



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

Entropía de Permutación para la Caracterización del Modelo Hamiltoniano de Campo Medio Atractivo

Permutation Entropy for the characterization of the
Attractive Hamiltonian Mean Field Model

Por: Melissa Fuentealba Monsalve

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la
Universidad de Concepción para optar al grado académico de Magíster en
Ciencias con Mención en Física.

Julio 2024

Concepción, Chile

Profesor Guía: Dr. Roberto Navarro

© 2024, Melissa Fuentealba Monsalve

Ninguna parte de esta tesis puede reproducirse o transmitirse bajo ninguna forma o por ningún medio o procedimiento, sin permiso por escrito del autor.

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento

A quien seré en el futuro. Que esta tesis me recuerde el logro de mi constancia.

AGRADECIMIENTOS

Quisiera expresar mi gratitud con todas las personas que me apoyaron de diversas maneras en la creación de esta tesis.

En primer lugar agradezco al esfuerzo de mis padres, pues sin ellos no hubiera logrado alcanzar este grado académico, gracias por su ánimo, sus consejos y por creer siempre en mí. También agradezco a mi hermana, por su compañía y soporte emocional. Y agradezco a mi compañero Mauricio, por la motivación y amor que me entregó todos los días de este proceso, sobretodo los más difíciles, junto a él mi trabajo fue mucho mas ameno.

También agradezco a mi comisión de Tesis, compuesto por el profesor Roberto Navarro y Danilo Rivera, ambos fueron soportes fundamentales para la creación de este trabajo. Agradezco a Roberto por su guía. Y a Danilo por su disposición al compartir su conocimiento y por su trabajo en la creación de los datos los cuales son la base para esta investigación.

Por último, agradezco al Departamento de Física de la Universidad de Concepción por el financiamiento otorgado que me permitió realizar mi magíster.

Resumen

El modelo hamiltoniano de campo medio (HMF, por sus siglas en inglés) es un modelo de interacciones de largo alcance que presenta estados cuasi-estacionarios asociados a una transición de fase. Son estados cuasi-estacionarios que duran por ventanas de tiempo que divergen con el número de partículas del sistema. Estos estados se caracterizan por un espacio de fases homogéneo o no-homogéneo, y existe una transición de fase entre estos estados que ha sido tradicionalmente caracterizada mediante el valor promedio de la magnetización total del sistema. Sin embargo, la magnetización también presenta fluctuaciones que pueden ser un indicador del tipo de estado cuasi-estacionario. Así, buscamos caracterizar los estados cuasi-estacionarios del modelo HMF mediante las series temporales de la magnetización y sus fluctuaciones vía medidas de información, en este caso, a través de la entropía de permutación y el plano de complejidad entropía. Para estados no-homogéneos, la medida de información revela que el modelo HMF presenta una tendencia al orden, y las fluctuaciones de magnetización tienen estructuras reducidas. Al contrario, estados homogéneos tienden al desorden y la estructura de las fluctuaciones de magnetización en el tiempo aumentan a medida que la magnetización inicial es más alta. En todos los casos estudiados, el modelo HMF presenta bajos valores de la entropía y el máximo valor posible de complejidad, por lo que el modelo es caótico determinista intermitente. Esto coincide con los estudios previos del modelo en el espacio de fases. Los resultados demuestran que el modelo HMF puede ser comprendido e interpretado a partir de las fluctuaciones de la magnetización mediante la entropía de permutación y el plano complejidad-entropía. Por lo que, las medidas utilizadas son herramientas poderosas de análisis para estudiar la información contenida en el modelo HMF.

Keywords – Modelo de campo medio hamiltoniano (HMF), entropía de permutación, complejidad estadística

Abstract

The Hamiltonian Mean Field (HMF) model is a long-range interaction model that exhibits quasi-stationary states associated with a phase transition. Its quasi-stationary states with a lifetime diverging with the number of particles in the system. These states are characterized by homogeneous or non-homogeneous structures in phase-space. There exists a phase-transition between these states that have been traditionally characterized by their mean magnetization. However, the magnetization also exhibits fluctuations in time around its mean value, that can be an indicator of the kind of quasi-stationary state. Thus, we want to characterize the quasi-stationary states of the HMF model through the time-series of the magnetization and its fluctuations through a measure of information, i.e. the permutation entropy and the complexity-entropy plane. Permutation entropy is a measure for characterizing chaotic time series, especially in the presence of dynamic and observational noise, as it is computationally and conceptually simple. For non-homogeneous states, the permutation entropy shows that the HMF model tends towards order, while the magnetization fluctuations reveal reduced structures in time. On the contrary, homogeneous states tend to disorder and the structures of the magnetization fluctuations increase as the initial magnetization is larger. In all the study cases of this thesis, the HMF model is characterized by low entropy values but the highest possible complexity value. Thus, the HMF model can be described as a chaotic, deterministic and intermittent system. This aligns with previous studies of the model in the phase space. The results demonstrate that the HMF model can be understood and interpreted from the fluctuations of magnetization using permutation entropy and the complexity-entropy plane. Therefore, the measures used are powerful analytical tools for studying the information contained in the HMF model.

Keywords – Hamiltonian Mean Field model (HMF), Permutation Entropy, Statistical Complexity

Índice general

AGRADECIMIENTOS	I
Resumen	II
Abstract	III
1. Introducción	1
1.1. Sistemas con interacciones de largo alcance	6
1.2. Modelo HMF, aspectos generales	9
1.3. Particularidades del modelo HMF	14
2. Marco Teórico	19
2.1. Descripción matemática del modelo HMF atractivo	19
2.2. Simulación numérica del modelo HMF	21
2.3. Sistemas complejos	23
2.3.1. ¿Qué es un sistema complejo?	23
2.3.2. Características de los sistemas complejos	24
2.3.3. Medidas de los sistemas complejos	31
2.3.3.1. Entropía de permutación	31
2.3.3.2. Plano complejidad-entropía	34
3. Metodología	40
3.1. Planteamiento del problema	40
3.2. Hipótesis	41
3.3. Objetivos	41
3.3.1. Objetivo General	41
3.3.2. Objetivos específicos	41
3.4. Metodología	42
3.4.1. Parámetros del modelo HMF	42
3.4.2. Entropía de permutación de la magnetización	43
3.4.3. Plano complejidad-entropía	44
4. Análisis	46
4.1. Simulaciones HMF	46
4.2. Caracterización del modelo HMF con la entropía de permutación.	48

Índice general	v
4.3. Modelo HMF en el plano complejidad-entropía	53
4.4. Transición de fase	58
5. Conclusión	63
Referencias	65

Índice de figuras

2.2.1.Espacio de fase inicial según la distribución <i>Water-Bag</i> . Para $u_0 = 0.500$ y $u_0 = 1.500$	23
2.3.1.Plano complejidad-entropía (CH).	38
4.1.1.Evolución temporal de la magnetización con el proceso de relajación, para dos energías iniciales diferentes.	46
4.1.2.Magnetización promedio del qss como función de la energía inicial para $M_0 = 0.8$	47
4.1.3.Espacio de fase de la probabilidad de las posiciones y velocidades finales de los espines. Para $M_u = 0.8$, con $u_0 = 0.500$ (a) y $u_0 = 1.500$ (b).	48
4.2.1.Entropía de permutación H de la magnetización M , en función de la energía inicial para distintos valores de magnetizaciones iniciales.	49
4.2.2.Entropía de permutación H de las fluctuaciones de la magnetización δM , en función de la energía inicial para distintos valores de magnetizaciones iniciales.	50
4.2.3.Entropía de permutación H y complejidad estadística C en función de las energías iniciales u_0 , para $M_0 = 0.8$	52
4.3.1.Plano complejidad-entropía para el modelo HMF a partir del análisis de las fluctuaciones de la magnetización, para $M_0 = 0.8$ en el rango de energías iniciales $u_0 = 0.180 - 1.500$	54
4.3.2.Desequilibrio de Jensen-Shannon en función de la energía. Para $M_0 = 0.8$	57
4.4.1.Comportamiento de los valores mínimos de la entropía de permutación H a lo largo de las magnetizaciones iniciales M_0	59
4.4.2.Ajuste con una función de potencia a la entropía de permutación H antes y después de la zona de transición de fase de M . Para $M_0 = 0.8$	60
4.4.3.Análisis de los valores u_0 y b para la función ajustada a la entropía de permutación posterior a la transición de fase de M , para todas las condiciones iniciales M_0 y u_0 estudiadas.	61

Capítulo 1

Introducción

Las interacciones de largo alcance forman parte de una gran variedad de sistemas en la naturaleza. Este tipo de sistemas se caracteriza por tener un gran número de partículas o cuerpos que interactúan entre sí a través de un potencial de interacción que decae con la distancia entre partículas. Además, estos sistemas se distinguen por no relajarse hacia el equilibrio termodinámico, sino que antes quedan atrapados en estados cuasi-estacionarios (QSS por sus siglas en inglés) donde las distintas propiedades del sistema evolucionan lentamente y por largos tiempos antes de alcanzar el equilibrio termodinámico. Así, a mayor cantidad de partículas mayor será el tiempo que permanecerá el sistema en los QSS [Levin et al., 2014, Baldovin et al., 2004, Yamaguchi and et al., 2004]. Particularmente, Lynden-Bell [1967] fue quien descubrió el proceso de relajación y estados cuasi-estacionarios en sistemas con interacciones de largo alcance, estudiando los diferentes perfiles lumínicos de galaxias elípticas. Algunos ejemplos de sistemas con interacciones de largo alcance son sistemas auto-gravitantes [Padmanabhan, 1990, Teles et al., 2010], plasmas [Levin et al., 2008, Kaganovich et al., 2010], entre otros [Sampaio et al., 2001, O'Dell et al., 2000].

El comportamiento de este tipo de sistemas da como resultado diversas características que no están presentes en sistemas con interacciones de corto alcance, como límites termodinámicos inusuales, donde las cantidades macroscópicas muestran valores diferentes a los mostrados en el equilibrio [Dauxois et al., 2000a], calor específico negativo [Thirring, 1970, Campa et al., 2009], energía carente de extensividad y aditividad [Levin et al., 2014], inequivalencia de conjuntos

estadísticos, en Choi and Choi [2003] se encuentra que la estabilidad de las soluciones de la ecuación de *Fokker-Planck* (la que describe el comportamiento temporal de la densidad de probabilidad) varía de manera diferente según la temperatura para cada conjunto, rompimiento de ergodicidad [Pluchino et al., 2007, Benetti et al., 2012], estados QSS [Baldovin, 2004, Campa, 2007], además de diferentes tipos de transiciones de fase [Rocha Filho et al., 2012, de Buyl et al., 2012], entre otras [Pluchino et al., 2004a,b].

El modelo hamiltoniano de campo medio (HMF por sus siglas en inglés) es un modelo simple que presenta algunas características en común con los sistemas con interacciones de largo alcance. El modelo HMF se asemeja al modelo de campo medio de Heisenberg en un sistema de espines XY, de hecho podría decirse que es como su versión cinética. El modelo HMF es un modelo simplista, así permite realizar cálculos analíticos manteniendo las diversas características de los sistemas con interacciones de largo alcance mencionadas anteriormente.

Una característica importante de los sistemas con interacciones de largo alcance son las transiciones de fase. Se ha demostrado que el modelo HMF presenta diversas transiciones de fase fuera del equilibrio termodinámico, es decir en los QSS, al variar cualquiera de sus condiciones iniciales [Campa et al., 2009, Levin et al., 2014]. Las condiciones iniciales del modelo HMF han sido estudiadas mediante la distribución inicial de tipo *Water-Bag*, esta distribución incluye una caracterización del modelo a partir de la energía y magnetización inicial (u_0 y M_0 respectivamente). Así, en las transiciones de fase, los valores de los parámetros macroscópicos dependen fuertemente de la energía y de la magnetización inicial, lo que resulta en diferentes valores de las variables para distintas simulaciones del modelo. Los QSS son estados muy sensibles a las condiciones iniciales. Durante la transición de fase el sistema pasa por distintos QSS.

Una manera de estudiar el modelo HMF es mediante el parámetro de orden del sistema, el cual corresponde a la magnetización M . Esta cantidad cuantifica el grado de homogeneidad del sistema [Pluchino et al., 2004a]. La transición de fase más estudiada es la que ocurre cuando el sistema pasa de estados QSS homogéneos (cuando $M = 0$) a QSS no-homogéneos (cuando $M \neq 0$). Otra forma de estudiar al modelo HMF es mediante su espacio de fases, específicamente mediante la densidad del espacio de fases. Este espacio bidimensional es conformado por la posición y la velocidad de las partículas en el sistema. Así cada punto de él corresponde a un

estado general de todas las posiciones y velocidades de las partículas, inicializado con una configuración inicial de u_0 y M_0 particular. Este espacio se considera homogéneo cuando muestra dos o más clústeres o agrupamientos y no homogéneo cuando muestra sólo un clúster. En el trabajo de Rivera [2022] estudian la densidad del espacio de fases y la forma de la distribución de las posiciones y velocidades de las partículas y se añade a la discusión el hecho de que el modelo HMF puede presentar más transiciones de fase en sus QSS. Estas transiciones de fase no sólo ocurrirían cuando el espacio de fase cambia de un clúster (no homogéneo) a dos o más (homogéneo) variando las condiciones iniciales de los QSS sino que el aumento de clústeres ocurre de una manera gradual, de un clúster a dos clústeres, luego de dos a tres clústeres y finalmente de tres a cinco clústeres (hasta las condiciones usadas en ese trabajo). Cabe mencionar que como el sistema es altamente sensible a las condiciones iniciales, las transiciones a veces no son tan claras, pero se logra ver una tendencia.

Por otro lado, en diversos estudios del modelo HMF, se ha mencionado que este se define como un modelo caótico. En Latora [1999] estudian el movimiento superdifusivo anómalo y los caminos aleatorios de Lévy de las partículas presentes en el modelo para estudiar la presencia de caos en el modelo HMF. En este trabajo notan que existe un vínculo entre el caos y los QSS del modelo. En Pluchino et al. [2007] usan la misma metodología que en el trabajo anterior y encuentran que en los QSS no existe ergodicidad y definen al modelo HMF en sus QSS como caótico pero débilmente. No así en el equilibrio, donde ellos muestran que el sistema se vuelve fuertemente caótico y la ergodicidad se cumple. El movimiento anómalo de las partículas del modelo HMF y en general las dinámicas anómalas presentes también han sido estudiadas en Yamaguchi [2003], Pluchino et al. [2004a], donde se menciona que la anomalía es transitoria en los QSS y que al parecer son mas ubicuas que lo anteriormente descrito en la literatura. Por otro lado Bachelard et al. [2008] mencionan que dentro del contexto donde se define al modelo HMF como un modelo caótico determinista, existe una contradicción cuando un mayor número de partículas significa más caminos caóticos y que los QSS relacionados al caos prevalezcan en el límite de muchas partículas. Por lo que en este trabajo se refuerza la idea de que el modelo puede ser definido como un modelo caótico y determinista. Por último, Ginelli et al. [2011] estudian el espectro de Lyapunov del modelo HMF en los QSS antes de ocurrir la transición de fase. Mostrando que

no hay caos cuando el número de partículas en el sistema es infinito pero si lo hay cuando el número de partículas es finito. Como los QSS permanecen a medida que aumenta el tamaño del sistema, esto corrobora que en el equilibrio el caos es mayor que en los estados cuasi-estacionarios.

También se ha reportado que el modelo HMF forma estructuras ordenadas y desordenadas. [Dauxois et al., 2000b] encuentran que las partículas del modelo HMF consideradas en este trabajo como rotadores clásicos, exhiben dos comportamientos, dispersión aleatoria sobre todos los ángulos y la formación de dos clústers de rotadores. Barré et al. [2002], estudian la formación de estructuras espaciales en el modelo HMF. Mostrando que la formación de los dos clústers corresponde a un equilibrio estadístico en el modelo. Como esta formación ocurre espontáneamente el modelo HMF se vincula con la auto-organización que tienen las partículas del modelo Bachelard et al. [2008]. Ya que las partículas tienen la capacidad de influir en las demás y por ende en la dinámica de todo el sistema.

Por otro lado, Pakter [2011] muestran que la formación espacial de las partículas del modelo HMF en el límite termodinámico corresponde a una formación de tipo *core-halo* el que definen como una formación o atractor universal para distintos sistemas con interacciones de largo alcance. En Levin et al. [2014] reafirman que la estructura *core-halo* corresponde a un atractor universal pues la función de distribución en los QSS para los sistemas auto-gravitantes, plasmas confinados magnéticamente y sistemas de espín es la misma.

Además, se ha mencionado que el modelo HMF es robusto en sus estados cuasi-estacionarios. Es decir que el sistema permanece fijo en los QSS a medida que aumenta el número de partículas. Esta robustez es dinámica debido a la naturaleza del modelo HMF [Jain et al., 2007, Pluchino et al., 2007, Staniscia et al., 2009].

La caoticidad y su relación con la dinámica anómala, la formación de estructuras, la auto-organización, la existencia de un atractor universal y la robustez son características que se discuten desde las Ciencias de la Complejidad con el objetivo de caracterizar y comprender a los sistemas complejos. Estas características son las que nos permiten crear el vínculo para estudiar al modelo HMF mediante medidas usadas en sistemas complejos.

En la literatura, se han propuesto diversas medidas de complejidad, como la Complejidad Estadística, la cual describe a los sistemas de manera probabilista

[Crutchfield, 1994, López-Ruiz et al., 1995], la Profundidad Termodinámica, igual a la diferencia entre la entropía granulada y fina de un sistema [Lloyd, 1988], la Complejidad Efectiva, una combinación entre una medida de la cantidad de información algorítmica y una medida de la ignorancia usando la información de Shannon [Gell-Mann and Lloyd, 1996] y la Profundidad Lógica, la que vincula la historia causal de un sistema con la complejidad algorítmica de una cadena de bits [Bennett, 1982], entre otras [Lempel and Ziv, 1976, Grassberger, 1986, Cover et al., 1989]. Sin embargo, Ladyman and Wiesner [2020] argumentan que la complejidad es un fenómeno multifacético, caracterizado por una diversidad de aspectos, donde numerosidad, desorden y diversidad, retroalimentación y estados fuera del equilibrio termodinámico son condiciones para que surja la complejidad y orden espontáneo y auto-organización, no linealidad, robustez, estructura anidada y modularidad, historia y memoria y comportamiento adaptativo son los resultados de indicadores o nociones de varios tipos de complejidad. Así, no es necesario que todas las condiciones y resultados estén presentes para poder definir un sistema complejo pues existen diferentes tipos de sistemas complejos. Y las medidas de complejidad propuestas sólo podrán cuantificar algunos aspectos de la complejidad. Por lo que, una sola medida de la complejidad no abarcará completamente este fenómeno.

De las medidas de complejidad mencionadas, la introducida por López-Ruiz et al. [1995] no se limita a sistemas dinámicos específicos sino que busca una medida general de la complejidad estadística en una escala dada. Así en esa escala, sólo se debe tener en consideración la física que dirige la dinámica del sistema para encontrar sus estados accesibles y su distribución de probabilidad. Esta medida depende de la entropía de Shannon [Shannon and Weaver, 1964] y un desequilibrio entendido como una cantidad entre el orden y la información o desorden. Lamberti et al. [2004] abordan las debilidades de la medida de complejidad estadística propuesta en el trabajo de López-Ruiz et al. [1995], tales como la falta de propiedad intensiva o extensiva y su anulación exponencial en el límite termodinámico para todos los sistemas unidimensionales de rango finito. Transformando esa medida de complejidad en una medida de complejidad estadística intensiva, capaz de distinguir entre distintos grados de periodicidad y proporcionar una mejor descripción de los detalles dinámicos del sistema. Esta medida es utilizada por Rosso et al. [2007] para la construcción de un espacio

de representación conocido como plano complejidad-entropía. Este plano sirve principalmente para revelar la diferencia entre sistemas caóticos y estocásticos, comprender la dinámica temporal del sistema, diferenciar sistemas en equilibrio de aquellos fuera de equilibrio, entre otras cosas.

La metodología para la entropía utilizada en el plano complejidad-entropía es la entropía de permutación introducida por [Bandt and Pompe \[2002\]](#). La entropía de permutación se emplea para evaluar la dispersión o aleatoriedad en las posiciones de los elementos dentro de una secuencia o serie, siendo capaz de medir en términos de orden y desorden la dinámica del sistema. Además es una medida simple analíticamente, con velocidad de cálculo extremadamente rápido, robusta e invariante a transformaciones lineales y monótonas. Y a diferencia de otras medidas, la entropía de permutación es útil en presencia de ruido dinámico y observacional [[Bandt and Pompe, 2002](#)].

Debido a la dinámica del modelo hamiltoniano de campo medio y como la medida entropía de permutación y el plano complejidad-entropía son cantidades que no se limitan a sistemas dinámicos específicos sino que sólo necesitan una serie temporal a una escala dada. Utilizaremos estas medidas para caracterizar la evolución de los estados-cuasi-estacionarios del modelo HMF. Nuestro objetivo es estudiar la principal transición de fase presente en los QSS sólo mediante el parámetro de orden, definido como la magnetización, pues nos interesa saber cuanta información puede estar contenida en este parámetro. Previamente en la literatura esta transición se ha reportado mediante el análisis de las distribuciones de posiciones y velocidades de las partículas del modelo [[Campa, 2007](#), [Benetti et al., 2012](#)].

En las siguientes secciones se presenta la base teórica introductoria para el estudio.

1.1. Sistemas con interacciones de largo alcance

Podemos dividir los tipos de sistemas en Física según el tipo de interacciones que estos presenten, en sistemas con interacciones de corto y largo alcance. Las interacciones de largo alcance son dominadas por un potencial que escala a distancias mayores que $r^{-\alpha}$ con r la distancia entre las partículas o cuerpos y $\alpha < D$, con D la dimensión espacial del sistema. Este potencial logra, decayendo lentamente, que interactúen todas las partículas distantes del sistema. Así,

los sistemas con interacciones de largo alcance experimentan una dinámica de relajación no colisional hacia el equilibrio termodinámico. Este proceso fue llamado relajación violenta por [Lynden-Bell \[1967\]](#) quien estudió teóricamente el fenómeno intentando explicar la luminosidad de las galaxias elípticas. Antes de alcanzar el equilibrio, estos sistemas experimentan unos estados diferentes a los estados de equilibrio de Boltzmann-Gibbs llamados estados cuasi estacionarios (QSS). Los estados cuasi-estacionarios son estados temporales donde las características del sistema se mantienen aproximadamente constantes.

El sistema queda atrapado en los QSS por un tiempo que diverge dependiendo del número N de partes (partículas o cuerpos) constituyentes del sistema. Así, mientras más grande sea el sistema, mayor será el tiempo que permanecerá en los QSS antes de alcanzar el equilibrio. Por ende cuando se realiza el límite termodinámico $N \rightarrow \infty$ antes del límite de tiempo infinito $t \rightarrow \infty$ el sistema se quedará atrapado en los QSS. Para sistemas finitos, en [Barré et al. \[2006\]](#) se ha revelado que la relajación temporal al equilibrio diverge como una ley de potencia de la forma N^γ . El valor de γ depende de cada sistema, pero usualmente $\gamma \geq 1$.

En los sistemas con interacciones de largo alcance cada partícula interactúa con todas las demás, mediante un potencial de largo alcance o de rango infinito, este potencial es el que permite la interacción aunque la distancia entre partículas sea muy grande. Como todas las partículas interactúan entre sí, el volumen o partes internas del sistema y la frontera o partes externas de estos sistemas no es clara. Por lo que la noción de subsistemas no existe. Así, este tipo de potencial implica que la aditividad de la energía falle y debido a esto también falle la extensividad de la energía, ya que esta propiedad depende de la aditividad. Un sistema es extensivo si su energía interna aumenta con el número de partículas y con el volumen total que estas conforman. La energía es una variable extensiva en sistemas de corto alcance. De hecho no es necesario que la interacción sea estrictamente de largo alcance mientras el decaimiento del potencial sea lo suficientemente rápido la energía será extensiva [[Levin et al., 2014](#)]. Es posible corregir la falta de extensividad en la energía para los sistemas con interacciones de largo alcance mediante la prescripción de Kac [Kac et al. \[1963\]](#). La prescripción de Kac modifica la energía de interacción con el inverso del número de partículas, eliminando las correlaciones entre partículas, pudiendo usar la noción de subsistemas otra vez.

Además de la energía, el calor específico en los sistemas con interacciones de largo

alcance tampoco cumple con sus características comunes mostradas en los sistemas de corto alcance. Su comportamiento varía según el tipo de conjunto o ensamble estadístico. En [Campa et al. \[2009\]](#) demuestran que la inequivalencia de conjuntos es la causa de las propiedades físicas de este tipo de sistemas. Debido a que los parámetros macroscópicos no tienen valores fijos durante la evolución del sistema, sino que fluctúan significativamente en torno a un valor.

Esto ocurre cercano a zonas críticas donde al variar el parámetro de control, el sistema exhibe un estado cuasi-estacionario distinto, homogéneo (dos o más clústeres) o no-homogéneo (un clúster). Lo que lleva a que en los sistemas con interacciones de largo alcance ocurran las transiciones de fase entre distintos QSS. Durante una transición de fase el sistema queda atrapado en los QSS. Por lo que los QSS son muy sensibles a las condiciones iniciales.

Por otra parte aún no hay evidencia de que la ergodicidad en los sistemas con interacciones de largo alcance se cumpla. En un sistema ergódico, los promedios temporales y los promedios de ensembles estadísticos son iguales ([Benetti et al. \[2012\]](#)). La transición de fase impide que esta condición se cumpla, así la ergodicidad se rompe.

Finalmente, en los sistemas con interacciones de largo alcance con un número finito de partículas, las correlaciones entre partículas serán finitas pero pequeñas. A pesar de ello, las correlaciones conducirán al sistema hacia su estado final de equilibrio termodinámico. En cambio para $N \rightarrow \infty$ (límite termodinámico) las correlaciones son despreciables y la dinámica de estos sistemas está completamente dominada por el campo medio. Lo que satisface la ecuación de Boltzmann sin colisiones o ecuación de Vlasov [[Barré et al., 2006](#)]. La solución estacionaria de la ecuación de Boltzmann es la distribución de Maxwell-Boltzmann, por su parte la ecuación de Vlasov tiene un número infinito de estados estacionarios, para diferentes condiciones iniciales de las partículas.

Estudiar sistemas con interacciones de largo alcance nos propone realizar un análisis nuevo en cada una de sus diversas características, las que se comportan de manera diferente que en sistemas de corto alcance. Uno de los modelos más simples para representar a los sistemas con interacciones de largo alcance es el modelo Hamiltoniano de Campo Medio atractivo (HMF por sus siglas en inglés), el cual será utilizado en este trabajo. Nos enfocaremos en el modelo HMF de tipo

atractivo pues es donde los QSS se presentan, este modelo se explorará con mayor profundidad en las siguientes secciones.

1.2. Modelo HMF, aspectos generales

El modelo HMF es un modelo simple que logra estudiar la mayoría de las características encontradas en sistemas con interacciones de largo alcance. Los modelos de campo medio se caracterizan por su auto-consistencia. Es decir, las partículas generan ellas mismas el campo medio en el que se mueven. El modelo HMF puede considerarse como una extensión o como la versión cinética del modelo de campo medio de Heisenberg, en un sistema de espines XY, pero con interacciones de rango infinito. El modelo logra estudiar a las interacciones entre las partículas mediante un potencial infinito o de largo alcance. Este potencial se define como un potencial con un truncamiento a un modo de Fourier, es decir, como un potencial coseno, donde las interacciones entre las partículas pueden ser atractivas o repulsivas [Antoni and Ruffo \[1995\]](#).

El número de estudios del modelo HMF tuvo su auge al inicio del siglo XXI posterior al trabajo realizado por [Antoni and Ruffo \[1995\]](#). En este trabajo estudian el modelo bajo la dinámica de una red totalmente acoplada de rotadores con interacciones de largo alcance para los casos atractivo y repulsivo. Centrándonos en el caso atractivo, notan que el sistema se relaja hasta alcanzar el equilibrio Maxwelliano desapareciendo su magnetización (la que actúa como parámetro de orden de las partículas en el espacio). Pero el tiempo que demora el sistema en relajarse diverge con el número de partículas. Además se encuentra que existe un re-ordenamiento colectivo de los rotadores por debajo de una temperatura crítica. Pero este comportamiento colectivo desaparece para una longitud de *screening* del modelo HMF mayor a uno. Esta longitud la usan en este trabajo para compararla con las usuales longitudes de *Debye* y *Jeans* en física de plasmas. A partir de estos resultados, diversos estudios analíticos y numéricos han logrado clarificar aspectos de distinta índole del modelo.

En el trabajo hecho por [Dauxois et al. \[2000a\]](#) estudian la dinámica y mecánica estadística del modelo HMF con interacciones atractivas y repulsivas entre las partículas. El estudio observa que existe una transición termodinámica de agrupación de las partículas, de primer o segundo orden, mostrando empíricamente

la violación de la equivalencia entre el conjunto micro canónico y canónico cerca de la transición, además de calor específico negativo y saltos de temperatura en el ensemble microcanónico. La inequivalencia de ensembles en el modelo HMF ya se había estudiado por [Dauxois et al. \[2000b\]](#), donde se estudia el mismo modelo HMF pero con rotadores acoplados mediante una interacción repulsiva, donde en el conjunto microcanónico se formaron dos grupos de rotadores con ángulos distintos en el límite de energía baja y en el conjunto canónico los rotadores se distribuyeron aleatoriamente sobre todos los ángulos accesibles del sistema. Por su parte [Choi and Choi \[2003\]](#) también estudian un sistema de rotadores acoplados pero esta vez mediante un conjunto de ecuaciones estocásticas obteniendo distribuciones de probabilidad de los rotadores en ambos ensembles estadísticos, revelando la inequivalencia entre los dos conjuntos. [Campa et al. \[2009\]](#) revisan el estado del estudio de la inequivalencia entre ensembles presentando detalladamente los ensembles microcanónico y canónico para el modelo HMF. Destacan que la esencia de la inequivalencia de ensemble está en que el análisis de los ensembles estadísticos para sistemas de largo alcance privilegia el uso del ensemble microcanónico, ya que todos los macroestados canónicos se pueden realizar en el ensemble microcanónico, pero no al revés.

El trabajo de [Dauxois et al. \[2000a\]](#) también muestra la aparición de estructuras coherentes en el modelo HMF repulsivo fuera del equilibrio. Por su lado [Barré et al. \[2002\]](#) estudian el modelo HMF repulsivo y la formación de estas estructuras espacialmente coherentes, mostrando que las estructuras fuera del equilibrio corresponden a dos *clústers* que son equilibrios estadísticos de un Hamiltoniano efectivo introducido por ellos, el cual permite estudiar numéricamente la relajación del sistema.

El estudio de las estructuras fuera del equilibrio ha sido ampliamente estudiado y relacionado con los estados cuasi-estacionarios. Así, [Zanette \[2003\]](#) reexaminan la evidencia que respalda la existencia de estados cuasi-estacionarios en la dinámica fuera del equilibrio del modelo HMF. Mostrando numéricamente que existe un régimen de lenta relajación hacia la distribución de Boltzmann donde no hay rastros de cuasi-estacionariedad en las primeras etapas de evolución del sistema. Además analizando la evolución de la temperatura, muestran que el modelo HMF puede descomponerse dinámicamente en un régimen de corto tiempo donde el sistema tiene una fuerte memoria de sus condiciones iniciales y en un régimen de

largo tiempo donde el sistema se relaja lentamente hacia el equilibrio. Los estados QSS se han denominado estados cuasi-estacionarios porque se vuelven estables en el límite termodinámico si el límite de tamaño infinito se toma antes del límite de tiempo infinito [Pluchino et al., 2004a]. Estos estados en la literatura a menudo representan los únicos regímenes experimentales accesibles. Por otro lado, Pluchino et al. [2004b] estudian los estados cuasi-estacionarios bajo dos clases diferentes de condiciones iniciales fuera del equilibrio. Una con magnetización inicial igual a uno y la otra con magnetización inicial igual a cero. En ambos casos el modelo HMF exhibe distribuciones de velocidad no gaussianas. En el caso de una magnetización inicial igual a cero la relajación al equilibrio es casi exponencial mientras que para el caso de una magnetización inicial igual a uno el decaimiento hacia el equilibrio es regido por una ley de potencia. Jain et al. [2007] contribuyen al estudio de los tiempos de relajación de los estados cuasi-estacionarios concluyendo que el caso de un estado con magnetización inicial igual a cero es estable por encima de una energía crítica e inestable por debajo de ella, donde en la estabilidad el modelo HMF exhibe escalas de tiempo de relajación que aumentan algebraicamente con el número de partículas, mientras que en la inestabilidad la escala de tiempo del sistema aumenta logarítmicamente. En el trabajo de Campa [2007] estudian el comportamiento a largo plazo de los estados cuasi-estacionarios del modelo HMF basándose en fluctuaciones de la fase de la magnetización instantánea del sistema para distintas condiciones iniciales. Mostrando que de esa forma se puede calcular la vida útil de los QSS. Además da cuenta de que los QSS están presentes tanto por debajo como por encima de la temperatura crítica de la transición de fase de segundo orden según Antoni and Ruffo [1995].

Las transiciones de fase han sido interpretadas aplicando la teoría de la relajación violenta de Lynden-Bell al modelo HMF bajo un enfoque dinámico y estadístico. La construcción de Lynden-Bell se basó en el conteo de Boltzmann para calcular el número de microestados accesibles a un sistema dado pero en lugar de usar partículas trabajó con los niveles de la función de distribución, dividiendo el espacio de fases en niveles de densidad de probabilidad. Aunque la teoría de Lynden-Bell no ha dado una descripción precisa de la transición, sí ha podido predecir su posición y orden entre QSS homogéneos (magnetización cero) e inhomogéneos (magnetización distinta de cero) [Lynden-Bell, 1967]. Re-interpretando las transiciones propuestas por Lynden-Bell en un régimen puramente microscópico y dinámico, Bachelard

et al. [2008] estudian la abundancia de órbitas regulares en el espacio de fase del modelo HMF e indican que la transición de fase fuera del equilibrio se entiende microscópicamente como una bifurcación en el hamiltoniano efectivo, el cual describe la dinámica de partícula única.

Por otro lado, Antoniazzi et al. [2007a] continúan los lineamientos propuestos por la teoría de Lynden-Bell respecto a la relajación violenta y muestran que al variar las condiciones iniciales dentro de una distribución inicial de tipo *Water-Bag* se encuentran líneas de transición de fase de primer y segundo orden que se fusionan en un punto tri-crítico fuera del equilibrio. Distinto a estos resultados, el orden de la transición de fase del modelo HMF es estudiado más adelante en el trabajo de Pakter [2011] según una teoría diferente a la teoría de Lynden-Bell, mostrando que el modelo experimenta una transición de fase de primer orden fuera del equilibrio de estados inhomogéneos a homogéneos, donde además se muestra que en el estado estacionario final se presenta una estructura de núcleo-halo.

La naturaleza de las transiciones de fase y si las predicciones de la teoría estadística Lynden-Bell es correcta sigue en debate. En el trabajo de Staniscia et al. [2009] comparan las predicciones teóricas hechas por Lynden-Bell con simulaciones numéricas, confirmando la existencia de reingresos de fase en el rango de parámetros típico predicho por Lynden-Bell. Particularmente se encuentran fases secundarias donde hay estados con magnetización tendiente a cero en la región teórica magnetizada y viceversa. En general este estudio concluye que la teoría de Lynden-Bell entrega una buena descripción de transición de primer orden de los QSS en el modelo HMF. Pero para algunas condiciones iniciales esto no se cumple. Es por esto que Rocha Filho et al. [2012] estudian la naturaleza de las transiciones mediante simulaciones numéricas detalladas de la ecuación de Vlasov y dinámica molecular, encontrando que efectivamente los estados obtenidos después de una relajación violenta experimentan una transición de estados magnetizados a no magnetizados al pasar de energías más bajas a más altas. En este trabajo ellos corroboran que las transiciones de fase son de primer orden. Estos resultados se encuentran a partir de distribuciones iniciales de tipo *Water-Bag*, donde mantienen la magnetización fija y varían la energía. Además introducen la idea de que existan reentradas de fase, las que parecen desempeñar un papel importante y que previamente no se habían reconocido completamente. Sus resultados muestran que la teoría de Lynden-Bell no es adecuada para explicar

el orden de las transiciones de fase fuera del equilibrio pues a energías más altas se aleja de los valores correctos. Además la teoría de Lynden-Bell no muestra las reentradas de fase descubiertas en este trabajo.

Mas aún, como se mencionó antes el modelo HMF puede ser clasificado con QSS homogéneos y QSS no-homogéneos. Los QSS homogéneos se caracterizan por un par de estructuras tipo *clústers* de densidad contra-propagantes en el espacio de fase [Antoniazzi et al., 2007b]. En Rivera [2022] estudian estas estructuras en los QSS del modelo HMF mediante simulaciones numéricas de muchas partículas. Observando las funciones de distribución notan que además de los estados homogéneos y no-homogéneos del modelo, existen dos y más *clústers* presentes en el sistema, los cuales se presentan variando las condiciones iniciales. En este trabajo se sugiere que la aparición de estas nuevas estructuras está relacionado con nuevas transiciones de fase relacionadas a la periodicidad y modulación de las ondas de densidad del sistema.

La ergodicidad es otra arista de los sistemas con interacciones de largo alcance abordada por el modelo HMF. En Campa et al. [2009] mencionan que el espacio de parámetros termodinámicos macroscópicos accesibles de este tipo de sistemas puede no ser convexo, lo que se traduce en que el sistema no pueda explorar todo el espacio de fases de manera efectiva. La exploración del mecanismo responsable de la ruptura de ergodicidad en el modelo HMF se lleva a cabo por Benetti et al. [2012], llegando a la conclusión de que cuando el sistema se encuentra cerca de una transición, las resonancias paramétricas de las variables dinámicas son excitadas, lo que permite una eyección de partículas continua a regiones estadísticas improbables, donde la ergodicidad se rompe de manera irreversible.

Debido a todas las características mencionadas del modelo y de los sistemas físicos con interacciones de largo alcance, se ha originado un intenso debate sobre la validez general de la mecánica estadística de Boltzmann-Gibbs para este tipo de sistemas. Así en la búsqueda de una descripción estadística de los sistemas con interacciones de largo alcance, han surgido diferentes formalismos que intentan explicar la aparición de comportamientos no Boltzmannianos. Un ejemplo de esto es el formalismo de Tsallis [Tsallis, 1988, 2004]. Este formalismo tiene como objetivo responder cuales son las hipótesis para una mecánica estadística no extensiva, pues los sistemas con interacciones de largo tienen propiedades que no siguen las reglas de aditividad de la mecánica estadística convencional. Tsallis

propone una expresión generalizada para la entropía la que permite la preservación del principio variacional estándar y la derivación de distribuciones microcanónicas y canónicas, además de otras propiedades. Su análisis permite una evolución no ergódica del sistema y la introducción de potenciales termodinámicos generalizados Tsallis [1988]. En Pluchino et al. [2004a,b] se estudia la dinámica microscópica de los QSS hacia la relajación en el modelo HMF, demostrándose que para una cierta clase de condiciones iniciales, se obtienen estados cuasi-estacionarios con función de densidad de probabilidad de velocidad no gaussianas que pueden ser reproducidas con curvas q-exponenciales introducidas por Tsallis Tsallis [2004]. Por otro lado, en Rivera and Navarro [2022] mediante simulaciones de partículas caracterizan el modelo HMF demostrando que este posee estados estacionarios con múltiples conglomerados en la densidad del espacio de fase. Así, existen más casos donde la distribución en los QSS no puede ser descrita por una q-exponencial. Por lo que el formalismo de Tsallis parece ser válido sólo para algunos casos fuera del equilibrio reportados en la literatura.

1.3. Particularidades del modelo HMF

El modelo HMF también se ha caracterizado en diversos estudios a partir de definiciones de propiedades particulares, distintas de las mencionadas en la sección anterior. Estas características son estudiadas desde las Ciencias de la Complejidad para intentar definir que son los sistemas complejos o que es la Complejidad. En nuestro estudio estas características fueron señales del vínculo que podíamos hacer entre el modelo HMF y los sistemas complejos. En este trabajo hacemos este vínculo para usar herramientas utilizadas en las Ciencias de la Complejidad que logren cuantificar propiedades del modelo.

Por ejemplo, en Latora [1999] estudian el vínculo entre la relajación al equilibrio y el movimiento difusivo anómalo de las partículas en el modelo HMF. Observando por primera vez superdifusión en la transición de fase del modelo, específicamente en un rango de energías menores que la energía crítica, donde existen los QSS y el sistema es fuertemente caótico. La difusión anómala es un fenómeno no lineal que viola el teorema del límite central, osea las trayectorias de las partículas no siguen necesariamente un comportamiento gaussiano sino que presentan mayores fluctuaciones. Esto puede mostrar colas más largas en la distribución

de probabilidad de las posiciones de las partículas [Klafter and Zumofen, 1994]. Esta violación al teorema se ha observado en conexión con el caos determinista de baja dimensión Latora [1999]. La relación entre la relajación y la difusión anómala en el modelo HMF también es investigada en el trabajo de Yamaguchi [2003]. Allí mencionan que la difusión es anómala si y solo si el sistema se dirige hacia el equilibrio, y que la anomalía es transitoria debido a la no estacionariedad. Además explican que la difusión está relacionada con una función de correlación exponencial estirada, donde el exponente de estiramiento es casi constante y el tiempo de correlación aumenta a medida que hay más grados de libertad en el sistema. Además en Pluchino et al. [2004a] estudian cómo las condiciones iniciales influyen en la aparición de anomalías dinámicas en el modelo HMF. Mostrando que las anomalías dinámicas están siempre presentes cuando la magnetización inicial es mayor que cero.

En relación al estudio del caos en el modelo HMF, en Dauxois et al. [2000a] discuten el carácter caótico del modelo en términos de su espectro de Lyapunov y la entropía de Kolmogorov-Sinai tanto para interacciones ferromagnéticas como anti-ferromagnéticas. Destacando que el valor finito de las medidas caóticas cerca del punto crítico está fuertemente relacionado con las fluctuaciones de energía cinética y puede considerarse como una indicación dinámica microscópica de la transición de fase macroscópica al equilibrio, demostrando que en el equilibrio, el sistema se caracteriza por una dinámica muy caótica. Asimismo en el trabajo de Baldovin et al. [2004] abordan la conexión entre teoría del caos y termostática para estudiar las causas de los QSS utilizando análisis numérico de mapas simplécticos de baja dimensionalidad, mostrando que a medida que el tiempo avanza, la dinámica no lineal conservativa del modelo genera estructuras en el espacio de fase que corresponden a una dimensión fractal no trivial, lo que puede llevar a un régimen termodinámico anómalo que diverge con la disminución de la caoticidad. Pluchino et al. [2007] presenta una prueba de dinámica molecular del Teorema del Limite Central en el modelo HMF, observando que en el equilibrio, donde las correlaciones entre las partículas son débiles el sistema puede ser predicho por el teorema y es altamente caótico. En cambio en los QSS donde las velocidades están fuertemente correlacionadas, el teorema no se aplica y el sistema exhibe caos débil. Por otro lado, Bachelard et al. [2008] investigan la dinámica del modelo HMF mostrando que existen trayectorias regulares en el espacio de fase que prevalecen a

medida que aumenta el número de partículas. Estas estructuras son interpretadas como toros invariantes de un hamiltoniano de un grado de libertad o de una sola partícula dependiente del tiempo. Esto los lleva a la conclusión de que existe una tendencia universal hacia la organización a medida que aumenta el tamaño del sistema. En [Ginelli et al. \[2011\]](#) también estudian las propiedades dinámicas del modelo HMF mediante las trayectorias del espacio de fase pero ahora usando el análisis de los exponentes de Lyapunov, encontrando analítica y numéricamente que en el límite de tamaño infinito de partículas aunque el sistema puede volverse más ordenado aún hay presencia de caos debido a que la dinámica finita sigue influyendo en el límite de tamaño infinito del sistema.

Respecto a las tendencias universales que existen en el modelo HMF, [Pakter \[2011\]](#), [Levin et al. \[2014\]](#) sugieren que existe un grado significativo de universalidad en la dinámica de relajación de colisiones presente en el modelo HMF, pues la función de distribución núcleo-halo parece ser un atractor universal en un sentido general de sistemas con interacciones de largo alcance.

Otra característica que se ha mencionado en relación a la caracterización del modelo HMF es su robustez. En [Jain et al. \[2007\]](#) indican que la robustez de los QSS del modelo está relacionada con que en el estado dinámicamente estable el modelo exhibe escalas de tiempo de relajación que aumentan algebraicamente con el número de partículas, lo que no sucede en el estado inestable, donde el tiempo aumenta logarítmicamente con el tamaño del sistema. Es decir, el sistema permanece en los estados estables a medida que aumenta el número de partículas, lo que indicaría la robustez de los QSS con respecto a las perturbaciones del Hamiltoniano. La robustez también es mencionada en [Staniscia et al. \[2009\]](#), allí confirman las predicciones de Lynden-Bell con resultados numéricos para el modelo HMF y muestran que los estados meta-estables o máximos de entropía local de Lynden-Bell pueden ser muy robustos, lo que es un índice de su estabilidad. Por otro lado [Gupta and Mukamel \[2010\]](#) prueban la robustez de los QSS del modelo HMF ante procesos dinámicos no deterministas, como la estocasticidad. Concluyendo que el sistema se relaja hacia el equilibrio en escalas de tiempo que no divergen algebraicamente con el tamaño del sistema, así los QSS sólo se producen como fenómenos en dinámicas puramente deterministas.

Por otro lado [Dauxois et al. \[2000b\]](#) estudiando la inequivalencia de ensembles en el modelo HMF concluyen que la auto-consistencia del modelo, osea que las

partículas generen ellas mismas el campo medio en el que se mueven, tiene relación con el ordenamiento de las partículas en un bicluster en el ensemble microcanónico. En [Barré et al. \[2002\]](#) se habla en términos de que las partículas del modelo HMF presentan una auto-organización que las lleva mostrar estructuras espacialmente ordenadas. Para lo cual la dinámica no lineal y la mecánica estadística deben invocarse. Por otro lado [Morita and Kaneko \[2006\]](#) descubren el movimiento de baja dimensión, periódico y cuasi-periódico de variables macroscópicas en el estado metaestable del modelo HMF, donde la duración de la oscilación diverge con el tamaño del sistema. Esto sólo había sido encontrado en sistemas disipativos de baja dimensión por ende se explica el origen de la oscilación con un análisis de la función de distribución como la auto-organización de un estado de oscilación auto-excitado a través del campo medio.

Finalmente, el modelo HMF también ha sido estudiado mediante la entropía de Boltzmann-Gibbs. [Rocha Filho et al. \[2005\]](#) estudian el modelo a partir de la ecuación de Vlasov (el número de partículas en el sistema tiende a infinito). Mostrando que los estados estacionarios corresponden a un extremo de la entropía de Boltzmann-Gibbs y que su estabilidad (no lineal) ocurre cuando el extremo de la entropía es máximo. Asimismo [Antoniazzi et al. \[2007a\]](#) investigan la aparición de los QSS y las transiciones de fase fuera del equilibrio del modelo HMF. En este trabajo se menciona que como los QSS dependen fuertemente de las condiciones iniciales del sistema no pueden ser interpretados convencionalmente con la Entropía de Boltzmann-Gibbs. Así basados en la teoría predictiva de Lynden-Bell argumentando que esta es una teoría que permite explicar la existencia de los QSS bajo primeros principios, usan un principio de entropía máxima que les permite demostrar que las transiciones de fase separan regímenes dinámicos cualitativamente diferentes, mostrando líneas de transición de primer y segundo orden desde QSS homogéneos (magnetización cero) e inhomogéneos (magnetización distinta de cero). Continuando este trabajo, también para estudiar los QSS del modelo HMF, [Martelloni et al. \[2016\]](#) discuten una generalización del principio de máxima entropía debido a la teoría de Lynden-Bell, demostrando que existen distribuciones de velocidad que se traducen como dos o múltiples islas en el espacio de fase. Estas islas se interpretan como restricciones dinámicas, las cuales pueden ser compatibles con el principio de máxima entropía. Así al considerar estas restricciones, la teoría de Lynden-Bell mejora su capacidad predictiva.

Con la base teórica introductoria sobre los sistemas con interacciones de largo alcance y las características generales y particulares del modelo HMF, procedemos a profundizar en el modelo, mostrando su descripción matemática y su simulación numérica. Además presentamos que es un sistema complejo, sus características y sus medidas a utilizar en este trabajo.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Descripción matemática del modelo HMF atractivo

El modelo HMF puede ser descrito como un conjunto de espines, donde cada espín puede girar libremente. El Hamiltoniano que describe la dinámica del modelo es [Antoni and Ruffo, 1995]

$$H = K + V$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2 + \frac{\nu}{2N} \sum_{i,j=1}^N [1 - \cos(\theta_i - \theta_j)], \quad (2.1.1)$$

con N la cantidad total de espines, y θ_i y p_i el ángulo de giro y la velocidad con la que gira un espín i , respectivamente. K y V son la energía cinética de las partículas y la energía potencial entre las interacciones respectivamente.

Como el Hamiltoniano no depende del tiempo, este modela sistemas conservativos.

El modelo HMF tiene dos formas de interacción, atractiva ($\nu = 1$) y repulsiva ($\nu = -1$). Para la interacción atractiva el modelo exhibe los QSS, los que dependen de la magnetización inicial y la energía total Campa et al. [2009].

El modelo HMF es un sistema de interacción de rango infinito (no depende de la distancia entre espines), así se utiliza para estudiar sistemas con interacción de largo alcance, donde la distancia entre partículas exhibe una dependencia según

la ley de potencia $r^{-\alpha}$, para $\alpha < d$, con d la dimensión del espacio [Campa et al., 2009].

Las ecuaciones de movimiento de las partículas se pueden derivar del Hamiltoniano en la ecuación (2.1.1). Las ecuaciones dependen de la magnetización M , como

$$\dot{\theta}_i = p_i \quad (2.1.2)$$

$$\dot{p}_i = -M_x \sin \theta_i + M_y \cos \theta_i. \quad (2.1.3)$$

Así la interacción entre las partículas viene dada por el potencial V la que se estudia por medio de la magnetización, esta cantidad permite estudiar la acción del campo medio sobre el sistema. Es definida como parámetro de orden, ya que cuantifica el grado de homogeneidad en el espacio de posiciones del sistema, su módulo está dado por

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}, \quad (2.1.4)$$

con

$$M_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos(\theta_i), \quad M_y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sin(\theta_i), \quad (2.1.5)$$

para el sistema completo.

Notar que la magnetización es una cantidad normalizada al intervalo $0 \leq M \leq 1$. Cuando $M = 0$ los ángulos de giro de todos los espines no muestran una tendencia hacia un ángulo específico, su distribución es homogénea, mientras que para $M = 1$ los ángulos de giro de todos los espines son similares, por lo que la dirección de los espines muestra una tendencia

La energía total del sistema es

$$u = \frac{\langle p^2 \rangle}{2} + \frac{1 - M^2}{2}, \quad (2.1.6)$$

donde el símbolo $\langle \rangle$ simboliza el promedio sobre el conjunto y M es (2.1.4). Como el Hamiltoniano (2.1.1) indica un sistema conservativo, la energía se conserva en el tiempo y así la energía inicial es igual a la energía total.

La ecuación (2.1.6) define una restricción para los posibles valores de u y M . Ya que $\langle p^2 \rangle$ debe ser siempre positivo o mayor o igual a cero, así $u \geq (1 - M^2)/2$. Los valores de u que no cumplan con esta restricción corresponderán a una región

de parámetros llamada “zona prohibida” o “zona no accesible”.

2.2. Simulación numérica del modelo HMF

Para la ejecución y aplicación del modelo utilizaremos simulaciones de partículas. Las simulaciones de partículas resuelven las ecuaciones de movimiento del sistema (2.1.2) y (2.1.3) usando el método *Leap-frog* o “salto de rana”, el cual es un método numérico simpléctico de segundo orden. Este método preserva la estructura simpléctica del espacio de fases y además conserva la energía.

El código numérico y los datos usados son proporcionados por el trabajo de [Rivera and Navarro \[2022\]](#). Aquí damos una breve introducción del código utilizado en ese trabajo.

Los pasos del código de simulaciones de partículas son:

- Determinar las condiciones iniciales del sistema.

Las condiciones iniciales se realizan a partir de una distribución de partículas llamada *Water-Bag*, esta distribución es de la forma

$$f_0(\theta, p) = \frac{1}{4\theta_0 p_0} \Theta(\theta_0 - |\theta|) \Theta(p_0 - |p|). \quad (2.2.1)$$

Se deben determinar los valores de θ_0 y p_0 para obtener el dominio local de posiciones y velocidades de todas las partículas.

- Determinar θ_0 .

Usando la distribución *Water-Bag* (2.2.1)

$$\begin{aligned} M_0 &= (M_x, M_y) \\ &= \left(\int f_0(\theta, p) \cos(\theta) d\theta dp, \int f_0(\theta, p) \sin(\theta) d\theta dp \right), \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

tendremos que la componente $M_y = 0$ ya que $\sin(\theta)$ es una función impar y la función $f_0(\theta, p)$ es una función par, por lo que su producto será igual a cero.

Así, integrando por partes

$$M_0 = \left(\frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0}, 0 \right), \quad (2.2.3)$$

lo que lleva a

$$M_0 = \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} \quad (2.2.4)$$

de donde se puede encontrar θ_0 como función de M_0 usando el método de Newton-Raphson. Notar que θ_0 corresponde al ángulo máximo que pueden tener los espines al inicio de la simulación.

- Determinar p_0 .

Nuevamente usando la distribución *Water-Bag* (2.2.1), podemos escribir

$$u_0 = \int f_0(\theta, p) \left[\frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}(1 - M^2) \right] d\theta dp, \quad (2.2.5)$$

donde si integramos (notar que la primera integral del lado derecho de la ecuación puede integrarse por partes), obtenemos

$$u_0 = \frac{p_0^2}{6} + \frac{1}{2}(1 - M_0^2), \quad (2.2.6)$$

donde para u_0 y M_0 dadas, se obtiene el valor de p_0 , el cual es el valor máximo de la velocidad que pueden tener los espines al inicio de la simulación.

- Integrar las ecuaciones de movimiento.

El método *Leap-frog* para las ecuaciones del modelo HMF vienen dadas por

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta t p_{n+1/2} \quad (2.2.7)$$

$$p_{n+1/2} = p_{n-1/2} - \Delta t M_x \sin(\theta_i) \quad (2.2.8)$$

así al iterar N_t veces estas ecuaciones (2.2.7) y (2.2.8) con $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ y $\Delta t N_t$ es el tiempo total de la simulación. Podremos guardar en cada instante $n\Delta t$ las posiciones, velocidades y magnetización del sistema.

De esta manera, en la figura 2.2.1 mostramos a modo de ejemplo cómo se ve la distribución *Water-Bag* en el espacio de fase (espacio de posiciones versus velocidades) para energías iniciales iguales a $u_0 = 0.500$ y $u_0 = 1.500$. Vemos que la distribución *Water-Bag* establece a las partículas inicialmente dentro de los límites establecidos para θ_0 y p_0 .

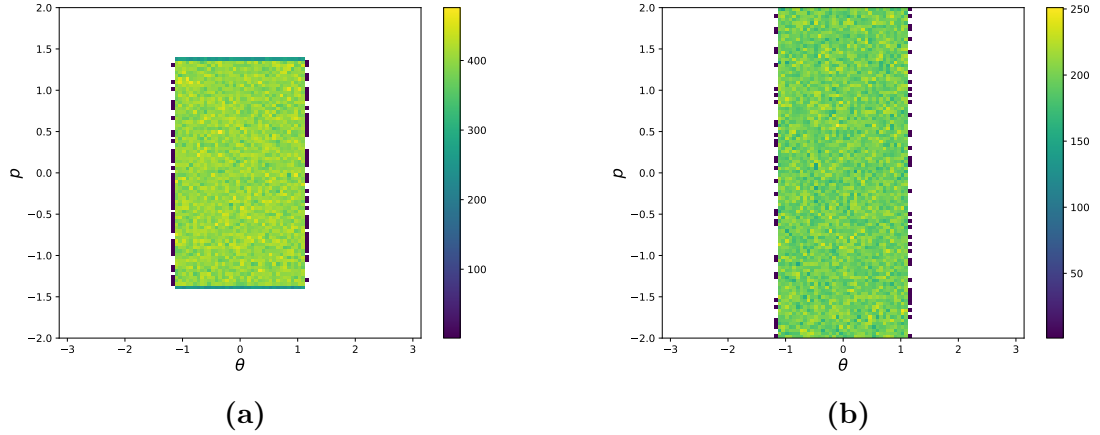


Figura 2.2.1: Espacio de fase inicial según la distribución *Water-Bag*. Para $u_0 = 0.500$ (a) y $u_0 = 1.500$ (b). En (a), $M \neq 0$, $-1 < \theta_0 < 1$ y $-1.5 < p_0 < 1.5$. Y en (b), $M = 0$, $-1 < \theta_0 < 1$ y $-2 < p_0 < 2$. La barra de color indica la probabilidad de encontrar partículas en las posiciones y velocidades correspondientes. En la zona blanca la probabilidad es nula. Elaboración: reproducido de [Rivera \[2022\]](#).

2.3. Sistemas complejos

2.3.1. ¿Qué es un sistema complejo?

Diversos sistemas, fenómenos, procesos, han sido identificados como ejemplos de sistemas complejos. El clima de la Tierra [[Tyutyunnik, 2022](#)], el universo [[Lloyd, 2006](#)], las ciudades [[Holovatch et al., 2017](#)], los sistemas de gobierno [[Wiesner et al., 2019](#)], los sistemas biológicos [[Miller and Page, 2007](#)], entre otros [[Estrada, 2023](#)]. La gran mayoría de los fenómenos observados en la naturaleza resultan de interacciones complejas presentes en grandes conjuntos de elementos básicos. Esto trae consigo la noción de que la complejidad se manifiesta en multi-escalas. Incluso [Ladyman and Wiesner \[2020\]](#) afirman que todos los sistemas vivos y todos los sistemas inteligentes son sistemas complejos.

Las definiciones de los sistemas complejos y a qué nos referimos con complejidad están estrechamente relacionadas. Ambos conceptos han sido ampliamente estudiados para poder describir sistemas cuyo comportamiento no se podía predecir con exactitud. Las investigaciones abarcan distintas disciplinas con sus respectivos enfoques metodológicos como también se ha hecho necesario el trabajo colaborativo entre disciplinas logrando producir un conocimiento que no surgía al trabajar por separado.

La investigación en general va desde las áreas de la física y las matemáticas hasta las áreas de las ciencias sociales, económicas y biológicas. Cada área presenta una gran variedad de comportamientos cualitativamente diferentes así se han tenido distintas definiciones de lo que es un sistema complejo. [Ladyman and Wiesner \[2020\]](#) engloban los pensamientos de las investigaciones sobre los sistemas complejos y presentan un conjunto de las diez características más distintivas de estos sistemas. Dividiéndolas entre “condiciones” y “productos”. Argumentando que la variedad de características es capaz de manifestarse de diferentes maneras en distintos contextos. Por lo que no existe un sólo fenómeno de complejidad.

La teoría de los sistemas complejos no está completa, pero los lineamientos y elementos se hacen cada vez más claros. Este trabajo no tiene como objetivo entregar definiciones nuevas sobre estos sistemas. Sólo queremos enfatizar que las ideas y métodos de distinta índole usadas en sistemas complejos pueden ser bastante útiles, ayudándonos a aclarar las propiedades y dinámicas de los sistemas.

2.3.2. Características de los sistemas complejos

Presentamos las definiciones de las principales características de los sistemas complejos junto a un breve resumen del vínculo que estas tienen con el modelo HMF.

Nos guiamos por el trabajo de [Ladyman and Wiesner \[2020\]](#) para presentar la lista de características más representativas de los sistemas complejos. Ya que el libro recopila las definiciones del conjunto central de sistemas complejos que se discuten en toda la literatura. Los autores logran reconocer diez características, y se hace una división entre un grupo de características que son condiciones para que surja la complejidad y otro grupo de características que es producto de las anteriores pero que hacen alusión a indicativos de la complejidad. Todo lo expuesto en esta sección en relación a la definición de cada una de las características tiene como base teórica ese trabajo pero se añaden menciones a otros trabajos importantes.

Las primeras cuatro características, son las condicionantes para que aparezca la complejidad, estas son:

1. Numerosidad

Lo primero que hay que señalar en esta característica es la distinción entre partes e interacciones de un sistema. Las partes pueden definirse

como cualquier cosa que sea descrita por estados y tenga la capacidad de interactuar, así no se limita a sólo formas físicas [Thurner et al., 2022]. La interacción por su parte es una característica esencial de los sistemas complejos. Estas pueden ser consecuencia de fuerzas, colisiones o comunicación. Lo que se verá reflejado en distintos tipos de interacciones, como por ejemplo, intercambio de energía, materia o información. Al final, la idea general de la interacción se entiende como una dependencia de los estados de las partes entre sí. Cuando existe interacción, hay cambios en las propiedades físicas de cada una de las partes. De hecho se ha mencionado que la identidad de los sistemas complejos radica en que las propiedades físicas de las partes también influyen en las interacciones, así existe una co-evolución temporal entre interacciones y propiedades [Holovatch et al., 2017].

Así, la numerosidad puede provenir de el número de partes, componentes o partículas del sistema o del número de interacciones entre esas partes. De hecho si ocurre una combinación entre la numerosidad de partes y de interacciones puede traer una riqueza de propiedades diferentes que no está presente en las partes individuales. Además no es una condición estrictamente necesaria que las partes o interacciones sean del mismo tipo entre ellas respectivamente, osea también se da lugar a la diversidad.

Aunque la mayoría de los sistemas catalogados como complejos tienen un gran número de partes constituyentes también existen sistemas complejos de relativamente pocas partes. Pero estos han mostrado tener un gran número de interacciones. Las partes son relativamente simples pero las cantidades en las interacciones serán relevantes para dar el carácter complejo a los sistemas.

El modelo HMF posee numerosidad tanto en el número de partes interactuantes como en las mismas interacciones. De hecho, la numerosidad es parte importante de su dinámica, como hemos mencionado anteriormente, a mayor número de espines, mayor será el tiempo que el modelo se quedará atrapado en los QSS.

2. Desorden

El orden y desorden están intrínsecamente relacionados en los sistemas

complejos. El orden emerge espontáneamente si las interacciones entre las partes son desordenadas o aleatorias. Un sistema completamente desordenado o aleatorio se define como aquel que no posee correlaciones temporales entre sus partes. El orden está relacionado con la heterogeneidad por ende el desorden con la homogeneidad. Además el desorden puede presentarse en distintos niveles, en un nivel inferior, como en la interacción entre las partes y en un nivel superior como en la estructuras que emergen de las interacciones.

La complejidad define las estructuras que se encuentran entre el orden y el desorden [Ladyman et al., 2013].

Como el modelo HMF es un modelo de campo medio, sus partes interactúan de manera promedio y uniformemente entre si. Se asume una cierta homogeneidad o desorden en las interacciones del sistema que permite el efecto de campo medio.

3. Retroalimentación

La retroalimentación es una característica que está relacionada con el tiempo. Lo que suceda temporalmente antes es crucial para lo que sucederá después. De hecho la duración de las interacciones depende directamente de las interacciones anteriores y así sucesivamente. Así, las interacciones deben suceder en una escala de tiempo similar. La retroalimentación es lo que mantiene la estructura de las interacciones entre todas las partes.

En el modelo HMF la estructura del sistema se mantiene debido a las interacciones de los espines, los cuales contribuyen al campo promedio de interacciones.

4. Estados fuera del equilibrio termodinámico

Los sistemas complejos no se caracterizan por ser sistemas en estados de equilibrio. En el equilibrio las propiedades físicas son estables, esto no permite que el sistema se adapte a diversas condiciones auto-organizándose. En cambio, los sistemas complejos son sistemas que no se encuentran en el equilibrio, esto les permite auto-organizarse.

El modelo HMF exhibe los QSS antes de relajarse al equilibrio, como estos aumentan su tiempo de vida dependiendo del número de partes del sistema, el modelo puede permanecer harto tiempo en un estado fuera del equilibrio termodinámico.

Las últimas seis características, las cuales son resultados de las anteriores, son:

1. Orden y auto-organización

Como se mencionó anteriormente, el orden surge de la interacción desordenada de las partes. En conjunto con la auto-organización forman una expresión fundamental en los sistemas complejos. En [Ladyman et al. \[2013\]](#) dicen “los sistemas complejos son precisamente aquellos cuyo orden emerge del desorden en lugar de estar construido en ellos”. Algunos conceptos asociados a orden y auto-organización son simetría, periodicidad, determinismo y patrón. Los cuales necesitan de un cierto grado de estabilidad para existir. [Morin \[2001\]](#) afirma que la organización y el orden están relacionados de tal forma que si aumenta la organización también aumenta el orden del sistema.

Se ha mencionado en diversos estudios que los sistemas complejos se encuentran entre el orden y el desorden de un sistema [[Bianconi et al., 2023](#)].

El orden en el modelo HMF se puede asociar con la aparición de estructuras tipo *clústers* en el espacio de fase, las que aparecen debido a la interacción homogénea o desordenada propia del campo medio. Estas estructuras se muestran para condiciones iniciales dadas, de manera espontánea.

2. No linealidad

La no linealidad es una manifestación de los sistemas complejos pero no es suficiente por si sola para definirlos. Así puede ser una característica condicionante como también una característica que es producto de los sistemas complejos.

La no linealidad más común en los sistemas complejos se presenta en ecuaciones no lineales que siguen leyes de potencia. Las ecuaciones no lineales pueden ser cualquier ecuación que describa una relación entre variables que no cumpla con el principio de superposición.

Los sistemas y fenómenos no lineales no pueden ser definidos mediante una descripción determinista. Ya que contienen propiedades estocásticas y probabilistas. La incertidumbre de sus medidas crece exponencialmente a medida que el sistema evoluciona. Comúnmente se les llama sistemas no lineales o caóticos deterministas por su sensibilidad a las condiciones iniciales [[Thurner et al., 2022](#)].

El modelo HMF está definido como un modelo no lineal debido al carácter trigonométrico en el término de la energía potencial en su Hamiltoniano.

- Una característica importante de mencionar que no está en la lista pero si como interludio es la emergencia. Pues la emergencia es una característica que está presente en todos los sistemas complejos y en todas las nociones de complejidad. Incluso ya había sido considerada desde antes de ser mencionada en las ciencias de la complejidad. Esta propiedad indica que existe un comportamiento colectivo que emerge de la interacción entre muchas partes de un sistema que muestra propiedades que no pueden verse ni entenderse si se estudiasen las partes individuales aisladamente [San Miguel, 2023]. De alguna manera lo que se presenta colectivamente está desconectado de sus partes.

La emergencia tiene muchas formas, uno puede entender las estructuras emergentes, como estáticas y como estructuras temporales. Las estructuras emergentes estáticas son orden, desorden o estructuras libres de escala. Las tres dependen del grado de orden y desorden en el sistema. Cuando hay un mayor grado de orden surgen patrones multi-escala y cuando hay mayor grado de desorden nos acercamos a la aleatoriedad. El equilibrio entre el orden y el desorden lleva a patrones de diferente magnitud, a esto se le llaman configuraciones libres de escala. Las estructuras emergentes que varían en el tiempo son catalogadas como intermitencia, sincronización y selección y adaptación. La intermitencia se caracteriza por reorganizaciones repentinas del sistema. De hecho la intermitencia está asociada a las transiciones de fase, donde el equilibrio y la estacionariedad es sustituido por una dinámica intermitente que rompe con la estabilidad del sistema [Jensen, 2022].

En Ladyman et al. [2013] mencionan que la emergencia a un nivel superior ocurre porque la robustez está presente en el orden de las interacciones a un nivel inferior.

En el modelo HMF la contribución que tienen en conjunto todos los espines al campo medio, el cual interactúa con una parte del sistema es la base para las propiedades que muestra el modelo. Como los QSS y las

transiciones de fase. Las estructuras que presenta el modelo que pueden ser vistas en el espacio de fase se pueden considerar como estructuras emergentes del tipo de interacción de campo medio.

3. Robustez

La robustez se define como la respuesta autónoma que tiene el sistema ante cualquier tipo de cambios. La robustez puede tener lugar en diferentes escalas de un sistema complejo. Robustez en las partes del sistema, robustez del sistema con respecto al entorno, robustez de las interacciones, entre otras.

La emergencia depende de la robustez, ya que es el resultado de una fuerza organizadora muy fuerte que supera variaciones tanto de dentro como de fuera del sistema. Así, se dice que la emergencia tiene robustez [Miller and Page, 2007]. De hecho la emergencia más básica se presenta cuando las interacciones de las partes son robustas y dan lugar al orden. Estas interacciones son robustas pues ocurren de manera uniforme sobre todas las partes y no sólo en una zona central del sistema.

La robustez del modelo HMF es mencionada en relación a la duración y estabilidad de los QSS del modelo. Esta robustez podría relacionarse con las interacciones, pues a mayor cantidad de espines (por ende interacciones) mayor es el tiempo de vida de los QSS.

4. Estructura anidada y modularidad

Como los sistemas complejos presentan propiedades a múltiples escalas, estas afectan a otros sistemas complejos y así existen sistemas complejos compuestos por otros sistemas complejos. Por ejemplo, desde lo subatómico hasta lo atómico, la tierra, sus océanos y la atmósfera, el sistema solar, la economía, entre otras. Esto indica la manifestación de una naturaleza jerárquica en los sistemas complejos Anderson [1972].

Citando textual a [Ladyman and Wiesner, 2020], “el resultado final de todas las características de los sistemas complejos es una entidad que está organizada en una variedad de niveles de estructura y propiedades que interactúan con el nivel superior e inferior, y exhiben regularidades legales y causales, así como diversos tipos de simetría, orden y comportamiento periódico”. La modularidad permite definir estructuras y propiedades diferentes dentro de un sistema complejo.

En el modelo HMF la interacción individual entre los espines en la escala microscópica permite la formación de estructuras en el espacio de fase, las cuales podemos analizar mediante la magnetización, un parámetro macroscópico. La aparición de distintas estructuras se relaciona con la aparición de fases en el sistema. Que ambas escalas se relacionen da un indicio de jerarquía en el modelo.

5. Historia y memoria

Tanto las partes o elementos como las estructuras formadas por las interacciones entre las partes, más conocidas como redes, pueden entenderse como una memoria que tiene información sobre el pasado dinámico del sistema [Thurner et al., 2022].

Los sistemas complejos evolutivos son los que más presentan memoria, pues dependen de su pasado para llegar a sus estados. La historia es crucial en ellos pues permite que evolucionen constantemente mostrando nuevas emergencias [Holland, 1992]. La memoria se relaciona con los sistemas complejos adaptativos.

La fuerte dependencia a las condiciones iniciales en el modelo HMF, lo dota con la aparición de distintas estructuras, estas condiciones iniciales son parte de la memoria del sistema.

6. Comportamiento adaptativo

La adaptación se asocia con que el sistema complejo posee una función. Las representaciones más notorios de comportamiento adaptativo ocurren en sistemas vivos como en aquellos derivado de la vida. Los casos más comunes son el comportamiento colectivo y la toma de decisión colectiva. Por ejemplo, cuando una colonia de hormigas se ve condicionada por la necesidad de asegurar la supervivencia de la colonia o que nuestra memoria inmunológica cumpla la función de recordar enfermedades pasadas en nuestro cuerpo o que el fin último del Internet sea la mera eficiencia en la comunicación, representa funcionalidad en los sistemas complejos.

Las diferentes estructuras presentes en los QSS del modelo HMF, las que se pueden ver en el espacio de fase también pueden ser un indicio de un comportamiento adaptativo, pues a medida que las condiciones iniciales cambian, el sistema cambia su dinámica y exhibe estructuras estables

diferentes.

2.3.3. Medidas de los sistemas complejos

Existen distintas definiciones y descripciones de lo que son los sistemas complejos, por lo que se necesitan diferentes medidas para cuantificar las diversas propiedades que estos sistemas presentan. Como el modelo HMF presenta varias de las características mencionadas para los sistemas complejos, lo abordamos desde esta perspectiva. Las dos herramientas utilizadas en este trabajo confieren únicamente conocimiento sobre orden y desorden de las partículas en el sistema y la caracterización de la dinámica del modelo para distinguirlo como sistema caótico o estocástico, esto además nos entregará información sobre las estructuras correlacionadas que puedan estar presentes en el modelo.

2.3.3.1. Entropía de permutación

La entropía de permutación fue introducida por [Bandt and Pompe \[2002\]](#), como una motivación de definir una medida simple de la complejidad para cualquier sistema dinámico con una serie temporal regular, caótica, ruidosa o basada en la realidad (en presencia de ruido dinámico y observacional), sólo teniendo en cuenta su estructura [[Cao et al., 2004](#), [Berger et al., 2017](#), [Cuesta-Frau et al., 2018](#), [Pessa and Ribeiro, 2019](#), [Chen et al., 2019](#)]. Así esta medida es capaz de analizar series temporales de sistemas no lineales y no ergódicos. La entropía de permutación es una medida sencilla y rápida que no tiene un problema de costo computacional [[Cao et al., 2004](#)], capaz de medir la complejidad en grandes conjuntos de datos [[Unakafova and Keller, 2013](#)]. Ha sido aplicada en distintas investigaciones, usándose modificaciones de esta pero con la misma base metodológica, las cuales han mostrado la misma eficiencia o incluso mejoras en el análisis [[Xia et al., 2016](#), [Chen et al., 2019](#), [Kang et al., 2021](#)].

La entropía de permutación compara valores vecinos en una serie temporal mapeando diferentes patrones de probabilidad. Esta relación de causalidad temporal da lugar a una distribución de probabilidad que incluye a todos los patrones obtenidos. Es una medida capaz de medir en términos de orden y desorden los sistemas [[Traversaro et al., 2018](#)].

- Descripción matemática de la entropía de permutación

Sea una serie temporal arbitraria $\{x_t\}_{t=1,\dots,\mathcal{N}}$. Para observar la serie, la dividimos en ventanas (superpuestas o no), el número de ventanas dentro de la serie temporal será [Pessa and Ribeiro, 2021]

$$n_x = \mathcal{N}_x - (d_x - 1)\tau_x, \quad (2.3.1)$$

con $d_x > 1$ el largo de cada ventana y $\tau_x \geq 1$ un desfase temporal entre ventanas. En Bandt and Pompe [2002] d_x es llamada la dimensión de incrustación y τ_x el retraso de incrustación.

Así, cada ventana se puede escribir de la forma

$$w_p = (x_p, x_{p+\tau_x}, x_{p+2\tau_x}, \dots, x_{p+(d_x-2)\tau_x}, x_{p+(d_x-1)\tau_x}), \quad (2.3.2)$$

donde $p = 1, \dots, n_x$ es el índice de partición.

De este modo si dentro de cada partición se comparan los valores numéricos vecinos de $\{x_t\}$ en términos de su magnitud, podemos construir una secuencia π_p de símbolos que corresponderá a una secuencia ordinal (o de permutación) de la serie temporal. Por lo que para cada partición x_p tendremos una permutación $\pi_p = (r_0, r_1, \dots, r_{d-1})$ de los números de índice $(0, 1, \dots, d-1)$ que ordena los elementos de w_p en orden ascendente [Pessa and Ribeiro, 2021]. En la comparación sólo se consideran valores desiguales de la serie, si los valores son iguales obtienen el mismo valor ordinal.

Así, los símbolos de permutación se agruparan en una serie o secuencia simbólica $\{\pi_p\}_{p=1,\dots,n_x}$.

Por ejemplo, sea la serie temporal $\{x_t\} = \{5, 8, 2, 10, 3\}$, con una ventana $d_x = 2$ y un retraso o desfase temporal $\tau_x = 1$. Las posibles particiones p con sus respectivas secuencias de permutaciones π_p son

$$p = 1 \Rightarrow \pi_1 = (0, 1), \quad x_1 = 5 < x_2 = 8 \quad (2.3.3)$$

$$p = 2 \Rightarrow \pi_2 = (1, 0), \quad x_2 = 8 > x_3 = 2 \quad (2.3.4)$$

$$p = 3 \Rightarrow \pi_3 = (0, 1), \quad x_3 = 2 < x_4 = 10 \quad (2.3.5)$$

$$p = 4 \Rightarrow \pi_4 = (1, 0), \quad x_4 = 10 > x_5 = 3. \quad (2.3.6)$$

Si estudiamos todas las $d_x!$ permutaciones π_p posibles de orden d_x . La probabilidad $\rho(\pi_p)$ de hallar una permutación determinada es [Bandt and Pompe, 2002]

$$\rho(\pi) = \frac{\#\{t | t \leq \mathcal{N} - d, (x_{t+1}, \dots, x_{t+n}), \text{ de tipo } \pi\}}{N - d + 1}. \quad (2.3.7)$$

Finalmente, la entropía de permutación se define como [Bandt and Pompe, 2002]

$$H(d_x) = - \sum \rho(\pi_p) \log_2 \rho(\pi_p), \quad (2.3.8)$$

para las $d_x!$ permutaciones π_p de orden d_x .

Esta entropía tiene la forma de la entropía clásica de Shannon por lo que es una medida d incertidumbre o de información que caracteriza la distribución de probabilidad de los patrones de permutación de una serie temporal.

Los límites de la entropía de permutación son

$$0 \leq H(d_x) \leq \log(d_x!), \quad (2.3.9)$$

así, cuanto mayor sea la entropía, la probabilidad de todas las permutaciones será similar, tendremos mayor incertidumbre o desorden de los datos. Y cuanto menor sea la entropía, si esta tiende a cero, la probabilidad de una permutación predominará, por lo que los datos serán más predecibles y contendrán menos incertidumbre. Esto ocurre en series temporales compuestas únicamente de valores crecientes o decrecientes.

Así, la entropía de permutación depende sólo de tres parámetros, la longitud de la serie temporal N , la ventana o dimensión de incrustación d_x y el retraso temporal o de incrustación τ_x . El rango recomendado para la ventana es de $d_x = 3, \dots, 7$ y para el retraso temporal es de $\tau_x = 1$ pues cuando $t_x > 1$ se reduce la cantidad de datos disponibles a estudiar. Para la longitud de la serie temporal, la condición más utilizada es $\mathcal{N} \gg d_x!$ aunque longitudes más cortas son suficientes para un cálculo estable de la entropía esta condición garantiza que todos los patrones ordinales se puedan encontrar con cierta probabilidad [Cuesta-Frau et al., 2019].

2.3.3.2. Plano complejidad-entropía

Para profundizar el análisis de la dinámica del modelo HMF, incorporamos el plano complejidad-entropía. La característica más importante del plano es su capacidad de distinguir entre sistemas de naturaleza estocástica (pudiendo clasificar diferentes grados de estocasticidad) y caótica. Esta herramienta hace uso del enfoque de la entropía de permutación.

La metodología de la entropía de permutación propuesta por [Bandt and Pompe \[2002\]](#) motivó nuevos enfoques y caracterizaciones de las series temporales experimentales y teóricas. Particularmente intentando describir la brecha entre sistemas caóticos y estocásticos [[Rosso et al., 2007](#)].

La medida de Complejidad Estadística propuesta por [López-Ruiz et al. \[1995\]](#) se construye para una escala dada una descripción estadística de una distribución de probabilidad del sistema. Permitiendo que para cada sistema particular, la escala escogida sólo dependa de la física subyacente. El carácter estadístico de esta medida la convierte en una medida estándar, capaz de cuantificar y comparar distintos sistemas con mediciones similares. Esta medida plantea una cantidad que se ubica entre las definiciones triviales de “orden” y “desorden” (o información).

Para definir la Complejidad Estadística se utiliza una medida de “desequilibrio”, esta medida es una “distancia” (euclidiana) en el espacio de probabilidad, la que establece una diferencia entre los estados accesibles del sistema y el estado con distribución uniforme o equiprobable. Esta distancia impone dos condiciones sobre el desequilibrio, una, que sea mayor que cero y dos, que sea igual a cero en el estado de equiprobabilidad. Así se sugiere que la complejidad puede estar definida como el producto entre la “información” o entropía de Shannon [[Shannon and Weaver, 1964](#)] y la medida de “desequilibrio”. Esta definición permite que la Complejidad Estadística pueda ser cero en ambos extremos de una dinámica, en el “orden” y el “desorden”, y así entregar valores no triviales ubicados entremedio de esos límites.

Con esta definición de la Complejidad Estadística, en [López-Ruiz et al. \[1995\]](#) el comportamiento de la Complejidad Estadística se propone para sistemas que van desde los cristales perfectos a los gases ideales pues estos representan una estructura ordenada y desordenada respectivamente. Encontrándose que para un cristal como posee un desequilibrio máximo pues su estado es lejano al estado uniforme, y su información o entropía es poca su complejidad se aproxima a

cero. Y en caso del gas ideal, como posee un desequilibrio igual a cero, osea se encuentra en el estado de equiprobabilidad y su información es mucha, al igual que el cristal, su complejidad se aproximará a cero. Además en este trabajo la medida de Complejidad Estadística propuesta fue evaluada para una transición en el mapa logístico y el comportamiento del mapa de “Lorentz”, siendo en ambos casos capaz de distinguir sus singulares dinámicas.

En el trabajo de Anteneodo and Plastino [1996] discuten algunas características de la medida de Complejidad Estadística propuesta por López-Ruiz et al. [1995]. Como una forma de analizar que tan útil es en la descripción de sistemas que se encuentran en puntos intermedios entre el orden y el desorden. Se estudiaron las distribuciones de probabilidad para sistemas discretos que producen Complejidad Estadística máxima y sistemas continuos que producían valores arbitrariamente grandes de esta complejidad. Para sistemas discretos, se estudió la dinámica y el primer punto crítico del mapa logístico mediante simulaciones de Monte Carlo con un gran número de iteraciones (más de 2^{26}), lo que fue comparado con resolución analítica, dando los mismos resultados. Y para sistemas continuos se estudió el punto de transición de comportamientos regulares a caóticos del mapa de Lorenz. Para ambos casos, discreto y continuo, se obtuvieron distribuciones de probabilidad que exhibían un nivel de organización entre el orden y el desorden, consistente con lo reportado por López-Ruiz et al. [1995]. Además, en el trabajo de Anteneodo and Plastino [1996] sometieron a la Complejidad Estadística al análisis bajo replicaciones. Encontrándose que, para el caso discreto, la complejidad podría ser mayor, igual o menor bajo transformaciones de escala como la duplicación. Para el caso continuo la complejidad sufre cambios drásticos bajo transformaciones de re-escalamiento. Cabe mencionar que las transformaciones no afectan a la distribución de probabilidad de los sistemas en ambos casos. Concluyendo que tanto para el caso discreto como continuo, la Complejidad Estadística sólo depende de los valores de la probabilidad de sus estados, no de los estados mismos.

Lamberti et al. [2004] abordan las limitaciones de la Complejidad Estadística según lo reportado por López-Ruiz et al. [1995] y Anteneodo and Plastino [1996]. Bajo el nombre de “entropía no trivial” mejoran algunas características de la Complejidad Estadística, tales como definir si es una cantidad intensiva o extensiva y mejorar su capacidad de distinguir entre distintos grados de periodicidad pues la cantidad se anula exponencialmente en el límite termodinámico para todos los sistemas

unidimensionales de rango infinito. En este trabajo se recalca que la distribución de probabilidad refleja las correlaciones estructurales que existen entre las partes de un sistema (estructuras que no existen para los casos límites de orden y desorden), dinámica que la medida de “entropía no trivial” es capaz de capturar. Así, para cada valor de la entropía existe un rango de medidas de “entropía no trivial”, lo que nos permite ver las particularidades de la distribución de probabilidad. Para mejorar la Complejidad Estadística [Lamberti et al. \[2004\]](#) proponen que la medida de desequilibrio tenga como distancia, el desequilibrio de Jensen-Shannon, el cual es una cantidad intensiva. Aplicando la “entropía no trivial” o Complejidad estadística con esta nueva definición del desequilibrio al mapa logístico para un amplio rango de su parámetro de control encuentran que la nueva definición (utilizando el desequilibrio de Jensen-Shannon) permite distinguir entre diferentes periodicidades, mostrando claramente los detalles irregulares e impredecibles de las características dinámicas del sistema.

Complementando el trabajo anterior, [Martin et al. \[2006\]](#) proporcionan un funcional general de la medida de Complejidad Estadística y estudian sus propiedades geométricas y analíticas, también usando el mapa logístico como ejemplo. En esta investigación se menciona que la entropía puede ser considerada como un indicador del tiempo, pues como sabemos la segunda ley de la termodinámica nos dice que la entropía crece monótonamente en el tiempo. Así si se normaliza la entropía puede considerarse como el eje temporal. Por lo que proponen el plano entropía versus complejidad, el cual es capaz de mostrar información significativa sobre la dinámica de los sistemas, aún cuando varíen los valores de los parámetros de entrada o de control. Además, este plano muestra que existen los límites de máxima y mínima complejidad, donde el límite de máxima complejidad estadística está relacionado con estructuras o patrones ocultos de los sistemas.

Gracias a estas investigaciones previas [Rosso et al. \[2007\]](#) presentan el plano de entropía versus complejidad como una herramienta para distinguir el ruido y el caos, teniendo como objetivo principal conocer la estructura física de la serie temporal que los describe. Como medida de la entropía, se usa la metodología propuesta por [Bandt and Pompe \[2002\]](#), la entropía de permutación, ya que esta medida considera los valores de la serie dentro de una relación causal, lo que significa que los valores futuros de la serie son efecto o consecuencia de los valores causales o pasados.

Se analizan diversos modelos ruidosos y estocásticos a través de su posición en el plano. En la figura 2.3.1 reproducimos el plano por Rosso et al. [2007]. Utilizamos la información disponible para la recreación del plano empleada en el trabajo de Pessa and Ribeiro [2021].

El plano es útil ubicando los modelos ruidosos y caóticos en zonas distintas, como distinguiendo procesos gaussianos de no gaussianos. Los modelos *Skew Tent Map*, *Henon Map*, *Logistic Map* y *Schuster Map* corresponden a modelos caóticos. Estos modelos exhiben altos valores de complejidad y valores intermedios de entropía, a excepción del *Schuster Map* el cual a medida que aumenta su parámetro z , disminuye su entropía [Rosso et al., 2007]. Este mapa se caracteriza por presentar ráfagas caóticas entre regiones laminares del espacio de fase, comportamiento llamado intermitencia [Schuster and Just, 1988]. Las regiones laminares poseen una dinámica más estable, reduciendo la complejidad del sistema.

Por otro lado, los modelos *K-Noise*, *fBm* y *fGn* corresponden a modelos estocásticos, los cuales tienden a ubicarse a la derecha del plano, osea a mayores entropías. *K-Noise* y *fBm* disminuyen sus entropías y aumentan su complejidad al variar sus parámetros, pero no alcanzan los valores de complejidad alcanzados por los modelos caóticos. Notar que los modelos estocásticos pueden diferenciarse en el plano, por lo que se habla de diferentes grados de estocasticidad [Rosso et al., 2007].

- Descripción matemática del plano complejidad-entropía

En el trabajo de Rosso et al. [2007] introducen el plano complejidad-entropía usando como entropía la entropía de permutación $H(d_x)$ propuesta por Bandt and Pompe [2002] y como complejidad la medida de Complejidad Estadística $C_{JS}[P]$ de una distribución de probabilidad de P , propuesta por López-Ruiz et al. [1995].

Si $h[P]$ es una medida de información cualquiera, que caracteriza una distribución de probabilidad P . La medida relacionada que cuantifica el desorden es [Martin et al., 2006]

$$\mathcal{H}[P] = h[P]/h_{\text{máx}} \quad (2.3.10)$$

donde $h_{\text{máx}} = h[P_e]$, con P_e una distribución de probabilidad homogénea o uniforme que maximiza la medida de información. Notar que los límites de esta medida son $0 \leq \mathcal{H} \leq 1$.

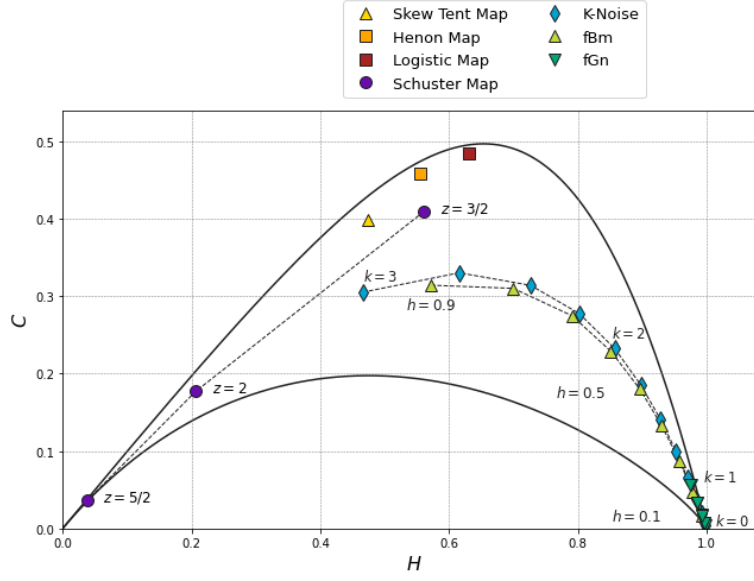


Figura 2.3.1: Plano complejidad-entropía (CH) para modelos caóticos y estocásticos. Las líneas continuas indican las curvas de máxima y mínima complejidad. Elaboración: reproducido de Rosso et al. [2007], Pessa and Ribeiro [2021].

Ahora, si adoptamos una distancia $D[P, P_e]$ en el espacio de probabilidad, desde la distribución de probabilidad P a la distribución uniforme P_e , tendremos un desequilibrio igual a

$$Q[P, P_e] = Q_0 D[P, P_e] \quad (2.3.11)$$

con Q_0 una constante de normalización.

Como la diferencia $h[P_2] - h[P_1]$ no define una ganancia o divergencia de información. Podemos definir la distancia $D[P, P_e]$ en términos de la divergencia de Jensen-Shannon extensiva [Martin et al., 2006]. La cual en su forma generalizada está dada por

$$J_S^\beta[P_1, P_2] = S[\beta P_1 + (1 - \beta)P_2] - \beta S[P_1] - (1 - \beta)S[P_2], \quad (2.3.12)$$

con $0 \leq \beta \leq 1$ y $h[P] = S[P]$, ya que la medida de información usada es la medida de información de Shannon.

El parámetro β de la divergencia de Jensen-Shannon está relacionado con el peso de ambas distribuciones de probabilidad. Para $\beta = 1/2$ tendremos igual peso para

ambas distribuciones, por lo la distancia $D[P, P_e]$ nos queda

$$D[P, P_e] = J_S^{1/2}[P, P_e] \quad (2.3.13)$$

$$= S \left[\frac{P + P_e}{2} \right] - \frac{1}{2}S[P] - \frac{1}{2}S[P_e], \quad (2.3.14)$$

así

$$Q[P, P_e] = Q_0 \left\{ S \left[\frac{P + P_e}{2} \right] - \frac{S[P]}{2} - \frac{S[P_e]}{2} \right\}, \quad (2.3.15)$$

con $0 \leq Q[P, P_e] \leq 1$.

Finalmente, la medida de Complejidad Estadística se define como

$$C[P] = Q[P, P_e] \mathcal{H}[P] \quad (2.3.16)$$

con $Q[P, P_e]$ definida en términos de la divergencia de Jensen-Shannon.

La Complejidad Estadística relaciona la interacción entre la cantidad de información que posee un sistema y su desequilibrio, cuantificando el grado de estructura correlacional de la serie.

En el caso particular del plano complejidad-entropía, $\mathcal{H}[P]$ está definido en términos de la entropía de permutación $H(d_x)$. Por lo que la Complejidad y la Entropía están definidas con respecto a la entropía de Shannon. Los ejes del plano corresponderán a funcionales de las distribuciones de probabilidad de las secuencias o patrones ordinales de ambas cantidades.

Capítulo 3

Metodología

3.1. Planteamiento del problema

El modelo hamiltoniano de campo medio atractivo (HMF por sus siglas en inglés) es un modelo representativo de los sistemas con interacciones de largo alcance [Campa et al. \[2009\]](#). En estos sistemas la interacción de largo alcance entre las partes o partículas ocurre mediante el potencial de interacción. Este modelo exhibe diversas características debido a su dinámica. Algunas de ellas son, límites termodinámicos inusuales [Dauxois et al. \[2002\]](#), inequivalencia de conjuntos estadísticos [Choi and Choi \[2003\]](#), transiciones de fase [Rocha Filho et al. \[2012\]](#), estados cuasi-estacionarios (QSS por sus siglas en inglés), entre otras [Levin et al. \[2014\]](#), [Benetti et al. \[2012\]](#), [de Buyl et al. \[2012\]](#), [Pluchino et al. \[2004a,b\]](#). Los QSS son estados fuera del equilibrio termodinámico, donde el sistema permanece antes de alcanzar el equilibrio a medida que aumenta el número de partículas o espines del sistema. El modelo HMF y sus QSS han sido clasificados previamente en la literatura mayoritariamente mediante el estudio de las distribuciones de las posiciones y las velocidades de las partículas o espines en el espacio de fase o mediante el valor promedio de la magnetización, el cual es considerado el parámetro de orden del sistema en el espacio de posiciones. En este trabajo estudiaremos si es posible caracterizar la dinámica del modelo HMF en sus QSS mediante las fluctuaciones del parámetro de orden, sin recurrir al espacio de fase.

3.2. Hipótesis

Los estados cuasi-estacionarios (o QSS) del modelo hamiltoniano de campo medio (HMF, por sus siglas en inglés) son el resultado de la dinámica de largo alcance entre las partículas o espines del modelo HMF. Los QSS pueden ser estudiados sólo mediante su parámetro de orden, la magnetización, la cual es una cantidad dinámica que contiene toda la información suficiente para caracterizar o predecir las estructuras que se formen en el espacio de fases. Además el estado QSS suele caracterizarse mediante el valor promedio de M_{QSS} como un estado homogéneo cuando $M_{QSS} = 0$, o inhomogéneo cuando $M_{QSS} \neq 0$. Sin embargo la magnetización sigue fluctuando alrededor del promedio. La entropía de permutación es una herramienta poderosa para caracterizar las series temporales de la magnetización para distintas condiciones iniciales del modelo HMF ya que es capaz de analizar series temporales arbitrarias, incluso en presencia de ruido dinámico y observacional. Luego, la medida entropía de permutación de M , que es sensible sólo a las fluctuaciones de M , puede distinguir la tendencia del modelo HMF al caos y la energía de transición entre estados homogéneos independiente del valor promedio de M .

3.3. Objetivos

3.3.1. Objetivo General

Utilizar la entropía de permutación para caracterizar los estados cuasi-estacionarios y transiciones de fase del modelo hamiltoniano de campo medio atractivo mediante su parámetro de orden o magnetización.

3.3.2. Objetivos específicos

1. Usar simulaciones de partículas basadas en el modelo HMF para calcular la magnetización a tiempos donde el sistema alcanza un estado cuasi-estacionario para distintas condiciones iniciales.
2. Estudiar las fluctuaciones de la magnetización durante el estado cuasi-estacionario usando la medida entropía de permutación.
3. Caracterizar los estados cuasi-estacionarios mediante el plano complejidad-

entropía que resulta del cálculo de la entropía de permutación.

3.4. Metodología

3.4.1. Parámetros del modelo HMF

Los datos utilizados provienen de la simulación numérica del modelo HMF desarrollada y codificada en el trabajo de Rivera [2022].

Las simulaciones comprenden un gran número de partículas ($N = 10^6$) comparado con la mayoría de las publicaciones del modelo HMF que usan cerca de 10.000 partículas solamente Bachelard et al. [2008], Staniscia et al. [2009], Rocha Filho et al. [2012]. Y el tiempo t de las simulaciones tiene como mínimo 2^{17} pasos de iteración con un paso temporal $\delta t = 0.01$.

Las simulaciones se inician siguiendo una distribución *water-bag* como la ecuación 2.2.1. Donde la posición y la velocidad de cada partícula o espín se inicializa aleatoriamente. Esta distribución se puede caracterizar solo por los valores iniciales de la energía, ecuación 2.2.6, y de la magnetización, ecuación 2.2.4.

Entonces, cada simulación numérica depende de un par de valores iniciales de la energía y la magnetización (u_0, M_0) .

Los valores iniciales de la magnetización están en el rango $M_0 = [0.1 - 0.9]$ con un paso de 0.1. No se realiza el análisis para $M_0 = 0$ pues este estado es espacialmente homogéneo desde el principio por lo que la fuerza sobre cada espín es cero (no existe un gradiente). Para $M_0 = 1$ pasa algo parecido, pues como la mayoría de los espines están alineados en una dirección específica no hay cambios en el parámetro de orden.

Cada magnetización inicial fue estudiada en un rango de energías que nos permitiera estudiar la transición de fase de estados QSS no homogéneos a homogéneos en el modelo HMF Rivera and Navarro [2022], considerando la memoria computacional disponible. Pero también considerando las condiciones sobre u_0 . Pues la energía mínima para una magnetización M_0 dada es $u_{min} = (1 - M_0^2)/2$, según la ecuación 2.2.6. Es decir, energías menores que u_{min} no corresponden a una situación física del modelo HMF y por lo tanto no pueden ser

usadas como condición inicial de las simulaciones. Por lo que, el rango de energías se elige siempre como $u_0 > u_{mn}$ hasta $u_0 = 2$. Este valor máximo es arbitrario, pero en la literatura se han encontrado transiciones de fase para energías menores que $u_0 = 2$.

Así, para cada magnetización inicial $M_0 = [0.1, 0.2, 0.3, 0.4]$ el rango de energías iniciales correspondiente fue igual a $u_0 = [0.500 - 1.500]$ con un paso de 0.001, para mayor información y precisión. Teniendo un total de 1000 energías analizadas. Para magnetizaciones iniciales mayores, $M_0 = [0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9]$, se observa un comportamiento difuso en M cercano a la zona de la transición de fase a medida que aumenta M_0 , por lo que se abarca progresivamente un rango más amplio de energías iniciales al ir aumentando M_0 , logrando alcanzar el rango de energías $u_0 = [0.100 - 1.500]$ para $M_0 = 0.9$, con un paso de 0.001 y el total de 1320 energías a analizar.

Las simulaciones numéricas arrojaron los valores de tres cantidades, las magnetizaciones en cada iteración de tiempo y la posición y velocidad de cada espín en el instante inicial y final de la simulación. De estas tres cantidades los datos usados en este trabajo fueron los valores de la magnetización en cada serie de tiempo donde el sistema alcanza temporalmente los estados QSS. Para esto, solo consideraremos los datos de M a partir de tiempos $t = 100$, para quitar los efectos de la relajación violenta en el sistema, lo que nos deja con un total de 55536 datos a analizar por simulación.

En el estado QSS la magnetización fluctúa en torno a su promedio $\langle M \rangle$ y la medida de esas fluctuaciones es $\delta M = M - \langle M \rangle$. Los métodos se calcularon considerando las fluctuaciones de M .

La magnetización inicial $M_0 = 0.8$ es nuestra magnetización central de estudio, pues el caso más rico en relación a la cantidad de los distintos QSS y también a la falta de claridad del modelo HMF respecto al orden de la transición de la fase, lo que ocurre a causa de una fuerte dependencia de las condiciones iniciales [Benetti et al. \[2012\]](#).

3.4.2. Entropía de permutación de la magnetización

Para el análisis numérico de la entropía de permutación y el plano de complejidad-entropía, se utilizó el módulo de código abierto *ordpy*, perteneciente al lenguaje

de programación *Python*. El módulo *ordpy* implementa varios métodos, todos relacionados con la entropía propuesta por [Bandt and Pompe \[2002\]](#), tales como el estudiado plano complejidad-entropía, sus curvas de máxima y mínima complejidad, patrones ordinales faltantes, redes ordinales y transiciones ordinales faltantes. Todos los métodos pueden ser calculados para datos unidimensionales (series temporales) y bidimensionales (imágenes) como también generalizaciones a muchas escalas. Este módulo transforma el cálculo de la entropía de permutación y por ende el de los demás métodos en cantidades fáciles, rápidas y accesibles de calcular. Dentro del módulo *ordpy* la entropía de permutación, y los métodos necesarios para construir el plano complejidad-entropía, como la curva límite superior e inferior de complejidad tenían asociadas funciones.

La entropía de permutación es una función dentro del módulo *ordpy*. La función asociada a la entropía de permutación entrega la medida normalizada.

Usamos esta medida para estudiar los datos de las series temporales de las fluctuaciones de la magnetización (δM). Quitarle estos datos nos permite que la entropía no se vea afectada por los posibles cambios repentinos de la magnetización antes de relajar al estado QSS.

La entropía de permutación depende de la ventana de incrustación (la cual se analiza para obtener el mapeo a patrones ordinales) la que será establecida en $d = 6$ y del retraso de incrustación $\tau = 1$, pues según lo propuesto por [Cuesta-Frau et al. \[2019\]](#), esta ventana cumple con la condición $\mathcal{N} \gg d!$, donde en nuestro caso $\mathcal{N} = 55536$, con $\mathcal{N}$ el número total de valores en la serie temporal.

3.4.3. Plano complejidad-entropía

Nuestro código del plano complejidad-entropía será testeado para los mapas y procesos estudiados en [Pessa and Ribeiro \[2021\]](#).

Luego, el plano complejidad-entropía se considerará para los datos de las series temporales de las fluctuaciones de la magnetización (δM) entregadas por las simulaciones de todas las condiciones iniciales M_0 mencionadas anteriormente y sus respectivos rangos de energía inicial. Estos son los mismos datos usados en la entropía de permutación.

Las curvas de máxima y mínima complejidad utilizadas en el plano, también

usaron $d = 6$ y $\tau = 1$. Primero se calculó el plano para los casos de posibles nuevas transiciones de fase, donde [Rivera \[2022\]](#) reportó nuevas estructuras en el espacio de fase. Posteriormente se exploró para todos los valores de M_0 con sus rangos de energía posibles, logrando el escaneo para todos los datos disponibles de la magnetización.

Capítulo 4

Análisis

4.1. Simulaciones HMF

En la sección de análisis partiremos mostrando el comportamiento de los parámetros del modelo HMF que nos entregan las simulaciones del modelo en sus QSS.

El parámetro de orden o magnetización M evoluciona temporalmente en t como se ve en la figura 4.1.1

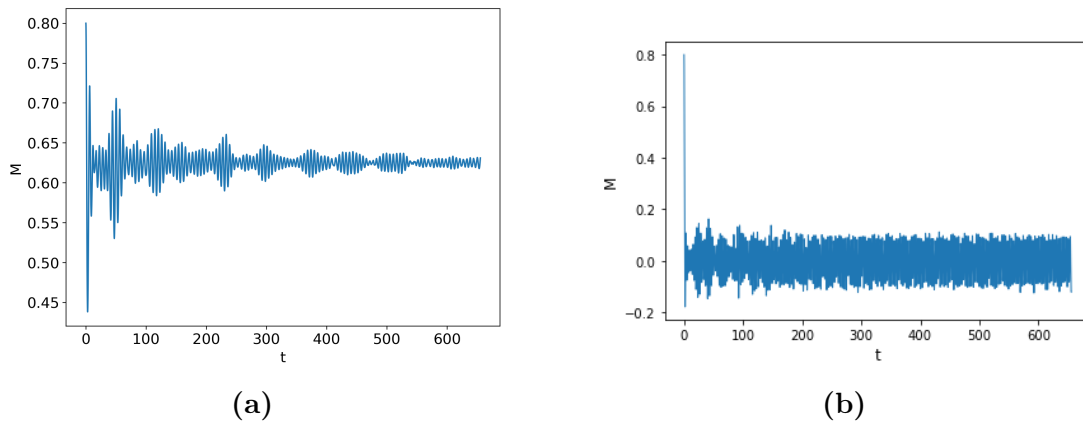


Figura 4.1.1: Evolución temporal de la magnetización con el proceso de relajación, para $M_0 = 0.8$, con $u_0 = 0.500$ (a) y $u_0 = 1.500$ (b). Elaboración: propia

Se muestran los valores de M a lo largo del tiempo t para condiciones iniciales fijas a modo de representación. La figura 4.1.1a muestra la evolución de M para

$u_0 = 0.500$ y la figura 4.1.1b para $u_0 = 1.500$. Ambas simulaciones de las figuras comienzan en $M_0 = 0.8$ pero relajan rápidamente en los primeros 20 pasos de tiempo (a $t = 100$ aproximadamente), a una magnetización promedio de 0.63 para la figura 4.1.1a y 0 en la figura 4.1.1b. Esto es una relajación violenta de la magnetización. Luego, el sistema se queda atrapado en un estado QSS donde la magnetización (M) fluctúa alrededor de los valores promedio.

Para estudiar solamente la zona donde el sistema se encuentra en los QSS se consideró un tiempo final de simulación que coincidiera con el tiempo de vida de estos estados. Así para analizar solamente la zona donde el sistema se encuentra en los estados cuasi-estacionarios, todos los datos usados fueron truncados desde $t = 100$ (para quitar los efectos del proceso de relajación sobre los valores de M) hasta $t = 610$.

Si calculamos el promedio de los valores de M en el tiempo, podemos graficar la variación de M para distintas u_0 , como se ve en la figura 4.1.2, para $M_0 = 0.8$

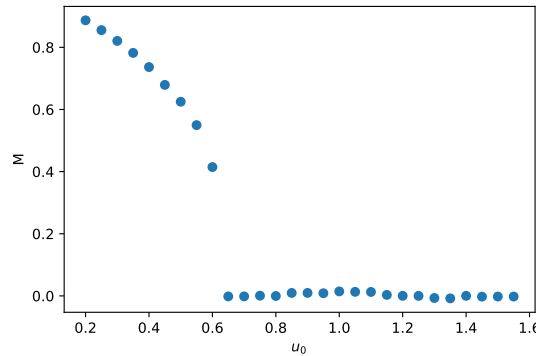


Figura 4.1.2: Magnetización promedio como función de la energía inicial u_0 para $M_0 = 0.8$. Elaboración: propia.

La figura 4.1.2 muestra que para energías $u_0 < 0.6$ los valores promedio de M en el estado QSS es siempre $M > 0.1$, lo que corresponde a un estado inhomogéneo ($M \neq 0$). Alrededor de $u_0 = 0.6$ ocurre una transición de fase de modo que para $u_0 > 0.6$ la magnetización promedio del estado QSS es cercana a cero, correspondiente a estados homogéneos ($M = 0$).

Por otro lado, la figura 4.1.3 muestra a modo de ejemplo el espacio de fase con $M_0 = 0.8$ para $u_0 = 0.500$ (figura 4.1.3a) y $u_0 = 1.500$ (figura 4.1.3b).

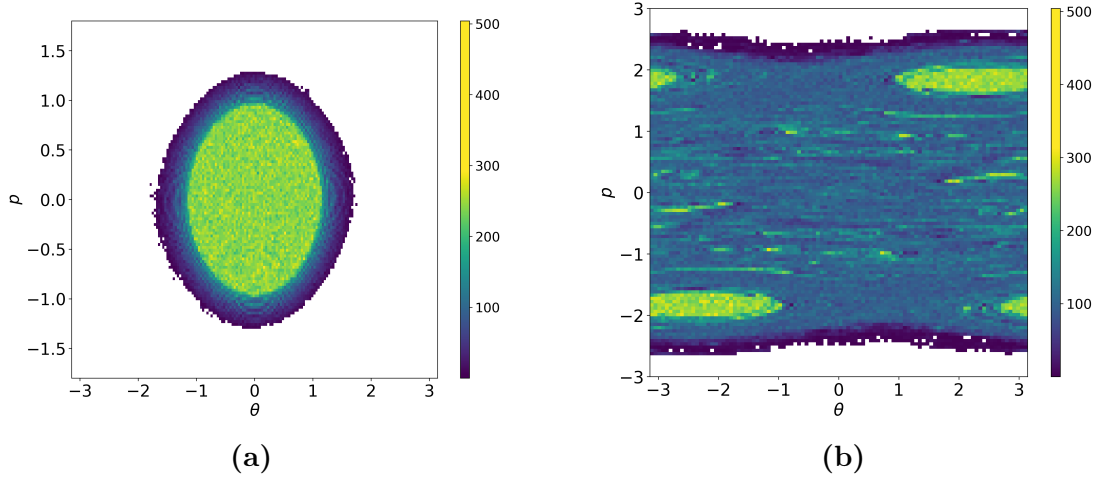


Figura 4.1.3: Espacio de fase de la probabilidad de las posiciones y velocidades finales de los espines. Para $M_u = 0.8$, con $u_0 = 0.500$ (a) y $u_0 = 1.500$ (b). La barra de color aumenta a medida que aumenta la probabilidad de encontrar los espines a posiciones y velocidades dadas. Elaboración: reproducido de [Rivera \[2022\]](#).

La figura 4.1.3 muestra el espacio de fase para las condiciones iniciales de la figura 4.1.1. Así, cuando $M \neq 0$ (como en la figura 4.1.1a) el espacio de fase muestra una única estructura tipo clúster (figura 4.1.3a), donde la probabilidad de encontrar las partículas o espines a ciertas posiciones y velocidades es limitada para $-2 < \theta < 2$ y para $-1.5 < p < 1.5$ aproximadamente. Y cuando $M = 0$ (como en la figura 4.1.1b) el espacio de fase se vuelve homogéneo, con dos estructuras principales tipo clúster y más estructuras similares pero más pequeñas (figura 4.1.3b), con un rango de probabilidad de encontrar los espines en θ y p dados más amplio. Así la figura 4.1.3 muestra cómo se ve la transición de fase de M (figura 4.1.2) desde estados no-homogéneos (un clúster) a homogéneos (2 clúster o más).

En este trabajo sólo nos enfocaremos en estudiar las series temporales de la magnetización M en sus QSS para distintas condiciones iniciales (u_0 y M_0), sin considerar la información que nos entrega el espacio de fase.

4.2. Caracterización del modelo HMF con la entropía de permutación.

En esta sección, se presenta la caracterización de los estados cuasi-estacionarios del modelo HMF mediante el estudio de las series temporales de la magnetización

con la entropía de permutación.

Las figuras 4.2.1 y 4.2.2 muestran el cálculo de la entropía de permutación H para las series temporales de la magnetización M y las series temporales las fluctuaciones de la magnetización δM respectivamente, para todas las condiciones iniciales M_0 y u_0 estudiadas en este trabajo.

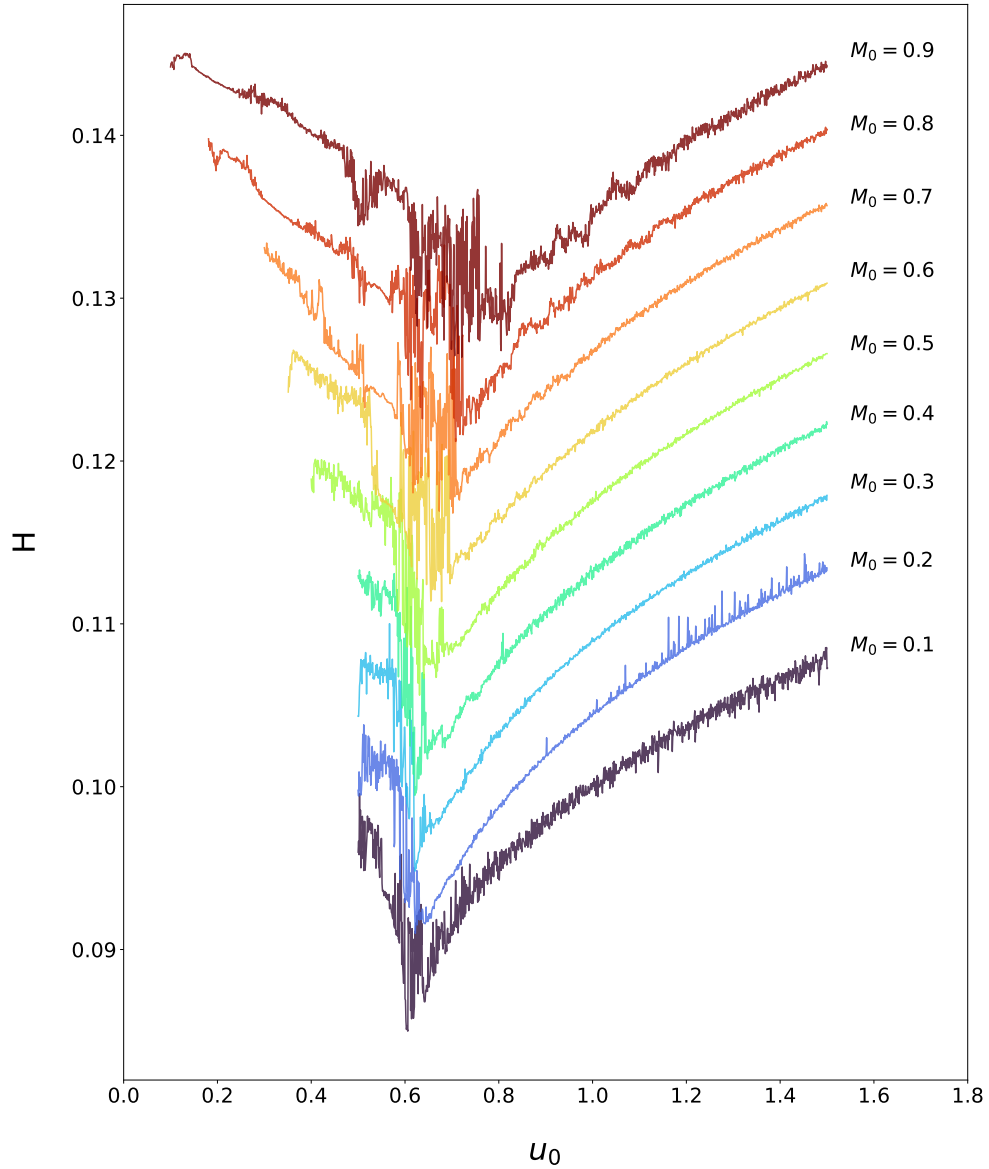


Figura 4.2.1: Entropía de permutación H de la magnetización M , en función de la energía inicial u_0 para distintos valores de magnetizaciones iniciales M_0 . Se añade un *shift* = 0.005 vertical a cada curva de la entropía. Elaboración: propia.

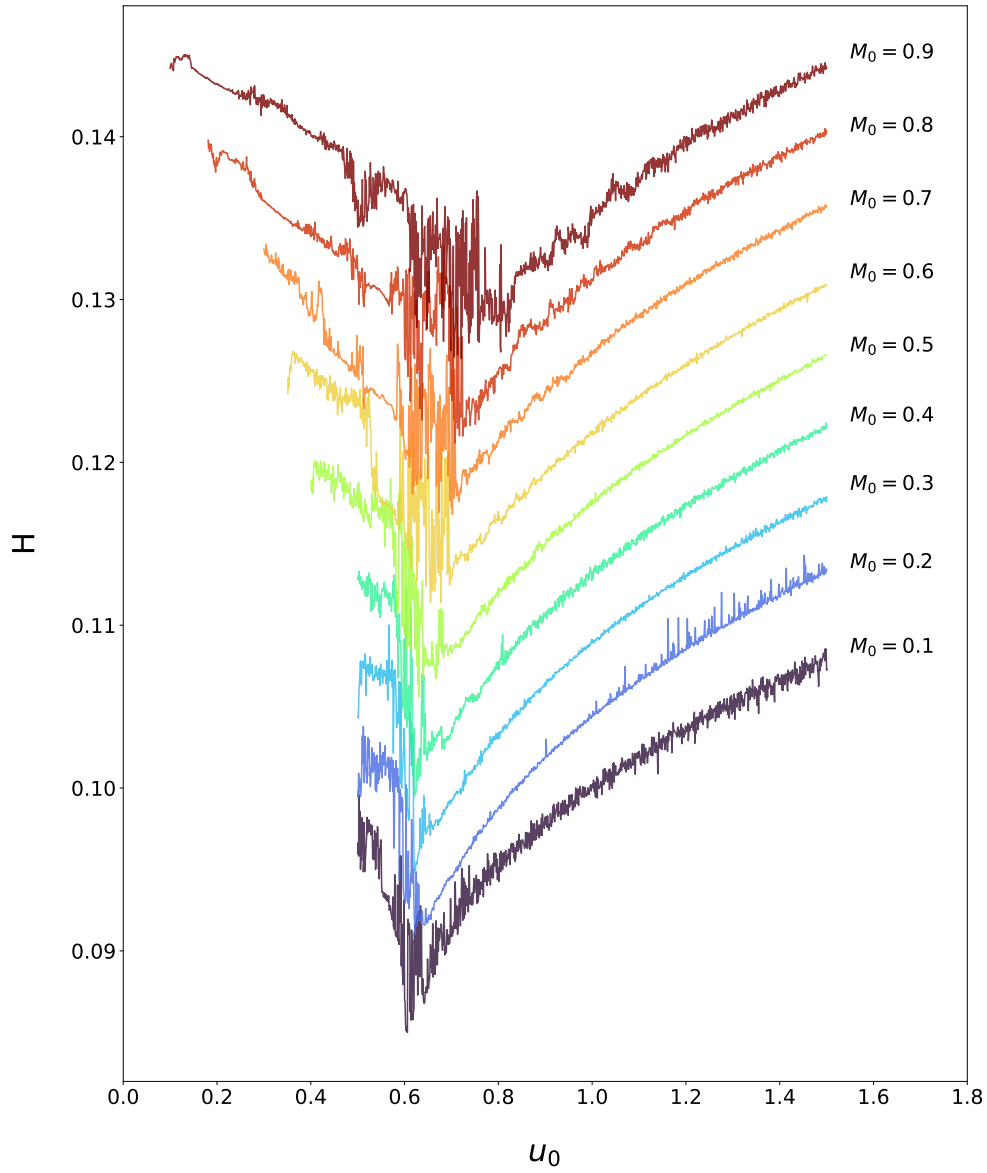


Figura 4.2.2: Entropía de permutación H de las fluctuaciones de la magnetización δM , en función de la energía inicial u_0 para distintos valores de magnetizaciones iniciales M_0 . Se añade un *shift* = 0.005 vertical a cada curva de la entropía. Elaboración: propia.

La entropía de permutación H trazada en las figuras 4.2.1 y 4.2.2 para las magnetizaciones M y las fluctuaciones de la magnetización δM respectivamente, se calcula en ambos casos para todas las M_0 estudiadas (curvas de colores) y sus respectivos rangos de u_0 (eje horizontal). Las curvas de colores corresponden a una M_0 fija. Cada curva graficada tiene un *shift* que la desplaza verticalmente para poder ver claramente su tendencia.

Podemos notar que los valores de la entropía de permutación H para M 4.2.1 y δM 4.2.2 es el mismo en ambos casos para todas las condiciones iniciales M_0 y u_0 utilizadas. Se observa que para todas las líneas o curvas de colores en las figuras 4.2.1 y 4.2.2 la entropía de permutación disminuye casi monótonamente salvo fluctuaciones para energías bajas hasta $u_0 \sim 0.600$ aproximadamente. Para energías mayores, la entropía de permutación crece casi monótonamente. Además, en ambas figuras, a medida que aumenta el valor de M_0 aumentan las fluctuaciones de la entropía cerca de las energías $u_0 = [0.600 - 0.800]$ aproximadamente.

Como el estudio de la entropía de permutación H para M y δM no mostró diferencias mayores en el valor de la entropía se infiere que toda la información del estado QSS contenida en las fluctuaciones de M y no en el valor promedio de M es suficiente para estudiar el sistema mediante esta entropía. Así, analizaremos el sistema a partir de las series temporales de δM .

De este modo, para todas las M_0 cuando H disminuye para energías bajas hasta $u_0 \sim 0.600$ nos señala que las series temporales de δM presentan una tendencia al orden. Esto coincide con el comportamiento de M , ya que las series temporales para las energías $u_0 < 0.600$ tienden a ser como la serie de la figura 4.1.1a con $u_0 = 0.500$, la cual revela que los valores de las fluctuaciones de M disminuyen a medida que aumenta el tiempo t , mostrando una tendencia hacia un valor de M . En cambio cuando H aumenta para energías mayores $u_0 > 0.6$ nos señala que las series temporales de δM presentan una tendencia al desorden. Esta descripción también coincide con el comportamiento de M , pues las series temporales para $u_0 > 0.6$ tienden a ser como la serie de la figura 4.1.1b con $u_0 = 1.500$, la cual nos muestra que los valores de las fluctuaciones de M se mantienen constantes en el tiempo, mostrando una tendencia a varios valores de M .

Además, para todas las M_0 en el rango $u_0 = [0.600 - 0.800]$ aproximadamente, la entropía de permutación tiene más fluctuaciones en sus valores. Esto nos sugiere

que la tendencia hacia el orden o hacia al desorden de las series temporales de δM en ese rango de energías no es claro. Esta descripción es coherente con el hecho de que en ese rango de u_0 la magnetización presenta una transición de fase, lo que provoca mayores fluctuaciones en los valores de M .

En resumen, H describe las series temporales de δM a lo largo de las u_0 para cada M_0 como ordenadas o desordenadas según la tendencia de los valores de M . Cuando la entropía disminuye, las series temporales tienden a mostrar menos valores de M por lo que las series serán ordenadas y cuando la entropía de permutación aumenta, las series temporales tienden a mostrar más valores de M , por lo que las series serán desordenadas. Si no hay una tendencia en los valores de M a lo largo de las u_0 , la entropía de permutación no tiende hacia el orden ni al desorden, sino a una combinación de ambos.

Se añaden dos gráficas comparativas de la entropía de permutación H 4.2.3a y la complejidad estadística C 4.2.3b

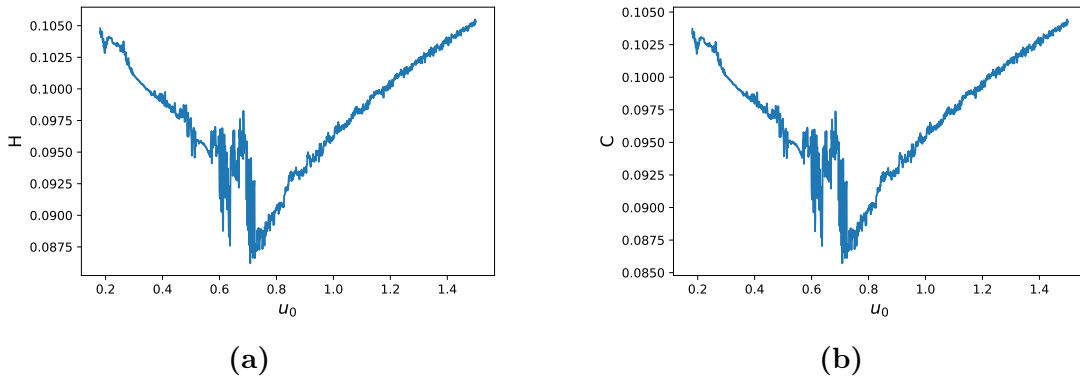


Figura 4.2.3: Entropía de permutación H (a) y complejidad estadística C (b) en función de las energías iniciales u_0 , para $M_0 = 0.8$. Elaboración: propia.

Las figuras 4.2.3a y 4.2.3b muestran el comportamiento del cálculo de H y C a los valores de las series temporales de δM a lo largo de las u_0 , para una $M_0 = 0.8$. Notamos que el comportamiento de H y C en ambas gráficas es similar, con una leve diferencia en sus valores, siendo H mayor que C a lo largo de todas las u_0 . Además, H y C disminuyen sus valores monótonamente salvo fluctuaciones hasta $u_0 = 0.600$ y H y C aumentan sus valores a mayores energías $u_0 > 0.600$. C presenta mayores fluctuaciones en sus valores cerca de $u_0 = [0.600 - 0.800]$ de la misma manera que lo hace H .

El comportamiento de C para las series temporales de M se comportó de manera similar para todas las condiciones iniciales M_0 y u_0 estudiadas. Así las curvas de C se ven similar a las de H en la figura 4.2.2.

El comportamiento similar entre H y C para otros valores de M_0 nos indica que la tendencia al orden en las series temporales de δM para $u_0 < 0.6$ descrita por H se relaciona con la disminución de estructuras correlacionadas las cuales son descritas por C . De la misma manera, la tendencia al desorden en las series temporales de δM para $u_0 > 0.6$ descrito por H está relacionado con la tendencia al aumento de las estructuras correlacionadas descrito por C . Para ahondar en esta relación entre la entropía y la complejidad, en la próxima sección presentamos el plano complejidad-entropía.

4.3. Modelo HMF en el plano complejidad-entropía

Presentamos la caracterización del modelo HMF con el plano complejidad-entropía.

Se muestra el plano complejidad-entropía para la magnetización en la figura 4.3.1, para las simulaciones con condiciones iniciales $M_0 = 0.8$ y $u_0 = [0.2 - 1.5]$.

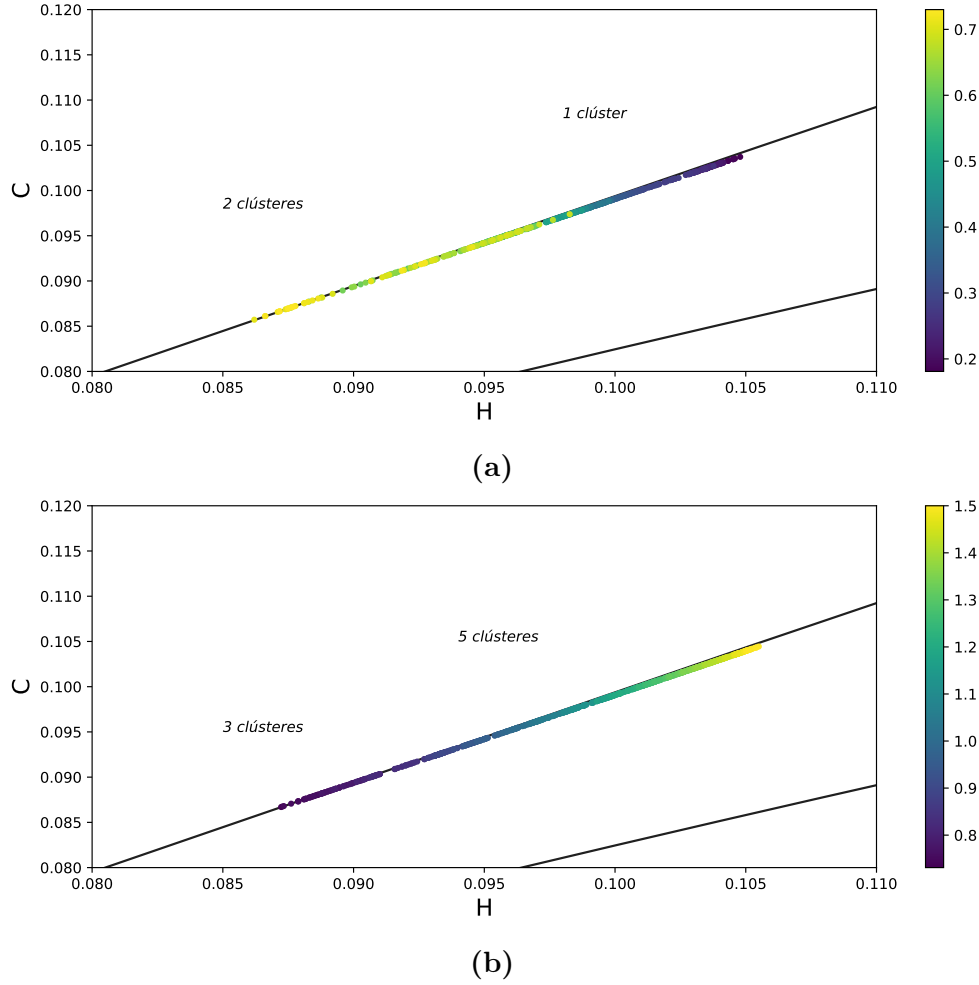


Figura 4.3.1: Representación en el plano complejidad-entropía del modelo HMF a partir del análisis de las fluctuaciones de la magnetización (δM), para el caso $M = 0.8$, en el rango de energías $u_0 = [0.200 - 1.500]$. El eje horizontal corresponde a la entropía de permutación H y el eje vertical a la complejidad estadística C . La barra de color indica el rango de energías. La gráfica inferior corresponde a $u_0 = [0.200 - 0.700]$ y la gráfica superior corresponde a $u_0 = [0.700 - 1.500]$ aproximadamente. Además se añade la ubicación de los múltiples clústeres presentes en el modelo HMF reportados por [Rivera \[2022\]](#) estudiando el espacio de fase. Elaboración: propia.

El plano complejidad-entropía de la figura 4.3.1 está compuesto por dos cantidades, la entropía de permutación ubicada en el eje horizontal y la complejidad estadística ubicada en el eje vertical. Cada punto del plano corresponde a un valor de la entropía y de la complejidad de la serie temporal de las fluctuaciones de la magnetización (δM) para cada una de las simulaciones con $M_0 = 0.8$ y $u_0 = [0.200 - 1.500]$. El valor de u_0 de cada simulación es indicada con los colores de la

barra lateral de las figuras 4.3.1a y 4.3.1b. El plano complejidad-entropía se muestra para dos rangos de energías iniciales diferentes, para mostrar el comportamiento de H y C antes y también durante la transición de fase de M y después de la transición de fase de M . La gráfica 4.3.1a corresponde al plano de complejidad-entropía aproximadamente antes y durante la transición, con un rango de $u_0 = [0.200 - 0.750]$. Y la gráfica 4.3.1b corresponde al plano complejidad-entropía después de la transición, con un rango de $u_0 = [0.750 - 1.500]$. Además se añade la ubicación aproximada de la presencia de estructuras de tipo clústeres en el modelo HMF, reportado en Rivera [2022] estudiando el espacio de fase.

Entonces, vemos que los valores de H y C de δM para todas las simulaciones con $M_0 = 0.8$ y $u_0 = [0.200 - 1.500]$ se sitúan en la zona inferior izquierda del plano, según el plano complejidad-entropía visto en 2.3.1. Además en la figura 4.3.1a en el rango de energías $u_0 = [0.200 - 0.500]$ aproximadamente, al ir aumentando la energías, H y C disminuyen. Luego, en el rango de energías $u_0 = [0.600 - 0.750]$ aproximadamente, al aumentar la energía, la tendencia de H y C no es clara. Y finalmente en el rango de energías $u_0 = [0.750 - 1.500]$, al ir aumentando las energías, H y C aumentan. Finalmente, notar que para todas las simulaciones el valor de C se ubica en la curva de máxima complejidad.

Como H y C muestran distintos valores a lo largo de las simulaciones. Podemos dividir la descripción del modelo HMF a partir de las fluctuaciones de la magnetización en el plano complejidad-entropía en tres etapas:

1. Para el rango $u_0 = [0.200 - 0.500]$. H y C disminuyen en el plano al aumentar las energías iniciales. Lo que significa que las series temporales de δM tienden gradualmente a ser ordenadas y a presentar menos estructuras correlacionadas a medida que aumentan las energías. Es decir, tienden a ser como la serie de la figura 4.1.1a. Esta figura se simula a partir de una energía $u_0 = 0.500$. En este caso, la serie de valores de M es un ejemplo de una serie temporal ordenada, pues al disminuir sus fluctuaciones existe una menor variabilidad y mayor predictibilidad en los valores de la magnetización. Además que las fluctuaciones disminuyan muestra que la relación entre los valores de δM es débil, así hay menos tendencias o estructuras correlacionadas en la serie temporal.

La disminución de H y C en este rango de energías iniciales es coherente

con lo reportado por Rivera [2022] estudiando el modelo HMF mediante su espacio de fase pues los espines en esa zona se distribuyen mostrando una sola estructura de tipo clúster, donde las partículas se concentran en una región acotada del espacio de fase, como se ve en la figura 4.1.3a.

2. Para el rango $u_0 = [0.600 - 0.700]$. Los valores de H y C fluctúan y no tienen una tendencia clara al ir aumentando las energías iniciales. H indica que no hay tendencia al orden o desorden en las series temporales de δM y C muestra que pueden haber tanto menos como más estructuras correlacionadas en δM . Esto se condice con que en este rango de energías M presenta una transición de fase. Es decir, los valores de la serie temporal de M alternan entre comportarse como la serie temporal de la figura 4.1.1a o como la serie temporal de la figura 4.1.1b.

En Rivera [2022] se muestra que el espacio de fase muestra una transición de un espacio de fase no homogéneo (figura 4.1.3a) a uno homogéneo (figura 4.1.3b) alternándose entre ambos espacios durante la transición.

3. Finalmente, para el rango $u_0 = [0.800 - 1.500]$. H y C aumentan en el plano al aumentar las energías iniciales. Lo que significa que las series temporales de δM tienden gradualmente a ser desordenadas y a presentar una mayor cantidad de estructuras correlacionadas a medida que aumentan las energías. Es decir, tienden a ser como la serie de la figura 4.1.1b, la que se simula para $u_0 = 1.500$. Esta serie muestra que las fluctuaciones de M son más grandes y estables (permanecen del mismo tamaño) en el tiempo comparadas con las de la serie de la figura 4.1.1a, esto indica que existe una mayor cantidad de valores de M lo que se relaciona con el desorden predicho por la entropía y que las fluctuaciones afectan en mayor medida los valores de M en el tiempo por lo que existe una fuerte relación entre ellos, esto se ve en las tendencias o estructuras para los valores de M .

El aumento de H y C en este rango de energías es coherente con lo reportado por Rivera [2022] en el espacio de fase, el cual muestra la aparición de varias estructuras tipo clústeres como se ve en la figura 4.1.3b.

Cabe mencionar que como los valores de complejidad C se mantuvieron en la curva máxima de complejidad para todo el rango de energías iniciales $u_0 = [0.200 - 1.500]$ con $M_0 = 0.8$. Esto indica que el plano complejidad-entropía muestra que existen

indudablemente estructuras en los valores de la serie temporal de M .

Por último, la zona inferior izquierda del plano, donde se ubican los valores de H y C para las series temporales de M , corresponde a la zona del plano donde se ubican los modelos caóticos deterministas de tipo intermitentes. Ver figura 2.3.1. El modelo HMF podría adquirir esta definición pues en Rivera [2022] muestran que las estructuras de tipo clúster en el espacio de fase permanecen por un tiempo, hasta que aparece otro clúster. Como vimos en el plano 4.3.1b la aparición de estructuras ocurre a medida que C aumenta. De hecho los modelos completamente caóticos tienen valores altos de C , así, si consideramos la aparición de clústeres nuevos como períodos donde el sistema se está volviendo caótico, la dinámica del modelo HMF coincidiría con la dinámica de los sistemas intermitentes.

Para sustentar los resultados presentados del plano complejidad-entropía (figura 4.3.1), añadimos la gráfica del desequilibrio de Jensen-Shannon $Q[P, P_e]$ en función de las energías iniciales, figura 4.3.2

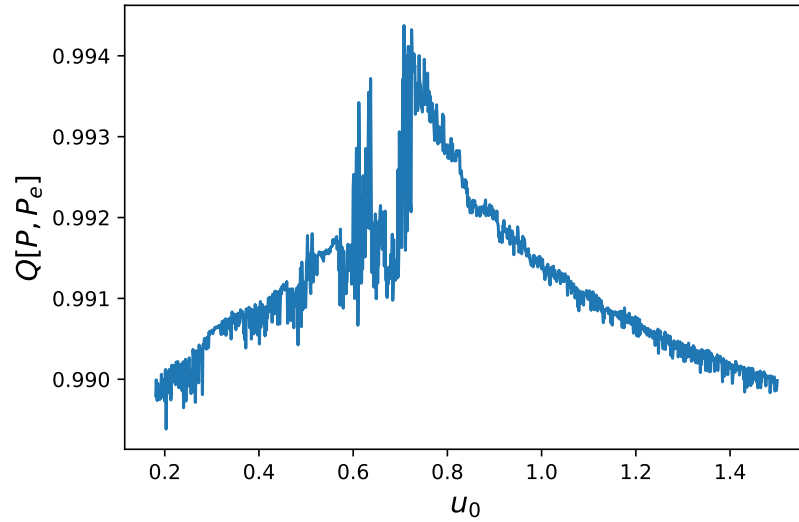


Figura 4.3.2: Desequilibrio de Jensen-Shannon $Q[P, P_e]$ en función de las energías iniciales u_0 . Para $M_0 = 0.8$. Elaboración: propia.

La figura 4.3.2 nos muestra el comportamiento del desequilibrio de Jensen-Shannon $Q[P, P_e]$ a medida que aumentan las energías iniciales u_0 . La línea azul muestra que en el rango $u_0 = [0.200 - 0.500]$ los valores de Q tienden a aumentar monótonamente desde 0.990 a 0.9915 aproximadamente. Luego, en $u_0 = [0.500 - 0.700]$, Q también tiende a aumentar desde 0.9915 hasta 0.994 pero no lo hace monótonamente a lo largo de las energías, se ven más fluctuaciones en sus valores. Notar que en este

rango de energías, Q alcanza su valor máximo. Finalmente en $u_0 = [0.700 - 1.500]$ los valores de Q tienden a disminuir monótonamente desde 0.994 hasta 0.990 aproximadamente.

Recordemos que el desequilibrio de Jensen-Shannon $Q[P, P_e]$ indica una distancia en el espacio de probabilidades, desde una distribución de probabilidad P cualquiera a la distribución uniforme P_e , según la ecuación 2.3.11.

Así, que si Q aumenta en $u_0 = [0.200 - 0.500]$ significa que la distancia entre la distribución de probabilidad formada por los patrones de permutación de las serie temporales de δM y la distribución uniforme aumenta. Esto apoya la caracterización de tendencia hacia al orden de H y la disminución de la presencia de estructuras de C pues algunas series temporales de δM tienden a presentar patrones más probables en sus valores que otras series. Luego en $u_0 = [0.500 - 0.700]$, H y C fluctúan entre el orden y el desorden y entre menos o más cantidad de estructuras correlacionadas. Q se condice con la descripción del plano nuevamente pues muestra que existe la tendencia a observar series temporales con patrones de valores de δM con mayores probabilidad que otros y también existe la tendencia a observar series donde todos los patrones de valores de δM tienen la misma probabilidad. Finalmente, para $u_0 = [0.700 - 1.500]$ también Q se corresponde con la tendencia al desorden descrito por H y el aumento de estructuras correlacionadas descrito por C en el plano complejidad-entropía. Pues si Q disminuye significa que la distancia entre la distribución de probabilidad formada por los patrones de permutación de las serie temporales de δM y la distribución uniforme disminuye. Por lo que las series temporales tienden a mostrar una misma probabilidad para todos los patrones en los valores de δM .

La caracterización con el plano complejidad-entropía y el comportamiento del desequilibrio de Jensen-Shannon fue descrita para $M_0 = 0.8$ en su rango de energía inicial u_0 respectivo. Pero el plano y Q fueron analizados para las demás magnetizaciones y energías iniciales estudiadas en este trabajo. Las cuales mostraron resultados y análisis similares.

4.4. Transición de fase

En esta última sección del análisis del modelo HMF mediante la magnetización M , agregamos la discusión de si la medida entropía de permutación es capaz de

entregarnos información respecto a la zona de la transición de fase.

En la figura 4.4.1 mostramos el comportamiento de los valores mínimos de H_{min} de la entropía H para los valores de M_0 usados en la figura 4.2.1. Usamos H_{min} pues corresponde a un punto límite entre el orden y el desorden del sistema que puede darnos información sobre la transición de fase.

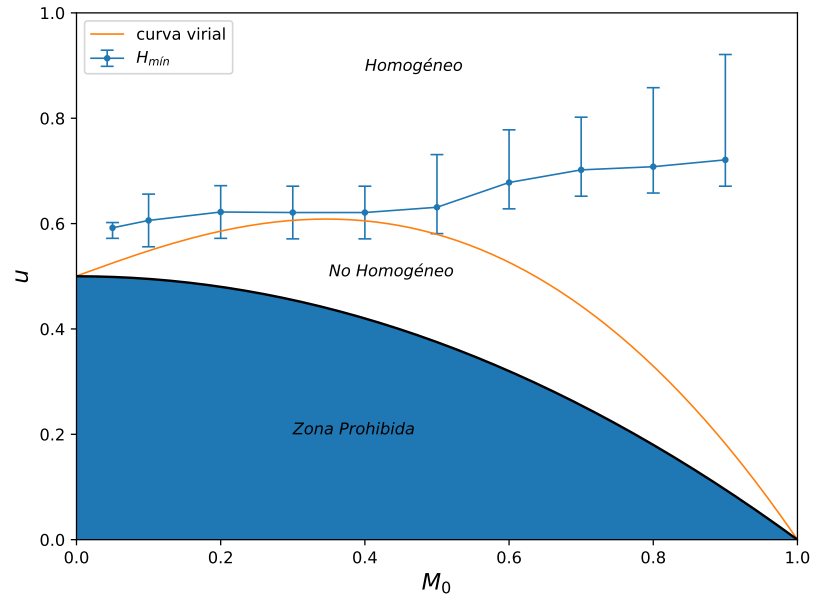


Figura 4.4.1: Comportamiento de los valores mínimos de la entropía de permutación H a lo largo de las magnetizaciones iniciales M_0 (puntos azules unidos por una curva). La curva naranja indica la curva virial del sistema. La zona azul muestra la zona de las condiciones iniciales prohibidas para el modelo HMF. Mostramos en que zonas están los QSS homogéneos y no homogéneos. Elaboración: propia y reproducida de Benetti et al. [2012].

La figura 4.4.1 compuesta por las magnetizaciones iniciales estudiadas M_0 (eje horizontal) y la energía u (eje vertical) nos muestra el comportamiento de una curva azul con barras error, la cual corresponde a valores mínimos de la entropía H_{min} , una curva naranja la cual corresponde a la curva virial y una zona azul llamada zona prohibida. Los puntos se unen para formar una curva y ver la tendencia. Las barras de error consideran las significativas fluctuaciones de la entropía alrededor de su valor mínimo (ver figura 4.2.2). La curva virial, definida por $1/2(1 - ((\sin(\theta_0) \cos(\theta_0))\theta_0))$, se crea a partir de valores específicos de las condiciones iniciales de los QSS no homogéneos, esta curva predice la magnetización que tendrá el sistema en esos QSS Benetti et al. [2012]. La zona prohibida corresponde

a los valores de M_0 y u_0 no permitidos o que resultan en valores de $\langle p^2 \rangle < 0$ en la ecuación 2.1.6 para el modelo HMF cuando se inicializa con una distribución de partículas de tipo *water-bag*. Y por último las zonas donde están ubicadas los textos “homogéneo” y “no homogéneo” se ubican en las condiciones iniciales de los distintos QSS, por encima o por debajo de la curva azul respectivamente. Cabe mencionar que los QSS no homogéneos se encuentran debajo de la curva de H_{min} , por lo que esta curva corresponde a una estimación de la transición de fase entre estados homogéneos y no homogéneos. La curva virial se encuentra dentro de los valores de u_0 y M_0 que resultan en estados no homogéneos.

Vemos que la curva azul compuesta por los valores mínimos de la entropía de permutación H_{min} para cada M_0 coincide con la línea que indica las energías donde ocurren las transiciones de fase de la magnetización para cada M_0 , presentada en el trabajo de Benetti et al. [2012] estudiando la magnetización del modelo HMF mediante simulaciones de dinámica molecular. Además, entre la curva azul y la curva virial también existe una diferencia similar a la reportada en Benetti et al. [2012] a partir de una $M_0 = 0.3$ aproximadamente. Las similitudes nos muestran que la entropía de permutación es capaz de detectar los valores de u para los que ocurre la transición de fase.

Continuamos el estudio respecto a la zona de la transición de fase, intentando encontrar la curva de las u en la zona de la transición de fase analíticamente. Para eso realizamos un ajuste a la curva de la entropía de permutación, para $M_0 = 0.8$, como se ve en la figura 4.4.2

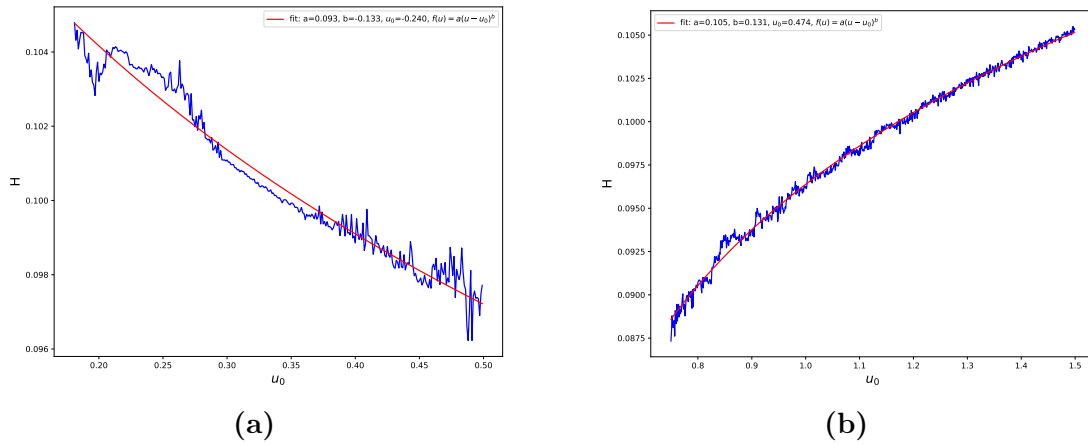


Figura 4.4.2: Ajuste (curva roja) con una función de potencia a la entropía de permutación H (curva azul). El ajuste se hace para H antes (a) y después (b) de la zona de transición de fase de M . Elaboración: propia.

Las figuras 4.4.2a y 4.4.2b muestran las curvas de la entropía de permutación para u_0 previas y posterior a la zona de transición de fase de M respectivamente. Las curvas rojas en ambas figuras corresponden a un ajuste con una función de potencia. La función es $f(u) = a(u - u_0)^b$, donde u_0 corresponde a la energía inicial, b determina como cambia la pendiente a lo largo de la curva y a es un factor de proporcionalidad. El ajuste con la función de potencia se realizó para todas las condiciones iniciales M_0 y u_0 estudiadas en este trabajo, presentando todas un ajuste con una función de potencia.

Que la figura 4.4.2 nos muestre que la entropía de permutación de M se ajuste correctamente a una función de potencia antes y después de la transición de fase de M , para $M_0 = 0.8$, tiene sentido pues las transiciones de fase están relacionadas con funciones de tipo potencia en su parámetro de orden, en nuestro caso M .

Hacemos un análisis de los valores de x_0 y b para la función ajustada a la entropía de permutación posterior a la transición de fase de M , para todas las condiciones iniciales estudiadas en la figura 4.4.3

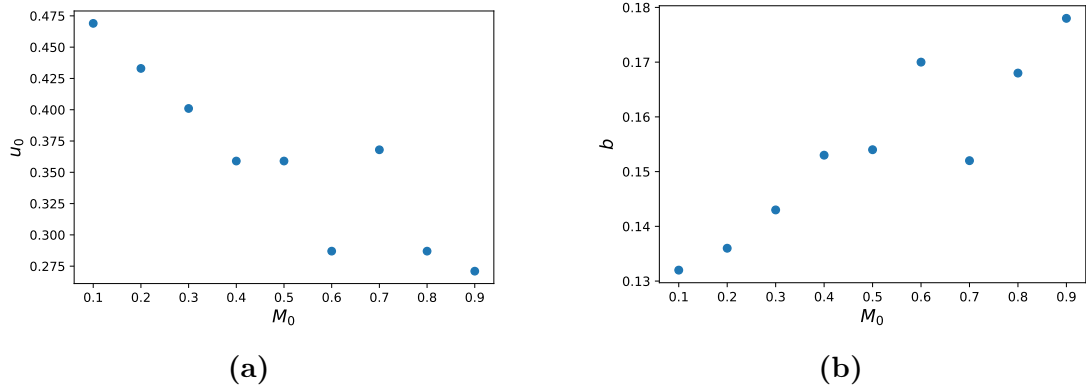


Figura 4.4.3: Análisis de los valores u_0 (a) y b (b) para la función ajustada a los valores de la entropía de permutación posterior a la transición de fase de M , para todas las condiciones iniciales M_0 y u_0 estudiadas. Elaboración: propia.

La figura 4.4.3a muestra el comportamiento de u_0 de la función de ajuste $f(u)$ para todas las M_0 estudiadas. Y la 4.4.3b muestra el comportamiento del exponente b en la función de ajuste $f(u)$ para todas las M_0 estudiadas.

En 4.4.3a vemos que los valores de u_0 y su comportamiento decreciente a medida que aumentan las M_0 no coinciden con los valores de u_0 y su comportamiento creciente en la figura 4.4.1. Osea, $f(u)$ no está logrando ubicar correctamente los

valores de u_0 donde ocurre la transición de fase a lo largo de las M_0 . Creemos que esto puede ser debido a la falta de valores de M antes de la transición, lo que nos lleva a un problema al intentar realizar el ajuste de $f(u)$ en esa zona. Por otro lado, los valores crecientes del parámetro b en la figura 4.4.3b coinciden con el hecho de que las pendientes de H posterior a la transición de M aumentan a medida que aumentamos las M_0 . Estos resultados nos indican que los valores de H ajustados no fueron suficientes para obtener analíticamente la zona de la transición de fase.

Capítulo 5

Conclusión

El modelo hamiltoniano de campo medio (HMF por sus siglas en inglés) es un modelo simple para describir los sistemas con interacciones de largo alcance. Este modelo presenta estados cuasi-estacionarios (o QSS) homogéneos o no homogéneos usualmente caracterizados por el promedio de la magnetización durante la etapa cuasi-estacionaria. Existe una transición de fase entre estos estados y han sido estudiadas previamente en la literatura mediante el análisis de las distribuciones de posiciones y velocidades de las partículas del modelo. Nuestro objetivo era estudiar la principal transición de fase presente en los QSS sólo mediante el parámetro de orden, definido como la magnetización, pues nos interesaba saber cuanta información podía estar contenida en este parámetro. Debido a que notamos que el modelo HMF tiene características similares a las estudiadas en sistemas complejos, estudiamos al modelo mediante medidas de información usadas en esos sistemas, la entropía de permutación y el plano complejidad-entropía.

Estudiando la magnetización en los QSS del modelo mostramos que el cálculo de la entropía de permutación en las series temporales de la magnetización era muy similar al cálculo de la entropía hecho en las series temporales de las fluctuaciones de la magnetización. Esto se cumplía para todas las condiciones iniciales estudiadas en este trabajo. Así, toda la información del estado QSS contenida en las fluctuaciones de la magnetización y no en su valor promedio fue suficiente para estudiar el sistema mediante la entropía de permutación.

La entropía de permutación y el plano complejidad-entropía mostraron que las series temporales de las fluctuaciones de la magnetización tienden al orden y a una

menor cantidad de estructuras para energías iniciales $u_0 < 0.6$. Y para energías mayores, las series temporales de las fluctuaciones de la magnetización tienden al desorden y a una mayor cantidad de estructuras. Estas descripciones coincidieron con el comportamiento de las fluctuaciones y la tendencia de la magnetización en sus series temporales. Además el plano complejidad-entropía muestra al modelo HMF en la zona inferior izquierda del plano, donde se ubican los sistemas caóticos deterministas intermitentes, lo que coincide con descripciones anteriores en la literatura del modelo.

La entropía de permutación nos permitió caracterizar los QSS del modelo HMF sólo mediante el análisis de las series temporales de su parámetro de orden o magnetización. Esta medida es una herramienta poderosa, por lo cual sería interesante continuar el estudio y en un futuro caracterizar al modelo HMF en su equilibrio termodinámico.

Bibliografía

- Y. Levin, R. Pakter, F. B. Rizzato, T. N. Teles, and F. P. C. Benneti. Nonequilibrium statistical mechanics of systems with long-range interactions. *Physical Reports*, 535:1–60, 2014.
- F. Baldovin, E. Brigatti, and C. Tsallis. Quasi-stationary states in low-dimensional hamiltonian systems. *Physics Letters A*, 320:254–260, 2004.
- Y. Y. Yamaguchi and et al. Stability criteria of the vlasov equation and quasi-stationary states of the HMF model. *Physica (Amsterdam)*, 337:36–66, 2004.
- D. Lynden-Bell. Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 136:101–121, 1967.
- T. Padmanabhan. Statistical mechanics of gravitating systems. *Physics Reports*, 188(5):285–362, 1990.
- T. N. Teles, Y. Levin, R. Pakter, and F. B. Rizzato. Statistical mechanics of unbound two-dimensional self-gravitating systems. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 05, 2010.
- Y. Levin, R. Pakter, and T. N. Teles. Collisionless relaxation in non-neutral plasmas. *Physical Review Letters*, 100(5):285–362, 2008.
- I. D. Kaganovich, R. C. Davidson, M. A. Dorf, E. A. Startsev, and A. B. Sefkow. Physics of neutralization of intense high-energy ion beam pulses by electrons. *Physics of Plasmas*, 17(056703), 2010.
- L. C. Sampaio, R. Hyndman, F. S. de Menezes, J. P. Jamet, P. Meyer, J. Gierak, C. Chappert, V. Mathet, and J. Ferré. Power-law relaxation decay in two-dimensional arrays of magnetic dots interacting by long-range dipole-dipole interactions. *Physical Review B*, 64(184440), 2001.
- D. O’Dell, S. Giovanazzi, G. Kurizki, and V. M. Akulin. Bose-einstein condensates with $1/r$ interatomic attraction: Electromagnetically induced “gravity”. *Physical Review Letters*, 84(5687), 2000.
- T. Dauxois, V. Latora, A. Rapisarda, S. Ruffo, and A. Torcini. The hamiltonian mean field model: from dynamics to statistical mechanics and back. *Springer*, 2000a.
- W. Thirring. Systems with negative specific heat. *Z. Physik*, 235:339–352, 1970.

- A. Campa, T. Dauxois, and S. Ruffo. Statistical mechanics and dynamics of solvable models with long-range interactions. *Physics Reports*, 480:57–159, 2009.
- M. Y. Choi and J. Choi. Stability and ensemble inequivalence in a globally coupled system. *Physical Review E*, 91(12), 2003.
- P. Pluchino, A. Rapisarda, and C. Tsallis. Nonergodicity and central-limit behavior for longrange hamiltonians. *Europhysics Letters*, 80(26002), 2007.
- F. P. da C. Benetti, T. N. Teles, R. Pakter, and Y. Levin. Ergodicity breaking and parametric resonances in systems with long-range interactions. *Physical Review Letters*, 108:140601, 2012.
- F. Baldovin. On time and ensemble averages in quasistationary state of low-dimensional hamiltonian. *Physica A*, 342:119–125, 2004.
- A. Campa. Long-time behavior of quasistationary states of the hamiltonian mean-field model. *Physical Review E*, 76(041117), 2007.
- T. M. Rocha Filho, M. A. Amato, and A. Figueiredo. Nonequilibrium phase transitions and violent relaxation in the hamiltonian mean-field model. *Physical Review*, E85:062103, 2012.
- P. de Buyl, D. Fanelli, and S. Ruffo. Phase transitions of quasistationary states in the hamiltonian mean field model. *Central European Journal of Physics*, 10(3): 652–659, 2012.
- A. Pluchino, V. Latora, and A. Rapisarda. Dynamical anomalies and the role of initial conditions in the HMF model. *Physica A*, 338:60–67, 2004a.
- A. Pluchino, V. Latora, and A. Rapisarda. Metastable states, anomalous distributions and correlations in the HMF model. *Physica D*, 193:315–328, 2004b.
- D. Rivera. *Clasificación y Formación de Múltiples Clústeres Contra-propagantes en el Modelo Hamiltoniano de Campo Medio Atractivo*. 2022.
- V. Latora. Superdiffusion and out-of-equilibrium chaotic dynamics with many degrees of freedoms. *Physical Review Letters*, 83(11), 1999.
- Y. Y. Yamaguchi. Relaxation and diffusion in a globally coupled hamiltonian system. *Physical Review E*, 68(066210), 2003.
- R. Bachelard, C. Chandre, D. Fanelli, X. Leoncini, and S. Ruffo. Abundance of regular orbits and nonequilibrium phase transitions in the thermodynamic limit for long-range systems. *Physical Review Letters*, 101:260603, 2008.
- F. Ginelli, K. A. Takeuchi, H. Chaté, A. Politi, and A. Torcini. Chaos in the hamiltonian mean-field model. *Physical Review E*, 84(066211), 2011.
- T. Dauxois, P. Holdsworth, and S. Ruffo. Violation of ensemble equivalence in

- the antiferromagnetic mean-field xy model. *The European Physical Journal B*, 16:659–667, 2000b.
- J. Barré, F. Bouchet, T. Dauxois, and S. Ruffo. Out-of-equilibrium states as statistical equilibria of an effective dynamics in a system with long-range interactions. *Physical Review Letters*, 89(11), 2002.
- Y. Pakter, R. y Levin. Core-halo distribution in the hamiltonian mean-field model. *Physical Review Letters*, 106:200603, 2011.
- K. Jain, F. Bouchet, and D. Mukamel. Relaxation times of unstable states in systems with long range interactions. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 11, 2007.
- F. Staniscia, P. H. Chavanis, G. De Ninno, and D. Fanelli. Out-of-equilibrium phase re-entrance(s) in long-range interacting systems. *Physical Review E*, 80:021138, 2009.
- J. P. Crutchfield. The calculi of emergence: computation, dynamics and induction. *Physica D*, 75:11–54, 1994.
- R. López-Ruiz, H. L. Mancini, and X. Calbet. A statistical measure of complexity. *Physics Letters A*, 209:321–326, 1995.
- S. Lloyd. Complexity as thermodynamic depth. *Annals of Physics*, 188:186–213, 1988.
- M. Gell-Mann and S. Lloyd. Information measures, effective complexity, and total information. *Complexity*, 2(1):44–52, 1996.
- C. H. Bennett. The thermodynamics of computation, a review. *Internacional Journal of Theoretical Physics*, 21(12), 1982.
- A. Lempel and J. Ziv. On the complexity of finite sequences. *IEEE Transactions on Information Theory*, 22(1), 1976.
- P. Grassberger. Toward a quantitative theory of self-generated complexity. *International Journal of Theoretical Physics*, 25(9), 1986.
- T. M Cover, P. Gacs, and R. M. Gray. Kolmogorov’s contributions to information theory and algorithmic complexity. *The Annals of Probability*, 17(3):840–865, 1989.
- J. Ladyman and K. Wiesner. *What Is a Complex System?* Yale University Press, 2020.
- C. E. Shannon and W. Weaver. *The Mathematical Theory of Communication*. The University of Illinois Press, 1964.
- P. W. Lamberti, M. T. Martin, A. Plastino, and O. A. Rosso. Intensive entropic non-triviality measure. *Physica A*, 334:119–131, 2004.

- O. A. Rosso, H. A. Larrondo, M. T. Martin, A. Plastino, and M. A. Fuentes. Distinguishing noise from chaos. *Physical Review Letters*, 99:154102, 2007.
- C. Bandt and B. Pompe. Permutation entropy: A natural complexity measure for time series. *Physical Review Letters*, 88:174102, 2002.
- J. Barré, F. Bouchet, T. Dauxois, S. Ruffo, and Y. Y. Yamaguchi. The vlasov equation and the hamiltonian mean-field model. *Physica A*, 365(177-183), 2006.
- M. Kac, G. E. Uhlenbeck, and P. C. Hemmer. On the van der waals theory of the vapor-liquid equilibrium. i. discussion of a one-dimensional model. *J. Math. Phys.*, 4:216–228, 1963.
- M. Antoni and S. Ruffo. Clustering and relaxation in hamiltonian long-range dynamics. *Review*, E 52:2361, 1995.
- D. H. Zanette. Dynamics and nonequilibrium states in the hamiltonian mean-field model: A closer look. *Physical Review E*, 67(031105), 2003.
- A. Antoniazzi, D. Fanelli, S. Ruffo, and Y. Yamaguchi. Nonequilibrium tricritical point in a system with long-range interactions. *Physical Review Letters*, 99: 040601, 2007a.
- A. Antoniazzi, D. Fanelli, J. Barré, P-H. Chavanis, T. Dauxois, and S. Ruffo. Maximum entropy principle explains quasistationary states in systems with long-range interactions: The example of the hamiltonian mean-field model. *Physical Review E*, 75(011112), 2007b.
- C Tsallis. Possible generalization of boltzmann-gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, 52, 1988.
- C. Tsallis. Dynamical scenario for nonextensive statistical mechanics. *Physica A*, 340:1–10, 2004.
- D. Rivera and R. E. Navarro. Formation of multiple counter-propagating clusters in the attractive hamiltonian mean-field model. *arXiv preprint*, (2212.09608), 2022.
- J. Klafter and G. Zumofen. Lévy statistics in a hamiltonian system. *Physical Review E*, 49(6), 1994.
- S. Gupta and D. Mukamel. Slow relaxation in long-range interacting systems with stochastic dynamics. *Physical Review Letters*, 105(040602), 2010.
- H. Morita and K. Kaneko. Collective oscillation in a hamiltonian system. *Physical Review Letters*, 96(050602), 2006.
- T. M. Rocha Filho, A. Figueiredo, and M. A. Amato. Entropy of classical systems with long-range interactions. *Physical Review Letters*, 95(190601), 2005.
- G. Martelloni, G. Martelloni, Pierre de Buyl, and D. Fanelli. Generalized maximum entropy approach to quasistationary states in long-range systems. *Physical Review E*, 98(022107), 2016.

- V. M Tyutyunnik. Physical modelling of earth's climate: 2021 nobel prize winners in physics syukuro manabe and klaus hasselmann. *Journal of Advanced Materials and Technologies*, 7(1), 2022.
- Seth Lloyd. *Programming the Universe. A quantum computer scientist takes on the Cosmos*. Alfred A. Knopf, 2006.
- Y. Holovatch, R. Kenna, and S. Thurner. Complex systems: physics beyond physics. *European Journal of Physics*, 38(023002), 2017.
- K. Wiesner, A. Birdi, T. Eliassi-Rad, H. Farrell, D. Garcia, S. Lewandowsky, P. Palacios, D. Ross, D. Sornette, and K. Thébault. Stability of democracies: a complex systems perspective. *European Journal of Physics*, 40(014002), 2019.
- John H. Miller and Scott E. Page. *Complex Adaptive Systems. An Introduction to Computational Models of Social life*. Princeton University Press, 2007.
- E. Estrada. What is a complex system, after all? *Springer*, 2023.
- Stefan Thurner, Rudolf Hanel, and Peter Klimek. *Introduction to the Theory of Complex Systems*. Oxford University Press, 2022.
- J. Ladyman, J. Lambert, and K. Wiesner. What is a complex system? *Euro Jnl Phil Sci*, 3:33–67, 2013.
- Edgar Morin. *El metodo. La naturaleza de la naturaleza*. Catedra Teorema, 2001.
- G. Bianconi, Alex. Arenas, J. Biamonte, Lincoln. D Carr, B. Kahng, J. Kertesz, J. Kurths, Linyuan. Lü, C. Masoller, A. E. Motter, M. Perc, F. Radicci, R. Ramaswamy, F. A. Rodrigues, M. Sales-Pardo, M. San Miguel, S. Thurner, and T. Yasserli. Complex systems in the spotlight: next steps after the 2021 nobel prize in physics. *Journal of Physics: Complexity*, 4(010201), 2023.
- Maxi. San Miguel. Frontiers in complex systems. *Frontiers in Complex Systems*, (1), 2023.
- H. J. Jensen. *Complexity Science: The Study of Emergence*. Cambridge University Press, 2022.
- P. W. Anderson. More is different. *Science*, 177(4047), 1972.
- J. H. Holland. Complex adaptative systems. *Daedalus*, 121(1), 1992.
- Y. Cao, W. Tung, J. B. Gao, V. A. Protopopescu, and L. M. Hively. Detecting dynamical changes in time series using the permutation entropy. *Physical Review E*, 70(046217), 2004.
- S. Berger, G. Schneider, E. F. Kochs, and D. Jordan. Permutation entropy: Too complex a measure for eeg time series? *Entropy*, 2017.
- D. Cuesta-Frau, V. Varela-Entrecanales, A. Molina-Picó, and B. Vargas. Patterns with equal values in permutation entropy: Do they really matter for biosignal classification? *Complexity*, 2018.

- A. A. B. Pessa and H. V. Ribeiro. Characterizing stochastic time series with ordinal networks. *Physical Review E*, 2019.
- Z. Chen, Y. Li, H. Liang, and J. Yu. Improved permutation entropy for measuring complexity of time series under noisy condition. *Complexity*, 2019.
- V. A. Unakafova and K. Keller. Efficiently measuring complexity on the basis of real-world data. *Entropy*, 15:4392 – 4415, 2013.
- J. Xia, P. Shang, J. Wang, and W. Shi. Permutation and weighted-permutation entropy analysis for the complexity of non linear time series. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 31:60 – 68, 2016.
- H. Kang, X. Zhang, and G. Zhang. Phase permutation entropy: A complexity measure for nonlinear time series incorporating phase information. *Physica A*, 568(125686), 2021.
- F. Traversaro, F. O. Redelico, and M. R. et al. Risk. Bandt-pompe symbolization dynamics for time series with tied values: A data-driven approach. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 28:075502, 2018.
- A. A. B. Pessa and H. V. Ribeiro. ordpy: A python package for data analysis with permutation entropy and ordinal network methods. *Chaos*, 31:063110, 2021.
- D. Cuesta-Frau, J. P. Murillo-Escobar, D. A. Orrego, and E. Delgado-Trejos. Embedded dimension and time series length. practical influence on permutation entropy and its applications. *Entropy*, 21(4):385, 2019.
- C. Anteneodo and A. R. Plastino. Some features of the lópez-ruiz-mancini-calbet (lmc) statistical measure of complexity. *Physics Letters A*, 223:348 – 354, 1996.
- M. T. Martin, A. Plastino, and Rosso O. A. Generalized statistical complexity measures: Geometrical and analytical properties. *Physica A*, 369:439–462, 2006.
- Heinz. Georg. Schuster and Wolfram Just. *Deterministic Chaos An Introduction*. WILEY-VCH Verlag GmbH Co. KGaA, 1988.
- T. Dauxois, S. Ruffo, E. Arimondo, and M.. Wilkens. Dynamics and thermodynamics of systems with long-range interactions: An introduction. 2002.