



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE DOCTORADO EN CIENCIAS FÍSICAS

AGUJEROS DE GUSANO TIPO SCHWARZSCHILD ATRAVESABLES (Traversable Schwarzschild-Like Wormholes)

Por: Luis Alejandro Liempi Necul

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la
Universidad de Concepción para optar al grado académico de
Doctor en Ciencias Físicas

Profesor Guía: Dr. Julio Oliva
Comisión: Dr. Mauricio Cataldo
Dr. Fernando Izaurieta
Dr. Claudio Faúndez

Agosto 2024
Concepción, Chile

© 2024, Luis Liempi N.

Ninguna parte de esta tesis puede reproducirse o transmitirse bajo ninguna forma o por ningún medio o procedimiento, sin permiso por escrito del autor.

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento.

AGRADECIMIENTOS

Por medio de estas palabras, quiero expresar mi más sincero agradecimiento a quienes contribuyeron de manera directa e indirecta en este trabajo.

En primer lugar, al profesor Dr. Mauricio Cataldo, quien guió esta tesis, contribuyendo significativamente a mi formación académica. A Fabián Orellana, amigo y compañero con quien aún quedan ideas por desarrollar y concluir.

A los profesores miembros de la comisión: Dr. Julio Oliva, Dr. Fernando Izaurieta y Dr. Claudio Faúndez, a cada uno por su gran disposición y valiosos aportes tanto en la etapa inicial como final de esta investigación. Al profesor Dr. Patricio Salgado, quien brindó soporte como co-guía de tesis en la etapa inicial.

Del programa de Doctorado en Ciencias Físicas, agradezco al ex director Dr. Jaime Araneda y al actual director Dr. Esteban Sepúlveda. Asimismo, a la Srta. Soledad Daroch y a la Srta. Nilsa García por su excelente compromiso y apoyo a los estudiantes del programa.

A mi familia: mi ñuke (madre) Margarita, chaw (padre) Damacio, peñiwen (hermanos) y lamgenwen (hermana, desde el mallew mapu). A mi avkadi Johana, compañera de batallas en la vida, y a mis choyiñ (brotes). En el plano espiritual, a mis vütakecheyem tati epu kuche ñuke ka vücha chaw müleyengün mallew mapu (mis antepasados, abuelas y abuelo que ya habitan el territorio mallew mapu).

Al Sr. José Ilić, quien diseñó esta plantilla en formato L^AT_EX.

Finalmente, agradezco a la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica por el financiamiento otorgado para el desarrollo de esta investigación mediante el proyecto CONICYT-PCHA/Doctorado Nacional/2016-21161114.

Resumen

En esta tesis se aborda la construcción y análisis de soluciones de agujeros de gusano atravesables estáticos con simetría esférica. Se presenta una sutil generalización de los agujeros de gusano de Schwarzschild, introduciendo una función de forma con dependencia lineal en la coordenada radial r . Esta modificación genera agujeros de gusano cuyo espacio-tiempo asintótico no es plano, sino asintóticamente localmente plano, exhibiendo un déficit o exceso de ángulo sólido en el límite $r \rightarrow \infty$. Se estudian dos casos principales: agujeros de gusano que conectan regiones asintóticamente no planas con déficit de ángulo sólido, cuyos diagramas de embebimiento se extienden desde la garganta hasta el infinito, y aquellos con exceso de ángulo sólido, donde los diagramas de embebimiento alcanzan un radio máximo finito y presentan densidad de energía negativa en todo el espacio. Se examina en detalle un agujero de gusano fantasma sin fuerza de marea que exhibe el primer comportamiento asintótico mencionado. La investigación profundiza en las condiciones de atravesabilidad y analiza cómo el parámetro β , asociado al déficit o exceso de ángulo sólido, influye en el movimiento de un viajero al cruzar la garganta del agujero de gusano. Además, se presenta un estudio exhaustivo del comportamiento geodésico, visualizado mediante diagramas de embebimiento tridimensional, proporcionando una comprensión más intuitiva de la geometría de estos agujeros de gusano.

La segunda fase de la investigación se centra en el análisis de estabilidad de agujeros de gusano de cáscara delgada, contruidos mediante la unión de agujeros de gusano no asintóticamente planos con la solución vacía de Schwarzschild. Este estudio se enfoca en cáscaras delgadas esféricamente simétricas, utilizando la función de forma lineal previamente mencionada. La estabilidad se examina empleando perturbaciones lineales alrededor de una solución estática, y se utiliza una ecuación maestra para caracterizar las regiones de equilibrio estable. El análisis considera tanto densidades de energía superficial positivas como negativas, y explorando diversas funciones de corrimiento al rojo gravitacional. Los resultados revelan que la interacción de fuerzas externas con la cáscara delgada tiene un impacto significativo en el comportamiento de las regiones estables. Notablemente, se demuestra que, bajo ciertas condiciones, la materia que soporta la cáscara delgada

puede ser no exótica, cumpliendo plenamente todas las condiciones de energía.

Keywords – Agujeros de gusano, Déficit/exceso de ángulo sólido, Condiciones de atravesabilidad, Agujeros de gusano de cáscara delgada, Condiciones de energía, Regiones de estabilidad

Abstract

This thesis investigates relativistic static traversable wormhole solutions that represent a subtle generalization of Schwarzschild wormholes. The study introduces a shape function with a linear dependence on the radial coordinate r , generating wormholes with non-flat asymptotic spacetimes. These wormholes are asymptotically locally flat, exhibiting a solid angle deficit (or excess) in the asymptotic limit $r \rightarrow \infty$. Of particular interest are wormholes connecting two asymptotically non-flat regions with a solid angle deficit, whose embeddings in three-dimensional Euclidean space extend from the throat to infinity. A novel phantom zero-tidal-force wormhole demonstrating such asymptotic behavior is presented. Conversely, in the presence of a solid angle excess, the size of wormhole embeddings is contingent upon the magnitude of this excess, with negative energy density permeating the entire space. The thesis thoroughly examines traversability conditions and analyzes the impact of the β -parameter on traveler motion when crossing the wormhole throat. Additionally, a comprehensive description of geodesic behavior for the obtained wormholes is provided.

The second phase of the research focuses on the stability analysis of thin-shell wormholes constructed from these non-asymptotically flat wormholes and the vacuum Schwarzschild solution. The investigation centers on spherically symmetric thin shells characterized by the aforementioned shape function with linear radial coordinate dependence. Stability analysis employs linear perturbations around a static solution, utilizing a master equation to elucidate the behavior of stable equilibrium regions. The study systematically examines both positive and negative surface energy densities and explores various gravitational redshift functions. The research concludes that external forces interacting with the thin shell significantly influence the behavior of stable regions. Notably, it demonstrates that under certain conditions, the matter supporting the thin shell can be non-exotic, fully satisfying all energy conditions.

Keywords – Wormholes, Solid angle deficit/excess, Traversability conditions, Thin-shell wormholes, Energy conditions, Stability regions

Índice general

AGRADECIMIENTOS	I
Resumen	II
Abstract	IV
1. Introducción	1
2. La formulación del agujero de gusano de Morris-Thorne	4
2.1. Agujero de gusano esféricamente simétrico y estático	4
2.2. Diagramas de embebimiento	9
2.3. Condición de ensanchamiento	11
2.4. Materia exótica	12
3. Formalismo de hipersuperficies	14
3.1. Construcción de la hipersuperficie	15
3.2. Ecuación de movimiento de la cáscara delgada	22
3.3. Ecuación maestra	24
4. Agujeros de gusano atravesables de tipo Schwarzschild	26
4.1. Agujeros de gusano con funciones de forma lineal	27
4.2. Agujeros de gusano tipo Schwarzschild sin fuerza de marea	31
4.3. Estudio de las condiciones de atravesabilidad	33
4.4. Comportamiento geodésico	37
4.4.1. Geodésicas radiales tipo tiempo	38
4.4.2. Geodésicas no radiales tipo tiempo	40
4.4.3. Puntos de inversión	42
4.4.4. Visualización de geodésicas	43
5. Cáscara delgada con agujero de gusano interior tipo Schwarzschild	47
5.1. Espacio-tiempo exterior Schwarzschild	47
5.2. Espacio-tiempo interior tipo Schwarzschild	49
5.3. Construcción de la cáscara delgada de agujeros de gusano atravesables de tipo Schwarzschild	50

5.4. Análisis de la ecuación de estado de la cáscara delgada	52
5.5. Análisis de las condiciones de energía de la cáscara delgada	54
5.6. Análisis de las regiones de estabilidad de la cáscara delgada	57
5.6.1. Densidad de energía superficial positiva	59
5.6.1.1. $2M > r_0$	59
5.6.1.2. $2M < r_0$	61
5.6.2. Densidad de energía superficial negativa	61
5.6.2.1. $2M > r_0$	62
5.6.2.2. $2M < r_0$	63
6. Conclusiones	65
Referencias	69

Índice de figuras

2.2.1. Diagrama de embebimiento del agujero de gusano de Morris y Thorne con $b(r) = r_0 = 1$. La región más angosta representa la garganta del agujero de gusano.	11
3.1.1. La figura muestra una hipersuperficie Σ que une dos variedades espaciotemporales $\mathcal{M}_+$ y $\mathcal{M}_-$	16
4.1.1. La figura muestra diagramas de embebimiento de la métrica (4.1.4) para secciones $t = \text{const}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\beta = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{10}$ (líneas continuas, discontinuas y punteadas, respectivamente). Todas las secciones exhiben una singularidad cónica debido al déficit de ángulo sólido de la métrica (4.1.4).	28
4.1.2. Para una visualización completa de las superficies cónicas, los diagramas deben rotarse alrededor del eje vertical z . La figura muestra los diagramas de embebimiento de las secciones $t = \text{const}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ para el agujero de gusano (4.1.3) (línea discontinua) y la métrica (4.1.4) (línea continua). Ambos diagramas corresponden a $\beta = 3/4$. La garganta está ubicada en $r = 1$. Para $r \rightarrow \infty$, la distancia entre la curva discontinua y la línea continua se aproxima a cero. A modo de comparación, incluimos el embebimiento del agujero de gusano (4.1.3) con $\beta = 0$ (línea punteada).	29
4.1.3. En la gráfica (a) se muestran las embebimientos de (4.1.3), que exhiben un déficit de ángulo sólido, para secciones $t = \text{const}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\beta = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{10}$ (líneas continuas, discontinuas, punteadas y de punto y raya, respectivamente). Para $0 \leq \beta < 1$, los embebimientos se extienden desde r_0 hasta el infinito. En la gráfica (b) se muestran los embebimientos de la ecuación (4.1.3) y $\beta = -\frac{1}{2}, -1, -15$ (líneas discontinuas, punteadas y continuas, respectivamente). La línea de punto y raya corresponde a $\beta = 0$. Para $\beta < 0$, los embebimientos se extienden desde r_0 hasta $r_{\text{max},i} = \frac{r_0(\beta-1)}{\beta} > r_0$, donde $i = 1, 2, 3$	32

- 4.4.1.El perfil de las geodésicas radiales hacia afuera (signo $+$) y hacia adentro (signo $-$) de la ecuación (4.4.8) se representa en la Figura (a). Ambas parten de $r_i = 4$ con velocidad inicial $v_i \neq 0$ en $\tau = 0$ ($r_0 = 2$). La geodésica radial hacia afuera (la curva superior) alcanza el infinito, mientras que la que va hacia adentro llega a r_0 en un tiempo finito, terminando con velocidad cero, ya que $\frac{dr}{d\tau}|_{r_0} = 0$ (la curva inferior). En la Figura (b) se representan las geodésicas radiales hacia afuera (la curva superior) y hacia adentro (la curva inferior) de la Figura 4.4.1a. Ambas partículas comienzan a moverse en $r_i = 4$ con velocidad inicial $v_i = \pm 3$ ($r_0 = 2$). Para la geodésica radial hacia adentro ($v_i = -3$), la partícula alcanza la garganta con velocidad cero, mientras que para la geodésica radial hacia afuera ($v_i = 3$) tenemos que $v \rightarrow v_{\text{máx}} = 3\sqrt{2}$ 40
- 4.4.2.El comportamiento de la velocidad radial para las geodésicas G_1 (línea punteada) y G_2 (línea continua) con un mismo valor de L se muestra en la Figura (a). La garganta está ubicada en $r_0 = 1$. Las velocidades para un valor común dado $r_i > r_0$ satisfacen la condición $|v_{G1}(r_i)| > |v_{G2}(r_i)|$. Observamos que ambas geodésicas están confinadas a un lado del agujero de gusano. Los radios de inversión son diferentes: para G_1 , el punto de retorno se encuentra en la garganta del agujero de gusano, mientras que para G_2 , el punto de retorno se ubica en un radio mayor que r_0 . En la fig. (b) se muestra el comportamiento cualitativo para la rama $\dot{l} = \sqrt{E^2 - 1 - \frac{L^2}{r(l)^2}}$ para diferentes valores de E , L y r_0 . Para las curvas discontinuas $\frac{L^2}{E^2-1} - \frac{r_0 L}{\sqrt{E^2-1}} \geq 0$, entonces existen puntos de inversión, mientras que para la curva continua $\frac{L^2}{E^2-1} - \frac{r_0 L}{\sqrt{E^2-1}} < 0$, por lo que las geodésicas alcanzan la garganta, donde se alcanza la velocidad mínima, y pasan al otro lado del agujero de gusano. 41
- 4.4.3.Las gráficas (a), (b) y (c) muestran diagramas de embebimiento para el caso donde las geodésicas no radiales están confinadas a un lado del agujero de gusano, y $r_0 = 1$, $\beta = -1/2, 0, 1/2$. En este caso, las geodésicas no cruzan la garganta ya que satisfacen la condición $\frac{L^2}{E^2-1} - \frac{r_0 L}{\sqrt{E^2-1}} \geq 0$, y por lo tanto existen puntos de inversión. En (c) mostramos geodésicas que se superponen consigo mismas en un punto cáustico. Las gráficas (d), (e) y (f) muestran diagramas de embebimiento para geodésicas no radiales que atraviesan la garganta del agujero de gusano, las cuales satisfacen la condición $\frac{L^2}{E^2-1} - \frac{r_0 L}{\sqrt{E^2-1}} < 0$ 46

- 5.3.1. La figura muestra un diagrama de embebimiento del agujero de gusano de cáscara delgada atravesable. La variedad completa se obtiene uniendo la solución de vacío de Schwarzschild $\mathcal{M}_+$ y la solución de agujero de gusano tipo Schwarzschild $\mathcal{M}_-$ en la superficie de unión Σ . La unión ocurre en una coordenada radial a_0 , que representa el radio de la cáscara delgada. El tensor de energía-momento superficial en Σ se expresa en términos de la densidad de energía superficial (5.3.1) y la presión superficial (5.3.2). 50
- 5.5.1. El comportamiento de la densidad de energía superficial (línea de punto y raya), la presión tangencial superficial (línea discontinua) y la Condición de Energía Nula (NEC, por sus siglas en inglés) (línea continua) como funciones del radio de unión a_0 se representa en estas gráficas para los valores de parámetros $2M > r_0$, $\Phi(r) = 0$ y $M = r_0 = 1$. La figura (a) muestra el caso para $\beta = \frac{1}{2}$, mientras que la figura (b) ilustra el escenario para $\beta = -\frac{1}{2}$. Para más detalles, consulte el texto. 57
- 5.5.2. El comportamiento de la densidad de energía superficial (línea de punto y raya), la presión tangencial superficial (línea discontinua) y la Condición de Energía Nula (NEC, por sus siglas en inglés) (línea continua) como funciones del radio de unión a_0 se representa en estas gráficas para los valores de parámetros $2M < r_0$, $\Phi(r) = 0$, $M = 1$ y $r_0 = 3$. La figura (a) ilustra el caso para $\beta = \frac{1}{2}$, mientras que la figura (b) muestra el escenario para $\beta = -\frac{1}{2}$. Consulte el texto principal para obtener más detalles. 58
- 5.5.3. Las gráficas muestran el comportamiento de la densidad de energía superficial (línea de punto y raya) y la presión tangencial superficial (línea discontinua) como funciones del radio de unión a_0 en escenarios donde se satisface la Condición de Energía Dominante (DEC, por sus siglas en inglés), para los valores de parámetros $2M > r_0$ y $\Phi(r) = 0$. La figura (a) representa el caso con $M = 1$, $r_0 = 0, 2$ y $\beta = 0, 1$, mientras que la figura (b) ilustra el escenario con $M = r_0 = 1$ y $\beta = -1$. Para más detalles, consulte el texto. 58
- 5.6.1. Las gráficas muestran regiones de estabilidad para los casos $\sigma(a_0) > 0$ y $r_0 < 2M$, comparando las funciones de corrimiento al rojo $\Phi(r) = 0$ (línea continua), $\Phi(r) = r_0/r$ (línea discontinua), y $\Phi(r) = r/r_0$ (línea de punto y raya). Para la gráfica (a) con $0 < \beta < 1$, las regiones de equilibrio estable se encuentran por debajo de las curvas. Para la gráfica (b) con $\beta < 0$, las regiones estables se sitúan nuevamente por debajo de las curvas. En ambos gráficos, la solución de marea nula presenta la región estable más pequeña. 60

- 5.6.2. La figura muestra las regiones de estabilidad para $\sigma(a_0) > 0$, $2M < r_0$ y las funciones de corrimiento al rojo $\Phi(r) = 0$ (línea continua), $\Phi(r) = r_0/r$ (línea discontinua) y $\Phi(r) = r/r_0$ (línea de punto y raya). Las regiones estables a la izquierda de la asíntota en $R = 4, 56$ se encuentran por encima de las curvas y disminuyen en tamaño en los casos con fuerzas de marea. Las segundas regiones estables, a la derecha de la asíntota en $R = 4, 56$, se sitúan por debajo de las curvas y aumentan en tamaño en los casos con fuerzas de marea. 62
- 5.6.3. El gráfico muestra las regiones de equilibrio estable para $\sigma(a_0) < 0$, $r_0 < 2M$ y las funciones de corrimiento al rojo $\Phi(r) = 0$ (línea continua), $\Phi(r) = r_0/r$ (línea discontinua) y $\Phi(r) = r/r_0$ (línea de punto y raya). Las curvas corresponden al caso $0 < \beta < 1$, con una asíntota en $R = 9, 56$. Las regiones estables a la izquierda de la asíntota en $R = 9, 56$ se encuentran por encima de las curvas y disminuyen en tamaño en los casos con fuerzas de marea. Las segundas regiones estables, a la derecha de la asíntota en $R = 9, 56$, se sitúan por debajo de las curvas y disminuyen en tamaño en los casos con fuerzas de marea. 63
- 5.6.4. Los gráficos muestran regiones de equilibrio estable para $\sigma(a_0) < 0$, $2M < r_0$, comparando las funciones de corrimiento al rojo: $\Phi(r) = 0$ (línea continua), $\Phi(r) = r_0/r$ (línea discontinua) y $\Phi(r) = r/r_0$ (línea de punto y raya). En el gráfico (a), para $0 < \beta < 1$, las regiones estables se encuentran por debajo de las curvas y disminuyen para las funciones de corrimiento al rojo con fuerzas de marea. El gráfico (b) corresponde a $\beta < 0$, donde las regiones estables se sitúan por debajo de las curvas. Podemos observar que $\Phi(r) = r_0/r$ (línea discontinua) presenta la región estable más grande, mientras que $\Phi(r) = r/r_0$ (línea de punto y raya) muestra la región estable más pequeña. 64

Capítulo 1

Introducción

Las ecuaciones de campo de Einstein admiten soluciones que sugieren la posibilidad teórica de viajes interestelares a través de túneles hipotéticos llamados agujeros de gusano. En 1916, L. Flamm [1] describió por primera vez la forma de un agujero de gusano utilizando una transformación de coordenadas, dando como resultado el paraboloides de Flamm. Años después, con la intención de formular una teoría fundamental de partículas, Einstein y Rosen [2] encontraron una solución que conectaba dos láminas idénticas mediante un puente. Esta solución se conoce como el puente de Einstein-Rosen. En 1955, J.A. Wheeler [3], utilizando un enfoque geométrico, postuló la existencia del geon. Dos años después, J.A. Wheeler y C.W. Misner estudiaron las consecuencias sobre la carga eléctrica, lo que les permitió concebir visualmente un agujero de gusano y acuñar este término en la literatura [4]. En 1973, H. Ellis [5] descubrió una nueva solución al acoplar un campo escalar a la métrica del espacio-tiempo. Este agujero de gusano atravesable se conoce como *drainhole*, o agujero de drenaje. Años después, en 1988, Morris y Thorne [6], utilizando estas soluciones como herramienta pedagógica para enseñar la teoría de Einstein, sentaron las bases para el estudio de los agujeros de gusano como una nueva rama de soluciones exóticas en la relatividad general. Descubrieron que la fuente de materia que sustenta los agujeros de gusano viola todas las condiciones de energía; la materia con estas propiedades se conoce como materia exótica.

Dentro del marco de la relatividad general, la materia que sustenta una geometría espacio-temporal debe cumplir ciertas condiciones. como la Condición de Energía Débil (WEC, por sus siglas en inglés), que requiere que la densidad de energía sea

positiva o dominante sobre las presiones. Para un fluido homogéneo con densidad de energía ρ y presión espacialmente homogénea p , se cumple si $\rho \geq 0$ y $\rho + p \geq 0$. Por continuidad, esto implica la Condición de Energía Nula (NEC, por sus siglas en inglés), $\rho + p \geq 0$. La Condición de Energía Fuerte (SEC, por sus siglas en inglés) se cumple si $\rho + p \geq 0$ y $\rho + 2p \geq 0$, mientras que la Condición de Energía Dominante (DEC, por sus siglas en inglés) se cumple si $\rho \geq 0$ y $-\rho \leq p \leq \rho$.

Agujeros de gusano asintóticamente planas son de particular interés [6, 7], sin embargo también se han estudiado en la literatura espacios-tiempo de agujeros de gusano más generales [8].

En esta tesis, se introduce una nueva clase de agujeros de gusano atravesables [9], con una ligera modificación de la componente $g_{rr}^{-1} = 1 - b(r)/r$ de la métrica esféricamente simétrica y estática. La función de forma $b(r)$ presenta una dependencia lineal en la coordenada radial, lo que satisface una de las condiciones mínimas propuestas por Morris y Thorne: la existencia de un valor mínimo $b(r_0) = r_0$ que determina la ubicación de la garganta. Esta generalización da lugar a dos clases de agujeros de gusano caracterizados por sus defectos topológicos: espacios-tiempos asintóticamente planos con déficit de ángulo sólido, y espacios-tiempos que se extienden hasta un radio máximo con exceso de ángulo sólido; estos últimos, de acuerdo a sus diagramas de embebimiento, podrían ser de dimensiones microscópicas. Se analizan las propiedades de la materia que soporta a estos agujeros de gusano en ausencia de fuerzas de marea; el tensor energía-momento resultante refleja los efectos geométricos producidos por un monopolo global y un agujero de gusano auto-dual estudiado en la literatura [10, 11]. Estas características están ausentes en el espacio-tiempo atravesable de agujeros de gusano de Schwarzschild. Además, se examinan las condiciones de atravesabilidad y se ofrece una descripción detallada de las geodésicas en este nuevo de agujero de gusano tipo Schwarzschild.

Además, se construyen soluciones de agujeros de gusano atravesables de cáscara delgada mediante el procedimiento de cortar y pegar, uniendo un agujero de gusano tipo Schwarzschild con un espacio-tiempo vacío de Schwarzschild exterior. El análisis del tensor energía-momento revela que la cáscara puede estar sostenida por materia exótica (como energía oscura o fantasma), o en ciertos casos, por materia no exótica que cumple las condiciones de energía.

Para evaluar la estabilidad de una solución estática a_0 , se utiliza una ecuación maestra que deriva de las propiedades de la materia, el tensor energía-momento, y la ecuación de balance de energía. Se introduce un parámetro η , asociado en la literatura con la velocidad del sonido en la cáscara delgada, contiene información clave sobre los espacios-tiempo unidos. Este análisis incluye un término adicional en la ecuación de balance, vinculado al flujo de momento debido a fuerzas externas sobre la cáscara, dependiente de los defectos topológicos y las fuerzas de marea. Así, se evalúan tres tipos de funciones de corrimiento al rojo ($\Phi(r) = 0$, $\Phi(r) = r/r_0$, y $\Phi(r) = r_0/r$), comparando gráficamente sus regiones de estabilidad.

La tesis está organizada de la siguiente manera: en el capítulo 2, se describe brevemente la formulación de los agujeros de gusano atravesables de Morris y Thorne. En el capítulo 3, se presentan aspectos fundamentales sobre la construcción de hipersuperficies de unión entre dos variedades. En el capítulo 4, se detalla la construcción de un agujero de gusano tipo Schwarzschild, su solución sin fuerza de marea y las geodésicas asociadas. En el capítulo 5, se aplican las técnicas desarrolladas para construir agujeros de gusano de cáscaras delgadas, utilizando el agujero de gusano tipo Schwarzschild como solución interior. Finalmente, en el capítulo 6, se presentan las conclusiones del trabajo.

Capítulo 2

La formulación del agujero de gusano de Morris-Thorne

2.1. Agujero de gusano esféricamente simétrico y estático

Poco después de la publicación de la Teoría General de la Relatividad de Albert Einstein en 1916, Karl Schwarzschild encontró la primera solución a las ecuaciones de campo. Esta solución describe una configuración gravitacional estática con simetría esférica en el vacío, esencialmente representando el campo gravitacional de un objeto central. Este resultado subraya una característica fundamental de la teoría general de la relatividad: su naturaleza no trivial, evidenciada por la existencia de efectos gravitacionales incluso en ausencia de materia. En el vacío, las ecuaciones de campo de Einstein se simplifican, ya que el tensor de energía-momento es nulo ($T_{\mu\nu} = 0$). Consecuentemente, el sistema se reduce a:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0, \quad (2.1.1)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico, y R es el escalar de curvatura. Al resolver las ecuaciones de campo de Einstein (2.1.1), se obtiene la bien conocida y estudiada métrica de Schwarzschild

en las coordenadas (t, r, θ, ϕ)

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.1.2)$$

donde $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ y r_s , es el radio de Schwarzschild, dado por:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}, \quad (2.1.3)$$

donde G es la constante de gravitación universal, M es la masa del objeto central, y c es la velocidad de la luz en el vacío.

La importancia de la métrica (2.1.2) radica en su predicción de la existencia de objetos gravitacionales con una curvatura espaciotemporal tan extrema que ni siquiera la luz es capaz de escapar de ellos, lo que llevó al concepto de agujeros negros.

La métrica de Schwarzschild (2.1.2) presenta singularidades en $r = 0$ y $r = r_s$, pero solo la primera constituye una singularidad real en la geometría del espacio-tiempo. Para discernir entre singularidades reales y aparentes, examinamos el comportamiento de los invariantes de coordenadas en estos puntos críticos. La curvatura del espacio-tiempo se cuantifica mediante el tensor de Riemann. Por tanto, para identificar singularidades reales, analizamos los escalares de curvatura derivados de este tensor, buscando divergencias. Un ejemplo ilustrativo es el escalar de Kretschmann:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48G^2M^2}{r^6}, \quad (2.1.4)$$

Este invariante diverge en $r = 0$, confirmando una singularidad real, mientras que permanece finito en $r = r_s$. Esto indica que la singularidad en $r = r_s$ es meramente debida a las coordenadas elegidas y puede eliminarse mediante una transformación adecuada. Para $r > r_s$, la solución exhibe simetría esférica y además es estática. Este resultado es fundamental, pues implica que cualquier solución esféricamente simétrica en el vacío será localmente isométrica a la solución de Schwarzschild, estableciéndola como la única solución de las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío. La superficie $r = r_s$ actúa como una frontera, separando dos regiones distintas: una interior ($0 < r < r_s$) y otra exterior ($r_s < r < \infty$). Una propiedad crucial de esta superficie es su comportamiento como membrana unidireccional: permite el paso hacia $r < r_s$, pero impide el retorno. Esta característica le

confiere el nombre de horizonte de eventos, marcando un límite fundamental en la causalidad y la información en el espacio-tiempo de Schwarzschild. En definitiva, la solución de Schwarzschild describe un agujero negro, las soluciones de agujeros de gusano atravesables requieren condiciones diferentes, que examinaremos a continuación.

En el contexto de las soluciones de agujeros de gusano, la métrica (2.1.2) representa a un agujero de gusano no atravesable debido a la presencia del horizonte de eventos.

Normalmente, se habla de agujeros de gusano atravesables con simetría esférica, y es posible que sólo existan en presencia de materia exótica, que puede tener incluso energía negativa y violaría todas las condiciones de energía [6, 7]. Hoy en día, la existencia de este tipo de campos de materia parece adecuada debido a la expansión acelerada observada del universo, que puede explicarse por efectos gravitatorios de la energía oscura o fantasma que también violan las condiciones energéticas.

También se han construido agujeros de gusano esféricos estáticos soportados por energía fantasma [12, 13]. En este caso, la materia fantasma que soporta los agujeros de gusano es un fluido anisótropo con una presión radial negativa muy fuerte, que satisface la ecuación de estado $p_r/\rho < -1$, es decir, $\rho + p_r < 0$.

La cuestión de la materia que soporta los agujeros de gusano se ha vuelto a examinar en la relatividad general, así como en teorías alternativas, y se ha demostrado que en algunos casos podría evitarse el requisito de la materia exótica. Por ejemplo, los agujeros de gusano de simetría cilíndrica han merecido una atención considerable, principalmente en relación con las cuerdas cósmicas. Las gargantas cilíndricas de los agujeros de gusano pueden existir en condiciones ligeramente diferentes en comparación con las esféricamente simétricas [14]. Por otra parte, en la gravedad de Brans-Dicke, los agujeros de gusano lorentzianos son compatibles con una fuente de materia que, aparte del campo escalar de Brans-Dicke, satisfaga las condiciones energéticas [15]. En el contexto de cáscaras delgadas (como se verá más adelante), estas condiciones de energías pueden violarse. Si una cáscara delgada está sustentada por materia con un parámetro de ecuación de estado ω , donde $\omega < -1$, entonces esta solución está sustentada por materia fantasma [16]. Para $-1 < \omega < -\frac{1}{3}$, la cáscara delgada está sustentada por

energía oscura. Se debe notar que en la literatura se han estudiado agujeros de gusano de cáscaras delgadas que podrían ser soportadas por materia no exótica, es decir, materia que satisface las condiciones de energía antes mencionadas. A este respecto podemos citar soluciones de agujeros de gusano de cáscaras delgadas con simetría cilíndrica, en el contexto de la teoría de Brans Dicke [17] así como soluciones con simetría esférica en presencia de una constante cosmológica positiva y campos escalares conformes [18].

Los autores Morris y Thorne [6], elaboraron un estudio sistemático de como se podrían construir soluciones de agujeros de gusano en el contexto de la Teoría de Einstein.

Comenzaremos resumiendo los aspectos clave relacionados con los agujeros de gusano atravesables de Morris y Thorne. Estos autores propusieron la siguiente métrica esféricamente simétrica y estática para construir agujeros de gusano:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.1.5)$$

donde $\Phi(r)$ y $b(r)$ son las funciones de corrimiento al rojo y forma, respectivamente. Además, Morris y Thorne analizaron los requisitos mínimos que se deben cumplir para obtener un agujero de gusano:

1. La función de forma debe satisfacer $1 - b/r \geq 0$, igualdad que se cumple para un radio mínimo r_0 donde se encuentra la garganta del agujero de gusano, es decir, $b(r_0) = r_0$. La garganta del agujero de gusano se incrementa desde $b(r_0)$ hacia $+\infty$. Este es un comportamiento que caracteriza al agujero de gusano permitiéndonos conectar dos universos distantes. En la garganta (b_0) hay una singularidad coordinada que hace que el coeficiente g_{rr} de la métrica se haga infinita. Sin embargo, la distancia radial

$$l(r) = \pm \int_{b_0}^r \frac{dr}{\left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)^{1/2}}, \quad (2.1.6)$$

debe permanecer finita en todas partes, lo que implica además,

$$1 - \frac{b(r)}{r} \geq 0 \quad (2.1.7)$$

a través del espacio-tiempo.

2. La función de corrimiento al rojo $\Phi(r)$ debe permanecer finita a lo largo del espacio-tiempo para asegurar la ausencia de horizontes y singularidades, logrando así un agujero de gusano atravesable.
3. La condición de expansión, $(b - b')/2b^2 > 0$, debe mantenerse para preservar la forma del agujero de gusano.

Morris y Thorne estudiaron específicamente agujeros de gusano asintóticamente planos. Tales soluciones conectan dos regiones dentro del mismo universo o universos diferentes. Para esta clase de agujeros de gusano, se debe imponer una condición adicional: la función de forma debe satisfacer $b/r \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$.

Considerando la métrica (2.1.5) y un tensor de energía-momento anisotrópico $T_{\mu\nu} = \text{diag}(-\rho, p_r, p_l, p_l)$ que soporta estos agujeros de gusano, los componentes de las ecuaciones de campo de Einstein están dados por,

$$\kappa\rho(r) = \frac{b'}{r^2}, \quad (2.1.8)$$

$$\kappa p_r(r) = -\tau(r) = 2 \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\Phi'}{r} - \frac{b}{r^3}, \quad (2.1.9)$$

$$\kappa p_l(r) = \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[\Phi'' + \Phi'^2 - \frac{b'r + b - 2r}{2r(r-b)} \Phi' - \frac{b'r - b}{2r^2(r-b)} \right], \quad (2.1.10)$$

donde los primos denotan $\partial/\partial r$, $\rho(r)$ es la densidad de energía, $p_r(r)$ es la presión radial y $p_l(r)$ es la presión lateral medida en la dirección ortogonal a la dirección radial.

Para construir agujeros de gusano se pueden considerar ecuaciones de estado específicas para p_r o p_l , o bien opciones restringidas para las funciones de corrimiento al rojo y de forma, entre otras.

Evalutando las ecuaciones de campo en la garganta del agujero de gusano $b(r_0) = r_0$,

entonces

$$\rho(r_0) = \frac{b'(r_0)}{\kappa r_0^2}, \quad (2.1.11)$$

$$\tau(r_0) = \frac{1}{\kappa r_0^2}, \quad (2.1.12)$$

$$p_l(r_0) = \frac{1}{\kappa} \left[\frac{\Phi'(r_0)}{r_0} \left(\frac{1}{2} - \frac{b'(r_0)}{2} \right) + \frac{b'(r_0)}{2r_0^2} - \frac{1}{2r_0^2} \right]. \quad (2.1.13)$$

De la ecuación de conservación $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$, obtenemos la ecuación de Euler-Relativista:

$$p'_r + (\rho + p_r) \Phi' - \frac{2}{r} (p_l - p_r) = 0. \quad (2.1.14)$$

Las ecuaciones (2.1.8), (2.1.9), (2.1.10) y (2.1.14) forman un sistema de ecuaciones diferenciales con las siguientes incógnitas $\rho(r)$, $p_r(r)$, $p_l(r)$, $b(r)$ y $\Phi(r)$, para solucionar este sistema es necesario introducir ecuaciones adicionales que nos permita cerrar el sistema.

Integrando (2.1.8)

$$b(r) = b(r_0) + \kappa \int_{r_0}^r \rho(r') r'^2 dr' = 2m(r), \quad (2.1.15)$$

podemos expresar la masa efectiva contenida en el interior de una esfera de radio r

$$m(r) = \frac{b(r_0)}{2} + \frac{\kappa}{2} \int_{r_0}^r \rho(r') r'^2 dr'. \quad (2.1.16)$$

La función de forma tiene una interpretación directa en término de la distribución de masa al interior del agujero de gusano. Lejos de la distribución de masa en el infinito espacial tenemos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} m(r) = \frac{r_0}{2} + \frac{\kappa}{2} \int_{r_0}^{\infty} \rho(r') r'^2 dr' = M. \quad (2.1.17)$$

2.2. Diagramas de embebimiento

Para visualizar la geometría de estos agujeros de gusano, es útil construir un diagrama de embebimiento, que nos permite representar una superficie

bidimensional en un espacio tridimensional.

Para realizar el diagrama de embebimiento del agujero de gusano, procedemos a considerar cortes espaciales a tiempo constante, $t = \text{cte.}$ y usando la simetría esférica hacemos un corte ecuatorial, es decir, $\theta = \frac{\pi}{2}$, entonces la métrica (2.1.5) toma la siguiente forma

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} + r^2 d\phi^2. \quad (2.2.1)$$

El espacio tridimensional Euclídeo en coordenadas cilíndricas se puede escribir como

$$ds^2 = [1 + z'(r)^2] dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (2.2.2)$$

Identificamos las coordenadas (r, ϕ) del espacio de embebimiento con las coordenadas (r, ϕ) de la sección espacial de agujero de gusano igualando las ecuaciones (2.2.1) y (2.2.2)

$$\frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} + r^2 d\phi^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right] dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (2.2.3)$$

Encontramos una ecuación diferencial que nos permite evaluar distintas funciones de forma en un espacio tridimensional

$$\frac{dz(r)}{dr} = \pm \left(\frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{-1/2}. \quad (2.2.4)$$

La superficie $z(r)$, permite dilucidar la “forma” clásica de un agujero de gusano, es decir, la manera en que la función $b(r)$ genera la forma del agujero de gusano. Resolviendo la ecuación (2.2.4) para $b(r) = r_0$ obtenemos

$$z(r) = \pm \frac{2(r - r_0)}{\sqrt{\frac{r}{r_0} - 1}} + C \quad (2.2.5)$$

Para visualizar la superficie $z(r)$, podemos evaluar la garganta del agujero de

gusano como $r_0 = 1$ y $C = 0$, entonces obtenemos la superficie mostrada en la Figura (2.2.1), donde la región más angosta, representa la garganta del agujero de gusano.

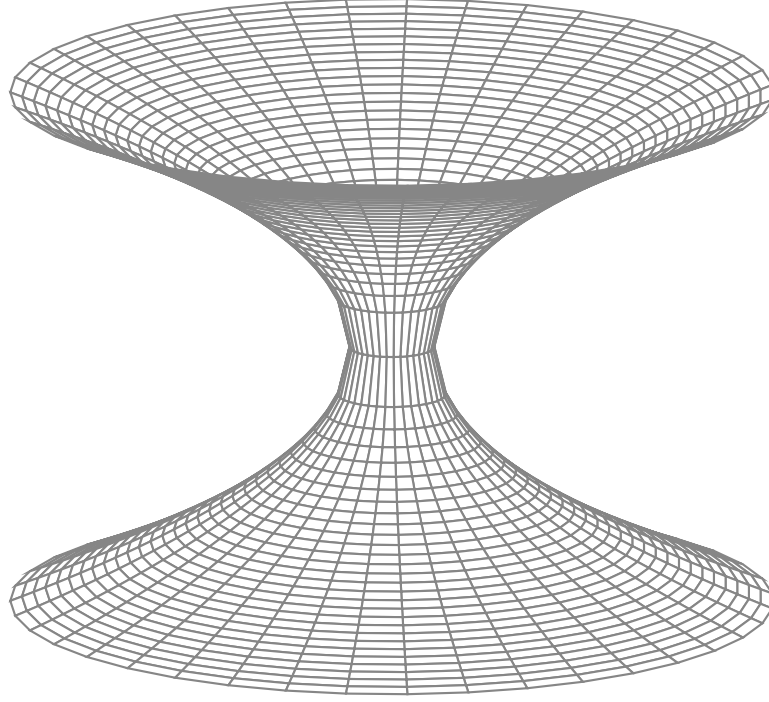


Figura 2.2.1: Diagrama de embebimiento del agujero de gusano de Morris y Thorne con $b(r) = r_0 = 1$. La región más angosta representa la garganta del agujero de gusano.

2.3. Condición de ensanchamiento

Para que el agujero de gusano conecte las dos regiones asintóticamente planas, es necesario que la superficie inmersa se ensanche hacia afuera desde la garganta, como se puede apreciar en el diagrama de la Figura 2.2.1. Esta condición se puede lograr si la función inversa de $z(r)$, es decir $r(z)$ satisface en la cercanía de la garganta $b(r_0) = r_0$, la condición

$$\frac{d^2 r}{dz^2} > 0. \quad (2.3.1)$$

Utilizando la forma inversa de (2.2.4),

$$\frac{dr(z)}{dz} = \pm \left(\frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{1/2}. \quad (2.3.2)$$

Diferenciando r con respecto a z , logramos encontrar la ecuación que se debe satisfacer en $b(r_0) = r_0$,

$$\frac{d^2 r(z)}{dz^2} = \frac{b - b'r}{2b^2} > 0. \quad (2.3.3)$$

Esta condición es conocida como la condición de ensanchamiento.

2.4. Materia exótica

Habiendo establecido la geometría de los agujeros de gusano atravesables, ahora examinaremos las propiedades inusuales de la materia necesaria para sostener estas estructuras.

Analicemos la característica principal de la materia que soporta a esta configuración gravitacional. Partiremos con definir la función adimensional

$$\zeta \equiv \frac{\tau(r) - \rho(r)}{|\rho(r)|}. \quad (2.4.1)$$

Esta ecuación nos permite indagar el aspecto clave que cumple la tensión en la vecindad de la garganta. Reemplazando las ecuaciones (2.1.8) y (2.1.9) en (2.4.1)

$$\zeta = \frac{1}{|b'|} \left(\frac{b}{r} - 2\Phi'(r - b) - b' \right). \quad (2.4.2)$$

Reescribiendo esta ecuación con ayuda de (2.3.3)

$$\zeta = \frac{1}{r|b'|} (b - rb') - (r - b) \frac{2\Phi'}{|b'|}, \quad (2.4.3)$$

$$= \frac{2b^2}{r|b'|} \frac{d^2 r}{dz^2} - 2(r - b) \frac{\Phi'}{|b'|}, \quad (2.4.4)$$

Esta ecuación es análoga a (2.3.3). Ahora bien, dado que ρ es finita, luego b' es finita y $(r - b) \frac{\Phi'}{|b'|} \rightarrow 0$ en la garganta, junto a la condición (2.3.3), obtenemos

$$\zeta(0) = \zeta_0 = \frac{1}{|\rho_0|} (\tau_0 - \rho_0) > 0. \quad (2.4.5)$$

Esta desigualdad tiene una fuerte consecuencia sobre la propiedad de la materia que soporta el agujero de gusano, es decir,

$$\tau_0 > \rho_0. \quad (2.4.6)$$

Significa que la tensión τ_0 debe ser mucho mayor como para exceder a la densidad de energía ρ_0 . Este tipo de materia se conoce como “materia exótica” y cumple con:

$$\tau > \rho > 0. \quad (2.4.7)$$

Esta condición viola la condición de energía débil típica de la materia ordinaria, donde se espera que $\rho \geq |p|$ para cualquier presión p .

Esto implicaría que para un observador local que se mueve lo suficientemente rápido mediría una densidad de masa-energía negativa mientras cruza la garganta.

Capítulo 3

Formalismo de hipersuperficies

Como se ha mencionado en los capítulos anteriores, la construcción de soluciones de agujeros de gusano en el marco de la relatividad general y en teorías más generales de la gravedad se puede abordar mediante diversos métodos. Basándonos en la literatura existente, podemos destacar los siguientes enfoques:

- Imposición de restricciones geométricas, como la simetría esférica, existencia de un radio mínimo y la condición de ensanchamiento, introducidas por Morris y Thorne [6]. Además, se pueden imponer restricciones sobre la materia que soporta el agujero de gusano [19].
- Métodos de “corte y pegado” que involucran la unión de secciones de diferentes espacio-tiempos [7].

El último enfoque, sobre la teoría de hipersuperficies singulares y cáscaras delgadas formulada por W. Israel [20] ha realizado contribuciones significativas a varias áreas de la gravitación. Esta teoría se basa en el estudio de la curvatura extrínseca de un espacio-tiempo específico, permitiendo un tratamiento más simple e independiente de las coordenadas para analizar las condiciones de pegado. Así, este método permitió a Visser [21, 22] idear una nueva forma de construir túneles espacio-temporales como los agujeros de gusano. El procedimiento implica recortar una región del espacio-tiempo y hacer coincidir en ella otra variedad de espacio-tiempo. Visser argumenta que esta técnica permitiría confinar arbitrariamente la materia exótica en una región finita del espacio-tiempo, de modo que un viajero podría atravesar un agujero de gusano de cáscara delgada sin experimentar los efectos de la materia exótica. Otra ventaja de esta técnica es que permite estudiar la

estabilidad de las cáscaras delgadas, analizando diferentes ecuaciones de estado [23], o sin especificar una ecuación de estado [16, 24, 25, 26], extendiendo el análisis a diferentes simetrías espaciotemporales [17], e incluso aplicando este estudio a teorías de la gravedad más generales [15, 27, 28, 29].

3.1. Construcción de la hipersuperficie

Describamos ahora aspectos cruciales relativos a los agujeros de gusano de cáscaras delgadas, basándonos en el análisis teórico general realizado en [24]. Para construir agujeros de gusano de cáscara delgada [15, 16, 17, 18, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29], debemos cortar y pegar secciones de dos variedades distintas que denotamos como la región exterior $\mathcal{M}_+$ y la región interior $\mathcal{M}_-$. Posteriormente, estas variedades deben unirse de tal forma que obtengamos la variedad completa, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_+ \cup \mathcal{M}_-$, es decir, un espacio-tiempo geodésicamente completo. En otras palabras, esta única variedad $\mathcal{M}$ se obtiene uniendo las dos variedades distintas $\mathcal{M}_+$ y $\mathcal{M}_-$, en sus límites. Estos límites están dados por Σ_+ y Σ_- , respectivamente. Esto nos lleva a la identificación de sus límites, de modo que las hipersuperficies donde se produce la unión deben satisfacer $\Sigma_+ = \Sigma_- = \Sigma$. Las métricas inducidas en las hipersuperficies Σ_+ y Σ_- también deben satisfacer $g_{ij}^+ = g_{ij}^- = g_{ij}$, lo que significa que si tomamos las coordenadas $\xi^i = \xi^i(\tau, \theta, \phi)$ intrínsecas a la hipersuperficie, estas permanecen invariantes bajo transformaciones isométricas $g_{ij}^+(\xi) = g_{ij}^-(\xi) = g_{ij}(\xi)$. Además, si $g_{\mu\nu}^+(x_+^\mu)$ y $g_{\mu\nu}^-(x_-^\mu)$ son las métricas de $\mathcal{M}_+$ y $\mathcal{M}_-$, respectivamente, entonces la primera forma fundamental de la hipersuperficie de unión Σ está dada por $g_{ij} = g_{\mu\nu} e_{(i)}^\mu e_{(j)}^\nu|_{\pm}$, por lo tanto su métrica intrínseca está dada por

$$ds_\Sigma^2 = -d\tau^2 + a(\tau)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.1.1)$$

donde $a(\tau)$ es el radio de la cáscara delgada y τ es el tiempo propio.

La hipersuperficie de unión está definida por la ecuación paramétrica $f(x^\mu(\xi^i)) = 0$, donde $x^\mu(\tau, \theta, \phi) = (t(\tau), a(\tau), \theta, \phi)$. De esta forma, el vector normal unitario n_μ a la hipersuperficie Σ está definido por:

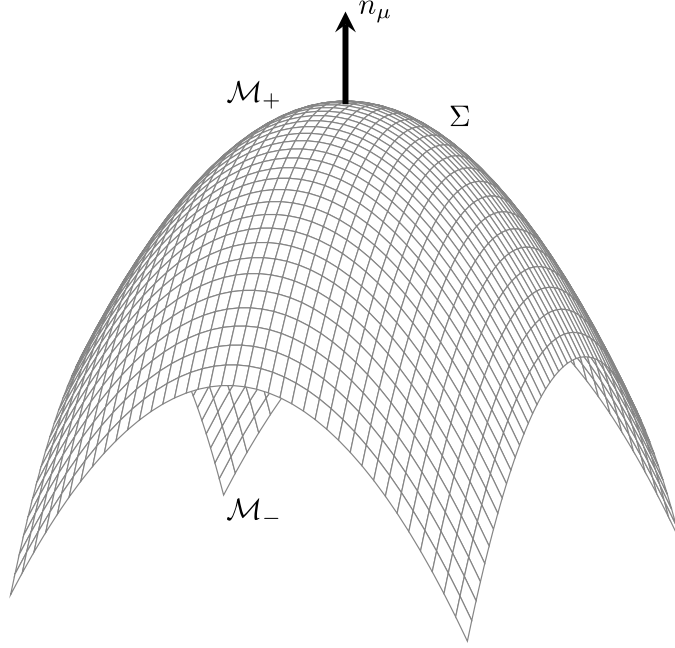


Figura 3.1.1: La figura muestra una hipersuperficie Σ que une dos variedades espaciotemporales $\mathcal{M}_+$ y $\mathcal{M}_-$.

$$n_\mu = \pm \left| g^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{\partial f}{\partial x^\beta} \right|^{-1/2} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \quad (3.1.2)$$

Con $n_\mu n^\mu = +1$ y $n_\mu e(i)^\mu = 0$. El formalismo de Israel requiere que los vectores normales apunten desde $\mathcal{M}_-$ a $\mathcal{M}_+$.

La curvatura extrínseca o segunda forma fundamental es definida como $K_{ij} = n_{\mu;\nu} e_{(i)}^\mu e_{(j)}^\nu$. Diferenciando $n_\mu e_{(i)}^\mu = 0$ con respecto a ξ^j obtenemos

$$n_\mu \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \xi^i \partial \xi^j} = -n_{\mu,\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^j} \quad (3.1.3)$$

Entonces, la curvatura extrínseca toma la forma más general

$$K_{ij}^\pm = -n_\mu \left(\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu\pm} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^j} \right) \quad (3.1.4)$$

Para la discontinuidad de K_{ij} en la hipersuperficie Σ , utilizaremos la siguiente notación

$$\kappa_{ij} = K_{ij}^+ - K_{ij}^- \quad (3.1.5)$$

De las ecuaciones de Lanczos se derivan las componentes del tensor energía-momento inducido en la hipersuperficie que vienen dadas por

$$S^i_j = -\frac{1}{8\pi} \left(\kappa^i_j + \delta^i_j \kappa^k_k \right), \quad (3.1.6)$$

debido a la simetría esférica, las ecuaciones se simplifican notablemente, resultando

$$\kappa^i_j = \text{diag} \left(\kappa^\tau_\tau, \kappa^\theta_\theta, \kappa^\phi_\phi \right). \quad (3.1.7)$$

El tensor energía-momento superficial puede escribirse en términos de la densidad de energía superficial σ y la presión superficial $\mathcal{P}$, como

$$S^i_j = \text{diag} \left(-\sigma, \mathcal{P}, \mathcal{P} \right). \quad (3.1.8)$$

Por lo tanto, las ecuaciones de Lanczos se expresan explícitamente como

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \kappa^\theta_\theta, \quad (3.1.9)$$

$$\mathcal{P} = \frac{1}{8\pi} \left(\kappa^\tau_\tau + \kappa^\theta_\theta \right). \quad (3.1.10)$$

Además, las ecuaciones de Lanczos nos proporciona una ecuación de balance sobre la cáscara delgada por medio de

$$S^i_{j|i} = \left[T_{\mu\nu} e^\mu_{(j)} n^\nu \right]^\pm. \quad (3.1.11)$$

Ahora, consideraremos dos espacio-tiempos genéricos estáticos esféricamente

simétricos dados por los siguientes elementos de línea:

$$ds^2 = -e^{2\Phi_{\pm}(r_{\pm})} dt_{\pm}^2 + \frac{dr_{\pm}^2}{1 - \frac{b_{\pm}(r_{\pm})}{r_{\pm}}} + r_{\pm}^2 (d\theta_{\pm}^2 + \sin^2 \theta_{\pm} d\phi_{\pm}^2), \quad (3.1.12)$$

que claramente están relacionadas con la métrica (2.1.5). En este caso los signos $+$ y $-$ corresponden a las variedades espaciotemporales $\mathcal{M}_+$ y $\mathcal{M}_-$, respectivamente. Entonces, la unión ocurre en $f(r, \tau) = r - a(\tau) = 0$, donde $a(\tau)$ es el radio de la hipersuperficie. La cuadrivelocidad medida en el sistema de coordenadas estático a ambos lados de la función $f(r, \tau)$ es dado por,

$$U_{\pm}^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = (\dot{t}, \dot{a}, 0, 0) = \left(e^{-\Phi(a)} \sqrt{\frac{\dot{a}^2 + 1 - \frac{b_{\pm}(a)}{a}}{1 - \frac{b_{\pm}(a)}{a}}}, \dot{a}, 0, 0 \right), \quad (3.1.13)$$

donde los puntos denotan la derivada con respecto a τ .

Luego, la normal a la hipersuperficie de unión, determinada por (3.1.2) está dada por:

$$n_{\mu} = \pm \left| g^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial f}{\partial x^{\beta}} \right|^{-1/2} \frac{\partial f}{\partial x^{\mu}}, \quad (3.1.14)$$

$$n_{\mu} = \pm \left| g^{tt} \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} + g^{rr} \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial r} \right|^{-1/2} \frac{\partial f}{\partial x^{\mu}} \quad (3.1.15)$$

Reemplazando $\dot{t}$, entonces, para la métrica (3.1.12), el vector normal está dado por

$$n_{\mu}^{\pm} = \left(-\frac{e^{\Phi_{\pm}(a)}}{\sqrt{1 - \frac{b_{\pm}(a)}{a}}} \dot{a}, \frac{\sqrt{\dot{a}^2 + 1 - \frac{b_{\pm}(a)}{a}}}{1 - \frac{b_{\pm}(a)}{a}}, 0, 0 \right). \quad (3.1.16)$$

Los componentes no triviales de la curvatura extrínseca se pueden calcular directamente como

$$K_{\tau}^{\tau\pm} = \frac{\Phi'_{\pm}(a) \left(\dot{a}^2 + 1 - \frac{b_{\pm}(a)}{a} \right) + \ddot{a} - \frac{\dot{a}^2(b_{\pm}(a) - ab'_{\pm}(a))}{2a(a - b_{\pm}(a))}}{\sqrt{\dot{a}^2 + 1 - \frac{b_{\pm}(a)}{a}}}, \quad (3.1.17)$$

$$K_{\theta}^{\theta\pm} = \pm \frac{1}{a} \sqrt{\dot{a}^2 + 1 - \frac{b_{\pm}(a)}{a}}. \quad (3.1.18)$$

A continuación, utilizando las ecuaciones (3.1.5) y (3.1.6) podemos calcular los componentes del tensor de energía-momento superficial de la cáscara delgada

$$\sigma(a) = -\frac{1}{4\pi a} \left[\sqrt{\dot{a}^2 + 1 - \frac{b_+(a)}{a}} - \sqrt{\dot{a}^2 + 1 - \frac{b_-(a)}{a}} \right], \quad (3.1.19)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(a) = & \frac{1}{8\pi a} \left[\frac{(a\Phi'_+(a) + 1) \left(\dot{a}^2 + 1 - \frac{b_+(a)}{a} \right) + a\ddot{a} - \frac{\dot{a}^2(b_+(a) - ab'_+(a))}{2(a - b_+(a))}}{\sqrt{\dot{a}^2 + 1 - \frac{b_+(a)}{a}}} \right. \\ & \left. - \frac{(a\Phi'_-(a) + 1) \left(\dot{a}^2 + 1 - \frac{b_-(a)}{a} \right) + a\ddot{a} - \frac{\dot{a}^2(b_-(a) - ab'_-(a))}{2(a - b_-(a))}}{\sqrt{\dot{a}^2 + 1 - \frac{b_-(a)}{a}}} \right]. \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

Adicionalmente, para nuestro objetivo de analizar la estabilidad de una cáscara delgada, vamos a considerar la ecuación (3.1.11). A partir de esta, derivaremos la ecuación de balance de energía para la cáscara delgada, que se expresa como:

$$\frac{d\sigma}{d\tau} + (\sigma + \mathcal{P}) \frac{1}{A} \frac{dA}{d\tau} = \Xi \dot{a}, \quad (3.1.21)$$

donde,

$$\begin{aligned} \Xi(a) = & \frac{1}{4\pi a^2} \left[\left(a\Phi_+(a) + \frac{ab'_+(a) - b_+(a)}{2(a - b_+(a))} \right) \sqrt{\dot{a}^2 + 1 - \frac{b_+(a)}{a}} \right. \\ & \left. - \left(a\Phi_-(a) + \frac{ab'_-(a) - b_-(a)}{2(a - b_-(a))} \right) \sqrt{\dot{a}^2 + 1 - \frac{b_-(a)}{a}} \right], \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

reescribiendo

$$\frac{d\sigma}{d\tau} + \frac{2(\sigma + \mathcal{P})}{a} \frac{da}{d\tau} = \Xi \dot{a}, \quad (3.1.23)$$

$$\dot{\sigma} + 2\frac{\dot{a}}{a}(\sigma + \mathcal{P}) = \Xi \dot{a}. \quad (3.1.24)$$

En el lado izquierdo de la ecuación (3.1.24), tenemos la variación de la energía interna y el trabajo realizado por la fuerza interna de la propia cáscara delgada, y en el lado derecho, tenemos el término correspondiente al trabajo realizado por las fuerzas externas sobre la cáscara. Más específicamente, $\Xi(a)$ surge debido a una discontinuidad en la cáscara y se interpreta como un flujo de momento a través de la cáscara delgada. De la ecuación (3.1.22), notamos que $\Phi_+(a) = \Phi_-(a) = 0$ no implica necesariamente $\Xi(a) = 0$. Esto dependerá de la forma de las funciones de forma $b_+(a)$ y $b_-(a)$.

Reescribiendo la ecuación (3.1.24) mediante

$$\frac{\dot{\sigma}}{\dot{a}} = \frac{d\sigma}{d\tau} \frac{d\tau}{da} = \frac{d\sigma}{da} = \sigma', \quad (3.1.25)$$

entonces

$$\sigma' = -\frac{2}{a}(\sigma + \mathcal{P}) + \Xi. \quad (3.1.26)$$

y su segunda derivada

$$\sigma'' = -\frac{2}{a}(\sigma' + \mathcal{P}') + \frac{2}{a^2}(\sigma + \mathcal{P}) + \Xi', \quad (3.1.27)$$

$$= -\frac{2\sigma'}{a} - \frac{2}{a} \left(\sigma' \frac{\mathcal{P}'}{\sigma'} \right) + \frac{2}{a^2}(\sigma + \mathcal{P}) + \Xi', \quad (3.1.28)$$

$$= \frac{6}{a^2}(\sigma + \mathcal{P}) - \frac{2}{a}\Xi - \frac{2}{a}(\sigma'\eta) + \Xi', \quad (3.1.29)$$

donde hemos introducido el parámetro η dado por

$$\eta = \frac{\mathcal{P}'}{\sigma'} = \frac{d\mathcal{P}}{d\sigma}, \quad (3.1.30)$$

este parámetro relaciona la variación de presión con la variación de densidad de energía en la cáscara delgada. Es decir, está ligada con la ecuación de estado de la cáscara. En la literatura se interpreta a este parámetro como la velocidad del sonido en la cáscara delgada. Reescribiendo la ecuación (3.1.29) en término de la masa superficial de la cáscara

$$\sigma(a) = \frac{m_s(a)}{4\pi a^2}, \quad (3.1.31)$$

donde

$$m_s(a) = -a \left(\sqrt{\dot{a}^2 + 1 - \frac{b_+(a)}{a}} + \sqrt{\dot{a}^2 + 1 - \frac{b_-(a)}{a}} \right), \quad (3.1.32)$$

obtenemos

$$\left(\frac{m_s}{2a} \right)'' = 4\pi\sigma' + 2\pi a\sigma'', \quad (3.1.33)$$

$$= -\frac{8\pi}{a}(\sigma + \mathcal{P}) + 4\pi\Xi + \frac{12\pi a}{a^2}(\sigma + \mathcal{P}), \quad (3.1.34)$$

$$-\frac{4\pi a}{a}\Xi - \frac{4\pi a}{a}(\sigma'\eta) + 2\pi a\Xi', \quad (3.1.35)$$

$$= \frac{4\pi}{a}(\sigma + \mathcal{P}) - 4\pi\sigma'\eta + 2\pi a\Xi', \quad (3.1.36)$$

reescribiendo

$$\left(\frac{m_s}{2a} \right)'' = \Upsilon - 4\pi\sigma'\eta, \quad (3.1.37)$$

donde

$$\Upsilon = \frac{4\pi}{a}(\sigma + \mathcal{P}) + 2\pi a\Xi'. \quad (3.1.38)$$

Se observa que la ecuación (3.1.37) incluye explícitamente el parámetro η , que se utilizará más adelante para analizar las regiones de estabilidad de la cáscara delgada.

3.2. Ecuación de movimiento de la cáscara delgada

Para analizar cualitativamente la estabilidad del agujero de gusano de cáscara delgada se asumirá la integrabilidad de la densidad de energía superficial (3.1.19). Luego, podemos considerar una linealización en torno a una solución estática a_0 . A partir de la ecuación (3.1.32), deducimos la ecuación de movimiento de cáscara delgada dada por

$$\dot{a}^2 + V(a) = 0. \quad (3.2.1)$$

Entonces, $V(a)$ representa un potencial, y está dado por

$$V(a) = 1 - \frac{b_+(a) + b_-(a)}{2a} - \left(\frac{m_s(a)}{2a} \right)^2 - \frac{(b_+(a) - b_-(a))^2}{4m_s(a)^2}, \quad (3.2.2)$$

$$= 1 - \frac{b_+(a) + b_-(a)}{2a} - \left(\frac{m_s(a)}{2a} \right)^2 - \left(\frac{1}{m_s(a)} \frac{b_+(a) - b_-(a)}{2} \right)^2 \quad (3.2.3)$$

$$V(a) = F_1(a) - \left[\frac{m_s(a)}{2a} \right]^2 - \left[\frac{F_2(a)}{m_s(a)} \right]^2, \quad (3.2.4)$$

esta ecuación está escrita en términos de la masa de la cáscara delgada $m_s(a) = 4\pi a^2 \sigma(a)$ y las funciones $F_1(a)$ y $F_2(a)$, definidas por

$$F_1(a) = 1 - \frac{b_+(a) + b_-(a)}{2a}, \quad (3.2.5)$$

$$F_2(a) = \frac{b_+(a) - b_-(a)}{2}. \quad (3.2.6)$$

Vamos a considerar una linealización alrededor de una solución estática a_0 , en la ecuación de movimiento de la cáscara delgada. En consecuencia $m_s(a_0) = 4\pi a^2 \sigma(a_0)$, entonces la masa de la cáscara delgada toma la forma simple

$$m_s(a_0) = -a_0 \left(\sqrt{1 - \frac{b_+(a_0)}{a_0}} + \sqrt{1 - \frac{b_-(a_0)}{a_0}} \right). \quad (3.2.7)$$

De la ecuación de movimiento ecuación (3.2.1)

$$\dot{a}^2 + V(a) = 0 \Rightarrow \dot{a}^2 = -V(a).$$

Expandiendo en series de Taylor el potencial $V(a)$ hasta segundo orden alrededor de la solución a_0 ,

$$V(a) = V(a_0) + V'(a_0)(a - a_0) + \frac{1}{2}V''(a_0)(a - a_0)^2 + O(a - a_0)^3.$$

Además, alrededor de la solución estática $\dot{a}_0 = \ddot{a}_0 = 0$, se desprenden las siguientes condiciones $V(a_0) = V'(a_0) = 0$, entonces, basta con considerar

$$V(a) = \frac{1}{2}V''(a_0)(a - a_0)^2.$$

Usando la ecuación (3.2.4), la primera y segunda derivada de $V(a)$ son

$$V'(a) = F_1' - 2 \left(\frac{m_s}{2a} \right) \left(\frac{m_s}{2a} \right)' - 2 \left(\frac{F_2}{m_s} \right) \left(\frac{F_2}{m_s} \right)', \quad (3.2.8)$$

$$\begin{aligned} V''(a) = & F_1'' - 2 \left[\left(\frac{m_s}{2a} \right)' \right]^2 - 2 \left(\frac{m_s}{2a} \right) \left(\frac{m_s}{2a} \right)'' \\ & - 2 \left[\left(\frac{F_2}{m_s} \right)' \right]^2 - 2 \left(\frac{F_2}{m_s} \right) \left(\frac{F_2}{m_s} \right)''. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Dado que, $V'(a_0) = 0$, podemos reescribir (3.2.9) como

$$\left(\frac{m_s}{2a_0} \right)' \equiv \Gamma = \left(\frac{a_0}{m_s} \right) \left[F_1' - 2 \left(\frac{F_2}{m_s} \right) \left(\frac{F_2}{m_s} \right)' \right]. \quad (3.2.10)$$

De las ecuaciones (3.2.9) y (3.2.10), encontramos la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{m_s}{2a_0}\right) \left(\frac{m_s}{2a_0}\right)'' &< \frac{F_1''}{2} - \left[\left(\frac{m_s}{2a_0}\right)'\right]^2 - \left[\left(\frac{F_2}{m_s}\right)'\right]^2 \\
 &\quad - \left(\frac{F_2}{m_s}\right) \left(\frac{F_2}{m_s}\right)'', \\
 \left(\frac{m_s}{2a_0}\right) \left(\frac{m_s}{2a_0}\right)'' &< \frac{F_1''}{2} - \Gamma^2 - \left[\left(\frac{F_2}{m_s}\right)'\right]^2 \\
 &\quad - \left(\frac{F_2}{m_s}\right) \left(\frac{F_2}{m_s}\right)'', \\
 \left(\frac{m_s}{2a_0}\right) \left(\frac{m_s}{2a_0}\right)'' &< \Psi - \Gamma^2,
 \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

donde Ψ es definida como

$$\Psi = -\frac{F_1''}{2} - \left[\left(\frac{F_2}{m_s}\right)'\right]^2 - \left(\frac{F_2}{m_s}\right) \left(\frac{F_2}{m_s}\right)''. \tag{3.2.12}$$

Existe una solución estable solo si a_0 es un mínimo local de $V(a_0)$ y si se verifica que la segunda derivada del potencial es mayor que cero, es decir, $V''(a_0) > 0$.

3.3. Ecuación maestra

Ahora podemos deducir una ecuación maestra que dicta las configuraciones de equilibrio estable [16, 26]. Evaluando la solución estática a_0 , sustituiremos la ecuación (3.1.37) en (3.2.11), y despejando el parámetro $\eta_0 = \eta(a_0)$, encontramos la ecuación maestra que nos permite estudiar las regiones de estabilidad de la cáscara delgada,

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{m_s}{2a_0}\right) \left(\frac{m_s}{2a_0}\right)'' &< \Psi - \Gamma^2, \\
 \left(\frac{m_s}{2a_0}\right) (\Upsilon - 4\pi\sigma'\eta_0) &< \Psi - \Gamma^2, \\
 \left(\frac{m_s}{2a_0}\right) \Upsilon - \left(\frac{m_s}{2a_0}\right) 4\pi\sigma'\eta_0 &< \Psi - \Gamma^2,
 \end{aligned}$$

reordenando los términos de esta ecuación

$$\begin{aligned} -(\sigma' m_s \eta_0) &< \frac{a}{2\pi} (\Psi - \Gamma^2) - \left(\frac{m_s}{4\pi}\right) (\Upsilon), \\ \sigma' m_s \eta_0 &> -\frac{a_0}{2\pi} (\Psi - \Gamma^2) + \frac{m_s \Upsilon}{4\pi}, \end{aligned}$$

obtenemos

$$\eta_0 > \frac{1}{m_s \sigma'} \left(-\frac{a_0}{2\pi} (\Psi - \Gamma^2) + \frac{m_s \Upsilon}{4\pi} \right), \quad (3.3.1)$$

donde η_0 representa el parámetro de estabilidad en el punto de equilibrio a_0 . Las soluciones de esta ecuación son:

$$\eta_0 > \Lambda_0, \text{ si } m_s \sigma' > 0, \quad (3.3.2)$$

$$\eta_0 < \Lambda_0, \text{ si } m_s \sigma' < 0, \quad (3.3.3)$$

donde,

$$\Lambda_0 = \Lambda(a_0) = \frac{-\frac{a_0}{2\pi} (\Psi - \Gamma^2) + \frac{m_s \Upsilon}{4\pi}}{m_s \sigma'}. \quad (3.3.4)$$

Dada la complejidad que adquieren estas ecuaciones al evaluar las funciones $b_{\pm}(r_{\pm})$ y $\Phi_{\pm}(r_{\pm})$ de las métricas de los espacios-tiempos interior y exterior, el análisis de las regiones de estabilidad se llevará a cabo mediante gráficos. Específicamente, las curvas de η_0 vs a_0 nos permitirán identificar qué configuraciones podrían exhibir un comportamiento estable y cómo la manipulación de los parámetros de las métricas unidas afecta a dicha estabilidad.

En este capítulo, hemos desarrollado el formalismo matemático necesario para analizar la estabilidad de agujeros de gusano de cáscara delgada. La ecuación maestra derivada nos permitirá, en el capítulo 5, estudiar configuraciones específicas y determinar sus condiciones de estabilidad.

Capítulo 4

Agujeros de gusano tipo Schwarzschild

La solución de Schwarzschild puede interpretarse como un agujero de gusano asintóticamente plano, para el cual la función de forma está definida por $b(r) = r_0 = \text{const.}$ Sin embargo, este no es un agujero de gusano atravesable ya que posee un horizonte en su garganta. Esta característica se deriva de la función de corrimiento al rojo, que adopta la forma $e^{2\Phi(r)} = 1 - \frac{r_0}{r}$. Es posible construir versiones atravesables del agujero de gusano de Schwarzschild exigiendo que la función de corrimiento al rojo no tenga horizontes y manteniendo la componente de la métrica $g_{rr}^{-1} = 1 - \frac{r_0}{r}$ [6].

En el presente estudio, se propone una ligera generalización de los agujeros de gusano atravesables de Schwarzschild mediante la consideración de la componente métrica radial expresada como $g_{rr}^{-1} = \text{Const} - \frac{r_0}{r}$. Esta formulación implica que la función de forma adquiere una estructura lineal $b(r) = a_1 r + r_0$, donde a_1 es un parámetro constante. Bajo este marco teórico, se analizan agujeros de gusano atravesables estáticos caracterizados por una función de forma lineal, a los cuales denominamos agujeros de gusano tipo Schwarzschild.

4.1. Agujeros de gusano con funciones de forma lineal

Para construir agujeros de gusano atravesables, el ansatz utilizado a menudo para la función de forma es $b(r) = r_0(r/r_0)^\alpha$, con $0 < \alpha < 1$, para lo cual se verifica que si $r \rightarrow \infty$ tenemos $b(r)/r \rightarrow 0$. En este trabajo consideraremos una función de forma con una dependencia lineal en la coordenada radial

$$b(r) = \alpha + \beta r, \quad (4.1.1)$$

donde α y β son constantes arbitrarias. Evaluando en la garganta, es decir, $b(r_0) = \alpha + \beta r_0 = r_0$, encontramos que la constante α viene dada por $\alpha = (1 - \beta)r_0$.

Por lo tanto, la función de forma finalmente toma la forma

$$b(r) = (1 - \beta)r_0 + \beta r. \quad (4.1.2)$$

Es importante destacar que a partir de la distancia radial propia $l(r) = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}}}$, se puede demostrar que en la garganta siempre se satisface la relación $b'(r_0) \leq 1$ [7]. En particular, esto implica que $\beta \leq 1$ para la función de forma (4.1.2).

Por otro lado, si aplicamos la condición de ensanchamiento [6], expresada por $\frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{b(r) - b'(r)r}{2b(r)^2} > 0$, obtenemos que $r_0(1 - \beta) > 0$. Por lo tanto, para agujeros de gusano de Schwarzschild ($\beta = 0$) tenemos $r_0 > 0$, mientras que para agujeros de gusano tipo Schwarzschild tenemos $\beta < 1$.

En conclusión, la métrica del agujero de gusano está finalmente dada por

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{(1 - \beta) \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.1.3)$$

A partir de ahora, consideramos agujeros de gusano tipo Schwarzschild definidos por el requisito de que $\beta < 1$.

De la ecuación (4.1.2) vemos que en el infinito espacial $b(r)/r \rightarrow \beta$, por lo que la condición $\frac{b(r)}{r} \rightarrow 0$ se cumple solo para un β nulo. Por lo tanto, en general, la ecuación (4.1.3) describe agujeros de gusano no asintóticamente planos, excluyendo

el caso $\beta = 0$, que con una función de corrimiento al rojo distinta de cero y finita describe un agujero de gusano asintóticamente plano, como los considerados por Morris y Thorne.

Si $e^{\Phi(r)} \rightarrow \text{const}$ para $r \rightarrow \infty$, entonces la ecuación (6) se convierte en

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{dr^2}{(1-\beta)} + r^2 d\Omega^2, \quad (4.1.4)$$

que describe un espacio-tiempo con un déficit (o exceso) de ángulo sólido. Esto se puede ver directamente haciendo el reescalado $\rho^2 = \frac{r^2}{1-\beta}$. Entonces la métrica (4.1.3) se convierte en $ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + (1-\beta)\rho^2 d\Omega^2$. Esta nueva forma de la métrica asintótica (4.1.4) muestra explícitamente la presencia de un déficit de ángulo sólido para $0 < \beta < 1$, y un exceso de ángulo sólido para $\beta < 0$, que se anulan para $\beta = 0$, obteniendo el espacio-tiempo de Minkowski estándar. Debe notarse que el ángulo sólido de una esfera de radio unitario es ahora $4\pi(1-\beta) < 4\pi$ para $0 < \beta < 1$, y $4\pi(1-\beta) > 4\pi$ para $\beta < 0$.

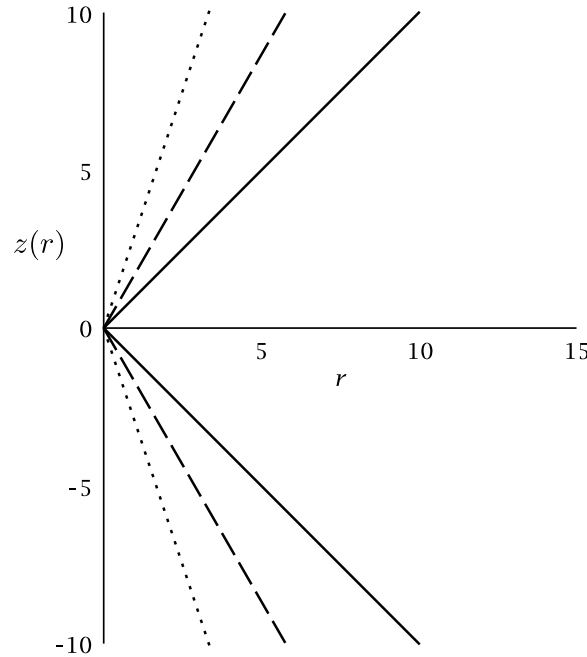


Figura 4.1.1: La figura muestra diagramas de embebimiento de la métrica (4.1.4) para secciones $t = \text{const}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\beta = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{10}$ (líneas continuas, discontinuas y punteadas, respectivamente). Todas las secciones exhiben una singularidad cónica debido al déficit de ángulo sólido de la métrica (4.1.4).

Para dilucidar algunas características de este espacio-tiempo, podemos estudiar los

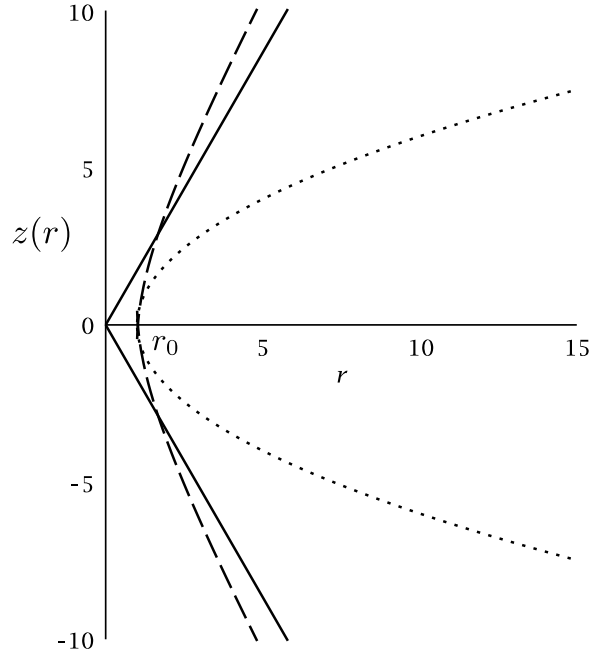


Figura 4.1.2: Para una visualización completa de las superficies cónicas, los diagramas deben rotarse alrededor del eje vertical z . La figura muestra los diagramas de embebimiento de las secciones $t = \text{const}, \theta = \frac{\pi}{2}$ para el agujero de gusano (4.1.3) (línea discontinua) y la métrica (4.1.4) (línea continua). Ambos diagramas corresponden a $\beta = 3/4$. La garganta está ubicada en $r = 1$. Para $r \rightarrow \infty$, la distancia entre la curva discontinua y la línea continua se aproxima a cero. A modo de comparación, incluimos el embebimiento del agujero de gusano (4.1.3) con $\beta = 0$ (línea punteada).

diagramas de embebimiento asociados. Uno puede visualizar la forma y el tamaño de las secciones $t = \text{const}, \theta = \frac{\pi}{2}$ de las métricas (4.1.3) y (4.1.4) utilizando un procedimiento de embebimiento estándar en el espacio euclidiano tridimensional ordinario. En general, para embeber secciones bidimensionales $t = \text{const}, \theta = \frac{\pi}{2}$ de la métrica (2.1.5) debemos utilizar la ecuación $\frac{dz(r)}{dr} = \left(\frac{r}{b(r)} - 1\right)^{-1/2}$ [6]. Esta expresión puede reescribirse como $\frac{dz}{dr} = \sqrt{\frac{b(r)}{r(1 - \frac{b(r)}{r})}}$. Dado que $r \geq r_0 > 0$ y $1 - b(r)/r > 0$, la expresión bajo la raíz cuadrada es positiva si $b(r) > 0$, y negativa si $b(r) < 0$, por lo que las secciones espaciales de cualquier agujero de gusano (2.1.5) pueden ser embebidas en un espacio euclidiano tridimensional si $b(r) > 0$. De tal manera, para el agujero de gusano (4.1.3) el embebimiento toma la forma

$$\frac{dz}{dr} = \sqrt{\frac{(1 - \beta)r_0 + \beta r}{r(1 - \beta) \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)}}. \quad (4.1.5)$$

Cabe señalar que el numerador es positivo en todas partes para $0 \leq \beta < 1$. En este caso $(1 - \beta)r_0 + \beta r \geq 1$, para $r > r_0$, y el embebimiento se extiende desde la garganta hasta el infinito. Para $\beta < 0$ tenemos que $(1 - \beta)r_0 + \beta r > 0$ para $r_0 \leq r < (1 - 1/\beta)r_0$, y $(1 - \beta)r_0 + \beta r \leq 0$ para $r \geq (1 - 1/\beta)r_0$, lo que implica que el embebimiento existe solo para $r_0 \leq r \leq (1 - 1/\beta)r_0$. Así, para las secciones $t = \text{const}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ de (4.1.4) obtenemos $z_c(r) = \pm \frac{r}{\sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}}}$.

En la Figura 4.1.1 se muestran diagramas de embebimiento para $\beta = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{10}$. En este caso, el espacio-tiempo tiene un déficit de ángulo sólido y sus secciones $t = \text{const}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ exhiben una singularidad cónica. En la Figura 4.1.2 mostramos los embebimientos para la ecuación (4.1.3) con $\beta = 0$, y las ecuaciones (4.1.3) y (4.1.4) con $\beta = 3/4$. Es interesante notar que para $\beta = 3/4$ y $r \rightarrow \infty$ la distancia entre los embebimientos de las ecuaciones (4.1.3) y (4.1.4) se aproxima a cero. Efectivamente, en este caso la función de embebimiento de la métrica (4.1.3) está dada por $\frac{dz_1}{dr} = \frac{\sqrt{3r+1}}{\sqrt{r-1}}$, lo que implica que

$$z_1(r) = \sqrt{3r^2 - 2r - 1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}r + \sqrt{3r^2 - 2r - 1} \right). \quad (4.1.6)$$

Observamos que $\frac{dz_1}{dr} \rightarrow \sqrt{3}$ para $r \rightarrow \infty$, por lo tanto $z_1(r)$ tiene una asíntota inclinada con una pendiente de $\sqrt{3}$. Por otro lado, para la métrica (4.1.4) tenemos $\frac{dz_2(r)}{dr} = \sqrt{3}$, y por lo tanto $z_2(r) = \sqrt{3}r$. Claramente esto implica que la asíntota inclinada de $z_1(r)$ es, al menos, paralela a $z_2(r)$, pero tenemos $\frac{z_1(r)}{z_2(r)} \rightarrow 1$ cuando $r \rightarrow \infty$, lo que nos permite concluir que la distancia entre los embebimientos discutidas se aproxima a cero.

Para la métrica (4.1.3) y $r \geq r_0$, tenemos $\kappa\rho = \beta/r^2$, que es positiva para espacios-tiempos con un déficit de ángulo sólido, y negativa para espacios-tiempos con un exceso de ángulo sólido.

Como se mencionó anteriormente, para $0 < \beta < 1$ los diagramas de embebimiento de los agujeros de gusano se extienden desde la garganta hasta el infinito, y la restricción $\frac{b(r)}{r} \rightarrow 0$ conduce a una geometría que conecta dos regiones asintóticamente no planas (estrictamente hablando, asintóticamente localmente planas) de la forma (4.1.4), pero con un déficit de ángulo sólido. Para las secciones

de la ecuación (4.1.3) obtenemos

$$z_{wh}(r) = \pm \frac{F + r_0 \ln \left(\frac{r_0 - 2\beta r_0 + 2\beta r + F}{2\sqrt{\beta}} \right)}{2\sqrt{(1-\beta)\beta}}, \quad (4.1.7)$$

donde $F = 2\sqrt{(r-r_0)(\beta r - \beta r_0 + r_0)}$. Nótese que para $r \rightarrow \infty$ tenemos $z_{wh}(r) \approx \frac{r}{\sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}}} + C = z_c(r)$, como esperaríamos (véase la Figura 4.1.2). En particular, para $0 < \beta < 1$ el modelo describe un agujero de gusano que porta un monopolo global. En la Figura 4.1.3a mostramos diagramas de embebimiento para $\beta = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{10}$.

Si $\beta < 0$, los embebimientos se extienden desde la garganta hasta un valor máximo $r_{max} := \frac{r_0(\beta-1)}{\beta} > r_0$. Para $\beta \rightarrow -0$, $r_{max} \rightarrow \infty$, mientras que para $\beta \rightarrow -\infty$ tenemos $r_{max} \rightarrow r_0$, lo que nos permite tener embebimientos de agujeros de gusano de tamaño microscópico. En la Figura 4.1.3b mostramos embebimientos para $(\beta = 0, -\frac{1}{2}, -1, -15)$, cuyo tamaño depende de la cantidad de exceso de ángulo. Para $r > r_{max}$, las secciones del agujero de gusano no pueden ser inmersas en un espacio euclidiano ordinario. En su lugar, debe utilizarse un espacio con métrica indefinida. No obstante, uno puede hacer coincidir tal solución de agujero de gusano, como un espacio-tiempo interior, con un espacio-tiempo exterior de vacío en la superficie de unión finita $r = r_{max}$ (véase Ref. [16]).

4.2. Agujeros de gusano tipo Schwarzschild sin fuerza de marea

Una clase particularmente simple de agujeros de gusano que examinaremos en detalle es el conjunto de agujeros de gusano tipo Schwarzschild sin fuerza de marea $\Phi(r) = 0$, para los cuales la métrica tiene la forma

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{dr^2}{(1-\beta)\left(1-\frac{r_0}{r}\right)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (4.2.1)$$

y la densidad de energía y las presiones están dadas por

$$\kappa\rho = \frac{\beta}{r^2}, \quad \kappa p_r = \frac{r_0(\beta-1)}{r^3} - \frac{\beta}{r^2}, \quad \kappa p_l = -\frac{r_0(\beta-1)}{2r^3}. \quad (4.2.2)$$

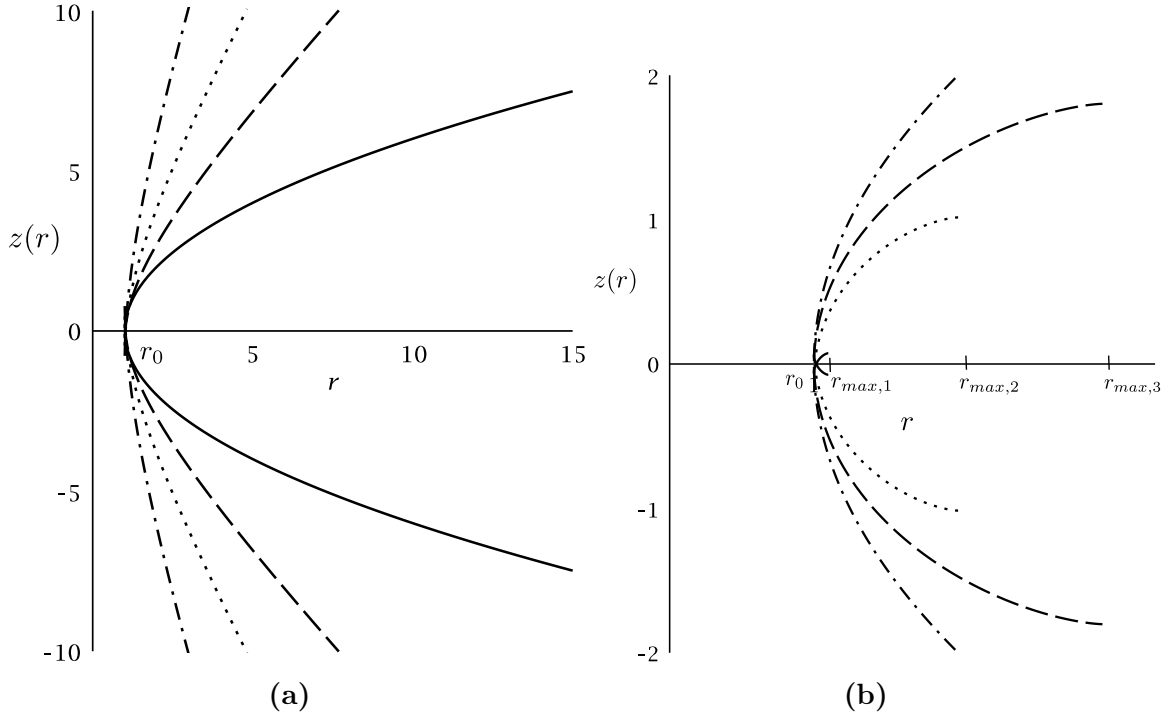


Figura 4.1.3: En la gráfica (a) se muestran las embebimientos de (4.1.3), que exhiben un déficit de ángulo sólido, para secciones $t = \text{const}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\beta = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{10}$ (líneas continuas, discontinuas, punteadas y de punto y raya, respectivamente). Para $0 \leq \beta < 1$, los embebimientos se extienden desde r_0 hasta el infinito. En la gráfica (b) se muestran los embebimientos de la ecuación (4.1.3) y $\beta = -\frac{1}{2}, -1, -15$ (líneas discontinuas, punteadas y continuas, respectivamente). La línea de punto y raya corresponde a $\beta = 0$. Para $\beta < 0$, los embebimientos se extienden desde r_0 hasta $r_{max,i} = \frac{r_0(\beta-1)}{\beta} > r_0$, donde $i = 1, 2, 3$.

Es relevante mencionar que en la garganta $p_r(r_0) = -1/r_0^2 < 0$, mientras que $p_l(r_0) = -(\beta - 1)/(2r_0^2)$, y es positiva para $\beta < 1$.

La presión radial se anula en la superficie definida anteriormente $r_{max} := r_0(\beta - 1)/\beta$. Para $0 < \beta < 1$, $r_{max} < 0$, y para $\beta < 0$, $r_{max} > 0$. Esto implica que para $r \geq r_0$ la presión radial es negativa si $0 < \beta < 1$, mientras que para $\beta < 0$ obtenemos que $p_r < 0$ para $r_0 \leq r < r_{max}$, y $p_r > 0$ si $r > r_{max}$. La presión lateral es positiva para cualquier $\beta < 1$. Para la Condición de Energía Nula (NEC), es decir, $\rho + p_i \geq 0$, obtenemos $\rho + p_r = r_0(\beta - 1)/r^3$, por lo tanto p_r no cumple la NEC. Por otro lado, $\rho + p_l = \beta/r^2 - \frac{r_0(\beta-1)}{2r^3}$, por lo que p_l cumple la NEC para $r \geq r_0$ si $0 < \beta < 1$, y para $r_0 < r < r_{max}/2$ si $-1 < \beta < 0$; por último, si $\beta < -1$ tenemos $\rho + p_l < 0$ para $r \geq r_0$. Es notable que $\rho + p_{total} = \rho + p_r + 2p_l = 0$. Por lo tanto, las condiciones de energía nula ($\rho + p_i \geq 0$), débil ($\rho \geq 0$ y $\rho + p_i \geq 0$), fuerte

($\rho + p_i \geq 0$ y $\rho + p_{total} \geq 0$) y dominante ($\rho \geq 0$ y $p_i \leq |\rho|$) no se cumplen para $r \geq r_0$. Debido a que $\rho > 0$, $p_r < 0$ y $p_l > 0$, para $r \geq r_0$ y $0 < \beta < 1$, la ecuación (4.2.1) describe un agujero de gusano fantasma que porta un monopolo global: el lado derecho de la ecuación (4.2.2) representa los componentes del tensor energía-momento, que incluye los efectos producidos en la geometría por dos objetos distintos: el monopolo global (para el cual $r_0 = 0$ y $\rho = -p_r = \beta/(\kappa r^2)$, $p_l = 0$), y el agujero de gusano mismo (para el cual $\beta = 0$ y $\rho = 0$, $p_r = -2p_l = -r_0/r^3$). Se sabe que los monopolos globales producen un déficit de ángulo sólido en el infinito [30, 31, 32]. Ajustando el parámetro β , se puede hacer que el déficit de ángulo sólido sea arbitrariamente cercano a 4π . Nótese que el agujero de gusano $\beta = 0$ es una solución particular del agujero de gusano lorentziano autodual con densidad de energía nula, como se discute en las Refs. [10, 11]

4.3. Estudio de las condiciones de atravesabilidad

Ahora nos centraremos en las condiciones de atravesabilidad del agujero de gusano tipo Schwarzschild sin fuerza de marea (4.2.1). Supondremos que un viajero realiza un viaje radial a través del agujero de gusano (4.2.1), comenzando en reposo en la estación espacial 1 en el universo inferior, y terminando en reposo en una estación espacial 2 en el universo superior. Una condición importante de atravesabilidad requerida es que la aceleración sentida por el viajero no debe exceder la gravedad terrestre $g_\oplus = 980 \text{ cm/s}^2$. Como se muestra en las Refs. [6], la aceleración sentida por el viajero que se mueve radialmente está dada por

$$a = \pm \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\Phi(r)} (\gamma e^{\Phi(r)})' c^2, \quad (4.3.1)$$

donde $e^{\Phi(r)}$ y $b(r)$ son las funciones de corrimiento al rojo y de forma de la métrica (2.1.5); y $\gamma = (1 - \frac{v(r)^2}{c^2})^{-1}$, siendo $v(r)$ la velocidad radial del viajero al pasar por el radio r , medida por un observador estático en r . Entonces, para el agujero de gusano de fuerza de marea nula (4.2.1), vemos que la restricción está dada por

$$|a| = \left| \left((1 - \beta) \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \right)^{\frac{1}{2}} \gamma' c^2 \right| \lesssim g_\oplus. \quad (4.3.2)$$

Para un agujero de gusano de Schwarzschild, la aceleración sentida por un viajero

está dada por $|a_{Sch}| = \left| \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \gamma' c^2 \right|$. Por lo tanto, para un radio dado r entre las estaciones 1 y 2, la aceleración es menor que $|a_{Sch}|$ para agujeros de gusano tipo Schwarzschild que exhiben un déficit de ángulo sólido debido a $0 < \beta < 1$, mientras que es mayor que $|a_{Sch}|$ para agujeros de gusano que exhiben un exceso de ángulo sólido, ya que $\beta < 0$. Esta restricción puede satisfacerse trivialmente, independientemente del valor de β , requiriendo que el viajero mantenga una velocidad constante v durante todo su viaje desde la estación 1 a la estación 2 (ignorando la aceleración al salir de la estación 1 y la desaceleración al llegar a la estación 2).

Otra condición importante de atravesabilidad está relacionada con las aceleraciones de marea sentidas por el viajero (por ejemplo, entre la cabeza y los pies), que no deben exceder la aceleración gravitacional de la Tierra. Como se muestra en las Refs. [6], las restricciones de marea radial y lateral están dadas por

$$\left| \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left(-\Phi'' - \Phi'^2 + \frac{b'r - b}{2r(r-b)} \Phi'\right) c^2 \right| |\xi| \lesssim g_{\oplus}, \quad (4.3.3)$$

$$\left| \frac{\gamma^2 c^2}{2r^2} \left[\left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(b' - \frac{b}{r}\right) + 2(r-b)\Phi' \right] \right| |\xi| \lesssim g_{\oplus}, \quad (4.3.4)$$

respectivamente, donde ξ representa el tamaño del cuerpo del viajero. La restricción de marea radial puede considerarse como una restricción de la función de corrimiento al rojo, mientras que la restricción de marea lateral puede considerarse como una restricción de la velocidad v con la que el viajero cruza el agujero de gusano [6].

En el caso del agujero de gusano tipo Schwarzschild sin fuerza de marea (4.2.1), concluimos que la restricción de marea radial es idénticamente cero en todas partes. Por otro lado, para la restricción de marea lateral obtenemos

$$\left| \frac{\gamma^2 v^2}{2r^3} r_0 (\beta - 1) \right| |\xi| \lesssim g_{\oplus}. \quad (4.3.5)$$

En el límite en que el movimiento es no relativista, tenemos $v \ll c$ y entonces $\gamma \approx 1$. Por lo tanto, tenemos

$$\left| \frac{v^2}{2r^3} r_0 (\beta - 1) \right| |\xi| \lesssim g_{\oplus}. \quad (4.3.6)$$

Esta restricción es más severa en el valor radial más pequeño, es decir, en la garganta. Así, evaluando en r_0 , y considerando que el tamaño del cuerpo del viajero es 2 m, obtenemos para la velocidad del viajero

$$v \lesssim \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{|\beta - 1|}} r_0. \quad (4.3.7)$$

A continuación, analizaremos el tiempo total de viaje desde la estación 1 a la estación 2. Los espacios-tiempos de agujeros de gusano M-T estándar son planos en el infinito espacial; por esta razón, para que las estaciones no estén en el infinito espacial, sino cerca del agujero de gusano, Morris y Thorne colocaron las estaciones 1 y 2 en regiones que son muy cercanas a ser planas. De tal manera, en el procedimiento estándar, las estaciones están ubicadas en radios donde el factor $1 - b(r)/r$ difiere de la unidad en solo un 1 % [6].

Si requerimos el mismo criterio, entonces $(1 - \beta)(1 - r_0/r) = 0,99$, lo que nos da la relación para la ubicación radial de las estaciones:

$$r_1 = r_2 = \frac{100(1 - \beta)}{1 - 100\beta} r_0. \quad (4.3.8)$$

Para el agujero de gusano de Schwarzschild asintóticamente plano ($\beta = 0$), esto significa que las estaciones están ubicadas en $r_1 = r_2 = 10^2 r_0$. Para agujeros de gusano tipo Schwarzschild de fuerza de marea nula con $\beta < 0$, tenemos que $r_{1,2} \rightarrow 10^2 r_0$ si $\beta \rightarrow -0$, mientras que $r_{1,2} \rightarrow r_0$ si $\beta \rightarrow -\infty$. Por lo tanto, para espacios-tiempos con exceso de ángulo sólido, las estaciones pueden estar ubicadas en $r_0 < r_{1,2} < 10^2 r_0$.

Para calcular el tiempo total de viaje, necesitamos conocer la distancia propia total entre las estaciones 1 y 2, que se define por $l(r) = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{1 - b/r}}$. Para el agujero de gusano tipo Schwarzschild (4.2.1), obtenemos

$$l(r) = \pm \frac{2\sqrt{r(r - r_0)} + r_0 \ln \left(\frac{-r_0 + 2r + 2\sqrt{r(r - r_0)}}{r_0} \right)}{2\sqrt{1 - \beta}}. \quad (4.3.9)$$

Evalutando esta función en r_1 y r_2 obtenemos:

$$l(r_1) = \frac{2r_0\sqrt{\frac{9900(1-\beta)}{(1-100\beta)^2}} + r_0 \ln\left(\frac{199-100\beta}{1-100\beta} + 2\sqrt{\frac{9900(1-\beta)}{(1-100\beta)^2}}\right)}{2\sqrt{1-\beta}}, \quad (4.3.10)$$

$$l(r_2) = -\frac{2r_0\sqrt{\frac{9900(1-\beta)}{(1-100\beta)^2}} + r_0 \ln\left(\frac{199-100\beta}{1-100\beta} + 2\sqrt{\frac{9900(1-\beta)}{(1-100\beta)^2}}\right)}{2\sqrt{1-\beta}}, \quad (4.3.11)$$

y por lo tanto, la distancia propia total entre las estaciones es

$$\Delta l = \frac{2r_0\sqrt{\frac{9900(1-\beta)}{(1-100\beta)^2}} + r_0 \ln\left(\frac{199-100\beta}{1-100\beta} + 2\sqrt{\frac{9900(1-\beta)}{(1-100\beta)^2}}\right)}{\sqrt{1-\beta}}. \quad (4.3.12)$$

Ahora, si el viajero realiza el viaje con velocidad constante (4.3.7), entonces el tiempo total de viaje está dado por

$$t = \frac{l}{v} = \frac{\left(2\sqrt{\frac{9900(1-\beta)}{(1-100\beta)^2}} + \ln\left(\frac{199-100\beta}{1-100\beta} + 2\sqrt{\frac{9900(1-\beta)}{(1-100\beta)^2}}\right)\right)}{3\sqrt{2}}. \quad (4.3.13)$$

De esta expresión, tenemos para el tiempo total de viaje que si $-\infty < \beta < 0$ entonces $0 < t < 24,158$ s. Dado que para $\beta = 0$ el tiempo total de viaje es 24.158 s, concluimos que la presencia de un exceso de ángulo sólido permite al viajero realizar el viaje en un lapso de tiempo más corto.

Para agujeros de gusano con $0 < \beta < 1$, tenemos de la ecuación (4.3.8) que r_1 y r_2 son positivos solo si $0 < \beta < 1/100$. Por lo tanto, para agujeros de gusano tipo Schwarzschild de fuerza de marea nula con déficit de ángulo sólido, es posible ubicar estaciones donde la curvatura del agujero de gusano es despreciable (con desviaciones del 1 % de la planitud) solo si $\beta \approx 0$. Nótese que para $0 < \beta < 1/100$ tenemos $100r_0 < r_{1,2} < \infty$. Si comparamos este caso con agujeros de gusano asintóticamente planos, vemos que el déficit de ángulo sólido impone el requisito de que las estaciones estén ubicadas más lejos de la garganta, contrario a lo que sucede con agujeros de gusano con exceso de ángulo sólido. En este caso, tenemos para el tiempo total de viaje: $24,158 \text{ s} < t < \infty$, por lo que en presencia de un déficit de ángulo sólido, el viajero realiza el viaje en un lapso de tiempo más largo que para $\beta \leq 0$.

Por último, debemos notar que el lapso de tiempo total t para el viaje desde la estación 1 a la estación 2 es el mismo tanto para el viajero como para los observadores en ambas estaciones.

4.4. Comportamiento geodésico

En esta sección, analizaremos el comportamiento geodésico en agujeros de gusano tipo Schwarzschild. Este estudio es fundamental para comprender cómo las partículas se mueven en estas estructuras espaciotemporales exóticas. Comenzamos con el lagrangiano general, expresado como $\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}$, donde $g_{\alpha\beta}$ son los componentes del tensor métrico y x^α son las coordenadas espaciotemporales. Luego, la métrica (2.1.5) toma la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[-e^{2\Phi(r)}\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{(1-\beta)(1-\frac{r_0}{r})} + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2) \right], \quad (4.4.1)$$

donde los punto sobre las letras indican derivada con respecto a τ .

Para simplificar nuestro análisis, consideraremos dos condiciones: la ausencia de fuerzas de marea (implicando $\Phi(r) = 0$) y el confinamiento de las trayectorias al plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$). Estas simplificaciones nos permiten enfocarnos en los aspectos esenciales del movimiento geodésico sin perder generalidad en nuestras conclusiones. Bajo estas consideraciones, el lagrangiano (4.4.1) se reduce a:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[-\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{(1-\beta)(1-\frac{r_0}{r})} + r^2\dot{\phi}^2 \right], \quad (4.4.2)$$

y los momentos conjugados conservados π_t y π_ϕ son

$$\pi_t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = -\dot{t} = -E, \quad \pi_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = r^2 \sin^2\theta \dot{\phi} = \text{const.} \quad (4.4.3)$$

Por lo tanto, tenemos

$$E^2 = h + \frac{L^2}{r^2} + \frac{\dot{r}^2}{(1-\beta)(1-\frac{r_0}{r})}, \quad r^2\dot{\phi} = L, \quad (4.4.4)$$

donde $h = 1$ para geodésicas tipo tiempo y $h = 0$ para geodésicas nulas, y L es el momento angular por unidad de masa.

4.4.1. Geodésicas radiales tipo tiempo

Ahora, nos centramos en las geodésicas radiales tipo tiempo. Para este caso particular, establecemos $L = 0$ y $h = 1$ y consideramos las condiciones iniciales para la ecuación (4.4.4). Específicamente, la posición inicial (t_i, r_i) y la velocidad inicial v_i . Supondremos que la partícula de prueba, en $t_i = 0$, comienza a moverse en r_i con velocidad inicial v_i . Estas condiciones iniciales implican que

$$E^2 = 1 + \frac{1}{(1 - \beta)(1 - \frac{r_0}{r_i})} v_i^2, \quad (4.4.5)$$

y la ecuación (4.4.4) puede escribirse como

$$\pm \sqrt{\frac{1 - \frac{r_0}{r}}{1 - \frac{r_0}{r_i}}} v_i = \dot{r}, \quad (4.4.6)$$

donde el signo $-$ es válido para partículas que se mueven desde r_i hacia la garganta del agujero de gusano, mientras que el signo $+$ es para partículas que se mueven desde r_i al infinito. Notamos que en el primer caso, la partícula comienza a moverse con la velocidad $v_i > 0$ y tiende al valor máximo $v_{max} = v_i / \sqrt{1 - r_0/r_i}$.

Se hace evidente que si la partícula de prueba tiene velocidad inicial cero, es decir, $v_i = 0$, entonces $\dot{r} = 0$ y $r(\tau) = \text{const}$, lo que implica que la partícula de prueba permanecerá en reposo en la posición inicial r_i . Esto significa que necesitamos dar a la partícula una velocidad inicial $v_i \neq 0$ para empujarla hacia la garganta o hacia el infinito. Sin embargo, es importante resaltar que la ecuación (4.4.6) implica que las geodésicas tipo tiempo que comienzan en $r_i > r_0$ con velocidad inicial v_i siempre alcanzarán la garganta con velocidad cero, debido al requisito $r = r_0$ en la garganta.

De la ecuación (4.4.5) podemos escribir $v_i^2 = (E^2 - 1)(1 - \beta)(1 - r_0/r_i)$, y dado que el parámetro β está restringido al rango $\beta < 1$ y $r_i \geq r_0$, entonces concluimos que $E^2 \geq 1$. El valor $E^2 = 1$ implica que la partícula está en reposo.

Derivando la ecuación (4.4.6) con respecto al parámetro afín τ , obtenemos para la

segunda derivada de la coordenada radial

$$\ddot{r} = \frac{(E^2 - 1)(1 - \beta)r_0}{2r^2}, \quad (4.4.7)$$

que es positiva en todas partes. La presencia de un déficit o exceso de ángulo sólido no juega ningún papel en el signo de la aceleración, ya que $\beta < 1$. A esta segunda derivada se le puede asociar una pseudo ley de Newton $\ddot{r} = -V'_{eff}/2$ [33], donde V_{eff} es un potencial efectivo y $'$ denota $\partial/\partial r$. La aceleración $\ddot{r} = \frac{(E^2-1)(1-\beta)r_0}{2r^2}$ revela un aspecto intrigante del campo gravitacional en estos agujeros de gusano: es repulsivo en todas partes. Esta característica contrasta marcadamente con la gravedad atractiva de los agujeros negros convencionales. Esto es válido solo para partículas de prueba moviéndose radialmente, ya que para objetos en reposo tenemos $E^2 = 1$, ver ecuación (4.4.5), y entonces la expresión para $\ddot{r}$ implica que poseen una aceleración radial nula.

Para ver el comportamiento cualitativo de las geodésicas radiales tipo tiempo que comienzan a moverse en r_i con velocidad inicial v_i , resolvemos la ecuación (4.4.6), cuya solución está dada por

$$\tau(r) = \pm \frac{\sqrt{1 - \frac{r_0}{r_i}}}{2v_i} \left(2\sqrt{r^2 - r_0 r} + r_0 \ln \left(-\frac{r_0^2}{2} + r + \sqrt{r^2 - r_0 r} \right) \right) + C, \quad (4.4.8)$$

donde C es una constante de integración. Queremos describir una partícula que comienza a moverse desde r_i en $\tau = 0$, así que imponemos la condición inicial $\tau(r_i) = 0$. En la Figura 4.4.1a graficamos ambas ramas de la solución (4.4.8) como $r = r(\tau)$. La partícula de prueba que se mueve hacia la garganta la alcanza en un tiempo finito (con velocidad cero). Por otro lado, la geodésica radial hacia afuera alcanza el infinito. Este resultado está de acuerdo con el hecho de que en este caso el potencial efectivo tiene un carácter repulsivo. En la Figura 4.4.1b mostramos la velocidad en función de la coordenada radial correspondiente a la geodésica radial hacia afuera (la curva superior) y la geodésica radial hacia adentro (la curva inferior). Para la geodésica radial hacia adentro ($v_i = -3$), la partícula alcanza la garganta con velocidad cero, mientras que para la geodésica radial hacia afuera ($v_i = 3$), la velocidad de la partícula tiende al valor máximo $v_{max} = 3\sqrt{2}$.

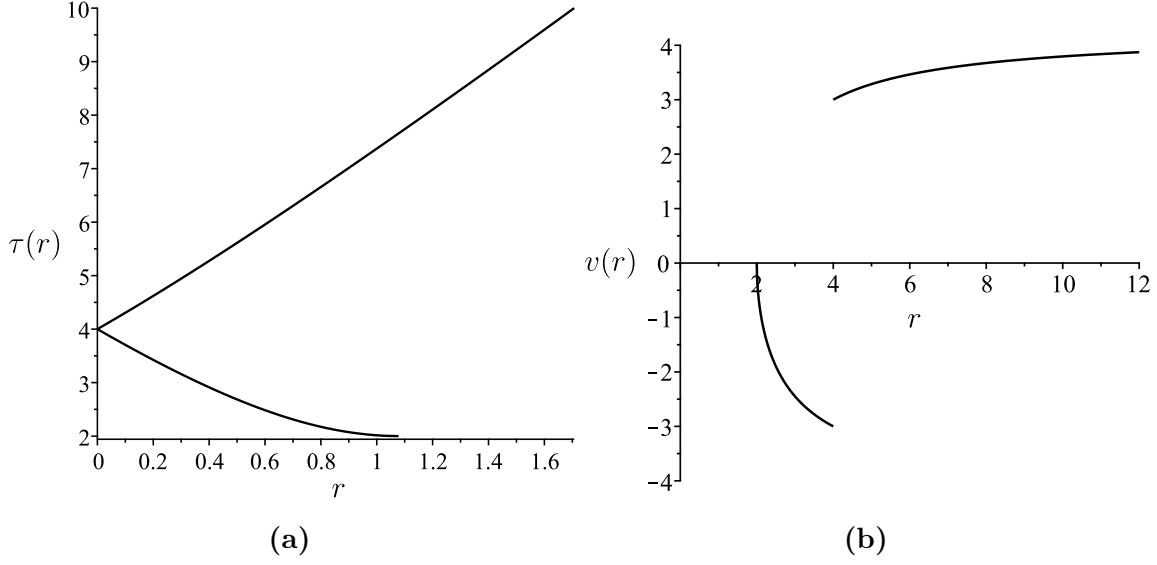


Figura 4.4.1: El perfil de las geodésicas radiales hacia afuera (signo +) y hacia adentro (signo $-$) de la ecuación (4.4.8) se representa en la Figura (a). Ambas parten de $r_i = 4$ con velocidad inicial $v_i \neq 0$ en $\tau = 0$ ($r_0 = 2$). La geodésica radial hacia afuera (la curva superior) alcanza el infinito, mientras que la que va hacia adentro llega a r_0 en un tiempo finito, terminando con velocidad cero, ya que $\frac{dr}{d\tau}|_{r_0} = 0$ (la curva inferior). En la Figura (b) se representan las geodésicas radiales hacia afuera (la curva superior) y hacia adentro (la curva inferior) de la Figura 4.4.1a. Ambas partículas comienzan a moverse en $r_i = 4$ con velocidad inicial $v_i = \pm 3$ ($r_0 = 2$). Para la geodésica radial hacia adentro ($v_i = -3$), la partícula alcanza la garganta con velocidad cero, mientras que para la geodésica radial hacia afuera ($v_i = 3$) tenemos que $v \rightarrow v_{\text{máx}} = 3\sqrt{2}$.

4.4.2. Geodésicas no radiales tipo tiempo

A continuación, analizaremos las geodésicas tipo tiempo no radiales, que se caracterizan por trayectorias donde $L \neq 0$ y $h = 1$. Para este análisis, la ecuación de movimiento relevante es la (4.4.4). Las condiciones iniciales que debemos considerar son:

1. La posición inicial (r_i, φ_i)
2. La velocidad radial inicial $\dot{r}_i$
3. La velocidad angular inicial $\dot{\varphi}_i$

En nuestro estudio, consideraremos una partícula de prueba que inicia su movimiento en la posición radial r_i con una velocidad radial inicial v_i y una velocidad angular inicial $\dot{\varphi}_i$. Este enfoque nos permitirá examinar cómo estas

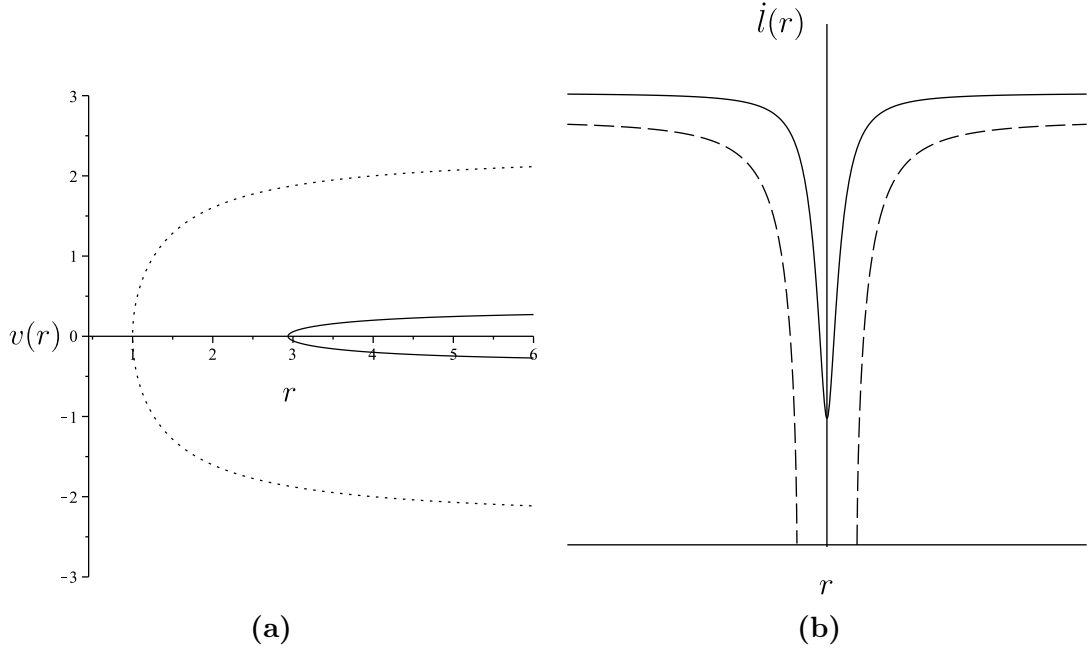


Figura 4.4.2: El comportamiento de la velocidad radial para las geodésicas G_1 (línea punteada) y G_2 (línea continua) con un mismo valor de L se muestra en la Figura (a). La garganta está ubicada en $r_0 = 1$. Las velocidades para un valor común dado $r_i > r_0$ satisfacen la condición $|v_{G1}(r_i)| > |v_{G2}(r_i)|$. Observamos que ambas geodésicas están confinadas a un lado del agujero de gusano. Los radios de inversión son diferentes: para G_1 , el punto de retorno se encuentra en la garganta del agujero de gusano, mientras que para G_2 , el punto de retorno se ubica en un radio mayor que r_0 . En la fig. (b) se muestra el comportamiento cualitativo para la rama $\dot{l} = \sqrt{E^2 - 1 - \frac{L^2}{r(l)^2}}$ para diferentes valores de E , L y r_0 . Para las curvas discontinuas $\frac{L^2}{E^2-1} - \frac{r_0 L}{\sqrt{E^2-1}} \geq 0$, entonces existen puntos de inversión, mientras que para la curva continua $\frac{L^2}{E^2-1} - \frac{r_0 L}{\sqrt{E^2-1}} < 0$, por lo que las geodésicas alcanzan la garganta, donde se alcanza la velocidad mínima, y pasan al otro lado del agujero de gusano.

condiciones iniciales afectan la trayectoria de la partícula en el espacio-tiempo del agujero de gusano. Para la ecuación (4.4.4), las condiciones iniciales implican que para una partícula de prueba que comienza a moverse en r_i con velocidad radial inicial v_i tenemos

$$E^2 = 1 + \frac{L^2}{r_i^2} + \frac{v_i^2}{(1 - \beta)(1 - \frac{r_0}{r_i})}, \quad (4.4.9)$$

y entonces la ecuación (4.4.4) se convierte en

$$\left(L^2 \left(\frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{v_i^2}{(1-\beta)(1-\frac{r_0}{r_i})} \right) \left(1 - \frac{r_0}{r} \right) (1-\beta) = \dot{r}^2. \quad (4.4.10)$$

Esta ecuación se reduce a la ecuación (4.4.6) si $L = 0$. Por otro lado, para $r^2 \dot{\phi} = L$, las condiciones iniciales implican que para una partícula que comienza a moverse en r_i con velocidad angular inicial $\dot{\phi}_i$ tenemos $r_i^2 \dot{\phi}_i = L$.

Veremos más adelante que la presencia del momento angular L en la ecuación (4.4.10) permite que el parámetro β influya en las trayectorias de las geodésicas no circulares del espacio-tiempo (4.2.1). Para las geodésicas circulares, se debe requerir que su velocidad radial se anule, es decir, $dr/d\tau = 0$. De la ecuación (4.4.10) vemos que la aceleración para $\dot{r} = 0$ está dada por

$$\ddot{r} = (1-\beta) \left(1 - \frac{r_0}{r} \right) \frac{L^2}{r^3}, \quad (4.4.11)$$

lo que implica que $\ddot{r} \geq 0$ en todas partes. Dado que $\ddot{r}$ se anula solo en $r = r_0$, las órbitas circulares solo existen en la garganta del agujero de gusano. Para cualquier otra ubicación $r > r_0$, si la partícula de prueba tiene velocidad radial cero, siempre será acelerada en la dirección de r creciente.

4.4.3. Puntos de inversión

Ahora, notemos que la ecuación (4.4.10) implica que la partícula de prueba tiene velocidad radial cero en r_0 y en el radio

$$r_{zero} = \left(\frac{1}{r_i^2} + \frac{v_i^2}{L^2(1-\beta) \left(1 - \frac{r_0}{r_i} \right)} \right)^{-1/2} > 0. \quad (4.4.12)$$

Si se satisface la condición $r_{zero} > r_0$, el radio (4.4.12) representa, para una geodésica que comienza en $r_i > r_0$ con $v_i < 0$ y $\dot{\phi}_i \neq 0$, un punto de inversión, ya que en este radio ($r_{zero} < r_i$) la partícula de prueba, que se acerca a la garganta, es desviada por el agujero de gusano. En otras palabras, r_{zero} representa la distancia mínima a la garganta del agujero de gusano que puede alcanzar una partícula de prueba. En este caso, la geodésica tipo tiempo siempre se encuentra en un lado del agujero de gusano (o en el otro) y la partícula de prueba no cruza la garganta

(ver Figuras 4.4.2a y 4.4.3).

Para una partícula de prueba que comienza a moverse en algún $r_{i0} > r_0$ con velocidad cero, las ecuaciones (4.4.11) y (4.4.12) implican que la partícula comenzará a moverse desde esta ubicación r_{i0} hacia el infinito espacial, siguiendo una trayectoria geodésica específica que inicialmente habría tenido alguna velocidad $v_i < 0$ en algún $r_i > r_{i0}$, que además satisface la condición $r_{zero} = r_{i0}$. Adicionalmente, debe considerarse que la ecuación (4.4.10) implica que las geodésicas hacia afuera tienen un límite para la velocidad radial dado por $v_{limit} = [L^2(1 - \beta)/r_i^2 + v_i^2/(1 - r_0/r_i)]^{1/2}$.

4.4.4. Visualización de geodésicas

También se puede demostrar que existen geodésicas tipo tiempo hacia adentro que cruzan la garganta. Para mostrar esto, reescribiremos la ecuación (4.4.4) introduciendo el reescalado $dl = \pm \frac{dr}{\sqrt{(1-\beta)(1-\frac{r_0}{r})}}$, lo que implica que

$$l(r) = \pm \frac{2\sqrt{r(r-r_0)} + r_0 \ln \left(\frac{-\frac{1}{2}r_0 + r + \sqrt{r(r-r_0)}}{\frac{r_0}{2}} \right)}{2\sqrt{1-\beta}}, \quad (4.4.13)$$

donde hemos usado la constante de integración para imponer el requisito de que la garganta esté ubicada en $l = 0$, es decir, $l(r_0) = 0$. Adicionalmente, la ecuación (4.4.13) implica que para $r_0 \leq r < \infty$ la coordenada l introducida satisface $-\infty < l < \infty$.

De esta manera, la ecuación (4.4.4) toma la forma $\dot{l}^2 = E^2 - 1 - \frac{L^2}{r(l)^2}$, donde $\dot{l} = \frac{dl}{d\tau}$ y $r(l)$ es la función inversa de la ecuación (4.4.13). Para tener $\dot{l}^2 > 0$ debemos imponer sobre la energía la condición $E^2 > 1$. Debe notarse que en este caso la métrica (4.2.1) está dada por $ds^2 = dt^2 - dl^2 - r(l)^2 d\Omega^2$, donde l es la coordenada radial propia.

Para encontrar los puntos de inversión discutidos anteriormente, debemos requerir $\dot{l} = 0$ en $\dot{l}^2 = E^2 - 1 - \frac{L^2}{r(l)^2}$. Esta condición se satisface para $r_{zero}(l) = \frac{L}{\sqrt{E^2-1}} \geq r_0$, y usando la ecuación (4.4.9), esta ecuación toma la forma (4.4.12). Podemos encontrar los valores de l_{zero} introduciendo $r_{zero}(l)$ en la ecuación (4.4.13), lo que nos permite encontrar

$$l_{zero} = \pm \frac{1}{2\sqrt{1-\beta}} \left[2\sqrt{\frac{L^2}{E^2-1} - r_0 \frac{L}{\sqrt{E^2-1}}} + r_0 \ln \left(\frac{-1 + \frac{2L}{r_0\sqrt{E^2-1}} + \frac{2}{r_0} \sqrt{\frac{L^2}{E^2-1} - r_0 \frac{L}{\sqrt{E^2-1}}}}{\dots} \right) \right]. \quad (4.4.14)$$

Los puntos de inversión existen solo si

$$\frac{L^2}{E^2-1} - r_0 \frac{L}{\sqrt{E^2-1}} \geq 0 \quad (4.4.15)$$

y

$$\frac{2L}{r_0\sqrt{E^2-1}} + \frac{2}{r_0} \sqrt{\frac{L^2}{E^2-1} - r_0 \frac{L}{\sqrt{E^2-1}}} > 1. \quad (4.4.16)$$

Si los parámetros E , L y r_0 no satisfacen estas restricciones, entonces los puntos de inversión no existen y las geodésicas pasan al otro lado del agujero de gusano (esto se muestra en la Figura 4.4.2b).

Para finalizar, se han elaborado gráficas de las geodésicas inmersas en las superficies de embebimiento para distintos valores del parámetro β , como se muestra en la Figura 4.4.3. Nótese que para graficar las Figuras 4.4.3, además de la ecuación (4.4.4), hemos utilizado la ecuación radial de Euler-Lagrange $\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0$. Esta ecuación de movimiento puede reproducirse directamente, diferenciando la ecuación (4.4.4) con respecto al parámetro afín τ , obteniendo

$$-\frac{\ddot{r}}{(1-\beta)(1-\frac{r_0}{r})} + \frac{1}{2} \frac{r_0 \dot{r}^2}{(1-\beta)(1-\frac{r_0}{r})^2 r^2} + \frac{L^2}{r^3} = 0, \quad (4.4.17)$$

o

$$-\frac{\ddot{r}}{(1-\beta)(1-\frac{r_0}{r})} + \frac{r_0 \left(E^2 - h - \frac{L^2}{r^2} \right)}{2(1-\frac{r_0}{r})r^2} + \frac{L^2}{r^3} = 0. \quad (4.4.18)$$

La que se resolvió numéricamente.

En resumen, el análisis del comportamiento geodésico en agujeros de gusano tipo Schwarzschild ha revelado varias características notables: la naturaleza repulsiva del campo gravitacional efectivo, la existencia de puntos de inversión para geodésicas no radiales y la posibilidad de trayectorias que cruzan la garganta bajo ciertas condiciones.

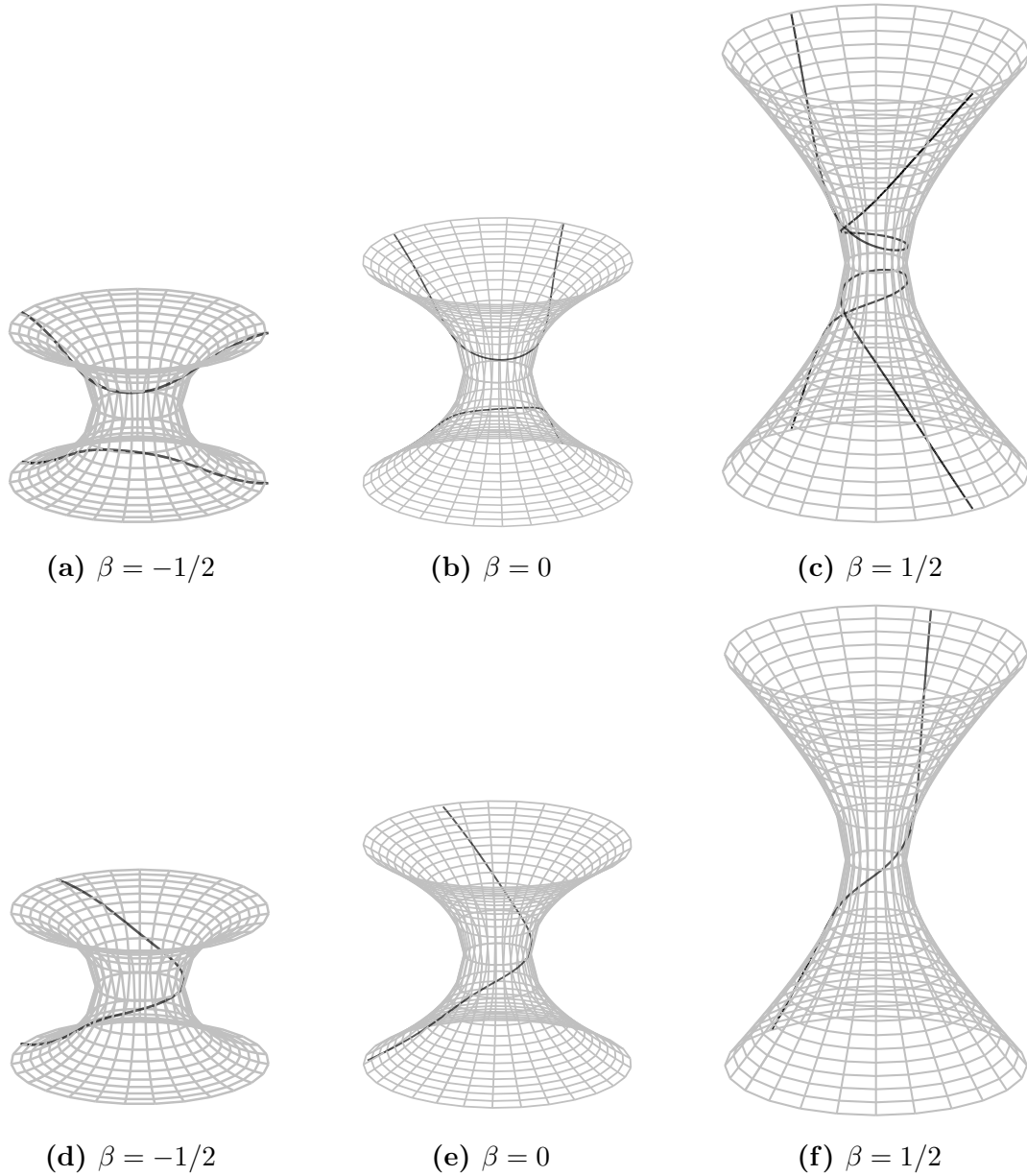


Figura 4.4.3: Las gráficas (a), (b) y (c) muestran diagramas de embebimiento para el caso donde las geodésicas no radiales están confinadas a un lado del agujero de gusano, y $r_0 = 1$, $\beta = -1/2, 0, 1/2$. En este caso, las geodésicas no cruzan la garganta ya que satisfacen la condición $\frac{L^2}{E^2-1} - \frac{r_0 L}{\sqrt{E^2-1}} \geq 0$, y por lo tanto existen puntos de inversión. En (c) mostramos geodésicas que se superponen consigo mismas en un punto cáustico. Las gráficas (d), (e) y (f) muestran diagramas de embebimiento para geodésicas no radiales que atraviesan la garganta del agujero de gusano, las cuales satisfacen la condición $\frac{L^2}{E^2-1} - \frac{r_0 L}{\sqrt{E^2-1}} < 0$.

Capítulo 5

Cáscara delgada con agujero de gusano interior tipo Schwarzschild

5.1. Espacio-tiempo exterior Schwarzschild

En este capítulo, aplicaremos el formalismo general descrito en el capítulo 3 a un espacio-tiempo de agujero de gusano específico y derivaremos sus correspondientes regiones de estabilidad. Específicamente, construiremos soluciones de agujeros de gusano uniendo una solución de agujero de gusano atravesable interior con el espacio-tiempo de Schwarzschild exterior en una interfaz de unión. De esta manera, nuestro enfoque considera como solución exterior la métrica de Schwarzschild. Entonces, mediante la siguiente identificación en la métrica (3.1.12)

$$e^{2\Phi_+} = 1 - \frac{2M}{r_+}, \quad b_+ = 2M, \quad (5.1.1)$$

obtenemos

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r_+} \right) dt_+^2 + \frac{dr_+^2}{\left(1 - \frac{2M}{r_+} \right)} + r_+^2 (d\theta_+^2 + \sin^2 \theta_+ d\phi_+^2). \quad (5.1.2)$$

Para esta métrica, las componentes del tensor energía-momento de la cáscara delgada evaluados en la solución estática a_0 son

$$\sigma(a_0) = -\frac{1}{4\pi a_0} \left[\sqrt{1 - \frac{2M}{a_0}} - \sqrt{1 - \frac{b(a_0)}{a_0}} \right], \quad (5.1.3)$$

$$\mathcal{P}(a_0) = \frac{1}{8\pi a_0} \left[\frac{1 - \frac{M}{a_0}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{a_0}}} - \frac{(a_0 \Phi'(a_0) + 1) \left(1 - \frac{b(a_0)}{a_0}\right)}{\sqrt{1 - \frac{b(a_0)}{a_0}}} \right]. \quad (5.1.4)$$

Se debe exigir que el radio de unión se encuentre en $a_0 > 2M$, de esta manera, evitamos el horizonte de evento.

La masa de la cáscara delgada está dada por

$$m_s(a_0) = -a \left[\sqrt{1 - \frac{2M}{a_0}} - \sqrt{1 - \frac{b(a_0)}{a_0}} \right]. \quad (5.1.5)$$

De la identidad de balance de energía tenemos la siguiente relación

$$\sigma' = -\frac{2}{a} (\sigma + \mathcal{P}) + \Xi. \quad (5.1.6)$$

Recordamos que el flujo de momento $\Xi(a_0)$ está relacionado con la discontinuidad en la cáscara delgada

$$\Xi(a_0) = -\frac{1}{4\pi a_0^2} \left[a\Phi(a) + \frac{a_0 b'(a) - b(a_0)}{2(a_0 - b(a_0))} \right] \sqrt{1 - \frac{b(a_0)}{a_0}}. \quad (5.1.7)$$

La derivada radial de la densidad de energía superficial

$$\sigma'(a_0) = \frac{1}{4\pi a_0^2} \left[\frac{1 - \frac{3M}{a_0}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{a_0}}} - \frac{1 - \frac{3b}{2a_0} + \frac{b'(a_0)}{2}}{\sqrt{1 - \frac{b(a_0)}{a_0}}} \right]. \quad (5.1.8)$$

Y el potencial viene dado por

$$V(a_0) = F_1(a_0) - \left[\frac{m_s(a_0)}{2a_0} \right]^2 - \left[\frac{F_2(a_0)}{m_s(a_0)} \right]^2, \quad (5.1.9)$$

donde

$$F_1(a_0) = 1 - \frac{2M + b(a_0)}{2a}, \quad (5.1.10)$$

$$F_2(a_0) = \frac{2M - b(a_0)}{2}. \quad (5.1.11)$$

Se visualizarán las regiones de estabilidad mediante las ecuaciones (3.3.2) y (3.3.3).

5.2. Espacio-tiempo interior tipo Schwarzschild

El agujero de gusano tipo Schwarzschild estudiado en [9] se obtiene al imponer un comportamiento lineal sobre la coordenada radial en la función de forma $b_-(r_-)$, dada por

$$b_-(r_-) = (1 - \beta) r_0 + \beta r_-. \quad (5.2.1)$$

Luego, la métrica toma la siguiente forma

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{(1 - \beta) \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (5.2.2)$$

nótese que el parámetro β , para mantener la naturaleza Lorentziana de la métrica (5.2.2), debe estar restringido a $\beta < 1$. Adicionalmente, observamos que el espacio-tiempo descrito por esta métrica exhibe en el infinito espacial un déficit de ángulo sólido para $0 < \beta < 1$ y un exceso para $\beta < 0$.

5.3. Construcción de la cáscara delgada con agujeros de gusano tipo Schwarzschild interior

Procedemos a unir la métrica (5.1.2) con la métrica (5.2.2). La hipersuperficie de unión de ambas soluciones corresponde a la cáscara delgada, que tiene un radio a_0 y un área superficial dada por $A = 4\pi a_0^2$.

Luego, para una solución estática a_0 y usando las ecuaciones (3.1.19) y (3.1.20) obtenemos las componentes del tensor energía momentum de la cáscara delgada

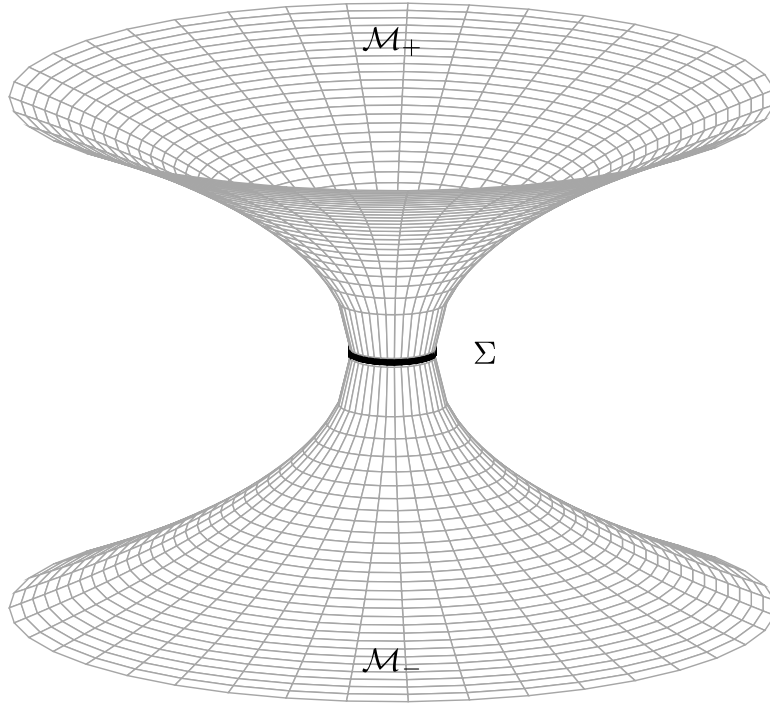


Figura 5.3.1: La figura muestra un diagrama de embebimiento del agujero de gusano de cáscara delgada atravesable. La variedad completa se obtiene uniendo la solución de vacío de Schwarzschild $\mathcal{M}_+$ y la solución de agujero de gusano tipo Schwarzschild $\mathcal{M}_-$ en la superficie de unión Σ . La unión ocurre en una coordenada radial a_0 , que representa el radio de la cáscara delgada. El tensor de energía-momento superficial en Σ se expresa en términos de la densidad de energía superficial (5.3.1) y la presión superficial (5.3.2).

$$\sigma(a_0) = -\frac{1}{4\pi a_0} \left[\sqrt{1 - \frac{2M}{a_0}} - \sqrt{(1 - \beta) \left(1 - \frac{r_0}{a_0}\right)} \right], \quad (5.3.1)$$

$$\mathcal{P}(a_0) = \frac{1}{8\pi a_0} \left[\frac{1 - \frac{M}{a_0}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{a_0}}} - (a_0 \Phi' + 1) \sqrt{(1 - \beta) \left(1 - \frac{r_0}{a_0}\right)} \right]. \quad (5.3.2)$$

La masa superficial y la derivada de la densidad de energía de la cáscara están dadas por

$$m_s(a_0) = -a_0 \left[\sqrt{1 - \frac{2M}{a_0}} - \sqrt{(1 - \beta) \left(1 - \frac{r_0}{a_0}\right)} \right]. \quad (5.3.3)$$

$$\sigma' = \frac{1}{4\pi a_0^2} \left[\frac{1 - \frac{3M}{a_0}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{a_0}}} - \frac{(1 - \beta) \left(a_0 - \frac{3r_0}{2}\right)}{a_0 \sqrt{(1 - \beta) \left(1 - \frac{r_0}{a_0}\right)}} \right] \quad (5.3.4)$$

Además, hay la presencia de un término de flujo de momentum que actúa sobre la cáscara dado por

$$\Xi(a_0) = \frac{\left(\frac{r_0}{2} - a_0(a_0 - r_0)\Phi'\right) \sqrt{(1 - \beta) \left(1 - \frac{r_0}{a_0}\right)}}{4\pi a^2(a_0 - r_0)}. \quad (5.3.5)$$

De esta ecuación concluimos que el flujo de momento depende explícitamente de $\Phi(r)$, así como del déficit o exceso del ángulo sólido $(1 - \beta)$.

Cabe señalar que ciertos casos en los que no hay ni un déficit ni un exceso de ángulo sólido (es decir, $\beta = 0$) para la solución interior (5.2.2) se han estudiado previamente en la literatura. Cuando el parámetro β se anula, se pueden considerar los siguientes casos: i) para $e^{2\Phi(r)} = 1 - \frac{2M}{r}$ y $r_0 = 2M$, las variedades interior y exterior están dadas por el espacio-tiempo de Schwarzschild (5.1.2); ii) para $b(r) = r_0$ se pueden construir soluciones de agujero de gusano caracterizadas por las funciones de corrimiento al rojo $\Phi(r) = 0$ y $\Phi(r) = \frac{r_0}{r}$. Estas soluciones se pueden adaptar al espacio-tiempo exterior de Schwarzschild. Estos tres casos de soluciones esféricamente simétricas se discutieron en [26]. En la Figura 5.3.1 se muestra un diagrama de embebimiento tridimensional del pegado de esta solución

con la métrica de Schwarzschild.

5.4. Análisis de la ecuación de estado de la cáscara delgada

Es interesante analizar la ecuación de estado para la cáscara delgada $\omega = \frac{p}{\sigma}$ obtenida a partir de las ecuaciones (5.3.1) y (5.3.2). Para simplificar, consideramos la solución sin fuerza de marea. Entonces, para $\Phi(r) = 0$, las ecuaciones (5.3.1) y (5.3.2) implican que

$$\omega = -\frac{1}{2} \left[\frac{\frac{1-\frac{M}{a_0}}{\sqrt{1-\frac{2M}{a_0}}} - \sqrt{(1-\beta) \left(1 - \frac{r_0}{a_0}\right)}}{\sqrt{1-\frac{2M}{a_0}} - \sqrt{(1-\beta) \left(1 - \frac{r_0}{a_0}\right)}} \right]. \quad (5.4.1)$$

Analicemos primero el caso $\beta = 0$. De la ecuación (5.4.1), deducimos que en el límite asintótico cuando $a_0 \rightarrow \infty$, el parámetro de estado se acerca a $\omega = -1/2$, lo que implica que la cáscara delgada está sostenida por energía oscura. Más específicamente, el parámetro de estado está asociado con los modelos cosmológicos de quintaesencia, donde ω varía entre $-1 \leq \omega \leq -1/3$.

Consideremos ahora casos con valores no nulos del parámetro β . A partir de la ecuación (5.4.1), observamos que la cáscara delgada puede ser sostenida por energía oscura y materia fantasma en los siguientes casos:

1. Para $\beta < 0$:

■ Energía oscura:

a) Para $r_0 < 2M$, entonces $\zeta_1 + \zeta_2 < a_0$.

b) Para $3M < r_0$, entonces

1) $r_0 < a_0 < \zeta_3 + \zeta_4$ y

2) $\zeta_1 + \zeta_2 < a_0$.

c) Para $\frac{r_0}{3} \leq M < \frac{r_0}{2}$, entonces $\zeta_1 + \zeta_2 < a_0$.

■ Materia fantasma:

a) Para $2M < r_0$, entonces $r_0 < a_0 < \frac{2M-r_0(1-\beta)}{\beta}$.

2. Para $0 < \beta < 1$:

■ Energía oscura:

a) Para $r_0 < 2M$, entonces $\zeta_3 + \zeta_4 < a_0$.

b) Para $M \leq \frac{r_0}{4}$, entonces $r_0 < a_0$

c) Para $\frac{r_0}{4} < M < \frac{r_0}{3}$:

1) $0 < \beta < \frac{(r_0-4M)^2}{(r_0-2M)^2}$, entonces

i $r_0 < a_0 < \zeta_3 - \zeta_4$.

ii $\zeta_3 + \zeta_4 < a_0$.

2) $\beta = \frac{(r_0-4M)^2}{(r_0-2M)^2}$, entonces $r_0 < a_0$, con $a_0 \neq \zeta_3 - \zeta_4$.

3) $\frac{(r_0-4M)^2}{(r_0-2M)^2} < \beta < 1$, entonces $r_0 < a_0$

d) Para $\frac{r_0}{3} \leq M < \frac{r_0}{2}$, entonces $\zeta_3 + \zeta_4 < a_0$

■ Materia fantasma:

a) Para $r_0 < 2M$, entonces $\frac{2M-r_0(1-\beta)}{\beta} < a_0$.

b) Para $2M < r_0$, entonces $r_0 < a$.

donde

$$\zeta_1 = \frac{2M(\beta - 2) - r_0(1 - \beta)}{2\beta}, \quad (5.4.2)$$

$$\zeta_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(1 - \beta)((r_0 + 4M)^2 - (r_0 - 2M)^2\beta)}{\beta^2}}, \quad (5.4.3)$$

$$\zeta_3 = \frac{2M(\beta + 2) - r_0(1 - \beta)}{2\beta}, \quad (5.4.4)$$

$$\zeta_4 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(1 - \beta)((r_0 - 4M)^2 - (r_0 - 2M)^2\beta)}{\beta^2}}. \quad (5.4.5)$$

5.5. Análisis de las condiciones de energía de la cáscara delgada

Podemos estudiar ciertas características de las condiciones de energía de la cáscara delgada directamente usando expresiones para la densidad de energía superficial (5.3.1) y la presión superficial tangencial (5.3.2). Iniciamos este análisis considerando primero la Condición de Energía Nula (NEC), que en general, para un fluido anisotrópico se expresa como

$$\sigma + \mathcal{P}_i \geq 0.$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (5.3.1) y (5.3.2), NEC toma la siguiente forma:

$$\sigma + \mathcal{P} = \frac{1}{8\pi a_0} \left[\frac{\frac{3M}{a_0} - 1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{a_0}}} + \sqrt{(1 - \beta) \left(1 - \frac{r_0}{a_0}\right)} \right]. \quad (5.5.1)$$

De esta ecuación podemos encontrar las siguientes condiciones para satisfacer $\sigma + \mathcal{P} \geq 0$:

1. Para $2M > r_0$:

a) Si $0 < \beta < 1$, entonces $2M < a_0 \leq \zeta_3 + \zeta_4$.

b) Si $\beta < 0$, entonces $2M < a_0$.

Para simplificar el análisis de esta situación, estudiaremos el comportamiento de la densidad de energía superficial, la presión superficial tangencial y la NEC con la ayuda de gráficos realizados para algunos valores particulares de los parámetros. Esto se representa en la Figura 5.5.1, donde las cantidades físicas se muestran como funciones del radio de unión a_0 . Por simplicidad, consideramos $M = r_0 = 1$. Compararemos casos con déficit y exceso de ángulo sólido. Para $\beta = 1/2$, la NEC se satisface si el radio de unión se encuentra en el rango $2 < a_0 < 6,56$. La densidad de energía superficial cambia de signo en $a_0 = 3$, siendo positiva para $a_0 < 3$, mientras que la presión superficial tangencial permanece siempre positiva, como se

muestra en la Figura 5.5.1a. Para $\beta = -1/2$, la NEC y la densidad de energía superficial son siempre positivas, mientras que la presión superficial tangencial permanece positiva si el radio de unión se encuentra en el rango $2 < a_0 < 4$, como se muestra en la Figura 5.5.1b.

2. Para $2M < r_0$:

a) Si $0 < \beta < 1$:

1) Si $\frac{r_0}{4} < M < \frac{r_0}{3}$:

a' Si $0 < \beta < \frac{(r_0-4M)^2}{(r_0-2M)^2}$, entonces $\zeta_3 - \zeta_4 \leq a_0 \leq \zeta_3 + \zeta_4$.

b' Si $\beta = \frac{(r_0-4M)^2}{(r_0-2M)^2}$, entonces $a_0 = \zeta_3 - \zeta_4$.

2) Si $M = \frac{r_0}{3}$, entonces $\zeta_3 - \zeta_4 < a_0 \leq \zeta_3 + \zeta_4$.

3) Si $\frac{r_0}{3} < M < \frac{r_0}{2}$, entonces $r_0 < a_0 \leq \zeta_3 + \zeta_4$.

b) Si $\beta < 0$:

1) Si $M < \frac{r_0}{3}$, entonces $\zeta_3 + \zeta_4 \leq a_0$.

2) Si $M = \frac{r_0}{3}$, entonces $\zeta_3 + \zeta_4 < a_0$.

3) Si $\frac{r_0}{3} < M < \frac{r_0}{2}$, entonces $r_0 < a_0$.

Como hicimos antes, volveremos a analizar el comportamiento de la densidad de energía superficial, la presión superficial tangencial y la NEC con la ayuda de gráficos realizados para algunos valores particulares de los parámetros. Esto se muestra en la Figura 5.5.2. Ahora consideramos los valores de parámetros $M = 1$ y $r_0 = 3$. Al igual que antes, compararemos casos con déficit y exceso de ángulo sólido. Para $\beta = 1/2$, la densidad de energía superficial es consistentemente negativa, la presión superficial tangencial permanece positiva, y la NEC se satisface dentro del rango $3 < a_0 < 4$, como se muestra en la Figura 5.5.2a. Por otro lado, para $\beta = -1/2$, la densidad de energía se vuelve positiva en $a_0 = 5$, mientras que la presión tangencial permanece positiva en el rango $3 < a_0 < 9,27$. La NEC se satisface para $3 < a_0$, como se muestra en la Figura 5.5.2b. Por lo tanto, existe un intervalo para el radio de unión a_0 donde la densidad de energía superficial, la presión tangencial y la NEC son positivas.

Realicemos ahora el análisis de la Condición de Energía Fuerte (SEC), que se expresa como $\sigma + \mathcal{P}_{\text{total}} \geq 0$. De esta relación obtenemos que:

$$\sigma + 2\mathcal{P} = \frac{M}{8\pi a_0^2 \sqrt{1 - \frac{2M}{a_0}}}. \quad (5.5.2)$$

De esta expresión, se puede concluir directamente que la SEC siempre se satisface para $2M > a_0$, independientemente del parámetro β .

Finalmente, analicemos la Condición de Energía Dominante (DEC), que para la densidad de energía superficial y la presión superficial tangencial puede expresarse como:

$$-\sigma \leq \mathcal{P} \leq \sigma. \quad (5.5.3)$$

Esta condición se cumple en los siguientes casos:

1. Para $4M > 3r_0$

a) Si $0 < \beta < \frac{(4M-3r_0)^2}{9(r_0-2M)^2}$, entonces $\zeta_5 - \zeta_6 \leq a_0 \leq \zeta_5 + \zeta_6$.

b) Si $\beta = \frac{(4M-3r_0)^2}{9(r_0-2M)^2}$, entonces $a_0 = \zeta_5 + \zeta_6$.

2. Para $2M > r_0$, si $\beta < 0$, entonces $\zeta_5 + \zeta_6 < a_0$,

donde

$$\zeta_5 = \frac{M(4 + 6\beta) - 3r_0(1 - \beta)}{6\beta}, \quad (5.5.4)$$

$$\zeta_6 = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{(1 - \beta)((4M - r_0)^2 - 9(r_0 - 2M)^2\beta)}{\beta^2}}. \quad (5.5.5)$$

En este escenario, visualizaremos el comportamiento de la densidad de energía superficial y la presión tangencial estableciendo $M = 1$. Para considerar una situación con un déficit en el ángulo sólido, fijamos $\beta = 0,1$ y $r_0 = 0,2$. Entonces, DEC se satisface si el radio de unión se encuentra en el rango $2,1 < a_0 < 11,4$, como se muestra en la Figura 5.5.3a. En este escenario, el agujero de gusano tipo Schwarzschild atravesable toma la forma $ds_-^2 = -dt^2 + \frac{dr^2}{\frac{9}{10}(1-\frac{1}{r})} + r^2 d\Omega^2$. Para considerar una situación con un exceso en el ángulo sólido, fijamos $\beta = -1$ y $r_0 = 1$. En este caso, la densidad de energía superficial y la presión tangencial permanecen

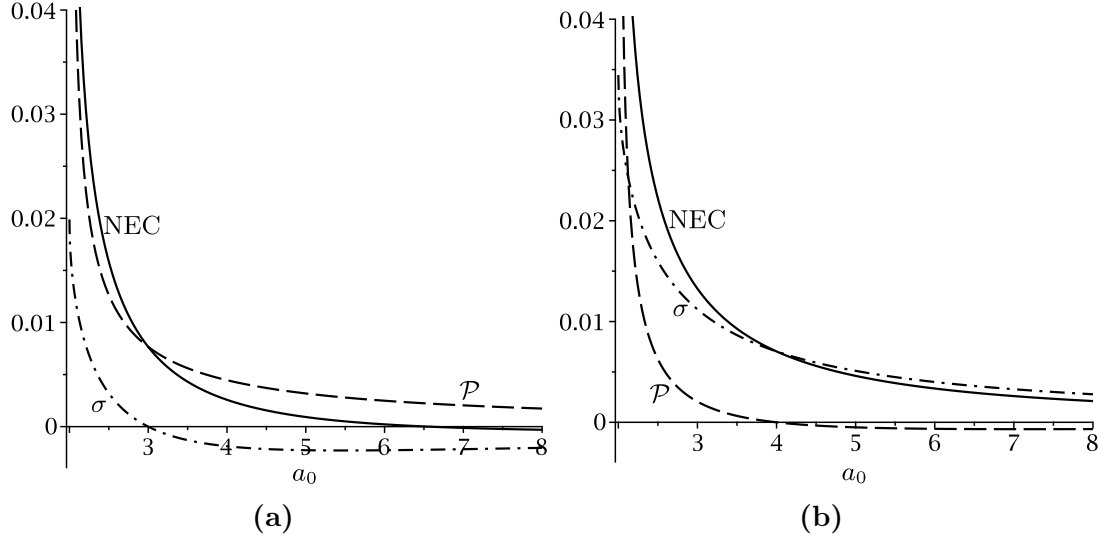


Figura 5.5.1: El comportamiento de la densidad de energía superficial (línea de punto y raya), la presión tangencial superficial (línea discontinua) y la Condición de Energía Nula (NEC, por sus siglas en inglés) (línea continua) como funciones del radio de unión a_0 se representa en estas gráficas para los valores de parámetros $2M > r_0$, $\Phi(r) = 0$ y $M = r_0 = 1$. La figura (a) muestra el caso para $\beta = \frac{1}{2}$, mientras que la figura (b) ilustra el escenario para $\beta = -\frac{1}{2}$. Para más detalles, consulte el texto.

positivas en el rango $2,07 < a_0 < 3$, como se muestra en la Figura 5.5.3b. En este escenario, el espacio-tiempo interior, representado por el agujero de gusano tipo Schwarzschild atravesable, está dado por $ds_-^2 = -dt^2 + \frac{dr^2}{2(1-\frac{1}{r})} + r^2 d\Omega^2$. Este resultado es interesante, ya que para $2M > r_0$, la cáscara delgada puede ser soportada por materia no exótica, satisfaciendo todas las condiciones de energía.

5.6. Análisis de las regiones de estabilidad de la cáscara delgada

Estudiaremos las regiones de estabilidad de las cáscaras delgadas con densidades de energía superficial positivas y negativas, (5.3.1), considerando $\beta \neq 0$ y tres casos de funciones de corrimiento al rojo en el contexto de la métrica interior (5.2.2): $\Phi(r) = 0$, $\Phi(r) = r_0/r$, y $\Phi(r) = r/r_0$.

Antes de profundizar en el análisis, es importante destacar algunas observaciones derivadas de la ecuación maestra (3.3.1), que determina las configuraciones de equilibrio estable para las geometrías específicas de agujeros de gusano fantasma:

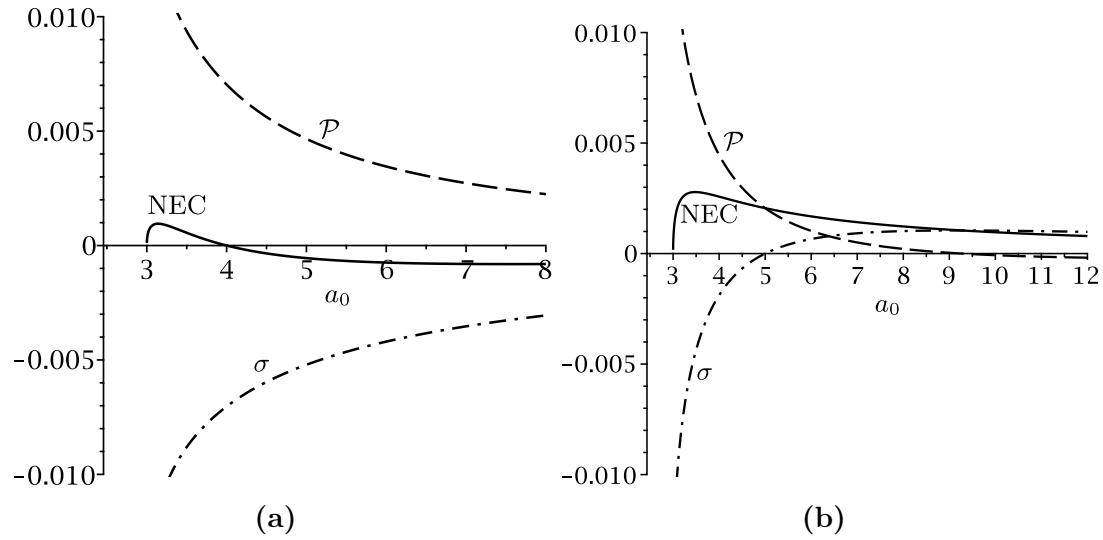


Figura 5.5.2: El comportamiento de la densidad de energía superficial (línea de punto y raya), la presión tangencial superficial (línea discontinua) y la Condición de Energía Nula (NEC, por sus siglas en inglés) (línea continua) como funciones del radio de unión a_0 se representa en estas gráficas para los valores de parámetros $2M < r_0$, $\Phi(r) = 0$, $M = 1$ y $r_0 = 3$. La figura (a) ilustra el caso para $\beta = \frac{1}{2}$, mientras que la figura (b) muestra el escenario para $\beta = -\frac{1}{2}$. Consulte el texto principal para obtener más detalles.

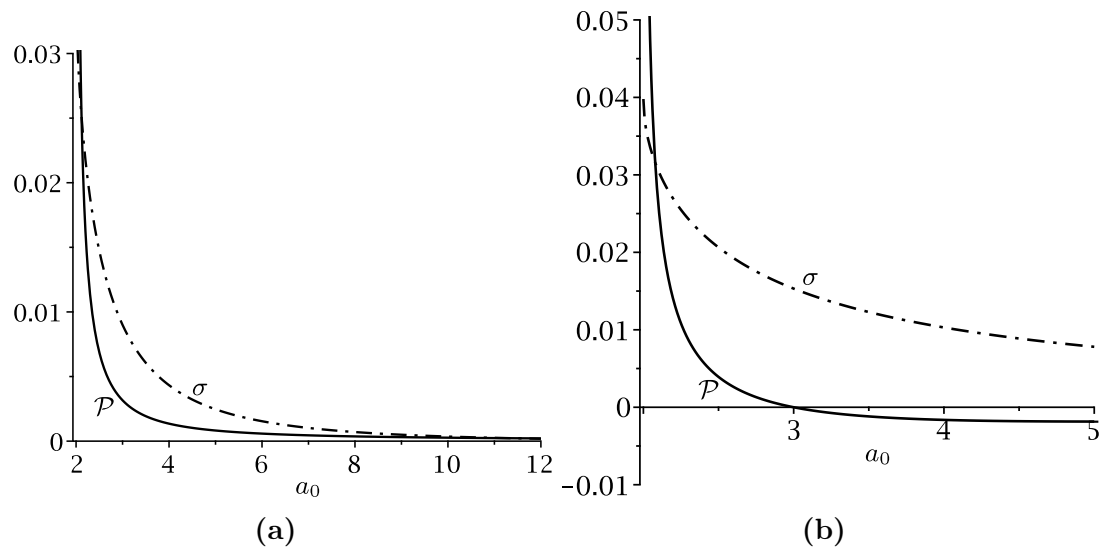


Figura 5.5.3: Las gráficas muestran el comportamiento de la densidad de energía superficial (línea de punto y raya) y la presión tangencial superficial (línea discontinua) como funciones del radio de unión a_0 en escenarios donde se satisface la Condición de Energía Dominante (DEC, por sus siglas en inglés), para los valores de parámetros $2M > r_0$ y $\Phi(r) = 0$. La figura (a) representa el caso con $M = 1$, $r_0 = 0,2$ y $\beta = 0,1$, mientras que la figura (b) ilustra el escenario con $M = r_0 = 1$ y $\beta = -1$. Para más detalles, consulte el texto.

- Se puede demostrar que para el caso $\Phi(r) = 0$, $\eta(a_0) \rightarrow -1/2$ cuando $\beta \rightarrow -\infty$ o $a_0 \rightarrow \infty$. Esto indica que las regiones de estabilidad están fuertemente restringidas para valores altos del exceso de ángulo sólido, así como para rangos amplios de a_0 .
- En el caso de $\Phi(r) = r_0/r$, observamos que $\eta(a_0) \rightarrow -1/2$ solo cuando $a_0 \rightarrow \infty$. Esto sugiere que, en este escenario también, la región de estabilidad está significativamente restringida para valores grandes de a_0 .

5.6.1. Densidad de energía superficial positiva

Primero, consideremos el caso en el que la cáscara delgada tiene una densidad de energía superficial positiva, es decir, $\sigma(a_0) > 0$ y $m_s(a_0) > 0$. La estructura de la ecuación (5.3.1) nos lleva a separar el análisis en dos casos: $2M > r_0$ y $2M < r_0$.

5.6.1.1. $2M > r_0$

1. Para $0 < \beta < 1$, el radio a_0 de la cáscara delgada satisface la siguiente desigualdad:

$$2M < a_0 < \frac{2M - r_0(1 - \beta)}{\beta}. \quad (5.6.1)$$

Para simplificar y clarificar el análisis, consideremos valores específicos de los parámetros. Estableciendo $\beta = 1/2$ y $r_0/M = 1$ en la ecuación anterior, determinamos la siguiente condición para el radio a_0 :

$$2 < a_0/M < 3. \quad (5.6.2)$$

De esta desigualdad, usando las Ecs. (5.3.3) y (5.3.4), deducimos que $m_s(a_0) > 0$ y $\sigma' < 0$. Por lo tanto, se satisface la siguiente condición:

$$m_s \sigma' < 0. \quad (5.6.3)$$

Ahora visualizaremos gráficamente las regiones de estabilidad de la cáscara delgada para las funciones de corrimiento al rojo $\Phi(r) = 0$, $\Phi(r) = r_0/r$, y $\Phi(r) = r/r_0$. Para hacer esto, usaremos la ecuación maestra (3.3.1). Es importante notar que esta expresión deriva de las ecuaciones (3.1.30)-(3.2.12), y el efecto de la función de corrimiento al rojo $\Phi(r)$ está implícitamente

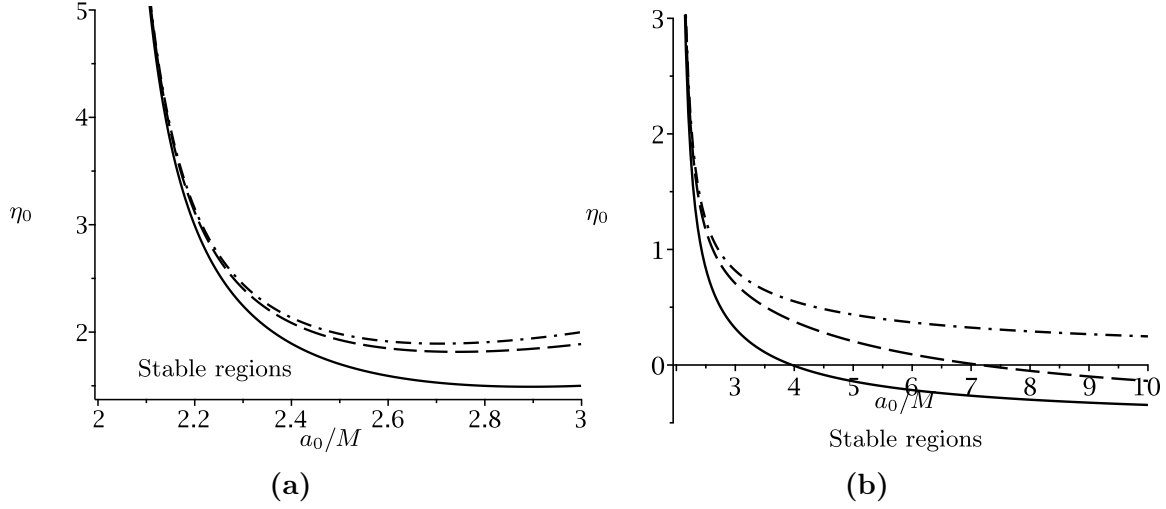


Figura 5.6.1: Las gráficas muestran regiones de estabilidad para los casos $\sigma(a_0) > 0$ y $r_0 < 2M$, comparando las funciones de corrimiento al rojo $\Phi(r) = 0$ (línea continua), $\Phi(r) = r_0/r$ (línea discontinua), y $\Phi(r) = r/r_0$ (línea de punto y raya). Para la gráfica (a) con $0 < \beta < 1$, las regiones de equilibrio estable se encuentran por debajo de las curvas. Para la gráfica (b) con $\beta < 0$, las regiones estables se sitúan nuevamente por debajo de las curvas. En ambos gráficos, la solución de marea nula presenta la región estable más pequeña.

incorporado en la ecuación (3.1.38). Por lo tanto, para la desigualdad (5.6.2), usando la condición (5.6.3) y la ecuación maestra (3.3.1), concluimos que la desigualdad (3.3.3) debe satisfacerse. Esto nos permite identificar que las regiones de estabilidad se encuentran debajo de las curvas del parámetro η_0 mostradas en la Figura 5.6.1a. Se observa que las regiones de estabilidad aumentan cuando $\Phi(r) \neq 0$, debido al flujo de momento (5.3.5).

2. Para $\beta < 0$, tenemos que cumplir $a_0 > 2M$. Por lo tanto, el radio de la cáscara delgada está fuera del horizonte de eventos. Estableciendo $\beta = -2$ y $r_0/M = 1$, obtenemos la desigualdad $2 < a_0/M$. Las respectivas regiones de estabilidad dadas por η_0 se muestran en la Figura 5.6.1b. De la ecuación (5.3.4), encontramos que $\sigma' < 0$, y como estamos considerando una densidad de energía superficial positiva, esto implica $m_s \sigma' < 0$. Por lo tanto, las regiones de estabilidad, dictadas por la desigualdad (3.3.3), se encuentran debajo de las curvas η_0 . La Figura 5.6.1b revela que las regiones de estabilidad aumentan para los casos donde $\Phi(r) \neq 0$. Esta observación sugiere que la introducción de una función $\Phi(r)$ no nula contribuye a ampliar las regiones de estabilidad de la cáscara delgada.

5.6.1.2. $2M < r_0$

1. Para $\beta < 0$ y $m_s(a_0) > 0$ encontramos que:

$$\frac{2M - r_0(1 - \beta)}{\beta} < a_0. \quad (5.6.4)$$

Para este caso específico, podemos ver que la ecuación (5.3.4) implica que σ' tiene una raíz real positiva. Denotemos esta raíz como R , de tal manera que $\sigma'|_R = 0$. Esta raíz se encuentra dentro del rango de la ecuación (5.6.4). Esto indica la presencia de una asíntota en $\sigma'|_R = 0$ (véase Figura 5.6.2). Podemos entonces verificar que $\sigma' > 0$ si $\frac{2M - r_0(1 - \beta)}{\beta} < a_0 < R$ y $\sigma' < 0$ si $a_0 > R$. Por lo tanto, las regiones de estabilidad están restringidas por las desigualdades:

$$\eta_0 > \Lambda_0, \text{ si, } \frac{2M - r_0(1 - \beta)}{\beta} < a_0 < R, \quad (5.6.5)$$

$$\eta_0 < \Lambda_0, \text{ si, } a_0 > R. \quad (5.6.6)$$

Para encontrar las raíces de la ecuación (5.3.4) impondremos una relación entre r_0 y M . De esta manera, obtendremos la raíz R en función de a_0/M . Para los valores particulares $\beta = -2$ y $r_0/M = 2,5$, la asíntota se ubica en $R = a_0/M = 4,56$, resultando en las desigualdades: $2,75 < a_0/M < 4,56$ y $a_0/M > 4,56$. Por lo tanto, de las desigualdades (5.6.5) y (5.6.6), concluimos que las regiones de estabilidad se sitúan por encima y por debajo de las curvas del parámetro η_0 , como se muestra y explica en la Figura 5.6.2. En comparación con $\Phi(r) = 0$, las regiones de estabilidad aumentan para $\Phi(r) \neq 0$.

5.6.2. Densidad de energía superficial negativa

Consideremos ahora cáscaras delgadas con una densidad de energía superficial negativa, es decir, $\sigma(a_0) < 0$ y $m_s(a_0) < 0$. Nuevamente consideramos por separado los casos: $2M > r_0$ y $2M < r_0$.

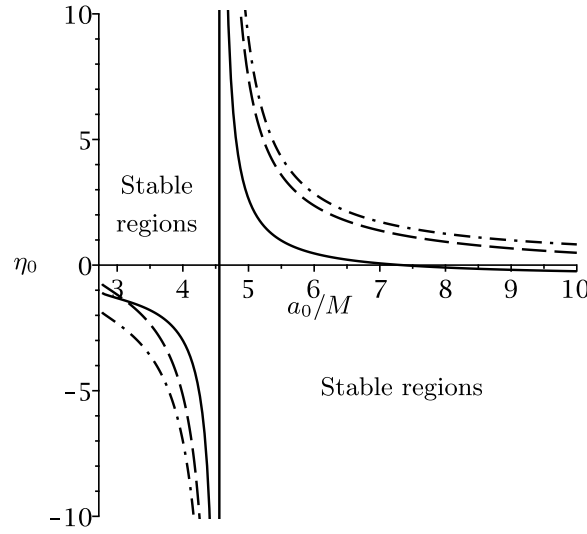


Figura 5.6.2: La figura muestra las regiones de estabilidad para $\sigma(a_0) > 0$, $2M < r_0$ y las funciones de corrimiento al rojo $\Phi(r) = 0$ (línea continua), $\Phi(r) = r_0/r$ (línea discontinua) y $\Phi(r) = r/r_0$ (línea de punto y raya). Las regiones estables a la izquierda de la asíntota en $R = 4,56$ se encuentran por encima de las curvas y disminuyen en tamaño en los casos con fuerzas de marea. Las segundas regiones estables, a la derecha de la asíntota en $R = 4,56$, se sitúan por debajo de las curvas y aumentan en tamaño en los casos con fuerzas de marea.

5.6.2.1. $2M > r_0$

Para $0 < \beta < 1$, el radio de la cáscara delgada satisface la inecuación

$$\frac{2M - r_0(1 - \beta)}{\beta} < a_0. \quad (5.6.7)$$

Usando $\sigma'|_R = 0$, encontramos una raíz real positiva R . Para mostrar explícitamente estas regiones, establecemos $r_0/M = 1$ y $\beta = 1/4$, donde la raíz $R = 9,56$. Así, las regiones estables están dictadas por las desigualdades $5 < a_0/M < 9,56$ y $9,56 < a_0/M$. En el primer intervalo, tenemos $\sigma' < 0$, satisfaciendo la desigualdad (3.3.2), con regiones estables por encima de las curvas de η_0 como se muestra en la Figura 5.6.3. Adicionalmente, observamos que η_0 solo toma valores positivos, y las regiones de equilibrio disminuyen para soluciones con fuerza de marea. En el segundo intervalo, tenemos $\sigma' > 0$, satisfaciendo la desigualdad (3.3.3), con regiones estables por debajo de las curvas como se muestra en la Figura 5.6.3. Aquí, las regiones de equilibrio disminuyen para soluciones de fuerza de marea.

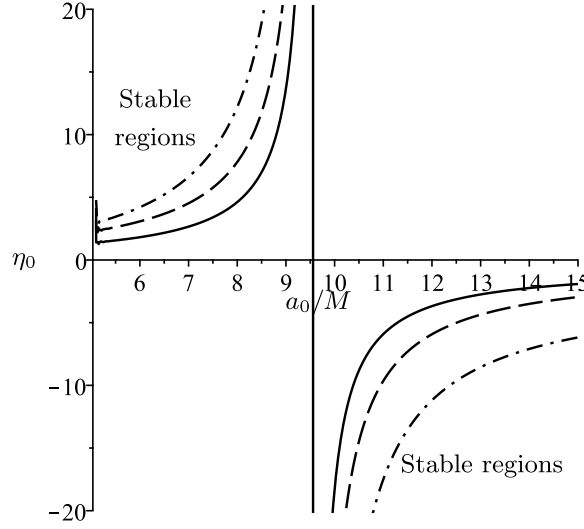


Figura 5.6.3: El gráfico muestra las regiones de equilibrio estable para $\sigma(a_0) < 0$, $r_0 < 2M$ y las funciones de corrimiento al rojo $\Phi(r) = 0$ (línea continua), $\Phi(r) = r_0/r$ (línea discontinua) y $\Phi(r) = r/r_0$ (línea de punto y raya). Las curvas corresponden al caso $0 < \beta < 1$, con una asíntota en $R = 9,56$. Las regiones estables a la izquierda de la asíntota en $R = 9,56$ se encuentran por encima de las curvas y disminuyen en tamaño en los casos con fuerzas de marea. Las segundas regiones estables, a la derecha de la asíntota en $R = 9,56$, se sitúan por debajo de las curvas y disminuyen en tamaño en los casos con fuerzas de marea.

5.6.2.2. $2M < r_0$

1. Para $0 < \beta < 1$, esto implica que el radio de la cáscara delgada se encuentra en la región

$$r_0 \leq a_0. \quad (5.6.8)$$

Si evaluamos $r_0/M = 2,4$ entonces $2,4 < a_0/M$. Luego, para $\beta = 1/3$, en este intervalo tenemos $\sigma' > 0$, y de acuerdo con la ecuación (3.3.3), las regiones de estabilidad se encuentran por debajo de las curvas de η_0 como se muestra en la Figura 5.6.4a. Además, se observa que η_0 toma solo valores negativos, y las regiones de equilibrio para soluciones con fuerzas de marea disminuyen en comparación con la solución sin fuerza de marea, que tiene la región estable más grande.

2. Para $\beta < 0$, el radio de la cáscara delgada se encuentra dentro de la región

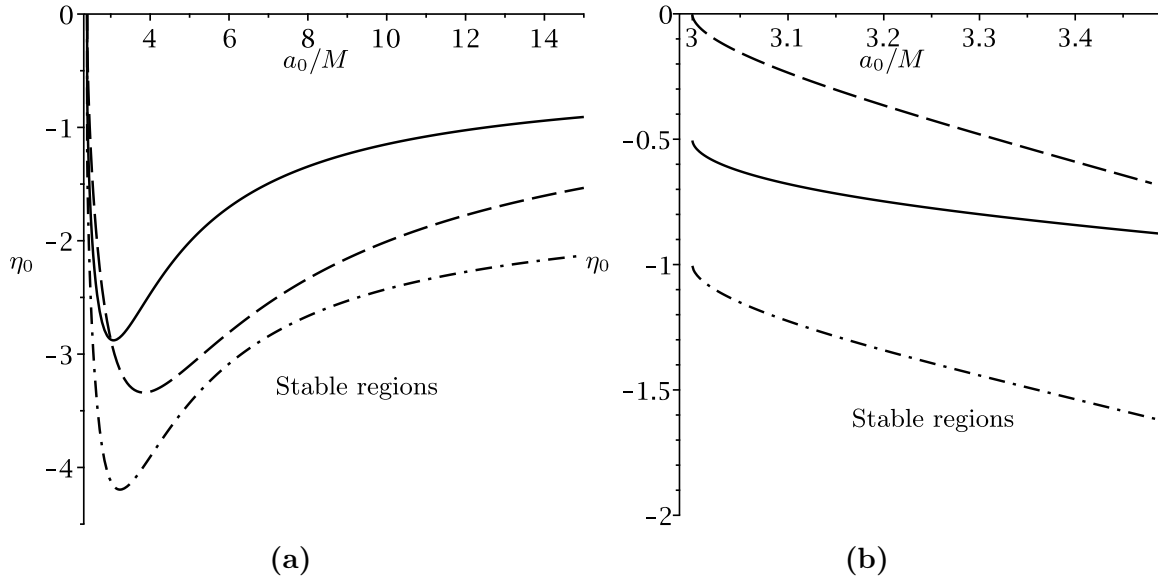


Figura 5.6.4: Los gráficos muestran regiones de equilibrio estable para $\sigma(a_0) < 0$, $2M < r_0$, comparando las funciones de corrimiento al rojo: $\Phi(r) = 0$ (línea continua), $\Phi(r) = r_0/r$ (línea discontinua) y $\Phi(r) = r/r_0$ (línea de punto y raya). En el gráfico (a), para $0 < \beta < 1$, las regiones estables se encuentran por debajo de las curvas y disminuyen para las funciones de corrimiento al rojo con fuerzas de marea. El gráfico (b) corresponde a $\beta < 0$, donde las regiones estables se sitúan por debajo de las curvas. Podemos observar que $\Phi(r) = r_0/r$ (línea discontinua) presenta la región estable más grande, mientras que $\Phi(r) = r/r_0$ (línea de punto y raya) muestra la región estable más pequeña.

$$r_0 \leq a_0 < \frac{2M - r_0(1 - \beta)}{\beta}. \quad (5.6.9)$$

Evaluando los parámetros $r_0/M = 3$ y $\beta = -2$, encontramos $3 < a_0/M < 3.5$. Aquí, tenemos $\sigma' > 0$, con regiones de equilibrio estable que se encuentran por debajo de las curvas de η_0 , las cuales son siempre negativas, como se muestra en la Figura 5.6.4b.

Capítulo 6

Conclusiones

En el presente trabajo de investigación, se han desarrollado y analizado nuevas configuraciones de agujeros de gusano atravesables estáticos, denominados agujeros de gusano tipo Schwarzschild. Estas estructuras se caracterizan por una función de forma que exhibe una dependencia lineal en la coordenada radial. La solución, representada por la métrica (4.1.3), describe una geometría que conecta dos regiones asintóticamente no planas, caracterizadas por la presencia de un déficit o un exceso de ángulo sólido, cuantificado por la constante β . Específicamente, se observa un déficit de ángulo para $0 < \beta < 1$, y un exceso de ángulo para $\beta < 0$.

La topología de estos agujeros de gusano presenta características distintivas en función del valor de β . En el caso de déficit de ángulo ($0 < \beta < 1$), los embebimientos se extienden desde la garganta hasta el infinito, como se ilustra en la Figura 4.1.3a. En contraste, para el caso de exceso de ángulo ($\beta < 0$), los embebimientos se extienden desde la garganta hasta un valor radial máximo finito, como se muestra en la Figura 4.1.3b. Esta variación en la forma y el tamaño de los embebimientos está directamente relacionada con la magnitud del déficit o exceso de ángulo sólido. Se ha realizado un análisis exhaustivo de los agujeros de gusano tipo Schwarzschild sin fuerza de marea. En este contexto, se ha estudiado un caso particular de agujero de gusano fantasma que alberga un monopolo global. En la situación de déficit de ángulo sólido, el tensor energía-momento comprende dos entidades distintas: un monopolo global y el agujero de gusano propiamente dicho. Estos agujeros de gusano están sustentados por una fuente de materia anisótropa que viola las condiciones de energía nula, débil, fuerte y dominante para $r \geq r_0$.

El análisis de las condiciones de atravesabilidad ha revelado que la aceleración experimentada por un viajero es menor que la del agujero de gusano de Schwarzschild para $0 < \beta < 1$, y mayor para $\beta < 0$. Asimismo, se ha determinado la velocidad máxima permisible para un viajero que atraviesa el agujero de gusano, considerando las restricciones de marea. El tiempo total de viaje también se ve influenciado por el parámetro β : para agujeros de gusano con exceso de ángulo sólido ($\beta < 0$), el tiempo de viaje es más corto que en el caso de Schwarzschild ($\beta = 0$), mientras que para agujeros de gusano con déficit de ángulo sólido ($0 < \beta < 1$), el tiempo de viaje es más prolongado.

Se ha llevado a cabo un estudio detallado del comportamiento geodésico para agujeros de gusano tipo Schwarzschild sin fuerza de marea (4.2.1), considerando diferentes valores del parámetro β . El análisis de la ecuación de Euler-Lagrange demuestra que una partícula de prueba, moviéndose radialmente hacia la garganta, siempre alcanza esta con velocidad nula en un tiempo finito. En contraste, para geodésicas radiales hacia el exterior, la velocidad de la partícula tiende a un valor máximo, alcanzando el infinito. Para geodésicas no radiales, se han derivado las condiciones necesarias para que estas crucen la garganta. Se ha demostrado que la existencia de puntos de inversión condiciona el confinamiento de las geodésicas a un lado del agujero de gusano, mientras que la ausencia de estos puntos permite que las geodésicas atraviesen la garganta, como se ilustra en la Figura 4.4.3.

En síntesis, esta primera parte de la investigación presenta una nueva clase de soluciones de agujeros de gusano que constituyen una generalización sutil del agujero de gusano de Schwarzschild. Esta generalización ofrece dos perspectivas distintas que dependen del parámetro β , revelando cómo este influye en el comportamiento de la geometría del espacio-tiempo.

La segunda fase de esta investigación se centró en la construcción y análisis de un nuevo tipo de agujero de gusano atravesable de cáscara delgada, empleando el método de cortar y pegar. Se examinó su estabilidad frente a perturbaciones linealizadas alrededor de soluciones estáticas a_0 . Una de las ventajas fundamentales de este enfoque radica en su simplicidad para analizar las regiones de equilibrio estable de cáscaras delgadas mediante una ecuación maestra. Es importante destacar que en este análisis, el comportamiento de la masa de la cáscara delgada $m_s(a)$ está intrínsecamente vinculado a la estabilidad del agujero de gusano a través de desigualdades manejables.

Los espacios-tiempos a ambos lados del agujero de gusano de cáscara delgada se caracterizan por ser esféricamente simétricos y estáticos. Específicamente, se consideró que el espacio-tiempo exterior está dado por la solución de vacío de Schwarzschild, mientras que el interior corresponde a los agujeros de gusano tipo Schwarzschild atravesables. En el marco de la relatividad general, estos espacios-tiempos esféricamente simétricos se unen en una hipersuperficie esférica de radio arbitrario a_0 , calculándose las componentes del tensor energía-momento superficial. Dado que estos términos no son nulos, la unión no constituye una superficie de frontera, sino una cáscara delgada de radio a_0 con una masa superficial $m_s = 4\pi a_0^2 \sigma$. Es importante señalar que toda la materia está confinada en esta cáscara delgada. Para la solución exterior de Schwarzschild, la unión se produce en una interfaz $a_0 > 2M$, situada fuera del horizonte de eventos, evitando así una solución de agujero negro. Este procedimiento permite la construcción de espacios-tiempos asintóticamente planos utilizando métricas no asintóticamente planas como soluciones interiores.

Se demostró que en el infinito espacial, la métrica (5.2.2) puede exhibir un déficit de ángulo para $0 < \beta < 1$ y un exceso de ángulo para $\beta < 0$. Este último caso es particularmente interesante, ya que la solución interior (5.2.2) describe agujeros de gusano de tamaño finito, que se extienden desde la garganta hasta un radio máximo, permitiendo así la generación de agujeros de gusano microscópicos.

Se llevó a cabo un análisis exhaustivo de la estabilidad de estos agujeros de gusano de cáscara delgada atravesables frente a perturbaciones esféricamente simétricas. Es importante destacar que la estabilidad del agujero de gusano está intrínsecamente relacionada con las propiedades de la materia que reside en la cáscara delgada. Se investigó el comportamiento de las regiones de equilibrio estable considerando cáscaras delgadas con densidades de energía superficial tanto positivas como negativas, así como diversas funciones de corrimiento al rojo gravitacional. Los resultados indicaron que las regiones estables dependen explícitamente del parámetro β . Además, se observó que el comportamiento de las regiones de equilibrio estable aumentaba o disminuía en función de la forma de la función de corrimiento al rojo gravitacional.

Se analizó en detalle la ecuación de estado para la cáscara delgada, dada por $\omega = \frac{p}{\sigma}$. Por simplicidad, se consideró la solución de agujero de gusano sin fuerza de marea. Las conclusiones de este análisis revelan que la cáscara delgada puede

ser soportada por diversos tipos de materia: energía oscura, energía fantasma y en ciertos casos especiales, por materia no exótica. Estas últimas configuraciones son posibles tanto para $\beta < 0$ como para $0 < \beta < 1$, satisfaciendo así la condición de energía dominante y, por consiguiente, cumpliendo también con las condiciones de energía débil y nula.

Bibliografía

- [1] L. Flamm.(1916). Beitrage zur Einsteinschen Gravitationstheorie. Phys. Z 71, 448.
- [2] A. Einstein, N. Rosen (1935). The Particle Problem in the General Theory of Relativity. Phys. Rev. 48, 73.
- [3] J.A. Wheeler. (1955). Geons. Phys. Rev. 97, 511.
- [4] C.W. Misner, J.A. Wheeler. (1957). Classical physics as geometry. Ann. Phys. 2, 525.
- [5] H.G. Ellis, J. (1973). Ether flow through a drainhole: A particle model in general relativity. Math. Phys. 14, 104.
- [6] M. S. Morris and K. S. Thorne. (1988). Wormholes in space-time and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. Am. J. Phys. 56, 395.; M. S. Morris, K. S. Thorne and U. Yurtsever. (1988). Wormholes, Time Machines, and the Weak Energy Condition. Phys. Rev. Lett. 61, 1446.
- [7] M. Visser. (1995). (1996). Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking, (AIP, New York).
- [8] J. P. S. Lemos and F. S. N. Lobo. (2004). Plane symmetric traversable wormholes in an Anti-de Sitter background. Phys. Rev. D 69, 104007. ; C. Barcelo, L. J. Garay, P. F. Gonzalez-Diaz and G. A. Mena Marugan. (1996). Asymptotically anti-de Sitter wormholes. Phys. Rev. D 53, 3162.; J. P. S. Lemos, F. S. N. Lobo and S. Q. de Oliveira. (2003). Morris-Thorne wormholes with a cosmological constant. Phys. Rev. D 68, 064004.
- [9] M. Cataldo, L. Liempi, P. Rodriguez. (2017). Traversable Schwarzschild-like wormholes. Eur. Phys. C, 77, 748.
- [10] N. Dadhich, S. Kar, S. Mukherjee and M. Visser. (2002). $R = 0$ space-times and selfdual Lorentzian wormholes. Phys. Rev. D 65, 064004.
- [11] M. Cataldo, P. Salgado and P. Minning. (2002). Selfdual Lorentzian wormholes in N-dimensional Einstein gravity. Phys. Rev. D 66, 124008.
- [12] S. V. Sushkov. (2005). Wormholes supported by a phantom energy. Phys. Rev. D 71, 043520.

- [13] F. S. N. Lobo. (2005). Phantom energy traversable wormholes. *Phys. Rev. D* 71, 084011.
- [14] K. A. Bronnikov and M. V. Skvortsova. (2014). Cylindrically and axially symmetric wormholes. Throats in vacuum?. *Grav. Cosmol.* 20, 171. ; M. i. G. Richarte. (2013). Cylindrical Wormholes with Positive Cosmological Constant. *Phys. Rev. D* 88, 027507.
- [15] L. A. Anchordoqui, S. Perez Bergliaffa and D. F. Torres. (1997). Brans-Dicke wormholes in nonvacuum spacetime. *Phys. Rev. D* 55, 5226.
- [16] F. S. N. Lobo. (2005). Stability analysis of phantom wormholes. *Phys. Rev. D* 71, 124022.
- [17] E. Eiora, C. Simeone. (2004). Cylindrical thin-shell wormholes. *Phys. Rev. D*, **70**, 044008.; E. Eiora, C. Simeone. (2010). Some general aspects of thin-shell wormholes with cylindrical symmetry. *Phys. Rev. D*, 81, 084022.
- [18] S. D. Forghani, S. H. Mazharimousavi, M. Halilsoy. (2020). Thin-shell wormhole satisfying energy conditions. *Phys. Lett. B*, 804, Article 135374.
- [19] M. Cataldo, L. Liempi, P. Rodríguez. (2016). Static spherically symmetric wormholes with isotropic pressure. *Phys. Lett. B*, 804, 130-135.
- [20] W. Israel. (1966). Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity. *Nuovo Cimento*, 44B, 463.
- [21] M. Visser. (1989). Traversable wormholes from surgically modified Schwarzschild spacetimes. *Nucl. Phys. B* 328, 203.
- [22] E. Poisson, M. Visser. (1995). Thin shell wormholes: Linearization stability. *Phys. Rev. D*, 52, 7318-7321.
- [23] E. Eiora, C. Simeone. (2007). Stability of Chaplygin gas thin-shell wormholes. *Phys. Rev. D*, 70, 044008. ; E. F. Eiroa and C. Simeone. (2010). Brans-Dicke cylindrical wormholes. *Phys. Rev. D* **82**, 084039.
- [24] N. Montelongo Garcia, F. S. N. Lobo, M. Visser. (2012). Generic spherically symmetric dynamic thin-shell traversable wormholes in standar general relativity. *Phys. Rev. D*, 86, 044026.
- [25] M. Ishak, K. Lake. (2002). Stability of transparent spherically symmetric thin shells and wormholes. *Phys. Rev. D*, 65, 044011.
- [26] F. S. N. Lobo, P. Crawford. (2005). Stability analysis of dynamic thin shells. *Class. Quantum. Grav.* 22, 4869.
- [27] M. H. Dehghani, M. R. Mehdizadeh. (2012). Lovelock thin-shell wormholes. *Phys. Rev. D* 85, 024024.
- [28] A. Khaybullina, G. Tuleganova. (2019). Stability of Schwarzschild- $f(R)$ gravity thin-shell wormholes. *Mod. Lett. Phys A* 34, 1950006.

-
- [29] I. P. Lobo, M. Graça, J. P. Morais, H. Moradpour. (2020). Thin-shell wormholes in Rastall gravity. *Eur. Phys. J. Plus* 135, 550.
 - [30] M. Barriola and A. Vilenkin. (1989). Gravitational field of a global monopole. *Phys. Rev. Lett.* **63**, 341.
 - [31] J. Spinelly, U. de Freitas and E. R. Bezerra de Mello. (2002). Gravitating magnetic monopole in the global monopole space-time. *Phys. Rev. D* **66**, 024018.
 - [32] I. Cho and J. Guven. (1998). Modeling the dynamics of global monopoles. *Phys. Rev. D* **58**, 063502.
 - [33] N. Cruz, M. Olivares and J. R. Villanueva. (2005). The Geodesic structure of the Schwarzschild anti-de Sitter black hole,” *Class. Quant. Grav.* 22, 1167.