$$

Estudiando las propiedades de la conexión tenemos que:

Definición 8. *Sea la 1-forma* ***conexión de spin*** ω *dada por.*

$$\omega^{a}{}_{b} = \omega^{a}{}_{b\mu}dx^{\mu}, \tag{1.3.11}$$

que transformará como conexión de gauge bajo las transformaciones del grupo de Lorentz $\Lambda(x) \in SO(d - \eta_{-}, \eta_{-})$*:*

$$\bar{\omega}^{a}{}_{b} = \Lambda^{a}{}_{c}\Lambda^{d}{}_{b}\omega^{c}{}_{d} - \Lambda^{c}{}_{b}d\Lambda^{a}{}_{c}. \tag{1.3.12}$$

Podemos considerar las siguientes propiedades de la conexión de spin.

1. ***conexión libre de torsión*** $\mathring{\omega}^{ab}$ ***y contorsión*** κ^{ab}***:*** $\omega^{ab} = \mathring{\omega}^{ab} + \kappa^{ab}$

2. ***Antisimetría:*** $\omega^{ab} = -\omega^{ba}$

3. ***conexión evaluada en el álgebra de*** $SO(d - \eta_{-}, \eta_{-})$***:*** $\omega = \frac{1}{2}\omega^{ab}J_{ab}$.

La **conexión de spin** $\omega^{ab}{}_{\mu}(x)$ parametriza el transporte paralelo de los tensores del grupo de Lorentz desde el espacio tangente $T_pM^{(d)}$ a $T_{p+dp}M^{(d)}$. Donde todas las propiedades afines del espacio están codificadas en las componentes de $\omega^{ab}{}_\mu(x)$ que son arbitrarias e independientes de la métrica. Como última observación, la Ley de transformación que sigue la conexión de spin, podemos interpretar la conexión de Lorentz como una conexión de Gauge y por tanto describir la Gravedad como una teoría de Gauge

1.4. Curvatura y torsión

De momento hemos descrito la geometría de una variedad arbitraria en base a la estructura métrica determinada por el vilbein e^a y la estructura afín determinada por la conexión de spin ω^{ab}. Resulta natural preguntarse a qué corresponderán las derivadas primeras de estos grados de libertad geométricos.

$$T^a = De^a = de^a + \omega^a{}_b e^b, \tag{1.4.1}$$

$$R^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \omega^c{}_b. \tag{1.4.2}$$

La primera ecuación determina la **2-forma torsión** T^a y la segunda la **2-forma curvatura** o **curvatura de Lorentz** $R^a{}_b$. Estas formas diferenciales son sumamente importantes, tanto así que llevan por nombre las **Ecuaciones de estructura de Maurer-Cartan**.

Ahora podemos preguntarnos qué pasa con las derivadas de segundo orden:

$$DT^a = D^2 e^a = R^a{}_b \wedge e^b, \tag{1.4.3}$$

$$DR^a{}_b = 0. \tag{1.4.4}$$

Estas ecuaciones corresponden a las **identidades de Bianchi**. La primera identidad es general para la segunda derivada covariante de cualquier vector de Lorentz $D^2V^a = R^a{}_b V^b$. La segunda identidad establece que la curvatura de Lorentz es compatible con la derivada covariante de Lorentz. Ambas juntas nos permiten concluir, que no existen formas diferenciales en función de derivadas a orden superior del vielbein o la conexión que nos entreguen más información geométrica de la variedad.

Recordando que la conexión se puede separar en una parte con torsión y otra libre de torsión (1).[9] Entonces la curvatura y la torsión pueden ser escritas de la siguiente forma:

$$T^a = \kappa^a{}_b \wedge e^b, \tag{1.4.5}$$

$$R^{ab} = \mathring{R}^a{}_b + \mathring{D}\kappa^a{}_b + \kappa^a{}_c \wedge \kappa^c{}_b. \tag{1.4.6}$$

Para un estudio más profundo de formas diferenciales recomendamos revisar el libro de M. Nakahara, *Geometry topology and physics* [30].

[9] Donde la contorsión κ^{ab} codifica los grados torsionales.

Capítulo 2

Gravedad en una geometría Riemann-Cartan

Relatividad General establece que la gravedad es una interacción entre la geometría del espacio tiempo, como una variedad $d = 4$ dimensional y el contenido de energía en él. Esto mediante el Lagrangiano de Eintein-Hilbert con ecuaciones de segundo orden para la métrica $g_{\mu\nu}$, covariante bajo transformaciones generales de coordenadas, localmente compatible con las transformaciones de Lorentz y libre de torsión.
En esta sección construiremos un lagrangiano en el lenguaje de formas diferenciales, manteniendo los principios de covariancia ante transformaciones generales de coordenadas y localidad en las transformaciones de Lorentz, según lo mostrado en las referencias [31, 32, 33].
La modificación respecto a Relativiadad General estándar será relajar la restricción de torsión nula. Veremos como esta última hipótesis naturalmente nos hará considerar a la metricidad y afinidad como campos con dinámica independiente, entregando ecuaciones de movimiento de primer orden para los campos fundamentales, el vielbein y la conexión de spin.
Entonces, para construir un principio de acción con formas diferenciales tenemos los grados de libertad métricos $e^a = e^a{}_\mu dx^\mu$ y de forma independiente los grados de libertad afines $\omega^{ab} = \omega^{ab}{}_\mu dx^\mu$. Luego, las ecuaciones de estructura 2-forma Curvatura (1.4.2) y la 2-forma torsión (1.4.1). Por último recordemos a los tensores invariantes la métrica de Minkowski η_{ab}, de signatura $\eta = \{-, +, +, +\}$ y el símbolo de Levi-Civita en $d = 4$ dimensiones ϵ_{abcd}. Así para $d = 4$ solo se pueden escribir seis 4-formas escalares que

satisfacen los principios anteriormente planteados.[1]

$$R^{ab} \wedge R_{ab}, \tag{2.0.1}$$

$$\epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge R^{cd}, \tag{2.0.2}$$

$$T^{a} \wedge T_{a}, \tag{2.0.3}$$

$$R^{ab} \wedge e_{a} \wedge e_{b}, \tag{2.0.4}$$

$$\epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^{c} \wedge e^{d}, \tag{2.0.5}$$

$$\epsilon_{abcd} e^{a} \wedge e^{b} \wedge e^{c} \wedge e^{d}. \tag{2.0.6}$$

Los primeros cuatro términos definirán los siguientes tres invariantes topológicos:

$$\mathcal{P}_{(4)} = \int_{M^{(4)}} R^{ab} \wedge R_{ab}, \tag{2.0.7}$$

$$\mathcal{E}_{(4)} = \int_{M^{(4)}} \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge R^{cd}, \tag{2.0.8}$$

$$\mathcal{NY} = \int_{M^{(4)}} (T^{a} \wedge T_{a} - R^{ab} \wedge e_{a} \wedge e_{b}), \tag{2.0.9}$$

correspondientes al invariante de Pontryagin $\mathcal{P}_{(4)}$, el invariante de Euler $\mathcal{E}_{(4)}$ y el invariante de Nieh-Yan $\mathcal{NY}$ respectivamente. Estos candidatos a lagrangiano son invariantes topológicos, dado que, al ser variados respecto a los grados de libertad $\{e, \omega\}$ pueden ser escritos como derivadas totales. Por tanto no contribuirán a la dinámica de los campos en la variedad $M^{(4)}$, sino que solo entregarán condiciones de borde en $\partial M^{(4)}$. Por lo tanto, el lagrangiano de Einstein-Hilbert con constante cosmológica $\mathcal{L}_{EH} = \mathcal{L}_{EH}(e, \omega)$ será.

$$\mathcal{L}_{EH}(e, \omega) = \frac{1}{c\kappa_4} \left(\frac{1}{4} \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^{c} \wedge e^{d} - \frac{1}{4!} \Lambda \epsilon_{abcd} e^{a} \wedge e^{b} \wedge e^{c} \wedge e^{d} \right) \tag{2.0.10}$$

Por último, para tener un lagrangiano total que modele la interacción de la geometría del espacio tiempo con el contenido de energía debemos considerar un lagrangiano de materia $\mathcal{L}_m$ en nuestro principio de acción. Este lagrangiano modela el contenido de energía que interacciona con la geometría del espacio tiempo, por tanto deberá ser dependiente de los campos de materia del modelo estándar Ψ. Con lo cual, el lagrangiano total de la teoría **Einstein-Cartan-Sciama-Kibble** (**ECSK**) deberá ser de

[1] Invariación ante transformaciones de Lorentz locales

la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{EH}(e,\omega) + \mathcal{L}_m(e,\omega,\Psi)$. Por tanto el principio de acción será.

$$S(e,\omega,\Psi) = \frac{1}{c\kappa_4}\int_{M^{(4)}}\left(\frac{1}{4}\epsilon_{abcd}R^{ab}\wedge e^c\wedge e^d - \frac{1}{4!}\Lambda\epsilon_{abcd}e^a\wedge e^b\wedge e^c\wedge e^d + c\kappa_4\mathcal{L}_m(e,\omega,\Psi)\right). \tag{2.0.11}$$

Según el principio de mínima acción las ecuaciones de campo quedan determinadas por.

$$\delta S = \int_{M^{(4)}}\delta\mathcal{L} = 0 \Rightarrow \tag{2.0.12}$$

$$\delta_e\mathcal{L}(e,\omega) = \mathcal{L}(e+\delta e,\omega) - \mathcal{L}(e,\omega) = 0 \tag{2.0.13}$$

$$\delta_\omega\mathcal{L}(e,\omega) = \mathcal{L}(e,\omega+\delta\omega) - \mathcal{L}(e,\omega) = 0 \tag{2.0.14}$$

Variando el lagrangiano de materia respecto al vielbein y la conexión de spin tenemos que

$$\delta_e\mathcal{L}_m = -\frac{1}{c}*\mathcal{T}_d\wedge\delta e^d, \tag{2.0.15}$$

$$\delta_\omega\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2c}\delta\omega^{ab}\wedge *\sigma_{ab}, \tag{2.0.16}$$

donde $\mathcal{T}^a = \mathcal{T}^a{}_\mu dx^\mu$ es la 1-forma de **tensor energía momentum** relacionado con la densidad de energía de la materia bariónica y $\sigma^{ab} = \sigma^{ab}{}_\mu dx^\mu$ corresponde a la 1-forma **tensor de spin** relacionado con el spin de la materia fermiónica.
Por tanto las ecuaciones de campo para el vielbein e y la conexión de spin ω serán.

$$\frac{1}{2}\epsilon_{abcd}R^{ab}\wedge e^c - \frac{1}{3!}\Lambda\epsilon_{abcd}e^a\wedge e^b\wedge e^c = \kappa_4 * \mathcal{T}_d, \tag{2.0.17}$$

$$\epsilon_{abcd}T^c\wedge e^d = \kappa_4 * \sigma_{ab}. \tag{2.0.18}$$

En este punto podemos mencionar porque esta notación para la gravedad es conocido como formalismo de primer orden, al tener ecuaciones de campo que son de primer orden en los campos e y ω.
Para llevar estas ecuaciones a una notación un poco más usual. Consideremos la definición del vielbein y la conexión de spin junto al siguiente conjunto de

transformaciones a la base coordenada.

$$
\begin{aligned}
R^{ab} &= \frac{1}{2} e^{a}{}_{\alpha} e^{b}{}_{\beta} R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}, \\
T^{a} &= \frac{1}{2} e^{a}_{\lambda} T^{\lambda}{}_{\mu\nu} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}, \\
\mathcal{T}^{a} &= e^{a}_{\nu} \mathcal{T}^{\nu}{}_{\mu} dx^{\mu}, \\
\sigma^{ab} &= e^{a}{}_{\lambda} e^{b}{}_{\mu} \sigma^{\lambda\mu}{}_{\nu} dx^{\nu}.
\end{aligned}
$$

Podemos reescribir las ecuaciones de campo (2.0.17) y (2.0.18) en la base coordenada[2]:

$$
R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa_4 \mathcal{T}_{\mu\nu}, \tag{2.0.19}
$$

$$
T^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \delta^{\lambda}{}_{\mu} T^{\rho}{}_{\rho\nu} + \delta^{\lambda}{}_{\nu} T^{\rho}{}_{\rho\mu} = \kappa_4 \sigma^{\lambda}{}_{\mu\nu}, \tag{2.0.20}
$$

donde la primera ecuación es análoga a las **Ecuaciones de campo de Einstein** en una geometría de Riemann-Cartan. Luego la segunda ecuación es una ecuación algebráica para la torsión. Esta ecuación implica que la torsión será un campo localizado en la fuente de dicha torsión.
Es sencillo demostrar que estas ecuaciones se pueden reescribir como:

$$
R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} + \kappa_4 \left(\mathcal{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{T}^{\lambda}{}_{\lambda} \right), \tag{2.0.21}
$$

$$
T^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \kappa_4 \left[\sigma^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\sigma^{\rho}{}_{\rho\mu} \delta^{\lambda}{}_{\nu} - \sigma^{\rho}{}_{\rho\nu} \delta^{\lambda}{}_{\mu} \right) \right]. \tag{2.0.22}
$$

A modo de síntesis notemos que las principales características de la teoría **ECSK** son.

- Depende de dos campos independientes, el vielbein e y la conexión ω.
- Posee ecuaciones de primer orden para la contorsión y de segundo orden para el vielbein.
- Trivialmente invariante bajo difeomorfismo de coordenadas.
- Invariante bajo transformaciones locales de Lorentz.

El hecho que metricidad y afinidad sean campos independientes es consecuencia de relajar la restricción de torsión nula. Siendo esta la principal diferencia entre la teoría ECSK y Relatividad General estándar. Estableciendo a la teoría ECSK como buen candidato para teoría de gravedad.

[2]Para mas detalles del calculo revisar Apéndice B.

2.1. Tensor de torsión

Como ya vimos en la teoría ECSK, la curvatura R^{ab} y la torsión T^a tienen el mismo estatus en la jerarquía de la geometría. Por tanto según una perspectiva teórica no existe ningún argumento sólido para imponer la restricción de torsión nula $T^a = 0$, si bien es una hipótesis útil para que la teoría de gravedad sea sencilla. No obstante, no es un argumento suficiente para imponer dicha restricción.
Debido a esto el principal objetivo de la presente investigación consiste en extender la fenomenología de ondas gravitacionales sobre una geometría de Riemann-Cartan, específicamente en la teoría ECSK. Para esto desarrollaremos ciertas propiedades que posee el tensor de torsión.
La primera será general para todo tensor de Rango 3 con una antisimetría en 2 índices

$$T^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu} = -\left(\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\right) = -T^{\lambda}{}_{\nu\mu} \tag{2.1.1}$$

según [34] podrá descomponerse en 3 componentes, cada una irreducible globalmente bajo el grupo de Lorentz.

$$T_{\lambda\mu\nu} = \frac{2}{3}(\mathcal{T}_{\lambda\mu\nu} - \mathcal{T}_{\lambda\nu\mu}) + \frac{1}{3}(g_{\lambda\mu}\mathcal{V}_{\nu} - g_{\lambda\nu}\mathcal{V}_{\mu}) + \sqrt{|g|}\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}\mathcal{A}^{\rho}. \tag{2.1.2}$$

La contribución tensorial $\mathcal{T}_{\lambda\mu\nu}$ es dada por

$$\mathcal{T}_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_{\lambda\mu\nu} - T_{\mu\lambda\nu}) + \frac{1}{6}(g_{\nu\lambda}\mathcal{V}_{\mu} + g_{\nu\mu}\mathcal{V}_{\lambda}) - \frac{1}{3}g_{\lambda\mu}\mathcal{V}_{\nu}. \tag{2.1.3}$$

Contribución vectorial $\mathcal{V}_{\mu}$:

$$\mathcal{V}_{\mu} = T^{\lambda}{}_{\lambda\mu}. \tag{2.1.4}$$

Por último la contribución axial $\mathcal{A}^{\rho}$ es dada por

$$\mathcal{A}^{\alpha} = \frac{1}{6}\epsilon^{\alpha\lambda\mu\nu}T_{\lambda\mu\nu}. \tag{2.1.5}$$

Esta descomposición satisface las siguientes propiedades:

Definición 9. *La descomposición de un tensor de rango 3 con 2 índices antisimétrico en una componente tensorial $\mathcal{T}_{\lambda\mu\nu}$, vectorial $\mathcal{V}_{\mu}$ y axial $\mathcal{A}^{\alpha}$ satisfará las siguientes propiedades:*

1. $\mathcal{T}_{\lambda\mu\nu} = \mathcal{T}_{\mu\lambda\nu}$
2. $\mathcal{T}_{\lambda\mu\nu} + \mathcal{T}_{\nu\lambda\mu} + \mathcal{T}_{\mu\nu\lambda} = 0$
3. $\mathcal{T}^{\lambda}{}_{\lambda\nu} = 0$
4. $\mathcal{T}_{\lambda\mu}{}^{\mu} = 0$

2.2. Operadores diferenciales en una geometría RC

Para analizar la influencia de la torsión en la propagación de la polarización de **Ondas Gravitacionales**. Estudiaremos la generalización de la **Identidad de Weitzenböck**. Por lo cual deberemos estudiar algunos operadores diferenciales introducidos en [26, 25], los operadores de onda de **Beltrami** $\square_B$ y el de **De Rham** $\square_{dR}$ la identidad de Weitzenböck y con esto definir las generalizaciones a una geometría de Riemann-Cartan. Hasta el momento hemos definido los siguientes Operadores diferenciales. La derivada exterior d (1.1.77)[3], la derivada covariante de Lorentz D (1.3.2) y el operador contracción I_ζ que podemos escribir en la base ortonormal según (1.1.85). Además La generalización para q-índices $I_{a_1...a_q}$ puede definirse como:

Definición 10. *El operador $I_{a_1...a_q}$ será un mapeo.*

$$I_{a_1...a_q} : \Omega^p(M^d) \to \Omega^{p-q}(M^d), \tag{2.2.1}$$

definido por.

$$I_{a_1...a_q} = (-1)^{(d-p)(p-q)+\eta_-} * (e_{a_1} \wedge ... \wedge e_{a_q} \wedge * \tag{2.2.2}$$

Y la derivada de Lie sobre tensores arbitrarios $\pounds_\zeta T^{\mu_1...\mu_n}{}_{\nu_1...\nu_m}$, es definido por (1.1.86). Ahora definamos el operador codiferencial $d^\dagger$.

Definición 11. *La **coderivada exterior** será un mapeo tal que:*

$$d^\dagger : \Omega^p(M^d) \to \Omega^{p-1}(M^d), \tag{2.2.3}$$

[3]una forma del tipo $\alpha = d\beta$ es conocida como una forma exacta

$d^\dagger$ *se define en función del Dual de Hodge y de la derivada exterior.*

$$d^\dagger = -(-1)^{d(p+1)+\eta_-} * (d * . \tag{2.2.4}$$

Ahora podemos comenzar con las generalizaciones a estos operadores diferenciales clásicos a una geometría de Riemann-Cartan.

Definición 12. *Sea la generalización de la* ***coderivada covariante*** *un mapeo:*

$$D^\ddagger : \Omega^p(M^d) \to \Omega^{p-1}(M^d), \tag{2.2.5}$$

definido por

$$D^\ddagger = -I^a D I_a. \tag{2.2.6}$$

Luego una generalización para la Derivada de Lie.

Definición 13. *Sea la derivada de Lie para p-formas un mapeo*

$$\mathcal{D}_a : \Omega^p(M^d) \to \Omega^p(M^d) \tag{2.2.7}$$

definida a partir del operador contracción I_a *y la derivada covariante de Lorentz* D.

$$\mathcal{D}_a = \{I_a, D\}. \tag{2.2.8}$$

Se pude escribir como:

$$\mathcal{D}_a = e_a{}^\mu \nabla_\mu + I_a T_b \wedge I_b. \tag{2.2.9}$$

En el caso libre de torsión, tendremos

$$\mathring{\mathcal{D}}_a = e_a{}^\mu \mathring{\nabla}_\mu. \tag{2.2.10}$$

Es importante mencionar que los operadores $\{D, I_a, \mathcal{D}\}$ satisfacen un superálgebra determinado por:

$$\{I_a, D\} = \mathcal{D}_a, \tag{2.2.11}$$

$$\{I_a, I_b\} = 0, \tag{2.2.12}$$

$$\{D, D\} = 2D^2, \tag{2.2.13}$$

$$[I_a, \mathcal{D}_b] = -T^c_{ab} I_c, \tag{2.2.14}$$

$$[D, \mathcal{D}_b] = D^2 I_b - I_b D^2, \tag{2.2.15}$$

$$[\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b] = I_{ab} D^2 + D^2 I_{ab} + I_a D^2 I_b - I_b D^2 I_a - (DT^c{}_{ab} \wedge I_c + T^c{}_{ab} \mathcal{D}_c). \tag{2.2.16}$$

En este superálgebra abierta los operadores I_a y D tienen un comportamiento **fermiónico** y $\mathcal{D}_a$ tiene un comportamiento **bosónico**. Además resulta súper útil no solo para el estudio de ondas gravitacionales si no que para cualquier campo que se propague como onda escogiendo una conexión de gauge adecuada $A = A^I{}_\mu J_I \otimes dx^\mu$.

2.3. Operadores de onda en una geometría RC e Identidad de Weitzenböck

Para estudiar ondas lo más común es hacerlo en el espacio tiempo plano donde está debidamente definido el **operador de onda** o **d'Alambertiano** $\Box = \partial_\mu \partial^\mu$. No obstante esto aplica para tensores en la base coordenada.
Si queremos estudiar formas diferenciales en la base ortonormal existe el operador de **De Rham** $\Box_{dR}$.

Definición 14. *Sea el* ***operador de onda de De Rham*** *un mapeo.*

$$\Box_{dR} : \Omega^p(M^d) \to \Omega^p(M^d) \tag{2.3.1}$$

definido mediante la derivada exterior d y la coderivada exterior $d^\dagger$.

$$\Box_{dR} = dd^\dagger + d^\dagger d. \tag{2.3.2}$$

Además del operador de **Beltrami** $\Box_B$

Definición 15. *Sea el **operador de onda de Beltrami** un mapeo.*

$$\Box_B : \Omega^p(M^d) \rightarrow \Omega^p(M^d) \tag{2.3.3}$$

Definido mediante la derivada covariante libre de torsión en la base coordenada $\mathring{\nabla}_\mu$.

$$\Box_B = -\mathring{\nabla}^\mu \mathring{\nabla}_\mu. \tag{2.3.4}$$

Estos operadores coinciden para 0-formas, pero difieren en general para p-formas. Dada una p-forma, la diferencia entre el operador de De Rham y el operador de Beltrami es conocida como la **Identidad de Weitzenböck**:

$$\Box_{dR}\Phi = \Box_B\Phi + I_a(\mathring{R}^a{}_b \wedge I^b\Phi). \tag{2.3.5}$$

En este punto existen 2 observaciones importantes. La primera es que estos operadores no poseen información alguna de la estructura afín. Por lo tanto los operadores de onda solo dependen de la estructura métrica. Debido a esto, el lado derecho de la última ecuación solo dependerá de la curvatura de Riemann $\mathring{R}^a{}_b$ y la conexión de Christoffel $\mathring{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}$, no dependerá de la torsión. La segunda observación corresponde al hecho que el operador de De Rham no es covariante cuando se aplica sobre p-formas evaluadas en el álgebra de Lie asociada al grupo de Lorentz $SO(d-\eta_-, \eta_-)$.
Para que el operador de De Rham sea covariante para p-formas con índices libres de Lorentz, fue generalizado sobre una geometría de Riemann-Cartan en [26], donde la torsión termina contribuyendo a esta generalización del operador de onda y, por tanto, a la identidad de Weitzenböck.
La generalización presentada en [26] del operador de De Rham será conocida como el operador de **Lichnerowicz-De Rham** generalizado, $\blacksquare_{LdR}$.

Definición 16. *El operador de onda generalizado de **Lichnerowicz-De Rham** será un mapeo.*

$$\blacksquare_{LdR} : \Omega^p(M^d) \rightarrow \Omega^p(M^d). \tag{2.3.6}$$

Definido mediante la derivada covarinte de Lorentz D y la coderivada covariante $D^\dagger$.

$$\blacksquare_{LdR} = D^\dagger D + DD^\dagger. \tag{2.3.7}$$

Luego la generalización del operador de Beltrami.

Definición 17. *Sea generalización del operador de* ***Beltrami*** *un mapeo.*

$$\blacksquare_B : \Omega^p(M^d) \to \Omega^p(M^d) \tag{2.3.8}$$

definido mediante la generalización de la derivada de Lie $\mathcal{D}_a$.

$$\blacksquare_B = -\mathcal{D}^a \mathcal{D}_a. \tag{2.3.9}$$

Por lo tanto la generalización de la Identidad de Weitzenböck será.

Definición 18. *La generalización de los operadores de onda de Beltrami y Lichnerowicz-De Rham satisfacen la siguiente generalización de la* ***Identidad de Weitzenböck****.*

$$\blacksquare_{LdR} = \blacksquare_D + I_a D^2 I^a. \tag{2.3.10}$$

Recordemos que el término D^2 es proporcional a la curvatura de Lorentz $R^a{}_b$. Por lo tanto está en función de la contorsión $\kappa^a{}_b$ y por ende de la torsión $T^a = \kappa^a{}_b \wedge e^b$.

Capítulo 3

Ondas Gravitacionales sobre una geometría RC

Como ya mencionamos Newton se percató de una anomalía en su teoría de la gravitación. Ya que, en ésta existía un comportamiento de *acción instantánea a distancia*. Debido a que según la teoría Newtoniana de la Gravedad, dos masas separadas a una gran distancia experimentan una fuerza atractiva de efecto instantáneo.
Newton tuvo la humildad de asumir que su teoría era un modelo insuficiente de la gravedad al tener la genialidad de ser el mismo quien se percatara de esta anomalía y de ahí la paradoja sobre la desaparición del sol.
Si hipotéticamente desapareciera el sol junto su campo gravitacional, según la teoría de Newton, todos los planetas y cuerpos bajo su influencia gravitacional comenzarían a moverse en línea recta **simultáneamente** hasta que otra fuerza los obligue a cambiar su estado de movimiento. Esta *acción instantánea a distancia* inquietaba a Newton por que la propagación de la Gravedad no estaba debidamente definida en su teoría.
Por 200 años se buscaron sin éxito teorías de gravedad con la propagación del campo gravitacional debidamente establecida. Hasta que Einstein dio con la solución definiendo una teoría de Gravedad compatible con los principios de la **relatividad especial**, extendiendo el principio de equivalencia. Modelando el campo gravitacional como la geometría del espacio tiempo, parametrizado mediante el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ cuya dinámica queda determinada por las ecuaciones de campo de Einstein.
Una de las primeras soluciones analíticas llegó de manos del propio Einstein en el año 1916 [35] quien estudiando las ecuaciones de campo de la Relatividad General se dio cuenta que existen perturbaciones de la geometría del espaciotiempo las cuales se

propagan con una velocidad finita. Esto significa que según Relatividad General las perturbaciones de la geometría del campo gravitacional, se propagarán a la velocidad de la luz.
Ante la paradoja de Newton, según **RG**, si el Sol desapareciera la tierra no lo sentiría hasta aproximadamente 8.3 minutos después, tiempo consistente con la velocidad del campo gravitacional equivalente a la velocidad de la luz. De esta forma **RG** resuelve la anomalía sobre la *acción instantánea a distancia*.
La discusión respecto a si la solución de ondas gravitacionales era un resultado físicamente o real o no. Fue un intenso debate que duro prácticamente el mismo tiempo que tardó en encontrar la primera medición de un patrón de ondas gravitacionales producto de la colisión de un sistema binario de agujeros negros, evento medido por el observatorio LIGO [1].
No obstante más sorprendente aún fueron las mediciones de los eventos **GW17817 y GRB170817A** correspondientes a la radiación gravitacional y electromagnética de la fusión de un sistema binario de estrellas de neutrones. [2, 3]. Constituyendo el primer contraste experimental entre la radiación gravitacional con su contraparte electromagnética. Restringiendo fuertemente las modificaciones posibles a RG, ya que, cualquier teoría físicamente consistente deberá ser compatible con el hecho experimental que la radiación gravitacional y la electromagnética se propagan a la misma velocidad.
En el presente capítulo analizaremos la solución de onda plana en RG estándar, luego ver la extensión del estudio de perturbaciones en una geometría de Riemann-Cartan. Para posteriormente mostrar como mediante el estudio de la generalización de la identidad de Weitzenböck y el análisis eikonal de los operadores de onda generalizados podemos ver cómo en el orden dominante la teoría **ECSK** es compatible con las mediciones actuales y en el orden subdominante establece influencia de la torsión en la propagación de la amplitud y polarización de las ondas gravitacionales.
Comenzamos linealizando las ecuaciones de campo de Einstein.

$$\mathring{G}_{\mu\nu} = \mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathring{R} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \tag{3.0.1}$$

Notemos que la solución de esta ecuación es la métrica la cual dependerá no linealmente de la constante de acoplamiento de Newton G y del tensor de energía momentum $T_{\mu\nu}$ que supondremos conocido, tal que $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu})$
Dado que $|G| \ll 1$. Podemos utilizar G como parámetro perturbativo. Tal que según la

teoría de perturbaciones podemos perturbar la solución en potencias de G

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{3.0.2}$$

donde $\bar{g}_{\mu\nu}$ será la métrica del fondo o **background** y $h_{\mu\nu}$ será la perturbación de módulo $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. La perturbación queda definida mediante una serie de potencias de G.

$$h_{\mu\nu} = h^{(1)}_{\mu\nu} + h^{(2)}_{\mu\nu} + ... + h^{(n)}_{\mu\nu}, \tag{3.0.3}$$

donde $h^{(n)}_{\mu\nu} \sim O(G^n)$. Considerando como métrica del background la métrica de Minkowski $\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ la expansión a primer orden de la métrica será.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h^{(1)}_{\mu\nu}, \tag{3.0.4}$$

cuya inversa satisface que $g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$. Por lo tanto la inversa de la perturbación $g^{\mu\nu}_{(1)}$ es.

$$g^{\mu\nu}_{(1)} = -\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho}h^{(1)}_{\lambda\rho} = -h^{\mu\nu}_{(1)}, \tag{3.0.5}$$

en donde, para subir y bajar índices, usaremos la métrica $\eta_{\mu\nu}$ dado el espacio tiempo globalmente plano de fondo. Con estas propiedades de la métrica podemos expandir los símbolos de Christoffel, la curvatura, el tensor de Ricci, el escalar de Ricci, el tensor de Einstein y el tensor de energía-momentum.

$$\mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \mathring{\Gamma}^{\lambda(1)}{}_{\mu\nu} + \mathring{\Gamma}^{\lambda(2)}{}_{\mu\nu} + ... + \Gamma^{\lambda(n)}{}_{\mu\nu}, \tag{3.0.6}$$

$$\mathring{R}^{\rho}{}_{\mu\lambda\nu} = \mathring{R}^{\rho(1)}{}_{\mu\lambda\nu} + \mathring{R}^{\rho(2)}{}_{\mu\lambda\nu} + ... + \mathring{R}^{\rho(n)}{}_{\mu\lambda\nu}, \tag{3.0.7}$$

$$\mathring{R}_{\mu\nu} = \mathring{R}^{(1)}_{\mu\nu} + \mathring{R}^{(2)}_{\mu\nu} + ... + \mathring{R}^{(n)}_{\mu\nu}, \tag{3.0.8}$$

$$\mathring{R} = \mathring{R}^{(1)} + \mathring{R}^{(2)} + ... + \mathring{R}^{(n)}, \tag{3.0.9}$$

$$\mathring{G}_{\mu\nu} = \mathring{G}^{(1)}_{\mu\nu} + \mathring{G}^{(2)}_{\mu\nu} + ... + \mathring{G}^{(n)}_{\mu\nu}. \tag{3.0.10}$$

Las expresiones proporcionales a la curvatura y la conexión de Christoffel tendrán expansiones desde términos a primer orden en teoría de perturbaciones. Debido que, al estar perturbando en torno a un background plano con un sistema de coordenadas constantes los términos a orden cero $\mathring{\Gamma}^{\lambda(0)}{}_{\mu\nu} = \mathring{R}^{\rho(0)}{}_{\mu\lambda\nu} = \mathring{R}^{(0)}_{\mu\nu} = \mathring{R}^{(0)} = \mathring{G}^{(0)}_{\mu\nu} = 0$ son nulos. Por otra parte el tensor de energía-momentum también puede ser expandido:

$$T_{\mu\nu} = T^{(0)}_{\mu\nu} + T^{(1)}_{\mu\nu} + T^{(2)}_{\mu\nu} + ... + T^{(n)}_{\mu\nu}. \tag{3.0.11}$$

El término a orden cero corresponde a la materia uniformemente distribuida en el espacio tiempo plano. De esta forma el esquema perturbativo sobre las ecuaciones de campo será

$$\mathring{G}^{(n)}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{(n-1)}_{\mu\nu}. \tag{3.0.12}$$

Resolviendo a primer orden tendremos que,

$$\mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \mathring{\Gamma}^{\lambda(1)}{}_{\mu\nu}, \quad \mathring{R}^{\rho}{}_{\mu\lambda\nu} = \mathring{R}^{\rho(1)}{}_{\lambda\mu\nu}, \quad \mathring{R}_{\mu\nu} = \mathring{R}^{(1)}_{\mu\nu}, \tag{3.0.13}$$

$$\mathring{R} = \mathring{R}^{(1)}, \quad \mathring{G}_{\mu\nu} = \mathring{G}^{(1)}_{\mu\nu}, \quad \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{(0)}_{\mu\nu}, \tag{3.0.14}$$

donde $\mathring{\Gamma}^{\lambda(1)}{}_{\mu\nu}$, $\mathring{R}^{\rho(1)}{}_{\lambda\mu\nu}$, $\mathring{R}^{(1)}_{\mu\nu}$, $\mathring{R}^{(1)}$, $\mathring{G}^{(1)}_{\mu\nu}$ a primer orden en G serán:

$$\mathring{\Gamma}^{\lambda(1)}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu h^{\lambda(1)}_{\nu} + \partial_\nu h^{\lambda(1)}{}_{\mu} - \partial^\lambda h^{(1)}{}_{\mu\nu}\right), \tag{3.0.15}$$

$$\mathring{R}^{\rho(1)}{}_{\mu\lambda\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial_\lambda\partial_\mu h^{\rho(1)}{}_{\nu} - \partial_\lambda\partial^\rho h^{(1)}_{\mu\nu} - \partial_\nu\partial_\mu h^{\rho(1)}{}_{\lambda} - \partial_\nu\partial^\rho h^{(1)}_{\mu\rho}\right), \tag{3.0.16}$$

$$\mathring{R}^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial_\lambda\partial_\mu h^{\lambda(1)}{}_{\nu} - \partial_\lambda\partial^\lambda h^{(1)}_{\mu\nu} - \partial_\nu\partial_\mu h^{\lambda(1)}{}_{\lambda} - \partial_\nu\partial^\lambda h^{(1)}_{\mu\lambda}\right), \tag{3.0.17}$$

$$\mathring{R}^{(1)} = \partial^\mu\partial^\nu h^{(1)}_{\mu\nu} - \Box h^{(1)}, \tag{3.0.18}$$

$$\mathring{G}^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\partial_\mu\partial^\lambda h^{(1)}_{\lambda\nu} + \partial_\nu\partial^\lambda h^{(1)}_{\mu\lambda} - \partial_\nu\partial_\mu h^{(1)} - \Box h^{(1)} - \eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\lambda h^{(1)}_{\alpha\lambda} - \eta_{\mu\nu}\Box h^{(1)}\right]. \tag{3.0.19}$$

Por economía de la notación y como todas las cantidades relevantes depende de $\eta_{\mu\nu}$ y $h^{(1)}{}_{\mu\nu}$. Utilizamos

$$h^{(1)} = \eta^{\mu\nu} h^{(1)}_{\mu\nu}, \tag{3.0.20}$$

$$\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu. \tag{3.0.21}$$

Considerando el cambio de variable $\bar{h}^{(1)}_{\mu\nu} = h^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{(1)}$ el cual satisface que $\bar{h}^{(1)} = -h^{(1)}$ y $\bar{\bar{h}}^{(1)} = h^{(1)}_{\mu\nu}$. Resulta evidente que $h^{(1)}_{\mu\nu} = \bar{h}^{(1)}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{(1)}$ y por tanto $G^{(1)}_{\mu\nu}$ puede ser escrito como

$$G^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\partial_\mu\partial^\lambda \bar{h}^{(1)}_{\lambda\nu} + \partial_\nu\partial^\lambda \bar{h}^{(1)}_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\lambda \bar{h}^{(1)}_{\alpha\lambda} - \Box\bar{h}^{(1)}_{\mu\nu}\right]. \tag{3.0.22}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de Einstein linealizadas a primer orden en teoría de perturbaciones son:

$$\Box\bar{h}^{(1)}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\partial^{\alpha}\partial^{\lambda}\bar{h}^{(1)}_{\alpha\lambda} - \partial_{\mu}\partial^{\lambda}\bar{h}^{(1)}_{\lambda\nu} - \partial_{\nu}\partial^{\lambda}\bar{h}^{(1)}_{\mu\lambda} = -\frac{16\pi G}{c^4}T^{(0)}_{\mu\nu}. \tag{3.0.23}$$

A partir de que la perturbación a primer orden del tensor de Eintein $G^{(1)}_{\mu\nu}$ satisfará la identidad de Bianchi, $\partial^{\mu}G^{(1)}_{\mu\nu} = 0$, es simple demostrar que la energía y el momento serán consistentemente conservados, $\partial^{\mu}T_{\mu\nu} = 0$.
Ahora podemos considerar un difeomorfismo infinitesimal ξ^{μ} de las coordenadas $x'^{\mu}(x^{\mu}) = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x^{\mu})$, la métrica transformará según.

$$\begin{aligned}
g'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}}g_{\lambda\rho}(x) && (3.0.24)\\
&= (\delta^{\lambda}{}_{\mu} - \partial_{\mu}\xi^{\lambda}_{(1)}(x))(\delta^{\rho}{}_{\nu} - \partial_{\nu}\xi^{\rho}_{(1)}(x))(\eta_{\lambda\rho} + h^{(1)}_{\lambda\rho}(x)) && (3.0.25)\\
&= \eta_{\mu\nu} + h^{(1)}_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\xi^{(1)}_{\nu}(x) - \partial_{\nu}\xi^{(1)}_{\mu} && (3.0.26)\\
&= \eta_{\mu\nu} + h'^{(1)}_{\mu\nu}(x'), && (3.0.27)
\end{aligned}$$

donde el difeomorfismo sobre las coordenadas transformará la perturbación a primer orden de la siguiente forma:

$$h'^{(1)}_{\mu\nu}(x') = h^{(1)}_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\xi^{(1)}_{\nu}(x) - \partial_{\nu}\xi^{(1)}_{\mu}. \tag{3.0.28}$$

La importancia de esta transformación es que mantendrá invariante el tensor de curvatura y por tanto las ecuaciones de campo. Estos difeomorfismo corresponden a las **Transformaciones de Gauge** para **RG** de forma que los elementos invariantes bajo la acción de estas transformaciones, como el tensor de curvatura de Riemann $R'_{\lambda\rho\mu\nu} = R_{\lambda\rho\mu\nu}$ y el de Einstein $G'_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}$, serán invariantes de Gauge.
Escogiendo el **Gauge de Lorenz**.

$$\partial^{\nu}\bar{h}^{(1)}_{\mu\nu} = 0 \tag{3.0.29}$$

Dada esta **libertad de gauge** siempre podemos escoger una transformación (3.0.28) tal que se cumpla el Gauge de Lorenz $\partial^{\nu}\bar{h}'^{(1)}_{\mu\nu} = 0$, imponiendo que la función $\xi^{(1)}_{\mu}$ cumpla que $\Box\xi^{(1)}_{\mu} = \partial^{\nu}\bar{h}^{(1)}_{\mu\nu}$.
Con esto en cuenta, y aplicando el **Gauge de Lorenz**, las ecuaciones de Einstein

linealizadas adoptarán la estructura de la ecuación de onda inhomogenea

$$\Box \bar{h}^{(1)}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c} T^{(0)}_{\mu\nu}. \tag{3.0.30}$$

Notemos que linealizando las Ecuaciones de campo de Einstein. En el gauge de Lorenz las ecuaciones adoptarán la forma de la honda inhomogenea, cuya fuente de onda gravitacional corresponde al tensor de energía-momentum, cuyas soluciones serán campos retardados asintóticamente nulos:

$$\bar{h}^{(1)}_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = -\frac{4G}{c^4} \int \frac{T^{(0)}_{\mu\nu}(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'. \tag{3.0.31}$$

Por lo tanto, la métrica a primer orden será:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \bar{h}^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h^{(1)}. \tag{3.0.32}$$

Por último notemos que en regiones libres de materia la perturbación $\bar{h}^{(1)}_{\mu\nu}$ en el Gauge de Lorenz satisfará la ecuación de onda homogenea.

$$\Box \bar{h}^{(1)}_{\mu\nu} = 0. \tag{3.0.33}$$

Como consecuencia pueden existir soluciones propagantes, cuya velocidad de propagación es la velocidad de la Luz. En la siguiente sección estudiaremos la estructura de esta solución en el vacío.

3.1. Solución de onda plana

Consideremos una región libre de materia por donde se propaga una onda gravitacional plana, paralelamente al eje z, $k_\mu = (k, 0, 0, k)$, que satisfará la ecuación (3.0.33).

$$\bar{h}^{(1)}_{\mu\nu} = \Re(e_{\mu\nu} e^{ik_\lambda x^\lambda}). \tag{3.1.1}$$

donde k_μ es el número de onda y $e_{\mu\nu}$ es el tensor de polarización que corresponderá a las direcciones base en las que vibra la perturbación. Evaluando esta solución en la ec (3.0.33) obtendremos la relación de dispersión $k_\lambda k^\lambda = 0$. Luego mediante el Gague de Lorenz y la elección de sistema de referencia tendremos la condición $e_{\mu\nu}k^\nu = 0 \Rightarrow e_{0\nu} = -e_{3\nu}$

Ahora considerando la condición residual de Gauge podemos escoger una transformación (3.0.28) donde $\xi^{\mu}_{(1)}$ sea armónico $\Box\xi^{\mu}_{(1)} = 0$. Podemos elegir

$$\xi^{\mu}_{(1)} = -\Re(i\epsilon^{\mu}e^{k_{\lambda}x^{\lambda}}), \tag{3.1.2}$$

de forma tal que bajo transformaciones (3.0.28) el tensor de polarización transformará según.

$$e'_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} - \epsilon_{\mu}k_{\nu} - \epsilon_{\nu}k_{\mu} + \eta_{\nu\mu}\epsilon^{\lambda}k_{\lambda}. \tag{3.1.3}$$

Imponiendo que $e'^{00} = e'^{01} = e'^{02} = 0$ y $e'^{11} = -e'^{22}$, las constantes ϵ^{μ} serán:

$$\epsilon^{0} = \frac{1}{4k}(2e^{00} + e^{11} + e^{22}), \tag{3.1.4}$$

$$\epsilon^{1} = \frac{1}{k}e^{01}, \tag{3.1.5}$$

$$\epsilon^{2} = \frac{1}{k}e^{02}, \tag{3.1.6}$$

$$\epsilon^{0} = \frac{1}{4k}(2e^{00} - e^{11} - e^{22}). \tag{3.1.7}$$

Por lo tanto dada la elección de Gauge de Lorenz más su condición de Gauge residual, satisface que $e'^{\mu}{}_{\mu} = 0$, por lo tanto $\bar{h}^{(1)} = h^{(1)} = 0$. Además como $h'^{(1)}_{\mu 0} = 0$ y $h'^{(1)}_{\mu 3} = 0$ se verifica que $e'_{\mu\nu}$ satisface una solución en el Gauge Transversal sin traza, donde la transformación del tensor de polarización será

$$e'^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e'^{11} & e'^{12} & 0 \\ 0 & e'^{12} & -e'^{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e'^{11}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e'^{12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1.8}$$

En este Gauge Transversal sin traza, o **Gauge TT** como suele aparecer en la literatura, se cumplirá que $\bar{h}'^{(1)}_{\mu\nu} = h'^{(1)}_{\mu\nu}$. Por lo tanto definiendo las componentes complejas de la polarización en términos de constantes reales.

$$e'^{11} = h_{+}e^{i\varphi_{+}}, \qquad e'^{12} = h_{\times}e^{-i\varphi_{\times}}. \tag{3.1.9}$$

Estas dos componentes linealmente independientes de la polarización corresponden a la amplitud del modo lineal h_{+} y del modo cruzado $h_{\times}$ respectivamente. Por lo tanto la perturbación métrica en el Gauge TT quedará determinada por

$$h'_{\mu\nu} = h_+ \cos(kct - kz - \varphi_+)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2h_\times \cos(kct - kz - \varphi\times)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1.10}$$

Por lo tanto el elemento de línea resultante será.

$$ds^2 = c^2dt^2 - d\vec{x}^2 + h_+ \cos(kct - kz - \varphi_+)(dx^2 - dy^2) + 2h_\times \cos(kct - kz - \varphi\times)dxdy. \tag{3.1.11}$$

De esta forma encontramos la solución de onda plana para las ecuaciones linealizadas de la Relatividad General. Donde resulta evidente que existen solo dos modos de polarización linealmente independientes. El modo lineal + y el modo cruzado $\times$. Dado el sistema de referencia que escogimos, fijando el eje z positivo con la dirección de propagación de la onda, vemos como las perturbaciones del espacio tiempo se dan en las direcciones perpendiculares dx,dy a la dirección de propagación dz. Además es sencillo demostrar que ambos modos de polarización independientes difieren por una fase global de $\pi/4$, por lo cual es recurrente en la literatura restringirse al estudio de un modo de polarización ya que los efectos del otro corresponderán a una rotación en $\pi/4$ del elemento de línea ds.

Para profundizar más en el estudio de ondas gravitacionales en RG estándar recomendamos el libro de M. Maggiore. *Gravitational Waves: Volume 1: Theory and Experiments* [36].

3.2. Perturbaciones en una geometría RC

Tradicionalmente al estudiar ondas gravitacionales, ya sea en Relatividad General o en teorías de gravedad modificada, se suelen estudiar las perturbaciones métricas en las ecuaciones de campo para teorías particulares.

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{3.2.1}$$

donde $\bar{g}$ será la métrica del espacio por donde se propaga una onda gravitacional $h_{\mu\nu}$ en una geometría de fondo $g_{\mu\nu}$.
En esta sección estudiaremos perturbaciones a las ecuaciones de **Einstein-Cartan** y veremos cómo se relacionan con los operadores diferenciales generalizados a una geometría de Riemann-Cartan. Para esto debemos calcular las perturbaciones de los grados de libertad de nuestra teoría el **vielbein** y la **conexión de spin**:

$$\bar{e}^a = e^a + \frac{1}{2}H^a, \tag{3.2.2}$$
$$\bar{\omega}^{ab} = \omega^{ab} + u^{ab}. \tag{3.2.3}$$

Las perturbaciones métricas o del vielbein son una 1-forma $H^a = H^a{}_b e^b$ de componentes simétricas $H_{ab} = H_{ba}$, luego u^{ab} serán las perturbaciones afines.
Recordemos que $\bar{g}_{\mu\nu}$ y $g_{\mu\nu}$ están relacionadas con los vielbeins $\bar{e}^a$ y e^a respectivamente, de modo que

$$\begin{aligned}
h_{\mu\nu} &= \bar{g}_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} && (3.2.4)\\
&= \eta_{ab}\bar{e}^a{}_\mu \bar{e}^b{}_\nu - \eta_{ab} e^a{}_\mu e^b{}_\nu && (3.2.5)\\
&= \eta_{ab}\left(e^a{}_\mu + \frac{1}{2}H^a{}_c e^c{}_\mu\right)\left(e^a{}_\nu + \frac{1}{2}H^a{}_d e^d{}_\nu\right) - \eta_{ab} e^a{}_\mu e^b{}_\nu && (3.2.6)\\
&= H_{\mu\nu} + \frac{1}{4}H_{\lambda\mu}H^\lambda{}_\nu. && (3.2.7)
\end{aligned}$$

La relación inversa puede obtenerse mediante una expansión en serie.

$$H^a{}_\mu = h^a{}_\mu - \frac{1}{4}h^a{}_\rho h^\rho{}_\mu + \ldots \quad . \tag{3.2.8}$$

Por lo tanto, esto asegura que $H_{\mu\nu}$ y $h_{\mu\nu}$ parametrizan los mismos grados de libertad métricos.
Ahora, para estudiar los grados de libertad afín seguiremos el método de la referencia [37]. Donde la perturbación de la conexión puede ser separada en una parte con torsión $q^{ab} = \bar{\kappa}^{ab} - \kappa^{ab}$ y una parte sin torsión $\mathring{u} = \mathring{\bar{\omega}}^{ab} - \omega^{ab}$, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
u^{ab} &= \bar{\omega}^{ab} - \omega^{ab} && (3.2.9)\\
&= (\bar{\kappa}^{ab} + \mathring{\bar{\omega}}^{ab}) - (\kappa^{ab} + \mathring{\omega}^{ab}) && (3.2.10)\\
&= (\mathring{\bar{\omega}}^{ab} - \mathring{\omega}^{ab}) + (\bar{\kappa}^{ab} - \kappa^{ab}) && (3.2.11)\\
&= \mathring{u}^{ab} + q^{ab}. && (3.2.12)
\end{aligned}$$

Dado que $\mathring{\bar{\omega}}^{ab}$ es la conexión libre de torsión podemos definir una ecuación para las perturbaciones afines libres de Torsión según

$$\begin{aligned} T^a &= d\bar{e}^a + \mathring{\bar{\omega}}^a{}_b \wedge \bar{e}^a && (3.2.13)\\ &= d\left(e^a + \frac{1}{2}H^a\right) + (\mathring{u}^a{}_b + \mathring{\omega}^a{}_b) \wedge \left(e^b + \frac{1}{2}H^b\right) && (3.2.14)\\ &= \frac{1}{2}\mathring{D}H^a + \mathring{u}^a{}_b \wedge \left(e^b + \frac{1}{2}H^b\right) && (3.2.15)\\ &= 0. && (3.2.16) \end{aligned}$$

Podemos resolver esta ecuación para las perturbaciones afines u^{ab}. Expandiendo la solución u^{ab} en forma de serie de potencias en H:

$$u^{ab} = u^{ab}_{(1)} + u^{ab}_{(2)} + O(H^3). \tag{3.2.17}$$

A orden lineal la ecuación será:

$$\frac{1}{2}\mathring{D}H^a + \mathring{u}^{a(1)}{}_b \wedge \left(e^b + \frac{1}{2}H^b\right) = 0, \tag{3.2.18}$$

$$\left(\frac{1}{4}\mathring{\mathcal{D}}_n H^a{}_m \delta^{nm}_{cb} + \frac{1}{2}\mathring{u}^{a(1)}{}_{nm}\delta^{nm}_{bc}\right) e^c \wedge e^b = 0. \tag{3.2.19}$$

Por lo tanto, las componentes deben ser nulas:

$$\mathring{u}^{(1)}_{abc} - \mathring{u}^{(1)}_{acb} = \frac{1}{2}\mathring{\mathcal{D}}_b H_{ac} - \frac{1}{2}\mathring{\mathcal{D}}_c H_{ab}. \tag{3.2.20}$$

Mediante un par de permutaciones cíclicas y sumando las ecuaciones de forma conveniente llegaremos a que:

$$\begin{aligned} \mathring{u}^{(1)}_{abc} - \mathring{u}^{(1)}_{bac} &= \mathring{\mathcal{D}}_b H_{ac} - \mathring{\mathcal{D}}_a H_{bc}, && (3.2.21)\\ \mathring{u}^{(1)}_{abc} &= \frac{1}{2}(\mathring{\mathcal{D}}_b H_{ac} - \mathring{\mathcal{D}}_a H_{bc}), && (3.2.22) \end{aligned}$$

donde usamos que $\mathring{u}^{(1)}_{abc} + \mathring{u}^{(1)}_{bac} = 0$ y la simetría de las perturbaciones afines $H_{ab} = H_{ba}$. Por lo cual las perturbaciones afines a primer orden serán:

$$\begin{aligned} \mathring{u}^{(1)}_{ab} &= \frac{1}{2}(\mathring{\mathcal{D}}_b H_{ac} - \mathring{\mathcal{D}}_a H_{bc})e^c, && (3.2.23)\\ \mathring{u}^{(1)}_{ab} &= -\frac{1}{2}(I_a \mathring{D}H_a - I_b \mathring{D}_a H_a). && (3.2.24) \end{aligned}$$

Repitiendo el mismo proceso podemos encontrar las perturbaciones a orden cuadrático $\mathring{u}^{(2)}_{ab}$, que estarán en función de las perturbaciones a orden lineal $\mathring{u}^{(1)}_{ab}$.

$$\mathring{u}^{(2)}_{ab} = \frac{1}{8} I_{ab}(\mathring{D} H_k \wedge H^k) + \frac{1}{2}\left[I_b(\mathring{u}^{(1)}_{ak} \wedge H^k - I_a(\mathring{u}^{(1)}_{bk} \wedge H^k))\right]. \tag{3.2.25}$$

De momento, solo hemos calculado las perturbaciones afines dependientes de las perturbaciones métricas. Para encontrar soluciones de las perturbaciones afines independientes de las perturbaciones métricas introduciremos el tensor de Lorentz Δ^{ab}, tal que

$$u^{ab} = \mathring{u}^{ab} + q^{ab} + \Delta^{ab} - \Delta^{ab} = U^{ab} + V^{ab}. \tag{3.2.26}$$

Podemos separar entre las perturbaciones afines dependientes de H, $U^{ab} = U^{ab}(H, \partial H)$ y las independientes de H, V^{ab}.

$$U^{ab} = \mathring{u}^{ab} - \Delta^{ab} \tag{3.2.27}$$

$$V^{ab} = q^{ab} + \Delta^{ab} \tag{3.2.28}$$

Análogamente al procedimiento anterior podemos encontrar una ecuación para el tensor Δ^{ab}. Reescribiendo la conexión de spin libre de torsión como $\mathring{\bar{\omega}}^a{}_b = U^a{}_b + \Delta^a{}_b + \omega^a{}_b - \kappa^a{}_b$. Así tendremos que para el caso de torsión cero:

$$T^a = d\bar{e}^a + \mathring{\bar{\omega}}^a{}_b \wedge \bar{e}^b \tag{3.2.29}$$

$$= d\left(e^a + \frac{1}{2}H^a\right) + (\mathring{u}^a{}_b + \mathring{\omega}^a{}_b) \wedge \left(e^b + \frac{1}{2}H^b\right) \tag{3.2.30}$$

$$= d\left(e^a + \frac{1}{2}H^a\right) + (U^a{}_b + \Delta^a{}_b + \omega^a{}_b - \kappa^a{}_b) \wedge \left(e^b + \frac{1}{2}H^b\right) \tag{3.2.31}$$

$$= \frac{1}{2}DH^a + U^a{}_b \wedge \left(e^b + \frac{1}{2}H^b\right) + \Delta^a{}_b \wedge \left(e^b + \frac{1}{2}H^b\right) - \frac{1}{2}\kappa^a{}_b H^b \tag{3.2.32}$$

$$= 0. \tag{3.2.33}$$

Imponiendo la siguiente condición para Δ^{ab}:

$$\Delta_{ab} \wedge \left(e^b + \frac{1}{2}H^b\right) - \frac{1}{2}\kappa_{ab} H^b = \frac{1}{2} I_a \left[H^b \wedge T_b - \frac{1}{2} H^b \wedge I_b(H^c \wedge T_c)\right] + O(H^3). \tag{3.2.34}$$

Podemos resolver esta ecuación con el mismo procedimiento anterior expandiendo Δ_{ab} en serie de potencias en H,

$$\Delta_{ab} = \Delta_{ab}^{(1)} + \Delta_{ab}^{(2)} + O(H^3), \tag{3.2.35}$$

cuyas soluciones a primer y segundo orden son

$$\Delta_{ab}^{(1)} = \frac{1}{2}\left[I_a \kappa_{bc} \wedge H^c + I_b(\kappa_{ac} \wedge H^c)\right], \tag{3.2.36}$$

$$\Delta_{ab}^{(2)} = -\frac{1}{8} I_{ab}(H^c \wedge \kappa_{cd} \wedge H^d) - \frac{1}{2}\left[I_a(\Delta_{bc}^{(1)} \wedge H^c) - I_b(\Delta_{ac}^{(1)}) \wedge H^c\right]. \tag{3.2.37}$$

Expandiendo U_{ab} en serie de potencias de H:

$$U_{ab} = U_{ab}^{(1)} + U_{ab}^{(2)} + ... + O(H^3). \tag{3.2.38}$$

La solución a orden lineal y cuadrático serán:

$$U_{ab}^{(1)} = -\frac{1}{2}(I_a DH_b - I_b DH_a), \tag{3.2.39}$$

$$U_{ab}^{(2)} = \frac{1}{8} I_{ab}(DH_c \wedge H^c) - \frac{1}{2}\left[I_a(U_{bc}^{(1)} \wedge H^c) - I_b U_{ac}^{(1)} \wedge H^c\right]. \tag{3.2.40}$$

Esta parametrización de las perturbaciones afines resulta un poco más general al estar definida en función de la derivada covariante con torsión.
Ahora podemos calcular la perturbación de la curvatura.

$$R^{ab} \to \bar{R}^{ab} = d\bar{\omega}^a{}_b + \bar{\omega}^a{}_c \wedge \bar{\omega}^{cb} \tag{3.2.41}$$

$$= d(\omega^{ab} + u^{ab}) + (\omega^a{}_c + u^a{}_c) \wedge +(\omega^{cb} + u^{cb}) \tag{3.2.42}$$

$$= R^{ab} + DU^{ab} + DV^{ab} + (U^a{}_c + V^a{}_c \wedge (U^{cb} + V^{cb})) \tag{3.2.43}$$

$$= R^{ab} + DU_{(1)}^{ab} + DV^{ab} + DU_{(2)}^{ab} + (U^{a(1)}{}_c + V^a{}_c) \wedge (U_{(1)}^{cb} + V^{cb}) + O(H^3) \tag{3.2.44}$$

$$= R^{ab} + R_{(1)}^{ab} + R_{(2)}^{ab} + O(H^3). \tag{3.2.45}$$

Note que el término a orden lineal sera $R_{(1)}^{ab} = DU_{(1)}^{ab} + DV^{ab}$ y el término a orden cuadrático $R_{(2)}^{ab} = DU_{(2)}^{ab} + (U^{a(1)}{}_c + V^a{}_c) \wedge (U_{(1)}^{cb} + V^{cb})$. Luego, la perturbación de la torsión:

$$
\begin{aligned}
T^a \to \bar{T}^a &= d\bar{e}^a + \bar{\omega}^a{}_b \wedge \bar{e}^b && (3.2.46)\\
&= d\left(e^a + \frac{1}{2}H^a\right) + (\omega^a{}_b + u^a{}_b) \wedge \left(e^b + \frac{1}{2}H^b\right) && (3.2.47)\\
&= T^a + V^a{}_b \wedge \left(e^b + \frac{1}{2}H^b\right) - \frac{1}{2}I_a\left[H^b \wedge T_b - \frac{1}{2}H^b \wedge I_b(H^c \wedge T_c)\right]. && (3.2.48)
\end{aligned}
$$

De este esquema perturbativo el único término relevante es $R^{ab}_{(1)} = DU^{ab}_{(1)} + DV^{ab}$. Debido que es el único que contribuirá con ecuaciones de segundo orden en las perturbaciones como es debido para la propagación de una onda. Por lo tanto, de la perturbación en las ecuaciones de campo. Debemos estudiar el siguiente término.

$$
\frac{1}{2}\epsilon_{abcn}R^{ab}_{(1)} \wedge e^c = 0. \tag{3.2.49}
$$

Como se mostro en [25] este término contiene a los términos dominantes y subdominantes en la expansion eikonal. Para mayor detalle del tamaño característico de este término revisar apéndice D.

3.3. Propagación de la onda y Expansión eikonal

Para que la onda gravitacional esté bien definida debe existir una separación entre la escala con la que varía el background L y la escala con la que varía la perturbación λ[1]. Tal que podemos definir el siguiente parámetro.

$$
\lambdabar = \frac{\lambda}{2\pi} \ll L \qquad \Rightarrow \qquad \epsilon = \frac{\lambdabar}{L} \ll 1, \tag{3.3.1}
$$

lo cual significa que la frecuencia de oscilación de la perturbación debe ser mucho mayor que la frecuencia del background. Esto es lógico, puesto que si la fase de la onda fuera equivalente a la escala de variación del background. La onda ya dejaría de ser una onda y sería un medio. Con esto en cuenta y una estimación de órdenes de magnitud podemos determinar que todos lo términos dominantes $\mathcal{O}(1/\epsilon^2)$ y subdominantes $\mathcal{O}(1/\epsilon)$ estarán contenidos en el siguiente término de las perturbación a primer orden de las

[1]Note que λ es la longitud de onda de la onda gravitacional. Además, a lo largo del **limite eikonal** la fase θ cambiará rápidamente en la escala de la longitud de onda y la amplitud cambiará lentamente a lo largo de la longitud del background.

ecuaciones de campo para la curvatura:

$$\frac{1}{2}\epsilon_{abcn}R^{ab}_{(1)} \wedge e^c = 0. \tag{3.3.2}$$

Según [25] es posible demostrar que las perturbaciones $U(H)$ podemos parametrizarlas en términos de los operadores diferenciales. Así la ecuación (3.3.2) puede ser escrita como

$$\frac{1}{2}\epsilon_{abcn}R^{ab}_{(1)} \wedge e^c = \left(W_{mn} - \frac{1}{2}\eta_{mn}W\right) * e^m = 0, \tag{3.3.3}$$

donde W^{mn} es definido según.

$$W^m{}_n = I_{an}R^{am}_{(1)} = 0 \Rightarrow \tag{3.3.4}$$

$$W_{mn} = -\frac{1}{2}(I_n\mathcal{D}_a\mathcal{D}^a H_m - I_n[\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_m]H^a) + (I_n\mathcal{D}_a - \mathcal{D}_n I_a)V^a{}_m. \tag{3.3.5}$$

Este operador condensará toda la información referente a la propagación de las ondas gravitacionales.

Ahora dado que $\lambda\!\!\!^{-} \ll L$ podemos aplicar la **expansión eikonal**. La cual es válida cuando la fase θ cambia en la escala de la longitud de onda $\lambda\!\!\!^{-}$ y la amplitud cambia lentamente en la escala del background. Las perturbaciones que satisfacen esta condición, según la aproximación eikonal, pueden ser expandidas según,

$$H^a = e^{i\theta}\sum_{p=0}^{\infty}\mathbb{H}^a_{(p)}, \tag{3.3.6}$$

$$V^{ab} = e^{i\theta}\sum_{p=0}^{\infty}\mathbb{V}^{ab}_{(p)}, \tag{3.3.7}$$

donde para $p = 0$ tendremos los términos dominantes de la expansión, $p = 1$ corresponde los términos subdominantes y los términos $p \geq 2$ corresponderán a términos de orden superior que contribuirán a desviaciones de la óptica geométrica.

Además el término dominante de las perturbaciones métricas $\mathbb{H}^a_{(0)} = \varphi P^a$, donde φ será la amplitud y $P^a = P^a{}_b \wedge e^b$ la 1-forma de polarización.

Por lo tanto, la expansión eikonal del operador W_{mn} será.

$$W_{mn} = -\frac{1}{2}(I_n\mathcal{D}_a\mathcal{D}^a(e^{i\theta}\mathbb{H}_m) - I_n[\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_m](e^{i\theta}\mathbb{H}^a)) + (I_n\mathcal{D}_a - \mathcal{D}_n I_a)(e^{i\theta}\mathbb{V}^a{}_m) = 0. \tag{3.3.8}$$

Por lo tanto, considerando la 1-forma número de onda $k = d\theta$. Podemos factorizar las exponenciales de cada término de la ecuación anterior utilizando el super álgebra de operadores diferenciales (2.2.11)-(2.2.16).

$$I_n\mathcal{D}_a\mathcal{D}^a(e^{i\theta}\mathbb{H}_m) = e^{i\theta}(-k^2\mathbb{H}_{mn} + i(2k^aT_{ban}\mathbb{H}^b{}_m + 2k^a\mathcal{D}_a\mathbb{H}_{mn} + \mathcal{D}_ak^a\mathbb{H}_{mn}) + I_n\mathcal{D}_a\mathcal{D}^a\mathbb{H}_m), \tag{3.3.9}$$

$$I_n[\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_m](e^{i\theta}\mathbb{H}^a) = e^{i\theta}(I_n[\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_m]\mathbb{H}^a - iT_{abm}k^a\mathbb{H}^b{}_n), \tag{3.3.10}$$

$$(I_n\mathcal{D}_a - \mathcal{D}_nI_a)(e^{i\theta}\mathbb{V}^a{}_m) = e^{i\theta}(ik^a(\mathbb{V}_{amn} + \eta_{an}\mathbb{V}_{mc}{}^c) + I_n\mathcal{D}_a\mathbb{V}^a{}_m - \mathcal{D}_nI_a\mathbb{V}^a{}_m). \tag{3.3.11}$$

Por lo tanto la ecuación (3.3.8) podrá ser rescrita como:

$$W_{mn} = e^{i\theta}\left\{\frac{1}{2}k^2\mathbb{H}_{mn} + \mathbb{V}_{mn}\right\} \tag{3.3.12}$$

$$+ ie^{i\theta}\left\{\left(\frac{1}{2}\mathcal{D}_ak^a\mathbb{H}_{mn} + k^a\left[\mathcal{D}_a\mathbb{H}_{mn} + T_{ban}\mathbb{H}^b{}_m + \frac{1}{2}T_{abm}\mathbb{H}^b{}_n - (\mathbb{V}_{amn} + \eta_{an}\mathbb{V}_{mc}{}^c)\right]\right)\right\} \tag{3.3.13}$$

$$= 0 \tag{3.3.14}$$

En la expansión eikonal las perturbaciones serán de orden $\mathbb{H}^a_{(p)}, \mathbb{V}^{am}_{(p)} \sim \epsilon^p$ y por tanto los términos dominantes del operador $W^{(1)}_{mn}$ será de orden $O(\epsilon^{-2})$ y el término subdominante $W^{(1)}_{mn}$ será de orden $O(\epsilon^{-1})$. Así estudiando el orden de magnitud de los siguientes términos:

$$k \sim \frac{1}{L}\frac{1}{\epsilon}, \tag{3.3.15}$$

$$\partial k \sim \frac{1}{L^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{3.3.16}$$

De esta forma podemos separar la ecuación (3.3.13) en términos dominantes y subdominantes $W_{mn} = e^{i\theta}(W^{(0)}_{mn} + W^{(1)}_{mn})$, según [2]

$$W^{(0)}_{mn} = \frac{1}{2}k^2\mathbb{H}^{(0)}_{mn} = 0, \tag{3.3.17}$$

$$W^{(1)}_{mn} = \frac{1}{2}k^2\mathbb{H}^{(1)}_{mn} - i\left(\frac{1}{2}\mathcal{D}_ak^a\mathbb{H}^{(0)}_{mn} + k^a\left[\mathcal{D}_a\mathbb{H}^{(0)}_{mn}T_{ban}\mathbb{H}^b_{(0)m} + \frac{1}{2}T_{bam}\mathbb{H}^b_{(0)n} - (\mathbb{V}^{(0)}_{amn} + \eta_{an}\mathbb{V}^{(0)c}_{mc})\right]\right) = 0. \tag{3.3.18}$$

[2]Para mayor detalle revisar Apéndice C.

Analizando el orden dominante de la expansión eikonal vemos como la relación de dispersión es equivalente a la expresión de Relatividad General:

$$k_a k^a = k_\mu k^\mu = 0. \tag{3.3.19}$$

Considerando que el número de onda es proporcional al vector tangente de la geodésica $k^a \propto \frac{dX^a}{d\eta} \propto t^a$.

$$k^\lambda = \frac{1}{\lambda\!\!\!^-}\frac{dX^\lambda}{d\eta} = \frac{1}{\lambda\!\!\!^-}t^\lambda \tag{3.3.20}$$

La derivada direccional será

$$k^\mu \mathring{\nabla}_\mu k^\lambda = \frac{1}{\lambda\!\!\!^-}\left(\frac{d^2X^2}{d\eta^2} + \mathring{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}\frac{dX^\mu}{d\eta}\frac{dX^\nu}{d\eta}\right) = 0. \tag{3.3.21}$$

Las ondas gravitacionales y la radicación electromagnética se propagaran no solo en la misma trayectoria que la luz, sino que, también a la misma velocidad para una misma fuente[3]. Estos resultados son sumamente importantes, ya que estas relaciones son compatibles con las mediciones realizadas por LIGO, VIRGO y Fermi [4, 5]. Imponiendo fuertes restricciones sobre las familias de teorías torsionales, ya que la trayectoria y la relación de dispersión para la propagación de una onda gravitacional será equivalente a Relatividad General independiente de la torsión del espaciotiempo. Ahora, cuando analizamos el orden subdominante de la expansión eikonal, tenemos que

$$\left(\frac{1}{2}\mathcal{D}_a k^a \mathbb{H}^{(0)}_{mn} + k^a\left[\mathcal{D}_a \mathbb{H}^{(0)}_{mn} T_{ban}\mathbb{H}^b_{(0)m} + \frac{1}{2}T_{bam}\mathbb{H}^b_{(0)n} - (\mathbb{V}^{(0)}_{amn} + \eta_{an}\mathbb{V}^{(0)c}_{mc})\right]\right) = 0. \tag{3.3.22}$$

Definiendo $\mathcal{H}_{mn} = \mathbb{H}^{(0)}_{mn} = \varphi P_{mn}$, $\mathcal{V}_{amn} = \mathcal{H}^{(0)}_{amn}$, y descomponiendo en una parte simétrica.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathcal{D}_a k^a \mathcal{H}_{mn} + \\
&+ k^a\left[\mathcal{D}_a \mathcal{H}_{mn} + \frac{1}{2}\left\{\left(T_{ban} + \frac{1}{2}T_{abn}\right)\mathcal{H}^b{}_m + \left(T_{bam} + \frac{1}{2}T_{abm}\right)\mathcal{H}^b{}_n\right\}\right] - \\
&- k^a\frac{1}{2}(\mathcal{V}_{amn} + \mathcal{V}_{anm} + \eta_{an}\mathcal{V}_{mc}{}^c + \eta_{am}\mathcal{V}_{nc}{}^c) = 0.
\end{aligned} \tag{3.3.23}$$

[3]Dadas las mismas condiciones iniciales.

Luego, la parte antisimétrica

$$\frac{1}{2}k^a\left[\left(T_{ban}-\frac{1}{2}T_{abn}\right)\mathcal{H}^b{}_m-\left(T_{bam}-\frac{1}{2}T_{abm}\right)\mathcal{H}^b{}_n-(\mathcal{V}_{amn}-\mathcal{V}_{anm}+\eta_{an}\mathcal{V}_{mc}{}^c-\eta_{am}\mathcal{V}_{nc}{}^c)\right]. \tag{3.3.24}$$

Tomando la traza de (3.3.24) es fácil mostrar que

$$\mathcal{V}_{nc}{}^c=\frac{1}{4}(T^c{}_{cb}\mathcal{H}^b{}_n-T_{pqn}\mathcal{H}^{pq}). \tag{3.3.25}$$

Haciendo permutaciones cíclicas de esta última relación, de forma análoga para cuando calculamos las perturbaciones afines, encontramos la siguiente solución,

$$\mathbb{V}_{amn}=\frac{1}{2}(\mathbb{P}_{a[mn]}-\mathbb{P}_{m[an]}+\mathbb{P}_{n[ma]}), \tag{3.3.26}$$

donde $\mathbb{P}_{a[mn]}$ será.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{a[mn]}=&\left(T_{ban}-\frac{1}{2}T_{abn}\right)\mathcal{H}^b{}_m-\left(T_{bam}-\frac{1}{2}T_{abm}\right)\mathcal{H}^b{}_n+\\&+\frac{1}{4}[\eta_{am}(T^c{}_{cb}\mathcal{H}^b{}_n-T_{pqn}\mathcal{H}^{pq})-\eta_{an}(T^c{}_{cb}\mathcal{H}^b{}_m-T_{pqn}\mathcal{H}^{pq})].\end{aligned} \tag{3.3.27}$$

Remplazando estas últimas dos relaciones y el gauge de Lorenz en la ecuación (3.3.23), obtenemos la siguiente ecuación,

$$\frac{1}{2}\mathcal{D}_ak^a\mathcal{H}_{mn}-k^c\left(\mathcal{D}_c\mathcal{H}_{mn}+\frac{1}{2}M^+_{cmn}\right)=0, \tag{3.3.28}$$

donde M^+_{cmn} es determinado por:

$$\begin{aligned}M^+_{cmn}=&\left(2T_{bcn}+\frac{1}{2}[T_{cbn}+T_{nbc}]\right)\mathcal{H}^b{}_m+\left(2T_{bcm}+\frac{1}{2}[T_{bcm}+T_{mbc}]\right)\mathcal{H}^b{}_n+\\&+\frac{1}{2}\eta_{mn}T_{pqc}\mathcal{H}^{pq}-\frac{1}{4}[\eta_{mn}T^s{}_{sc}-(T_{mnc}+T_{nmc})]\mathcal{H}.\end{aligned} \tag{3.3.29}$$

La ec (3.3.28) codifica la propagación anómala de la amplitud φ y polarización $P_{\mu\nu}$ mediante las perturbaciones $\mathcal{H}_{mn}=\mathbb{H}^{(0)}_{mn}=\varphi P_{mn}$.

3.4. Propagación anómala de la amplitud

Según [38], podemos definir el número de rayos de ondas gravitacionales como $J = \varphi^2 k_a e^a$, cantidad que en la Relatividad General estándar es conservada:

$$\mathring{\nabla}_\mu \mathring{J}^\mu = 0. \tag{3.4.1}$$

No obstante, en la teoría **ECSK** esto cambia. Analicemos esta influencia de la torsión. Al calcular la derivada de la densidad de corriente en la teoría **ECSK** podemos separar entre la contribución con torsión y la sin torsión.

$$\mathcal{D}_a J^b = I_a \mathring{D} J^b + I_a \kappa^b{}_c J^c \tag{3.4.2}$$

$$= \mathring{\mathcal{D}}_a J^b + \kappa^b{}_{ca} J^c. \tag{3.4.3}$$

Por lo tanto, usando $\kappa^a{}_{bc} = T^a{}_{bc}$, la derivada libre de torsión con los índices contraídos será

$$\mathring{\mathcal{D}}_a J^a = \mathcal{D}_a J^a - T^a{}_{ac} J^c. \tag{3.4.4}$$

La amplitud será un escalar real φ, mientras que las componentes de la polarización P_{mn} son complejas y normalizadas. Ambas cantidades están definidas y relacionadas en la perturbación a orden dominante,

$$\mathbb{H}^{(0)}_{mn} = \mathcal{H}_{mn} = \varphi P_{mn}, \tag{3.4.5}$$

donde es evidente que $\bar{\mathcal{H}}_{mn}\mathcal{H}^{mn} = \varphi^2$. Con estas relaciones en mente podemos calcular

$$k^a \mathcal{D}_a \varphi^2 = k^a \mathcal{D}_a \bar{\mathcal{H}}_{mn} \mathcal{H}^{mn} + \bar{H}^{mn} k^a \mathcal{D}_a \mathcal{H}_{mn} = 0. \tag{3.4.6}$$

Considerando la ec (3.3.28)

$$k^a \mathcal{D}_a \varphi^2 = -\frac{1}{2}(\mathcal{D}_a k^a \bar{\mathcal{H}}_{mn} + k^a \bar{M}^+_{amn})\mathcal{H}^{mn} - \frac{1}{2}\bar{\mathcal{H}}^{mn}(\mathcal{D}_a k^a \mathcal{H}_{mn} + k^a M^+_{amn}) \tag{3.4.7}$$

$$= -\mathcal{D}_a k^a \varphi^2 - \frac{1}{2} k^a (\bar{M}^+_{amn} \mathcal{H}^{mn} + \bar{H}^{mn} M^+_{amn}) \tag{3.4.8}$$

$$= 0, \tag{3.4.9}$$

donde hallamos que

$$\mathcal{D}_a k^a \varphi^2 = \mathcal{D}_a J^a = -\frac{1}{2} k^a (\bar{M}^+_{amn} \mathcal{H}^{mn} + \bar{H}^{mn} M^+_{amn}). \tag{3.4.10}$$

Evaluando (3.3.29) y definiendo Π^{ab} por

$$\Pi^{ab} = \frac{1}{2} \left[3(\bar{P}^{as} P_s{}^b + P^{as} \bar{P}_s{}^b) - (\bar{P} P^{ab} + \bar{P}^{ab} P) + \frac{1}{2} \bar{P} P \eta^{ab} \right], \tag{3.4.11}$$

la ec (3.4.10) será

$$\mathcal{D}_a J^a = \Pi^{ab} T_{abc} J^c. \tag{3.4.12}$$

Finalmente, la derivada covariante para el número de rayos libre de torsión, ec (3.4.4), es:

$$\mathring{\mathcal{D}}_a J^a = \Pi^{ab} T_{abc} J^c - T^a{}_{ac} J^c \tag{3.4.13}$$

$$= (\Pi^{ab} - \eta^{ab}) T_{abc} J^c. \tag{3.4.14}$$

Esta relación pude ser interpretada como la no conservación del número de rayos de onda gravitacional. También está relacionada con el flujo de patrones de ondas en cierto elemento de volumen. No obstante como la densidad de corriente J es proporcional a la amplitud φ, la amplitud será amortiguada o amplificada por influencia de la torsión.
Para encontrar potenciales efectos de la torsión en las ondas gravitacionales. Podemos considerar dos etapas principalmente: la emisión y la propagación. Estudiaremos el caso de **torsión débil**, lo que significa que el proceso de emisión será equivalente al de RG estándar. Pero el proceso de propagación de la amplitud tendrá desviaciones respecto a las relaciones de RG.
Para parametrizar estas desviaciones respecto la teoría estándar consideremos el siguiente ansatz:

$$A(\eta) = \ln(\frac{\varphi}{\mathring{\varphi}}) \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(\eta) = e^{A(\eta)} \mathring{\varphi}. \tag{3.4.15}$$

Por lo tanto, considerando como condición de borde que al momento de la emisión la amplitud coincida con la relación de RG estándar $\varphi(\eta_0) = \mathring{\varphi}$, y además considerando

$N_\mu = (\Pi^{\lambda\nu} - g^{\lambda\nu})T_{\lambda\nu\mu}$, la ecuación para la propagación de la amplitud será:

$$\mathring{\nabla}_\mu(e^{2A}\mathring{\varphi}^2 k^\mu) = N_\mu J^\mu, \tag{3.4.16}$$

$$\mathring{\nabla}_\mu(e^{2A})\mathring{\varphi}^2 k^\mu + e^{2A}\mathring{\nabla}_\mu(\mathring{\varphi}^2 k^\mu) = N_\mu e^{2A}\mathring{\varphi}^2 k^\mu. \tag{3.4.17}$$

Dada la conservación de rayos en Relatividad General $\mathring{\nabla}_\mu \mathring{J}^\mu = \mathring{\nabla}_\mu(\mathring{\varphi}^2 k^\mu) = 0$. Además de la proporción $k^\lambda = \frac{1}{\lambda}\frac{dX^\lambda}{d\eta}$, la ecuación se reducirá a

$$\frac{de^{2A(\eta)}}{d\eta} = N_\mu e^{2A}\frac{dX^\mu}{d\eta}, \tag{3.4.18}$$

$$\frac{dA(\eta)}{d\eta} = \frac{1}{2}N_\mu\frac{dX^\mu}{d\eta}. \tag{3.4.19}$$

Esto nos permite la integración de forma directa,

$$A(\eta) = \frac{1}{2}\int_{\eta_0}^{\eta} d\eta N_\lambda \frac{dX^\lambda}{d\eta}, \tag{3.4.20}$$

con lo cual, la solución para la propagación de la amplitud en un espaciotiempo con torsión es:

$$\varphi(\eta) = e^{\frac{1}{2}\int_{\eta_0}^{\eta} d\bar{\eta} N_\mu(\bar{\eta})\frac{dX^\mu}{d\bar{\eta}}}\,\mathring{\varphi} \tag{3.4.21}$$

$$= \exp\left[\frac{1}{2}\int_{\eta_0}^{\eta} d\bar{\eta}(\Pi^{\mu\nu} - g^{\mu\nu})T_{\mu\nu\lambda})\frac{dX^\mu}{d\bar{\eta}}\right]\mathring{\varphi}. \tag{3.4.22}$$

Vemos que la propagación anómala de la amplitud dependerá de la métrica, la torsión y la polarización mediante el tensor $\Pi^{\mu\nu}$. No obstante, en el límite $T_{\mu\nu\lambda} = 0$ la relación retornará al caso de Relatividad General estándar.

3.5. Propagación anómala de la polarización

Evaluando $\mathcal{H}_{mn} = \varphi P_{mn}$ en la ec (3.3.28) tenemos que.

$$\frac{1}{2}(\mathcal{D}_a k^a)\varphi P_{mn} + k^a \mathcal{D}_a(\varphi P_{mn}) + \frac{1}{2}k^a M^+_{amn} = 0, \tag{3.5.1}$$

$$k^c \mathcal{D}_c P_{mn} + \frac{1}{\varphi}\left(k^a(\mathcal{D}_a\varphi) + \frac{1}{2}\varphi(\mathcal{D}_a k^a)\right)P_{mn} + \frac{1}{2\varphi}k^a M^+_{amn} = 0, \tag{3.5.2}$$

$$k^c \mathcal{D}_c P_{mn} + \frac{1}{\varphi}\left(\frac{1}{2\varphi}(\mathcal{D}_a J^a)\right)P_{mn} + \frac{1}{2\varphi}k^a M^+_{amn} = 0, \tag{3.5.3}$$

$$k^c \mathcal{D}_c P_{mn} + \left(\frac{1}{2}\Pi^{ab}T_{abc}k^c\right)P_{mn} + \frac{1}{2\varphi}k^a M^+_{amn} = 0, \tag{3.5.4}$$

$$k^c \mathcal{D}_c P_{mn} + \frac{1}{2}k^c\left[\Pi^{ab}T_{abc}P_{mn} + \frac{1}{2\varphi}M^+_{cmn}\right] = 0. \tag{3.5.5}$$

Recordando que $\omega^{ab} = \mathring{\omega}^{ab} + \kappa^{ab}$, la derivada covariante de la polarización será

$$\mathcal{D}_c P_{mn} = \mathring{\mathcal{D}}_c P_{mn} + \kappa_{nbc}P^B{}_m + \kappa_{mbc}P^b{}_n. \tag{3.5.6}$$

Por lo tanto, la ecuación para la propagación de la paralización debería ser

$$\mathring{\mathcal{D}}_c P_{mn} = -\frac{1}{2}k^c\left[\Pi^{ab}T_{abc}P_{mn} + \frac{1}{2\varphi}M^+_{cmn}\right] - \kappa_{nbc}P^B{}_m - \kappa_{mbc}P^b{}_n. \tag{3.5.7}$$

Evaluando el término M^+_{cmn} y escribiendo en la base coordenada, la ecuación para la propagación de la polarización será

$$\begin{aligned} k^\lambda \mathring{\nabla}_\lambda P_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}k^\lambda \Bigg[\Pi^{\rho\sigma}T_{\rho\sigma\lambda}P_{\mu\nu} + \left(T_{\sigma\lambda\nu} - \frac{1}{2}[T_{\lambda\sigma\nu} + T_{\nu\sigma\lambda}]\right)P^\sigma{}_\mu + \\ \left(T_{\sigma\lambda\mu} - \frac{1}{2}[T_{\lambda\sigma\mu} + T_{\mu\sigma\lambda}]\right)P^\sigma{}_\nu + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T_{\rho\sigma\lambda}P^{\rho\sigma} - \frac{1}{4}[g_{\mu\nu}T^\sigma{}_{\sigma\lambda} - (T_{\mu\nu\lambda} + T_{\nu\mu\lambda})]P\Bigg]. \end{aligned} \tag{3.5.8}$$

En RG estándar las polarizaciones se propagan paralelamente sobre una geodésica nula $k^\lambda \mathring{\nabla}_\lambda \mathring{P}_{\mu\nu} = 0$. No obstante, en un espaciotiempo con torsión, la propagación de las polarizaciones serán influenciadas por la torsión. Encontrar soluciones particulares de esta ecuación, que modelen escenarios astrofísicos potencialmente medibles es el objetivo principal este análisis fenomenológico de la incidencia de la torsión en las ondas gravitacionales.

Para esto describiremos por completo las propiedades de la polarización En el Apendice.

En la siguiente sección analizaremos el comportamiento para la polarización de una onda gravitacional en una geometría de Riemann-Cartan, considerando fuentes de onda fermiónicas.

Capítulo 4

Efecto Faraday-Cartan en la polarización de una onda gravitacional

En este capítulo estudiaremos la propagación anómala de la polarización de GWs, buscando soluciones a la ecuación (3.5.8). Para ello, comenzaremos utilizando la descomposición (2.1.2) sobre (3.5.8), de manera que podamos concentrarnos en el caso de torsión axial, donde la ecuación se reduce a una ecuación lineal fácilmente integrable. En el marco ortonormal, analizaremos primero la propagación de la polarización en RG estándar, para luego generalizar al caso con torsión débil en la teoría ECSK. En ambos casos, la propagación de la polarización dependerá de la conexión de spín libre de torsión $\mathring{\omega}_{abc}$, pero en presencia de torsión, existirá además una contribución de la componente axial de la torsión $\mathcal{A}^a$.

Así, para una torsión axial, estudiaremos dos casos simples pero altamente ilustrativos: en primer lugar, una geometría de fondo cosmológica con métrica tipo FLRW, y posteriormente generalizaremos este resultado para cualquier métrica esféricamente simétrica. En ambos casos, encontramos que la dinámica de la teoría ECSK restringe la polarización exclusivamente a los modos $+$ y $\times$. No obstante, los modos de polarización rotan uno en el otro debido a la torsión acumulada a lo largo de la geodésica, en un fenómeno análogo al efecto Faraday de la óptica para ondas electromagnéticas, al que denominamos **efecto Faraday-Cartan** para ondas gravitacionales.

4.1. Descomposición de la ecuación para la propagación de la polarización

Recordemos la descomposición de la torsión en sus componentes **tensoriales**, **vectoriales** y **axiales**. Aplicando la descomposición para la ecuación de la propagación anómala de la polarización tenderemos que:

$$k^{\lambda}\mathring{\nabla}_{\lambda}P_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}k^{\lambda}\left[I^{T}_{\mu\nu\lambda} + I^{V}_{\mu\nu\lambda} + I^{A}_{\mu\nu\lambda}\right]. \tag{4.1.1}$$

Para calcular las distintas componentes de la ecuación, $I^{T}_{\mu\nu\lambda}$, $I^{V}_{\mu\nu\lambda}$ e $I^{A}_{\mu\nu\lambda}$. Debemos descomponer los siguientes términos:

$$\Pi^{\rho\sigma}T_{\rho\sigma\lambda}P_{\mu\nu} = \Pi^{\rho\sigma}\left[\frac{2}{3}(\mathcal{T}_{\rho\sigma\lambda} - \mathcal{T}_{\rho\lambda\sigma}) + \frac{1}{3}(g_{\rho\sigma}\mathcal{V}_{\lambda} - g_{\rho\lambda}\mathcal{V}_{\sigma}) + \sqrt{|g|}\epsilon_{\rho\sigma\lambda\alpha}\mathcal{A}^{\alpha}\right]P_{\mu\nu} \tag{4.1.2}$$

$$= \left[\Pi^{\rho\sigma}\mathcal{T}_{\rho\sigma\lambda} + \frac{1}{6}(2\cdot 3g_{\lambda\sigma}\mathcal{V}^{\sigma} - 2\Pi^{\rho}{}_{\cdot\sigma}\mathcal{V}^{\sigma})\right]P_{\mu\nu} \tag{4.1.3}$$

Ahora estudiemos el siguiente término.

$$\left(T_{\sigma\lambda\nu} - \frac{1}{2}[T_{\lambda\sigma\nu} + T_{\nu\sigma\lambda}]\right)P^{\sigma}{}_{\mu}. \tag{4.1.4}$$

Comenzamos con:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[T_{\lambda\sigma\nu} + T_{\nu\sigma\lambda}\right]P^{\sigma}{}_{\mu} =& \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(\mathcal{T}_{\lambda\sigma\nu} - \mathcal{T}_{\lambda\nu\sigma}) + \frac{1}{3}(g_{\lambda\sigma}\mathcal{V}_{\nu} - g_{\lambda\nu}\mathcal{V}_{\sigma}) + \sqrt{|g|}\epsilon_{\lambda\sigma\nu\alpha}\mathcal{A}^{\alpha} + \right.\\
&\left. + \frac{2}{3}(\mathcal{T}_{\nu\sigma\lambda} - \mathcal{T}_{\nu\lambda\sigma}) + \frac{1}{3}(g_{\nu\sigma}\mathcal{V}_{\lambda} - g_{\nu\lambda}\mathcal{V}_{\sigma}) + \sqrt{|g|}\epsilon_{\nu\sigma\lambda\alpha}\mathcal{A}^{\alpha}\right]P^{\sigma}{}_{\mu}\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(\mathcal{T}_{\lambda\sigma\nu} - \mathcal{T}_{\lambda\nu\sigma} + \mathcal{T}_{\nu\sigma\lambda} - \mathcal{T}_{\nu\lambda\sigma}) + \right.\\
&\left. + \frac{1}{3}(g_{\lambda\sigma}\mathcal{V}_{\nu} - g_{\lambda\nu}\mathcal{V}_{\sigma} + g_{\nu\sigma}\mathcal{V}_{\lambda} - g_{\nu\lambda}\mathcal{V}_{\sigma})\right]P^{\sigma}{}_{\mu}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$T_{\sigma\lambda\nu}P^{\sigma}{}_{\mu} = \left[\frac{2}{3}(\mathcal{T}_{\sigma\lambda\nu} - \mathcal{T}_{\sigma\nu\lambda}) + \frac{1}{3}(g_{\sigma\lambda}\mathcal{V}_{\nu} - g_{\sigma\nu}\mathcal{V}_{\lambda}) + \sqrt{|g|}\epsilon_{\sigma\lambda\nu\alpha}\mathcal{A}^{\alpha}\right]P^{\sigma}{}_{\mu}.$$

De esta forma el término completo es:

$$\begin{aligned}\left(T_{\sigma\lambda\nu} - \frac{1}{2}[T_{\lambda\sigma\nu} + T_{\nu\sigma\lambda}]\right)P^{\sigma}{}_{\mu} =& \frac{2}{3}\left[(\mathcal{T}_{\sigma\lambda\nu} - \mathcal{T}_{\sigma\nu\lambda}) - \frac{1}{2}(\mathcal{T}_{\lambda\sigma\nu} - \mathcal{T}_{\lambda\nu\sigma} + \mathcal{T}_{\nu\sigma\lambda} - \mathcal{T}_{\nu\lambda\sigma})\right]P^{\sigma}{}_{\mu} + \\ &+ \frac{1}{3}\left[(g_{\sigma\lambda}\mathcal{V}_{\nu} - g_{\sigma\nu}\mathcal{V}_{\lambda}) - \frac{1}{2}(g_{\lambda\sigma}\mathcal{V}_{\nu} - g_{\lambda\nu}\mathcal{V}_{\sigma} + g_{\nu\sigma}\mathcal{V}_{\lambda} - g_{\nu\lambda}\mathcal{V}_{\sigma})\right]P^{\sigma}{}_{\mu} + \\ &+ \sqrt{|g|}\epsilon_{\sigma\lambda\nu\alpha}\mathcal{A}^{\alpha}P^{\sigma}{}_{\mu} \\ &= \frac{1}{3}(\mathcal{T}_{\sigma\lambda\nu} - 3\mathcal{T}_{\nu\sigma\lambda} + 2\mathcal{T}_{\lambda\nu\sigma})P^{\sigma}{}_{\mu} + \\ &+ \frac{1}{6}\mathcal{V}^{\rho}(g_{\sigma\lambda}g_{\nu\rho} - 3g_{\sigma\nu}g_{\lambda\rho} + 2g_{\lambda\nu}g_{\sigma\rho})P^{\sigma}{}_{\mu} + \sqrt{|g|}\epsilon_{\nu\sigma\lambda\alpha}\mathcal{A}^{\alpha}P^{\sigma}{}_{\mu}.\end{aligned}$$

Renombrando los índices σ y ρ, encontramos que

$$\begin{aligned}\left(T_{\sigma\lambda\nu} - \frac{1}{2}[T_{\lambda\sigma\nu} + T_{\nu\sigma\lambda}]\right)P^{\sigma}{}_{\mu} =& \frac{1}{3}(\mathcal{T}_{\sigma\lambda\nu} - 3\mathcal{T}_{\nu\sigma\lambda} + 2\mathcal{T}_{\lambda\nu\sigma})P^{\sigma}{}_{\mu} + \frac{1}{6}\mathcal{V}^{\sigma}(g_{\rho\lambda}g_{\nu\sigma} - 3g_{\rho\nu}g_{\lambda\sigma} + 2g_{\lambda\nu}g_{\rho\sigma})P^{\sigma}{}_{\mu} + \\ &+ \sqrt{|g|}\epsilon_{\nu\sigma\lambda\alpha}\mathcal{A}^{\alpha}P^{\sigma}{}_{\mu}.\end{aligned}$$

Dado que el tercer término tiene la misma estructura, entonces el resultado tendrá la misma estructura.

$$\begin{aligned}\left(T_{\sigma\lambda\mu} - \frac{1}{2}[T_{\lambda\sigma\mu} + T_{\mu\sigma\lambda}]\right)P^{\sigma}{}_{\nu} =& \frac{1}{3}(\mathcal{T}_{\sigma\lambda\mu} - 3\mathcal{T}_{\mu\sigma\lambda} + 2\mathcal{T}_{\lambda\mu\sigma})P^{\sigma}{}_{\nu} + \frac{1}{6}\mathcal{V}^{\sigma}(g_{\rho\lambda}g_{\mu\sigma} - 3g_{\rho\mu}g_{\lambda\sigma} + 2g_{\lambda\mu}g_{\rho\sigma})P^{\sigma}{}_{\nu} + \\ &+ \sqrt{|g|}\epsilon_{\mu\sigma\lambda\alpha}\mathcal{A}^{\alpha}P^{\sigma}{}_{\nu}.\end{aligned}$$

El siguiente término a calcular es:

$$\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T_{\rho\sigma\lambda}P^{rho\sigma} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left[\frac{2}{3}(\mathcal{T}_{\rho\sigma\lambda} - \mathcal{T}_{\rho\lambda\sigma}) + \frac{1}{3}(g_{\rho\sigma}\mathcal{V}_{\lambda} - g_{\rho\lambda}\mathcal{V}_{\sigma}) + \sqrt{|g|}\epsilon_{\rho\sigma\lambda\alpha}\mathcal{A}^{\alpha}\right]P^{\rho\sigma} \tag{4.1.5}$$

$$= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{T}_{\rho\sigma\lambda}P^{\rho\sigma} + \frac{1}{6}g_{\mu\nu}\mathcal{V}^{\sigma}g_{\lambda\sigma}P - \frac{1}{6}g_{\mu\nu}\mathcal{V}^{\sigma}P_{\lambda\sigma}. \tag{4.1.6}$$

Ahora con el quinto término:

$$-\frac{1}{4}\left[g_{\mu\nu}T^{\sigma}{}_{\sigma\lambda} - (T_{\mu\nu\lambda} + T_{\nu\mu\lambda})\right]P.$$

Por definición de la componente vectorial de la torsión el primer término es:

$$g_{\mu\nu}T^{\sigma}{}_{\sigma\lambda} = g_{\mu\nu}\mathcal{V}_{\lambda} = g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma}\mathcal{V}^{\sigma}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\left[T_{\mu\nu\lambda}+T_{\nu\mu\lambda}\right]P=&\left[\frac{2}{3}(\mathcal{T}_{\mu\nu\lambda}-\mathcal{T}_{\mu\lambda\nu})+\frac{1}{3}(g_{\mu\nu}\mathcal{V}_{\lambda}-g_{\mu\lambda}\mathcal{V}_{\nu})+\sqrt{|g|}\epsilon_{\mu\nu\lambda\alpha}\mathcal{A}^{\alpha}+\right.\\&\left.+\frac{2}{3}(\mathcal{T}_{\nu\mu\lambda}-\mathcal{T}_{\nu\lambda\mu})+\frac{1}{3}(g_{\nu\mu}\mathcal{V}_{\lambda}-g_{\nu\lambda}\mathcal{V}_{\mu})+\sqrt{|g|}\epsilon_{\nu\mu\lambda\alpha}\mathcal{A}^{\alpha}\right]P\\=&2\mathcal{T}_{\mu\nu\lambda}P+\frac{1}{3}\mathcal{V}^{\sigma}\left[2g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma}-g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma}-g_{\nu\lambda}g_{\mu\sigma}\right]P.\end{aligned}$$

Con esto el quinto término es:

$$-\frac{1}{4}\left[g_{\mu\nu}T^{\sigma}{}_{\sigma\lambda}-(T_{\mu\nu\lambda}+T_{\nu\mu\lambda})\right]P=-\frac{1}{4}\left[g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma}\mathcal{V}^{\sigma}-2\mathcal{T}_{\mu\nu\lambda}-\frac{1}{3}\mathcal{V}^{\sigma}(2g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma}-g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma}-g_{\nu\lambda}g_{\mu\sigma})\right]P \tag{4.1.7}$$

$$=\left[\frac{1}{2}\mathcal{T}_{\mu\nu\lambda}+\frac{1}{12}\mathcal{V}^{\sigma}(-g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma}-g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma}-g_{\nu\lambda}g_{\mu\sigma})\right]P. \tag{4.1.8}$$

Recordemos que debemos descomponer la ecuación para la propagación anómala de la polarización en la teoría **ECSK** (3.5.8). Al aplicar la descomposición tendremos una componente tensorial $I^{T}_{\mu\nu\lambda}$, vectorial $I^{V}_{\mu\nu\lambda}$ y axial $I^{A}_{\mu\nu\lambda}$ de la ecuación.

$$\begin{aligned}k^{\lambda}\mathring{\nabla}_{\lambda}P_{\mu\nu}=&-\frac{1}{2}k^{\lambda}\left[I^{T}_{\mu\nu\lambda}+I^{V}_{\mu\nu\lambda}+I^{A}_{\mu\nu\lambda}\right]\\=&-\frac{1}{2}k^{\lambda}\left[\Pi^{\rho\sigma}\mathcal{T}_{\rho\sigma\lambda}P_{\mu\nu}+\frac{1}{6}\mathcal{V}^{\sigma}(2\cdot 3g_{\lambda\sigma}-2\Pi^{\rho}_{\sigma})P_{\mu\nu}+\frac{1}{3}(\mathcal{T}_{\sigma\lambda\nu}-3\mathcal{T}_{\nu\sigma\lambda}+2\mathcal{T}_{\lambda\nu\sigma})P^{\sigma}{}_{\mu}+\right.\\&+\frac{1}{6}\mathcal{V}^{\sigma}(g_{\rho\lambda}g_{\nu\sigma}-3g_{\rho\nu}g_{\lambda\sigma}+2g_{\lambda\nu}g_{\rho\sigma})P^{\rho}{}_{\mu}+\frac{1}{3}(\mathcal{T}_{\sigma\lambda\mu}-3\mathcal{T}_{\mu\sigma\lambda}+2\mathcal{T}_{\lambda\mu\sigma})P^{\sigma}{}_{\nu}+\\&+\sqrt{|g|}\epsilon_{\nu\sigma\lambda\alpha}\mathcal{A}^{\alpha}P^{\sigma}{}_{\mu}+\frac{1}{6}\mathcal{V}^{\sigma}(g_{\rho\lambda}g_{\mu\sigma}-3g_{\rho\mu}g_{\lambda\sigma}+2g_{\lambda\mu}g_{\rho\sigma})P^{\rho}_{\nu}+\sqrt{|g|}\epsilon_{\mu\sigma\lambda\alpha}\mathcal{A}^{\alpha}P^{\sigma}{}_{\nu}+\\&+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{T}_{\rho\sigma\lambda}P^{\rho\sigma}+\frac{1}{6}g_{\mu\nu}\mathcal{V}^{\sigma}g_{\lambda\sigma}P-\frac{1}{6}g_{\mu\nu}\mathcal{V}^{\sigma}P_{\lambda\sigma}+\frac{1}{2}\mathcal{T}_{\mu\nu\lambda}P+\\&\left.+\frac{1}{12}\mathcal{V}^{\sigma}(-g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma}-g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma}-g_{\nu\lambda}g_{\mu\sigma})P\right].\end{aligned}$$

Factorizando por componentes, en primer lugar tendremos la componente tensorial:

$$\begin{aligned}I^{T}_{\mu\nu\lambda}=&\mathcal{T}_{\rho\sigma\lambda}(\Pi^{\rho\sigma}P_{\mu\nu}+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}P^{\rho\sigma})+\frac{1}{2}\mathcal{T}_{\mu\nu\lambda}P+\frac{1}{3}(\mathcal{T}_{\sigma\lambda\nu}-3\mathcal{T}_{\nu\sigma\lambda}+2\mathcal{T}_{\lambda\nu\sigma})P^{\sigma}{}_{\mu}+\\&+\frac{1}{3}(\mathcal{T}_{\sigma\lambda\mu}-3\mathcal{T}_{\mu\sigma\lambda}+2\mathcal{T}_{\lambda\mu\sigma})P^{\sigma}{}_{\nu}.\end{aligned}$$

Luego la componente vectorial $I^V_{\mu\nu\lambda}$:

$$I^V_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{3}\mathcal{V}^\sigma \Big[2(3g_{\lambda\sigma} - \Pi^\rho_\sigma \mathcal{V}^\sigma)P_{\mu\nu} + (g_{\rho\lambda}g_{\nu\sigma} - 3g_{\rho\nu}g_{\lambda\sigma} + 2g_{\lambda\nu}g_{\rho\sigma})P^\rho{}_\mu + \\ + +(g_{\rho\lambda}g_{\mu\sigma} - 3g_{\rho\mu}g_{\lambda\sigma} + 2g_{\lambda\mu}g_{\rho\sigma})P^\rho{}_\nu - g_{\mu\nu}P_{\lambda\sigma} + \frac{1}{2}(g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\lambda}g_{\mu\sigma})P\Big].$$

Finalmente, la componente axial queda determinada por:

$$I^A_{\mu\nu\lambda} = \sqrt{|g|}\epsilon_{\nu\sigma\lambda\alpha}\mathcal{A}^\alpha P^\sigma{}_\mu + \sqrt{|g|}\epsilon_{\mu\sigma\lambda\alpha}\mathcal{A}^\alpha P^\sigma{}_\nu \tag{4.1.9}$$

$$= \sqrt{|g|}\mathcal{A}^\alpha(\epsilon_{\nu\sigma\lambda\alpha}P^\sigma{}_\mu + \epsilon_{\mu\sigma\lambda\alpha}P^\sigma{}_\nu). \tag{4.1.10}$$

Esta última representa el centro de estudio de la presente investigación.

4.2. Ecuación para la propagación de la polarización para fuentes fermiónicas

Cuando la torsión en el espacio-tiempo es inducida por fermiones, el tensor de spin solo tiene componente axial y, por tanto, la torsión también. De esta forma, la ecuación para la propagación anómala de la polarización queda descrita por:

$$k^\lambda \mathring{\nabla}_\lambda P_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}k^\lambda \left[\sqrt{|g|}\mathcal{A}^\alpha(\epsilon_{\nu\sigma\lambda\alpha}P^\sigma{}_\mu + \epsilon_{\mu\sigma\lambda\alpha}P^\sigma{}_\nu)\right], \tag{4.2.1}$$

Para analizar la propagación de la polarización como se describe en la ecuación (4.2.1), es útil trabajar dentro de una base ortonormal.

$$k^\lambda \mathring{\nabla}_\lambda P_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}k^\lambda \left[\mathcal{A}^\sigma g^{\rho\alpha}(\sqrt{|g|}\epsilon_{\nu\rho\lambda\sigma}\delta^\beta{}_\mu + \sqrt{|g|}\epsilon_{\mu\rho\lambda\sigma}\delta^\beta{}_\nu)\right]P_{\alpha\beta}, \tag{4.2.2}$$

$$k^\lambda \mathring{\nabla}_\lambda P_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}k^\lambda \left[\mathcal{A}^\sigma g^{\rho\alpha}(\epsilon_{cdef}e^c{}_\nu e^d{}_\rho e^e{}_\lambda e^f{}_\sigma \delta^\beta{}_\mu + \epsilon_{gdef}e^g{}_\mu e^d{}_\rho e^e{}_\lambda e^f{}_\sigma \delta^\beta{}_\nu)\right]P_{\alpha\beta}, \tag{4.2.3}$$

$$k^\lambda \mathring{\nabla}_\lambda P_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}k^e \left[\mathcal{A}^f \eta^{db}(\epsilon_{cdef}e^c{}_\nu e^a{}_\mu + \epsilon_{gdef}e^g{}_\mu e^a{}_\nu)\right]P_{ba}. \tag{4.2.4}$$

donde tenemos que

$$k^\lambda \mathring{\nabla}_\lambda P_{\mu\nu} e^\mu{}_m e^\nu{}_n = -\frac{1}{2} k^e \left[\mathcal{A}^f \eta^{db} (\epsilon_{cdef} e^c{}_\nu e^a{}_\mu e^\mu{}_m e^\nu{}_n + \epsilon_{gdef} e^g{}_\mu e^a{}_\nu e^\mu{}_m e^\nu{}_n) \right] P_{ba} \tag{4.2.5}$$

$$k^e e^\lambda{}_e \mathring{\nabla}_\lambda P_{mn} = -\frac{1}{2} k^e \left[\mathcal{A}^f \eta^{db} (\epsilon_{cdef} \delta^c{}_n \delta^a{}_m + \epsilon_{gdef} \delta^g{}_m \delta^a{}_n) \right] P_{ba} \tag{4.2.6}$$

$$k^e e^\lambda{}_e \mathring{\nabla}_\lambda P_{mn} = -\frac{1}{2} k^e \left[\mathcal{A}^f \eta^{db} (\epsilon_{ndef} \delta^a{}_m + \epsilon_{mdef} \delta^a{}_n) \right] P_{ba}, \tag{4.2.7}$$

donde $e^\lambda{}_a \mathring{\nabla}_\lambda = \mathring{\mathcal{D}}_a$ es la contribución libre de torsión correspondiente a la generalización de la derivada de Lie sobre una geometría de RC (2.2.10), en este caso $\mathring{\nabla}_\lambda$ y $\mathring{\mathcal{D}}_a$ representan el mismo operador. Por tanto, la ecuación reescrita en la base ortonormal es

$$k^l \mathring{\mathcal{D}}_l P_{mn} = -\frac{1}{2} k^l \left[\mathcal{A}^c \eta^{da} (\epsilon_{ndlc} \delta^b{}_m + \epsilon_{mdlc} \delta^b{}_n) \right] P_{ab}. \tag{4.2.8}$$

Ahora recordemos que P_{mn} es una 0-forma. Por tanto, el operador diferencial aplicado sobre la 0-forma es $\mathcal{D}_l P_{mn} = I_l \mathring{D} P_{mn}$. De esta forma, definiendo el siguiente operador lineal en la base ortonormal

$$N^{ab}{}_{lcmn} = \eta^{da} (\epsilon_{ndlc} \delta^b{}_m + \epsilon_{mdlc} \delta^b{}_n). \tag{4.2.9}$$

Así, la ecuación a trabajar es

$$k^l \mathring{\mathcal{D}}_l P_{mn} = -\frac{1}{2} k^l \mathcal{A}^c N^{ab}{}_{lcmn} P_{ab}. \tag{4.2.10}$$

4.3. Propagación de la polarización en un escenario de torsión débil

Enfocándonos en un escenario en el que la materia oscura es la fuente de torsión axial

$$T_{\lambda\mu\nu} = \sqrt{|g|} \epsilon_{\lambda\mu\nu\sigma} \mathcal{A}^\sigma. \tag{4.3.1}$$

Con $\mathcal{A}^\sigma$ la componente axial de la torsión (o relacionado con la corriente axial). Tenemos que la propagación de la polarización a lo largo de una geodésica queda descrita por la ecuación (4.2.1) (ver ref. [27]). En RG estándar, el lado derecho de la ecuación (4.2.1) se anularía, lo que implica que la polarización es transportada paralelamente a lo largo de la geodésica nula libre de torsión. Sin embargo, cuando la torsión está presente, el lado derecho de (4.2.1) no se anula, lo que revela que la polarización evoluciona de manera anómala durante la propagación.

En principio, en una teoría que incorpora torsión, debemos considerar los seis modos de polarización posibles de una GW. Por lo tanto, la polarización puede descomponerse como

$$P_{ab} = p_I P^I_{ab}, \tag{4.3.2}$$

donde p_I son escalares complejos y $I = \{+, \times, b, l, x, y\}$, $+$ y $\times$ denota los modos estándar, b, l los modos *breathing* y longitudinal de tipo traza, y los modos vectoriales x e y (adoptamos la convención de suma de Einstein en el índice (I) para simplificar la notación). Existen muchas opciones para una base en el espacio de polarizaciones, pero sin perder generalidad, podemos elegir una base ortonormal en el espacio de polarización,

$$\bar{P}^{ab}_J P^I_{ab} = \delta^I_J. \tag{4.3.3}$$

En este caso, las ecuaciones (4.3.3) y (A0.3) nos conducen a la relación

$$\bar{p}^{(I)} p_{(I)} = 1. \tag{4.3.4}$$

En el Apéndice E, proporcionamos una base ortonormal explícita (y real) para el espacio de polarización, que corresponde a los modos de GWs que se propagan a lo largo de la tercera dirección del marco ortonormal. Es decir, alineando la tercera dirección de la base ortonormal con la dirección de propagación de la GW, imponiendo $k^1 = k^2 = 0$, y satisfaciendo la condición

$$-\left(k^0\right)^2 + \left(k^3\right)^2 = 0. \tag{4.3.5}$$

En el presente capítulo, demostramos que en la gravedad ECSK con un fondo de materia oscura que presenta un tensor de spín axial no nulo, solo persisten los modos de polarización estándar $\{+, \times\}$. Sin embargo, para mantener la generalidad, inicialmente consideraremos todos los modos de polarización posibles, ilustrando el procedimiento para casos más generales antes de mostrar cómo la dinámica ECSK finalmente restringe los modos permitidos a $\{+, \times\}$.

Consideremos un modelo simple pero útil suponiendo un escenario de emisión de GWs con torsión débil según ref. [27], donde el proceso de emisión es esencialmente el mismo que en RG estándar.[1] Esto significa que estamos asumiendo que la torsión de fondo es demasiado débil para afectar el proceso de emisión de la onda gravitacional de una manera observable. Aunque los efectos de la torsión pueden acumularse durante la propagación a lo largo de la geodésica, la emisión de la GW en sí misma permanece inalterada por la torsión, igual en RG. Esta suposición está bien fundamentada. En general, los efectos de la materia oscura sobre la emisión de GW son despreciables en el orden dominante y subdominante en el límite eikonal. Dado que estamos modelando la torsión como parte del sector de materia oscura, la influencia de la torsión es aún más débil en este contexto. Describimos la geometría de fondo como se da en la ecuación (1) e introducimos

$$\mathring{P}_{ab} = \mathring{p}_I P^I_{ab}, \tag{4.3.6}$$

como la polarización que se propagaría en RG estándar sobre el fondo sin torsión representado por $\mathring{\omega}^{ab}$. Por lo tanto, en los órdenes dominante y subdominante en la aproximación eikonal

$$\mathring{p}_b = \mathring{p}_l = \mathring{p}_x = \mathring{p}_y = 0. \tag{4.3.7}$$

Definamos ahora el parámetro afín de la geodésica η, de modo que $\eta_0 = 0$ marque el punto de emisión de la GW. La propagación de los modos de polarización a lo largo de la geodésica en ECSK se describe como una desviación del caso estándar de RG.

$$p_A(\eta) = S^B{}_A(\eta)\, \mathring{p}_B(\eta), \tag{4.3.8}$$

donde la matriz $S^B{}_A(\eta)$ codifica cómo la torsión *scrambles* los modos de polarización a medida que la GW se propaga a lo largo de la geodésica nula parametrizada por η. Debido a la ecuación (4.3.7), hay degeneraciones evidentes en esta matriz; sin pérdida de generalidad, establecemos $S^b{}_A = S^l{}_A = S^x{}_A = S^y{}_A = 0$.

En el escenario de torsión débil, al momento de emisión $\eta = 0$, los únicos componentes no nulos son

$$S^+{}_+(0) = S^\times{}_\times(0) = 1. \tag{4.3.9}$$

[1] El proceso de emisión de GW en ECSK ha sido estudiado a fondo en las refs. [39, 40, 41, 42]. Las desviaciones de la RG deberían ser relevantes para un fondo de plasma de fermiones extremadamente denso.

4.3.1. Propagación de la polarización: caso sin torsión

La propagación de la polarización según el límite eikonal en RG estándar queda determinada por:

$$k^l \mathring{\mathcal{D}}_l P_{mn} = 0. \tag{4.3.10}$$

Sabemos que la polarización escrita en la base de polarizaciones, satisface ortogonalidad (4.3.3) y normalización (A0.3). Así evaluando la descomposición (4.3.2) en la ecuación para la propagación de la polarización, encontramos

$$k^l \mathring{\mathcal{D}}_l (\mathring{p}_A P^A_{mn}) = 0. \tag{4.3.11}$$

Proyectado en el espacio de polarizaciones, llegamos a

$$\bar{P}^{mn}_D k^l \mathring{\mathcal{D}}_l (\mathring{p}_A P^A_{mn}) = 0, \tag{4.3.12}$$

$$k^l (\mathring{\mathcal{D}}_l \mathring{p}_A) \bar{P}^{mn}_D P^A_{mn} + \bar{P}^{mn}_D k^l \mathring{p}_A (\mathring{\mathcal{D}}_l P^A_{mn}) = 0. \tag{4.3.13}$$

Con esto la derivada de la polarización quedará en términos de la conexión de spin sin torsión.

$$k^l (\mathring{\mathcal{D}}_l \mathring{p}_A) \delta^A_D = -\bar{P}^{mn}_D k^l \mathring{p}_A (\mathring{\mathcal{D}}_l P^A_{mn}) \tag{4.3.14}$$

$$= -k^l \mathring{p}_A [\mathring{\omega}_{mcl} \bar{P}^{mn}_D P^{cA}{}_n + \mathring{\omega}_{ncl} \bar{P}^{mn}_D P^{cA}{}_m]. \tag{4.3.15}$$

Antisimetrizando el producto de las polarizaciones tendremos que

$$k^l (\mathring{\mathcal{D}}_l \mathring{p}_D) = -\mathring{p}_A k^l \mathring{\omega}_{cml} [\bar{P}_D, P^A]^{cm}. \tag{4.3.16}$$

Como sabemos que el número de onda es proporcional al vector tangente, entonces

$$\frac{1}{\lambda} \frac{d\mathring{p}_D}{d\eta} = -\frac{1}{\lambda} \frac{dX^l}{d\eta} \mathring{p}_A \mathring{\omega}_{cml} [\bar{P}_D, P^A]^{cm}, \tag{4.3.17}$$

$$\frac{d\mathring{p}_D}{d\eta} = -\mathring{p}_A \frac{dX^l}{d\eta} \mathring{\omega}_{cml} [\bar{P}_D, P^A]^{cm}. \tag{4.3.18}$$

Lo cual como ya mencionamos, la polarización es transportada paralelamente a lo largo de la geodésica nula libre de torsión.

4.3.2. Propagación de la polarización: caso con torsión

Sustituyendo la ecuación (4.3.2) en la ecuación (4.2.10).Así la propagación de la polarización a lo largo de una geodésica sobre un espacio tiempo con torsión en la teoría **ECSK** es

$$k^l \mathring{\mathcal{D}}_l p_A P^A{}_{mn} + \frac{1}{2} k^l \mathcal{A}^c N^{ab}{}_{lcmn} p_A P^A{}_{ab} = 0. \tag{4.3.19}$$

Proyectando la ecuación en el espacio de polarizaciones tenemos que

$$P^{mn}{}_D k^l \mathring{\mathcal{D}}_l p_A P^A{}_{mn} + P^{mn}{}_D \frac{1}{2} k^l \mathcal{A}^c N^{ab}{}_{lcmn} p_A P^A{}_{ab} = 0. \tag{4.3.20}$$

Calculando el primer término en analogía al caso sin torsión, encontramos

$$\bar{P}^{mn}{}_D k^l \mathring{\mathcal{D}}_l (p^A_{A mn}) = k^l \left[\mathring{\mathcal{D}}_l (p_A) \bar{P}^{mn}{}_D P^A{}_{mn} + p_A \bar{P}^{mn}{}_D \mathring{\mathcal{D}}_l (P^A{}_{mn}) \right] \tag{4.3.21}$$

$$= k^l \left[\partial_l p_D + p_A \mathring{\omega}_{cml} [\bar{P}_D, P^A]^{cm} \right]. \tag{4.3.22}$$

Dada la condición de **torsión débil** podemos suponer que la propagación será cercana a la de Relatividad General. Además dado que el numero de grados de libertad físicos entre RG y ECSK son los mismos, por lo tanto, nuestras soluciones quedarán parametrizadas como combinación lineal de los modos de RG. Debido a esto podemos usar la ecuación (4.3.8), junto con la ortonormalidad en la base de polarización (4.3.3) podemos escribir el primer término de la ec (4.3.20),

$$\bar{P}^{mn}{}_D k^l \mathring{\mathcal{D}}_l (S^B{}_A \mathring{p}_B P^A{}_{mn}) = k^l \left(\partial_l S^B{}_D \mathring{p}_B + S^B{}_D \mathring{\mathcal{D}}_l \mathring{p}_B + S^B{}_A \mathring{p}_B \mathring{\omega}_{cml} [\bar{P}_D, P^A]^{cm} \right) \tag{4.3.23}$$

usando la ec (4.3.16) será

$$\bar{P}^{mn}{}_D k^l \mathring{\mathcal{D}}_l (S^B{}_A \mathring{p}_B P^A{}_{mn}) = k^l \left(\partial_l S^B{}_D \mathring{p}_B - S^B{}_D \mathring{p}_A \mathring{\omega}_{cml} [\bar{P}_B, P^A]^{cm} + S^B{}_A \mathring{p}_B \mathring{\omega}_{cml} [\bar{P}_D, P^A]^{cm} \right). \tag{4.3.24}$$

Luego, calculando el segundo término de la ec (4.3.20) tendremos que

$$\bar{P}^{mn}{}_D \frac{1}{2} k^l \mathcal{A}^c N^{ab}{}_{lcmn} p_A P^A{}_{ab} = \frac{1}{2} k^l \mathcal{A}^c \left[\epsilon_{ndlc} \bar{P}^{mn}_D P^{dA}{}_m + \epsilon_{mdlc} \bar{P}^{mn}_D P^{dA}{}_n \right] p_A \tag{4.3.25}$$

$$= \frac{1}{2} k^l \mathcal{A}^c \epsilon_{ndlc} [\bar{P}_D, P^A]^{nd} S^B{}_A \mathring{p}_B. \tag{4.3.26}$$

Por lo tanto, la ecuación para la propagación de la polarización en un espaciotiempo con torsión (4.3.20) puede escribirse como:

$$k^l\left[\partial_l S^B{}_D\mathring{p}_B + \mathring{\omega}_{cml}(S^B{}_A\mathring{p}_B[\bar{P}_D, P^A]^{cm} - S^B{}_D\mathring{p}_A[\bar{P}_B, P^A]^{cm}) + \frac{1}{2}\mathcal{A}^c\epsilon_{ndlc}[\bar{P}_D, P^A]^{nd}S^B{}_A\mathring{p}_B\right] = 0. \tag{4.3.27}$$

donde los componentes de la conexión de spin sin torsión están dados por $\mathring{\omega}_{ab} = \mathring{\omega}_{abc}e^c$. Utilizando el hecho que el vector tangente a la geodésica t^μ es proporcional al numero de onda $k^\mu = \frac{1}{\lambda}\frac{dx^\mu}{d\eta}$, obtenemos la siguiente ecuación para la propagación de $S^A{}_B$ a lo largo de la geodésica.

$$\frac{\mathrm{d}S^B{}_D}{\mathrm{d}\eta} + t^l\mathring{\omega}_{cml}\left(S^B{}_A\left[\bar{P}_D, P^A\right]^{cm} - \left[\bar{P}_A, P^B\right]^{ab}S^A{}_D\right) + \frac{1}{2}S^B{}_A\mathcal{A}^s t^c\epsilon_{ndlc}\left[\bar{P}_D, P^A\right]^{nd} = 0. \tag{4.3.28}$$

Ahora, para completar de determinar la ecuación debemos de calcular los siguientes anticonmutadores:

$$\begin{aligned}\left[\bar{P}_D, P^A\right]^{cm}S^B{}_A\mathring{p}_B = &\left[\bar{P}_D, P^+\right]^{cm}S^B{}_+\mathring{p}_B + \left[\bar{P}_D, P^\times\right]^{cm}S^B{}_\times\mathring{p}_B + \left[\bar{P}_D, P^b\right]^{cm}S^B{}_b\mathring{p}_B + \\ &+ \left[\bar{P}_D, P^l\right]^{cm}S^B{}_l\mathring{p}_B + \left[\bar{P}_D, P^x\right]^{cm}S^B{}_x\mathring{p}_B + \left[\bar{P}_D, P^y\right]^{cm}S^B{}_y\mathring{p}_B.\end{aligned}$$

Dadas las condiciones de normalización (A0.7) y (A0.5) podemos despreciar los términos de orden $\mathcal{O}(\epsilon)$:

$$\left[\bar{P}_D, P^A\right]^{cm}S^B{}_A\mathring{p}_B = \left[\bar{P}_D, P^+\right]^{cm}S^B{}_+\mathring{p}_B + \left[\bar{P}_D, P^\times\right]^{cm}S^B{}_\times\mathring{p}_B + \mathcal{O}(\epsilon). \tag{4.3.29}$$

Dada la base ortonormal para las matrices de polarización definidas en (A0.4), estudiando los 12 conmutadores que contribuyen en la ecuación y evaluando la conexion de spin libre de torsion $\mathring{\omega}_{cml}$ para cualquier geometría de background podemos calcular la propagación de la polarización como una ecuación lineal sobre la geodésica, dependiente de los conmutadores anteriores.

4.4. Efecto Faraday-Cartan: sobre un background FLRW

En el contexto cosmológico la métrica y la conexión quedarán determinados por.

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{4.4.1}$$

$$\mathring{\omega}_{0jk} = -\frac{1}{c}H\delta_{jk}. \tag{4.4.2}$$

Aquí $a(t)$ es al factor de escala y H el parámetro de Hubble. Con esto podemos analizar la contracción de los conmutadores con la conexión de spin cosmológica.

$$\mathring{\omega}_{abl}\left[\bar{P}_+, P^\times\right]^{ab} = \mathring{\omega}_{0ij}\left[\bar{P}_+, P^\times\right]^{0i} = 0, \tag{4.4.3}$$

$$\mathring{\omega}_{abl}\left[\bar{P}_x, P^+\right]^{ab} = \mathring{\omega}_{0ij}\left[\bar{P}_x, P^+\right]^{0i} = 0, \tag{4.4.4}$$

$$\mathring{\omega}_{abl}\left[\bar{P}_x, P^\times\right]^{ab} = \mathring{\omega}_{0ij}\left[\bar{P}_x, P^\times\right]^{0i} = 0, \tag{4.4.5}$$

$$\mathring{\omega}_{abl}\left[\bar{P}_y, P^+\right]^{ab} = \mathring{\omega}_{0ij}\left[\bar{P}_y, P^+\right]^{0i} = 0, \tag{4.4.6}$$

$$\mathring{\omega}_{abl}\left[\bar{P}_y, P^\times\right]^{ab} = \mathring{\omega}_{0ij}\left[\bar{P}_y, P^\times\right]^{0i} = 0. \tag{4.4.7}$$

$$\tag{4.4.8}$$

Por lo tanto la ecuación para la propagación anómala de la polarización (4.5.9) para una GW que se propaga sobre un background tipo FLRW se reduce a.

$$k^l\left[\partial_l S^B{}_D\mathring{p}_B + \mathring{\omega}_{0il}(S^B{}_A\mathring{B}[\bar{P}_D, P^A]^{0i} - S^B{}_D\mathring{p}_A[\bar{P}_B, P^A]^{0i}) + \frac{1}{2}\mathcal{A}^0\epsilon_{ijl0}[\bar{P}_D, P^A]^{ij}S^B{}_A\mathring{p}_B\right] = 0 \tag{4.4.9}$$

$$k^l\left[\partial_l S^B{}_D\mathring{p}_B + \frac{1}{2}\mathcal{A}^0\epsilon_{ijl0}[\bar{P}_D, P^A]^{ij}S^B{}_A\mathring{p}_B\right] = 0 \tag{4.4.10}$$

$$k^l\left[\partial_l S^B{}_D\mathring{p}_B + \frac{1}{2}\mathcal{A}^0\epsilon_{ijl0}\left([\bar{P}_D, P^+]^{ij}S^B{}_+ + [\bar{P}_D, P^\times]^{ij}S^B{}_\times\right)\mathring{p}_B\right] = 0 \tag{4.4.11}$$

Considerando solo los conmutadores no nulos que contribuyen al sistema de ecuaciones, encontramos

$$k^l\partial_l(S^B{}_+)\mathring{p}_B + k^l\frac{1}{2}\mathcal{A}^0\epsilon_{abl0}\left[\bar{P}_+, P^\times\right]^{ab} S^B{}_\times\mathring{p}_B = 0, \tag{4.4.12}$$

$$k^l\partial_l(S^B{}_\times)\mathring{p}_B + k^l\frac{1}{2}\mathcal{A}^0\epsilon_{abl0}\left[\bar{P}_\times, P^+\right]^{ab} S^B{}_+\mathring{p}_B = 0, \tag{4.4.13}$$

$$k^l\partial_l(S^B{}_b)\mathring{p}_B = 0, \tag{4.4.14}$$

$$k^l\partial_l(S^B{}_l)\mathring{p}_B = 0, \tag{4.4.15}$$

$$k^l\partial_l(S^B{}_x)\mathring{p}_B + k^l\frac{1}{2}\mathcal{A}^0\epsilon_{abl0}\left(\left[\bar{P}_x, P^+\right]^{ab} S^B{}_+ + \left[\bar{P}_x, P^\times\right]^{ab} S^B{}_\times\right)\mathring{p}_B = 0, \tag{4.4.16}$$

$$k^l\partial_l(S^B{}_y)\mathring{p}_B + k^l\frac{1}{2}\mathcal{A}^0\epsilon_{abl0}\left(\left[\bar{P}_y, P^+\right]^{ab} S^B{}_+ + \left[\bar{P}_y, P^\times\right]^{ab} S^B{}_\times\right)\mathring{p}_B = 0. \tag{4.4.17}$$

Recordando que $-(k^0)^2 + (k^3)^2 = 0$, podemos analizar la contracción

$$k^l\epsilon_{abl0}\left[\bar{P}_+, P^\times\right]^{ab} = k^3\epsilon_{1230}\left[\bar{P}_+, P^\times\right]^{12} + k^3\epsilon_{2130}\left[\bar{P}_+, P^\times\right]^{21} = -2k^3, \tag{4.4.18}$$

$$k^l\epsilon_{abl0}\left[\bar{P}_x, P^+\right]^{ab} = k^3\epsilon_{1230}\left[\bar{P}_x, P^+\right]^{12} + k^3\epsilon_{2130}\left[\bar{P}_x, P^+\right]^{21} = 0, \tag{4.4.19}$$

$$k^l\epsilon_{abl0}\left[\bar{P}_x, P^\times\right]^{ab} = k^3\epsilon_{1230}\left[\bar{P}_x, P^\times\right]^{12} + k^3\epsilon_{2130}\left[\bar{P}_x, P^\times\right]^{21} = 0, \tag{4.4.20}$$

$$k^l\epsilon_{abl0}\left[\bar{P}_y, P^+\right]^{ab} = k^3\epsilon_{1230}\left[\bar{P}_y, P^+\right]^{12} + k^3\epsilon_{2130}\left[\bar{P}_y, P^+\right]^{21} = 0, \tag{4.4.21}$$

$$k^l\epsilon_{abl0}\left[\bar{P}_y, P^\times\right]^{ab} = k^3\epsilon_{1230}\left[\bar{P}_y, P^\times\right]^{12} + k^3\epsilon_{2130}\left[\bar{P}_y, P^\times\right]^{21} = 0. \tag{4.4.22}$$

Así y recordando que $[\bar{P}_+, P^\times]^{cm} = \delta^{cm}{}_{+\times}$. El sistema se reduce a.

$$\frac{dS^B{}_+}{d\eta}\mathring{p}_B - t^3\mathcal{A}^0 S^B{}_\times\mathring{p}_B = 0 \tag{4.4.23}$$

$$\frac{dS^B{}_\times}{d\eta}\mathring{p}_B + t^3\mathcal{A}^0 S^B{}_+\mathring{p}_B = 0 \tag{4.4.24}$$

$$\frac{dS^B{}_b}{d\eta}\mathring{p}_B = 0 \tag{4.4.25}$$

$$\frac{dS^B{}_l}{d\eta}\mathring{p}_B = 0 \tag{4.4.26}$$

$$\frac{dS^B{}_x}{d\eta}\mathring{p}_B = 0 \tag{4.4.27}$$

$$\frac{dS^B{}_y}{d\eta}\mathring{p}_B = 0 \tag{4.4.28}$$

Con esto podemos concluir que los únicos dos modos de polarización que se propagaran serán el + y $\times$ acopladamente. Además, dado que $\mathring{p}_B$ constituye una base linealmente independiente de la combinación lineal $p_A = S^B{}_A \mathring{p}_B$. Entonces, tenemos el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\frac{dS^B{}_+}{d\eta} - t^3\mathcal{A}^0 S^B{}_\times = 0, \tag{4.4.29}$$

$$\frac{dS^B{}_\times}{d\eta} + t^3\mathcal{A}^0 S^B{}_+ = 0. \tag{4.4.30}$$

De forma explícita cada componente es dada por

$$\frac{dS^+{}_+}{d\eta} - t^3\mathcal{A}^0 S^+{}_\times = 0, \tag{4.4.31}$$

$$\frac{dS^\times{}_+}{d\eta} - t^3\mathcal{A}^0 S^\times{}_\times = 0, \tag{4.4.32}$$

$$\frac{dS^+{}_\times}{d\eta} + t^3\mathcal{A}^0 S^+{}_+ = 0, \tag{4.4.33}$$

$$\frac{dS^\times{}_\times}{d\eta} + t^3\mathcal{A}^0 S^\times{}_+ = 0. \tag{4.4.34}$$

Considerando el caso de torsión débil donde la emisión de ondas gravitacionales es equivalente al caso de **RG**, se deberá cumplir que $S^B{}_A(\eta_0) = \delta^B{}_A$ o, equivalentemente:

$$p_+ = S^+{}_+\mathring{p}_+ + S^\times{}_+\mathring{p}_\times \implies S^+{}_+(\eta_0) = 1 \quad \wedge \quad S^\times{}_+(\eta_0) = 0, \tag{4.4.35}$$

$$p_\times = S^+{}_\times\mathring{p}_+ + S^\times{}_\times\mathring{p}_\times \implies S^+{}_\times(\eta_0) = 0 \quad \wedge \quad S^\times{}_\times(\eta_0) = 1. \tag{4.4.36}$$

Así, los coeficientes de la combinación lineal son:

$$S^+{}_+ = \cos\left(t^3\mathcal{A}^0\eta\right), \tag{4.4.37}$$

$$S^\times{}_+ = \sin\left(t^3\mathcal{A}^0\eta\right), \tag{4.4.38}$$

$$S^+{}_\times = -\sin\left(t^3\mathcal{A}^0\eta\right), \tag{4.4.39}$$

$$S^\times{}_\times = \cos\left(t^3\mathcal{A}^0\eta\right). \tag{4.4.40}$$

Con esto las soluciones de la polarización para fuentes fermiónicas de onda gravitacional sobre un fondo cosmológico son:

$$p_+ = \cos\left(t^3\mathcal{A}^0\eta\right)\mathring{p}_+ + \sin\left(t^3\mathcal{A}^0\eta\right)\mathring{p}_\times, \tag{4.4.41}$$

$$p_\times = -\sin\left(t^3\mathcal{A}^0\eta\right)\mathring{p}_+ + \cos\left(t^3\mathcal{A}^0\eta\right)\mathring{p}_\times. \tag{4.4.42}$$

4.5. Efecto Faraday-Cartan: sobre un background esfericamente simétrico

Es conocido que la métrica de FLRW es un tipo de métrica estrictamente simétrica. Entonces, generalizamos este último resultado para cualquier métrica esféricamente simétrica. Esto resulta ser un caso simple pero representativo, considerando una onda gravitacional (GW) que pasa a través de una geodésica radial nula en una distribución de materia oscura con simetría esférica. El fondo (background) esféricamente simétrico creado por el halo de materia oscura corresponde a una tétrada de la forma ($c = 1$)

$$e^0 = \mathrm{e}^{\alpha(t,r)}\,\mathrm{d}t, \tag{4.5.1}$$

$$e^1 = r\,\mathrm{d}\theta, \tag{4.5.2}$$

$$e^2 = r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi, \tag{4.5.3}$$

$$e^3 = \mathrm{e}^{\beta(t,r)}\,\mathrm{d}r, \tag{4.5.4}$$

Una torsión axial, donde el único componente no nulo es $\mathcal{A}^0 \neq 0$, también es esféricamente simétrico. Como mencionamos, esta geometría de fondo puede describir un halo esférico de materia oscura, pero también un fondo FLRW para la propagación de ondas gravitacionales GW. Los componentes no nulos de la conexión de spin sin torsión son:

$$\mathring{\omega}_{03} = -\left(\mathrm{e}^{-\beta}\alpha' e^0 + \mathrm{e}^{-\alpha}\dot{\beta} e^3\right), \tag{4.5.5}$$

$$\mathring{\omega}_{31} = -\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\beta} e^1, \tag{4.5.6}$$

$$\mathring{\omega}_{32} = -\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\beta} e^2, \tag{4.5.7}$$

$$\mathring{\omega}_{12} = -\frac{1}{r\tan\theta} e^2. \tag{4.5.8}$$

Al inspeccionar la ecuación (4.3.28) con los componentes de las ecuaciones (4.5.5-4.5.8) y considerando que $t^1 = t^2 = 0$, observamos que se simplifica a

$$\frac{\mathrm{d}S^A{}_B}{\mathrm{d}\eta} - S^A{}_C \mathcal{A}^0 t^3 \left[\bar{P}_B, P^C\right]^{12} = 0. \tag{4.5.9}$$

Al considerar los conmutadores de la base de polarización (Apéndice E), encontramos que los únicos conmutadores de polarización que podrían contribuir a esta ecuación son $\left[\bar{P}^{+}, P^{\times}\right]$ y $\left[\bar{P}^{x}, P^{y}\right]$. Sin embargo, incluyendo las condiciones iniciales en la ecuación (4.3.9), es fácil demostrar que solo sobrevive el conmutador $\left[\bar{P}^{+}, P^{\times}\right]$. Al resolver el sistema diferencial en la ecuación (4.5.9), encontramos que los únicos componentes no nulos de $S^{A}{}_{B}$ corresponden a la matriz de rotación transversal.

$$S^{+}{}_{+} = \cos(\Theta_{\text{grav}}), \qquad S^{+}{}_{\times} = -\sin(\Theta_{\text{grav}}), \tag{4.5.10}$$

$$S^{\times}{}_{+} = \sin(\Theta_{\text{grav}}), \qquad S^{\times}{}_{\times} = \cos(\Theta_{\text{grav}}), \tag{4.5.11}$$

donde el ángulo de rotación está dado por

$$\Theta_{\text{grav}}(\eta) = \int_{\eta=0}^{\eta} \mathcal{A}^{0}\, \mathrm{d}\ell, \tag{4.5.12}$$

con $\mathrm{d}\ell = \frac{dx^3}{d\eta} d\eta$ representando el elemento espacial a lo largo del camino de la GW. La integral va desde el punto de emisión $\eta_0 = 0$ hasta el punto de observación η.

El efecto neto es una rotación de la polarización con respecto al caso de la RG, donde en lugar de la polarización de RG $\mathring{P}_{ab} = \mathring{p}_{+}P^{+}_{ab} + \mathring{p}_{\times}P^{\times}_{ab}$ tenemos la rotación

$$P_{ab} = \mathring{p}_{+}\left(\cos(\Theta_{\text{grav}})P^{+}_{ab} - \sin(\Theta_{\text{grav}})P^{\times}_{ab}\right) + \mathring{p}_{\times}\left(\cos(\Theta_{\text{grav}})P^{\times}_{ab} + \sin(\Theta_{\text{grav}})P^{+}_{ab}\right), \tag{4.5.13}$$

el signo de $\mathcal{A}^{0}$ determina la quiralidad de la rotación. Un ángulo de rotación de $\Theta_{\text{grav}} = \pi/4$ intercambia los modos de polarización (+) y (×).

El efecto descrito por la ecuación (4.5.13) guarda una notable semejanza con la conocida rotación de Faraday en óptica ([43, 44]). En la rotación estándar de Faraday, la polarización de una onda electromagnética rota cuando una componente del campo magnético $B_{\parallel}$ es paralela al camino de la luz a través de un medio dieléctrico. El ángulo de rotación θ_{Faraday} está dado por

$$\theta_{\text{Faraday}}(\eta) = \mathcal{V}\int_{\eta=0}^{\eta} B_{\parallel}\, \mathrm{d}\ell, \tag{4.5.14}$$

donde $\mathcal{V}$ es el parámetro de Verdet del medio, y la integral se evalúa a lo largo del camino de la luz. La similitud entre las ecuaciones (4.5.14) y (4.5.12) es notable. En cierto sentido, la constante $\kappa_4 = 8\pi G$ juega el papel del parámetro de Verdet dieléctrico, y el término axial de la torsion $\mathcal{A}^{0}$ juega un papel análogo al campo magnético $B_{\parallel}$; el tensor de spin de materia oscura parece actuar como el análogo gravitacional de un medio dieléctrico transparente. Sin embargo, los mecanismos físicos detrás de los dos efectos son fundamentalmente diferentes. En el caso de la rotación de Faraday, la relación de dispersión (en el orden dominante del límite eikonal) se ve modificada por la birrefringencia circular: la luz circularmente polarizada hacia la izquierda y hacia la derecha se propaga a velocidades ligeramente diferentes, produciendo la rotación neta. En contraste, la rotación gravitacional en la ecuación (4.5.13) surge de efectos inducidos por la torsión en el orden subdominante en el límite eikonal, sin ningún cambio en la velocidad de propagación de la GW. Como consecuencia, el parámetro de Verdet (y θ_{Faraday}) depende fuertemente de la longitud de onda, mientras que Θ_{grav} no lo hace.

4.6. Estimaciones y potenciales mediciones

Al formular una hipótesis científica, debemos intentar proporcionar una predicción que pueda ser puesta a prueba en algún experimento. Para el efecto Faraday gravitacional propuesto aquí, ambos aspectos (predicción y verificación) resultan desafiantes, a pesar de ser un fenómeno simple y general en el contexto de la teoría ECSK. Para empezar, en condiciones de laboratorio el efecto Faraday electromagnético puede medirse fácilmente comparando los estados de polarización de entrada y salida. Sin embargo, a escalas astrofísicas, el estado de polarización inicial de una GW en el momento de su emisión es inobservable en la práctica, lo que hace que una medición directa de Θ_{grav} sea altamente improbable en el futuro cercano. No obstante, enfoques indirectos, como examinar casos de lente gravitacional e interferencia de GWs a lo largo de trayectorias diferentes, podrían proporcionar una solución viable (véanse las refs. [45, 46] para enfoques interesantes que estudian cambios en la polarización mediante interferencia de GWs). Más trabajos en esta línea serán presentados en otra ocasión.

Si bien la ecuación (4.5.12) establece un marco teórico, predecir Θ_{grav} dentro de la teoría ECSK sigue siendo una tarea desafiante. Las restricciones observacionales actuales sobre el tensor de spin de la materia oscura (y la torsión), y en particular sobre su posible papel como una contribución adicional de materia oscura o energía oscura, siguen siendo extremadamente laxas. Como resultado, las estimaciones de Θ_{grav} dependen fuertemente del modelo específico adoptado para el sector oscuro; véanse las refs. [47, 48, 49, 50, 51, 52, 53] para tener una visión de las distintas maneras en que la torsión puede desempeñar un papel como parte del sector oscuro durante la evolución cósmica.

Para explorar esto con mayor profundidad, revisemos brevemente la propagación en una geometría FLRW. Consideremos una métrica FLRW con una sección espacial plana, un tensor de espín axial a lo largo de la dirección temporal, y un Lagrangiano de materia que incluya bariones y materia oscura.

Entonces, las ecuaciones de campo (2.0.17, 2.0.18) predicen las ecuaciones de Friedmann axiales de ECSK ($c = 1$)

$$3H^2 - \kappa_4 (\rho_b + \rho_D) = 0, \tag{4.6.1}$$
$$\frac{d}{dt}\rho_b + 3H (\rho_b + p_b) = 0, \tag{4.6.2}$$
$$\frac{d}{dt}\rho_D + 3H (\rho_D + p_D) = 0, \tag{4.6.3}$$

donde "b" se refiere a la materia bariónica, y "D" denota el sector oscuro, dado por

$$\rho_D = \rho_{DM} + 3\frac{\left[\mathcal{A}^0\right]^2}{\kappa_4} + \frac{\Lambda}{\kappa_4}, \tag{4.6.4}$$
$$p_D = p_{DM} - \frac{\left[\mathcal{A}^0\right]^2}{\kappa_4} - \frac{\Lambda}{\kappa_4}, \tag{4.6.5}$$

donde "DM" denota materia oscura. Aquí, el término axial de la torsion $\left[\mathcal{A}^0\right]^2$ actúa como un componente oscura adicional. Para resolver este sistema, se requiere una ecuación de estado que vincule $\mathcal{A}^0$ con ρ_{DM}. Sin embargo, debido a nuestro conocimiento limitado sobre la materia oscura, esto es precisamente lo que nos falta. Por lo tanto, son posibles varios modelos compatibles con las observaciones actuales (por ejemplo, ver refs. [23, 49, 54]).

Lo que sí está claro es que los efectos *observados* de la materia oscura y la energía oscura podrían originarse de una combinación de un término "desnudo", $\frac{\Lambda}{\kappa_4} + \rho_{DM}$, amplificado por $\left[\mathcal{A}^0\right]^2$ a través de las ecuaciones (4.6.4, 4.6.5). Es factible desarrollar modelos que se desvíen ligeramente del paradigma ΛCDM, donde $\left[\mathcal{A}^0\right]^2 \ll \rho_{DM}$, y la pequeña presión negativa adicional causada por $\left[\mathcal{A}^0\right]^2$ resuelve la tensión de Hubble (ver ref. [23]). Además, se pueden construir modelos en los que $\left[\mathcal{A}^0\right]^2$ desempeña un papel fundamental en la explicación de la energía oscura (ver ref. [49]).

Para estimar el orden de magnitud de Θ_{grav} y evaluar la importancia de este efecto, recurrimos al modelo propuesto en la ref. [23]. En esta referencia, basándonos en las ecuaciones (4.6.4, 4.6.5), introdujimos una ecuación de estado de la forma

$$\mathcal{A}^0 = \alpha_Y \sqrt{\frac{\kappa_4}{3}\rho_{DM}}, \tag{4.6.6}$$

donde α_Y es la denominada constante "barotropica", considerando la materia oscura fría estándar $p_{DM} = 0$. En este modelo, el tensor de spín axial genera una densidad y presión efectivas de materia oscura en las ecuaciones FLRW, dadas por

$$\rho_{\text{eff}} = \left(1 + \alpha_Y^2\right)\rho_{DM}, \tag{4.6.7}$$
$$p_{\text{eff}} = -\frac{1}{3}\alpha_Y^2\rho_{DM} = \omega_{\text{eff}}\rho_{\text{eff}}, \tag{4.6.8}$$

donde el parámetro de estado efectivo es negativo

$$\omega_{\text{eff}} = -\frac{1}{3}\frac{\alpha_Y^2}{1+\alpha_Y^2}. \tag{4.6.9}$$

Esta constante surge en las ecuaciones de FLRW a pesar de que la materia oscura fría tenga un parámetro de estado intrínseco de $\omega_{DM} = 0$. Las referencias [55, 23] mostraron que un pequeño parámetro de estado efectivo, $\omega_{\text{eff}} \approx 10^{-2}$ (correspondiente a $\alpha_Y = 0{,}183$), es suficiente para resolver la tensión del parámetro de Hubble.

En este marco, el ángulo de rotación gravitacional está dado por:

$$\Theta_{\text{grav}} = \operatorname{sgn}(\alpha_Y) \int_{\eta=0}^{\eta} \sqrt{-\kappa_4\omega_{\text{eff}}\rho_{\text{eff}}}\, \mathrm{d}\ell. \tag{4.6.10}$$

Al calcular la tasa de cambio del ángulo de rotación

$$\frac{\mathrm{d}\Theta_{\text{grav}}}{\mathrm{d}\ell} = \operatorname{sgn}(\alpha_Y) \sqrt{-\kappa_4\omega_{\text{eff}}\rho_{\text{eff}}}, \tag{4.6.11}$$

y utilizando la densidad actual de materia oscura estimada en el halo de la Vía Láctea como ρ_{eff} (alrededor de 0,4, GeV/cm^3, ver refs. [56, 57]), obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}\Theta_{\text{grav}}}{\mathrm{d}\ell} \sim \pm\frac{1^\circ}{5\times 10^6\,\text{ly}}, \tag{4.6.12}$$

lo que indica que el efecto es, en efecto, muy pequeño. Como referencia, el Grupo Local tiene un diámetro de $\sim 10^7$, ly. Cuando usamos la densidad de energía promedio de materia oscura actual en el universo como ρ_{eff}, aproximadamente 4, keV/cm^3, el ángulo disminuye en tres órdenes de magnitud.

Sin embargo, la tasa de este efecto Faraday gravitacional aumenta significativamente en el universo temprano. En términos de corrimiento al rojo, la densidad efectiva evoluciona como

$$\rho_{\text{eff}}(z) = \rho_{\text{eff}0}(1+z)^{3(1+\omega_{\text{eff}})}, \tag{4.6.13}$$

y la tasa de cambio en el ángulo de rotación se convierte en

$$\left.\frac{\mathrm{d}\Theta_{\text{grav}}}{\mathrm{d}\ell}\right|_{z} = \left.\frac{\mathrm{d}\Theta_{\text{grav}}}{\mathrm{d}\ell}\right|_{0}(1+z)^{\frac{3}{2}(1+\omega_{\text{eff}})}. \tag{4.6.14}$$

Por lo tanto, en la época del CMB ($z = 1089$), la tasa de rotación es aproximadamente $3{,}2 \times 10^4$ veces mayor que en $z = 0$. Para valores de z más altos (por ejemplo, GWs primordiales), el efecto sería aún mayor.

Para otros modelos ECSK, como el del ref. [49] que vincula la torsión con efectos de energía oscura, los valores exactos variarán. Sin embargo, en general esperamos:

$$\frac{\left[\mathcal{A}^0\right]^2}{\kappa_4} \sim \rho_{\text{D}}, \tag{4.6.15}$$

con un comportamiento general que sigue un patrón similar. Por lo tanto, si la materia oscura posee un tensor de spín no nulo, podríamos esperar que el efecto Faraday gravitacional sea mucho más importante en el universo primitivo.

Capítulo 5

Discusión

A lo largo de este análisis, que tenía por objetivo extender la fenomenología de la polarización de ondas gravitacionales sobre una geometría RC, estudiamos en el límite subdominante de la expansión eikonal la desviación en la propagación de la polarización respecto RG estándar. Esto debido a que la ecuación para la propagación de la polarización tendrá contribuciones de la torsión, además de ser no lineal en la polarización.
Analizando la propagación de ondas gravitacionales a lo largo de un espacio-tiempo con torsión producto de fuentes fermiónicas, encontramos que la ecuación para la propagación de la polarización se reducirá a su componente axial.
Luego, analizando la ecuación axial, lo primero que podemos determinar es que se trata de una ecuación diferencial lineal sobre la geodésica para cada modo de polarización. Además, no existe ningún mecanismo aparente que levante los modos b, l, x, y al orden dominante. La dinámica de la teoría suprime esta posibilidad, dado que los grados de libertad físicos en la teoría ECSK son los mismos dos grados de libertad que, en RG estándar, están asociados con el gravitón.
Luego, considerando el background cosmológico y la condición de torsión débil $p_A = S^B{}_A \mathring{p}_B$ logramos reducir la ecuación a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas respecto al parámetro de la geodésica η sobre lo que denominamos como matrices de **scrambling** $S^A{}_B$, que parametriza una rotación entre el modo de

polarización lineal $\mathring{p}_+$ y el cruzado $\mathring{p}_\times$ de RG en unidades naturales,

$$p_+ = \cos\left(t^3 A^0 \eta\right) \mathring{p}_+ + \sin\left(t^3 A^0 \eta\right) \mathring{p}_\times, \tag{5.0.1}$$

$$p_\times = -\sin\left(t^3 A^0 \eta\right) \mathring{p}_+ + \cos\left(t^3 A^0 \eta\right) \mathring{p}_\times. \tag{5.0.2}$$

Esta rotación está caracterizada por el ángulo $\Theta(\eta) = t^3 \mathcal{A}^0 \eta$[1], con $\mathcal{A}^0 = \nu_-(t) U^0$ donde $\nu_-(t)$ ya está reportado en la literatura [23]. No obstante aquí adquiere el rol de frecuencia en la rotación entre los modos de polarización. En el caso en que generalizamos este resultado para cualquier métrica estrictamente simétrica, el resultado fue similar, con un ángulo de rotación

$$\Theta_{\text{grav}}(\eta) = \int_{\eta=0}^{\eta} \mathcal{A}^0 \, \mathrm{d}\ell, \tag{5.0.3}$$

Esta rotación en los modos de polarización es análoga al efecto Faraday para ondas electromagnéticas. Por lo tanto, podríamos denominar a esta rotación como un **efecto Faraday gravitacional**, o más precisamente, **efecto Faraday-Cartan**. Si bien la frecuencia es bastante baja, no es nula, de forma tal que un modo de polarización que se propaga sobre una geometría de RC, en una simetría cosmológica o esférica, rotará en el orden

$$\frac{\mathrm{d}\Theta_{\text{grav}}}{\mathrm{d}\ell} \sim \pm \frac{1^\circ}{5 \times 10^6 \, \text{ly}}, \tag{5.0.4}$$

Dado que para medir este efecto requerimos el estado inicial y final de los modos de polarización de la onda gravitacional, resulta no trivial establecer un contraste experimental. No obstante, [36], en el problema 3.2, nos presenta un ejercicio simple para comprender el comportamiento de la radiación gravitacional de un sistema binario de masas orbitando circularmente entre ellas. Describe un patrón de ondas gravitacionales con las siguientes polarizaciones:

$$\mathring{p}_+(t) = \frac{1}{r} \frac{4G\mu\omega_s^2 R^2}{c^4} \left(\frac{1 + \cos^2\theta}{2} \right) \cos 2\omega_s t, \tag{5.0.5}$$

$$\mathring{p}_\times(t) = \frac{1}{r} \frac{4G\mu\omega_s^2 R^2}{c^4} \cos\theta \sin 2\omega_s t. \tag{5.0.6}$$

Esto significa que, si dos cuerpos de masa reducida $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ orbitan entre ellos en torno a una circunferencia de radio R, emiten una radiación cuadrupolar con el doble de la frecuencia con la que orbita la fuente ω_s, con una polarización que decae como el inverso de la distancia $\frac{1}{r}$ y que presenta una dependencia angular relacionada con el

[1] En unidades naturales.

ángulo θ entre la normal del plano de la órbita y la línea de medición[2].

Lo verdaderamente interesante relacionado con la presente investigación está en esta dependencia angular, ya que $\mathring{p}_+ \sim (1 + \cos^2\theta)$ y $\mathring{p}_\times \sim \cos\theta$. Por lo tanto, si medimos la radiación gravitacional en una dirección ortonormal al plano de la órbita, observaremos un modo superpuesto. No obstante, si medimos en el plano de la órbita, detectaremos un modo lineal $\mathring{p}_+$.

Esto resulta interesante porque, bajo una vista superficial, pareciera que existe un escenario astrofísico con el cual podríamos medir el efecto Faraday-Cartan en caso de detectar contribuciones de modos $\mathring{p}_\times$ en el plano de la órbita, y por tanto, obtener potencial evidencia sobre la existencia de la torsión. Aunque, para cerrar por completo este problema, es necesario estudiar los procesos de emisión de ondas gravitacionales tanto en RG estándar —donde un escenario más realista sería considerar órbitas elípticas, los efectos de *backreaction* y aproximaciones post-Newtonianas— como las correcciones en la teoría ECSK. Además, es fundamental contar con medios independientes de la gravedad para establecer la inclinación de la orbita respecto nuestro plano en la via lactea; un ejemplo podría ser contrastar la polarización gravitacional con la electromagnética producto de *mergers* de estrellas de neutrones.

Es importante remarcar que los resultados podrían diferir significativamente al incluir en la acción términos torsionales que violan la paridad, como el término de Nieh–Yan–Holst; ver ref. [58, 59, 60, 61, 62]. En este caso, la torsión se convierte en un grado de libertad propagante, incluso en el vacío. La ecuación (3.3.8) incluiría entonces términos adicionales, dando lugar a una ecuación dinámica independiente para V_{ab}, así como a nuevos modos propagantes, a veces denominados *"rotones"* o *"torsionones"* [63, 64]. Las consecuencias para las perturbaciones métricas en orden subdominante podrían ser considerablemente más intrincadas, conduciendo potencialmente a manifestaciones novedosas en la evolución de la polarización y la amplitud.

Este análisis se puede extender de tres formas principales. La primera sería estudiar el régimen de torsión fuerte, donde tanto los procesos de emisión como de propagación diferirán significativamente respecto a la Relatividad General, como podría ser el caso en plasmas fermiónicos de alta densidad.[3] La segunda consiste en considerar otros campos como fuentes de torsión, tales como los acoplamientos con campos escalares, con énfasis en el acoplamiento con el término de Nieh–Yan–Holst. Por último, como modelamos

[2]Con G la constante de gravitación universal.
[3]Como en el universo temprano.

a la fuente de torsión como materia fermiónica que interactúa exclusivamente con el espacio-tiempo, se podría interpretar esta fuente de torsión como materia oscura modelada mediante neutrinos estériles cuya ecuación de estado puede mejorar el modelo aquí propuesto.

Capítulo 6

Conclusión

En este capítulo agruparemos las conclusiones y resultados más importantes obtenidos a lo largo de esta investigación.

El enfoque principal de este proyecto fue netamente fenomenológico, haciendo uso de las herramientas matemáticas anteriormente mencionadas para extender la fenomenología de **GWs** a la geometría **RC**, en particular mediante la exploración de efectos anómalos en la propagación de la polarización, para lo cual estudiamos mediante los operadores de onda generalizados y su análisis eikonal. Esto nos permitió analizar la viabilidad de establecer contrastes experimentales con potenciales mediadas de la polarización de **GWs**, además de establecer criterios para restringir teorías con torsión.

En el capítulo 1 iniciamos presentando elementos básicos de formas diferenciales, la estructura métrica mediante el vielbein, la estructura afin mediante la conexión de spin y las ecuaciones de estructura para la curvatura y la torsión.

Estos elementos en el capítulo 2 nos permitieron construir la acción de Einstein-Hilbert en el lenguaje de formas diferenciales, relajando la condición de torsión nula y por lo tanto metricidad y afinidad representaban grados de libertad independientes, con ecuaciones de campo distintas conocidas como las ecuaciones de Eintein-Cartan. Además, revisamos los operadores diferenciales generalizados a una geometría RC $D, I_a, \mathcal{D}_a$. Los cuales satisfacen un superálgebra abierta y nos permiten definir las generalizaciones de los operadores de onda de De Rham y Beltrami. Los cuales se relacionan mediante la identidad de Weitzenböck.

En el capítulo 3 estudiamos las perturbaciones en las ecuaciones de campo tanto en el caso de RG estándar como su extensión sobre una geometría RC, la teoría ECSK. Rápidamente notamos que solo las perturbaciones métricas se propagan, dado que estas perturbaciones satisfacen una ecuación de onda construida con los operadores diferenciales. Luego, aplicando la expansión eikonal sobre las perturbaciones métricas y afines. Encontramos que la relación de dispersión es equivalente a la de RG estándar. Es decir, la radiación gravitacional, al igual que la electromagnética se propagará a la velocidad de la luz sobre geodésicas nulas de forma consistente con las observaciones. A orden subdominante de la expansión eikonal vemos que la amplitud y la polarización se verán afectadas por la influencia de la torsión del espaciotiempo. Para estudiar tanto la amplitud como la polarización consideramos el caso de torsión débil, donde los procesos de emisión de ondas gravitacionales son equivalentes a RG estándar. No obstante, durante la propagación tendrá desviaciones respecto RG.

Analizando la propagación de la amplitud en el caso torsión débil, según [27], la influencia de la torsión en la amplitud se encuentra en un orden de magnitud por debajo de los umbrales de detección de instrumentos futuros como LISA. Además, cuando la torsión del espacio-tiempo se anula, la amplitud coincide con la predicha por la RG. No obstante, la polarización no había sido estudiada aún.

Finalmente, en el capítulo 4 nos enfocamos en estudiar la propagación anómala de la polarización en el caso de torsión débil. Para ello, considerando las condiciones de normalización de los modos de polarización junto con dos escenarios de simetría de fondo —uno cosmológico y otro esférico— encontramos que solo se propagan los modos $+, \times$. No obstante, estos modos de polarización, a diferencia de lo que ocurre en relatividad general, pueden transformarse entre sí debido a la influencia de la torsión. Esta influencia se manifiesta como un ángulo de rotación,

$$\Theta_{\mathrm{grav}}(\eta) = \int_{\eta=0}^{\eta} \mathcal{A}^0 \mathrm{d}\ell, \tag{6.0.1}$$

De forma análoga al efecto Faraday para ondas electromagnéticas, las ondas gravitacionales oscilarán de un estado de polarización a otro bajo la influencia de la torsión, en lo que denominamos **efecto Faraday-Cartan**.

Estimando el orden de magnitud,

$$\frac{\mathrm{d}\Theta_{\mathrm{grav}}}{\mathrm{d}\ell} \sim \pm \frac{1^\circ}{5\times 10^6\,\mathrm{ly}}, \tag{6.0.2}$$

Encontramos que los modos de polarización oscilarán 1° cada 5 millones de años luz.

Por último, en el capítulo 5 discutimos las repercusiones de los resultados, comentamos un posible escenario observable y, finalmente, presentamos las tres líneas principales para extender este análisis en el futuro. La primera sería estudiar el régimen de torsión fuerte, donde tanto los procesos de emisión como de propagación diferirán significativamente respecto a la Relatividad General, como podría ser el caso en plasmas fermiónicos de alta densidad.[1] La segunda consiste en considerar otros campos como fuentes de torsión, tales como los acoplamientos con campos escalares, con énfasis en el acoplamiento con el término de Nieh–Yan–Holst. El tercer escenario sería modelar materia obscura mediante neutrinos estériles cuya ecuación de estado puede mejorar el modelo cosmologico aquí propuesto.

[1]Como en el universo temprano.

Apéndice A

Derivación ecuaciones de campo de Einstein

Sea la acción de Einstein-Hilbert con constante cosmológica:

$$S[g_{\mu\nu}] = \int_{M^{(4)}} d^4x \sqrt{-g}\left[\frac{1}{2\kappa_4}(\mathring{R} - 2\Lambda) + \mathcal{L}_m\right]. \tag{A0.1}$$

Variando la acción respecto a la métrica.

$$\delta S = \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} \tag{A0.2}$$

$$= \int_{M^{(4)}} d^4x \left[\frac{1}{2\kappa_4}\left[\delta(\sqrt{-g})(\mathring{R} - 2\Lambda) + \sqrt{-g}\delta(\mathring{R} - 2\Lambda)\right] + \delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)\right] \tag{A0.3}$$

$$= \int_{M^{(4)}} d^4x \sqrt{-g}\left[\frac{1}{2\kappa_4}\left[\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta(\sqrt{-g})(\mathring{R} - 2\Lambda) + \delta(\mathring{R} - 2\Lambda)\right] + \frac{1}{\sqrt{-g}}\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)\right] \tag{A0.4}$$

$$= 0. \tag{A0.5}$$

Por lo tanto debemos calcular las siguientes variaciones:

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{-1}{2\sqrt{-g}}\delta g, \tag{A0.6}$$

$$\delta\mathring{R} = \delta g^{\mu\nu}\mathring{R}_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta\mathring{R}_{\mu\nu}, \tag{A0.7}$$

$$\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m) = -\left[\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m - \frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}}\right]\delta g^{\mu\nu}. \tag{A0.8}$$

Comenzamos derivando la ec (A0.6). Utilizando la fórmula de Jacobi para el determinante: $\delta g = \delta \det(g_{\mu\nu}) = g g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$. Con esto la variación del determinante de la métrica es

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{-1}{2\sqrt{-g}} - g g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{A0.9}$$

$$= \frac{-1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \tag{A0.10}$$

Luego, para variar el escalar de Ricci (A0.7), debemos notar que $\delta \mathring{R}_{\mu\nu} = \delta \mathring{R}^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}$. Con esto la variación del tensor de Ricci se pude calcular mediante la variación del tensor de Riemann:

$$\delta \mathring{R}^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu} = \partial_\sigma \delta \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\mu} - \partial_\nu \delta \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\sigma\mu} + \delta \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\sigma\lambda} \mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\nu\mu} + \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\sigma\lambda} \delta \mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\nu\mu} - \delta \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\lambda} \mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\sigma\mu} - \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\lambda} \delta \mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\sigma\mu}. \tag{A0.11}$$

Dado que $\delta \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\mu}$[1] es un tensor podemos escribir la ec (A0.11) en términos de las siguientes derivadas covariantes.

$$\nabla_\sigma(\delta \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\mu}) = \partial_\sigma \delta \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\mu} + \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\lambda\sigma} \delta \mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\nu\mu} - \mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\nu\sigma} \delta \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\lambda\mu} - \mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\sigma} \delta \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\lambda}, \tag{A0.12}$$

$$\nabla_\nu(\delta \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\sigma\mu}) = \partial_\nu \delta \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\sigma\mu} + \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\lambda\nu} \delta \mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\sigma\mu} - \mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\sigma\nu} \delta \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\lambda\mu} - \mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\nu} \delta \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\sigma\lambda}. \tag{A0.13}$$

Con lo cual,

$$\delta \mathring{R}^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu} = \nabla_\sigma(\delta \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\mu}) - \nabla_\nu(\delta \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\sigma\mu}). \tag{A0.14}$$

Así, considerando la compatibilidad métrica $\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0$ la variación del escalar de Ricci será

$$\delta \mathring{R} = \mathring{R}_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\sigma \left[g^{\mu\nu} \delta \mathring{\Gamma}^{\sigma}{}_{\nu\mu} - g^{\mu\sigma} \delta \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\rho\mu} \right]. \tag{A0.15}$$

Esta derivada covariante multiplicada por $\sqrt{-g}$ es proporcional a una derivada total:

$$\sqrt{-g}\nabla_\sigma \left[g^{\mu\nu} \delta \mathring{\Gamma}^{\sigma}{}_{\nu\mu} - g^{\mu\sigma} \delta \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\rho\mu} \right] = \sqrt{-g}\partial_\sigma \left(\left[g^{\mu\nu} \delta \mathring{\Gamma}^{\sigma}{}_{\nu\mu} - g^{\mu\sigma} \delta \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\rho\mu} \right] \right). \tag{A0.16}$$

[1] La diferencia de símbolos de Christoffel es un tensor.

Bajo la integración corresponderá a un término de borde.

$$\int_{M^{(d)}} d^4x\,\sqrt{-g}\partial_\sigma\left(\left[g^{\mu\nu}\delta\mathring{\Gamma}^{\sigma}{}_{\nu\mu} - g^{\mu\sigma}\delta\mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\rho\mu}\right]\right) = 0. \tag{A0.17}$$

Con esto, la variación de la acción (A0.4) que contribuye a las ecuaciones de campo son:

$$\delta S = \int_{M^{(d)}} d^4x\,\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2\kappa_4}\left(\frac{-1}{2}g_{\mu\nu}(\mathring{R} - 2\Lambda) + \mathring{R}_{\mu\nu}\right) - \left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m - \frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}}\right)\right]\delta g^{\mu\nu} = 0. \tag{A0.18}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento son:

$$\frac{1}{2\kappa_4}\left(\frac{-1}{2}g_{\mu\nu}(\mathring{R} - 2\Lambda) + \mathring{R}_{\mu\nu}\right) - \left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m - \frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}}\right) = 0, \tag{A0.19}$$

$$\left(\frac{-1}{2}g_{\mu\nu}(\mathring{R} - 2\Lambda) + \mathring{R}_{\mu\nu}\right) = 2\kappa_4\left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m - \frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}}\right). \tag{A0.20}$$

Nombrado, en el lado derecho de la ultima ecuación, $T_{\mu\nu} = \left(g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m - 2\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}}\right)$ como el **tensor de energía-momentum** y recordando que $\kappa_4 = \frac{8\pi G}{c^4}$, llegamos a la expresión conocida para las ecuaciones de campo de Einstein con constante cosmológica:

$$\mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathring{R} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \tag{A0.21}$$

Apéndice B

Delta de Kronecker y símbolo de Levi-Civita

En este apéndice definiremos la delta de kronecker generalizda en un espacio de dimensión $d = n$ como el determinante

$$\delta^{\mu_1...\mu_n}_{\nu_1...\nu_n} = \begin{vmatrix} \delta^{\mu_1}_{\nu_1} & \delta^{\mu_1}_{\nu_2} & ... & \delta^{\mu_1}_{\nu_n} \\ \delta^{\mu_2}_{\nu_1} & \delta^{\mu_2}_{\nu_2} & ... & \delta^{\mu_2}_{\nu_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta^{\mu_n}_{\nu_1} & \delta^{\mu_n}_{\nu_2} & ... & \delta^{\mu_n}_{\nu_n} \end{vmatrix}. \tag{A0.1}$$

Que satisface las siguientes propiedades.

Definición 19. *La delta generalizada es completamente antisemítica bajo intercambio de índices*

$$\delta^{\mu_1...\mu_i\mu_j...\mu_n}_{\nu_1.............\nu_n} = -\delta^{\mu_1...\mu_j\mu_i...\mu_n}_{\nu_1.............\nu_n}, \tag{A0.2}$$

$$\delta^{\mu_1...........\mu_n}_{\nu_1...\nu_i\nu_j...\nu_n} = -\delta^{\mu_1...........\mu_n}_{\nu_1...\nu_j\nu_i...\nu_n}. \tag{A0.3}$$

Definición 20. *La delta generalizada antisimetriza la contracción con un tensor arbitrario. En el caso de ser aplicado sobre la base se puede definir el producto exterior según*

$$\frac{1}{p!}\delta^{\mu_1...\mu_p}_{\alpha_1...\alpha_p} dx^{\alpha_1} \otimes ... \otimes dx^{\alpha_p} = dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_p}. \tag{A0.4}$$

Así dado los tensores $T^{\mu_1 \ldots \mu_n}$ y $T_{\mu_1 \ldots \mu_n}$ pueden ser antisimetrizados

$$T^{[\mu_1 \ldots \mu_n]} = \delta^{\mu_1 \ldots \mu_n}_{\nu_1 \ldots \nu_n} T^{\nu_1 \ldots \nu_n}, \tag{A0.5}$$

$$T_{[\mu_1 \ldots \mu_n]} = \delta^{\nu_1 \ldots \nu_n}_{\mu_1 \ldots \mu_n} T_{\nu_1 \ldots \nu_n}. \tag{A0.6}$$

En el caso de que el tensor ya sea antisimétrico, como en el caso de formas diferenciales, se tiene que

$$\delta^{\mu_1 \ldots \mu_n}_{\nu_1 \ldots \nu_n} T^{\nu_1 \ldots \nu_n} = n! T^{\mu_1 \ldots \mu_n}, \tag{A0.7}$$

$$\delta^{\nu_1 \ldots \nu_n}_{\mu_1 \ldots \mu_n} T_{\nu_1 \ldots \nu_n} = n! T_{\mu_1 \ldots \mu_n}. \tag{A0.8}$$

Definición 21. *la delta generalizada puede ser descompuesta según*

$$\delta^{\mu_1 \ldots \mu_n}_{\nu_1 \ldots \nu_n} = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} \delta^{\mu_1}_{\nu_p} \delta^{\mu_2 \ldots \ldots \ldots \mu_n}_{\nu_1 \ldots \hat{\nu}_p \ldots \nu_n}. \tag{A0.9}$$

Donde $\hat{\nu}_p$ representa omitir el indice ν_p

Definición 22. *La delta generalizada satisface*

$$\delta^{\mu_1 \ldots \mu_r \mu_{r+1} \ldots \mu_n}_{\nu_1 \ldots \nu_r \mu_{r+1} \ldots \mu_n} = \frac{(d-r)!}{(d-n)!} \delta^{\mu_1 \ldots \mu_r}_{\nu_1 \ldots \nu_r} \tag{A0.10}$$

Definición 23. *Se define el símbolo de Levi-Civita como*

$$\epsilon_{\mu_1 \ldots \mu_n} = \delta^{1 \ldots \ldots . n}_{\mu_1 \ldots \mu_n} \qquad \epsilon^{\mu_1 \ldots \mu_n} = \delta^{\mu_1 \ldots \mu_n}_{1 \ldots \ldots . n} \tag{A0.11}$$

Con lo cual la delta generalizada puede ser recuperada como contracciones de los símbolos de Levi-Civita

$$\delta^{\mu_1 \ldots \mu_n}_{\nu_1 \ldots \nu_n} = \epsilon^{\mu_1 \ldots \mu_n} \epsilon_{\nu_1 \ldots \nu_n} \tag{A0.12}$$

Definición 24. *El símbolo de Levi-Civita permite relacionar las componentes de una matriz $M^{\mu}{}_{\nu}$ en $d = n$ dimensiones con su determinante segun*

$$\epsilon_{\nu_1 \ldots \nu_n} M^{\mu_1}{}_{\nu_1} \ldots M^{\mu_n}{}_{\nu_n} = \det M \epsilon_{\nu_1 \ldots \nu_n} \tag{A0.13}$$

Apéndice C

Derivación ecuaciones de Einstein-Cartan

Considerando el lagrangiano de la gravedad en lenguaje de formas diferenciales,

$$\mathcal{L}(e,\omega) = \frac{1}{c\kappa_4}\left(\frac{1}{4}\epsilon_{abcd}R^{ab}\wedge e^c\wedge e^d - \frac{1}{4!}\Lambda\epsilon_{abcd}e^a\wedge e^b\wedge e^c\wedge e^d\right) + \mathcal{L}_m(e,\omega), \quad \text{(A0.1)}$$

y relajando la condición de torsión nula, la acción tendrá a la metricidad e^a y la afinidad ω^{ab} como grados de libertad independientes:

$$S(e,\omega) = \int_{M^{(4)}} \mathcal{L}(e,\omega). \quad \text{(A0.2)}$$

Utilizando las propiedades del cálculo diferencial funcional, tenemos que

$$\delta S(e,\omega) = \int_{M^{(4)}} \left[\frac{\delta S}{\delta e^a}\delta e^a + \frac{\delta S}{\delta\omega^{ab}}\delta\omega^{ab}\right] = 0. \quad \text{(A0.3)}$$

Recordando que segun [65]

$$\delta_e\mathcal{L}_m = -\frac{1}{c} * \mathcal{T}_d\wedge\delta e^d, \quad \text{(A0.4)}$$

$$\delta_\omega\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2c}\delta\omega^{ab}\wedge *\sigma_{ab}. \quad \text{(A0.5)}$$

Con esto la variación respecto el vielbein será:

$$\frac{\delta S}{\delta e^a} = \frac{1}{c\kappa_4}\left(\frac{1}{2}\epsilon_{abcd}R^{ab}\wedge e^c\wedge\delta e^d - \frac{1}{3!}\Lambda\epsilon_{abcd}e^a\wedge e^b\wedge e^c\wedge\delta e^d\right) + \frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta e^a} \tag{A0.6}$$

$$= \frac{1}{c\kappa_4}\left[\frac{1}{2}\epsilon_{abcd}R^{ab}\wedge e^c - \frac{1}{3!}\Lambda\epsilon_{abcd}e^a\wedge e^b\wedge e^c - \kappa_4 * \mathcal{T}_d\right]\wedge\delta e^d \tag{A0.7}$$

$$= 0, \tag{A0.8}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\epsilon_{abcd}R^{ab}\wedge e^c - \frac{1}{3!}\Lambda\epsilon_{abcd}e^a\wedge e^b\wedge e^c - \kappa_4 * \mathcal{T}_d. \tag{A0.9}$$

Luego, variado respecto la conexión, encontramos

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\omega^{ab}} = \frac{1}{4c\kappa_4}\epsilon_{abcd}D\delta\omega^{ab}\wedge e^c\wedge e^d + \frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta\omega^{ab}} = 0. \tag{A0.10}$$

Completando derivadas, podemos escribir

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\omega^{ab}} = \frac{1}{4c\kappa_4}D(\epsilon_{abcd}\delta\omega^{ab}\wedge e^c\wedge e^d) + \frac{1}{4c\kappa_4}\epsilon_{abcd}\delta\omega^{ab}\wedge D(e^c\wedge e^d) - \frac{1}{2c}\delta\omega^{ab}\wedge *\sigma_{ab} = 0. \tag{A0.11}$$

Despreciando términos de borde y según regla de Leibniz, llegamos a.

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\omega^{ab}} = \frac{1}{4c\kappa_4}\epsilon_{abcd}\delta\omega^{ab}\wedge T^c\wedge e^d - \frac{1}{2c}\delta\omega^{ab}\wedge *\sigma_{ab} \tag{A0.12}$$

$$= \frac{1}{2c\kappa_4}\delta\omega^{ab}\wedge\left[\epsilon_{abcd}T^c\wedge e^d - \kappa_4 * \sigma_{ab}\right] \tag{A0.13}$$

$$= 0, \tag{A0.14}$$

$$\Rightarrow \epsilon_{abcd}T^c\wedge e^d - \kappa_4 * \sigma_{ab} = 0. \tag{A0.15}$$

Ahora transformamos las ecuaciones a la base coordenada: comenzamos con

$$\left[\frac{1}{2}\epsilon_{abcd}R^{ab}\wedge e^c - \frac{1}{3!}\Lambda\epsilon_{abcd}e^a\wedge e^b\wedge e^c - \kappa_4 * \mathcal{T}_d\right]\wedge\delta e^d = 0. \tag{A0.16}$$

Recordando que $\sqrt{|g|}\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = \epsilon_{abcd}e^{a}{}_{\mu}e^{b}{}_{\nu}e^{c}{}_{\rho}e^{d}{}_{\lambda}$, y además considerando que $\sqrt{|g|}dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \wedge dx^{\rho} \wedge dx^{\lambda} = \sqrt{|g|}\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}d^4x$. Con lo cual tendremos

$$\left[\frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{3!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{\kappa_4}{3!}\mathcal{T}_{\sigma}{}^{\alpha}\epsilon_{\alpha\mu\nu\rho}\right] \wedge \delta e^{\sigma}{}_{\lambda}\sqrt{|g|}dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \wedge dx^{\rho} \wedge dx^{\lambda} = 0, \tag{A0.17}$$

$$\left[\frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{3!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{\kappa_4}{3!}\mathcal{T}_{\sigma}{}^{\alpha}\epsilon_{\alpha\mu\nu\rho}\right] \wedge \delta e^{\sigma}{}_{\lambda}\sqrt{|g|}\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}d^4x = 0, \tag{A0.18}$$

$$\left[\frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}_{\alpha\beta\rho\sigma}R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{3!}\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{\kappa_4}{3!}\mathcal{T}_{\sigma}{}^{\alpha}\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}_{\alpha\mu\nu\rho}\right] \wedge \delta e^{\sigma}{}_{\lambda}\sqrt{|g|}d^4x = 0, \tag{A0.19}$$

$$\left[\frac{1}{4}\delta^{\lambda\mu\nu\rho}_{\sigma\alpha\beta\rho}R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{3!}\delta^{\lambda\mu\nu\rho}_{\sigma\mu\nu\rho} + \frac{\kappa_4}{3!}\mathcal{T}_{\sigma}{}^{\alpha}\delta^{\mu\nu\rho\lambda}_{\mu\nu\rho\alpha}\right] \wedge \delta e^{\sigma}{}_{\lambda}\sqrt{|g|}d^4x = 0. \tag{A0.20}$$

Dada la antisimetría de la delta de Kronecker y la siguiente propiedad:

$$\delta^{\lambda\mu\nu\rho}_{\sigma\mu\nu\rho} = 3!\delta^{\lambda}{}_{\sigma}, \tag{A0.21}$$

la variación puede ser escrita como

$$\left[\frac{1}{4}\delta^{\lambda\mu\nu}_{\sigma\alpha\beta}R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} - \Lambda\frac{3!}{3!}\delta^{\lambda}{}_{\sigma} + \kappa_4\frac{3!}{3!}\mathcal{T}_{\sigma}{}^{\alpha}\delta^{\lambda}{}_{\alpha}\right]\delta e^{\sigma}{}_{\lambda} = 0. \tag{A0.22}$$

Según la definición de la delta de Kronecker $\delta^{\lambda\mu\nu}_{\sigma\alpha\beta} = \delta^{\lambda}_{\sigma}\delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} - \delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\mu\nu}_{\sigma\beta} + \delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\mu\nu}_{\sigma\alpha}$, la variación será.

$$\left[\frac{1}{4}(\delta^{\lambda}_{\sigma}\delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} - \delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\mu\nu}_{\sigma\beta} + \delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\mu\nu}_{\sigma\alpha})R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} - \Lambda\delta^{\lambda}{}_{\sigma} + \kappa_4\mathcal{T}_{\sigma}{}^{\alpha}\delta^{\lambda}{}_{\alpha}\right] = 0, \tag{A0.23}$$

$$\left[\frac{2!}{4}(\delta^{\lambda}_{\sigma}R^{\alpha\beta}_{\alpha\beta} - R^{\lambda\beta}_{\sigma\beta} - R^{\lambda\alpha}_{\sigma\alpha}) - \Lambda\delta^{\lambda}{}_{\sigma} + \kappa_4\mathcal{T}_{\sigma}{}^{\lambda}\right] = 0, \tag{A0.24}$$

$$\left[\frac{1}{2}(\delta^{\lambda}_{\sigma}R - 2R^{\lambda}_{\sigma}) - \Lambda\delta^{\lambda}{}_{\sigma} + \kappa_4\mathcal{T}_{\sigma}{}^{\alpha}\delta^{\lambda}{}_{\alpha}\right] = 0, \tag{A0.25}$$

$$-\left[R^{\lambda}{}_{\sigma} - R\frac{1}{2}\delta^{\lambda}{}_{\sigma} + \Lambda\delta^{\lambda}{}_{\sigma} - \kappa_4\mathcal{T}_{\sigma}{}^{\lambda}\right] = 0, \tag{A0.26}$$

$$-g^{\lambda\mu}\left[R_{\mu\sigma} - R\frac{1}{2}g_{\mu\sigma} + \Lambda g_{\mu\sigma} - \kappa_4\mathcal{T}_{\mu\sigma}\right] = 0. \tag{A0.27}$$

Así llegamos a la ecuación para la curvatura:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa_4\mathcal{T}_{\mu\nu}. \tag{A0.28}$$

Si bien esta ecuación tiene la misma estructura que las ecuaciones de Einstein, es levemente más general, al tener dependencias de la contorsión κ^{ab}. Ahora, la ecuación para la torsión es dada por

$$\delta\omega^{ab} \wedge \left[\epsilon_{abcd} T^c \wedge e^d - \kappa_4 * \sigma_{ab}\right] = 0, \tag{A0.29}$$

$$\delta\omega^{\alpha\beta}{}_{\lambda} dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \sqrt{|g|}\left[\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\rho} T^\gamma{}_{\mu\nu} - \frac{\kappa_4}{3!}\epsilon_{\gamma\mu\nu\rho}\sigma^\gamma{}_{\alpha\beta}\right] = 0, \tag{A0.30}$$

$$\delta\omega^{\alpha\beta}{}_{\lambda} \sqrt{|g|} dx^\lambda \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\left[\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\rho} T^\gamma{}_{\mu\nu} - \frac{\kappa_4}{3!}\epsilon_{\gamma\mu\nu\rho}\sigma^\gamma{}_{\alpha\beta}\right] = 0, \tag{A0.31}$$

$$\delta\omega^{\alpha\beta}{}_{\lambda}\left[\frac{1}{2}\delta^{\lambda\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma\rho} T^\gamma{}_{\mu\nu} - \frac{\kappa_4}{3!}\delta^{\lambda\mu\nu\rho}_{\gamma\mu\nu\rho}\sigma^\gamma{}_{\alpha\beta}\right] = 0, \tag{A0.32}$$

$$\delta\omega^{\alpha\beta}{}_{\lambda}\left[\frac{1}{2}(\delta^\lambda_\gamma \delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} - \delta^\lambda_\alpha \delta^{\mu\nu}_{\gamma\beta} + \delta^\lambda_\beta \delta^{\mu\nu}_{\gamma\alpha}) T^\gamma{}_{\mu\nu} - \kappa_4 \frac{3!}{3!}\delta^\lambda_\gamma \sigma^\gamma{}_{\alpha\beta}\right] = 0, \tag{A0.33}$$

$$\left[\frac{2}{2}(T^\lambda{}_{\alpha\beta} - \delta^\lambda_\alpha T^\gamma{}_{\gamma\beta} + \delta^\lambda_\beta T^\gamma{}_{\gamma\alpha}) - \kappa_4 \sigma^\lambda{}_{\alpha\beta}\right] = 0. \tag{A0.34}$$

Con lo cual la ecuación para la torsión será

$$T^\lambda{}_{\alpha\beta} - \delta^\lambda_\alpha T^\gamma{}_{\gamma\beta} + \delta^\lambda_\beta T^\gamma{}_{\gamma\alpha} = \kappa_4 \sigma^\lambda{}_{\alpha\beta}. \tag{A0.35}$$

Apéndice D

Órdenes de magnitud en el análisis eikonal

Recordemos que estamos en el límite eikonal, donde la fase θ cambia rápidamente en la escala de la longitud de onda $\lambda\!\!\!^{-}$ y la amplitud φ cambia lentamente en la escala del background L. Por lo tanto,

$$\lambda\!\!\!^{-} \ll L \qquad \Rightarrow \qquad \epsilon \ll 1. \tag{A0.1}$$

Considerando al vielbein de orden,

$$\left|e^a{}_\mu\right| \sim 1, \tag{A0.2}$$

la curvatura y la torsión tendrán un tamaño característico en la escala del background.

$$\left|R^{ab}\right| \sim \frac{1}{L^2}, \qquad |T^a| \sim \frac{\epsilon_{,T}}{L} \tag{A0.3}$$

donde el parámetro ϵ_T mide qué tan considerable será la escala de la torsión. Luego las perturbaciones cambian en la escala de la longitud de onda.

$$|H^a| \sim H \qquad \left|V^{ab}\right| \sim V. \tag{A0.4}$$

Deben ser lo suficientemente pequeñas. $H \ll 1$ y $V \ll 1$. Estas perturbaciones en general pueden tener longitudes de ondas distintas. No obstante, por simplicidad consideraremos que son iguales. Con esto podemos determinar el tamaño característico de las perturbaciones como:

$$|H^a| \sim \frac{H}{\lambda}, \qquad \left|V^{ab}\right| \sim \frac{V}{\lambda}. \tag{A0.5}$$

Como las perturbaciones para la ecuación de la torsión no dependen de las derivadas de la métrica es de esperar que

$$\left|T^{a(1)}\right| \sim \epsilon_T \frac{H}{L}, \qquad \left|T^{a(2)}\right| \sim \epsilon_T \frac{H^2}{L}. \tag{A0.6}$$

Lo cual significa que las perturbaciones afines son mucho más pequeñas que las perturbaciones métricas,

$$V \sim \epsilon_T \frac{H}{L}. \tag{A0.7}$$

Por lo tanto, la escala de las perturbaciones a primer y segundo orden de la ec (3.2.44) serán:

$$\left|DU^{ab}_{(1)}\right| \sim \frac{1}{L^2}\frac{H}{\epsilon^2}, \tag{A0.8}$$
$$\left|DV^{ab}_{(1)}\right| \sim \frac{\epsilon_T}{L^2}\frac{H}{\epsilon}, \tag{A0.9}$$
$$\left|DU^{ab}_{(2)} + U^{a(1)}{}_c \wedge U^{cb}_{(1)}\right| \sim \frac{1}{L^2}\frac{H^2}{\epsilon^2}, \tag{A0.10}$$
$$\left|U^a{}_{(2)c} \wedge V^{ab} + V^a{}_c \wedge U^{cb}_{(1)}\right| \sim \frac{\epsilon_T}{L^2}\frac{H^2}{\epsilon}, \tag{A0.11}$$
$$\left|V^a{}_c \wedge V^{cb}\right| \sim \frac{H^2}{L^2}. \tag{A0.12}$$

De las ecuaciones de campo es posible ver que $V \ll H \ll \epsilon \ll 1$. Con esto es directo ver que tanto los modos dominantes y subdominantes estarán contenidos en el término

$$\epsilon_{abccd} R^{ab}_{(1)} \wedge e^c = 0. \tag{A0.13}$$

Apéndice E

Base de los modos de polarización

Definición 25. *La polarización será una 1-forma determinada por,*

$$P^a = P^a{}_b e^b \in \mathbb{C}, \tag{A0.1}$$

que es una 1-forma compleja cuyas componentes pueden ser descompuestas en la siguiente base:

$$P_{mn} = p_{(+)}P^{(+)}_{mn} + p_{(\times)}P^{(\times)}_{mn} + p_{(b)}P^{(b)}_{mn} + p_{(l)}P^{(l)}_{mn} + p_{(x)}P^{(x)}_{mn} + p_{(y)}P^{(y)}_{mn}. \tag{A0.2}$$

Las componentes $P_{mn} = p_A P^A_{mn}$ con $A = \{+, \times, b, l, x, y\}$ son números complejos, normalizados tal que

$$\bar{P}^{ab} P_{ab} = 1 \tag{A0.3}$$

determinadas por las matrices.

$$P^{(+)}_{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{(\times)}_{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{(b)}_{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{A0.4}$$

$$P^{(l)}_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{(x)}_{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{(y)}_{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por último las componentes serán normalizadas:

$$\bar{p}_{(A)}p^{(A)} = 1 \Leftrightarrow \bar{p}_{(+)}p^{(+)} + \bar{p}_{(\times)}p^{(\times)} + \bar{p}_{(b)}p^{(b)} + \bar{p}_{(l)}p^{(l)} + \bar{p}_{(x)}p^{(x)} + \bar{p}_{(y)}p^{(y)} = 1. \tag{A0.5}$$

Según la siguiente jerarquía en órdenes de magnitud en el límite eikonal:

$$\bar{p}_{(+)}p^{(+)} + \bar{p}_{(\times)}p^{(\times)} \approx 1, \tag{A0.6}$$

$$\bar{p}_{(b)}p^{(b)} + \bar{p}_{(l)}p^{(l)} + \bar{p}_{(x)}p^{(x)} + \bar{p}_{(y)}p^{(y)} \leq \epsilon^2. \tag{A0.7}$$

Esta base satisface la condición de ortonormalidad en la ec. (4.3.3). Los conmutadores no nulos de las matrices de polarización son:

$$\begin{aligned}
\left[P^{(+)}, P^{(\times)}\right]^{ab} &= \delta^{ab}_{12}, & \left[P^{(b)}, P^{(x)}\right]^{ab} &= \tfrac{1}{2}\delta^{ab}_{13}, \\
\left[P^{(+)}, P^{(x)}\right]^{ab} &= \tfrac{1}{2}\delta^{ab}_{13}, & \left[P^{(b)}, P^{(y)}\right]^{ab} &= \tfrac{1}{2}\delta^{ab}_{23}, \\
\left[P^{(+)}, P^{(y)}\right]^{ab} &= -\tfrac{1}{2}\delta^{ab}_{23}, & \left[P^{(l)}, P^{(x)}\right]^{ab} &= -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\delta^{ab}_{13}, \\
\left[P^{(\times)}, P^{(x)}\right]^{ab} &= \tfrac{1}{2}\delta^{ab}_{23}, & \left[P^{(l)}, P^{(y)}\right]^{ab} &= -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\delta^{ab}_{23}, \\
\left[P^{(\times)}, P^{(y)}\right]^{ab} &= \tfrac{1}{2}\delta^{ab}_{13}, & \left[P^{(x)}, P^{(y)}\right]^{ab} &= \tfrac{1}{2}\delta^{ab}_{12},
\end{aligned} \tag{A0.8}$$

donde $\delta^{ab}_{cd} = \delta^a_c\delta^b_d - \delta^a_d\delta^b_c$.

Bibliografía

[1] B. P. Abbott, R. Abbott, K. A. Thorne, and K. et al. Thorne. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116:061102, Feb 2016.

[2] B. P. Abbott et al. GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral. *Phys. Rev. Lett.*, 119(16):161101, 2017.

[3] B. P. Abbott et al. Multi-messenger Observations of a Binary Neutron Star Merger. *Astrophys. J. Lett.*, 848(2):L12, 2017.

[4] B. P. Abbott et al. Gravitational Waves and Gamma-rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB 170817A. *Astrophys. J. Lett.*, 848(2):L13, 2017.

[5] E. A. Huerta et al. Enabling real-time multi-messenger astrophysics discoveries with deep learning. *Nature Rev. Phys.*, 1:600–608, 2019.

[6] Dario Bettoni, Jose María Ezquiaga, Kurt Hinterbichler, and Miguel Zumalacárregui. Speed of Gravitational Waves and the Fate of Scalar-Tensor Gravity. *Phys. Rev. D*, 95(8):084029, 2017.

[7] Jose María Ezquiaga and Miguel Zumalacárregui. Dark Energy in light of Multi-Messenger Gravitational-Wave astronomy. *Front. Astron. Space Sci.*, 5:44, 2018.

[8] T. Baker, E. Bellini, P. G. Ferreira, M. Lagos, J. Noller, and I. Sawicki. Strong constraints on cosmological gravity from GW170817 and GRB 170817A. *Phys. Rev. Lett.*, 119(25):251301, 2017.

[9] Lavinia Heisenberg and Shinji Tsujikawa. Dark energy survivals in massive gravity after GW170817: SO(3) invariant. *JCAP*, 01:044, 2018.

[10] C. D. Kreisch and E. Komatsu. Cosmological Constraints on Horndeski Gravity in Light of GW170817. *JCAP*, 12:030, 2018.

[11] Dirk Puetzfeld and Yuri N. Obukhov. Prospects of detecting spacetime torsion. *Int. J. Mod. Phys. D*, 23(12):1442004, 2014.

[12] Sean M. Carroll and George B. Field. Consequences of propagating torsion in connection dynamic theories of gravity. *Phys. Rev. D*, 50:3867–3873, 1994.

[13] Daniel Z. Freedman and Antoine Van Proeyen. *Supergravity*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 5 2012.

[14] Stephon Alexander, Marina Cortês, Andrew R. Liddle, João Magueijo, Robert Sims, and Lee Smolin. Cosmology of minimal varying Lambda theories. *Phys. Rev. D*, 100(8):083507, 2019.

[15] W.E.V. Barker, A.N. Lasenby, M.P. Hobson, and W.J. Handley. Addressing h0 tension with emergent dark radiation in unitary gravity. *Physical Review D*, 102(2), July 2020.

[16] Stephon Alexander, Leah Jenks, Pavel Jiroušek, João Magueijo, and Tom Złośnik. Gravity waves in parity-violating Copernican Universes. *Phys. Rev. D*, 102(4):044039, 2020.

[17] Andre Tilquin and Thomas Schucker. Torsion, an alternative to dark matter? *Gen. Rel. Grav.*, 43:2965–2978, 2011.

[18] Nikodem J. Popławski. Cosmology with torsion: An alternative to cosmic inflation. *Phys. Lett. B*, 694:181–185, 2010. [Erratum: Phys.Lett.B 701, 672–672 (2011)].

[19] Nikodem J. Poplawski. Nonsingular, big-bounce cosmology from spinor-torsion coupling. *Phys. Rev. D*, 85:107502, 2012.

[20] Shantanu Desai and Nikodem J. Popławski. Non-parametric reconstruction of an inflaton potential from Einstein–Cartan–Sciama–Kibble gravity with particle production. *Phys. Lett. B*, 755:183–189, 2016.

[21] Nikodem Popławski. Universe in a Black Hole in Einstein–cartan Gravity. *Astrophys. J.*, 832(2):96, 2016.

[22] Nikodem J. Poplawski. Spacetime torsion as a possible remedy to major problems in gravity and cosmology. *Astron. Rev.*, 8:108, 2013.

[23] Fernando Izaurieta, Samuel Lepe, and Omar Valdivia. The Spin Tensor of Dark Matter and the Hubble Parameter Tension. *Phys. Dark Univ.*, 30:100662, 2020.

[24] João Magueijo and Tom Złośnik. Parity violating Friedmann Universes. *Phys. Rev. D*, 100(8):084036, 2019.

[25] José Barrientos, Fabrizio Cordonier-Tello, Cristóbal Corral, Fernando Izaurieta, Perla Medina, Eduardo Rodríguez, and Omar Valdivia. Luminal Propagation of Gravitational Waves in Scalar-tensor Theories: The Case for Torsion. *Phys. Rev. D*, 100(12):124039, 2019.

[26] José Barrientos, Fernando Izaurieta, Eduardo Rodríguez, and Omar Valdivia. Wave operators, torsion, and Weitzenböck identities. *Gen. Rel. Grav.*, 54(3):26, 2022.

[27] Emilio Elizalde, Fernando Izaurieta, Cristian Riveros, Gonzalo Salgado, and Omar Valdivia. Gravitational waves in einstein–cartan theory: On the effects of dark matter spin tensor. *Physics of the Dark Universe*, 40:101197, 2023.

[28] Atsushi Nishizawa, Atsushi Taruya, and Seiji Kawamura. Cosmological test of gravity with polarizations of stochastic gravitational waves around 0.1-1 Hz. *Phys. Rev. D*, 81:104043, 2010.

[29] D. Lovelock and H. Rund. *Tensors, Differential Forms, and Variational Principles*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2012.

[30] M. Nakahara. *Geometry, topology and physics*. 2003.

[31] Jorge Zanelli. Lecture notes on chern-simons (super-)gravities. second edition (february 2008), 2008.

[32] Jorge Zanelli. Chern-Simons Forms in Gravitation Theories. *Class. Quant. Grav.*, 29:133001, 2012.

[33] Mokhtar Hassaine and Jorge Zanelli. *Chern-Simons (super)gravity*, volume 2 of *100 years of general relativity*. World Scientific, Hackensack, 2016 edition, 2016.

[34] Ruben Aldrovandi and José Geraldo Pereira. *Teleparallel Gravity: An Introduction*. Springer, 2013.

[35] Albert Einstein. Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pages 688–696, January 1916.

[36] Michele Maggiore. *Gravitational Waves: Volume 1: Theory and Experiments*. Oxford University Press, 10 2007.

[37] Fernando Izaurieta, Eduardo Rodríguez, and Omar Valdivia. Linear and Second-order Geometry Perturbations on Spacetimes with Torsion. *Eur. Phys. J. C*, 79(4):337, 2019.

[38] Riveros Torres Cristian Camilo. Propagación de la amplitud de ondas gravitacionales en presencia de torsión, 2022.

[39] Emmanuele Battista, Vittorio De Falco, and Davide Usseglio. First post-Newtonian N-body problem in Einstein–Cartan theory with the Weyssenhoff fluid: Lagrangian and first integrals. *Eur. Phys. J. C*, 83(2):112, 2023.

[40] Emmanuele Battista and Vittorio De Falco. First post-Newtonian N-body problem in Einstein–Cartan theory with the Weyssenhoff fluid: equations of motion. *Eur. Phys. J. C*, 82(9):782, 2022.

[41] Emmanuele Battista and Vittorio De Falco. Gravitational waves at the first post-Newtonian order with the Weyssenhoff fluid in Einstein–Cartan theory. *Eur. Phys. J. C*, 82(7):628, 2022.

[42] Emmanuele Battista and Vittorio De Falco. First post-Newtonian generation of gravitational waves in Einstein-Cartan theory. *Phys. Rev. D*, 104(8):084067, 2021.

[43] Michael Faraday. *Faraday's Diary*, volume 4. HR Direct, 2009.

[44] E. Prati. Propagation in gyroelectromagnetic guiding systems. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 17(8):1177–1196, 2003.

[45] Shaoqi Hou, Xi-Long Fan, and Zong-Hong Zhu. Gravitational lensing of gravitational waves: Rotation of polarization plane. *Phys. Rev. D*, 100:064028, Sep 2019.

[46] Sreekanth Harikumar, Laur Järv, Margus Saal, Aneta Wojnar, and Marek Biesiada. Propagation and lensing of gravitational waves in Palatini $f(\hat{R})$ gravity. *Phys. Rev. D*, 109(12):124014, 2024.

[47] Klaus Morawetz. Time behavior of Hubble parameter by torsion. *Mod. Phys. Lett. A*, 39(03):2350192, 2024.

[48] Song Li and Yun Chen. Reconstructing Torsion Cosmology from Interacting Holographic Dark Energy Model. *Universe*, 9(2):100, 2023.

[49] Yongjun Yun and Jungjai Lee. Holographic Dark Energy with Torsion. 7 2024.

[50] F. Izaurieta, P. Medina, N. Merino, P. Salgado, and O. Valdivia. Mimetic Einstein-Cartan-Sciama-Kibble (ECSK) gravity. *JHEP*, 10:150, 2020.

[51] Antonella Cid, Fernando Izaurieta, Genly Leon, Perla Medina, and Daniela Narbona. Non-minimally coupled scalar field cosmology with torsion. *JCAP*, 04:041, 2018.

[52] Miguel Cruz, Fernando Izaurieta, and Samuel Lepe. Non-zero torsion and late cosmology. *Eur. Phys. J. C*, 80(6):559, 2020.

[53] Fernando Izaurieta and Samuel Lepe. Cosmological Dark Matter Amplification through Dark Torsion. *Class. Quant. Grav.*, 37(20):205004, 2020.

[54] Tomi Koivisto. Cosmology in the Lorentz gauge theory. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 20(Supp01):2450040, 2023.

[55] Nikodem J. Popławski. Non-particle dark matter from Hubble parameter. *Eur. Phys. J. C*, 79(9):734, 2019.

[56] Yoshiaki Sofue. Rotation curve of the milky way and the dark matter density. *Galaxies*, 8(2), 2020.

[57] Annalisa Pillepich, Michael Kuhlen, Javiera Guedes, and Piero Madau. The distribution of dark matter in the milky way's disk. *The Astrophysical Journal*, 784(2):161, mar 2014.

[58] Stephon H. Alexander and Nicolás Yunes. Gravitational wave probes of parity violation in compact binary coalescences. *Physical Review D*, 97(6), March 2018.

[59] Aindriú Conroy and Tomi Koivisto. Parity-violating gravity and gw170817 in non-riemannian cosmology. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2019(12):016–016, December 2019.

[60] Atsushi Nishizawa and Tsutomu Kobayashi. Parity-violating gravity and gw170817. *Physical Review D*, 98(12), December 2018.

[61] Jin Qiao, Tao Zhu, Wen Zhao, and Anzhong Wang. Waveform of gravitational waves in the ghost-free parity-violating gravities. *Physical Review D*, 100(12), December 2019.

[62] Wen Zhao, Tao Zhu, Jin Qiao, and Anzhong Wang. Waveform of gravitational waves in the general parity-violating gravities. *Physical Review D*, 101(2), January 2020.

[63] Friedrich Wilhelm Hehl. FOUR LECTURES ON POINCARE GAUGE FIELD THEORY. *NATO Sci. Ser. B*, 58:0005, 1980.

[64] Jens Boos and Friedrich W. Hehl. Gravity-induced four-fermion contact interaction implies gravitational intermediate w and z type gauge bosons. *International Journal of Theoretical Physics*, 56(3):751–756, December 2016.

[65] Adolfo Toloza and Jorge Zanelli. Cosmology with scalar–Euler form coupling. *Class. Quant. Grav.*, 30:135003, 2013.