



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Sistemas de caminos separadores de vértices en árboles

POR

Milene Catalina Gutiérrez Santibáñez

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la
Universidad de Concepción para optar al título profesional de
Ingeniera Civil Matemática

Profesores Guías:

Nicolás Sanhueza Matamala (Universidad de Concepción).

Christopher Thraves Caro (Universidad de Concepción).

28 de Marzo de 2025,
Concepción, Chile.

© 2025 Milene Catalina Gutiérrez Santibáñez

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento.

Sistemas de caminos separadores de vértices en árboles

COMISIÓN EVALUADORA

Dr. Nicolás Sanhueza Matamala [Profesor guía]

Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción, Chile.

Dr. Christopher Thraves Caro [Profesor guía]

Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción, Chile.

Dra. Anahí Gajardo Schulz

Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción, Chile.

Dr. Waldo Gálvez

Departamento de Ingeniería Informática y Ciencias de la Computación, Universidad de Concepción, Chile.

FECHA DE DEFENSA: Marzo de 2025.

Agradecimientos

Quisiera comenzar expresando mi más profundo agradecimiento a todas las personas que, de una u otra forma, han sido parte de mi camino. Llegar a este momento no hubiese sido posible sin la red de apoyos, afectos, enseñanzas, risas y presencias que me han acompañado a lo largo de la vida. Tengo tanto por lo que agradecer.

Agradezco a mi querido Eduardo, por su amor, compañía, por las risas y los abrazos. Sin duda su apoyo, comprensión y cariño han sido un pilar fundamental estos últimos años.

Agradezco a mi padre, Esteban, por su apoyo siempre, por acompañar de cerca o lejos cada uno de mis pasos, por alentarme y creer en mí.

Agradezco a mi madre, Ledda, por inculcar en mí el amor por aprender y el deseo de ser cada día mejor, por darme las herramientas para soñar y luchar por mis sueños.

Agradezco a mis abuelas, Balbina y Luisa, y a mi abuelo José, por hacerme sentir siempre su sincero amor, el cual atesoro y atesoraré eternamente en mí.

Agradezco a mi hermanito Tahiel y a mis hermanitas Dominga y Antonia, por alegrar mis días con su sola existencia.

Agradezco a mi familia toda, tías, tíos, primos y primas, por su cariño y apoyo en cada etapa de mi vida. Por alegrarse y compartir mis logros.

Agradezco a mis compañeros y compañeras, con quienes tuve el privilegio de compartir. Agradezco a los amigos y amigas que me acompañaron, especialmente a Coni, por su cariño y alegría, sobre todo en esta etapa de tesis que compartimos hasta el último día.

Agradezco también a las profesoras Anahí y Mónica, por ser un ejemplo de vocación y entrega. Por el tiempo y sabiduría que me compartieron en más de una ocasión.

Por último, agradezco profundamente a mis profesores guías, Nicolás y Christopher, por darme la oportunidad de trabajar junto a ellos, por compartir tan generosamente sus conocimientos conmigo, por guiarme con tanta paciencia y comprensión. Agradezco por el tiempo que me entregaron, por cada enseñanza y por sus valiosos consejos. Me siento realmente afortunada por esta experiencia tan enriquecedora como fue aprender de ellos. Les admiro grandemente a ambos.

Índice general

Agradecimientos	iv
Contenidos	v
Índice de figuras	vii
Resumen	ix
1. Introducción	1
1.1. Estructura del documento	3
2. Definiciones y objetivos	5
2.1. Notación y definiciones	5
2.2. Objetivos	11
3. Estado del arte y contribuciones	14
3.1. Estado del arte	14

3.2. Nuestras contribuciones	16
4. Cota inferior	19
4.1. Demostración cota inferior del Lema 4.1	23
5. Construcción base y sus propiedades de separación	26
5.1. Construcción base	27
5.2. Propiedades de la Construcción 5.2	33
6. Árboles homeomórficamente irreducibles	41
7. Árboles homeomórficamente irreducibles parcialmente internamente subdivididos sin racimos de tamaño 1	47
7.1. Árboles con racimos de tamaño al menos 2 y sin patillas.	48
7.2. Árboles con racimos de tamaño al menos 2 con patillas	50
7.2.1. Cantidad par de patillas	51
7.2.2. Cantidad impar de patillas	60
8. Árboles con racimos de tamaño 1	68
8.1. Cota superior familia \mathcal{B}	73
8.2. Cota inferior familia \mathcal{A}	76
9. Árboles con caminos fundamentales de largo al menos tres	81
10. Conclusiones y trabajo futuro	86
10.1. Conclusiones	86
10.2. Trabajo futuro	87
Bibliografía	89

Índice de figuras

2.1. Ejemplo de grafo	6
2.2. Ejemplo de árbol	8
2.3. Dibujo de una patilla.	8
2.4. Ejemplo de árbol con $h_2^*(T) \neq 0$	9
2.5. Ejemplo de árboles H.I., H.I.I.S., H.I.P.I.S.	10
2.6. Ejemplo DFS.	12
4.1. Separación de patillas con 3 y 4 finales de camino.	22
5.1. Ejemplo construcción de gaviotas	27
5.2. Ejemplo de Construcción 5.2 aplicada en un árbol con 8 racimos.	32
5.3. Separación de árbol T_1 con 3 caminos.	40
6.1. Separación de árbol $T = K_{1,3}$ con 3 caminos.	42
6.2. Poda en racimo de tamaño 1 primer caso	44
6.3. Poda en racimo de tamaño 1 segundo caso	44

7.1. Ejemplo de patilla a la que agregamos una hoja.	52
7.2. Ejemplo de eliminación del abuelo de una patilla.	52
7.3. Separación de vértices en árbol con cantidad par de patillas	59
7.4. Separación de vértices por pasos en árbol con cantidad impar de patillas	66
8.1. Ejemplo de ciempiés de orden 4.	69
8.2. Ejemplo de árbol $(k, 2)$ -ario.	70
8.3. Ejemplo de árbol $T(4, 3, 2)$	70
8.4. Ejemplo de árboles de las familias \mathcal{A} y \mathcal{B}	72
8.5. Ejemplo de aplicación de la Construcción 8.5 en el árbol $T(4, 4, 4)$	74
8.6. Separación de segmentos con 2 finales de camino.	78

Resumen

La separación de vértices en un grafo es un problema relevante en teoría de grafos, con aplicaciones en áreas como la codificación, las redes y los problemas de identificación. Un enfoque natural, es separar los vértices a través de familias de caminos. Una familia de caminos separadora de vértices en un grafo es un conjunto de caminos tal que, para cualquier par de vértices, existe un camino en la familia que contiene exactamente uno de estos vértices.

En este trabajo nos enfocamos en estudiar el tamaño mínimo de una familia de caminos separadora de vértices en árboles. Nos centramos en estudiar diferentes subfamilias de árboles, considerando propiedades estructurales de ellos. Presentamos resultados exactos para diversas familias de árboles y mejoramos cotas previamente conocidas, extendiéndolas a clases más generales de árboles. Además, demostramos que, en árboles con racimos de tamaño uno, el número de separación no puede determinarse únicamente en función de parámetros locales, lo que ilustra la complejidad del problema.

CAPÍTULO 1

Introducción

Dado un conjunto C , una pregunta interesante es cómo identificar de forma única cada uno de sus elementos. Hacerlo a través de familias de subconjuntos de C implica que, dados dos elementos, a y b , exista un subconjunto en la familia que contenga a a y no contenga a b o que contenga a b y no contenga a a . Esta idea corresponde a la noción de *separación en conjuntos*.

En el contexto de redes de comunicación, se considera el problema de identificar componentes defectuosas (conexiones y nodos) mediante el envío de un paquete de monitoreo. Si el paquete llega a destino, la red está funcionando correctamente, si no, se deduce que hay componentes defectuosas y es necesario identificar cuál. Una forma de hacerlo es identificar cada componente mediante el uso de rutas. Si además consideramos que cada ruta tiene un costo asociado, entonces se propone el objetivo adicional de que este conjunto de rutas sea de tamaño mínimo. A este tipo de problemas se les conoce como problemas de separación.

El problema de separación fue planteado e introducido por Rényi [10], en el año 1961, en el contexto de separación de conjuntos, y ha sido estudiado ampliamente hasta la fecha. Se sabe que para separar un conjunto de n elementos, se necesitan exactamente $\lceil \log_2(n) \rceil$ subconjuntos. Sin

embargo, el problema se complejiza cuando el objeto de estudio no es un conjunto simple, sino conjuntos con estructuras determinadas, por ejemplo, el conjunto conformado por los vértices y aristas de un grafo G . En estos casos, la dificultad radica en que los subconjuntos separadores no son arbitrarios, sino que deben cumplir ciertas características combinatoriales, como por ejemplo, ser caminos en el grafo G .

Es natural modelar el problema de las redes de comunicación utilizando grafos, en donde las aristas representan las conexiones y los vértices representan los nodos de la red. Así, el problema de separación de los elementos de una red de comunicación es equivalente al problema de separar los elementos de un grafo. Más precisamente, se plantea el siguiente problema: dado un grafo $G = (V, E)$, encontrar familias de caminos separadores de vértices en G , es decir, una familia \mathcal{F} de caminos en G , tales que dados 2 elementos u y v en V , exista un camino en \mathcal{F} que contenga a u y no contenga a v o que contenga a v y no contenga a u . Este tipo de problema fue planteado por primera vez por Zakrevski y Karpovsky en 1998 [13].

Estos problemas han sido estudiados en algunas familias de grafos conocidos, encontrando el tamaño mínimo de una familia de caminos separadora en ciclos [6], en caminos [6], en grafos completos [5] y se ha avanzado en la investigación de grafos como grillas, grafos bipartitos [11], grafos aleatorios y árboles [1], siendo esta última familia la que se propone estudiar.

Una variante del problema es la separación de aristas, para lo cual se busca encontrar familias de caminos separadores de aristas en G . En particular, el problema de separación de aristas en árboles fue resuelto recientemente por Arrepol et al. [1], alcanzando el valor óptimo mediante una función que depende de dos parámetros del árbol, el número de vértices de grado 1 y el número de vértices de grado 2. Sin embargo, el problema de separación de vértices en árboles sigue siendo un problema abierto. Desde el año 2013, diferentes autores han abordado el problema planteando cotas tanto inferiores como superiores, dependientes del número de vértices o de otros parámetros del árbol. Pero aún no se conoce el valor óptimo.

Recientemente, Lichev y Sanhueza-Matamala [9] abordaron el problema de separación de vértices en grafos aleatorios. Dentro de sus resultados, determinaron que es necesario conocer el valor del número de separación de vértices en árboles para resolver cabalmente el problema en grafos aleatorios. Esto se debe a que, en grafos aleatorios con pocas aristas, una proporción

significativa de vértices pertenece a componentes que son árboles. Para más detalle ver [9, p. 2, 3]

1.1. Estructura del documento

El documento se estructura de la siguiente manera. En el Capítulo 2 presentamos las definiciones y notación que utilizamos en este trabajo. En el Capítulo 3 presentamos los resultados previos en torno al número de separación en grafos, con énfasis en los resultados en árboles; esto permite dar contexto a nuestros resultados, los cuales también enunciamos de forma general en este capítulo.

A partir del Capítulo 4, detallamos nuestros resultados. En este capítulo mostramos una cota inferior para todo árbol. A lo largo del trabajo consideraremos una estructura crucial en árboles, los *racimos*, los cuales corresponderán a conjuntos maximales de hojas con un vértice vecino en común. Dependiendo del tamaño de los racimos, definiremos diferentes cotas superiores. En el Capítulo 5 presentamos una construcción para árboles con racimos de tamaño 2 y 3, y describimos sus propiedades de cubrimiento y separación. Utilizaremos esta construcción como base para determinar cotas superiores para diferentes familias de árboles.

En el Capítulo 6, estudiamos el problema de separación cuando T es un árbol sin vértices de grado dos.

Por otro lado, definiremos algunas familias de árboles, entre ellas, la familia de árboles *homeomórficamente irreducibles parcialmente internamente subdivididos*, que en términos generales, corresponden a árboles sin vértices de grado dos consecutivos. En el Capítulo 7, presentamos el estudio del número de separación cuando T es un árbol homeomórficamente irreducible parcialmente internamente subdividido sin racimos de tamaño 1. En el Capítulo 8, estudiamos el caso de árboles homeomórficamente irreducibles parcialmente internamente subdivididos con racimos de tamaño 1, presentando un resultado que ilustra la complejidad del problema y demuestra que no es posible determinar el número de separación utilizando únicamente parámetros locales, como el número de hojas o el número de vértices de grado 2. En el Capítulo 9 utilizamos los resultados anteriores para presentar una cota superior para árboles con racimos de tamaño al

menos dos, que incluyen caminos fundamentales de largo mayor a dos.

Por último, en el Capítulo 10, presentamos nuestras conclusiones y planteamos los problemas abiertos que surgen a partir de este estudio, destacando su relación con los resultados obtenidos.

Definiciones y objetivos

En esta sección, introducimos la notación que utilizaremos a lo largo del trabajo, así como las definiciones fundamentales en las que se basará nuestro estudio. Finalmente, establecemos los objetivos que nos propusimos abordar y que guiarán nuestro análisis.

2.1. Notación y definiciones

Dado un número real x , denotaremos por $\lceil x \rceil$ al menor número entero que sea mayor o igual a x . Por otro lado, si A es un conjunto, denotaremos por $[A]^k$ al conjunto de todos los subconjuntos de k elementos de A .

Un *grafo* G es un par ordenado (V, E) , donde V es un conjunto finito no vacío y $E \subseteq [V]^2$ que representa las conexiones entre los elementos de V . Los elementos de V se denominan *vértices*, mientras que los de E son las *aristas* de G .

Para simplificar la notación, denotaremos la arista $\{u, v\}$ simplemente como uv , donde u y v son sus *extremos*. Representaremos gráficamente los vértices mediante puntos y las aristas

mediante líneas. En la Figura 2.1 mostramos un ejemplo de grafo.

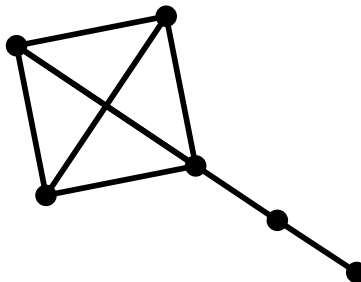


Figura 2.1: Ejemplo de grafo de 6 vértices y 8 aristas.

Dado un grafo G , denotaremos por $V(G)$ al conjunto de sus vértices y por $E(G)$ al conjunto de sus aristas. Un *subgrafo* de un grafo G es un grafo H tal que $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Es decir, un subgrafo corresponde a un subconjunto de los vértices y un subconjunto de las aristas del grafo original. Si H es subgrafo de G lo denotaremos por $H \subseteq G$.

Dados u y v , dos vértices de G , diremos que son *vecinos* o *adyacentes* si la arista uv está en $E(G)$. El número de vecinos de un vértice v en un grafo es el *grado* de v , y lo denotaremos como $d(v)$. Adicionalmente, se define la *vecindad* de un vértice v como el conjunto de todos los vértices que son vecinos de v . Denotaremos a este conjunto como $N(v)$.

Un *camino* es una secuencia de vértices distintos, en la cual cada par consecutivo de vértices son vecinos. Denotaremos por (u, v) -camino a un camino que tiene como primer elemento a u y como último elemento a v . Además, diremos que un (u, v) -camino *comienza* en el vértice u y *termina* en el vértice v , que es un camino entre u y v o que el camino tiene como *extremos* a u y v . El *largo de un camino* es la cantidad de aristas que lo componen. Así también, si el (u, v) -camino P contiene a w dentro de su secuencia de vértices, diremos que el camino P *contiene* a w .

Diremos que un *final de camino* está en un vértice v o que v tiene un final de camino, si v es un vértice en el que comienza o termina un camino. Además, diremos que un final de camino está en un conjunto de vértices U si existe algún $v \in U$ que tenga un final de camino.

Adicionalmente, dada una *familia de caminos* \mathcal{F} como un conjunto de caminos distintos en un grafo G , diremos que \mathcal{F} tiene un final de camino en un vértice v si existe al menos un

camino en \mathcal{F} que comienza o termina en v . De forma similar, diremos que \mathcal{F} tiene un final de camino en un conjunto de vértices U si existe algún camino en \mathcal{F} que comience o termine en algún vértice $v \in U$.

La *distancia* en G entre dos vértices u y v corresponde al largo del (u, v) -camino más corto en G . Un grafo G se dice *conexo* si para todo par de vértices u, v , existe un (u, v) -camino en G .

Un *ciclo* es una secuencia de al menos tres vértices, en la que cada par consecutivo de vértices son vecinos y, además, el último vértice es vecino del primero. Por otro lado, un grafo es *acíclico* si no contiene ciclos.

Un *árbol* es un grafo conexo acíclico. Usualmente nos referiremos a un árbol por T . Un resultado conocido es que en un árbol el camino entre dos vértices cualesquiera es único [3, Teorema 1.5.1]. Es decir, para todo par de vértices u y v en T existe un (u, v) -camino en T y es único. Para denotar el camino en T que comienza en u y termina en v utilizaremos uTv .

Por otro lado, llamaremos *hoja* a todo vértice de grado 1, *padre* de una hoja a todo vértice adyacente a una hoja con grado distinto a 1 y *abuelo* de una hoja a todo vértice de grado mayor a 1 adyacente a un padre. Dado un árbol T , denotaremos por $h_1(T)$ al número de hojas del árbol y por $h_2(T)$ al número de vértices de grado 2 de T . Diremos que la arista uv es una *arista interior* si ni u ni v son una hoja. Denotaremos por $E^*(T)$ al conjunto de aristas interiores de T .

Una estructura de los árboles que cobra importancia en este trabajo es un conjunto maximal de hojas que comparten el mismo padre, denotaremos a este conjunto como *racimo*. Adicionalmente, dado un árbol T se define $r(T)$ como la cantidad de racimos del árbol y $r_j(T)$ como la cantidad de racimos de exactamente j hojas. Así, por ejemplo, $r_2(T)$ es la cantidad de racimos de tamaño 2 que existen en T . En la Figura 2.2 presentamos un ejemplo de árbol con sus componentes y parámetros recién mencionados.

Si un racimo de tamaño 2 tiene un padre de grado 3 y un abuelo de grado 2, llamaremos *patilla* al subárbol formado por estos cuatro vértices. En la Figura 2.3 se muestra una representación de una patilla. Adicionalmente, denotaremos por $r_2^*(T)$ a la cantidad de patillas que tenga un árbol T .

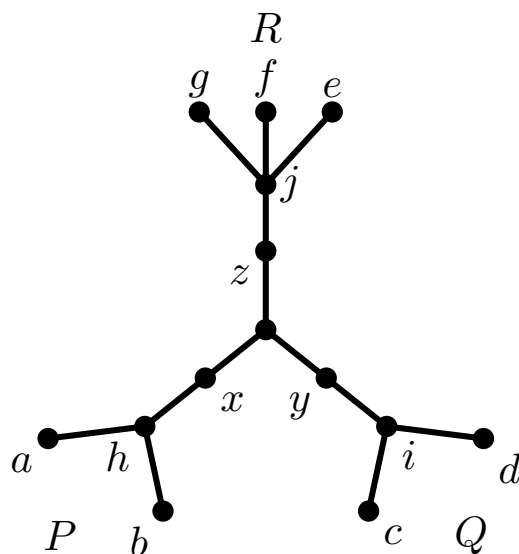


Figura 2.2: Ejemplo de árbol. En este árbol las hojas corresponden a los vértices $\{a, b, c, d, e, f, g\}$, los padres corresponden a los vértices $\{h, i, j\}$, donde h es padre de a y b , i es padre de c y d y j es padre de e, f y g . Los vértices $\{x, y, z\}$ son abuelos, en particular, x es abuelo de a y b , y es abuelo de c y d , y z es abuelo de e, f y g . Además, hay 3 racimos $P = \{a, b\}$, $Q = \{c, d\}$ y $R = \{e, f, g\}$. Por lo que $r(T) = 3$, $r_2(T) = 2$ y $r_3(T) = 1$. Dado que en este árbol hay siete hojas y tres vértices de grado 2, se tiene $h_1(T) = 7$ y $h_2(T) = 3$.

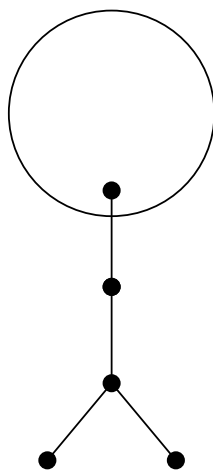


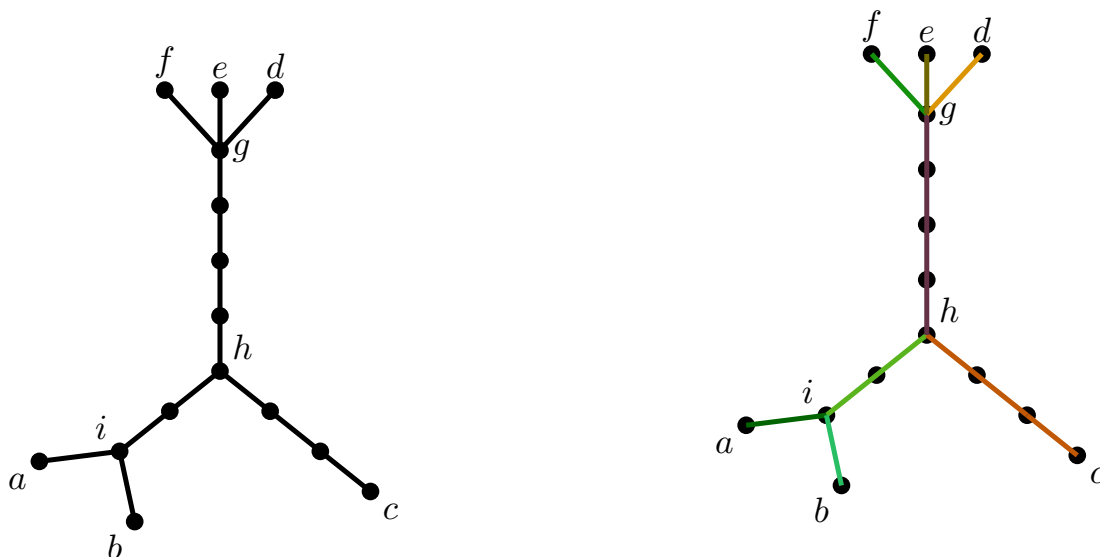
Figura 2.3: Dibujo de una patilla.

Por otro lado, siguiendo la notación presentada por Arrepol et al. [1], definiremos como *camino fundamental* en un árbol a un camino tal que solo sus dos vértices extremos tienen un grado diferente a 2. Sea $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ la familia de caminos fundamentales que particiona

$E(T)$. Notar que esta familia es única para cada árbol. Adicionalmente, utilizaremos $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}$ para denotar el conjunto de caminos fundamentales que no incluyen una hoja y tienen al menos dos aristas. Y para contabilizar la cantidad de vértices de grado dos que tienen los caminos en \mathcal{I} junto con la cantidad de vértices de grado 2 que tiene cada camino fundamental que contiene una hoja, definiremos el parámetro $h_2^*(T)$ como sigue,

$$h_2^*(T) = \sum_{P_i \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{I}} (|E(P_i)| - 1) + \sum_{P_i \in \mathcal{I}} (|E(P_i)| - 2).$$

En la Figura 2.4 presentamos un ejemplo de árbol T en el que identificamos sus caminos fundamentales y determinamos $h_2^*(T)$.



(a) Árbol T con 8 caminos fundamentales

(b) Árbol T con 8 caminos fundamentales identificados mediante colores.

Figura 2.4: Ejemplo de árbol con $h_2^*(T) \neq 0$. Este árbol tiene 8 caminos fundamentales: (a, i) -camino, (b, i) -camino, (i, h) -camino, (h, c) -camino, (h, g) -camino, (g, f) -camino, (g, e) -camino y (g, d) -camino. En la Figura 2.4b presentamos el árbol con los caminos fundamentales coloreados para facilitar su identificación. Notar que en este caso el (i, h) -camino y el (h, g) -camino están en \mathcal{I} , por lo que $h_2^*(T) = 4$.

Habiendo definido los caminos fundamentales, introduciremos ahora notación para referirnos a árboles con caminos fundamentales con largo acotado. Diremos que un árbol es *H.I.* (*homeomórficamente irreducible*) si es un árbol sin vértices de grado 2. En la Figura 2.5a

presentamos un ejemplo de árbol H.I.. Notar que en este caso, todos los caminos fundamentales tienen largo uno. Diremos que un árbol es *H.I.I.S.* (*homeomórficamente irreducible internamente subdividido*) si es un árbol proveniente de la subdivisión de todas las aristas interiores de un árbol H.I.. En la Figura 2.5b presentamos un ejemplo de árbol H.I.I.S.. Diremos que un árbol es *H.I.P.I.S.* (*homeomórficamente irreducible parcialmente internamente subdividido*) si es un árbol proveniente de la subdivisión de algunas aristas interiores de un árbol H.I.. En la Figura 2.5c presentamos un ejemplo de árbol H.I.P.I.S.. Notar que en estos casos los caminos fundamentales tienen largo a lo más dos.

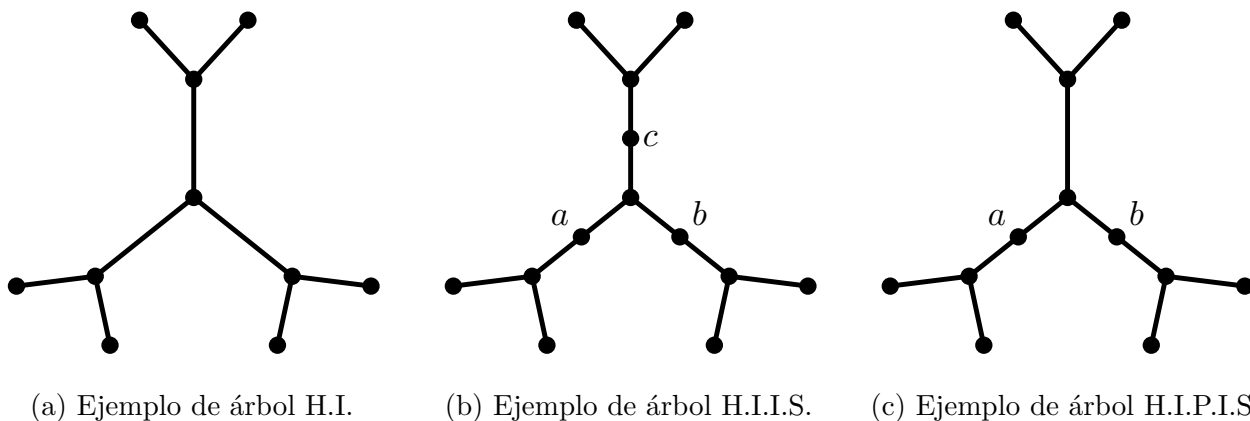


Figura 2.5: Ejemplo de árboles H.I. en Figura 2.5a, H.I.I.S. en Figura 2.5b, donde los vértices a , b y c corresponden a la subdivisión de todas las aristas interiores del árbol de la Figura 2.5a, y H.I.P.I.S. en Figura 2.5c, donde los vértices a y b corresponden a la subdivisión de dos aristas interiores del árbol de la Figura 2.5a.

Sea $G = (V, E)$ un grafo y sea \mathcal{F} una familia de caminos en G . Denotaremos por $\mathcal{F}(u)$ al conjunto de caminos en \mathcal{F} que contienen a u . Diremos que \mathcal{F} *separa* V si para todo par de vértices u y v en V existe un camino P en \mathcal{F} que contiene a u y no contiene a v o contiene a v y no contiene a u , es decir, $\mathcal{F}(u) \neq \mathcal{F}(v)$. Además, decimos que una familia de caminos \mathcal{F} *cubre* el conjunto de vértices V si, para todo $v \in V$, existe un camino $P \in \mathcal{F}$ que contiene a v .

A partir de estos conceptos, introducimos el parámetro que será objeto de estudio en este trabajo.

Definición 2.1. Sea $G = (V, E)$ un grafo y sea \mathcal{F} una familia de caminos en G . El *número de*

separación de G se denotará como

$$\text{spc}(G) := \min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \text{ separa y cubre } V\}.$$

A lo largo del trabajo, presentaremos construcciones que cubren y separan los vértices de algunas subfamilias de árboles, esto nos permitirá plantear cotas superiores. Sin embargo, en general, será importante ordenar y enumerar de forma correcta los racimos y hojas. Para ello, utilizaremos un algoritmo de búsqueda.

El *algoritmo de búsqueda en profundidad* (DFS) es una técnica de búsqueda en grafos que recorre los vértices y determina un orden. Su funcionamiento consiste en, dado un vértice inicial, explorar de manera exhaustiva los vértices a lo largo de un camino específico, avanzando en profundidad por las aristas. Cuando no quedan más vértices por visitar en dicho camino, el algoritmo retrocede al vértice predecesor y repite el mismo proceso con los vecinos restantes.

Observación 2.2. Al aplicar un algoritmo de búsqueda en profundidad (DFS) a un árbol, siempre es posible elegir un orden en el que las hojas de un mismo racimo aparecen de manera consecutiva. Este orden se logra visitando todas las hojas de un racimo antes de retroceder y continuar el recorrido hacia otros vértices del árbol, lo que garantiza que las hojas pertenecientes al mismo racimo queden juntas en el recorrido.

En la Figura 2.6 presentamos un ejemplo de aplicación del algoritmo DFS, siguiendo la configuración anterior. A lo largo de este trabajo, consideraremos siempre el algoritmo DFS con esta configuración.

2.2. Objetivos

El principal objetivo de este trabajo es:

Objetivo 2.2.1. *Responder la pregunta: ¿Es posible determinar una fórmula explícita para el valor de $\text{spc}(T)$ en función de parámetros propios del árbol, como $h_1(T)$ y $h_2(T)$?*

Para abordar este problema, nos propusimos trabajar en el estudio de subfamilias de árboles,

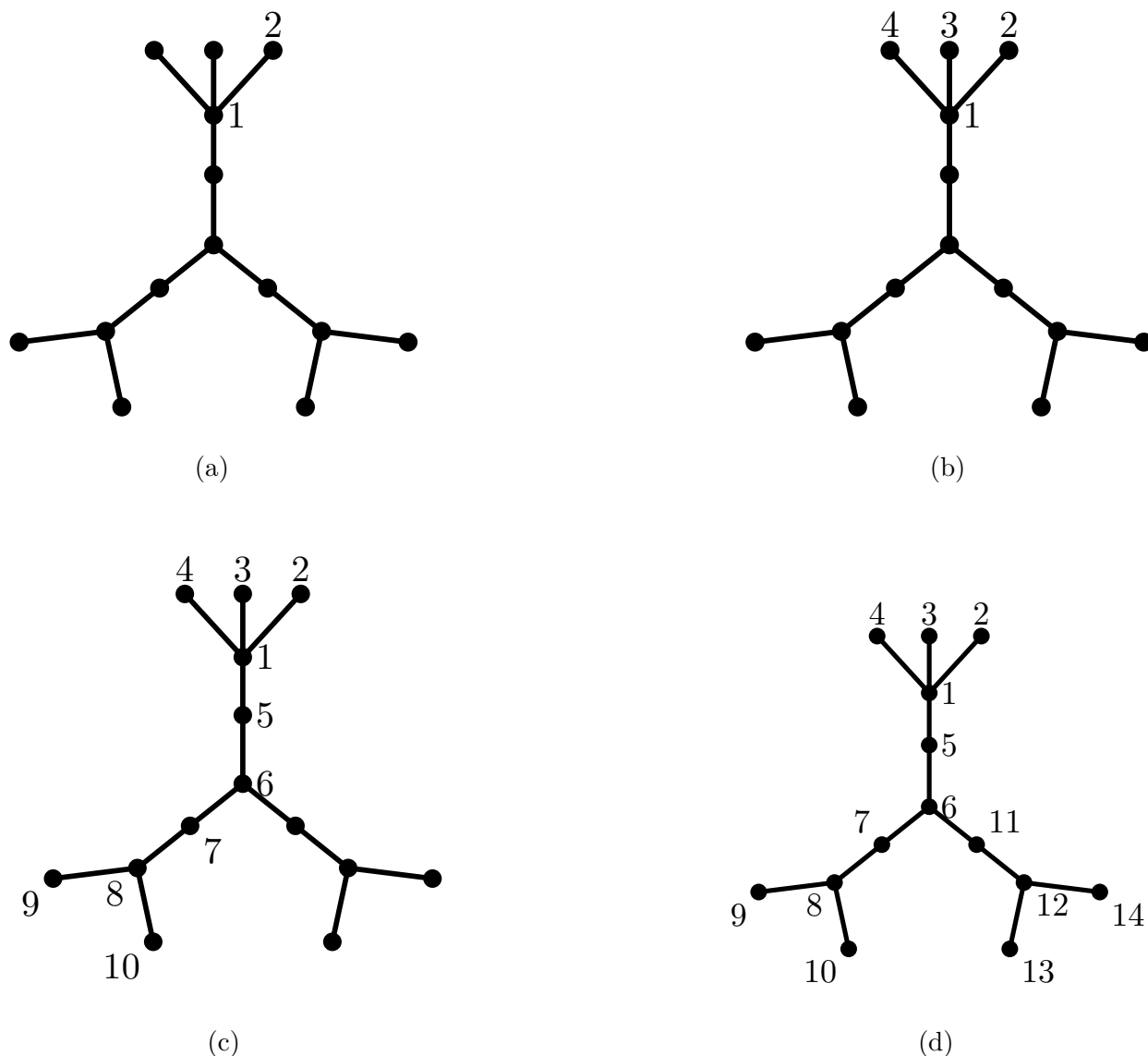


Figura 2.6: Ejemplo de aplicación algoritmo DFS en un árbol con 3 racimos. En la Figura 2.6a comenzamos el algoritmo en el vértice 1 y recorremos el primer camino hasta la hoja 2. En la Figura 2.6b el algoritmo recorre las hojas restantes del racimo. En la Figura 2.6c, como ya fueron recorridas todas las hojas del racimo, retrocedemos al vértice 6 y recorremos el camino hasta la hoja 9, luego la hoja restante del mismo racimo. En la Figura 2.6d continuamos recorriendo los vértices restantes.

considerando casos presentes en la literatura y de creciente complejidad. Así, estudiamos la separación en árboles sin vértices de grado 2 (H.I.), en árboles con pocos vértices de grado 2 como los árboles H.I.P.I.S. y en árboles con vértices de grado 2 y diferentes tamaños de racimos.

De esta forma definimos los siguientes objetivos específicos para este proyecto:

Objetivo 2.2.2. *Determinar $\text{spc}(T)$ para árboles homeomórficamente irreducibles, es decir, con $h_2(T) = 0$.*

Objetivo 2.2.3. *Determinar $\text{spc}(T)$ para árboles con vértices de grado 2 mediante el estudio de subfamilias de árboles homeomórficamente irreducibles parcialmente internamente subdivididos.*

Objetivo 2.2.4. *Determinar $\text{spc}(T)$ para árboles con vértices de grado 2 que contengan caminos fundamentales de largo al menos 3.*

Estado del arte y contribuciones

En este capítulo presentamos los aportes y avances realizados por otros autores sobre la investigación en torno al número de separación de vértices en grafos; en particular, damos énfasis a los resultados en árboles. Así también, presentamos de forma general los principales resultados obtenidos en este trabajo, dando contexto a nuestras contribuciones al problema de separación de vértices en árboles.

3.1. Estado del arte

El problema de separación en grafos, como dijimos, ha sido ampliamente estudiado. Foucaud y Kovše [6] abordaron el problema de separación de vértices en grafos mediante enfoques combinatoriales y algorítmicos. En particular, determinaron el valor óptimo de $\text{spc}(G)$ en varios casos. Si K es un clique de n vértices, demostraron que $\text{spc}(K) = \lceil \log_2(n) \rceil$. Si P es un camino de n vértices, demostraron que $\text{spc}(P) = \lceil (n+1)/2 \rceil$. Si C es un ciclo de n vértices con $n \geq 5$, demostraron que $\text{spc}(C) = \lceil n/2 \rceil$. También proporcionaron cotas superiores para grafos conexos

y para árboles.

Teorema 3.1. [6, Proposición 12, Teorema 17, Teorema 18]

(I) Si G es un grafo conexo de n vértices, entonces $\lceil 2h_1(G)/3 \rceil \leq \text{spc}(G) \leq \lceil 2n/3 \rceil + 5$.

(II) Si T es un árbol H.I. de n vértices, entonces $\text{spc}(T) \leq \lceil 2h_1(T)/3 \rceil + 2$.

Luego, Falgas-Ravry, Kittipassorn, Korándi, Letzter y Narayanan [4] estudiaron el problema de separación de aristas en árboles y grafos aleatorios. En el caso de árboles proporcionaron tanto una cota inferior como superior.

El caso de separación de aristas en árboles ha sido objeto de estudio reciente. Arrepol et al. (2023) [1] resolvieron el problema de separación de aristas en árboles, alcanzando el valor óptimo mediante una función que depende de $h_1(T)$ y $h_2(T)$. También proporcionaron nuevas cotas para la separación de vértices en árboles.

Teorema 3.2. [1, Teorema 3.4] Para todo árbol T ,

$$\text{spc}(T) \geq \max \left\{ \left\lceil \frac{2h_1(T) + h_2^*(T)}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{h_1(T) + h_2^*(T)}{2} \right\rceil \right\}.$$

Adicionalmente, si todos los racimos de T tienen tamaño al menos tres y $T \neq K_{1,3}$, entonces,

$$\text{spc}(T) \leq \left\lceil \frac{2h_1(T)}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{h_2^*(T) + 1}{2} \right\rceil.$$

Por su parte, Biniaz et al., [2], el mismo año, propusieron nuevas cotas para el número de separación de vértices en árboles, pero en función del número de vértices.

Teorema 3.3. [2, Teorema 3] Si T es un árbol de n vértices,

$$n/4 + 1 \leq \text{spc}(T) \leq 2n/3 + O(1)$$

Ellos también mostraron que estas cotas son ajustadas, es decir, existen árboles que cumplen exactamente estas desigualdades.

Por otro lado, recientemente, Lichev y Sanhueza-Matamala [9] estudiaron la separación de vértices en grafos aleatorios del modelo $G(n, p)$. Este modelo genera un grafo con n vértices donde cada par de vértices está conectado con una arista de manera independiente con probabilidad $p = p(n)$. En su estudio, los autores analizaron cómo se comporta el número de separación en un sistema de separación de vértices dentro de este tipo de grafos y demostraron que el valor de $\text{spc}(G(n, p))$ depende del valor de p . En particular, resolvieron el problema cuando $np \rightarrow \infty$ y demostraron que, con $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, si $p \geq (1 + \varepsilon) \log n/n$, entonces, el número de separación será con alta probabilidad $\lceil \log_2 n \rceil$. Mientras que si $p = (1 \pm \varepsilon) \log n/n$, entonces, con alta probabilidad, se tiene que $\text{spc}(G) = (1 + o(1)) \max(\log_2 n, 2h_1(G)/3)$.

Sin embargo, en el caso donde $p = c/n$ para una constante c , el problema sigue sin resolverse. En el caso en que $c > 1$, los grafos generados son desconexos y todas sus componentes son árboles excepto a lo más una. Para más detalles, ver Frieze y Karoński [7, Teorema 2.15]. Así, un obstáculo clave para caracterizar $\text{spc}(G(n, p))$ en esta situación es la falta de una descripción precisa del número de separación en árboles. Por ello, determinar $\text{spc}(T)$ para distintas familias de árboles contribuiría a una mejor comprensión del problema de separación en grafos aleatorios.

3.2. Nuestras contribuciones

Nosotros estudiamos el número de separación en diferentes familias de árboles. En particular, basándonos en la literatura, consideramos centrar nuestro estudio en árboles sin vértices de grado dos, es decir, árboles H.I., así como también en árboles H.I.P.I.S. para finalmente incorporar árboles con caminos fundamentales de largo mayor a dos. Para comenzar contextualizando nuestros resultados, presentamos en la Tabla 3.1 un resumen de los diferentes aportes y avances en el estudio de $\text{spc}(T)$ en orden cronológico.

Clase de grafo	Contribuciones	Referencia
Grafos conexos de n vértices	$\left\lceil \frac{2h_1(G)}{3} \right\rceil \leq \text{spc}(G) \leq \lceil 2n/3 \rceil + 5$	[6, Proposición 12, Teorema 18] (2013)
Árboles H.I. de n vértices	$\text{spc}(T) \leq \left\lceil \frac{2h_1(T)}{3} \right\rceil + 2$	[6, Teorema 17] (2013)
Árboles de n vértices	$\max \left\{ \left\lceil \frac{2h_1(T) + h_2^*(T)}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{h_1(T) + h_2^*(T)}{2} \right\rceil \right\} \leq \text{spc}(T)$	[1, Teorema 3.4] (2023)
Árboles con racimos de tamaño al menos tres	$\text{spc}(T) \leq \left\lceil \frac{2h_1(T)}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{h_2^*(T) + 1}{2} \right\rceil$	[1, Teorema 3.4] (2023)
Árboles de n vértices	$n/4 + 1 \leq \text{spc}(T) \leq 2n/3 + O(1)$	[2, Teorema 3] (2023)
Árboles de n vértices	$\left\lceil \frac{2h_1(T) + r_2^*(T)}{3} \right\rceil \leq \text{spc}(T)$	Lema 4.1
Árboles H.I. de n vértices distinto de $K_{1,3}$	$\text{spc}(T) = \left\lceil \frac{2h_1(T)}{3} \right\rceil$	Teorema 6.1
Árboles H.I.P.I.S. sin racimos de tamaño 1 distinto de $K_{1,3}$	$\text{spc}(T) = \left\lceil \frac{2h_1(T) + r_2^*(T)}{3} \right\rceil$	Teorema 7.1
Árboles con racimos de tamaño al menos dos	$\text{spc}(T) \leq \left\lceil \frac{2h_1(T) + r_2^*(T)}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{h_2^*(T) + 1}{2} \right\rceil$	Teorema 9.1

Cuadro 3.1: Resumen de resultados previos y de nuestros resultados sobre $\text{spc}(T)$.

Nuestros principales resultados comprenden la formulación de una nueva cota inferior válida para todo árbol. Es importante notar que en el caso sin vértices de grado dos esta cota es equivalente a la planteada por Arrepol et al. en [1, Teorema 3.4], pero es una cota más ajustada en el caso de árboles que contienen patillas. Por otro lado, determinamos el valor exacto de $\text{spc}(T)$ cuando T es un árbol H.I.. En general, este valor depende únicamente del número de hojas, a excepción de un único caso: el árbol $K_{1,3}$, la estrella de 3 hojas. Notar que este resultado mejora la cota presentada por Foucaud y Kovše [6], que enunciamos en el Teorema 3.1. Así

también, determinamos el valor exacto de $\text{spc}(T)$ cuando T es un árbol H.I.P.I.S. sin racimos de tamaño 1. En este caso, fue necesario incorporar un parámetro adicional para esta fórmula, el número de patillas.

Por otro lado, estudiamos familias de árboles H.I.P.I.S. con racimos de tamaño 1. Este estudio nos permitió concluir que los parámetros locales del árbol no son suficientes para determinar el valor de $\text{spc}(T)$. Para demostrarlo, presentamos 2 familias que, dado un parámetro, nos permitirán construir dos árboles con igual número de hojas, número de vértices y cantidad de racimos, pero con distinto número de separación. Este resultado nos permite responder a nuestra principal pregunta de estudio, pero además ilustra la complejidad de este problema.

Como último resultado, presentamos una cota superior para todo árbol con racimos de tamaño al menos dos. Este resultado incluye árboles con caminos fundamentales de largos mayores a dos. Este resultado mejora la cota superior presentada por Arrepol et al. en [1, Teorema 3.4] para árboles con racimos de tamaño al menos tres, dado que determinamos una cota superior para una familia más general, árboles con racimos de tamaño al menos dos.

Cota inferior

Dedicamos este capítulo a mostrar una cota inferior del número de separación válida para todo árbol. Este resultado nos será útil en los siguientes capítulos para determinar el valor de $\text{spc}(T)$ en distintas familias de árboles.

Recordemos que una patilla es un subárbol compuesto por cuatro vértices: las dos hojas de un racimo de tamaño 2, el padre del racimo (un vértice de grado 3) y el abuelo (un vértice de grado 2), como se muestra en Figura 2.3.

Estos subárboles son fundamentales en esta sección, ya que la cantidad de finales de camino requeridos por estas estructuras nos permitirá establecer la cota inferior. Además, recordemos que $r_2^*(T)$ denota la cantidad de patillas en un árbol T , parámetro que utilizaremos para definir la cota inferior.

A continuación, presentamos la cota inferior que demostraremos en esta sección.

Lema 4.1. *Sea T un árbol, entonces*

$$\text{spc}(T) \geq \left\lceil \frac{2h_1(T) + r_2^*(T)}{3} \right\rceil.$$

Para la demostración, es necesario enunciar primero algunos resultados y propiedades de la separación en patillas.

Comenzamos mostrando una observación en relación a la separación de 4 vértices.

Observación 4.2. Para separar 4 vértices, es necesario utilizar al menos 3 caminos.

Esta observación se deduce a partir de que con un camino, sólo podemos cubrir y separar un vértice, mientras que con dos caminos sólo es posible cubrir y separar 3 vértices (cubriendo el primer vértice con un camino, el segundo vértice con el otro camino y el tercer vértice con ambos caminos).

El siguiente lema presenta un resultado necesario sobre la separación en las patillas.

Lema 4.3. *Sea T un árbol, sea $Y \subset T$ una patilla y sea \mathcal{F} una familia que cubre y separa T . Entonces:*

- I. *Y tiene al menos 3 finales de camino.*
- II. *Si Y tiene exactamente 3 finales de camino, entonces dos de ellos cubren únicamente las dos hojas de Y , y el tercer final de camino estará en el padre o abuelo del racimo.*
- III. *Si Y tiene exactamente 4 finales de camino, entonces pueden distribuirse de las siguientes formas:*
 - a. *Un final de camino cubre únicamente una hoja, dos finales de camino cubren doblemente la otra hoja, y otro final de camino está en el padre o abuelo del racimo.*
 - b. *4 finales de camino cubren doblemente las dos hojas del racimo, y en este caso existe un camino que comienza en una hoja del racimo y termina en la otra hoja del racimo.*
 - c. *2 finales de camino cubren únicamente las dos hojas de Y , y los otros dos finales de camino están en el padre y/o abuelo.*

Demostración. Sea $Y \subset T$ una patilla, sean h_1, h_2 hojas del árbol, p el padre de las hojas y a el abuelo de las hojas. Como Y es una patilla, sabemos que a tiene grado dos, por ende, todo camino que pase por a pasará también por p a menos que el camino termine en a . Por otro lado, todo camino que pasa por un vértice de Y debe tener un final de camino en Y , por lo que si solo hay dos finales de camino en Y , hay solo dos caminos que cubren Y y sabemos que no es posible separar 4 vértices con dos caminos por Observación 4.2. De esta forma, concluimos que Y debe tener al menos 3 finales de caminos correspondientes a caminos distintos.

Por otro lado, si h es una hoja de T , es necesario que algún camino de \mathcal{F} tenga un final de camino en h . Con estas ideas en consideración se tienen las siguientes distribuciones de los finales de caminos de \mathcal{F} para separar Y :

Consideremos primero que Y tiene 3 finales de camino. Si los 3 finales de caminos están en las hojas, el padre no estará separado del abuelo. Por lo anterior, en este caso, ambas hojas deben estar únicamente cubiertas; adicionalmente, para que estén separadas, deben estar únicamente cubiertas por finales de caminos diferentes. Luego, se requiere un final de camino adicional en el padre o abuelo para separarlos. Notar que esta forma utiliza 3 finales de camino cada uno y es la única distribución posible con 3 finales de camino para separar Y . En la Figura 4.1a presentamos una patilla cubierta y separada de esta forma.

Por otro lado, si consideramos que Y contiene 4 finales de camino, entonces las hojas pueden ser cubiertas de las siguientes formas:

- Una hoja está únicamente cubierta y la otra está doblemente cubierta, notar que al igual que en el caso anterior, estos racimos requieren un final de camino adicional en el padre o abuelo para separarlos. Lo cual da el total de 4 finales de camino en Y . En la Figura 4.1b presentamos una patilla cubierta y separada de esta forma.
- Ambas hojas doblemente cubiertas. En este caso ya se utilizaron los 4 finales de camino, por lo que para separar al padre del abuelo es necesario que dos finales de camino de Y sean del mismo camino y estén en hojas distintas del racimo. En la Figura 4.1c presentamos una patilla cubierta y separada de esta forma.
- Ambas hojas únicamente cubiertas, en este caso de manera similar al caso anterior, se

requiere al menos un final de camino adicional en el padre o abuelo, dado que utilizamos 4 finales de camino, se tiene un final de camino en p y un final de camino en a , o ambos finales de camino a o ambos en p , en este último caso uno de los caminos debe comenzar en una hoja del racimo y terminar en p . En la Figura 4.1d, la Figura 4.1e y la Figura 4.1f presentamos estos 3 casos.

De esta forma, se tienen todos los casos presentados en el Lema. □

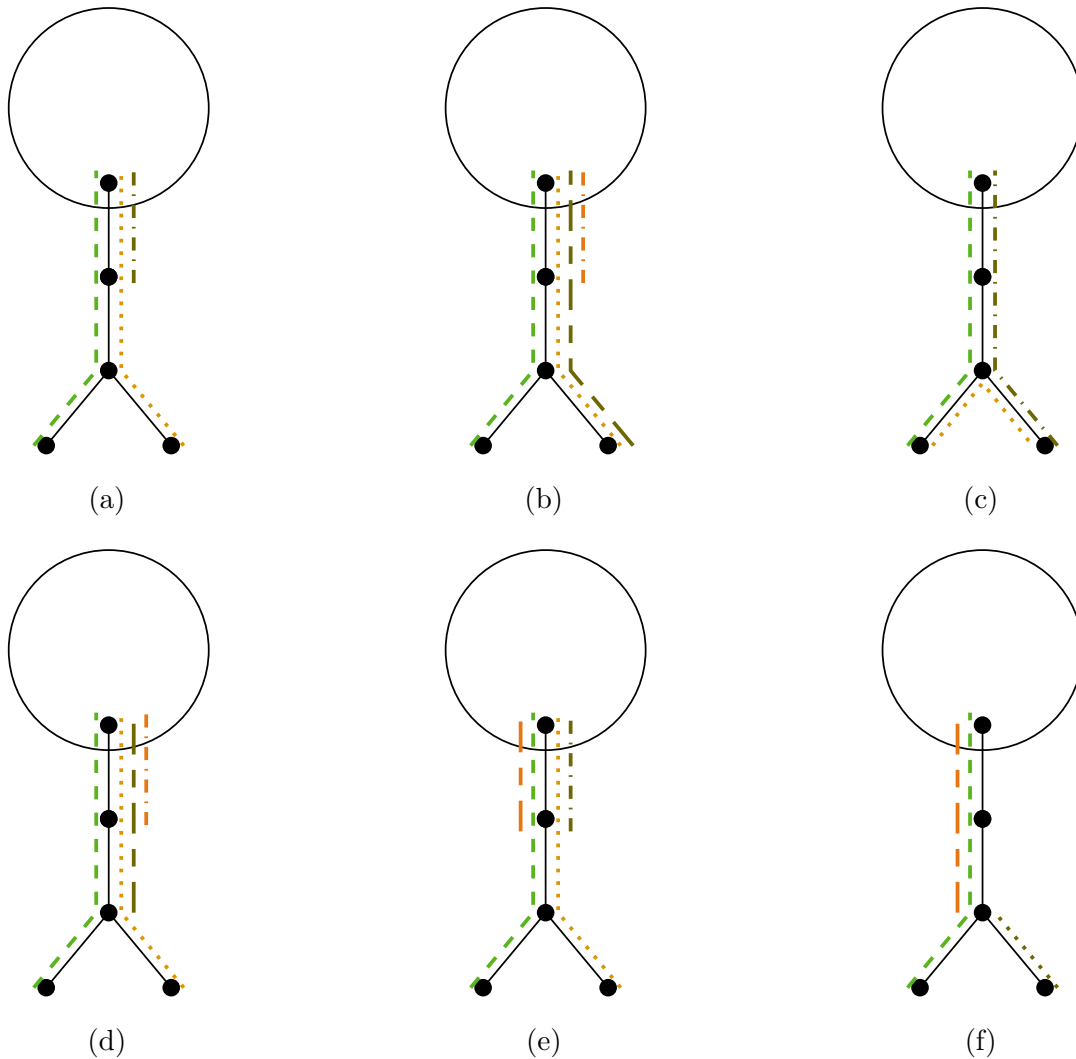


Figura 4.1: Separación de patillas con 3 y 4 finales de camino. En la Figura 4.1a presentamos la separación de una patilla con 3 finales de camino, caso II.. En la Figura 4.1b presentamos la separación de una patilla con 4 finales de camino, caso III.a.. En la Figura 4.1c presentamos la separación de una patilla con 4 finales de camino, caso III.b.. En las Figuras 4.1d, 4.1e y 4.1f presentamos la separación de una patilla con 4 finales de camino, caso III.c..

4.1. Demostración cota inferior del Lema 4.1

Demostraremos la cota inferior a través del estudio de las estructuras de los racimos y la cantidad mínima de finales de camino que requieren, considerando la existencia de patillas y sus formas de separación presentadas en el Lema 4.3.

Demostración del Lema 4.1. Sea T un árbol y sea \mathcal{F} una familia de caminos que cubre y separa $V(T)$.

Por el Lema 4.3 sabemos que para separar las patillas vamos a requerir al menos 3 finales de camino por cada una de ellas. Denominaremos las patillas de la siguiente forma:

- r_{11} a la cantidad de patillas que son separadas con 3 finales de camino, por el Lema 4.3, Item II. sabemos que la única forma de separación posible con 3 finales de camino considera ambas hojas únicamente cubiertas y otro final de camino en el padre o abuelo.
- r_{12} a la cantidad de patillas que son separadas con 4 finales de camino considerando una hoja únicamente cubierta, la otra hoja doblemente cubierta y un final de camino en el padre o abuelo.
- r_{22} a la cantidad de patillas que son separadas con 4 finales de camino considerando ambas hojas doblemente cubiertas. Por el Lema 4.3 Item III.b. sabemos que en este caso se considera un camino que comienza y termina en las hojas del racimo, por lo tanto este camino comienza y termina en hojas doblemente cubiertas.
- r'_{11} a la cantidad de patillas que son separadas con 4 finales de camino y ambas hojas únicamente cubiertas.
- r_{25} a la cantidad de patillas cubiertas por al menos 5 finales de camino.

Notar que el Lema 4.3.III. nos indica que solo existen las 3 formas anteriores de cubrir y separar estas estructuras utilizando 4 finales de camino.

Como $r_2^*(T)$ contabiliza la cantidad de patillas, se tiene la siguiente igualdad:

$$r_2^*(T) = r_{11} + r'_{11} + r_{12} + r_{22} + r_{25} \quad (4.1.1)$$

El análisis anterior nos da información sobre los finales de caminos utilizados para las patillas, sin embargo, pueden existir racimos que no son patillas. La cantidad de hojas que no pertenecen a una patilla es $h_1(T) - 2r_2^*(T)$. Estas hojas pueden estar únicamente cubiertas o al menos doblemente cubiertas. Denominaremos por h_{11} a las hojas únicamente cubiertas que no están asociadas a una patilla, y por h_{12} a las hojas al menos doblemente cubiertas que no están asociadas a una patilla. De esta forma se tiene la siguiente igualdad:

$$h_1(T) - 2r_2^*(T) = h_{11} + h_{12} \quad (4.1.2)$$

Por otro lado, considerando $|\mathcal{F}| = m$, sabemos que se tendrá a lo más $2m$ finales de camino. (Notar que si un camino comienza y termina en el mismo vértice, entonces hay menos de $2m$ finales de camino). La cantidad de finales de camino es al menos la suma de los finales de camino utilizados para separar tanto las patillas como las hojas que no pertenecen a patillas. Lo anterior nos da la siguiente cota para los finales de camino:

$$2m \geq 3r_{11} + 4r'_{11} + 4r_{12} + 4r_{22} + 5r_{25} + h_{11} + 2h_{12} \quad (4.1.3)$$

Construiremos ahora una cota para la cantidad de caminos m . Para ello vamos a contabilizar por separado los caminos que tienen un extremo en un vértice únicamente cubierto y los caminos cuyos dos extremos no están en vértices únicamente cubiertos. Sea $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$, donde \mathcal{F}_1 corresponde a la familia de caminos con algún extremo cubriendo únicamente un vértice, y \mathcal{F}_2 corresponde a la familia de caminos con ambos extremos cubriendo al menos doblemente un vértice.

Sabemos que $|\mathcal{F}_1|$ es al menos dos veces la cantidad de racimos contabilizados en r_{11} , ya que estos tienen ambas hojas únicamente cubiertas, dos veces la cantidad de racimos contabilizados en r'_{11} , una vez los racimos contabilizados en r_{12} ya que tienen solo una hoja únicamente cubierta, y una vez las hojas contabilizadas en h_{11} ya que es la cantidad de hojas restantes únicamente

cubiertas.

Luego, la cantidad de caminos es igual a la suma de $|\mathcal{F}_1|$ y $|\mathcal{F}_2|$. Por lo que se tiene la siguiente cota inferior para el número de caminos:

$$m = |\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}_2| \geq 2r_{11} + 2r'_{11} + r_{12} + h_{11} + |\mathcal{F}_2| \quad (4.1.4)$$

Sumando (4.1.3) y (4.1.4) obtenemos:

$$3m \geq 5r_{11} + 6r'_{11} + 5r_{12} + 4r_{22} + 5r_{25} + 2h_{11} + 2h_{12} + |\mathcal{F}_2| \quad (4.1.5)$$

Notar que $|\mathcal{F}_2|$ es al menos la cantidad de racimos contabilizados en r_{22} , dado que r_{22} considera por cada racimo un camino que comienza y termina en hojas doblemente cubiertas. Esto nos permite reescribir (4.1.5) como sigue:

$$3m \geq 5r_{11} + 6r'_{11} + 5r_{12} + 5r_{22} + 5r_{25} + 2h_{11} + 2h_{12} \quad (4.1.6)$$

Comenzando de (4.1.6) y considerando (4.1.1) y (4.1.2), obtenemos:

$$3m \geq 5r_2^*(T) + 2(h_1(T) - 2r_2^*(T))$$

Como m es un número entero, se tiene que la familia de caminos que cubre y separa tiene tamaño al menos $\left\lceil \frac{2h_1(T) + r_2^*(T)}{3} \right\rceil$. □

Construcción base y sus propiedades de separación

Dedicamos este capítulo a presentar nuestra construcción base. Mostraremos también sus propiedades de cubrimiento y separación en una primera familia de árboles, con únicamente racimos de tamaño dos y tres. En los capítulos siguientes iremos ampliando progresivamente las familias consideradas, abordando casos de creciente complejidad. De manera general, esta construcción base será una herramienta importante que utilizaremos para establecer una cota superior de $\text{spc}(T)$ en las distintas familias de árboles que analizaremos.

Primero, definiremos una construcción que asemeja gaviotas y consiste en agrupar de a 3 hojas del árbol y construir 2 caminos entre ellas. Utilizaremos esta construcción para definir nuestra construcción base.

Construcción 5.1. *(a, b, c)-gaviota:* Sea T un árbol, y sean a, b, c 3 hojas distintas de T , definiremos como *(a, b, c)-gaviota* al conjunto formado por los caminos aTb y bTc .

En general, una *gaviota* es un conjunto de dos caminos tal que esos caminos conformen una

(a, b, c) -gaviota para alguna trípleta (a, b, c) . En la Figura 5.1 se puede ver un ejemplo de la Construcción 5.1.

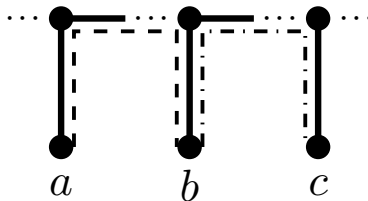


Figura 5.1: Ejemplo construcción de gaviotas. En esta figura mostramos una (a, b, c) -gaviota.

5.1. Construcción base

Dado que la mayor complejidad surge al incorporar patillas, comenzaremos definiendo una construcción para árboles sin patillas. Además, excluimos los racimos de tamaño 1, ya que nuestro estudio reveló que estos complican el análisis de la separación. En el Capítulo 8 presentamos un análisis detallado de este caso.

A continuación presentamos nuestra construcción base, la cual consiste principalmente en construir *gaviotas alternadas*. La idea general es realizar gaviotas que incluyan caminos entre los racimos consecutivos.

Construcción 5.2. Sea T un árbol con solo racimos de tamaño 2 ó 3. Aplicaremos la construcción mediante los siguientes pasos:

1. Si no existe un orden dado de los racimos, enumeramos los racimos mediante el orden DFS descrito en la Observación 2.2 comenzando en una hoja de un racimo de tamaño 2 si es que existe, como R_1, R_2, \dots, R_l y las hojas de un racimo R_j las enumeramos como $h_j^1, h_j^2, \dots, h_j^k$, con $k \in \{2, 3\}$. Notar que la enumeración anterior proporciona un orden natural de las hojas, comenzando por las hojas del racimo 1 en orden, luego las hojas del racimo 2 en orden y así hasta las hojas del último racimo en orden. En lo que sigue, consideraremos R_1 como el racimo siguiente a R_l .

En la Figura 5.2a se aplica este paso en un ejemplo.

2. Construiremos iterativamente (a_i, b_i, c_i) -gaviotas, comenzando con $i = 1$ y aumentando i en 1 con cada nueva gaviota, de la siguiente forma:

a. Elegiremos a_i considerando el racimo R_j en el que termina la gaviota anterior. Se tienen los siguientes casos:

- Si $i = 1$, entonces $a_i = h_1^k$.
- Si $i \neq 1$ y R_j es de tamaño 2, a_i será la segunda hoja descubierta del racimo de índice más pequeño posible distinto de 1.
- Si $i \neq 1$ y R_j es de tamaño 3, entonces a_i será la primera hoja descubierta de R_j .

b. Elegiremos b_i, c_i según los siguientes dos casos:

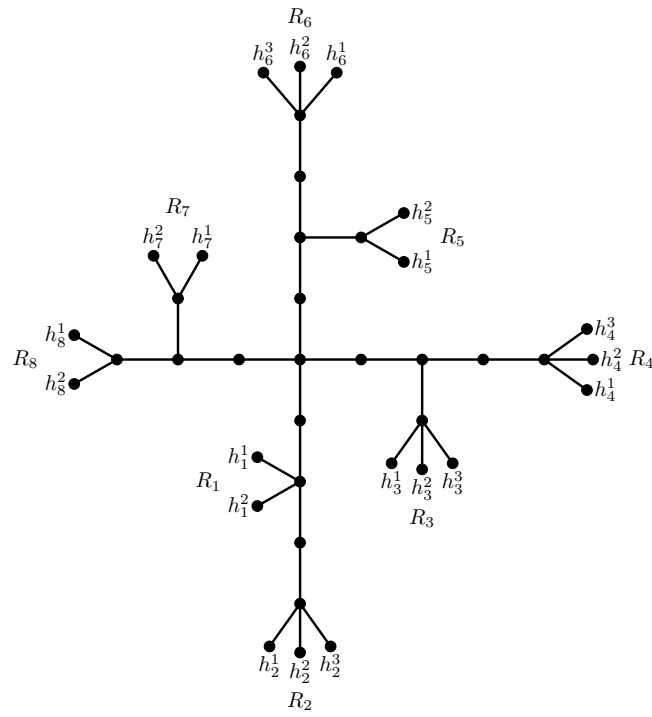
- Si la siguiente hoja descubierta después de a_i es la primera hoja de un racimo de tamaño 2, entonces b_i, c_i serán las hojas h_{j+1}^1 y h_{j+2}^1 respectivamente.
- En todos los otros casos b_i, c_i serán las dos hojas consecutivas y descubiertas siguientes de a_i .

Esto se realiza hasta que queden menos de 3 hojas descubiertas.

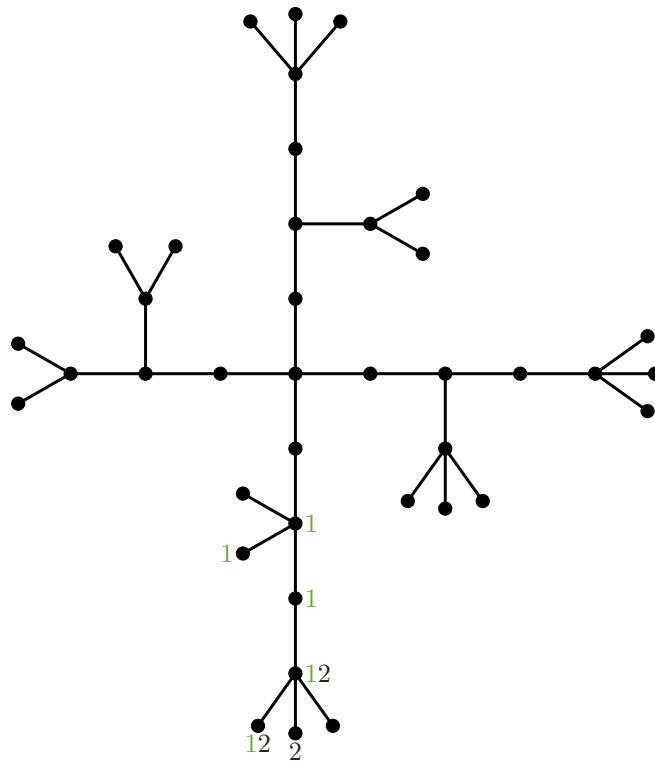
En Figura 5.2b, Figura 5.2c, Figura 5.2d, Figura 5.2e, Figura 5.2f y Figura 5.2g presentamos un ejemplo de este paso en un árbol que requiere 6 iteraciones.

3. Si quedan 0 hojas sin cubrir, terminamos. Si queda 1 hoja sin cubrir en el paso anterior y es una hoja del primer racimo, construimos el camino entre la hoja y una hoja del racimo R_l , si queda 1 hoja sin cubrir y no está en el primer racimo, entonces construimos el camino desde la hoja a su padre. Si quedan 2 hojas sin cubrir en el paso anterior, construimos dos caminos: el camino entre las dos hojas, y, si una de ellas es una hoja del primer racimo, añadimos también el camino entre dicha hoja y una hoja de R_l , si ninguna de las hojas es del primer racimo, añadimos entonces, el camino entre una de las hojas y su padre.

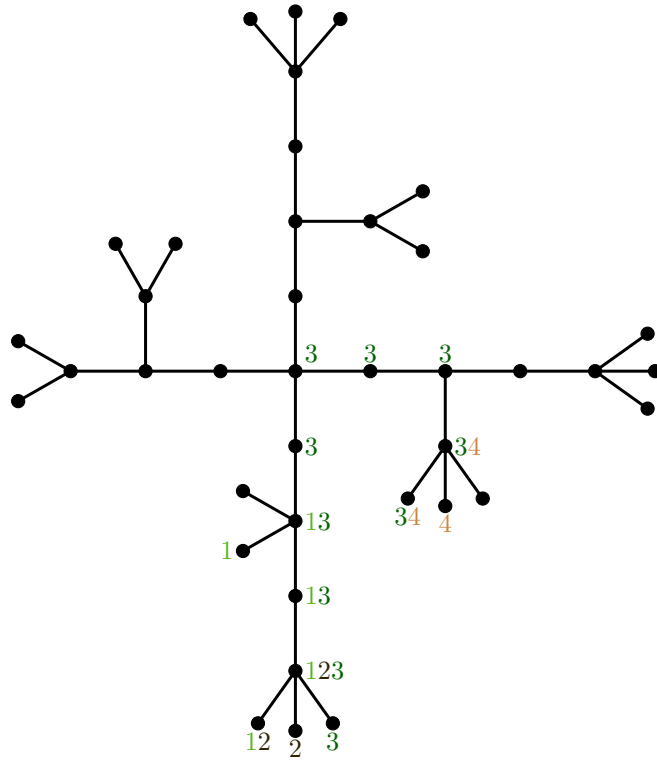
En la Figura 5.2h se aplica este paso en un árbol a modo de ejemplo.



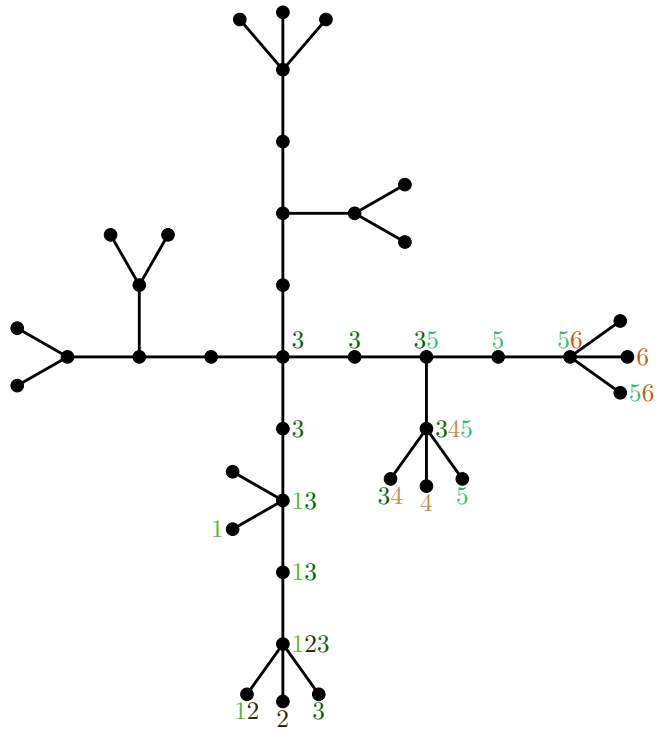
(a) Paso 1



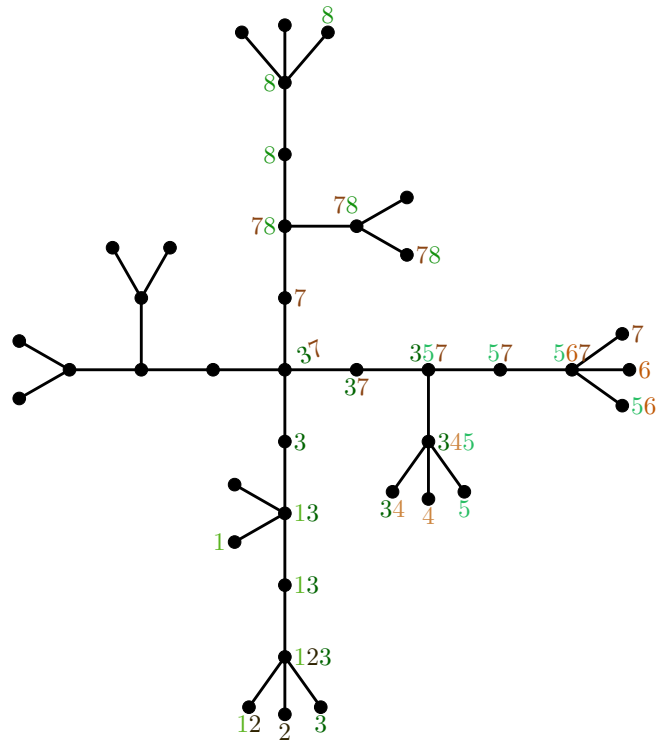
(b) Paso 2: primera iteración



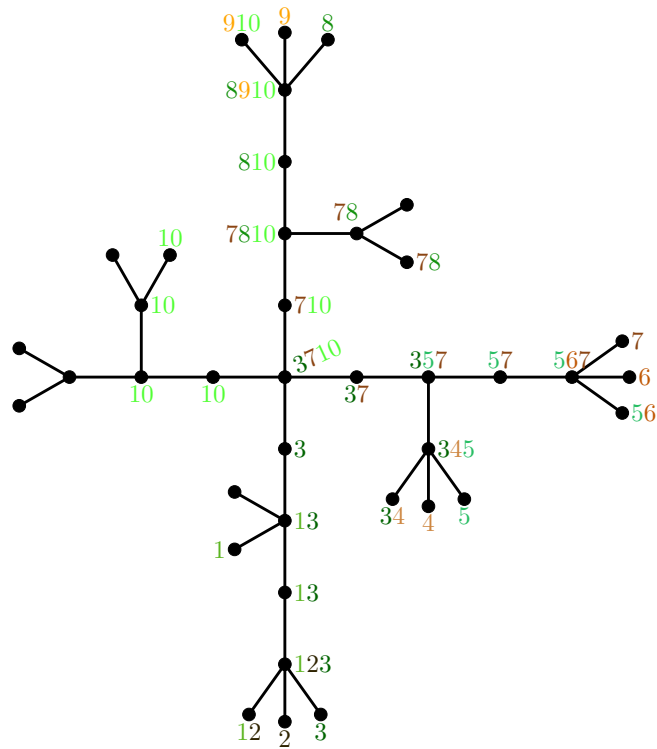
(c) Paso 2: segunda iteración



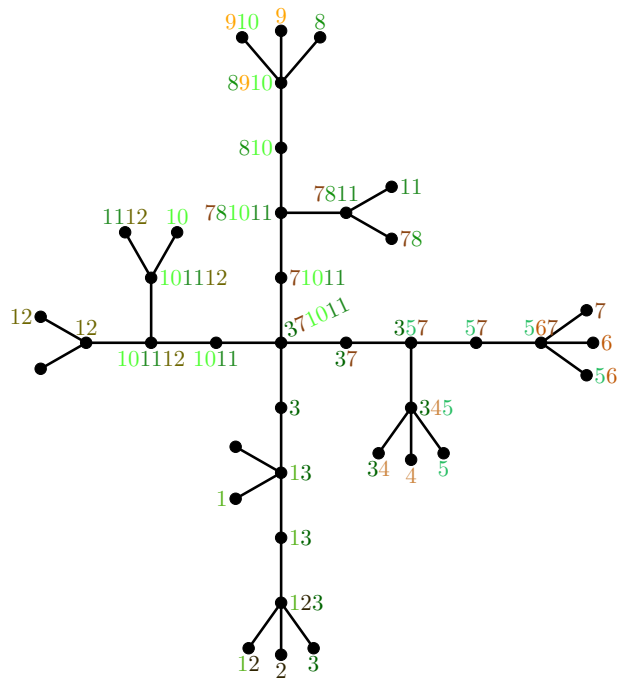
(d) Paso 2: tercera iteración



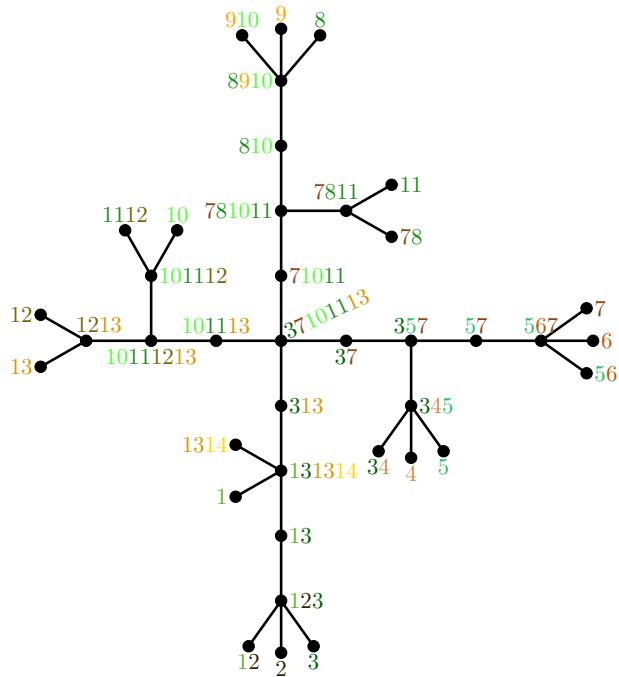
(e) Paso 2: cuarta iteración



(f) Paso 2: quinta iteración



(g) Paso 2: sexta iteración



(h) Paso 3

Figura 5.2: Ejemplo de Construcción 5.2 aplicada en un árbol con 8 racimos. Representamos cada camino con un número y color. En el paso 1 se presenta la enumeración de racimos y hojas. En la primera iteración del paso 2 se construye la primera gaviota, en este caso $a_1 = h_1^2$, $b_1 = h_2^1$ y $c_1 = h_2^2$. En las siguientes iteraciones se construyen las gaviotas siguientes. En el paso 3 añadimos los caminos 13 y 14 para las dos hojas que no fueron separadas por gaviotas.

A continuación presentamos propiedades de la construcción.

5.2. Propiedades de la Construcción 5.2

El siguiente lema presenta resultados sobre la correctitud de la Construcción 5.2. Para ello mostramos que siempre es posible elegir a_i, b_i y c_i como se indica en el Paso 2. de la Construcción.

Lema 5.3. *Si T es un árbol con solo racimos de tamaño 2 ó 3, la Construcción 5.2 está bien definida.*

Demostración. Sea T un árbol con solo racimos de tamaño 2 ó 3. Siguiendo la Construcción 5.2 enumeramos las hojas como indica el Paso 1.. Luego realizamos las iteraciones para construir gaviotas como indica el Paso 2.. La Construcción estará bien definida si siempre podemos elegir a_i, b_i y c_i como indica el Paso 2..

Lo primero es notar que la elección de b_i y c_i siempre está bien definida. En general son las dos hojas descubiertas siguientes, las cuales siempre existen a menos que queden menos de 3 hojas sin cubrir, en cuyo caso se aplica el Paso 3.. El único caso diferente es cuando b_i es la primera hoja de un racimo de tamaño dos; sin embargo, en este caso siempre estará descubierta la primera hoja del racimo siguiente, ya que si una gaviota termina en el racimo R_j no puede estar cubierta ninguna hoja de un racimo con índice mayor que j . Si b_i está en el último racimo, c_i será h_1^1 .

Sobre la elección de a_i , el primer caso es la primera gaviota, la cual considera $a_i = h_1^k$. Como ninguna hoja está cubierta, siempre podemos elegir a_1 de esta manera.

Si $i \neq 1$ y R_j es de tamaño 2, siempre es posible elegir a_i como la segunda hoja de algún racimo, tal que la hoja no esté cubierta, como indica el Paso 2..a.. En particular, siempre estará la opción de elegir la segunda hoja del racimo R_j . Esto dado que si una gaviota termina en un racimo de tamaño dos, siempre lo hace en la primera hoja. En general, b_i y c_i son hojas consecutivas, por lo que si la gaviota termina en la segunda hoja de un racimo de tamaño dos, entonces es porque ambas hojas del racimo estaban descubiertas cuando se eligen b_i y c_i , lo cual es el primer caso del Paso 2..b. y por ende, la elección de b_i y c_i será h_{j+1}^1 y h_{j+2}^1 .

Si $i \neq 1$ y R_j es de tamaño 3, queremos mostrar que siempre es posible elegir a_i como la primera hoja descubierta del racimo R_j . Procedemos por contradicción. Supongamos que esto no siempre es posible, es decir, existe algún j tal que la gaviota que termina en R_j termina en la última hoja de R_j y, por ende, todas las hojas están cubiertas. Consideremos el primer racimo en que ocurre esto, digamos R_i .

Dado que el racimo R_i es de tamaño 3, por el Paso 2.b. de la Construcción, sabemos que b_i y c_i son hojas consecutivas, por lo tanto, son la segunda y la tercera hoja. Mientras que a_i deberá ser la primera hoja del racimo.

Para que esto ocurra, en el racimo anterior, R_{i-1} , también tuvo que terminar una gaviota en la última hoja y estar completamente cubierto. Sin embargo, como vimos en el caso anterior, esto nunca ocurre en racimos de tamaño 2. Si R_{i-1} es de tamaño 3 y termina una gaviota en la última hoja, entonces contradice la suposición de que R_i es el racimo más pequeño en que una gaviota termina en la última hoja.

De esta forma, podemos concluir que para todas las gaviotas construidas siguiendo el Paso 2., que terminan en un racimo de tamaño 3, c_i está en la primera o segunda hoja del racimo. Por lo tanto, si una gaviota termina en un racimo de tamaño 3, siempre queda una hoja descubierta en dicho racimo, la cual, por el Paso 2.a. será elegida como a_i de la gaviota siguiente. \square

A continuación presentamos propiedades de la Construcción 5.2 que utilizaremos para demostrar los resultados de cubrimiento y separación de esta Construcción.

Corolario 5.4. *Sea T un árbol con solo racimos de tamaño 2 ó 3 y sea \mathcal{F} la familia de caminos obtenida de aplicar la Construcción 5.2 a T . La familia \mathcal{F} tiene las siguientes propiedades:*

- I. *Contiene a lo más un camino que comienza en una hoja y termina en su padre. Este camino está en un racimo de tamaño 2 o en la última hoja de R_i .*
- II. *Si el camino que comienza en una hoja y termina en su padre pasa por una hoja únicamente cubierta, entonces $h_1(T) \equiv 1 \pmod{3}$.*
- III. *Si el camino que comienza en una hoja y termina en su padre pasa por una hoja doblemente cubierta, entonces $h_1(T) \equiv 2 \pmod{3}$.*

- IV. *Cada racimo de tamaño 3 tendrá un camino que comienza y termina en el racimo. Además, cada racimo de tamaño 3 tendrá exactamente una hoja doblemente cubierta y dos hojas únicamente cubiertas. Los caminos que pasan por la hoja doblemente cubierta, consideran un camino que tiene un final de camino en una hoja de otro racimo, y un camino que termina en la segunda hoja del mismo racimo.*
- V. *Contendrá al menos un camino entre cada racimo y el racimo siguiente en el orden dado por DFS.*

Demostración. Demostraremos cada punto por separado. Para demostrar el punto I consideramos el paso 3. de la Construcción 5.2, en este paso añadimos 1 camino por cada hoja en a lo más 2 hojas, siendo a lo más uno de ellos un camino desde una hoja a su padre. Por otro lado, este camino se construye en las hojas que no fueron cubiertas por el paso 2. de la Construcción 5.2, dado que siempre que una gaviota termina en un racimo de tamaño 3, la siguiente gaviota cubre todas las hojas restantes, la única excepción ocurre cuando la cantidad de hojas restantes es menor a 3, es decir, cuando la cantidad de hojas es 2 (mód 3) o 1 (mód 3). En ambos casos, solo existen hojas de racimos de tamaño 3 no cubiertas por gaviotas si el racimo de tamaño 3 es R_l o R_1 , sin embargo, por el paso 1. de la Construcción sabemos que si el primer racimo es de tamaño 3, entonces, todos los racimos son de tamaño 3 y por ende, todas las hojas están cubiertas con gaviotas. Por lo tanto, si existe una hoja de un racimo de tamaño 3 sin cubrir por gaviotas, está en R_l , y más aún es la última hoja, dado que si sobran dos hojas, una de ellas es h_1^1 . Así, el camino que comienza en una hoja y termina en su padre debe estar en un racimo de tamaño 2 o en la última hoja de R_l .

El punto II es un resultado directo del paso 3. de la Construcción. Si el camino entre la hoja y su padre pasa por una hoja únicamente cubierta, entonces quedó solo una hoja sin cubrir por las gaviotas, lo cual significa que $h_1(T) \equiv 1 \pmod{3}$.

El punto III lo demostramos de forma similar al caso anterior. Si el camino entre la hoja y su padre pasa por una hoja doblemente cubierta, entonces quedaron 2 hojas sin cubrir por las gaviotas, lo cual significa que $h_1(T) \equiv 2 \pmod{3}$.

Para demostrar el punto IV consideraremos el paso 2. de la Construcción 5.2. En este paso,

es posible observar que si la gaviota anterior termina en un racimo R_j de tamaño 3, entonces a_i será la primera hoja descubierta del racimo, es decir, puede ser la segunda o tercera hoja de R_j . Si a_i es la segunda hoja, entonces por la descripción de la Construcción, sabemos que b_i será la tercera hoja del racimo, y por lo tanto existe un camino entre la segunda y la tercera hoja. Además, c_i será la primera hoja del racimo siguiente y por lo tanto existe un camino entre la tercera hoja y la hoja siguiente en el racimo siguiente, de esta forma, la tercera hoja del racimo está doblemente cubierta. Notar también que en este caso la primera hoja del racimo de tamaño 3 es parte de una gaviota anterior, por lo que existe un camino entre dicha hoja y el racimo anterior. Si a_i es la tercera hoja del racimo, es porque terminó la gaviota anterior en la segunda hoja del racimo, y por ende, la primera y segunda hoja son b_{i-1} y c_{i-1} respectivamente, es decir, existe un camino entre la primera y la segunda hoja del racimo R_j . Además, a_i será una hoja del racimo anterior, por lo que existirá un camino entre la primera hoja del racimo y el racimo anterior, de esta forma, la primera hoja estará doblemente cubierta. Notar también que lo anterior implica que existe un camino entre la primera y la segunda hoja. En este caso además, b_i será una hoja del racimo siguiente. Por último, si existe un racimo de tamaño 3 con una hoja sin cubrir por gaviotas, por el punto anterior, sabemos que ese racimo será R_l , y más aún, la hoja h_1^1 tampoco estará cubierta por gaviotas. Por el paso 3. de la Construcción 5.2, sabemos que se añade el camino entre ambas hojas, satisfaciendo la condición.

Para el punto v, también utilizaremos el paso 2. de la Construcción 5.2, observando que, como mostramos en el punto anterior, por cada racimo de tamaño 3 existe un camino entre el racimo anterior y el racimo de tamaño 3, así como un camino entre este y el racimo siguiente, satisfaciendo la condición.

En el caso de los racimos de tamaño 2 que fueron cubiertos por gaviotas, por definición de la construcción, podemos observar que nunca una gaviota considera dos hojas del mismo racimo. Por lo tanto, si b_i y c_i son consecutivas, entonces pertenecen a dos racimos consecutivos. Si b_i y c_i no son consecutivas, entonces son las hojas h_{j+1}^1 y h_{j+2}^1 , lo cual también implica que pertenecen a racimos consecutivos. Por último, si hay una hoja a_i en un racimo de tamaño 2, R_j , esta será la segunda hoja de R_j , mientras que b_i será la primera hoja de R_{j+1} o b_i será la primera hoja descubierta de un racimo de tamaño 2, lo que ocurre cuando la primera hoja de

R_j es una hoja b_{i-1} . Como ya vimos, en este caso, c_{i-1} estará en R_{j+1} satisfaciendo igualmente la condición.

Por otro lado, si existen hojas en los racimos de tamaño 2 que no fueron cubiertas por gaviotas, se presentan dos casos:

- (I) Si una hoja no cubierta por gaviotas está en el primer racimo, entonces, por el paso 3., sabemos que está cubierta al menos por un camino entre dicha hoja y una hoja del racimo R_l , satisfaciendo la condición. Además, siempre existe el camino $h_1^1 T h_2^1$.
- (II) Si una hoja no cubierta por gaviotas no está en el primer racimo, la primera hoja del racimo debe ser b_i , dado que a_i nunca es la primera hoja y si la primera hoja fuera c_i , entonces la segunda hoja es a_{i+1} y estarían cubiertas por gaviotas. Así, la primera hoja es b_i , y por ende, a_i pertenece al racimo anterior y c_i al racimo siguiente.

De esta forma, en todos los casos, existe un camino entre un racimo y el racimo siguiente. \square

Observación 5.5. Si todos los racimos son de tamaño 3, la Construcción 5.2 es equivalente a la Construcción *Bunch* presentada en [1, Definición 4.7].

El siguiente lema presenta el resultado de cubrimiento y separación de la Construcción 5.2. Notar que si bien la Construcción puede ser utilizada en todo árbol con racimos de tamaño dos o tres, en particular, los resultados de cubrimiento y separación de esta construcción aplican solo en árboles H.I.P.I.S., sin patillas y cuyos racimos sean de tamaño dos o tres. Luego mostraremos la extensión de estas propiedades a árboles con racimos de tamaño al menos dos y sin patillas, así como a árboles sin vértices de grado dos.

Lema 5.6. *Si T es un árbol H.I.P.I.S. sin patillas y con solo racimos de tamaño 2 ó 3 distinto de $K_{1,3}$, entonces:*

$$\text{spc}(T) \leq \left\lceil \frac{2h_1(T)}{3} \right\rceil$$

Además, existe una familia de caminos \mathcal{F} tal que $|\mathcal{F}| = \lceil 2h_1(T)/3 \rceil$, y que considera, como máximo, un camino que comienza en una hoja y termina en su padre. Este camino puede pasar

por una hoja que esté únicamente cubierta, en cuyo caso $h_1(T) \equiv 1 \pmod{3}$, o por una hoja doblemente cubierta, en cuyo caso $h_1(T) \equiv 2 \pmod{3}$.

Demostración. La idea de la demostración es utilizar la Construcción 5.2, y en particular, el punto v del Corolario 5.4, es decir, la familia de caminos dada por la Construcción 5.2 considera un camino entre todo par de racimos consecutivos. Notar además que R_1 es considerado el racimo siguiente de R_l .

Comenzaremos analizando un caso particular, el árbol T_1 compuesto por dos racimos de tamaño 2, tal que sus padres son vecinos. Sea $R_1 = \{u, v\}$ y $R_2 = \{x, y\}$ los racimos de T_1 . En este caso, sabemos que T_1 puede ser cubierto y separado con 3 caminos: uTx , vTy y uTv . Notar que esto corresponde a $\text{spc}(T_1) = 3 = \lceil 2h_1(T_1)/3 \rceil$, y por lo tanto satisface la cota. En Figura 5.3 presentamos gráficamente el árbol T_1 y los caminos que cubren y separan $V(T_1)$.

Luego, analizamos los casos restantes. Para ello, consideramos T un árbol distinto a T_1 . Aplicamos en T la Construcción 5.2, obteniendo una familia de caminos \mathcal{F} .

Sean u y v dos vértices distintos de T . Consideremos los siguientes dos casos:

Caso 1. Existe al menos un vértice de grado al menos 3 en el interior del (u, v) -camino en T . Entonces existe al menos un racimo que es el siguiente o el antecesor de un racimo descendiente de u , si u tiene grado al menos 2, así como también existirá un racimo que es el siguiente o el antecesor de un racimo descendiente de v , si v tiene grado al menos 2. Esto considerando el orden de los racimos definido en el ítem 1. de la Construcción 5.2. Notar que en el caso de que solo exista un vértice en el (u, v) -camino en T con grado al menos 3 y tenga grado 3, un solo racimo satisfará ambas condiciones. Sin pérdida de generalidad, sea R el racimo siguiente o antecesor de un racimo descendiente de u , R_u .

Por el punto v del Corolario 5.4, sabemos que entre cada par de racimos consecutivos existe al menos un camino de \mathcal{F} . Por lo tanto, existe un camino entre R y R_u . Además, dado que R no es descendiente de v , dicho camino pasa por u y no pasa por v .

Si u y v tienen grado 1, entonces, ambos son hojas, y dado que en el Paso 2. del Corolario 5.4 se construyen gaviotas con hojas a_i, b_i y c_i , sabemos que todas las hojas están únicamente cubiertas o doblemente cubiertas con términos de caminos diferentes. Si las hojas no fueron

cubiertas por gaviotas, entonces fueron cubiertas acorde al Paso 3. y se construye el camino entre la hoja y su padre. Dado esto, ese camino no puede pasar por ninguna otra hoja, por ende, estarían igualmente separadas.

Caso 2. No existe ningún vértice de grado al menos 3 en el interior del (u, v) -camino. Como T es un árbol H.I.P.I.S., los vértices pueden estar a distancia a lo más dos. Supongamos primero que alguno de los vértices $\{u, v\}$ es de grado al menos 3 y no es padre de racimo, sin pérdida de generalidad, supongamos u es de grado al menos 3 y no es padre de un racimo. En este caso, existirán al menos dos componentes en $T - u$ que no incluyen a v , y existirá una gaviota que contenga un camino entre el último racimo de una de las componentes y el primer racimo de la siguiente componente en T , el cual pasa por u y no pasa por v . Supongamos ahora que alguno de los vértices tiene grado al menos 3 y es padre de un racimo de tamaño 3, sin pérdida de generalidad, digamos v cumple estas condiciones. Por el ítem IV del Corolario 5.4 sabemos que existe un camino que comienza y termina en el racimo, por ende pasa por v y no pasa por u . Entonces, podemos suponer que u y v tienen grado a lo más 2 o bien, tienen grado al menos 3 y son padres de un racimo de tamaño 2. Notar que dado que T es un árbol H.I.P.I.S. y estamos considerando que no existe un vértice de grado al menos 3 en el interior del (u, v) -camino, no es posible que simultáneamente u y v tengan grado a lo más 2. Por lo tanto, al menos uno de ellos tendrá grado al menos 3 y es padre de un racimo de tamaño 2.

Supongamos que u tiene grado al menos 3 y es padre de un racimo de tamaño 2, R_u . Si v tiene grado 1, entonces, como en este caso, debe estar a distancia a lo más dos, v es una hoja de R_u . Si las hojas de R_u fueron cubiertas por gaviotas, por el paso 2. de la Construcción sabemos que por las hojas de un racimo de tamaño 2 terminan caminos diferentes, y todos ellos pasan por el padre, por ende todas las hojas están diferenciadas de su padre. Si alguna hoja fue cubierta por un camino desde la hoja a su padre, siguiendo el paso 3. de la Construcción, igualmente u y v estarán separados, dado que la otra hoja de R_u tuvo que ser cubierta por un camino que pasa por u y no pasa por v .

Supongamos ahora, que u y v son padres de un racimo de tamaño 2. Digamos u es padre de R_i y v es padre de R_{i+1} . En este caso, si solo existen esos dos racimos, entonces corresponde al árbol T_1 , que ya fue descartado, o contiene patillas, lo cual no es posible por hipótesis. Por lo

tanto, deben existir más racimos en el árbol, al menos un tercer racimo R_{i+3} o R_{i-1} , y por el ítem **v** del Corolario 5.4 sabemos que existirá un camino entre R_{i+2} y el racimo siguiente R_{i+3} o existirá el camino entre R_{i-1} y R_i . Notar que el primer camino pasa por v y no pasa por u , mientras que el segundo camino pasa por u y no pasa por v . En ambos casos, los vértices están separados.

Notar que no es posible que uno sea padre de un racimo de tamaño dos y el otro sea un vértice vecino de grado dos, ya que formarían una patilla.

De esta forma, en todos los casos los vértices están cubiertos y separados. Notar que en todos los pasos de la construcción realizamos gaviotas a excepción del paso 3. de la Construcción en el que añadimos 1 camino por cada hoja en a lo más 2 hojas, siendo a lo más uno de ellos un camino desde una hoja a su padre, por lo que la cantidad de caminos utilizados es $\lceil 2h_1(T)/3 \rceil$. Notar además que por ítem **II** sabemos que si el camino entre una hoja y su padre pasa por una hoja únicamente cubierta, entonces $h_1(T) \equiv 1 \pmod{3}$, y por ítem **III** si el camino pasa por una hoja doblemente cubierta, entonces $h_1(T) \equiv 2 \pmod{3}$. \square

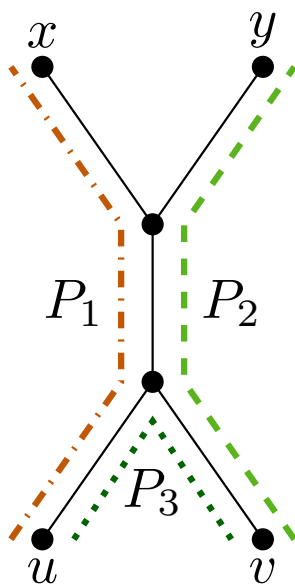


Figura 5.3: Separación de árbol T_1 con 3 caminos: $P_1 = uT_1x$, $P_2 = vT_1y$ y $P_3 = uT_1v$.

Árboles homeomórficamente irreducibles

Dedicamos este capítulo al estudio del número de separación en una familia más amplia que la considerada anteriormente. En particular, nos enfocaremos en los árboles homeomórficamente irreducibles, es decir, árboles sin vértices de grado 2. Mostraremos que si T es un árbol sin vértices de grado 2 distinto del árbol estrella $K_{1,3}$, $\text{spc}(T) = \lceil 2h_1(T)/3 \rceil$. En el caso de $K_{1,3}$, el número de separación es 3, lo cual corresponde a $\lceil 2h_1(K_{1,3})/3 \rceil + 1$. Como ya hemos dicho, este resultado mejora la cota $\text{spc}(T) \leq \lceil 2h_1(T)/3 \rceil + 2$ planteada por Foucaud y Kovše en 2013 [6, Teorema 17].

Teorema 6.1. *Si T es un árbol H.I. distinto de $K_{1,3}$, entonces:*

$$\text{spc}(T) = \lceil 2h_1(T)/3 \rceil.$$

Además, $\text{spc}(K_{1,3}) = 3$.

Comenzaremos analizando el número de separación del árbol $K_{1,3}$ y en lo que sigue se considerará un caso particular y lo excluirémos de los resultados generales.

Lema 6.2. Sea $K_{1,3}$ el árbol correspondiente a la estrella de 3 hojas, se tiene $\text{spc}(K_{1,3}) = 3$.

Demostración. Sean a, b y c las 3 hojas de $K_{1,3}$ y d el padre de las hojas. Para la cota inferior, consideraremos el hecho de que $K_{1,3}$ tiene 4 vértices, y para separar 4 vértices necesitamos al menos 3 caminos por Observación 4.2. Por otro lado, para la cota superior, sea $T = K_{1,3}$, consideramos la familia compuesta por los siguientes 3 caminos: $P = aTb$, $Q = bTc$, y $S = cTa$. Notar que por a pasa el camino P y S , por b pasan los caminos P y Q , por c pasan los caminos Q y S y por d pasan los caminos P, Q y S . En la Figura 6.1 presentamos gráficamente $K_{1,3}$ y los caminos que lo cubren y separan. \square

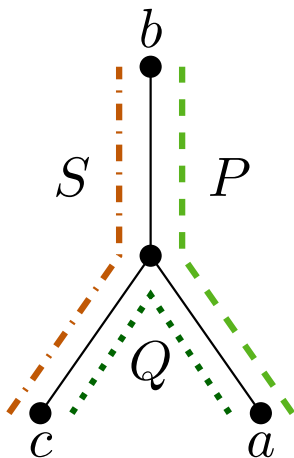


Figura 6.1: Separación de árbol $T = K_{1,3}$ con 3 caminos: $P = aTb$, $Q = aTc$, y $S = bTc$.

Antes de demostrar el Teorema 6.1, presentaremos una propiedad de las gaviotas que nos será útil para la cota superior.

Lema 6.3. Sea T un árbol. Dadas tres hojas de T y X el conjunto de padres de estas hojas, siempre existe una gaviota que cubre y separa las tres hojas entre sí, así como los elementos de X entre sí.

Demostración. Sean a, b y c tres hojas diferentes de T . Llamaremos X al conjunto de padres de las hojas a, b y c . Existen dos casos posibles:

Caso 1: Existen dos hojas, sin pérdida de generalidad, digamos, a y c , tal que el (a, c) -camino contiene al padre de b . En este caso la gaviota que construiremos es la (a, b, c) -gaviota con los

caminos $P = aTb$ y $Q = bTc$. Notar que por a y su padre pasa el camino P , por b y su padre pasan los caminos P, Q y por c y su padre pasa el camino Q . De esta forma, tanto las hojas como los padres están separados entre sí.

Caso 2: Para ningún par de hojas existe un camino entre ellas que contiene al padre de la hoja restante. el (a, c) -camino no pasa por el padre de b , el (a, b) -camino no pasa por el padre de c y el (b, c) -camino no pasa por el padre de a . En este caso cualquier gaviota satisface la condición. Consideremos por ejemplo la (a, b, c) -gaviota, y llamemos a los caminos P y Q . Por a y su padre pasa el camino P , por b y su padre pasan los caminos P, Q y por c y su padre pasa el camino Q .

De esta forma, en ambos casos existe al menos una gaviota que cubre y separa las hojas y a los elementos de X . □

Basándonos en el lema anterior y utilizando la Construcción 5.2, demostraremos una cota superior para árboles sin vértices de grado dos.

Lema 6.4. *Si T es un árbol sin vértices de grado dos distinto a $K_{1,3}$, entonces*

$$\text{spc}(T) \leq \left\lceil \frac{2h_1(T)}{3} \right\rceil.$$

Demostración. La idea consiste en realizar una poda al árbol, construyendo un árbol auxiliar con solo racimos de tamaño 2 y 3. Aplicamos la construcción y luego realizamos gaviotas para separar los vértices faltantes.

Construiremos el árbol auxiliar T' en dos pasos:

Primero, eliminaremos todos los racimos de tamaño 1. Para ello, consideremos h como la hoja del racimo y p como su padre. Dependiendo del grado del padre, realizaremos la poda de la siguiente forma:

- Si $d(p) = 3$ cortamos h y p , y añadimos una arista entre los vecinos restantes de p . En la figura 6.2 se presenta un ejemplo de esta poda.
- Si $d(p) \geq 4$ cortamos únicamente h . En la Figura 6.3 se presenta un ejemplo de esta poda.

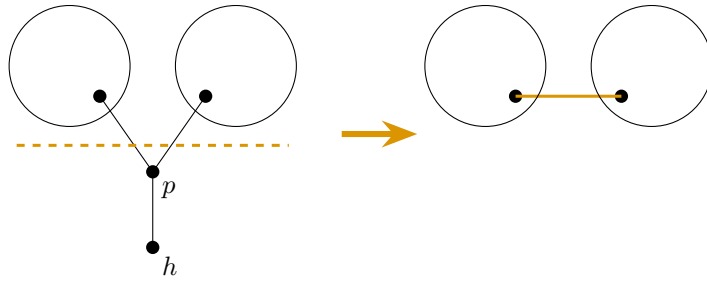


Figura 6.2: Poda en racimo de tamaño 1 primer caso

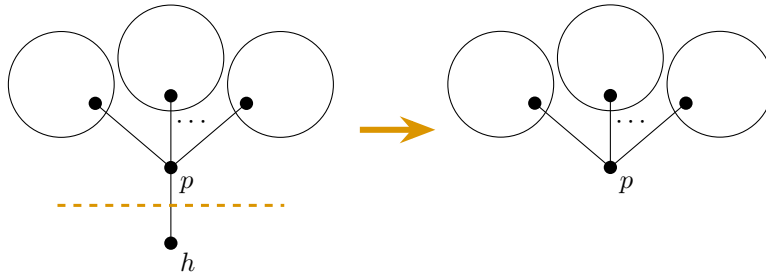


Figura 6.3: Poda en racimo de tamaño 1 segundo caso

Al conjunto de hojas eliminadas en este paso lo denominamos L_1 .

Luego, reducimos la cantidad de hojas de cada racimo para que tengan tamaño a lo más 3. Para ello, por cada racimo de tamaño mayor a 3, seleccionamos un conjunto de hojas de tamaño 3 y eliminamos las hojas restantes. Denominamos L_2 al conjunto de hojas borradas en este último paso.

De esta manera, todos los racimos de T' tienen tamaño 2 ó 3 y no hay vértices de grado 2.

Aplicamos la Construcción 5.2 en T' , obteniendo una familia de caminos \mathcal{F}' de tamaño $\lceil 2h_1(T')/3 \rceil$. Por el Lema 5.6 sabemos que la familia de caminos \mathcal{F}' cubre y separa $V(T')$. Además, esta familia considera a lo más un camino que comienza en una hoja y termina en su padre o abuelo. Si existe este camino, lo llamamos P .

Construiremos una familia de caminos \mathcal{F} en T . Para ello, incluiremos en \mathcal{F} todos los caminos de \mathcal{F}' . En general, todo camino de \mathcal{F}' corresponde naturalmente a un camino en T , ya que todos los vértices de T' están definidos en T . En el caso en que un camino de \mathcal{F}' pase por la arista añadida al eliminar el vértice padre de un racimo de tamaño 1 en T' , su correspondiente camino

en T pasará por dicho vértice eliminado. Luego, añadiremos nuevos caminos a \mathcal{F} para separar los vértices no cubiertos de T .

Los vértices no cubiertos en T luego del paso anterior, son aquellas hojas que fueron eliminadas de T al construir T' .

Sea $L = L_1 \cup L_2$ el conjunto de hojas que faltan por cubrir, y sea k su tamaño. Para separarlas, agruparemos las hojas de L en grupos de a 3, dejando un grupo de tamaño 1 ó 2 si es necesario. En los grupos de tamaño 3, construiremos gaviotas. Por el Lema 6.3, sabemos que siempre existe una gaviota que cubre y separa las hojas entre sí, así como al conjunto de padres entre sí.

En caso de que exista un grupo de tamaño 1 ó 2, cubriremos y separaremos las hojas restantes de la siguiente manera:

Si no existe P , construimos por cada hoja del grupo restante el camino entre la hoja y su padre o abuelo en caso de existir. Notar que en este caso $h_1(T') \equiv 0 \pmod{3}$, y por lo tanto, $\text{spc}(T) \leq 2h_1(T')/3 + \lceil 2k/3 \rceil = \lceil 2h_1(T)/3 \rceil$

Si existe P y la hoja por la que pasa está únicamente cubierta, tenemos dos casos: si el grupo restante tiene solo una hoja, extenderemos P hasta la hoja sobrante y añadimos el camino entre la hoja y su padre o abuelo en caso de existir; si el grupo restante tiene dos hojas, extendemos P hasta una hoja del grupo y añadimos el camino entre las dos hojas. Notar que en el primer caso, se tiene $h_1(T') \equiv 1 \pmod{3}$ y $k \equiv 1 \pmod{3}$, esto implica que $h_1(T) \equiv 2 \pmod{3}$, por lo tanto, $\text{spc}(T) \leq \lceil 2h_1(T')/3 \rceil + 2(k-1)/3 + 1$ lo cual podemos reescribir como $2(h_1(T') - 1)/3 + 1 + 2(k-1)/3 + 1 = 2(h_1(T') + k)/3 + 1/3$. Como $h_1(T) \equiv 2 \pmod{3}$, se tiene $2(h_1(T') + k)/3 + 1/3 \leq \lceil 2h_1(T)/3 \rceil$. En el segundo caso, se tiene $h_1(T') \equiv 1 \pmod{3}$ y $k \equiv 2 \pmod{3}$, por lo tanto, $\text{spc}(T) \leq \lceil 2h_1(T')/3 \rceil + 2(k-2)/3 + 1$ lo que es equivalente a $2(h_1(T') - 1)/3 + 1 + 2(k-2)/3 + 1 = 2(h_1(T') + k)/3 \leq \lceil 2h_1(T)/3 \rceil$.

Si existe P y la hoja por la que pasa está doblemente cubierta, tenemos dos casos. Si el grupo restante tiene solo una hoja, extendemos P hasta la hoja. Si el grupo restante tiene dos hojas, extendemos P hasta una de las hojas del grupo restante y añadimos el camino entre la otra hoja y su padre o abuelo en caso de existir. En ambos casos se tiene $h_1(T') \equiv 2 \pmod{3}$. En el primer caso se tiene $k \equiv 1 \pmod{3}$, por lo tanto, $\text{spc}(T) \leq (2h_1(T') - 2)/3 +$

$2 + 2(k - 1)/3 = 2(h_1(T') + k)/3 + 2 - 6/3 \leq \lceil 2h_1(T)/3 \rceil$. En el segundo caso se tiene $k \equiv 2$ (mód 3), por lo tanto, $\text{spc}(T) \leq 2(h_1(T') - 2)/3 + 2 + 2(k - 2)/3 + 1$, lo cual es equivalente a $2(h_1(T') + k)/3 + 3 - 8/3 = 2h_1(T)/3 + 1/3$, y como en este caso $h_1(T) \equiv 1$ (mód 3), se tiene $2h_1(T)/3 + 1/3 \leq \lceil 2h_1(T)/3 \rceil$.

De esta forma \mathcal{F} cubre $V(T)$, y en todos los casos, se tiene $|\mathcal{F}| \leq \lceil 2h_1(T)/3 \rceil$.

Por último, veamos que \mathcal{F} separa $V(T)$. Los vértices de T que no fueron eliminados al construir T' están cubiertos y separados por los caminos de \mathcal{F}' que fueron incorporados a \mathcal{F} ; llamemos V_1 al conjunto de estos vértices. Por otro lado, los vértices que fueron eliminados al construir T' , fueron separados con gaviotas que cubren y separan a las hojas entre sí y al conjunto de padres entre sí; llamemos V_2 al conjunto de estos vértices. Por lo tanto, solo resta verificar que los vértices de V_1 estén separados de los vértices de V_2 .

Notar que los vértices de V_2 corresponden a hojas o a padres de racimos de tamaño 1. Si $v \in V_2$ es hoja, entonces por v no pasa ningún camino de los que fueron añadidos directamente de \mathcal{F}' , por ende, v está separado de todo vértice de V_1 .

Supongamos ahora que $v \in V_2$ es el padre de un racimo de tamaño 1. Procedamos por contradicción: supongamos que existe $u \in V_1$ tal que u y v no están separados. En este caso, como u estaba definido en T' , la única opción es que u sea vecino de v , y como v es padre de un racimo de tamaño 1, u debe tener grado al menos 3. En tal caso, u debe ser padre de un racimo de tamaño 2, ya que de no ser así, por las propiedades de la Construcción 5.2, existiría un camino entre las componentes vecinas de u que no contienen a v y, por ende, estarían diferenciados. Luego, si por v pasa una gaviota añadida para cubrir la hoja descendiente de v , dicha gaviota no pasará por u y por ende, v y u estarán diferenciados. Si la hoja descendiente de v no fue cubierta por gaviotas, entonces existirá un camino entre la hoja y su padre, v , que tampoco pasará por u . □

La demostración del Teorema 6.1 es un resultado directo de Lema 4.1 que plantea la cota inferior y Lema 6.4 que presenta la cota superior. Notar que en el caso de árboles H.I. no hay vértices de grado dos y, por ende, no hay patillas. Luego, ambas cotas son exactamente $\lceil 2h_1(T)/3 \rceil$.

Árboles homeomórficamente irreducibles parcialmente internamente subdivididos sin racimos de tamaño 1

En este capítulo presentamos resultados obtenidos sobre el número de separación de árboles H.I.P.I.S. sin racimos de tamaño 1. Estos resultados se dividen en dos secciones: una dedicada al estudio de las familias de árboles H.I.P.I.S. sin racimos de tamaño 1 ni patillas, y otra que analiza los árboles H.I.P.I.S. sin racimos de tamaño 1 pero con patillas.

El objetivo principal es demostrar el siguiente teorema.

Teorema 7.1. *Si T es un árbol H.I.P.I.S. sin racimos de tamaño 1 y distinto de $K_{1,3}$, entonces*

$$\text{spc}(T) = \left\lceil \frac{2h_1(T) + r_2^*(T)}{3} \right\rceil.$$

7.1. Árboles con racimos de tamaño al menos 2 y sin patillas.

El siguiente lema presenta una extensión del Lema 5.6 para árboles con racimos de tamaño al menos 2 pero sin patillas.

Lema 7.2. *Si T es un árbol H.I.P.I.S. con racimos de tamaño al menos dos pero sin patillas y distinto de $K_{1,3}$, entonces*

$$\text{spc}(T) \leq \lceil 2h_1(T)/3 \rceil.$$

Además, existe una familia de caminos \mathcal{F} que cubre y separa $V(T)$ tal que $|\mathcal{F}| = \lceil 2h_1(T)/3 \rceil$ y tiene las siguientes propiedades:

- (I) *Cada racimo de tamaño al menos 3 tiene un camino que comienza y termina en el racimo.*
- (II) *Cada racimo de tamaño 3 tiene dos hojas únicamente cubiertas y una hoja doblemente cubierta. Los caminos que pasan por la hoja doblemente cubierta, consideran un camino que tiene un final de camino en una hoja de otro racimo, y un camino que termina en la segunda hoja del mismo racimo.*
- (III) *Contiene al menos un camino entre cada racimo y el racimo siguiente.*
- (IV) *Considera a lo más un camino que comienza en una hoja y termina en su padre o abuelo. Este camino está en el primer racimo o en un racimo de tamaño 2.*
- (V) *Si el camino que comienza en una hoja y termina en su padre pasa por una hoja únicamente cubierta, entonces $h_1(T) \equiv 1 \pmod{3}$.*
- (VI) *Si el camino que comienza en una hoja y termina en su padre pasa por una hoja doblemente cubierta, entonces $h_1(T) \equiv 2 \pmod{3}$.*

Para demostrar el Lema, consideraremos un árbol auxiliar T' obtenido de eliminar hojas de T hasta obtener un árbol con solo racimos de tamaño 2 ó 3. Sobre este árbol T' , aplicaremos la Construcción 5.2. Posteriormente, determinaremos los caminos adicionales necesarios para garantizar la separación de los vértices eliminados.

Demostración. Sea T un árbol H.I.P.I.S. con racimos de tamaño al menos dos y sin patillas. Sea T' el árbol auxiliar obtenido de la siguiente forma: por cada racimo de tamaño r en T seleccionamos un conjunto de hojas de tamaño $\min\{r, 3\}$ y eliminamos el resto de hojas. Notar que T' es un árbol compuesto únicamente por racimos de tamaño 2 ó 3. Sea k la cantidad de hojas eliminadas, se tiene que $h_1(T') = h_1(T) - k$.

Aplicamos la Construcción 5.2 en T' , obteniendo una familia de caminos \mathcal{F}' . Por el Lema 5.6, sabemos que la familia de caminos \mathcal{F}' cubre y separa $V(T')$ y $|\mathcal{F}'| = \lceil 2h_1(T')/3 \rceil = \lceil 2(h_1(T) - k)/3 \rceil$. Además, esta familia considera a lo más un camino que comienza en una hoja y termina en su padre; si tal camino existe, lo denotaremos por P .

Incluimos todos los caminos de \mathcal{F}' en \mathcal{F} , lo que cubre y separa todos los vértices de T excepto las k hojas que fueron eliminadas. Para separarlas, las agrupamos de a 3 y, si es necesario, formamos un grupo de tamaño 1 ó 2. En los grupos de tamaño 3, construimos gaviotas.

Luego, cubrimos y separamos las hojas que faltan por cubrir de la siguiente forma:

Si no existe P , construimos por cada hoja del grupo restante el camino entre la hoja y su padre o abuelo en caso de existir. Notar que en este caso $h_1(T') \equiv 0 \pmod{3}$, y por lo tanto, $\text{spc}(T) \leq 2h_1(T')/3 + \lceil 2k/3 \rceil = \lceil 2h_1(T)/3 \rceil$

Si existe P y la hoja por la que pasa está únicamente cubierta, tenemos dos casos: si el grupo restante tiene solo una hoja, extenderemos P hasta la hoja sobrante y añadimos el camino entre la hoja y su padre o abuelo en caso de existir; si el grupo restante tiene dos hojas, extendemos P hasta una hoja del grupo y añadimos el camino entre las dos hojas. Notar que en el primer caso $h_1(T') \equiv 1 \pmod{3}$ y $k \equiv 1 \pmod{3}$, esto implica que $h_1(T) \equiv 2 \pmod{3}$, por lo tanto, $\text{spc}(T) \leq \lceil 2h_1(T')/3 \rceil + 2(k-1)/3 + 1$ lo cual podemos reescribir como $2(h_1(T') - 1)/3 + 1 + 2(k-1)/3 + 1 = 2(h_1(T') + k)/3 + 1/3$. Como $h_1(T) \equiv 2 \pmod{3}$, se tiene $2(h_1(T') + k)/3 + 1/3 \leq \lceil 2h_1(T)/3 \rceil$. En el segundo caso, se tiene $h_1(T') \equiv 1 \pmod{3}$ y $k \equiv 2 \pmod{3}$, por lo tanto, $\text{spc}(T) \leq \lceil 2h_1(T')/3 \rceil + 2(k-2)/3 + 1$ lo que es equivalente a $2(h_1(T') - 1)/3 + 1 + 2(k-2)/3 + 1 = 2(h_1(T') + k)/3 \leq \lceil 2h_1(T)/3 \rceil$.

Si existe P y la hoja por la que pasa está doblemente cubierta, tenemos dos casos. Si el grupo restante tiene solo una hoja, extendemos P hasta la hoja. Si el grupo restante tiene dos hojas, extenderemos P hasta una de las hojas del grupo restante y añadimos el camino

entre la otra hoja y su padre o abuelo en caso de existir. En ambos casos se tiene $h_1(T') \equiv 2$ (mód 3). En el primer caso se tiene $k \equiv 1$ (mód 3), por lo tanto, $\text{spc}(T) \leq 2h_1(T' - 2)/3 + 2 + 2(k - 1)/3 = 2(h_1(T') + k)/3 + 2 - 6/3 \leq \lceil 2h_1(T)/3 \rceil$. En el segundo caso se tiene $k \equiv 2$ (mód 3), por lo tanto, $\text{spc}(T) \leq 2(h_1(T') - 2)/3 + 2 + 2(k - 2)/3 + 1$, lo cual es equivalente a $2(h_1(T') + k)/3 + 3 - 8/3 = 2h_1(T)/3 + 1/3$, y como en este caso $h_1(T) \equiv 1$ (mód 3), se tiene $2h_1(T)/3 + 1/3 \leq \lceil 2h_1(T)/3 \rceil$.

Así, en todos los casos se tiene $\text{spc}(T) \leq \lceil 2h_1(T)/3 \rceil$.

El ítem (i) y el ítem (iii) se obtienen del hecho de que todo racimo de tamaño al menos 3 es reducido a un racimo de tamaño 3 en T' . Por ítem iv del Corolario 5.4 sabemos que por cada racimo de tamaño 3 existirá un camino en \mathcal{F} que comienza y termina en el racimo, con exactamente una hoja doblemente cubierta y dos hojas únicamente cubiertas, una de ellas es la segunda hoja. Los caminos que pasan por la hoja doblemente cubierta, consideran un camino que tiene un final de camino en una hoja de otro racimo, y un camino que termina en la segunda hoja del mismo racimo.

El ítem (iii) se obtiene directamente del ítem v del Corolario 5.4. Mientras que ítem (iv) dependerá del caso. Notar que si T es un árbol con solo racimos de tamaño 2 ó 3 o k es múltiplo de 3, el ítem (iv) es un resultado directo del ítem i del Corolario 5.4. Si k no es múltiplo de 3, entonces el camino descrito en el ítem (iv) corresponde al camino añadido al modificar P en cada caso. Así mismo, el ítem (v) y el ítem (vi) son resultado directo del ítem ii y el ítem iii del Corolario 5.4. \square

7.2. Árboles con racimos de tamaño al menos 2 con patillas

Dado que para separar las patillas necesitamos un final de camino adicional para separar al padre del abuelo, debemos añadir algunos caminos. La idea consiste en construir un árbol auxiliar T' añadiendo a la mitad de las patillas una hoja. Luego, basándonos en el Lema 7.2 definiremos una familia de caminos \mathcal{F}' para T' . Finalmente, modificaremos los caminos que

pasan por las hojas añadidas para separar los vértices no separados de T . En particular, los vértices no separados son los padres y abuelos de las patillas.

Consideraremos dos casos, el caso en que la cantidad de patillas es par y el caso en que la cantidad de patillas es impar.

7.2.1. Cantidad par de patillas

El objetivo de esta sección es demostrar el siguiente lema.

Lema 7.3. *Si T es un árbol H.I.P.I.S. con racimos de tamaño al menos dos y cantidad par de patillas, entonces*

$$\text{spc}(T) \leq \left\lceil \frac{2h_1(T) + r_2^*(T)}{3} \right\rceil.$$

Demostración. Sea T un árbol H.I.P.I.S. con racimos de tamaño al menos dos y cantidad par de patillas. Construiremos una familia de caminos separadores como sigue.

Paso 1. Enumeramos los racimos mediante DFS, siguiendo la Observación 2.2, como R_1, R_2, \dots, R_l , comenzando por un racimo de tamaño 2 y las hojas de un racimo R_i las enumeramos como $h_i^1, h_i^2, \dots, h_i^k$, con $k \in \mathbb{N}$.

En la Figura 7.3a se muestra un ejemplo de este paso aplicado en un árbol de 8 racimos.

Paso 2. Construimos un árbol auxiliar T' añadiendo en la mitad de las patillas una hoja, siguiendo el orden de enumeración agregaremos una hoja a las patillas de forma intercalada comenzando en la segunda patilla. Es decir, si agregamos una hoja en una patilla, a la siguiente en el orden de numeración no la modificamos, y así sucesivamente. En la Figura 7.1 se presenta un ejemplo gráfico de esta modificación. Por otro lado, eliminaremos el abuelo de las patillas que no fueron modificadas, incorporando la arista entre sus vecinos. En la Figura 7.2 se presenta gráficamente esta modificación.

De esta forma, T' es un árbol sin patillas con racimos de tamaño al menos dos, tal que $h_1(T') = h_1(T) + r_2^*(T)/2$.

En la Figura 7.3b se presenta un ejemplo de este paso aplicado en un árbol.

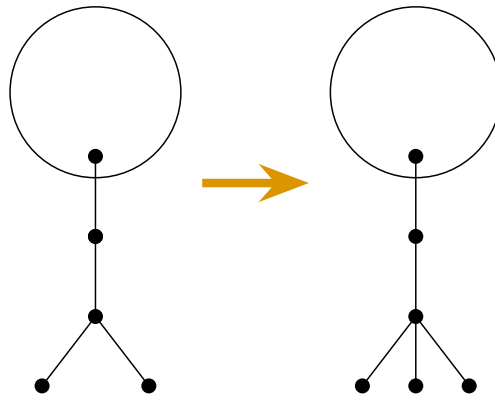


Figura 7.1: Ejemplo de patilla a la que agregamos una hoja.

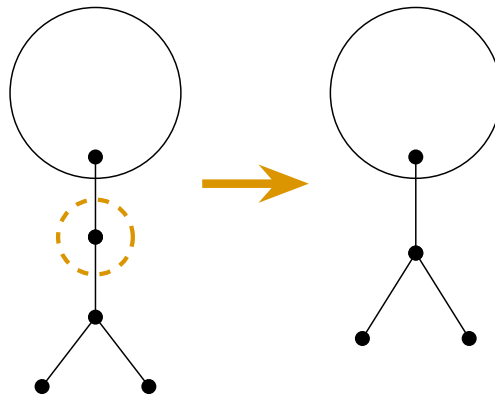


Figura 7.2: Ejemplo de eliminación del abuelo de una patilla.

Paso 3. Construimos una familia separadora para T' . Por el Lema 7.2 sabemos que existe una familia de caminos \mathcal{F}' que cubre y separa los vértices de T' , con $|\mathcal{F}'| \leq \lceil 2h_1(T')/3 \rceil$.

En las Figuras 7.3c, 7.3d, 7.3e, 7.3f, 7.3g, 7.3h, 7.3i se presenta a modo de ejemplo este paso aplicado en un árbol particular.

Paso 4. Construimos una familia \mathcal{F} de caminos para T . Para ello, incluiremos en \mathcal{F} todos los caminos de \mathcal{F}' realizando las siguientes modificaciones.

- Por cada racimo de tamaño 3 construido a partir de una patilla, por el punto (i) del Lema 7.2, existirá un camino que comienza y termina en el racimo y existirán dos hojas únicamente cubiertas. Una de ellas es la segunda hoja, y una hoja doblemente cubierta. Digamos que u es la hoja doblemente cubierta del racimo. Los caminos que pasan por u consideran un camino P que tiene un final de camino en una hoja w de otro racimo, y un

camino Q que termina en la segunda hoja del racimo. Por cada racimo R_i de tamaño 3 construidos a partir de una patilla, modificaremos P como el camino entre w y el abuelo del racimo R_i . Y modificaremos Q como el camino entre u y el abuelo de la patilla siguiente.

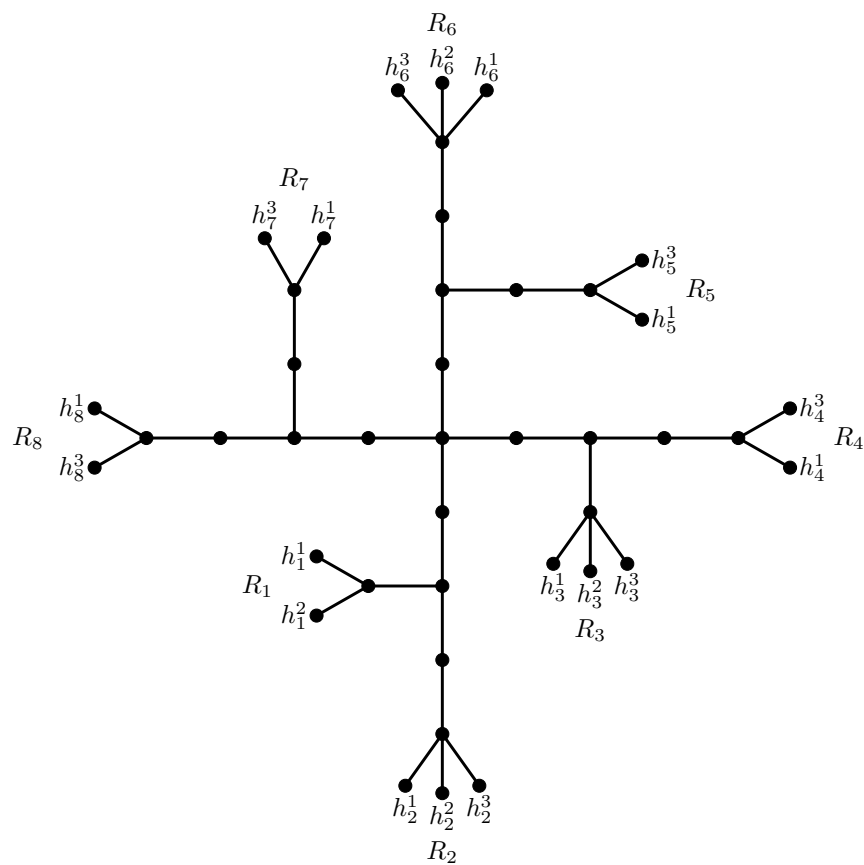
- Eliminamos las hojas que fueron añadidas.

En la Figura 7.3j presentamos un ejemplo de este paso aplicado en un árbol.

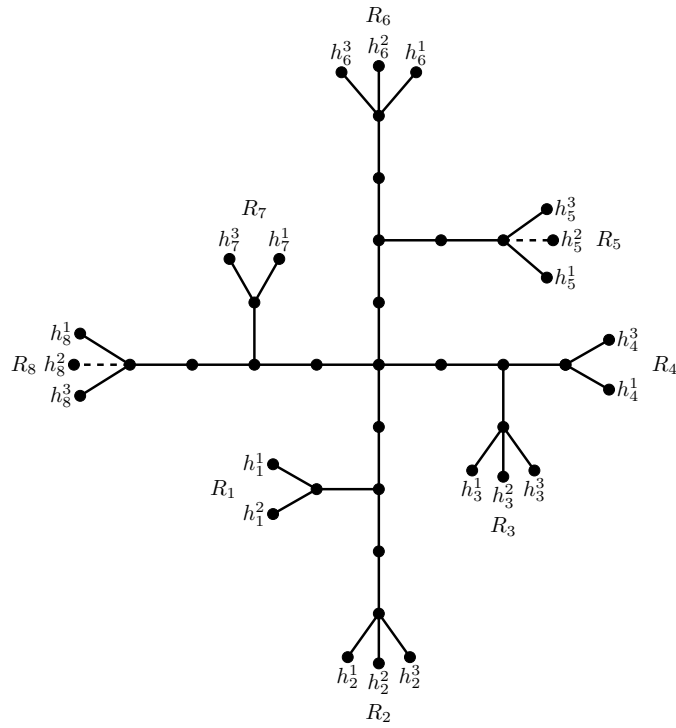
Notar que con estas modificaciones se logra cubrir y separar los abuelos y los padres de las patillas, dado que en cada abuelo termina un camino que no pasa por el padre vecino a este abuelo. El resto de vértices de T son un vértice en T' , y por ende están cubiertos y separados por los caminos de \mathcal{F}' . De esta forma, todos los vértices de T están cubiertos y separados.

La cantidad de caminos utilizada para cubrir y separar T es $\lceil 2h_1(T')/3 \rceil = \lceil (2h_1(T) + r_2^*(T))/3 \rceil$. □

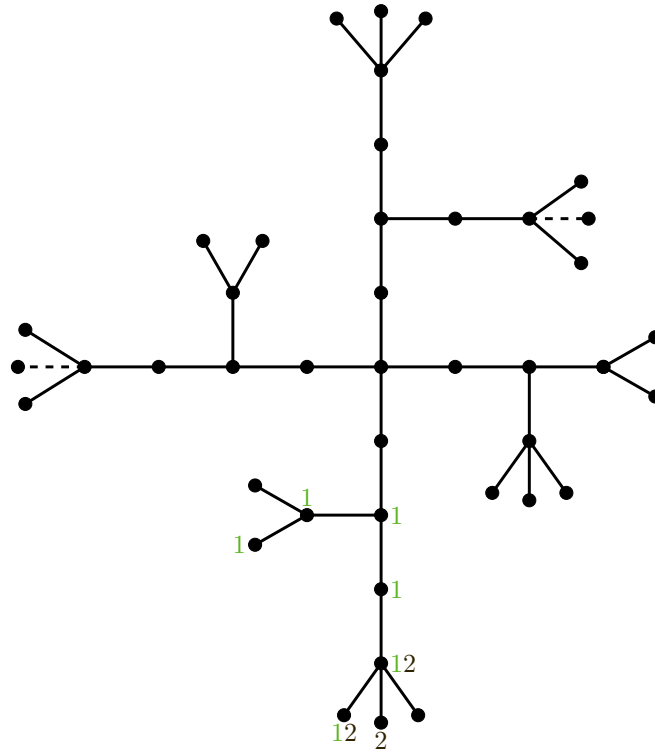
En la Figura 7.3 presentamos un ejemplo de cubrimiento y separación en un árbol H.I.P.I.S. con cantidad par de patillas.



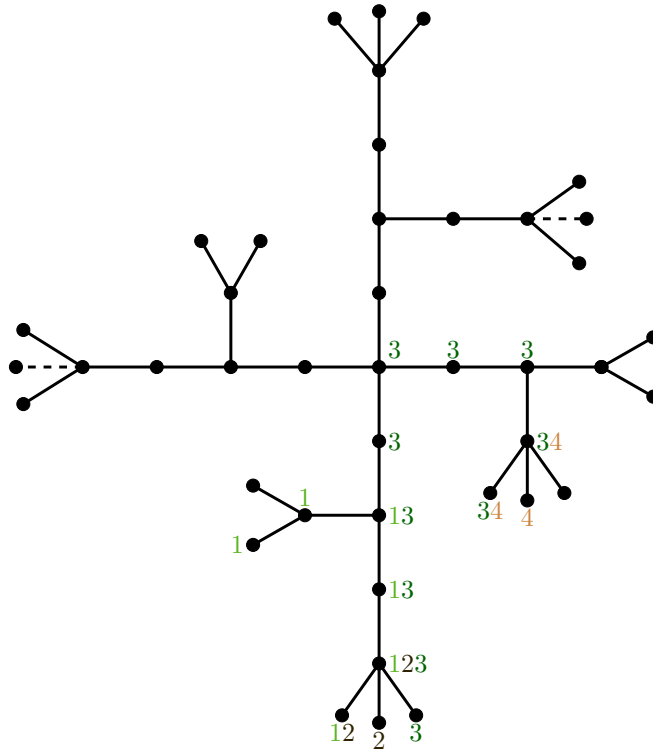
(a) Paso 1: enumeración de hojas y racimos en T .



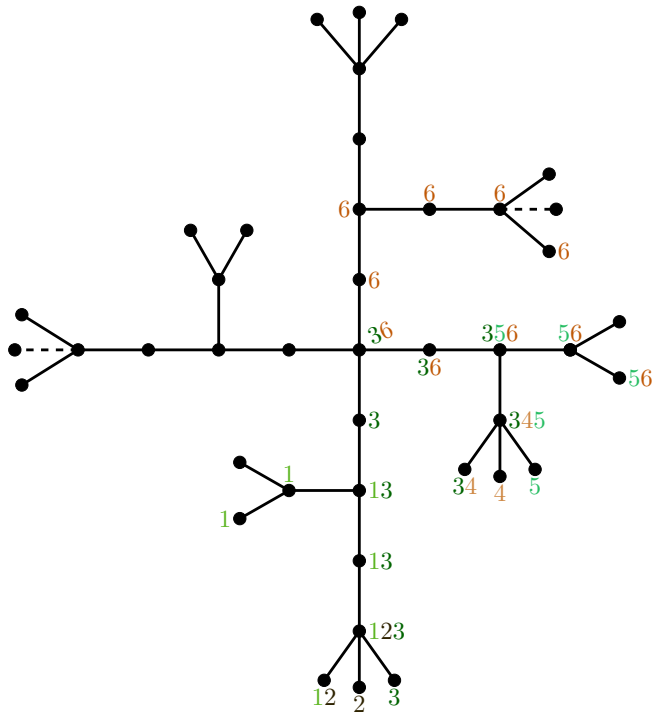
(b) Paso 2: construcción de T'



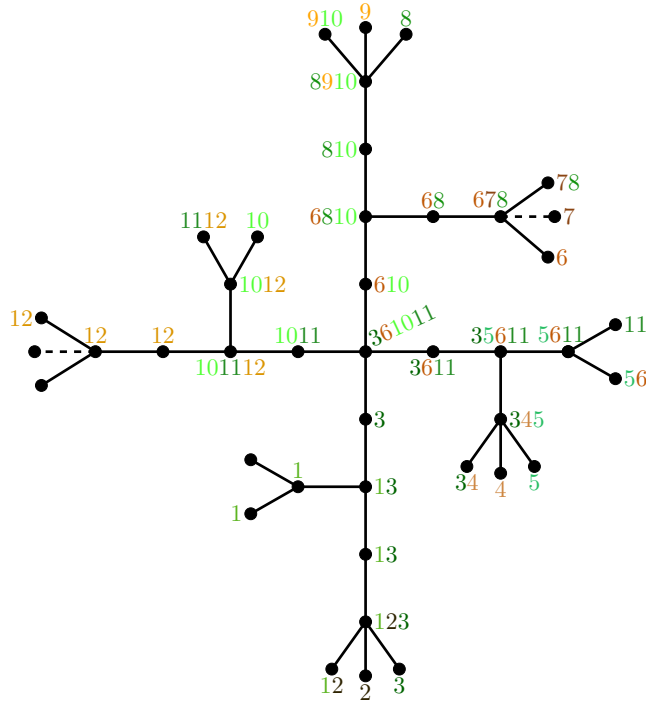
(c) Paso 3: Construcción de la Familia de caminos dada por Lema 7.2 en T' , primera iteración.



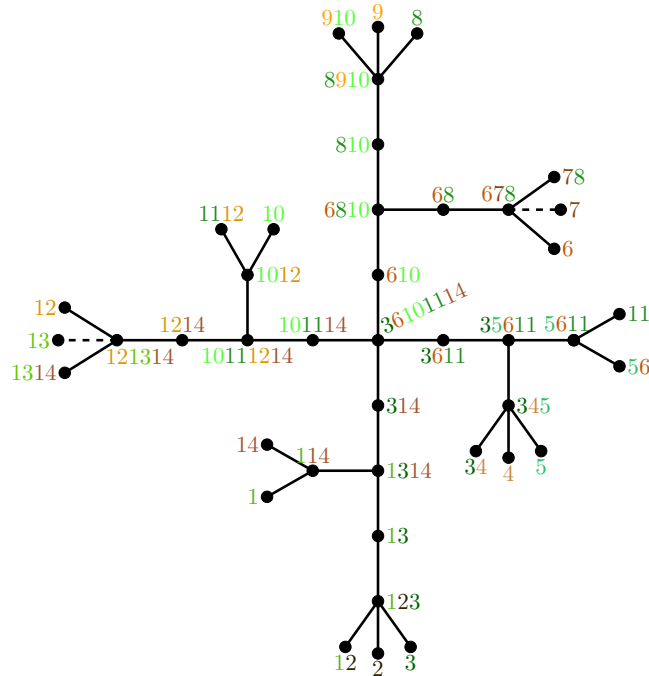
(d) Paso 3: Construcción de la Familia de caminos dada por Lema 7.2 en T' , segunda iteración.



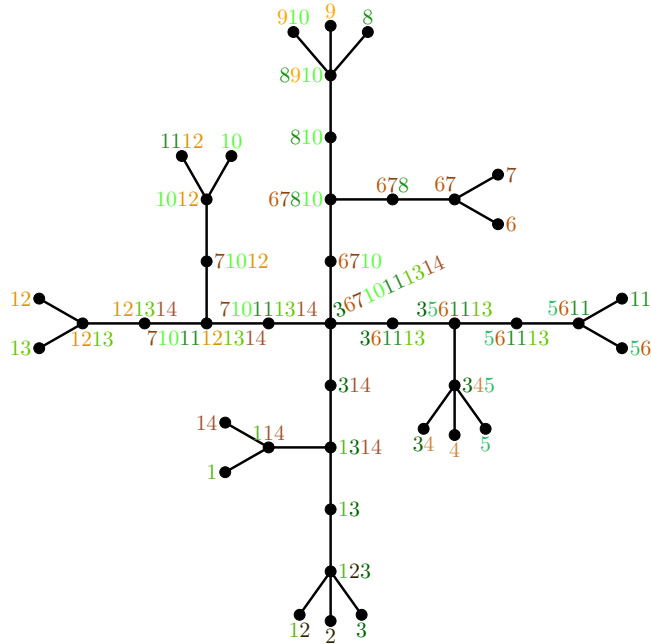
(e) Paso 3: Construcción de la Familia de caminos dada por Lema 7.2 en T' , tercera iteración.



(h) Paso 3: Construcción de la Familia de caminos dada por Lema 7.2 en T' , sexta iteración.



(i) Paso 3: Construcción de la Familia de caminos dada por Lema 7.2 en T' , séptima iteración.



(j) Paso 4: Modificamos los caminos en T' para separar T .

Figura 7.3: Ejemplo por pasos en árbol con cantidad par de patillas. Representamos cada camino con un número y color. En este caso T tiene 8 racimos, de los cuales 4 son patillas. En el primer paso se enumeran acorde al DFS, los racimos y sus hojas. En el segundo paso, se construye T' agregando hojas a las patillas de los racimos R_5 y R_8 , y eliminando el abuelo en las patillas R_4 y R_7 . En el paso 3, en la primera iteración construimos la primera gaviota, en este caso $a_1 = h_1^2$, y como la hoja siguiente es la primera hoja de un racimo de tamaño tres, b_1, c_1 corresponden a las hojas h_2^1 y h_2^2 . Como R_2 es de tamaño 3, en la segunda iteración, la segunda gaviota comienza en el mismo racimo en la primera hoja descubierta, por lo que se tiene $a_2 = h_3^3$, $b_2 = h_3^1$ y $c_3 = h_3^2$. Como la segunda gaviota termina en un racimo de tamaño 3, la siguiente gaviota comienza en la primera hoja descubierta del racimo, lo cual corresponde a elegir $a_4 = h_3^3$, $b_4 = h_4^1$ y $c_4 = h_5^1$, dado que R_4 es de tamaño 2. Y se continúa iterando la construcción de gaviotas, en este caso, hasta que quedan 0 hojas. En el paso 4, volvemos a T , ajustamos los caminos construimos para T' para separar todos los padres y abuelos de patillas en T .

7.2.2. Cantidad impar de patillas

El objetivo de esta sección es demostrar el siguiente lema.

Lema 7.4. *Si T es un árbol H.I.P.I.S. con racimos de tamaño al menos dos y cantidad impar de patillas, entonces*

$$\text{spc}(T) \leq \left\lceil \frac{2h_1(T) + r_2^*(T)}{3} \right\rceil.$$

Demostración. La idea es similar al caso anterior, pero debemos realizar los ajustes necesarios para el caso impar. Sea T un árbol H.I.P.I.S. con racimos de tamaño al menos dos y cantidad impar de patillas. Replicando la idea del caso par, seguiremos los siguientes pasos.

Paso 1. Enumeramos los racimos mediante DFS como R_1, R_2, \dots, R_l , comenzando por un racimo de tamaño 2. Las hojas de un racimo R_i las enumeramos como $h_i^1, h_i^2, \dots, h_i^k$.

Paso 2. Construiremos un árbol auxiliar T' añadiendo en $\lfloor r_2^*/2 \rfloor$ patillas una hoja, siguiendo el orden de enumeración agregaremos una hoja a las patillas de forma intercalada comenzando en la segunda patilla. Es decir, si agregamos una hoja en una patilla, a la siguiente en el orden de numeración no la modificamos, y así sucesivamente. Por otro lado, eliminaremos el abuelo de las patillas que no fueron modificadas, incorporando la arista entre sus vecinos. Ambas modificaciones se presentan gráficamente en Figura 7.1 y en Figura 7.2.

De esta forma, T' es un árbol sin patillas con racimos de tamaño al menos dos y tal que $h_1(T') = h_1(T) + \lfloor r_2^*/2 \rfloor$.

Paso 3. Construimos una familia de caminos \mathcal{F}' para T' . Por el Lema 7.2 sabemos que existe una familia de caminos \mathcal{F}' que cubre y separa los vértices de T' , con $|\mathcal{F}'| \leq \lceil 2h_1(T')/3 \rceil$. Esta familia incluye a lo más un camino entre una hoja y su padre, si existe este camino, le llamaremos P_0 .

Paso 4. Construimos una familia de caminos \mathcal{F} para T a partir de \mathcal{F}' . Para ello, añadimos los caminos de \mathcal{F}' en \mathcal{F} con las siguientes modificaciones.

- (I) Por cada racimo de tamaño 3 construido a partir de una patilla, por el punto (I) del Lema 7.2, existirá un camino que comienza y termina en el racimo y existirán dos hojas únicamente cubiertas (una de ellas es la segunda hoja) y una hoja doblemente cubierta.

Digamos u es la hoja doblemente cubierta del racimo. Los caminos que pasan por u consideran un camino P que tiene un final de camino en una hoja w de otro racimo, y un camino Q que termina en la segunda hoja del racimo. Por cada racimo R_i de tamaño 3 construidos a partir de una patilla, modificaremos P como el camino entre w y el abuelo del racimo R_i . Y modificaremos Q como el camino entre u y el abuelo de la patilla siguiente. Esto cubre y separa los abuelos de los padres de $r_2^* - 1$ patillas.

- (II) Para separar el padre y abuelo de la patilla restante, llamemos R_j a esta patilla, estudiaremos los siguientes casos:

Si existe el camino P_0 que comienza en una hoja de un racimo y termina en su padre, se tiene que $h_1(T') \not\equiv 0 \pmod{3}$. Notar además, que por item (iv) del Lema 7.2 sabemos que P_0 está en un racimo de tamaño 2 o en R_l . Si P_0 está en R_j entonces, P_0 ya separa al padre del abuelo. Si P_0 está en otro racimo, lo extendemos desde la hoja en que comienza hasta el abuelo de la patilla R_j .

Si no existe P_0 , entonces $h_1(T') \equiv 0 \pmod{3}$, en este caso agregamos un camino desde la hoja no cubierta de R_j hasta su padre.

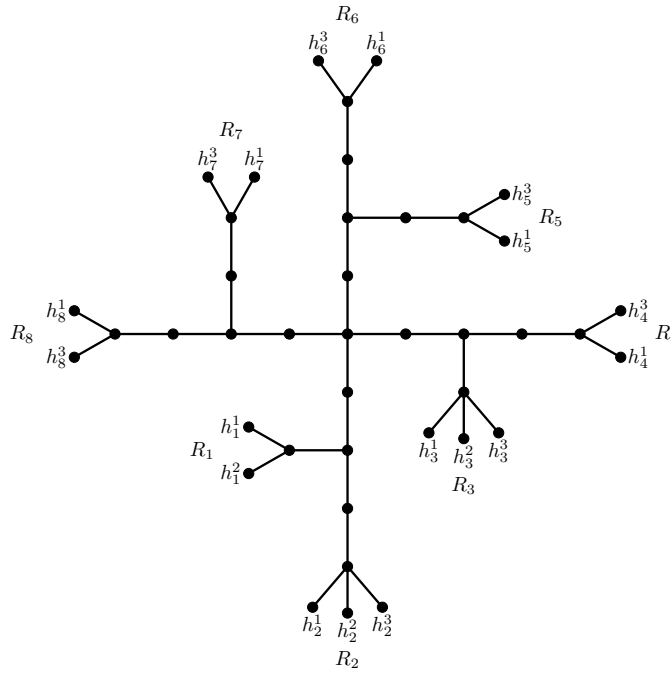
- (III) Eliminamos las hojas que fueron añadidas.

Notar que con estas modificaciones se logra cubrir y separar los abuelos y los padres de las patillas, dado que en cada abuelo termina un camino que no pasa por el padre vecino a este abuelo. Mientras que el resto de vértices de T también están en T' , por ende, estarán separados por los caminos de \mathcal{F}' que fueron añadidos. De esta forma, todos los vértices de T están cubiertos y separados.

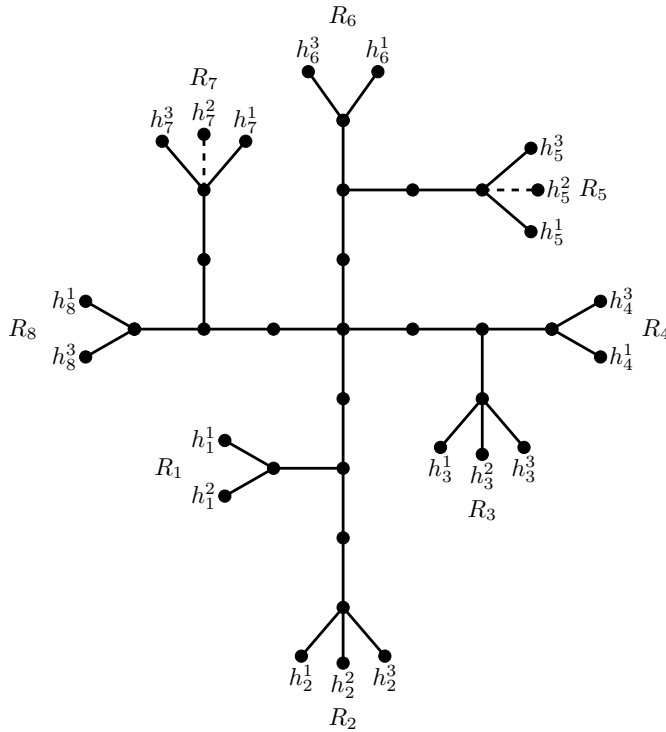
La cantidad de caminos utilizada para cubrir y separar T es $\lceil 2h_1(T')/3 \rceil = \lceil (2(h_1(T) + \lfloor r_2^*(T)/2 \rfloor))/3 \rceil \leq \lceil (2h_1(T) + r_2^*(T))/3 \rceil$. Notar que en el caso de haber adicionado un camino en el Paso (II), como $h_1(T') \equiv 0 \pmod{3}$, se tiene $|\mathcal{F}'| = 2h_1(T')/3$, lo que es equivalente a $(2(h_1(T) + \lfloor r_2^*(T)/2 \rfloor))/3 \leq (2(h_1(T) + \lfloor r_2^*(T)/2 \rfloor))/3$ y como r_2^* es impar, si añadimos un camino tendremos $|\mathcal{F}| \leq \lceil (2h_1(T) + r_2^*(T))/3 \rceil$. \square

En la Figura 7.4 presentamos un ejemplo de cubrimiento y separación en un árbol H.I.P.I.S.

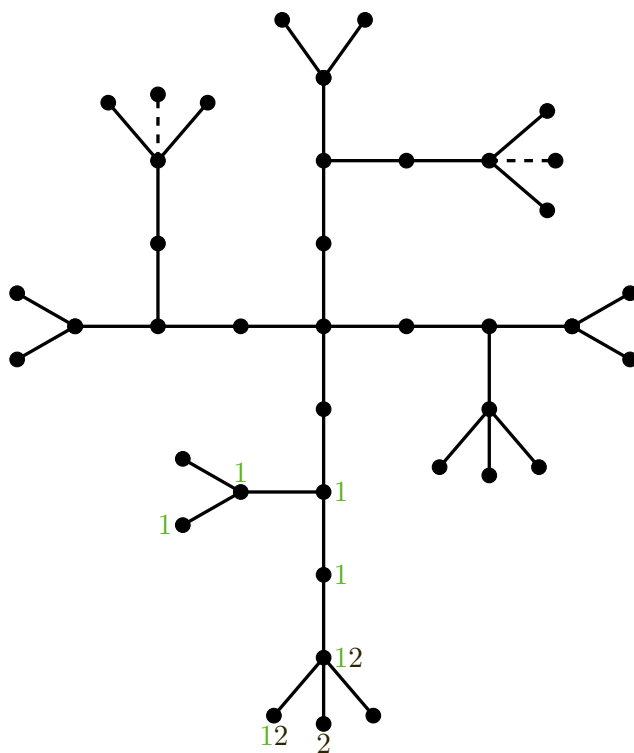
con cantidad impar de patillas.



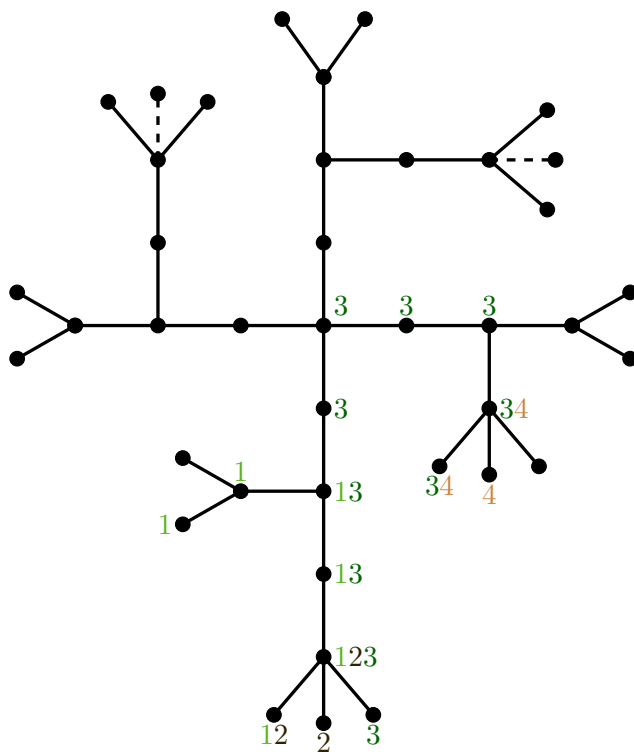
(a) Paso 1: enumeración de hojas y racimos en T .



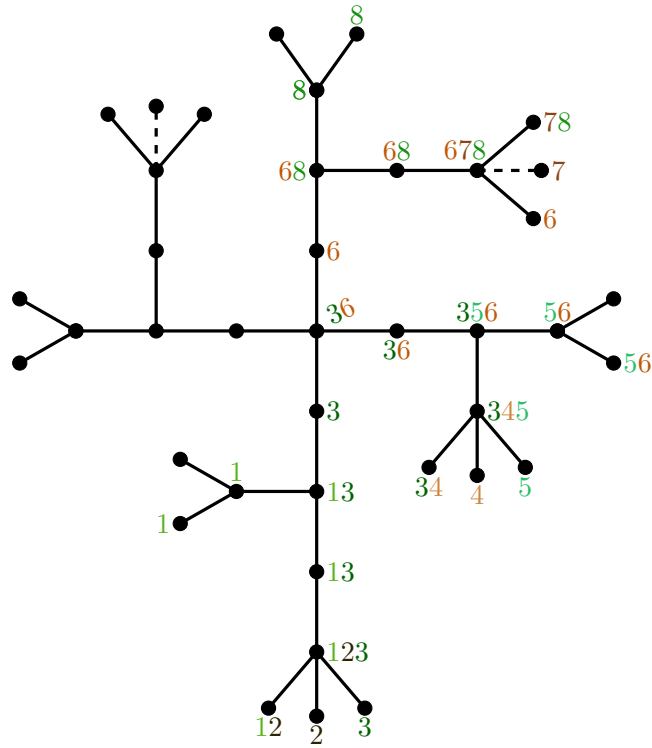
(b) Paso 2: construcción de T'



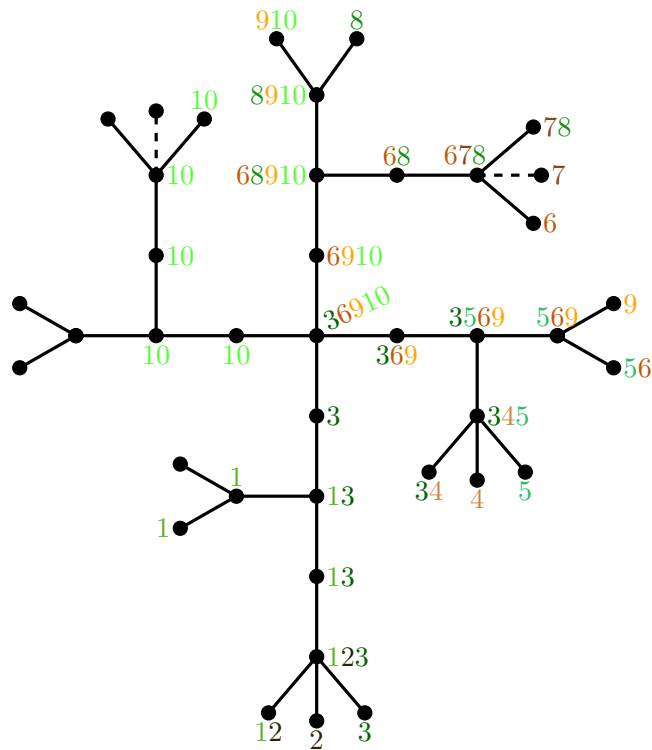
(c) Paso 3: Construcción de la Familia de caminos dada por Lema 7.2 en T' , primera iteración.



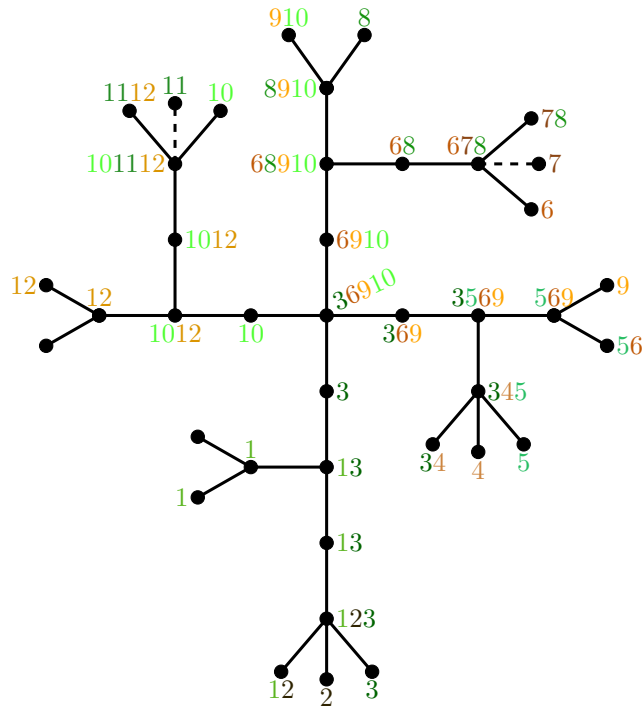
(d) Paso 3: Construcción de la Familia de caminos dada por Lema 7.2 en T' , segunda iteración.



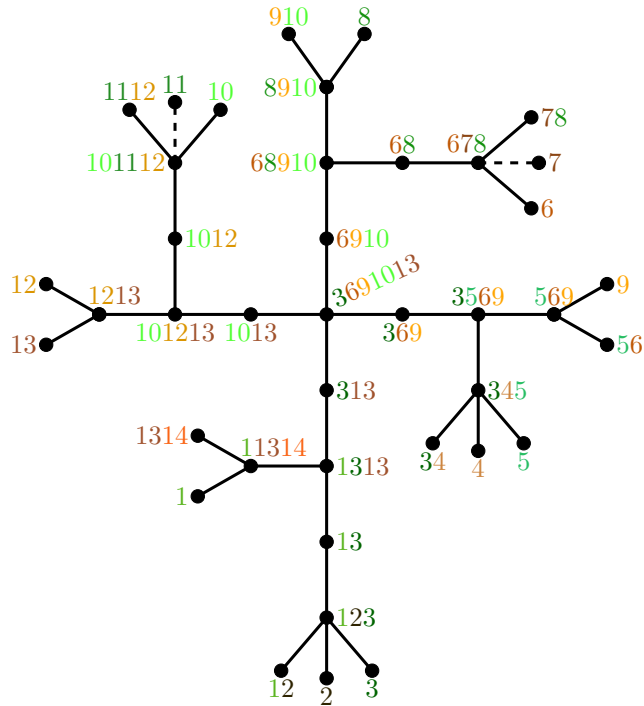
(e) Paso 3: Construcción de la Familia de caminos dada por Lema 7.2 en T' , tercera iteración.



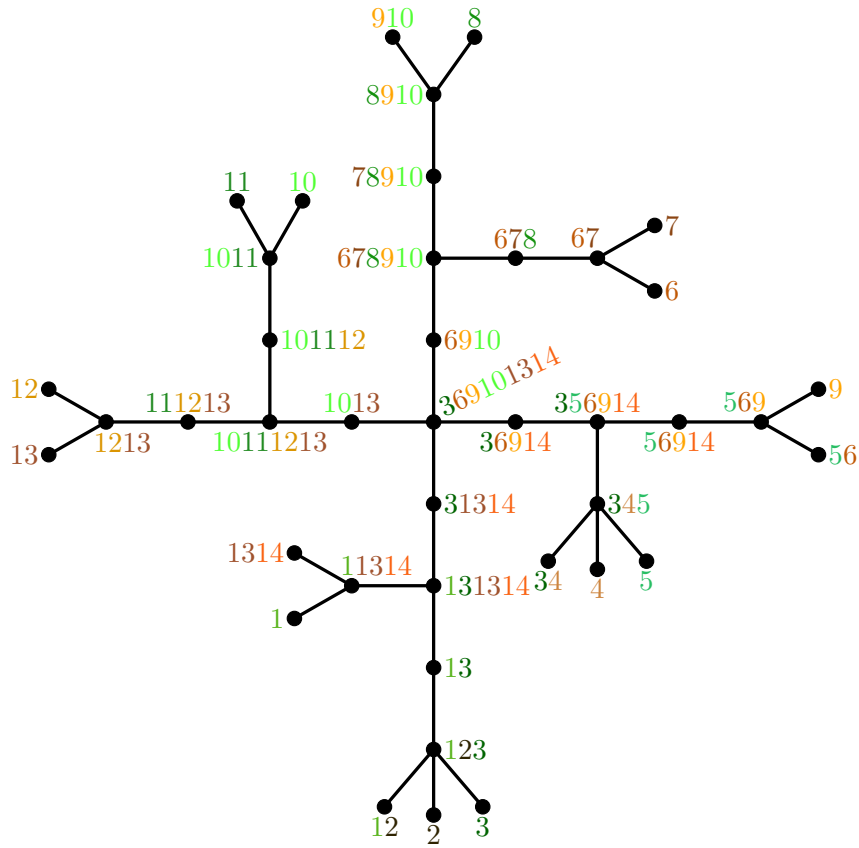
(f) Paso 3: Construcción de la Familia de caminos dada por Lema 7.2 en T' , cuarta iteración.



(g) Paso 3: Construcción de la Familia de caminos dada por Lema 7.2 en T' , quinta iteración.



(h) Paso 3: Construcción de la Familia de caminos dada por Lema 7.2 en T' , sexta iteración.



(i) Paso 4: Modificamos los caminos en T' para separar T .

Figura 7.4: Ejemplo en árbol con cantidad de patillas impar. Representamos cada camino con un número y color. Este árbol tiene 8 racimos, de los cuales 5 corresponden a patillas: R_4 , R_5 , R_6 , R_7 y R_8 . En el primer paso se enumeran a través de DFS, los racimos y sus hojas. En el segundo paso, se construye T' agregando hojas a las patillas de los racimos R_5 y R_7 , y eliminando el abuelo en los racimos R_4 , R_6 y R_8 . En el paso 3, en la primera iteración construimos la primera gaviota, en este caso $a_1 = h_1^2$, y como la hoja siguiente es la primera hoja de un racimo de tamaño tres, b_1, c_1 corresponden a las hojas h_2^2 y h_2^2 , respectivamente. Como R_2 es de tamaño 3, en la segunda iteración, la segunda gaviota comienza en el mismo racimo en la primera hoja descubierta, por lo que se tiene $a_2 = h_2^3$, $b_2 = h_3^1$ y $c_3 = h_3^2$. Como la segunda gaviota termina en un racimo de tamaño tres, la siguiente gaviota comienza en la primera hoja descubierta del racimo. Lo cual corresponde a elegir $a_4 = h_3^3$, con $b_4 = h_4^1$ y $c_4 = h_5^1$, dado que R_4 es de tamaño 2. Y se continúa siguiendo la Construcción 5.2. En la última iteración del Paso 3, añadimos los caminos 13 y 14. En el paso 4, ajustamos los caminos de las patillas para separar todos los padres y abuelos de las primeras $r_2^* - 1$ patillas en T y extendemos el camino 14 hasta el abuelo del racimo R_4 , para separar el padre y abuelo de esta patilla.

Finalmente, por la cota inferior presentada en Lema 4.1 y las cotas superiores presentadas en Lema 7.2 para árboles H.I.P.I.S. sin patillas, Lema 7.3 para árboles H.I.P.I.S. con cantidad par

de patillas y Lema 7.4 para árboles H.I.P.I.S. con cantidad impar de patillas, queda demostrado el Teorema 7.1.

Árboles con racimos de tamaño 1

En los capítulos anteriores estudiamos el número de separación en árboles H.I. y árboles H.I.P.I.S. sin racimos de tamaño 1. Por lo tanto, la familia restante por analizar corresponde a los árboles H.I.P.I.S. que incluyen racimos de tamaño 1.

Para esta familia, a diferencia de los casos anteriores, no es posible definir el número de separación a partir de parámetros locales del árbol. Y, por lo tanto, dedicaremos esta sección a demostrar el siguiente teorema.

Teorema 8.1. *Existen dos familias $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(l)\}_{l \in \mathbb{N}}$ y $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}(l)\}_{l \in \mathbb{N}}$ de árboles, tal que para todo valor de $l \geq 6$, se tiene $|V(\mathcal{A}(l))| = |V(\mathcal{B}(l))| = 9l + 3$, $h_1(\mathcal{A}(l)) = h_1(\mathcal{B}(l)) = 5l$, $h_2(\mathcal{A}(l)) = h_2(\mathcal{B}(l))$, $r_1(\mathcal{A}(l)) = r_1(\mathcal{B}(l))$, $r_2(\mathcal{A}(l)) = r_2(\mathcal{B}(l))$ y $r_2^*(\mathcal{A}(l)) = r_2^*(\mathcal{B}(l))$, pero*

$$\text{spc}(\mathcal{A}(l)) \neq \text{spc}(\mathcal{B}(l)).$$

Para definir las familias, primero definiremos algunos árboles particulares.

Definición 8.2. (Ciempiés de orden k). Dado $k \geq 1$, un *ciempiés de orden k* es el árbol

obtenido desde un camino de los vértices $\{v_0, \dots, v_{2k+2}\}$ al que se le agrega una hoja a los vértices $\{v_{2j} : 1 \leq j \leq k\}$. El vértice v_0 será la *cabeza*, el vértice v_{2k+2} será la *cola*, las hojas agregadas al camino serán las *patas*. Llamaremos *segmento* al conjunto de vértices formado por una pata, su padre y los otros dos vértices vecinos al padre.

En la Figura 8.1 presentamos un ejemplo de árbol ciempiés.

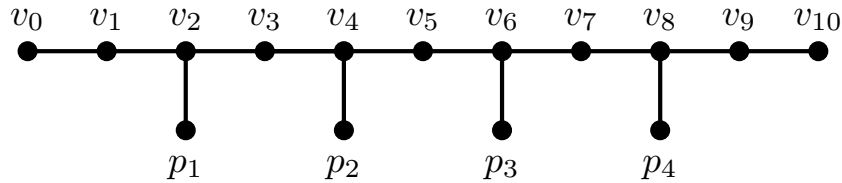


Figura 8.1: Ejemplo de ciempiés de orden 4. En este ciempiés v_0 es la cabeza y v_{10} es la cola. los vértices p_1, p_2, p_3 y p_4 son las patas del ciempiés y se tienen 4 segmentos. Un segmento es $\{p_1, v_2, v_1, v_3\}$, otro segmento es $\{p_2, v_4, v_3, v_5\}$, otro segmento es $\{p_3, v_6, v_5, v_7\}$ y el último segmento es $\{p_4, v_8, v_7, v_9\}$.

Llamaremos *árbol (k_1, k_2) -ario* a un árbol con 2 niveles enraizado en un vértice r , que llamaremos *raíz*. En este árbol, el vértice r pertenece al nivel 0 y tiene exactamente k_1 hijos, los cuales conforman el nivel 1. Cada uno de estos vértices en el nivel 1 tendrá exactamente k_2 hijos, los cuales constituyen el nivel 2.

En la Figura 8.2 presentamos un ejemplo de árbol $(k, 2)$ -ario.

Sea $T(l, a, b)$ el árbol obtenido desde un ciempiés C de orden l , un árbol T_1 $(a, 2)$ -ario y un árbol T_2 $(b, 2)$ -ario, identificando la cabeza de C con la raíz de T_1 y la cola de C con la raíz de T_2 . Seguiremos llamando a v_0 como la cabeza y v_{2l+2} como la cola de T acorde a la Definición 8.2.

En la Figura 8.3 presentamos, como ejemplo de esta familia, el árbol $T(4, 3, 2)$.

El siguiente lema presenta algunas características generales de los árboles de la forma $T(l, a, b)$.

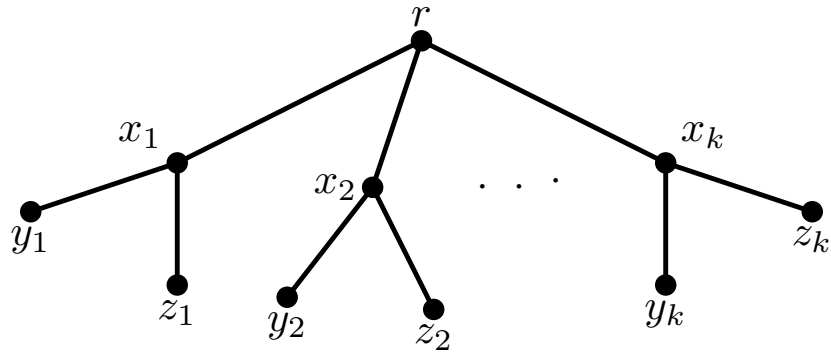


Figura 8.2: Ejemplo de árbol $(k, 2)$ -ario. En este ejemplo r es la raíz del árbol, x_1, x_2 y x_k pertenecen al primer nivel, cada uno de ellos tienen exactamente 2 hijos, y_1, z_1 son los hijos de x_1 , y_2, z_2 son los hijos de x_2 y y_k, z_k son los hijos de x_k .

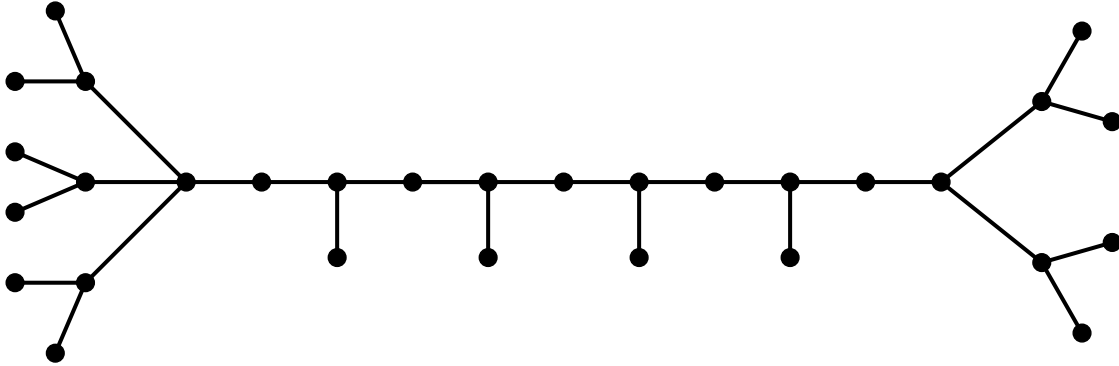


Figura 8.3: En esta figura presentamos el ejemplo de árbol $T(4, 3, 2)$. Obtenido desde C , un ciempiés de orden 4, un árbol T_1 $(3, 2)$ -ario y un árbol T_2 $(2, 2)$ -ario, identificando la cabeza de C , v_0 , con la raíz de T_1 y la cola de C , v_{10} , con la raíz de T_2 .

Lema 8.3. Sea $T = T(l, a, b)$, con $l, a, b \geq 2$, se tiene:

- $|V(T)| = 3a + 3l + 3 + 3b$
- $r_1(T) = l$
- $h_1(T) = l + 2(a + b)$
- $r_2(T) = a + b$
- $r_2^*(T) = 0$

Demostración. Comenzaremos contabilizando los vértices de $T(l, a, b)$. La cantidad total de vértices corresponde a la suma de los vértices del ciempiés de orden l , los vértices del árbol $(a, 2)$ -ario y los vértices del árbol $(b, 2)$ -ario, menos 2 vértices correspondientes a los vértices identificados.

La cantidad de vértices de un ciempiés de orden l es $3l + 3$.

Por otro lado, un árbol $(k, 2)$ -ario, tiene 1 vértice en el nivel 0, k vértices en el nivel 1 y $2k$ vértices en el nivel 2, totalizando $1 + 3k$ vértices. Por lo tanto, un árbol $(a, 2)$ -ario, tiene $1 + 3a$ vértices, mientras que el árbol $(b, 2)$ -ario, tiene $1 + 3b$ vértices.

Así, el árbol $T(l, a, b)$ tendrá un total de $3l + 3a + 3b + 3$ vértices.

Dado que los árboles $(a, 2)$ -ario y $(b, 2)$ -ario solo tienen racimos de tamaño 2, $r_1(T) = l$. La cantidad de racimos de tamaño 2 está dada por la suma de racimos de tamaño 2 de los árboles $(a, 2)$ -ario y $(b, 2)$ -ario. Lo que corresponde a $r_2(T) = a + b$. Como este árbol solo tendrá racimos de tamaño 1 y 2, el número de hojas corresponde a la suma de $r_1(T)$ y $2r_2(T)$. Obteniendo $h_1(T) = l + 2(a + b)$.

Por último, dada la estructura de estos árboles, todos los racimos de tamaño 2 tienen abuelos de grado a o b , como consideramos $a, b \geq 1$, estos árboles no tienen patillas. \square

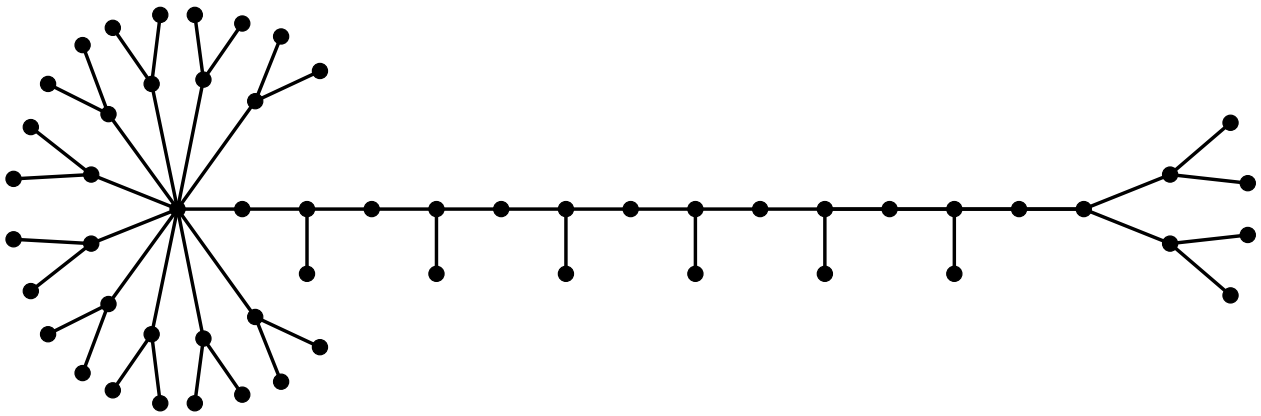
A continuación estudiaremos dos familias de árboles con igual número de vértices, igual número de hojas, igual cantidad de racimos de tamaño 1 y 2. Sean las familias $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}(l)\}_{l \in \mathbb{N}}$, la familia de árboles de la forma $T(l, l, l)$ con $l \geq 3$, y $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(l)\}_{l \in \mathbb{N}}$, la familia de árboles de la forma $T(l, 2l - 2, 2)$ con $l \geq 6$. En la figura 8.4 presentamos un ejemplo de estas familias considerando $l = 6$.

Para la primera familia \mathcal{B} , mostraremos una construcción que cubre y separa los vértices de esta familia, mientras que para la segunda familia \mathcal{A} estudiaremos una cota inferior para el número de separación. Con ambos resultados, mostraremos que estas familias tienen diferente número de separación.

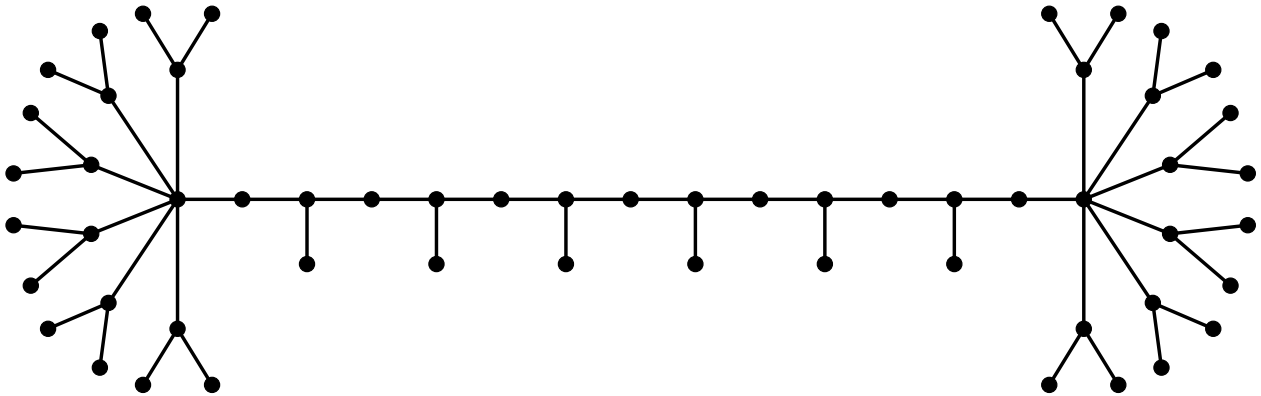
Comenzaremos mostrando el siguiente resultado, en relación a las características de los árboles de ambas familias, obtenido directamente del Lema 8.3.

Corolario 8.4. *Sea $l \geq 2$, $\mathcal{B}(l) = T_1$ y $\mathcal{A}(l) = T_2$. Entonces:*

- $|V(T_1)| = |V(T_2)| = 9l + 3$
- $r_1(T_1) = r_1(T_2) = l$
- $r_2(T_1) = r_2(T_2) = 2l$
- $r_2^*(T_1) = r_2^*(T_2) = 0$
- $h_1(T_1) = h_1(T_2) = 5l$



(a) Árbol $\mathcal{A}(6)$



(b) Árbol $\mathcal{B}(6)$

Figura 8.4: Ejemplo de árboles de las familias \mathcal{A} y \mathcal{B} . En la Figura 8.4a presentamos el árbol $\mathcal{A}(6)$ y en la Figura 8.4b presentamos el árbol $\mathcal{B}(6)$.

8.1. Cota superior familia \mathcal{B}

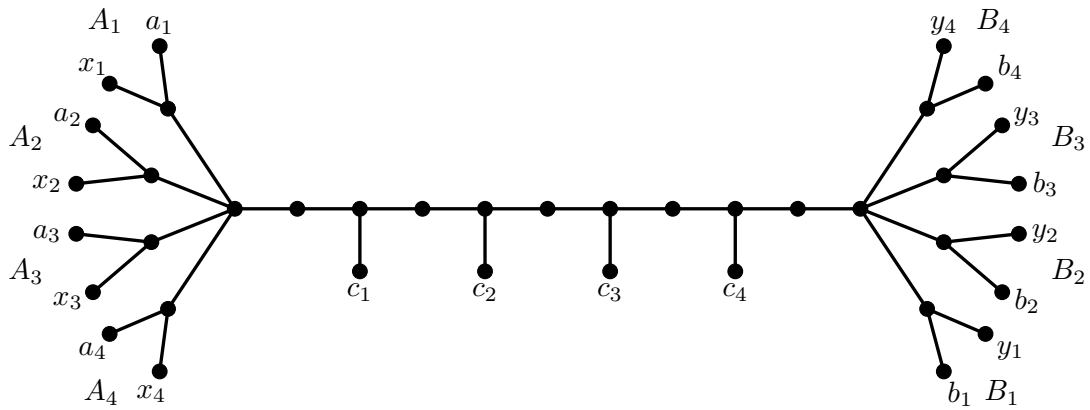
A continuación, presentamos una construcción para la familia $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}(l)\}_{l \in \mathbb{N}}$.

Construcción 8.5. Sea $T \in \{\mathcal{B}(l)\}_{l \in \mathbb{N}}$. Aplicaremos la construcción mediante los siguientes pasos:

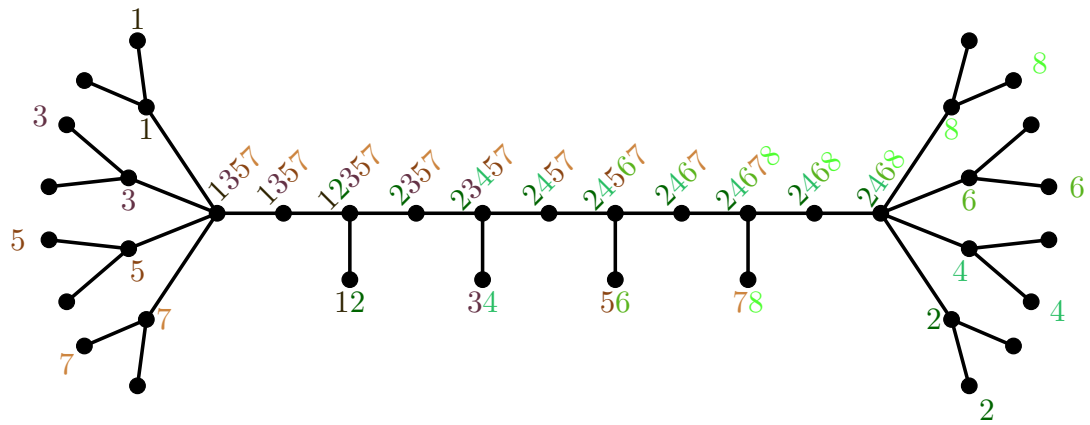
1. Enumeraremos los racimos de tamaño 2 de T que tienen por abuelo a la cabeza del ciempiés como A_1, A_2, \dots, A_l , los racimos de tamaño 2 que tienen por abuelo a la cola del ciempiés como B_1, B_2, \dots, B_l y a los racimos de tamaño 1 como C_1, C_2, \dots, C_l . Etiquetaremos como c_i la hoja de un racimo C_i . Enumeraremos también las hojas de los racimos A_i como a_i, x_i y las hojas de los racimos B_i como b_i, y_i .
2. Por cada hoja c_i , construiremos dos caminos $c_i T a_i$ y $c_i T b_i$.
3. Agrupamos las hojas no cubiertas en el paso anterior en conjuntos de tres elementos, siguiendo el orden $x_1, x_2, x_3, \dots, x_l, y_1, y_2, \dots, y_l$. Es decir, el primer grupo sería $\{x_1, x_2, x_3\}$, y el segundo grupo serían las 3 hojas siguientes. Si al final quedan una o dos hojas sin agrupar, formamos un grupo de tamaño 1 ó 2 con ellas.

En cada grupo de tres hojas, construimos una gaviota. Si existe un grupo de tamaño 1, construimos el camino entre esa hoja y su padre. Si existe un grupo de tamaño 2, construimos, para cada hoja del grupo, el camino entre la hoja y su padre.

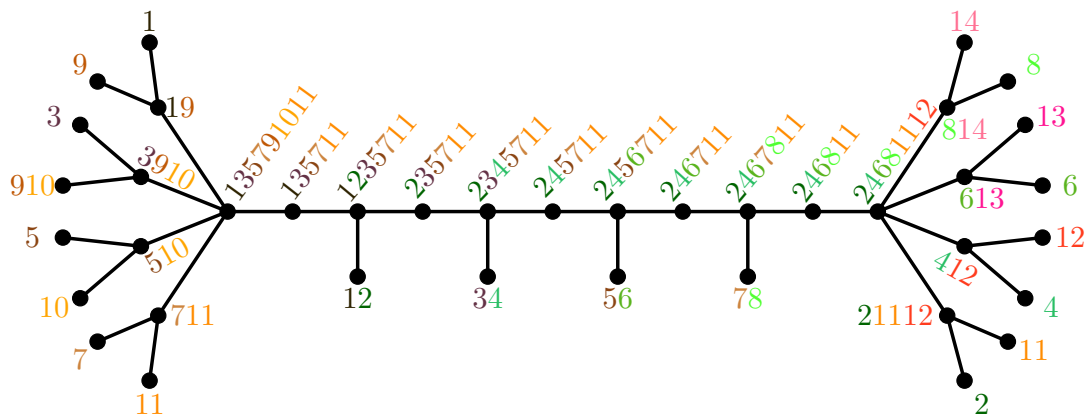
En la Figura 8.5 presentamos un ejemplo de aplicación de esta Construcción paso a paso.



(a) Paso 1



(b) Paso 2



(c) Paso 3

Figura 8.5: Ejemplo de aplicación de la Construcción 8.5 en el árbol $T(4, 4, 4)$. Representamos cada camino con un número y color. En 8.5a enumeramos los racimos y hojas acorde al Paso 1.. En 8.5b construimos los caminos c_iTa_i y c_iTb_i para todo $1 \leq i \leq 4$ como indica el Paso 2.. En 8.5c construimos gaviotas en 2 grupos de tres hojas y cubrimos con 2 caminos las dos hojas restantes, siguiendo el Paso 3. de la construcción.

El siguiente lema presenta los resultados de cubrimiento y separación de la Construcción 8.5 en árboles de la familia \mathcal{B} .

Lema 8.6. *Sea $T \in \{\mathcal{B}(l)\}_{l \in \mathbb{N}}$, con $l \geq 3$, entonces*

$$\text{spc}(T) = \left\lceil \frac{2h_1(T)}{3} \right\rceil.$$

Demostración. Sea $T \in \{\mathcal{B}(l)\}_{l \in \mathbb{N}}$. La cota inferior se obtiene directamente del Lema 4.1.

Para demostrar la cota superior, la idea consiste en aplicar la Construcción 8.5 en T , y mostrar que la familia de caminos dada por esta construcción cubre y separa $V(T)$.

Sea \mathcal{F} la familia de caminos obtenida de aplicar la Construcción 8.5 en T . Sean u y v dos vértices distintos de T . Se tienen los siguientes casos:

- Existe w padre de una pata en el (u, v) -camino. Supongamos que u no es padre de v ni v es padre de u , como existe w padre de una pata, digamos c_i , en el (u, v) -camino, en este caso sabemos que u y v estarán diferenciados por los caminos P_i y Q_i correspondientes a c_iTa_i y c_iTb_i respectivamente, ya que estos caminos tienen direcciones opuestas desde w hacia la cola o cabeza. Por ende, por u o por v pasa únicamente P o Q , supongamos, sin pérdida de generalidad, por u pasa P y no Q , si v es c_i o w , por v pasan ambos caminos, mientras que si v no es c_i ni w , por v pasará el camino Q . De esta forma ambos vértices están cubiertos y separados. Supongamos ahora que u es padre de v , en este caso, por enunciado del Lema, sabemos que el ciempiés es de orden al menos 4, y por ende, existirán por cada padre al menos otros 3 caminos distintos que pasan por él y no pasan por la hoja descendiente, correspondientes a los caminos del paso 2. construidos en las otras patas. Mostrando así que también estarán separados u y v .
- No existe w padre de una pata en el (u, v) -camino. En este caso u y v están ambos en alguno de los siguientes conjuntos. G_1 el conjunto conformado por todos los vértices descendientes de la cabeza, la cabeza y v_1 . G_2 el conjunto conformado por todos los vértices descendientes de la cola, la cola y v_{2k+1} . Supongamos que ambos están en G_1 . Notar que todos los vértices de este grupo están cubiertos y separados. Por v_1 pasan todos

los caminos $a_i T c_i$. Por v_0 pasan todos los caminos $a_i T c_i$ y al menos pasan los caminos de la (x_1, x_2, x_3) -gaviota, notar que los caminos de la gaviota no pasan por v_1 . Mientras que por cada padre de racimo pasa solo un camino $a_i T c_i$ y uno o dos caminos construidos en las gaviotas del paso 3., notar que cada camino $a_i T c_i$ pasa por un único padre. Por cada hoja y_i pasa únicamente un camino $a_i T c_i$. Por cada hoja z_i pasa uno o dos caminos de cada gaviota. Si u y v están en G_2 el análisis es similar, con la diferencia que en vez de pasar los caminos $a_i T c_i$ pasan los caminos $b_i T c_i$. Y por v_{2k+2} pasan los caminos correspondientes a la última gaviota construida, los cuales comienzan y terminan en el racimo.

De esta forma, en todos los casos u y v están cubiertos y separados. \square

A continuación, mostraremos una segunda familia de árboles, con las mismas características locales de la familia anterior, es decir, igual número de vértices, igual número de hojas, igual número de racimos de tamaño 1 y 2. Pero estos árboles tendrán un número de separación mayor. Para demostrarlo, estudiaremos la cota inferior.

8.2. Cota inferior familia \mathcal{A}

Para la segunda familia demostraremos una cota inferior. Comenzaremos, de manera similar a cómo estudiamos las patillas, enunciando un lema sobre la separación en los segmentos.

En lo que sigue, diremos que dos caminos que terminan en un mismo segmento siguen direcciones opuestas, si un camino va en dirección a la cabeza y el otro hacia la cola.

Lema 8.7. *Sea $T = T(l, a, b)$ obtenido a partir de C , el ciempiés de orden l , $S \subset C$ un segmento, y \mathcal{F} una familia separadora de T . Entonces se cumple lo siguiente:*

1. *S tiene al menos dos finales de camino.*
2. *Si S tiene exactamente dos finales de camino, estos pertenecen a caminos diferentes y pueden distribuirse de las siguientes formas:*
 1. *Ambos finales de camino están en la hoja del segmento, con los caminos orientados en direcciones opuestas.*

- II. *Un final de camino cubre únicamente la hoja, con el camino orientado hacia la cabeza o la cola, mientras que el otro final de camino está en el padre, con el camino orientado en la dirección opuesta a la del camino anterior (hacia la cola o la cabeza).*
- III. *Un final de camino cubre únicamente la hoja, con el camino orientado hacia la cabeza o la cola, y el otro final de camino se encuentra en el vértice vecino al padre más cercano a la cabeza o la cola (según la dirección del camino anterior), siguiendo la misma dirección que el camino anterior.*

Demostración. Sea $S \subset C$ un segmento, y \mathcal{F} una familia separadora de C . Sea p la pata del segmento, u el padre, y v y w los otros 2 vértices que componen el segmento. Dado que un segmento está compuesto por 4 vértices, sabemos que no pueden ser separados con un solo final de camino, demostrando así el punto 1.

Por otro lado, si S tiene dos finales de camino, como las hojas siempre deben estar al menos únicamente cubiertas, se tienen los siguientes casos:

- p está doblemente cubierta. En este caso, para separar los 3 vértices restantes, necesitamos que pasen caminos distintos por cada uno de ellos, la única forma de hacerlo es que los caminos sigan direcciones opuestas, uno hacia la cabeza y otro hacia la cola. Sea P el camino hacia la cabeza y sea Q el camino hacia la cola. De esta forma, por u pasan los caminos P y Q , por v pasa el camino P y por w pasa el camino Q , estando todos separados.
- p está únicamente cubierta. En este caso el otro final de camino debe estar en v, u o w . Si el otro final de camino está en v , entonces ambos caminos deben seguir direcciones opuestas para conseguir que v, u y w esten separados. Si el otro final de camino está en v o w la única forma de que se logren separar todos los vértices es que sea v si el camino desde la hoja va hacia la cabeza y el camino desde v tenga la misma dirección, mientras que si el final de camino está en w , el camino desde la hoja debe ir en dirección a la cola y el camino desde w debe seguir la misma dirección.

Notar que no existen más combinaciones posibles para los finales de camino. De esta forma se tienen los 3 casos presentados en el punto 2 del lema. \square

En la Figura 8.6 presentamos los tres casos posibles de separación con 2 finales de caminos en los segmentos.

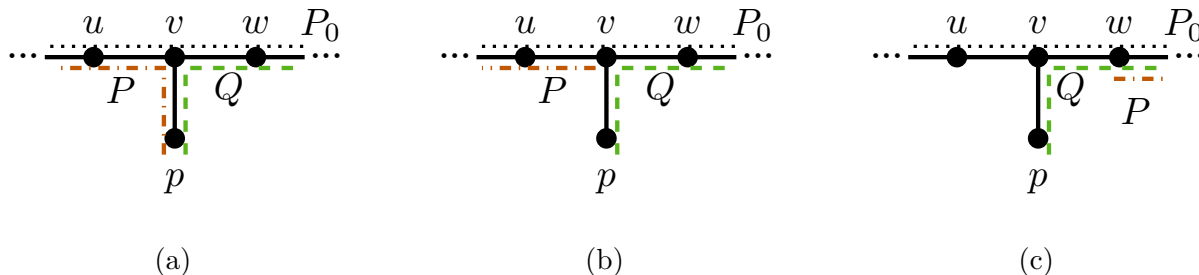


Figura 8.6: Separación de segmentos con 2 finales de camino. En los tres casos representamos los caminos P y Q con los colores naranja y verde respectivamente, y con la línea punteada el camino P_0 . La Figura 8.6a representa el caso I., en este caso $\mathcal{F}(p) = \{P, Q\}$, $\mathcal{F}(v) = \{P_0, P, Q\}$, $\mathcal{F}(u) = \{P_0, P\}$ y $\mathcal{F}(w) = \{P_0, Q\}$. La Figura 8.6b representa el caso II., en este caso $\mathcal{F}(p) = \{Q\}$, $\mathcal{F}(v) = \{P_0, P, Q\}$, $\mathcal{F}(u) = \{P_0, P\}$ y $\mathcal{F}(w) = \{P_0, Q\}$. La Figura 8.6c representa el caso III., en este caso $\mathcal{F}(p) = \{Q\}$, $\mathcal{F}(v) = \{P_0, Q\}$, $\mathcal{F}(u) = \{P_0\}$ y $\mathcal{F}(w) = \{P_0, P, Q\}$.

El siguiente lema utiliza el resultado anterior para definir una cota inferior para la familia $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(l)\}_{l \in \mathbb{N}}$, con $l \geq 6$.

Lema 8.8. Si T es un árbol de la familia $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(l)\}_{l \in \mathbb{N}}$, con $l \geq 6$, entonces

$$\text{spc}(T) > \left\lceil \frac{2h_1(T)}{3} \right\rceil.$$

Demostración. Sea $T = \mathcal{A}(l)$ con $l \geq 6$. Por Corolario 8.4 sabemos que $h_1(T) = 5l$. Sea \mathcal{F} una familia de caminos que cubre y separa T , con $|\mathcal{F}| = m$.

Denominaremos por h_{11} a la cantidad de hojas únicamente cubiertas y por h_{12} a la cantidad de hojas al menos doblemente cubiertas. En función de estos parámetros se tiene la siguiente ecuación para la cantidad de finales de caminos.

$$2m \geq h_{11} + 2h_{12} \tag{8.2.1}$$

Por otro lado, la cantidad de caminos será al menos la cantidad de caminos que tienen un

extremo únicamente cubierto, en este caso, al menos h_{11}

$$m \geq h_{11} \tag{8.2.2}$$

De la suma de (8.2.1) y (8.2.2) se tiene

$$3m \geq 2h_{11} + 2h_{12} = 2h_1(T) \tag{8.2.3}$$

Supongamos que $h_1(T)$ es múltiplo de 3 (notar que esto requiere que l sea múltiplo de 3) y que (8.2.3) se cumple con igualdad. En este caso, es necesario que (8.2.1) y (8.2.2) también se cumplan con igualdad. Luego,

$$2m = h_{11} + 2h_{12} \tag{8.2.4}$$

$$m = h_{11} \tag{8.2.5}$$

De (8.2.5) se concluye que todo camino tiene un extremo únicamente cubierto que es una hoja. De (8.2.4) se concluye que toda hoja está únicamente cubierta o exactamente doblemente cubierta.

Por lo anterior sabemos que todo extremo de camino está en una hoja y que todo camino tiene un extremo en una hoja únicamente cubierta y el otro en una hoja doblemente cubierta. Es decir, $1/3$ de las hojas están doblemente cubiertas y $2/3$ de las hojas están únicamente cubiertas.

Ahora analizaremos las hojas del ciempiés. Por Lema 8.7 sabemos que si una hoja de un segmento está únicamente cubierta, entonces existe al menos un final de camino que está en un vértice que no es hoja. Esto contradice el análisis anterior en el que concluimos que todos los finales de camino están en una hoja. Por ende, todas las hojas del ciempiés deben estar doblemente cubiertas.

Si las hojas del ciempiés están doblemente cubiertas, entonces todas son de la forma presentada en Item I. y, por lo tanto, un camino va hacia la cabeza P_i y el otro hacia la cola Q_i . Notar que ninguno de los caminos anteriores puede terminar en otra hoja del ciempiés, dado que el otro extremo debe estar únicamente cubierto. Por lo tanto, los caminos P_i deben terminar en una hoja descendiente de la cabeza, mientras que los caminos Q_i deben terminar en una hoja

descendiente de la cola. Para que esto ocurra, ambos extremos deben tener al menos l hojas, sin embargo, las hojas descendientes de la cola son exactamente 4. Lo cual contradice la suposición de que (8.2.3) se cumple con igualdad para todo $l \geq 6$. Por ende, si $h_1(T)$ es múltiplo de 3, entonces $\text{spc}(T) > 2h_1(T)/3$.

Por otro lado, en el caso en que $h_1(T)$ no es múltiplo de 3, el análisis sigue un razonamiento similar considerando en la (8.2.3) que si $h_1(T) \equiv 1 \pmod{3}$ entonces se tendrá $3m = 2h_1(T) + 1$, y si $h_1(T) \equiv 2 \pmod{3}$ entonces se tendrá $3m = 2h_1(T) + 2$. Replicando el resto del análisis, se puede concluir que en este caso $m > \lceil 2h_1(T)/3 \rceil$. \square

Ahora tenemos todo lo necesario para demostrar el Teorema 8.1.

Demostración del Teorema 8.1. Sea $T_1 = \mathcal{A}(l)$ y $T_2 = \mathcal{B}(l)$, con $l \geq 6$. Por el Corolario 8.4, sabemos que $|V(T_1)| = |V(T_2)| = 9l + 3$, $h_1(T_1) = h_1(T_2) = 5l$, $r_1(T_1) = r_1(T_2)$, $r_2(T_1) = r_2(T_2)$ y $r_2^*(T_1) = r_2^*(T_2)$. Además, por Lema 8.6, se tiene que $\text{spc}(T_2) \leq \lceil 2h_1(T_2)/3 \rceil$, y por Lema 8.8, sabemos que $\text{spc}(T_1) > \lceil 2h_1(T_1)/3 \rceil$. \square

Árboles con caminos fundamentales de largo al menos tres

Para concluir la presentación de nuestros resultados, en este capítulo nos enfocamos en árboles que contienen caminos fundamentales de largo al menos tres. Cabe notar que en los tres capítulos anteriores hemos estudiado árboles sin estos caminos.

Partiendo del resultado presentado en el Teorema 7.1, incorporaremos caminos fundamentales a la familia de árboles H.I.P.I.S. sin racimos de tamaño 1, y presentaremos una cota superior para el número de separación en árboles con racimos de tamaño al menos dos.

El principal objetivo de este capítulo es demostrar el siguiente teorema.

Teorema 9.1. *Si T es un árbol con racimos de tamaño al menos 2, entonces*

$$\text{spc}(T) \leq \left\lceil \frac{2h_1(T) + r_2^*(T)}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{h_2^*(T) + 1}{2} \right\rceil.$$

La demostración consistirá en una adecuación del segundo resultado presentado en el

Teorema 3.2 de Arrepol et al. [1]. Como ya vimos, ellos presentaron una cota superior para árboles con racimos de tamaño al menos 3. Nosotros extenderemos este resultado a árboles con racimos de tamaño al menos 2, con las adecuaciones correspondientes. En general, esta demostración seguirá la misma estructura presentada en [1, Teorema 3.4].

Demostración. Primero, consideramos el caso donde T no tiene aristas interiores. Esto corresponde a estudiar el caso donde T es una estrella. Esta familia está contenida en los árboles H.I., por ende, por el Teorema 6.1 sabemos que, a excepción de $K_{1,3}$, estos árboles pueden ser cubiertos y separados por $\lceil 2h_1(T)/3 \rceil$ caminos, lo cual es equivalente al valor que queremos demostrar en este teorema.

Ahora, probamos el caso en que T tiene al menos una arista interior. Para ello presentamos una adecuación de la construcción presentada por Arrepol et al. en la demostración del Teorema 3.2 [1, Teorema 17].

Sea T un árbol y sea $\mathcal{Q} = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_r\}$ la familia de caminos fundamentales maximales en T que particionan $E(T)$. Sea $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_k\} \subseteq \mathcal{Q}$ el conjunto de caminos fundamentales de largo al menos 3. Construiremos una familia que cubre y separa $V(T)$ mediante los siguientes pasos:

1. Transformamos T en un árbol T' contrayendo cada camino P_i a un camino de largo exactamente dos. Esto reduce la cantidad de vértices de grado dos garantizando que después de la reducción, en cada camino fundamental quede a lo más un vértice de grado dos. Denotaremos por v_i al vértice de grado dos que queda luego de la reducción de cada camino P_i . Así, T' es un árbol H.I.P.I.S. que satisface $h_1(T') = h_1(T)$ y $r_2^*(T') = r_2^*(T)$.

Por Teorema 7.1 sabemos que existe una familia de caminos \mathcal{F}' de tamaño $\lceil (2h_1(T') + r_2^*(T'))/3 \rceil$ que cubre y separa $V(T')$. Notar que $\lceil (2h_1(T') + r_2^*(T'))/3 \rceil = \lceil (2h_1(T) + r_2^*(T))/3 \rceil$.

2. Construimos una familia \mathcal{F} de caminos para T . Para ello, incorporamos en \mathcal{F} todos los caminos de \mathcal{F}' . Esto es posible dado que cada vértice en T' es un vértice en T . Procuraremos que los caminos que pasan por v_i en T' pasen también por el resto de vértices de grado dos del P_i en T . En detalle, esto último significa que, dado un P_i con extremos x e y en T ,

si algún camino P de \mathcal{F}' termina en v_i en T' , y P pasa por x , entonces v_i e y deben ser vecinos en T .

Luego, \mathcal{F} cubre y separa todos los vértices que no fueron eliminados de T para construir T' . Notar que $|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}'|$. Además, por cada vértice $u \in P_i$ de grado 2 que fue eliminado al construir T' , tenemos que $\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}'(v_i)$.

Dado que \mathcal{F}' separa $V(T')$, u y w están separados en \mathcal{F} cuando pertenecen a diferentes caminos fundamentales.

3. Para separar los vértices de grado 2 que pertenecen al mismo camino fundamental en T , necesitamos agregar nuevos caminos a \mathcal{F} . Construiremos estos caminos de la siguiente manera.

Por cada camino fundamental $P_i \in \mathcal{I}$, consideraremos que solo v_i está marcado, y que el resto de vértices de grado dos de estos caminos no están marcados.

Luego, escogemos dos vértices no marcados de grado dos que pertenezcan a diferentes caminos fundamentales (Notar que solo estamos considerando vértices de grado dos de caminos de \mathcal{P}), digamos, u y w , y agregamos el (u, w) -camino en T a \mathcal{F} . Luego marcamos ambos vértices. Repetiremos este proceso procurando que los vértices no marcados en el mismo camino fundamental sean consecutivos. Terminamos el proceso cuando todos los vértices estén marcados o hasta que todos los vértices no marcados pertenezcan al mismo camino fundamental.

Refinamiento paso 3.: Los caminos recién agregados no necesariamente separan los vértices marcados de grado dos dentro de un mismo camino fundamental. Por lo que es necesario refinar estos caminos.

Sean u y w dos vértices marcados dentro de un mismo camino fundamental que no están separados. Supongamos que u no es uno de los vértices inicialmente marcados. Cuando u fue marcado, se añadió un (u, x) -camino P , y cuando w fue marcado, se añadió un (w, y) -camino Q . Dado que u y w no están separados, se cumple que $w \in P$ y $u \in Q$ (si Q existe), lo que significa que P y Q se superponen dentro del camino fundamental.

Para resolver esto, eliminamos P y Q de \mathcal{F} y los sustituimos por el (u, y) -camino y por el (w, x) -camino en T , a los que llamaremos P' y Q' , respectivamente. En caso de que Q no exista, simplemente añadimos el camino Q' .

Ahora, es claro que P' y Q' tienen direcciones opuestas en el camino fundamental y no se cruzan. Así $u \notin Q'$. Por ende, u y w estarán separados. Repetimos este proceso procurando que el vértice v_i de cada camino P_i no está contenido en ninguno de los caminos que no provienen de \mathcal{F}' . Terminaremos cuando todos los vértices que fueron marcados estén separados.

4. Si todavía quedan vértices de grado dos sin marcar utilizaremos la construcción presentada por Foucaud y Kovše en [6, Teorema 17, caso 2] para separar los vértices restantes. Añadimos los caminos correspondientes a esta construcción a \mathcal{F} . Notar que esto funciona porque estos vértices son todos consecutivos y pertenecen al mismo camino fundamental. Si tenemos j de estos últimos vértices, esta construcción suma $(j + 1)/2$ nuevos caminos, y estos caminos solo cubren los j vértices.

Por último, nos resta probar que \mathcal{F} cubre y separa $V(T)$. En lo que sigue, consideraremos como vértices de P_i únicamente a los vértices de grado dos del camino.

Para probar que \mathcal{F} cubre $V(T)$, analizamos dos casos. Si u no fue eliminado para construir T' , entonces $\emptyset \neq \mathcal{F}'(u) \subseteq \mathcal{F}(u)$. En otro caso, si $u \in P_i$ y no es v_i , entonces $\emptyset \neq \mathcal{F}'(v_i) \subseteq \mathcal{F}(u)$. Por lo tanto, todos los vértices en T están cubiertos por \mathcal{F} .

Para demostrar que \mathcal{F} separa $V(T)$, supongamos por contradicción que existen dos vértices u y w en T tales que $\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(w)$. Empecemos por mostrar que ni u ni w pueden tener un grado diferente de dos. Si ambos vértices tuvieran un grado distinto de dos, entonces tendríamos que $\mathcal{F}'(u) \subseteq \mathcal{F}(u)$ y $\mathcal{F}'(w) \subseteq \mathcal{F}(w)$, lo que implicaría que \mathcal{F}' separa a u y w , y por lo tanto también estarían separados en \mathcal{F} . En el otro caso, si w tiene grado dos en T y pertenece a P_i , y u tiene un grado distinto de dos, entonces se cumple que $\mathcal{F}'(v_i) \subseteq \mathcal{F}(w)$. Dado que \mathcal{F}' separa a v_i de cada vértice u , salvo cuando u es una hoja adyacente, los pasos 3 y 4 se encargan de agregar los caminos necesarios para separar a u de w . Así, hemos completado el análisis de este caso.

El último caso corresponde a que tanto u como w sean vértices de grado dos en algún camino P_i . Si u y w pertenecen a diferentes caminos fundamentales P_i y P_j , respectivamente, sabemos que hay un camino P_i en $\mathcal{F}'(v_i) \Delta \mathcal{F}'(v_j)$, porque \mathcal{F}' separa $V(T')$. Así, \mathcal{F} también separa u y w . Por lo tanto, u y w pertenecen al mismo camino fundamental P_i . Pero en ese caso, los nuevos caminos añadidos en el Paso 3 y Paso 4 los separan. Por lo tanto, estos dos vértices no pueden existir y \mathcal{F} es una familia que cubre y separa $V(T)$.

Para terminar, es importante notar que en el paso 1 se añadieron $\lceil 2h_1(T) + r_2^*(T)/3 \rceil$, mientras que en los pasos restantes la cantidad de caminos añadidos corresponde a $\lceil (h_2^*(T) + 1)/2 \rceil$. Por lo tanto,

$$\text{spc}(T) \leq |\mathcal{F}| = \left\lceil \frac{2h_1(T) + r_2^*(T)}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{h_2^*(T) + 1}{2} \right\rceil.$$

Lo cual corresponde a la cota presentada en el Teorema

□

Conclusiones y trabajo futuro

10.1. Conclusiones

En este trabajo logramos realizar diversas contribuciones al problema de separación de vértices en árboles. Entre ellas, obtuvimos resultados exactos de $\text{spc}(T)$ en dos grandes familias, contribuyendo a la comprensión del problema y mejorando resultados previos. En particular, respecto a nuestro Objetivo 2.2.2, determinamos que si T es un árbol H.I. distinto de $K_{1,3}$, entonces $\text{spc}(T) = \lceil 2h_1(T)/3 \rceil$. Por otro lado, en relación con el Objetivo 2.2.3, determinamos que si T es un árbol H.I.P.I.S. distinto de $K_{1,3}$, entonces $\text{spc}(T) = \lceil 2h_1(T) + r_2^*(T)/3 \rceil$. En este último caso, fue determinante la identificación de las patillas. Este parámetro, que no había sido estudiado antes, fue fundamental en la comprensión de la separación de vértices en árboles H.I.P.I.S. y, en general, será necesaria su comprensión en todos los árboles que presenten este tipo de estructuras.

Por otro lado, en relación al Objetivo 2.2.4, logramos avanzar en la investigación de árboles con caminos fundamentales de largo mayores a dos, extendiendo resultados previos sobre árboles

con racimos de tamaño al menos tres a la familia de árboles con racimos de tamaño al menos dos. Demostramos una cota superior para T cuando T es un árbol con racimos de tamaño al menos dos. Este resultado se presenta en el Teorema 9.1.

Nuestro trabajo también nos permite responder a la pregunta de investigación que nos planteamos inicialmente en el Objetivo 2.2.1. En particular, el Teorema 8.1 nos permite concluir que no es posible determinar el número de separación de un árbol T utilizando únicamente parámetros locales como $h_1(T)$, $h_2(T)$, $r(T)$, $r_1(T)$, $r_2(T)$, $r_2^*(T)$ o $|V(T)|$. Sin embargo, esto nos permite plantear nuevas preguntas sobre el problema y nos muestra la complejidad del mismo.

10.2. Trabajo futuro

Este trabajo aporta nuevos resultados sobre el número de separación en árboles, lo que deja abiertas varias direcciones interesantes para futuras investigaciones. En particular, determinar una fórmula general para $\text{spc}(T)$ en todos los casos sigue siendo un desafío pendiente. Así también, la complejidad estructural observada en este problema nos permite preguntarnos si el problema de calcular $\text{spc}(T)$ dado un árbol T es NP-completo o no.

Otras preguntas interesantes que surgen a partir de estos resultados, dicen relación con estudiar el número de separación de familias más acotadas con racimos de tamaño 1, las cuales puedan ilustrar mecanismos de separación óptimos en estos casos. Un punto de partida posible es estudiar árboles con pocos racimos de tamaño 1 en relación a la cantidad de racimos más grandes, o árboles que no tengan como subárbol un ciempiés, ya que pudimos observar que estas estructuras son las que presentan la mayor dificultad. Junto con esto, tiene sentido preguntarnos si existen otros parámetros del árbol que puedan ayudarnos a determinar el número de separación.

Por último, otra posibilidad es abordar el problema de árboles con racimos de tamaño 1 desde una perspectiva algorítmica. Este camino nos puede ayudar a dilucidar si es posible resolver el problema en tiempo polinomial.

Bibliografía

- [1] Francisco Arrepol, Patricio Asenjo, Raúl Astete, Víctor Cartes, Anahí Gajardo, Valeria Henríquez, Catalina Opazo, Nicolás Sanhueza-Matamala, and Christopher Thraves Caro, *Separating path systems in trees*, arXiv preprint (2023).
- [2] Ahmad Biniiaz, Prosenjit Bose, Jean-Lou De Carufel, Anil Maheshwari, Babak Miraftab, Saeed Odak, Michiel Smid, Shakhar Smorodinsky, and Yelena Yuditsky, *On separating path and tree systems in graphs*, (2023).
- [3] Reinhard Diestel, *Graph theory*, 6th ed., Springer, (2024), Free Preview.
- [4] Victor Falgas-Ravry, Teeradej Kittipassorn, Dániel Korándi, Shoham Letzter, and Narayanan Bhargav, *Separating path systems*, *Journal of Combinatorics* **5** (2014), 35–354.
- [5] Cristina Fernandes, Guilherme Oliveira Mota, and Nicolás Sanhueza-Matamala, *Separating path systems in complete graphs*, (2023).
- [6] Florent Foucaud and Matjaž Kovše, *Identifying path covers in graphs*, *J. Discrete Algorithms* **23** (2013), 21–34.

-
- [7] Alan Frieze and Michał Karoński, *Introduction to random graphs*, Cambridge University Press, February (2025).
- [8] J. Johnson and Belinda Wickes, *Shattering k -sets with permutations*, *Order* (2023), 1–18.
- [9] Lyuben Lichev and Nicolás Sanhueza-Matamala, *Vertex-separating path systems in random graphs*, arXiv preprint (2024).
- [10] A. Rényi, *On random generating elements of a finite boolean algebra*, *Acta Sci. Math. Szeged* **22** (1961), no. 4, 75–81.
- [11] Belinda Wickes, *Covering and separation for permutations and graphs*, (2023).
- [12] Belinda Wickes, *Separating path systems for the complete graph*, *Discrete Mathematics* **347** (2024).
- [13] Lev Zakrevski and Mark Karpovsky, *Fault-tolerant message routing for multiprocessors*, *International Parallel Processing Symposium (Berlin, Heidelberg), Lecture Notes in Computer Science*, vol. 1388, Springer, (1998), pp. 714–730.